BIBLIOTECA CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
0172.5.646
.A48
15/T141

UNIVERSIDAD DE SONORA
CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

DEFINICIONES DE CAOS

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL TÍTULO
DE LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

Cynthia Margarita Alvarez Peña
Ana Laura Valdez Coronel

C45

Hermosillo, Sonora, México. Octubre de 2001

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

DEFINICIONES DE CAOS

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL TÍTULO
DE LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

Cynthia Margarita Alvarez Peña
Ana Laura Valdez Coronel

Hermosillo, Sonora, México. Octubre de 2001

DEDICATORIAS:

Dedico este trabajo a mis padres y hermanos, por el apoyo y la confianza que me han brindado.

Cynthia.

Dedico este trabajo a toda mi familia, especialmente a mi mamá y a mi abuela por haber depositado su confianza en mí.

Ana Laura.

AGRADECIMIENTOS:

Primeramente le damos gracias a **Dios** por haber permitido culminar satisfactoriamente nuestros estudios.

A nuestra asesora **Ma. Teresa Robles Alcaraz**, que tan amable y pacientemente nos guío en la realización de este trabajo.

A nuestros sinodales: **Martín García, Horacio Leyva** y **Arturo Fragozo**, que con sus observaciones y sugerencias se logro hacer una mejor presentación de este trabajo.

A nuestros **amigos** y **compañeros** de escuela, que al hacer un equipo solidario nos animaron a seguir adelante.

También queremos agradecer al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** (CONACyT), por el apoyo otorgado para la edición de este trabajo a través del proyecto 28309-E.

Cynthia y Ana Laura.

Índice General

0.1 **INTRODUCCION.** 2

1 DEFINICIONES Y RESULTADOS BASICOS. **4**

1.1 Notación y definiciones. 4

1.2 Análisis gráfico. 12

1.3 Condiciones de continuidad y diferenciabilidad. 14

1.4 Familias de funciones parametrizadas. 26

2 DEFINICIONES DE CAOS **30**

2.1 Caos en espacios métricos. 30

2.2 Caos en intervalos. 50

2.3 Discontinuidad y caos. 57

2.4 Período tres y caos. 61

3 EL TEOREMA DE SARKOVSKII **71**

3.1 La investigación de Sarkovskii. 71

3.2 El inverso del Teorema de Sarkovskii. 85

4 EJEMPLOS DE FUNCIONES CAOTICAS **94**

4.1 Dos mapeos caóticos 94

4.2 Conjugados topológicos 99

4.3 La función logistica. 103

0.1 INTRODUCCION.

El estudio de los *Sistemas Dinámicos Discretos* ha tenido gran atención durante los últimos 30 años. De hecho, el número de libros y artículos dedicados a este tema ha crecido impresionantemente. Lo anterior se debe a que se les encuentra en muchas las ramas de la ciencia, tales como Química, Física, Biología, Medicina, Ingeniería, etc.

Un sistema dinámico consiste de un conjunto de estados, junto con la "regla" o función que determina el estado presente en términos de los estados pasados. Cuando la regla es la misma en cada tiempo, la evolución del sistema esta dada por las iteraciones de la función f. Es decir, f, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ... En este caso, el objetivo es estudiar el comportamiento asintótico del proceso iterativo $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...\}$, cuando x esta en el conjunto de estados del sistema.

Existen ejemplos donde este proceso iterativo, presenta un comportamiento "irregular". Son estas sucesiones las que se estudiarán para introducir el concepto de "caos".

Matemáticos, Biologos, Químicos, Filosofos, Físicos entre otros, tratan de dar una definición formal del caos. En la literatura de sistemas dinámicos discretos, existen diferentes definiciones de caos. Ciertamente no es deseable tener varias definiciones de un mismo concepto que no sean equivalentes unas con otras, pero el estudio de este "tipo" de comportamientos ha resultado de gran interes en muchas y diversas disciplinas, y resulta difícil encontrar una definición que refleje todas las características de interés de todas las áreas.

El objetivo de este trabajo es presentar algunas de las diferentes definiciones de caos, que con mayor frecuencia se encuentran en la literatura de esta área.

En el Capítulo 1, se presentan los conceptos básicos que se requieren para estudiar los Sistemas Dinámicos Discretos. Además se ven ejemplos que serán de gran ultilidad para comprender con mayor facilidad dichos conceptos. Finalmente se presentan resultados para estudiar la estabilidad de los puntos periódicos.

El Capítulo 2 es la parte central de este trabajo. Se introducirá la definición de caos dada por Devaney. Además se analizarán otras dos definiciones de caos propuestas en años recientes, una por Wiggins y otra por Martelli. También se verá que estas dos definiciones

son practicamente equivalentes. Por último, se observarán resultados impresionantes cuando se trabaja con funciones restringuidas a intervalos. Es aquí donde se presenta la definición de caos de Li-Yorke.

En el Capítulo 3, se verá la definición de un orden de los números naturales que fué introducido por Sarkovskii. Este nuevo orden permite presentar un importante resultado acerca de la existencia de puntos periódicos.

Por último, en el Capítulo 4 se desarrollarán algunos ejemplo de funciones caóticas de acuerdo a la definición de Devaney. En este mismo capítulo se introduce el concepto de conjugado topológico.

Capítulo 1

DEFINICIONES Y RESULTADOS BASICOS.

El objetivo de este capítulo es dar algunos conceptos y resultados básicos, que se ultilizarán en los capítulos siguientes. Para esto, se trabajará con funciones definidas en un espacio métrico. Se pide que el rango de la función sea un subconjunto de su dominio; esto con el fin de definir la composición de la función consigo misma.

1.1 Notación y definiciones.

Sea una función $f : X \to X$, donde X es un espacio métrico. Las iteraciones de $x \in X$ bajo la función f son:

$$f^0(x) = x$$
$$f^1(x) = f(x)$$
$$f^2(x) = (f \circ f)(x)$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n-\text{veces}}(x)$$
$$\vdots$$

$f^n(x)$ denota la n–ésima iteración de x bajo la función f, y la sucesión $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...\}$, describe la evolución del estado x en el tiempo.

A la pareja (X, f) se le llama un sistema dinámico discreto.

DEFINICION 1.1.1 *Sea un espacio métrico X y $f : X \to X$. Se le llama la órbita de $x_0 \in X$ bajo la función f a la sucesión $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots\} = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, misma que se denota por $O(x_0, f)$.*

$O(x_0, f)$ describe las distintas posiciones que visita el punto x_0 con el paso del tiempo, es decir se inicia en el punto x_0 y se tendrá la posición $f^n(x_0)$ después de transcurrir n unidades de tiempo.

Existen ocasiones en las que para algún $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x_0) = x_0$. Es decir, que de luego de $n-1$ unidades de tiempo x_0 regresa a su posición inicial. Si esto sucede, el movimiento descrito en la órbita $O(x_0, f)$ comienza a repetirse, a ser periódico. Las nociones de puntos periódicos y puntos fijos son muy importantes en el estudio de los sistemas dinámicos. Su importancia radica en el hecho de que muchos fenómenos físicos presentan ciertos patrones que se repiten, produciendo así los ciclos.

DEFINICION 1.1.2. *Sea un espacio métrico X y $f : X \to X$. Se dice que $x_0 \in X$:*

(a) Es un punto periódico de f con primer periódo k, si

$$\begin{aligned} f^k(x_0) &= x_0 \qquad y \\ f^n(x_0) &\neq x_0 \quad para \quad n = 1, 2, \cdots, k-1. \end{aligned}$$

(b) Es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

(c) Es un punto eventualmente fijo de f, si existe N tal que

$$f^{n+1}(x_0) = f^n(x_0) \qquad si \quad n > N.$$

(d) Es un punto eventualmente periódico de f con primer periódo k, si existe N tal que

$$f^{n+k}(x_0) = f^n(x_0) \qquad si \qquad n > N.$$

Si $x \in X$, es un punto periódico de f, se dice que la órbita de x, $O(x, f)$ es periódica.

Nótese que los puntos fijos de f son puntos periódicos de primer periódo 1, y los puntos periódicos de f con primer período n, son puntos fijos para la función f^n.

DEFINICION 1.1.3. *Sea un espacio métrico X y $f : X \to X$. Se dice que $x \in X$*

(a) Es un punto asintóticamente fijo si existe un punto fijo $x_0 \in X$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0.$$

(b) Es un punto asistoticamente periódico, si existe un punto periódico p de primer período k, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f^{nk}(x) = p.$$

La definición anterior asegura que x es un punto asintóticamente fijo si la órbita de x converge a un punto fijo. Por otra parte, si x es un punto asintóticamente periódico con primer período k, su órbita tiene k subsucesiones convergentes.

DEFINICION 1.1.4 *Sea un espacio métrico X y $f : X \to X$. Se define el conjunto estable de un punto periódico $p \in X$ con primer período k como*

$$W^s(p) = \{\, x \in X : \lim_{n\to\infty} f^{nk}(x) = p\}.$$

Observación.- En el caso particular de $X = \mathbb{R}$, y si $|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, \cdots$ crece sin cota entonces se dice que x converge asintóticamente a ∞. En este caso, se define al conjunto estable del infinito por:

$$W^s(\infty) = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = \infty\}.$$

PROPOSICION 1.1.5. *Sea un espacio métrico (X, d) y $f : X \to X$. Sean $p, q \in X$ puntos periódicos, con $p \neq q$. Entonces $W^s(p) \cap W^s(q) = \emptyset$.*

DEMOSTRACION.- Supóngase que $W^s(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$. Se demostrará que $p = q$.

Sea $x \in W^s(p) \cap W^s(q)$, entonces existen constantes N_1 y N_2 tales que

$$\begin{aligned} d(f^{nk_p}(x), p) &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n > N_1 \quad \text{y} \\ d(f^{nk_q}(x), q) &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n > N_2. \end{aligned}$$

De aquí que

$$0 \leq d(p,q) \leq d(p, f^{nk_qk_p}(x)) + d(q, f^{nk_pk_q}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si $n > N$ donde $N = \max\{ N_1, N_2 \}$. Así $0 \leq d(p,q) < \varepsilon$, por tanto $p = q$. □

EJEMPLO 1.1.6 Sea $f(x) = |x - 1|$

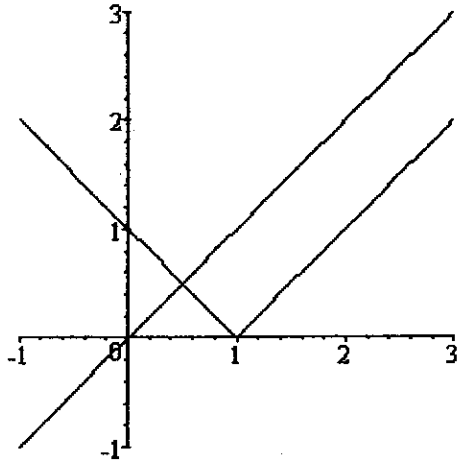


Figura 1.1

Obsérvese que el único punto fijo es $\frac{1}{2}$, y

$$\begin{aligned} O(0, f) &= \{0, 1\} \\ O(1, f) &= \{1, 0\} \end{aligned}$$

así que $0, 1$ son puntos periódicos de período 2.

Si se toma $x = 2$, obsérvese que $O(2, f) = \{2, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$, es decir $f^{n+2}(2) = f^n(2)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por tanto 2 es un punto eventualmente periódico.

Si se toma $x = 4$, se observa que $O(4, f) = \{4, 3, 2, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$, es decir $f^{n+2}(4) = f^n(4)$ para $n \geq 3$, por lo que 4 es un punto eventualmente periódico.

Siguiendo este mismo proceso se llega a que todos los números enteros son eventualmente periódicos, ya que despues de cierto número de iteraciones, caen dentro de la órbita $\{0, 1\}$.

Por otra parte, si se toma la subsucesión $\{x, f^2(x), f^4(x), f^6(x), ...\}$, para los números enteros pares, esta subsucesión converge al punto periódico $x = 0$ y para los números enteros impares converge al punto periódico $x = 1$. Por ejemplo, si $x = 6$ entonces $O(6, f^2) = \{6, 4, 2, 0, 0, 0, ...\} \to 0$ y si $x = 9$ entonces $O(9, f^2) = \{9, 7, 5, 3, 1, 1, 1, ...\} \to 1$. Esto significa que:

$$W^s(0) = \{\text{los números enteros pares}\}$$
$$W^s(1) = \{\text{los números enteros impares}\}$$

Ahora, los puntos de la forma x, $1 - x$ para $0 < x < 1$, también son puntos periódicos de período 2, por ejemplo, si $x = 0.8$, entonces $O(0.8, f) = \{0.8, 0.2, 0.8, 0.2, ...\}$.

Si se toma $x = 4.8$, se tiene $O(4.8, f) = \{4.8, 3.8, 2.8, 1.8, 0.8, 0.2, 0.8, 0.2, ...\}$.

Siguiendo este mismo procedimiento, se llega a que los números que no son enteros también son eventualmente periódicos, pero estos caen dentro de la órbita $\{x, 1 - x\}$ para $0 < x < 1$.

EJEMPLO 1.1.7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^3$.

Se verá cuales son los puntos fijos y puntos periódicos de esta función.

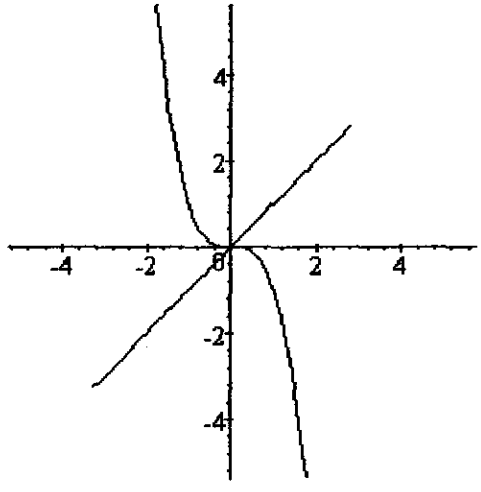


Figura 1.2

Al iterar la función se obtiene

$f(x) = -x^3$

$f^2(x) = x^9$

$f^3(x) = -x^{27}$

$\vdots$

$f^n(x) = (-1)^n x^{3^n}$.

Considere las órbitas

$$O(0, f) = \{0, 0, 0, 0, \cdots\}, \quad O(1, f) = \{1, -1, 1, -1, \cdots\}, \quad O(-1, f) = \{-1, 1, -1, 1, \cdots\}$$

De aquí se observa que 0 es un punto fijo y que los punto 1 y -1 son puntos periódicos de primer período 2.

Además, de acuerdo a como estan dadas las iteraciones, si $|x_0| < 1$ entonces $|f^n(x_0)| \to 0$, es decir, los puntos entre -1 y 1 son asintóticamente fijos.

Pero si $|x_0| > 1$, entonces $|f^n(x_0)| \to \infty$. Esto se puede ver en la siguiente figura.

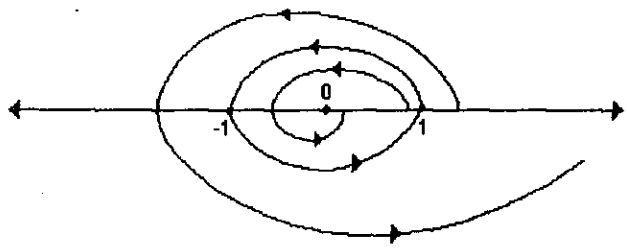


Figura 1.3

EJEMPLO 1.1.8. Sea $f(x) = x^2 - 1$

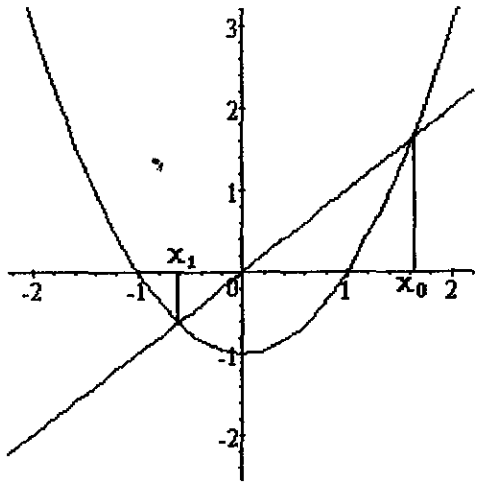


Figura 1.4

La función f tiene dos puntos fijos

$$x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{y} \qquad x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Considere las siguientes órbitas

$$\begin{aligned} O(0, f) &= \{0, -1, 0, -1, \cdots\} \\ O(-1, f) &= \{-1, 0, -1, 0, \cdots\} \\ O(1, f) &= \{1, 0, -1, 0, -1, \cdots\} \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede observar que los puntos 0 y -1 son puntos periódicos de primer período 2, y que la órbita de 1 después de una iteraciones coincide con la órbita de 0, el cual es un punto periódico, por lo tanto 1 es un punto eventualmente periódico.

Ahora, considere la órbita del punto $\frac{1}{2}$.

$O(\frac{1}{2}, f) = \{0.5, -0.75, -0.4375, -0.8085, -0.3461, -0.8801, -0.2253, -0.9492, -0.0989,$
$-0.9902, -0.0194, -0.9996, -0.0007, -0.9999, -0.0000011, \cdots\},$

nótese que esta órbita no es periódica ni converge, pero de las dos subsucesiones siguientes:

$\{-0.75, -0.8085, -0.8801, -0.9492, -0.9902, -0.9996, -0.9999 \cdots\} \to -1$

$\{-0.4375, -0.3461, -0.2253, -0.0989, -0.0194, -0.0007, -0.0000011, \cdots\} \to 0$

se ve que cada una converge a un punto periódico, así que a $\frac{1}{2}$ es, según la Definición 1.1.3 (b), un punto asintóticamente periódico.

EJEMPLO 1.1.9 Sea S^1 el círculo unitario. Como es costumbre, se identificara al ángulo θ, con el ángulo $\theta + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Se define la métrica en S^1 de la siguiente manera: si α y β estan el intervalo $[0, 2\pi)$, entonces

$$d[\alpha, \beta] = \begin{cases} |\alpha - \beta| & \text{si} \quad |\alpha - \beta| \leq \pi \\ |\alpha - \beta| - \pi & \text{si} \quad |\alpha - \beta| > \pi \end{cases}$$

Sea $g : S^1 \to S^1$, definida como $g(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$.

Se verá cómo son los puntos periódicos de g.

Un punto $e^{i\theta}$ en S^1, es un punto periódico con período n, si y solo si $g^n(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$, es decir $e^{i2^n\theta} = e^{i\theta}$, esto es verdad si y solo si $2^n\theta = \theta + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Despejando θ se tiene $\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$.

Por lo tanto un punto $e^{i\theta}$ es periódico con período n si y sólo si $\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$ para $k = 0, 1, ..., 2^n - 2$.

EJEMPLO 1.1.10 Sea $\Sigma_2 = \{s = \{s_0 s_1 s_2 ...\} : s_i = 0 \text{ o } 1\}$, el conjunto de todas las sucesiones infinitas de 0's y 1's. Este conjunto es llamado el espacio de sucesiones de 0 y 1 o el espacio de símbolos de 0 y 1.

Por ejemplo, $\{00011010...\}$ y $\{1101001...\}$ son elementos de Σ_2. Otro tipo de elementos que estan contenidos en Σ_2, son los de la forma $\{0100101010...\}$ es decir, que sus últimos digitos se repiten indefinidamente, y se denotarán por $\{0100\overline{10}...\}$.

La metrica en Σ_2 esta definida de la siguiente manera: si $s, t \in \Sigma_2$, entonces

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Por ejemplo, la distancia entre $s = \{01\overline{1}...\}$ y $t = \{10\overline{1}...\}$ es:

$$d[s, t] = \frac{|s_0 - t_0|}{2^0} + \frac{|s_1 - t_1|}{2^1} + \frac{|s_2 - t_2|}{2^2} \cdots = \frac{|0 - 1|}{1} + \frac{|1 - 0|}{2} + \frac{|1 - 1|}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + 0 + ... = \frac{3}{2}$$

Se define el *mapeo cambio* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ por,

$$\sigma\{s_0 s_1 s_2 ...\} = \{s_1 s_2 s_3 ...\}$$

Por ejemplo, $\{0110100...\}$ es un elemento de Σ_2, y $\sigma\{0110100...\} = \{110100...\}$.

Se mostrará cómo son los puntos fijos y periódicos de σ.

Existen dos puntos fijos de σ: las sucesiones constantes $\{0\overline{0}...\}$ y $\{1\overline{1}...\}$.

Los puntos eventualmente fijos son de la forma $\{s_0 s_1 s_2 .... s_n \overline{0}...\}$ y $\{s_0 s_1 s_2 .... s_n \overline{1}...\}$ para todo $n > 0$.

Supóngase que $s = \{s_0 s_1 s_2 ...\}$ es un punto periódico de σ con período k. Así $\sigma^k(s) = s$, entonces $\sigma^n(\sigma^k(s)) = \sigma^n(s)$. Además, $\sigma^{n+k}(s) = \{s_{n+k} s_{n+k+1} ...\}$ y $\sigma^n(s) = \{s_n s_{n+1} ...\}$, entonces $s_{n+k} = s_n$ para toda $n \geq 1$. De aquí que, s es un punto periódico con primer período k, si y sólo si s es la sucesión formada repitiendo los primeros k–digitos $\{s_0 s_1 ... s_{k-1}\}$. Por lo tanto, los puntos periódicos de período k son de la forma $\{\overline{s_0 s_1 s_2 ... s_{k-1}} ...\}$.

También existen puntos eventualmente periódicos de período k, los cuales son de la forma $\{s_0 s_1 s_2 ... s_n \overline{s_{n+1} ... s_{n+k-1}} ...\}$.

1.2 Análisis gráfico.

En el caso particular de que f sea una función real de variable real, el análisis gráfico es una técnica que utiliza la gráfica de la función en cuestión para analizar su dinámica.

Para realizar el análisis gráfico de una función f, se grafican la función f y la recta $y = x$ sobre el mismo plano cartesiano. Ahora, se toma un punto a en la recta $y = x$ y se traza una línea vertical hasta cortar la gráfica de f, desde ese punto se traza una línea horizontal hasta tocar a la recta $y = x$. Ese punto es $f(a)$, repitiendo este mismo proceso se encuentra $f^2(a)$, y así sucesivamente. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.2.1. Sea $f(x) = x^3$.

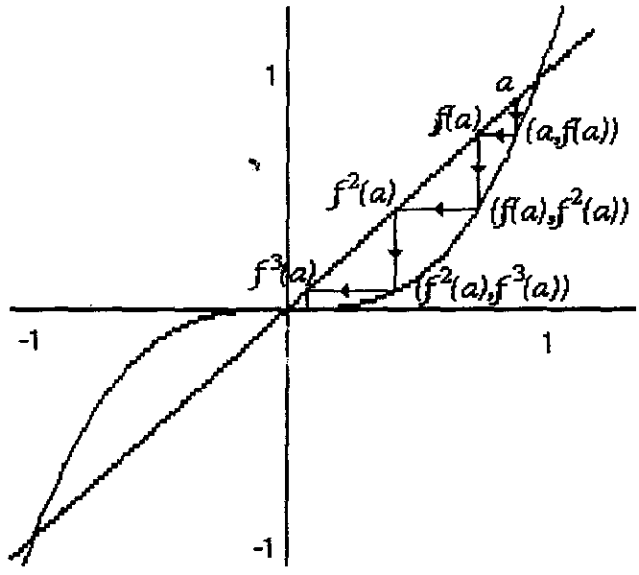


Figura 1.5

A través del análisis gráfico de esta función se puede observar que los puntos $0, 1$ y -1 son puntos fijos, además que $W^s(0) = (1, -1)$, y $W^s(\infty) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

EJEMPLO 1.2.2. Sea $f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$

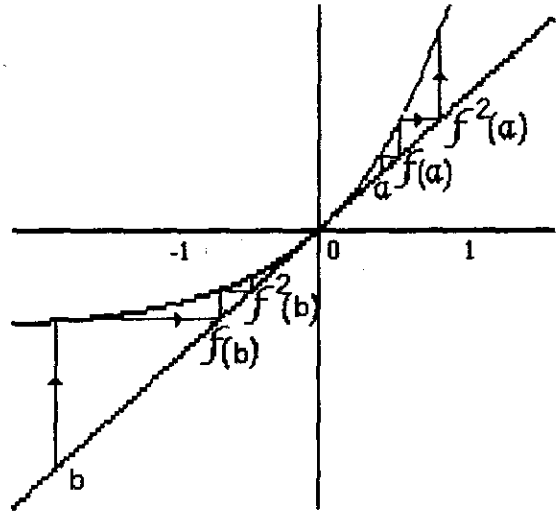


Figura 1.6

Obsérvese en el análisis gráfico que 0 es el único punto fijo de f, además $W^s(0) = (-\infty, 0]$ y $W^s(\infty) = (0, \infty)$.

1.3 Condiciones de continuidad y diferenciabilidad.

En muchos casos las funciones a considerar son continuas y diferenciables. Esto nos permite obtener resultados importantes en el estudio de los sistemas dinámicos.

PROPOSICION 1.3.1. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua . Si* $[a,b] \subset f([a,b])$ *entonces* f *tiene un punto fijo en* $[a,b]$.

DEMOSTRACION.- Como $[a,b] \subset f([a,b])$, existen puntos $c,d \in [a,b]$ tales que $f(c) = a$ y $f(d) = b$. (Ver Figura 1.7).

Si $c = a$ ó $d = b$, entonces a ó b es un punto fijo. Pero si esto no ocurre, entonces $a < c < b$ y $a < d < b$.

Sea $g(x) = f(x) - x$ de aquí que, $g(c) = f(c) - c = a - c < 0$ y $g(d) = f(d) - d = b - d > 0$. Ya que $g(c) < 0$, $g(d) > 0$ y además g es continua, aplicando el Teorema del Valor Intermedio, existe $x \in [c,d] \subset [a,b]$ tal que $g(x) = 0$, es decir $f(x) = x$. Por tanto x es un punto fijo de f. □

Observación.- Si en la Proposición 1.3.1, la condición $[a,b] \subset f([a,b])$ se cambia por la condición $f([a,b]) \subset [a,b]$, la conclusión sigue siendo válida. (Ver Figura 1.8).

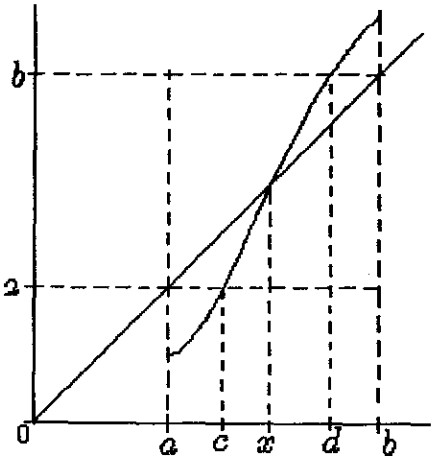


Figura 1.7

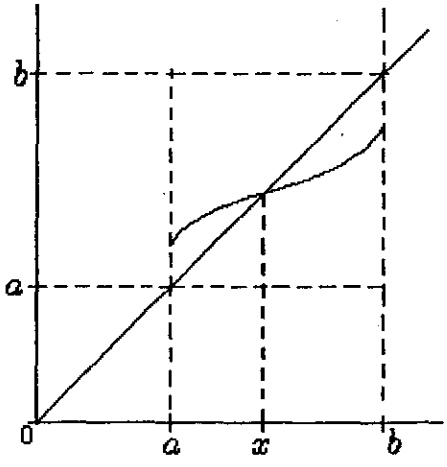


Figura 1.8

Una importante propiedad de las funciones diferenciables es que cumplen con el Teorema del Valor Medio, el cual se recordará a continuación.

Teorema del Valor Medio. *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* (a,b). *Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Se sabe por la Proposición 1.3.1 que si f es continua en $[a,b]$ y si $[a,b] \subset f([a,b])$. entonces, f tiene por lo menos un punto fijo. Pero, si además es diferenciable, la siguiente Proposición asegura que f tiene un único punto fijo en $[a,b]$.

PROPOSICION 1.3.2. *Sea* $f : [a,b] \to [a,b]$ *una función diferenciable. Si* $|f'(x)| < 1$ *para todo* $x \in [a,b]$. *Entonces existe un único punto fijo en* $[a,b]$. *Además para todo* $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$ *se cumple:*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

DEMOSTRACION.- Se empezará demostrando la segunda parte de la Proposición

Sea $x, y \in [a,b]$ con $x \neq y$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in [x,y]$ tal que

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\,|y - x|$$

pero por hipótesis $|f'(c)| < 1$, entonces

$$|f(y) - f(x)| < |y - x|.$$

Ahora, se demostrará que f tiene un único punto fijo en $[a,b]$. Por ser f diferenciable es continua, por tanto f tiene por lo menos un punto fijo en $[a,b]$.

Sea $x \in [a,b]$ y p un punto fijo de f en $[a,b]$, con $x \neq p$, entonces

$$|p - f(x)| = |f(p) - f(x)| < |p - x|.$$

Nótese que si $f(x) = x$, entonces se tendría $|p - x| < |p - x|$ lo cual es una contradicción, por tanto $f(x) \neq x$ por lo que x no es un punto fijo de f. Luego p es el único punto fijo de f en $[a,b]$. $\square$

Se denotará por C^1 al conjunto de las funciones cuya derivada existe y es continua. El siguiente resultado nos da un criterio para estudiar la estabilidad de los puntos fijos.

PROPOSICION 1.3.3. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to X$, con $f \in C^1$. Sea $p \in X$ un punto fijo de f .*

(a) Si $|f'(p)| < 1$, entonces existe un intervalo abierto que contiene a p contenido en $W^s(p)$.

(b) Si $|f'(p)| > 1$, entonces existe un intervalo abierto U que contiene a p tal que, si $x \in U$ con $x \neq p$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin U$.

DEMOSTRACION. (a) Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) > 0$. Como f' es continua en p, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f'(p) - f'(x)| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad x \in (p - \delta, p + \delta)\,.$$

Así que,

$|f'(x)| = |f'(x) + f'(p) - f'(p)| \leq |f'(x) - f'(p)| + |f'(p)| < \varepsilon + |f'(p)| = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|f'(p)| = 1 - [\frac{1}{2}(1 - |f'(p)|] = 1 - \varepsilon.$

Es decir,

$$|f'(x)| < 1 - \varepsilon \;\; si \;\; x \in (p - \delta, p + \delta) \tag{1.1}$$

Ahora, se toma $x \in (p - \delta, p + \delta)$ con $x \neq p$, aplicando el Teorema del Valor Medio, existe c_1 entre x y p tal que;

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - p| = |f'(c_1)|\,|x - p| \tag{1.2}$$

entonces, de (1.1) y (1.2) se tiene que,

$$|f(x) - f(p)| = |f'(c_1)|\,|x - p| < (1 - \varepsilon)\,|x - p|\,.$$

Luego, por el Teorema del Valor Medio, existe c_2 entre $f(x)$ y $f(p)$ tal que

$|f^2(x) - f^2(p)| = |f(f(x)) - f(f(p))| = |f'(c_2)|\,|f(x) - f(p)| < |f'(c_2)|\,(1 - \varepsilon)\,|x - p|$, entonces $|f^2(x) - f^2(p)| < (1 - \varepsilon)^2\,|x - p|$.

Y por inducción se cumple

$$|f^n(x) - f^n(p)| < (1-\varepsilon)^n |x-p|.$$

Ya que $(1-\varepsilon) < 1$, entonces $f^n(x) \to p$, es decir $x \in W^s(p)$ para toda $x \in (p-\delta, p+\delta)$, por tanto $(p-\delta, p+\delta) \subset W^s(p)$.

(b) Sea M tal que $|f'(p)| > M > 1$. Como f' es continua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$, se tiene $|f'(x)| > M$. Sea $x \in (p-\delta, p+\delta)$, con $x \neq p$. Por el Teorema del Valor Medio existe c tal que

$$|f(x) - f(p)| = |f'(c)|\,|x-p| \quad \text{con} \quad c \in (p-\delta, p+\delta).$$

Como $c \in (p-\delta, p+\delta)$, se tiene que $|f'(c)| > M$, por lo tanto $|f(x)-p| > M|x-p|$. Si $f(x) \in (p-\delta, p+\delta)$, entonces

$$|f(f(x)) - p| > M|f(x)-p| > M^2|x-p|$$

y así, mientras $f^n(x)$ se mantenga en el intervalo $(p-\delta, p+\delta)$, $|f^n(x)-p| > M^n|x-p|$. Como $M > 1$, esto implica la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f^n(x)-p| > \delta$, por lo tanto el punto $f^n(x)$ ya no pertenece al intervalo $(p-\delta, p+\delta)$. $\square$

Una observación útil, es que si los errores $e_n = f^n(x) - p$, son no nulos, entonces:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{f^{n+1}(x)-p}{f^n(x)-p} = \frac{f(f^n(x))-f(p)}{f^n(x)-p} \to f'(p),$$

por tanto, la magnitud de la derivada de la función en el punto fijo, es un indicador de la rapidez de la convergencia de la iteración al punto fijo.

De acuerdo a la Proposición 1.3.3, se clasifican los puntos fijos y periódicos de la siguiente manera.

DEFINICION 1.3.4. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to X$ una función diferenciable. Sea p un punto periódico con primer período n. Si $|(f^n(p))'| \neq 1$, se dice que p es hiperbólico. De otra manera, se dice que es no hiperbólico.*

DEFINICION 1.3.5. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to X$ una función diferenciable. Sea p un punto hiperbólico periódico con primer período n.*

(a) Si $|(f^n(p))'| < 1$, se dice que p es un punto periódico atractor.

(b) Si $|(f^n(p))'| > 1$, se dice que p es un punto periódico repulsor.

Cuando $n = 1$, en la definición1.3.5 en los casos (a) y (b), al punto p se le dice punto fijo atractor y punto fijo repulsor respectivamente.

La siguiente Proposición nos da un criterio práctico para estudiar la estabilidad de los puntos periódicos, basado en la Proposición 1.3.3.

PROPOSICION 1.3.6 *Sea f una función de clase C^1 y p un punto periódico de f con primer período k.*

(a) Si $\left|f'(p)f'(f(p))...f'(f^{k-1}(p))\right| < 1$, entonces existe un intervalo abierto que contiene a p, tal que esta contenido en $W^s(p)$.

(b) Si $\left|f'(p)f'(f(p))...f'(f^{k-1}(p))\right| > 1$, entonces existe un intervalo abierto I que contiene a p, tal que todos los puntos del intervalo (excepto p), dejan el intervalo I bajo iteraciones de f^k.

DEMOSTRACION.- Por la regla de la cadena se cumple,

$$(f^k(p))' = f'(p)f'(f(p))...f'(f^{k-1}(p)).$$

Entonces las conclusiones de la Proposición son inmediatas, aplicando la Proposición 1.3.3 a la función f^k. □

Nótese que si p es un punto periódico de f, con primer período k y la derivada de f^k en p es menor que 1 en valor absoluto, entonces puntos "cercanos" a p son atráidos a p bajo iteraciones de f^k.

En el Ejemplo 1.2.1, se obsevó que los puntos fijos de la función $f(x) = x^3$ son $0, 1$ y -1. Para ver si estos son atractores o repulsores primeramente se deriva la función y se obtiene $f'(x) = 3x^2$. Después se evalua en cada punto fijo. Así se tiene que 0 es un punto hiperbólico atractor ya que $|f'(0)| < 1$; los puntos 1 y -1 son hiperbólicos repulsores ya que $|f'(1)| > 1$ y $|f'(-1)| > 1$.

Esto quiere decir que los puntos que se encuentran entre $(-1, 1)$ bajo iteraciones de la función se acercan a cero y los puntos que estan en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ bajo la iteración de la función se alejan.

EJEMPLO 1.3.7 Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definido como

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

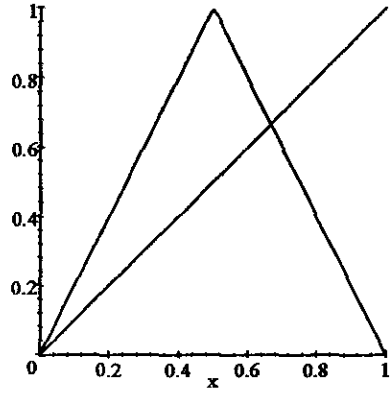


Figura 1.9

Esta función es llamada el *mapeo tienda*. Existen dos puntos fijos: 0 y $\frac{2}{3}$. Estos puntos fijos son hiperbólicos repulsores ya que, $|T'(0)| = 2$ y $\left|T'(\frac{2}{3})\right| = 2$.

Además existen púntos eventualmente fijos, por ejemplo, $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ satisfacen:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{3}, \\ T\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{2},\ T\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ T(1) = 0, \\ T\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{2},\ T\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ T(1) = 0. \end{aligned}$$

Para encontrar puntos de período dos, nótese que T^2 esta dada por:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2(1-2x) & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(x-\frac{1}{2}) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & \text{si} \quad \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

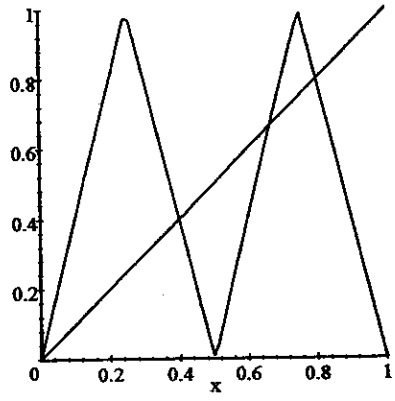


Figura 1.10

Obsérvese de la Figura 1.10, que existen cuatro puntos fijos de T^2 que son: $0, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$, dos de los cuales $\{0, \frac{2}{3}\}$ son puntos fijos de T. Así $\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ son los únicos puntos de período dos. Como $\left|(T^2)'(\frac{2}{5})\right| = 4$ y $\left|(T^2)'(\frac{4}{5})\right| = 4$, se tiene que estos dos puntos son periódicos repulsores.

Además existen puntos eventualmente periódicos de período 2, los cuales son $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$ ya que

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{5}\right) &= \frac{2}{5} \\ T\left(\frac{3}{5}\right) &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

La figura 1.11 muestra la gráfica de T^3 :

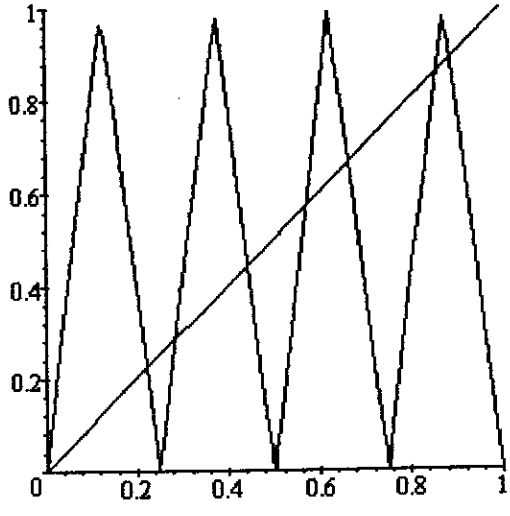


Figura 1.11

De la Figura 1.11, obsérvese que T^3 tiene ocho puntos fijos, dos de los cuales son puntos fijos de T. Así que existen dos órbitas de período tres, los cuales son $O(\frac{2}{7}, T) = \{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ y $O(\frac{2}{9}, T) = \{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$. Ya que $\left|(T^3)(x)\right| = 8 > 1$ para todo $x \in [0,1]$ se tiene que estos puntos son periódicos repulsores.

El criterio de estabilidad para puntos fijos no hiperbólicos además de la derivada, involucra la segunda y tercera derivada. Esto se verá en los siguientes resultados. En principio se analizará el caso $f'(x) = 1$, y posteriormente para $f'(x) = -1$, pero antes se dará la siguiente definición.

DEFINICION 1.3.8 *Sean $X \subseteq R$ y $f : X \to X$. Sea p un punto fijo de f. Se dice que p es:*

(a) *Semiatractor por la derecha si existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (p, p+\delta)$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p.$$

(b) *Semiatractor por la izquierda si existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (p-\delta, p)$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p.$$

PROPOSICION 1.3.9 *Sean $X \subseteq R$ y $f : X \to X$. Sea p un punto fijo de f tal que $f'(p) = 1$. Si $f'''(p) \neq 0$ y continua, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si $f''(p) \neq 0$, entonces p es semiatractor por la derecha o por la izquerda.*

(b) *Si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) > 0$, entonces existe un intervalo abierto U que contiene a p tal que, si $x \in U$ con $x \neq p$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin U$.*

(c) *Si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) < 0$, existe un intervalo abierto que contiene a p contenido en $W^s(p)$.*

DEMOSTRACION.- (a) Por hipótesis se tiene que $f'(p) = 1$ y $f''(p) \neq 0$. De aquí que $f''(p) > 0$ o $f''(p) < 0$, entonces la curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo respectivamente.

Ahora, supóngase que $f''(p) > 0$. Entonces existe $\delta > 0$, tal que $f'(x)$ es creciente en una vecindad $(p-\delta, p+\delta)$. Como $f'(p) = 1$, entonces $f'(x) < 1$ para toda $x \in (p-\delta, p)$. De la demostración de la Proposición 1.3.3 se concluye que p es semiatractor por la izquierda. Este comportamiento se puede observar en la Figura 1.12.

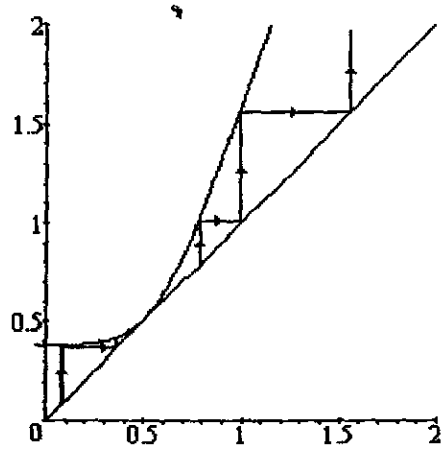


Figura 1.12 $f'(p) = 1 \quad f''(p) > 0$

Ahora, si $f''(p) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f'(x)$ es decreciente en una vecindad $(p-\delta, p+\delta)$. Además, como $f'(p) = 1$, se tiene que $f'(x) < 1$ para toda $x \in (p, p+\delta)$. Por lo tanto, de la demostración de la Proposición 1.3.3 se concluye que p es semiatractor por la derecha. Este comportamiento se puede observar en la Figura 1.13.

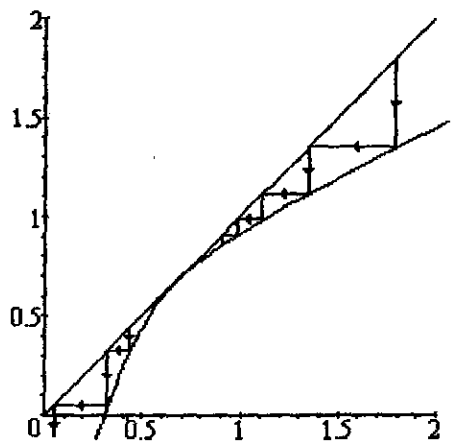


Figura 1.13 $f'(p) = 1 \quad f''(p) < 0$

(b) Como $f'''(p) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f''(x)$ es creciente en la vecindad $(p-\delta, p+\delta)$.

Ya que $f''(p) = 0$ se tienen dos casos:

1) $f''(x) > 0$ para toda $x \in (p, p+\delta)$, entonces $f'(x)$ es creciente en este intervalo, además, como $f'(p) = 1$ se tiene que $f'(x) > 1$ para toda $x \in (p, p+\delta)$.

Ahora, sea $x \in (p, p+\delta)$. Por el Teorema del Valor Medio, existe $c_1 \in (p, x)$ tal que

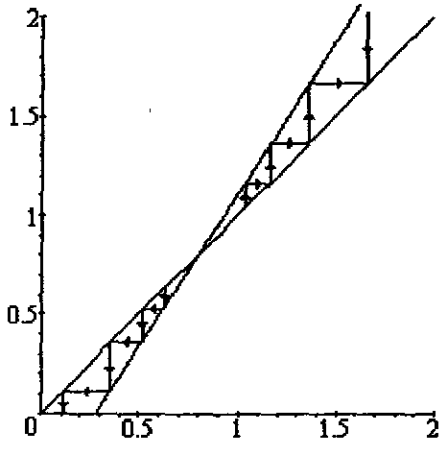
$$|f(p) - f(x)| = |f'(c_1)|\,|p - x|$$

Luego, aplicando de nuevo el Teorema del Valor Medio, existe c_2 tal que

$$\begin{aligned} |f^2(p) - f^2(x)| &= |f'(c_1)|\,|f'(c_2)|\,|p - x| \\ &\vdots \\ |f^n(p) - f^n(x)| &= |f'(c_1)|\,|f'(c_2)| \ldots |f'(c_n)|\,|p - x| \end{aligned}$$

Como cada $|f'(c_i)| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, entonces la sucesión $|f'(c_1)|\,|f'(c_2)| \ldots |f'(c_n)|$ es *monotona* creciente y converge a ∞. De aquí que, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin (p, p+\delta)$. Por tanto, p es repulsor.

2) $f''(x) < 0$ para toda $x \in (p-\delta, p)$, entonces $f'(x)$ es decreciente en este intervalo, por lo que $f'(x) > 1$ para toda $x \in (p-\delta, p)$. Por tanto, p es repulsor. Este comportamiento se observa en la siguiente figura.

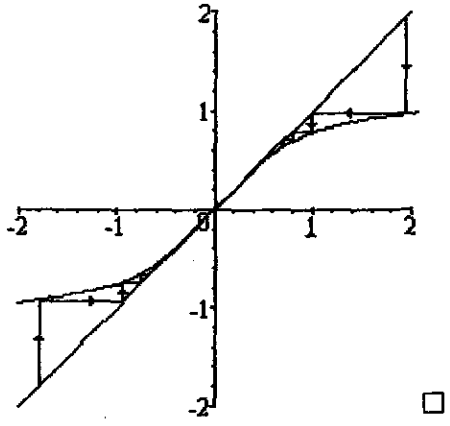


$f'(p) = 1, \quad f''(p) = 0, \quad f'''(p) > 0$

(c) Como $f'''(p) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f''(x)$ es decreciente en la vecindad $(p-\delta, p+\delta)$. Ya que $f''(p) = 0$ se tienen dos casos:

1) $f''(x) > 0$ para toda $x \in (p-\delta, p)$. En este caso $f'(x)$ es creciente en este intervalo. Como $f'(p) = 1$ se tiene que $f'(x) < 1$ para toda $x \in (p-\delta, p)$. Así que por el mismo argumento de (a), p es atractor.

2) $f''(x) < 0$ para toda $x \in (p, p+\delta)$. En este caso $f'(x)$ es decreciente en este intervalo, por lo que $f'(x) < 1$ para toda $x \in (p, p+\delta)$. Por tanto, p es atractor. Este comportamiento se observa en la siguiente figura.



$f'(p) = 1,\ f''(p) = 0,\ f'''(p) < 0.$

□

La siguiente Proposición es usada como criterio de estabilidad para el caso en el que $f'(x_0) = -1$. Pero antes es necesario introducir la noción de la derivada Schwarziana.

DEFINICION 1.3.10 *La derivada Schwarziana de una función $f \in C^3$ en un punto x, donde $f'(x) \neq 0$ se define por:*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

PROPOSICION 1.3.11 *Sean $X \subseteq R$ y $f : X \to X$. Sea x_0 un punto fijo de f tal que $f'(x_0) = -1$. Si $f'''(x_0)$ es continua, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $Sf(x_0) < 0$, entonces x_0 es atractor.

(b) Si $Sf(x_0) > 0$, entonces x_0 es repulsor.

DEMOSTRACION.- La idea de la demostración, es crear una función asociada g con la propiedad de que $g'(x_0) = 1$, y así poder usar la Proposición 1.3.9.

Esta función es

$$g = f \circ f = f^2.$$

Nótese que si x_0 es un punto fijo de f, entonces también es un punto fijo de g. Además, si x_0 es atractor (repulsor) respecto a g, entonces también es atractor (repulsor) respecto a f.

Por la regla de la cadena se tiene:

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x). \tag{1.3}$$

Entonces

$$g'(x_0) = \left[f'(x_0)\right]^2 = 1,$$

ya que x_0 es punto fijo de f. Ahora se calcularan $g''(x_0)$ y $g'''(x_0)$. De la ecuación (1.3) se tiene:

$$\begin{aligned} g''(x) &= f'(f(x))f''(x) + f''(f(x))\left[f'(x)\right]^2 \\ g''(x_0) &= f'(x_0)f''(x_0) + f''(x_0)\left[f'(x_0)\right]^2 \\ &= 0 \quad \text{(ya que } f'(x_0) = -1\text{)}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Calculando $g'''(x)$ a partir de la ecuación (1.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} g'''(x_0) &= -2f'''(x_0) - 3\left[f''(x_0)\right]^2 \\ &= 2Sf(x_0). \end{aligned}$$

Esto es así porque $f'(x_0) = -1$. Entonces la derivada Schwarziana se reduce a

$$Sf(x_0) = -f'''(x_0) - \frac{3}{2}\left[f''(x_0)\right]^2.$$

Para demostrar (a), se tiene que $Sf(x_0) < 0$, por lo que $g'''(x_0) < 0$. Aplicando la Proposición 1.3.9 (c) se obtiene que x_0 es atractor.

Para demostrar (b), se tiene que $Sf(x_0) > 0$ por tanto $g'''(x_0) > 0$. Aplicando la Proposición 1.3.9 (b) se obtiene que x_0 es repulsor. □

EJEMPLO 1.3.12 Sea $f : [-3, 3] \to [-3, 3]$ definida como $f(x) = x^2 + 3x$

El punto fijo de f se obtiene resolviendo la ecuación $x^2 + 3x = x$. Así que existen dos puntos fijos, $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$. Para x_1 se tiene $f'(0) = 3$, lo cual implica que x_1 es repulsor. Para x_2 se tiene que $f'(-2) = -1$, lo cual requiere aplicar la Proposición 1.3.11. Se observa que

$$Sf(-2) = -f'''(-2) - \frac{3}{2}\left[f''(-2)\right] = -6 < 0.$$

Por lo tanto, x_2 es atractor, ver Figura 1.14

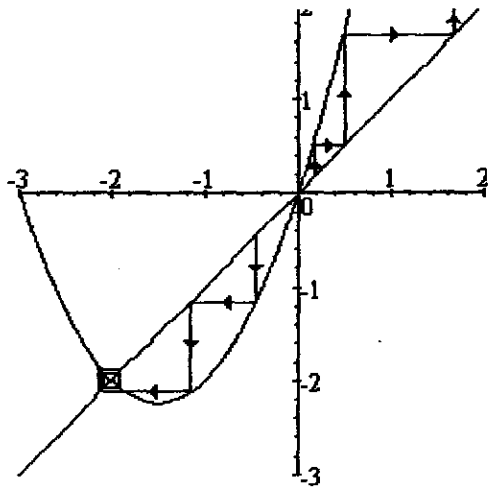


Figura 1.14

1.4 Familias de funciones parametrizadas.

Una familia de funciones es vista como una colección de funciones las cuales son del mismo tipo. Por ejemplo, considere la familia de funciones lineales $f_m(x) = mx$, donde la variable m es llamada parámetro y esta puede tomar cualquier valor, $f_m(x) = mx$ es conocida como la familia parametrizada de lineas que pasan por el origen.

El objetivo es observar la dinámica de una función cuando se varia el parámetro.

EJEMPLO 1.4.1. Sea la familia parametrizada de funciones, $f_m(x) = mx$.

Para todo valor de m, excepto 1, el único punto fijo de f_m es el 0.

Si $m < -1$, entonces 0 es un punto hiperbólico fijo repulsor ya que $|f'(0)| > 1$, por tanto cualquier otro punto está en el conjunto estable de ∞.

Si $m = -1$, $f_{-1}(x) = -x$ entonces todos los puntos, excepto 0, son puntos periódicos con primer período 2.

Si $-1 < m < 1$, entonces 0 es un punto fijo atractor ya que $|f'(0)| = |m| < 1$, entonces todo otro punto esta en el conjunto estable de 0.

Si $m = 1$, entonces todos los puntos son puntos fijos.

Si $m > 1$, 0 es un punto fijo repulsor ya que $|f'(0)| > 1$, por lo que cualquier otro punto esta en el conjunto estable de ∞.

El siguiente ejemplo es uno de los más importantes, ya que presenta distintos comportamientos cuando se varía el parámetro; éste es llamado la familia de funciones logísticas. Aunque aquí se verán algunas de sus características, se dedicará el Capítulo 4 para observar detalladamente la dinámica del sistema.

EJEMPLO 1.4.2. Sea la familia parámetrizada de funciones, $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

La familia de funciones logísticas $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu > 0$ es una familia de parábolas que abren hacia abajo, intersectan al eje x en 0, 1 y tienen un máximo en $\frac{1}{2}$. Ya que el máximo valor es $\frac{\mu}{4}$, f_μ mapea el intervalo [0,1] en si mismo para $0 < \mu \leq 4$.

Para cualquier valor de μ, excepto 1, existen dos puntos fijos de f_μ los cuales son 0 y $\frac{\mu-1}{\mu}$, también existen dos puntos eventualmente fijos, 1 y $\frac{1}{\mu}$.

Si $\mu = 1$, entonces $f_1(x) = x(1-x)$ y 0 es el único punto fijo pero no es hiperbólico, ya que $f'(x) = -2x + 1$ por lo que $|f'(0)| = 1$. Del análisis gráfico, obsérvese que $W^s(0) = [0,1]$ y $W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

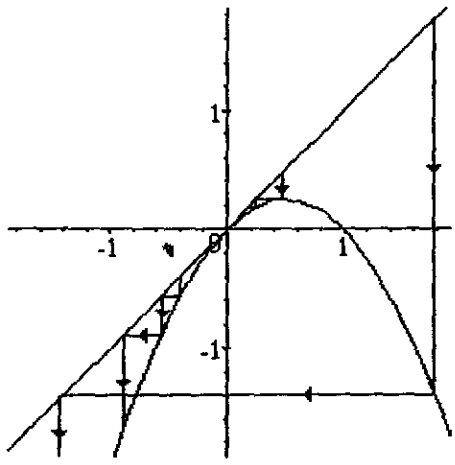


Figura 1.15

Si $0 < \mu < 1$, entonces 0 es un punto hiperbólico fijo atractor ya que $|f'(0)| = |\mu| < 1$. El punto $\frac{\mu-1}{\mu}$, es hiperbólico fijo repulsor ya que $\left|f'(\frac{\mu-1}{\mu})\right| = |-\mu+2| > 1$. Por el análisis gráfico se observa que $W^s(0) = \left(\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right)$, $W^s\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = \left\{\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right\}$ y $W^s(\infty) = \left(-\infty, \frac{\mu-1}{\mu}\right)$.

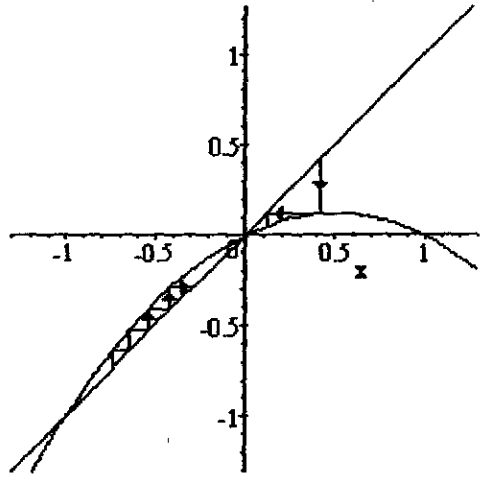


Figura 1.16 Caso $\mu = \frac{1}{2}$.

Si $1 < \mu < 3$, entonces 0 es un punto hiperbólico fijo repulsor, ya que $|f'(0)| = |\mu| > 1$, el punto $\frac{\mu-1}{\mu}$ es hiperbólico fijo atractor para valores entre 0 y 1. Además $W^s(0) = \{0, 1\}$, $W^s\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = (0, 1)$ y $W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

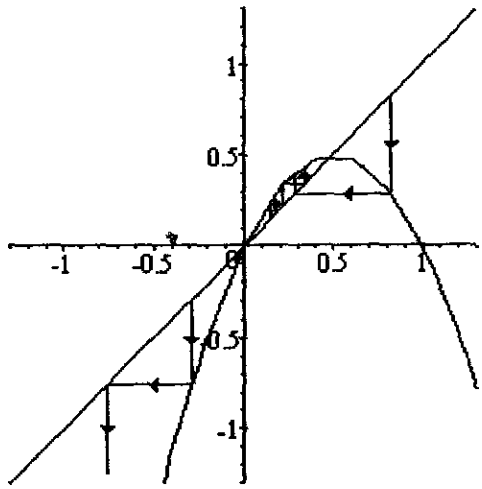


Figura 1.17 Caso $\mu = 2$.

Si $\mu = 3$, entonces 0 es un punto hiperbólico fijo repulsor ya que $|f'(0)| = 3$, pero $\frac{2}{3}$ no es un punto hiperbólico ($\left|f'(\frac{2}{3})\right| = 1$). De la Figura 1.18, se observa que $W^s(0) = \{0,1\}$, $W^s\left(\frac{2}{3}\right) = (0,1)$ y $W^s(\infty) = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$.

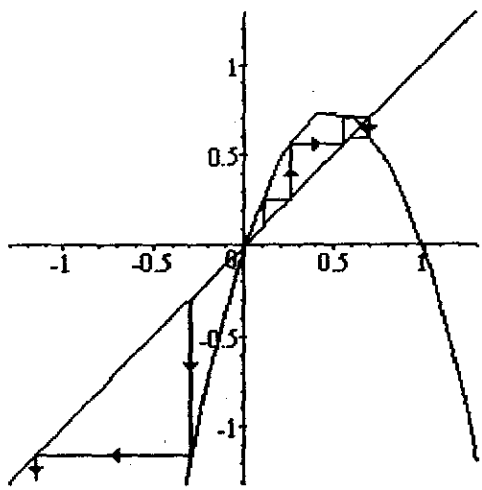


Figura 1.18

Si $3 < \mu < 3.4$, entonces 0 y $\frac{\mu-1}{\mu}$ son puntos hiperbólicos fijos repulsores, ya que $|f'(0)| = |\mu| > 1$ y $\left|f'(\frac{\mu-1}{\mu})\right| = |-\mu+2| > 1$. Siguiendo el mismo proceso se llega a que $W^s(0) = \{0,1\}$, $W^s(\infty) = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$.

Si $\mu > 4$, entonces $f_\mu\left(\frac{1}{2}\right) > 1$, $f_\mu(1) = 0$, y $f_\mu(0) = 0$, por el Teorema del Valor Intermedio existen puntos $q_0 \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ y $q_1 \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ tales que $f_\mu(q_0) = f_\mu(q_1) = 1$. Consecuentemente, $f_\mu^2(q_0) = f_\mu^2(q_1) = 0$ de aquí que q_0 y q_1 son puntos eventualmente fijos.

Capítulo 2

DEFINICIONES DE CAOS

En este capítulo se introducirán diferentes definiciones de caos (en una dimensión), que son las que con mayor frecuencia se encuentran en la literatura dedicada a los sistemas dinamicos.

Existen varias definiciones de caos, la más utilizada es dada por Devaney. Ya que ésta contiene los ingredientes que de alguna u otra manera estan en las "otras" definiciones de caos.

2.1 Caos en espacios métricos.

Una de las propiedades que algunas definiciones de caos tienen en común es que la función f sea topologicamente transitiva.

DEFINICION 2.1.1 *Sean (X,d) un espacio métrico y una función $f : X \to X$. Se dice que f es topológicamente transitiva si para cualquiera dos conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Intuitivamente, una función topologicamente transitiva tiene puntos que bajo iteraciones se mueven de una vecindad arbitrariamente pequeña a otra. Consecuentemente la dinámica del sistema no puede ser descompuesta en dos conjuntos abiertos disjuntos.

Observación.- Si f es topologicamente transitiva entonces todo par de subconjuntos abiertos no vacíos de X, comparten una órbita, es decir, dados dos conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe $u \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(u) \in V$.

PROPOSICION 2.1.2. *Sean (X, d) un espacio métrico y una función $f : X \to X$. Si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $O(x_0, f)$ es densa en X, entonces f es topologicamente transitiva.*

DEMOSTRACION.- Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos. Como $O(x_0, f)$ es densa en X, existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $f^r(x_0) \in U$ y $f^s(x_0) \in V$. Sea $b = f^r(x_0)$ y $c = f^s(x_0)$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $k = s - r \geq 0$. Entonces

$$f^k(b) = f^{s-r}(f^r(x_0)) = f^s(x_0) = c$$

Por tanto, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. □

Observación: Si se tiene una función topologicamente transitiva entonces tiene una órbita densa bajo ciertas restriccionas. Esto se demostrará en la Proposición 2.1.19.

Otra de las propiedades que caracteriza a los sistemas dinamicos caóticos, es la sensible dependencia a las condiciones iniciales. Algunos autores consideran que su presencia es lo que define una dinámica realmente complicada o caótica.

DEFINICION 2.1.3 *Sean (X, d) un espacio métrico y una función $f : X \to X$. Se dice que f exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $x \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$ y $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.*

Intuitivamente, una función exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales si existen puntos arbitrariamente cercanos a x los cuales bajo iteraciones de f son separados de x por una distancia mayor a δ (Ver Figura 2.1). Se debe tener en cuenta que no todos los puntos cercanos a x necesariamente son separados de x bajo iteraciones, pero debe existir al menos un punto en cualquier vecindad de x.

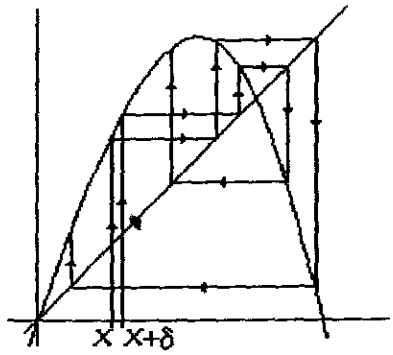


Figura 2.1

Además, si una función exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales, entonces la dinámica de la función no puede estudiarse en base a cálculos numéricos, ya que pequeños errores de cálculo (por ejemplo, los que se cometen por redondeo), pueden ser aumentados bajo iteraciones. Los resultados de los cálculos numéricos de una órbita, no importa que tan precisos sean pueden que no se parezcan a la órbita real.

DEFINICION 2.1.4 *Sean (X,d) un espacio métrico y una función $f : X \to X$, sea $x_0 \in X$. Se dice que la órbita de x_0 $(O(x_0,f))$ es inestable si existe $\delta(x_0) > 0$ tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $y_0 \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_0,y_0) \leq \varepsilon$ y $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) > \delta(x_0)$.*

Obsérvese que si una función exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales, entonces cualquier órbita $O(x,f)$ con $x \in X$ es inestable, con la misma constante de inestabilidad. La afirmación en el otro sentido también es válida bajo condiciones adicionales. Esto se demostrará en la Proposición 2.1.20.

Ahora se introduce la primera definición de caos.

DEFINICION 2.1.5 (DEVANEY) *Sea un espacio métrico (X,d) y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es caótica en X si:*

1) f es topologicamente transitiva en X.

2) Los puntos periódicos de f son densos en X.

3) f exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales en X.

En 1992 Banks, Brooks, Cairns [2], demostráron que la hipotesis de sensible dependencia a las condiciones iniciales, no es realmente necesaria ya que esta implicita en las otras dos condiciones, es decir, basta con que f sea topologicamente transitiva y sus puntos periódicos sean densos en X, para asegurar que f es caótica en X.

Antes de dar la Proposición 2.1.6 se verán las siguientes notaciones:

Si (X,d) es un espacio métrico y $f: X \to X$. Una vecindad abierta de un punto $x \in X$ se denota por

$$N_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon, \quad \text{con} \quad \varepsilon > 0\}.$$

La imagen inversa de un conjunto $A \subset X$ es denotada por

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

De aquí que

$$f^{-k}(A) = \left\{x \in X : f^k(x) \in A, \quad k \in \mathbb{N}\right\}.$$

PROPOSICION 2.1.6 *Sean (X,d) un espacio métrico y $f: X \to X$ una función continua, topologicamente transitiva con puntos periódicos densos en X. Si X contiene un número infinito de elementos, entonces f exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales en X.*

DEMOSTRACION.- Supóngase que f es topologicamente transitiva y sus puntos periódicos son densos en X.

Primeramente se demostrará que existe δ_0 tal que, para todo $x \in X$ existe un punto periódico q, tal que $d[x, f^n(q)] \geq \delta_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean p, q puntos periódicos con diferentes órbitas. Se define

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min\{d[f^n(p), f^m(q)] : n, m \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Luego,

$$2\delta_0 = \min\{d[f^n(p), f^m(q)] : n, m \in \mathbb{N}\} \leq d[f^n(p), f^m(q)] \quad \forall \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Por la desigualdad del triangulo

$$2\delta_0 \leq d\left[f^n(p), f^m(q)\right] \leq d\left[f^n(p), x\right] + d\left[x, f^m(q)\right] \quad \forall \ \ n, m \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$\text{si para algún } n,\ d\left[f^n(p), x\right] < \delta_0 \text{ se tiene que } d\left[x, f^m(q)\right] > \delta_0 \ \ \forall \ \ m \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

ó reciprocamente,

$$\text{si para algún } m,\ d\left[x, f^m(q)\right] < \delta_0 \text{ se tiene que } d\left[f^n(p), x\right] > \delta_0 \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, cualquier $x \in X$ está al menos a una distancia δ_0 de cualquier punto de la órbita de q, ó de la órbita de p.

Ahora, se demostrará que para toda $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe y tal que

$$d[x, y] < \varepsilon \ \text{ y } \ d\left[f^n(x), f^n(y)\right] > \delta \ \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\delta = \frac{1}{4}\delta_0$. Sea $x \in X$ y $0 < \varepsilon < \delta$. Como los puntos periódicos de f son densos en X, existe un punto periódico p con primer período k, tal que $d[x, p] < \varepsilon$. Además, como se vio en (2.1) existe δ_0 y un punto periódico q tal que,

$$\text{para toda } \ x \in X, \ \ d\left[x, f^m(q)\right] > \delta_0 \ \forall \ m \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Se define

$$\begin{aligned} V &= \cap_{i=0}^{k} f^{-i}(N_\delta(f^i(q))) = \cap_{i=0}^{k} \left\{x : f^i(x) \in N_\delta(f^i(q))\right\} \\ &= \cap_{i=0}^{k} \left\{x : d\left[f^i(x), f^i(q)\right] < \delta\right\} \\ &= \left\{x : d\left[f^i(x), f^i(q)\right] < \delta \ \text{ para todo } \ 0 \leq i \leq k\right\}. \end{aligned}$$

Claramente $q \in V$, por definición de V. Además V es abierto, ya que $f^{-i}(N_\delta(f^i(q)))$ es abierto porque f es continua y $N_\delta(f^i(q))$ es abierto.

Entonces, se tiene que V y $N_\varepsilon(x)$ son abiertos y como f es topologicamente transitiva, existe $y \in N_\varepsilon(x)$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(y) \in V$.

Sea j el entero que satisface

$$\frac{m}{k} < j \leq \frac{m}{k} + 1, \quad \text{es decir,} \quad 0 < kj - m \leq k.$$

Hasta el momento se tiene que: $x \in X$, $0 < \varepsilon < \delta$, además $x, y, p \in N_\varepsilon(x)$, también existe un conjunto V tal que

$-\ q \in V.$

$-$Si $z \in V$, y $i \leq k$ entonces $d\left[f^i(z), f^i(q)\right] < \delta.$

$-\ f^m(y) \in V.$

Por último, se demostrará que

$$d\left[f^{kj}(p), f^{kj}(x)\right] > \delta \ \text{ ó } \ d\left[f^{kj}(x), f^{kj}(y)\right] > \delta.$$

Recuerde que $d[x,y] < \varepsilon$ y $d[x,p] < \varepsilon$.

Nótese que $f^{kj}(y) = f^{kj-m}(f^m(y))$. Además como $f^m(y) \in V$ y $kj - m \leq k$ entonces

$$d\left[f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)\right] < \delta.$$

Por la desigualdad del triangulo se tiene

$$d\left[x, f^{kj-m}(q)\right] \leq d[x,p] + d\left[p, f^{kj}(y)\right] + d\left[f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)\right].$$

Como $d[x,p] < \varepsilon < \delta$ y $d\left[f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)\right] < \delta$, entonces

$$d\left[x, f^{kj-m}(q)\right] < d\left[p, f^{kj}(y)\right] + 2\delta.$$

Además, por (2.2) se tiene que $d\left[x, f^{kj-m}(q)\right] > \delta_0 = 4\delta$. Entonces

$$4\delta < d\left[p, f^{kj}(y)\right] + 2\delta,$$

luego,

$$2\delta < d\left[p, f^{kj}(y)\right].$$

Además, como p es periódico de período k, $f^{kj}(p) = p$. Entonces $2\delta < d\left[f^{kj}(p), f^{kj}(y)\right]$. Por la desigualdad del triangulo

$$2\delta < d\left[f^{kj}(p), f^{kj}(y)\right] \leq d\left[f^{kj}(p), f^{kj}(x)\right] + d\left[f^{kj}(x), f^{kj}(y)\right].$$

Por lo tanto

$$d\left[f^{kj}(p), f^{kj}(x)\right] > \delta \ \ \acute{o} \ \ d\left[f^{kj}(x), f^{kj}(y)\right] > \delta.$$

De aquí que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. □

Sensible dependencia a las condiciones iniciales desde un punto de vista experimental, es el elemento central del caos. La Proposición anterior asegura que sensible dependencia a las condiciones iniciales es un elemento redundante en la Definición 2.1.5 ya que éste se sigue de la transitividad topológica y de la condición de puntos periódicos densos. De acuerdo a como se enumeraron las condiciones en la Definición 2.1.5, esto se puede expresar como (1) y (2) $\Longrightarrow$ (3).

Pero no se puede asegurar que transitividad topológica se siga de puntos periódicos densos y de sensible dependencia a las condiciones iniciales, ni que puntos periódicos densos se siga de transitividad topológica y de sensible dependencia a las condiciones iniciales. Esto se puede observar en los siguientes ejemplos.

En el siguiente ejemplo se verá que (2) y (3) $\not\Rightarrow$ (1) en la Definición 2.1.5.

EJEMPLO 2.1.7.-Considere $f : I \to I$ donde $I = \mathbb{R}^+$ y

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ -3x+2 & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si} \quad \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ f(x-1)+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

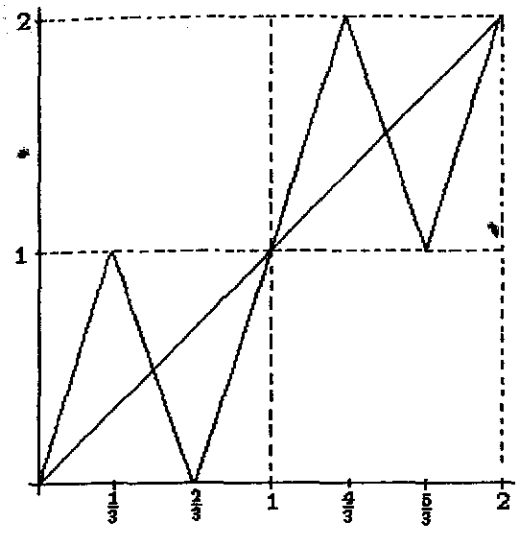


Figura 2.2. f.

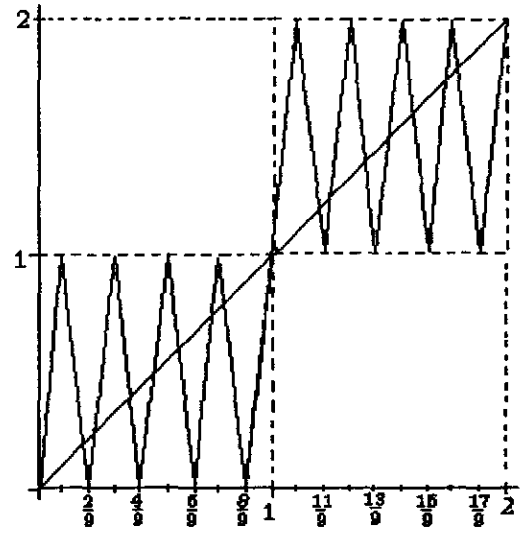


Figura 2.3. f^2.

Para ver que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales se toma $\varepsilon > 0$, $x \in [0,1]$ y $\delta = \frac{1}{2}$, $y \in [0,1]$. Si $|x-y| = \varepsilon$, entonces como $\left|\frac{df}{dx}(x)\right| = 3$ para todo punto en I, utilizando el Teorema del Valor Medio se tiene:

$$|f^n(x) - f^n(y)| = 3^n |x-y| = 3^n \varepsilon > \frac{1}{2},$$

tomando n suficientemente grande.

De la Figura 2.1 se observa que f tiene un punto fijo entre cada dos valores enteros. Tambien, de la Figura 2.2 se observa que f^2 tiene $3^2 - 2$ puntos fijos entre cualquiera dos valores enteros y que la distancia entre cada punto fijo, es menor que $\frac{1}{3}$. De esta misma forma, se llega a que f^n tiene $3^n - 2$ puntos fijos entre cualquiera dos valores enteros y la distancia entre cada punto fijo es menor que $(\frac{1}{3})^{n-1}$, así los puntos periódicos son densos en I.

Como $f([0,1]) = [0,1]$ la función no es topologicamente transitiva, ya que si se toma $U = (0,1)$ y $V = (1,2)$ se tiene que $f^k(U) \cap V = (0,1) \cap (1,2) = \emptyset \ \ \forall\ k > 0$.

Obsérvese que este mismo resultado también se cumple cuando la función esta definida en un conjunto finito, como ejemplo tome esta misma función restringida al intervalo $I = [0,2]$.

EJEMPLO 2.1.8.-Considere la función identidad en cualquier intervalo I.

Todos los puntos son de período 1, y claramente son densos en I.

No tiene sensible dependencia a las condiciones iniciales ya que al tomar dos puntos arbitrariamente cerca, bajo iteraciones nunca van a separarse.

Con este ejemplo se ve que en la Definición 2.1.5, (2) $\not\Rightarrow$ (3).

EJEMPLO 2.1.9.- Sea $I = [0, \frac{3}{4}]$ y $f : I \to I$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(1-x) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$

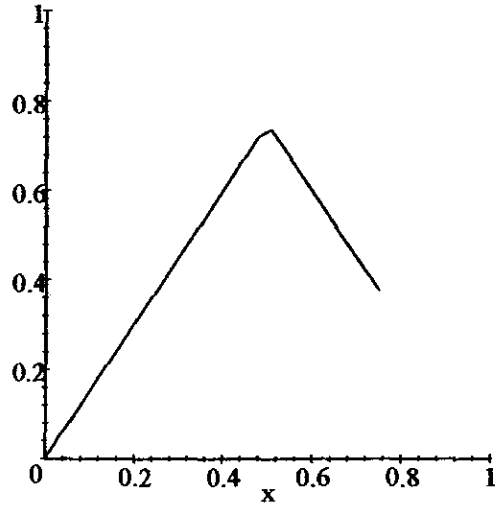


Figura 2.4

f exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales ya que si se toma $\delta = \frac{1}{2}$ y $x, y \in [0, \frac{3}{4}]$ tal que $|x - y| = \varepsilon > 0$, como $|f'(x)| = \frac{3}{2}$ para toda $x \in [0, \frac{3}{4}]$ entonces, aplicando el Teorema del Valor Medio se tiene

$$|f^n(x) - f^n(y)| = \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| = \left(\frac{3}{2}\right)^n \varepsilon > \frac{1}{2}$$

tomando n suficientemente grande.

En el intervalo $\left(0, \frac{3}{8}\right)$ no hay puntos periódicos. Para probar esto se verá que cuando $x \in \left(0, \frac{3}{8}\right)$ las iteraciones de x bajo f no regresan a este intervalo.

Sea $x \in \left(0, \frac{3}{8}\right)$, como la función en este intervalo esta dada por $f(x) = \frac{3}{2}x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \geq \frac{1}{2}$. Si $y \geq \frac{1}{2}$, entonces $f(y) \geq \frac{3}{8}$, ya que de lo contrario $f(y) < \frac{3}{8}$ es decir

$\frac{3}{2}(1-y) < \frac{3}{8}$, de aquí que $y > \frac{3}{4}$ lo cual es imposible porque $f\left(\left[0,\frac{3}{4}\right]\right) = \left[0,\frac{3}{4}\right]$. Entonces $f^{n+1}(x) \geq \frac{3}{8}$ para toda $x \in \left(0,\frac{3}{8}\right)$. Por lo tanto los puntos periódicos no son densos en $[0,\frac{3}{4}]$.

Esto muestra que (3) $\not\Rightarrow$ (2), en la Definición 2.1.5.

Para el caso donde la función esta definida en un conjunto infinito también se puede ver que (3) $\not\Rightarrow$ (2). Considere $f : I \to I$ donde $I = \mathbb{R}^+$ y $f(x) = 2x$.

Obsérvese que f no tiene puntos periódicos densos pero claramente exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales ya que si se toma $\delta = 1$ y $x, y \in I$ tal que $|x-y| = \varepsilon > 0$, como $|f'(x)| = 2$ para toda $x \in I$ entonces, aplicando el Teorema del Valor Intermedio se tiene

$$|f^n(x) - f^n(y)| = 2^n |x-y| = 2^n \varepsilon > 1$$

para n suficientemente grande.

En la siguiente Proposición se verá otra forma de expresar la definición 2.1.5 de Devaney.

PROPOSICION 2.1.10 *Sea (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. f es caótica en X si y sólo si dados dos conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe un punto periódico $p \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(p) \in V$.*

Es decir, f es caótica si y sólo si todo par de subconjuntos abiertos no vacíos de X comparten una órbita periódica.

DEMOSTRACION.- ($\Longrightarrow$) Supóngase que f es topologicamente transitiva y que tiene un conjunto denso de puntos periódicos. Dado algún par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, la transitividad asegura que existen $u \in U$ y un entero positivo k tales que $f^k(u) \in V$.

Ahora, se define $W = f^{-k}(V) \cap U$. Nótese que W es abierto y no vacío ya que es la intersección de dos conjuntos abiertos y u es un elemento de ambos. Como $W = f^{-k}(V) \cap U$ entonces

$$W \subset f^{-k}(V) \text{ y} \tag{2.3}$$

$$W \subset U. \tag{2.4}$$

De (2.3) se tiene que $f^k(W) \subset V$, pero se está suponiendo que los puntos periódicos de f son densos en X, así que el conjunto abierto no vacío W debe tener un punto periódico p. Entonces se tiene demostrado que existe un punto periódico $p \in W \subset U$ con la propiedad que $f^k(p) \in f^k(W) \subset V$.

($\Longleftarrow$) Supóngase que todo par de conjuntos abiertos no vacíos de X comparten una órbita periódica. En particular, cada conjunto abierto no vacío debe contener un punto periódico, por hipótesis. Por tanto, los puntos periódicos de f son densos en X. Como cada par de conjuntos abiertos no vacíos comparten una órbita periódica, f es topologicamente transitiva, luego por la Proposición 2.1.6 f es caótica. □

También se puede demostrar que cualquier número finito de conjuntos abiertos no vacíos, comparten una órbita periódica, siempre y cuando f sea caótica.

PROPOSICION 2.1.11 *Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función caótica. Entonces cualquier colección finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X comparten una órbita periódica.*

DEMOSTRACION.- Sea N el número de subconjuntos abiertos de la colección. La demostración se realizará por inducción en N.

Si $N = 1$, el resultado se sigue de la densidad de los puntos periódicos.

Si $N = 2$, se sigue de la Proposición 2.1.10

Supóngase que es válido para $N = n$, se demostrará que se cumple para $n + 1$.

Sin pérdida de generalidad se supondrá que los conjuntos son disjuntos, ya que si los subconjuntos no son disjuntos, entonces algún par de subconjuntos se intersectan en un subconjunto abierto. Sustituyendo el par por su intersección se produce una colección de n subconjuntos abiertos no vacíos que, por hipótesis de inducción, comparten una órbita periódica.

Considere la colección disjunta de subconjuntos. Entonces de esta colección se elige un subconjunto V. Los n subconjuntos restantes deben compartir una órbita periódica con primer período M. Ahora, de estos n subconjuntos, se elige otro y se le llamará U_0. Entonces se debe tener un punto $p \in U_0$, donde p es periódico con primer período $M > n - 1$ con la propiedad de que $O(p, f)$ intersecta cada uno de los n subconjuntos.

Ahora, se etiqueraran cada uno de los $n-1$ subconjuntos restantes de la siguiente manera. Se itera el punto p, y a la primera iteración que intersecta a uno de los $n-1$ subconjuntos se denotará por k_1, con $0 < k_1 < M$. El conjunto que contiene a $f^k(p)$ será designado U_1, es decir, $f^{k_1}(p) \in U_1$. Repitiendo este proceso, se llega a la siguiente iteración, $f^{k_2}(p)$, $0 < k_1 < k_2 < M$, intersectando a uno de los restantes $n-2$ subconjuntos. Este subconjunto resultante es designado U_2. De esta manera se etiqueta a cada uno de los n subconjuntos, de tal manera que $f^{k_i}(p) \in U_i$ para todo $i = 0, 1, \cdots, n-1$, donde $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1} < M$.

En seguida se define otra colección de subconjuntos con la siguiente propiedad. Sea $W_0 = U_{n-1}$. Claramente $f^{k_{n-1}}(p) \in W_0$.

Considere $W_1 = f^{-[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_0) \cap U_{n-2}$.

W_1 es abierto ya que es la intersección de dos conjuntos abiertos y es no vacío porque $f^{k_{n-1}}(p) \in W_0$ y $f^{k_{n-2}}(p) \in U_{n-2}$. Por lo tanto

$$f^{k_{n-2}}(p) = f^{-[k_{n-1}-k_{n-2}]}(f^{k_{n-1}}(p)) \in f^{-[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_0).$$

Esto implica que $f^{k_{n-2}}(p) \in W_1$.

Nótese que W_1 tiene la propiedad de que

$$f^{[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_1) \subset W_0.$$

Continuando de esta forma, se define

$$W_i = f^{-[k_{n-1}-k_{n-(i+1)}]}(W_{i-1}) \cap U_{n-(i+1)} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Cada W_i es abierto, no vacío y esta contenido en $U_{n-(i+1)}$. Además, se tiene la propiedad de que;

$$f^{[k_{n-1}-k_{n-(i+1)}]}(W_i) \subset W_{i-1} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Ya que V y W_{n-1} son abiertos, ellos comparten una órbita periódica. Así, existen un punto periódico $p' \in V$ y un entero positivo q tales que $f^q(p') \in W_{n-1} \subset U_0$. Pero entonces por la forma en que se construyeron los conjuntos W_i, las subsiguientes iteraciones de p' deben pasar por todas las U_i 's.

$$f^q(p') = f^{[q+k_0]}(p') \in W_{n-1} \subset U_0$$
$$f^{q+k_1}(p') = f^{[k_1-k_0]}(f^{[q+k_0]}(p')) \in f^{[k_1-k_0]}(W_{n-1}) \subset W_{n-2} \subset U_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f^{[q+k_i]}(p') = f^{[k_i-k_{i-1}]}(f^{[q+k_{i-1}]}(p')) \in f^{[k_i-k_{i-1}]}(W_{n-i}) \subset W_{n-(i+1)} \subset U_i$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f^{q+k_{n-1}}(p') = f^{[k_{n-1}-k_{n-2}]}(f^{[q+k_{n-2}]}(p')) \in f^{[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_1) \subset W_0 = U_{n-1}$$

Entonces la órbita siguiente de p', intersecta cada $V, U_0, U_1, \cdots, U_{n-1}$. □

COROLARIO 2.1.12 *Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función caótica. Entonces cualquier colección finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X, comparten una infinidad de órbitas periódicas.*

DEMOSTRACION.- Supóngase que existe una colección finita $\{U_i\}_{i=1}^n$ de subconjuntos abiertos no vacíos que comparten solo un número finito de órbitas periódicas.

Se define el conjunto P como la unión de los puntos de las órbitas periódicas compartidas. Ya que cada órbita periódica contiene un número finito de puntos, la unión finita de tales órbitas debe ser finita. Entonces P es un conjunto finito.

Ahora, se define otra colección de subconjuntos abiertos no vacíos $\{V_i\}_{i=1}^n$ por $V_i = U_i \backslash P$. Claramente $V_i \subset U_i$, y cada V_i es abierto y no vacío ya que quitando el conjunto finito de puntos P del conjunto abierto U_i, se deja un conjunto abierto no vacío. Entonces, por la Proposición 2.1.11, la colección $\{V_i\}_{i=1}^n$ debe compartir una órbita periódica. Esta nueva órbita no esta contenida en P. Por otra parte, esta órbita, obviamente pasa por toda la colección original $\{U_i\}_{i=1}^n$ de subconjuntos abiertos no vacíos ya que cada $V_i \subset U_i$. Esta contradicción prueba el resultado. □

De los resultados anteriores se llega a la siguiente Proposición.

PROPOSICION 2.1.13 *Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f es caótica en X.

ii) Dados dos conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe un punto periódico $p \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(p) \in V$.

iii) los elementos de cualquier colección finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X, comparten una órbita periódica.

iv) cualquier colección finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X, comparten una infinidad de órbitas periódicas.

DEMOSTRACION.-

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ por la Proposición 2.1.10

$(ii) \Rightarrow (iii)$ por la Proposición 2.1.10 y 2.1.11

$(iii) \Rightarrow (iv)$ por la Proposición 2.1.10 y el Corolario 2.1.12

$(iv) \Rightarrow (ii)$ pues cualquier coleccion finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X comparten una infinidad de órbitas periódicas. En particular dos subconjuntos abiertos no vacíos de X comparten una órbita periódica.

Como $(ii) \Leftrightarrow (i)$ entonces, $(iv) \Rightarrow (i)$ $\square$

Ahora, las siguientes dos Proposiciones aseguran que sensible dependencia a las condiciones iniciales y transitividad topológica son propiedades estables bajo cerradura. Se dirá que un conjunto A es *invariante bajo una función* f, si $f(A) \subset A$.

PROPOSICION 2.1.14. *Sean (X, d) un espacio métrico acotado y $f : Y \to Y$ una función continua donde $\overline{Y} = X$. Entonces $f : X \to X$ es topologicamente transitiva, si y sólo si $f : Y \to Y$ es topologicamente transitiva.*

DEMOSTRACION.-($\Longrightarrow$) Supóngase que f es topologicamente transitiva. Sean U y V conjuntos abiertos no vacíos de X. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. Para ver que f es topologicamente transitiva en Y, basta demostrar que $f^k(U') \cap V' \neq \emptyset$.

Primeramente, U' es denso en U, ya que si se toma un punto x en U, se tienen dos casos:

i) Si $x \in Y \Rightarrow x \in U'$.

ii) Si $x \notin Y \Rightarrow x$ es un punto de acumulación de $Y \Rightarrow$ existe $\{x_n\} \in Y$ tal que $x_n \to x \in U \Rightarrow$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \ \forall n > N$ (por ser U un abierto que contiene a x) $\Rightarrow x_n \in U \cap Y \ \ \forall \ n > N \Rightarrow$ por tanto $x_n \in U' \ \forall \ n > N \Rightarrow x$ es punto de acumulación de U'.

Ahora, por la continuidad de f, $f^k(U')$ es denso en $f^k(U)$ ya que si se toma $y \in f^k(U)$, entonces $y = f^k(x)$, donde $x \in U$ y se tienen dos casos:

i) Si $x \in U' \Rightarrow y = f^k(x) \in f^k(U')$.

ii) Si $x \notin U' \Rightarrow x \in U$ y $x \notin Y \Rightarrow$ existe $\{x_n\} \in U'$ tal que $x_n \to x \Rightarrow$ por continuidad de f^k, $\{y_n\} = \{f^k(x_n)\} \to f^k(x) = y$ y como $f^k(x_n) \in f^k(U')$ se tiene que y es punto de acumulación de $f^k(U')$.

Ahora se tiene que $f^k(U') \cap V' \neq \emptyset$, ya que por hipótesis $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, sea $y \in f^k(U) \cap V$. Además $f^k(U') \subset f^k(U)$. Entonces se tienen dos casos:

i) Si $y \in f^k(U')$, $y \in V \Rightarrow y \in f^k(U \cap Y) \Rightarrow$ existe $x \in U \cap Y \subset Y$ tal que $f^k(x) = y$ y por la invariancia de y, $y \in Y \Rightarrow y \in Y \cap V \cap f^k(U') = V' \cap f^k(U')$ por tanto $f^k(U') \cap V' \neq \emptyset$.

ii) Si $y \notin f^k(U'), y \in f^k(U)$, $y \in V \Rightarrow$ existe $\{y_n\} \in f^k(U')$ (por la densidad de $f^k(U')$ en $f^k(U)$) tal que $\{y_n\} \to y$. Como $\{y_n\} \in f^k(U') \Rightarrow$ existe$\{x_n\} \in U'$ tal que $\{y_n\} = \{f^k(x_n)\}$, $\{x_n\} \in U' = U \cap Y \subset Y \Rightarrow \{f^k(x_n)\} = \{y_n\} \in Y$ (por la invariancia de Y). Como V es abierto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in V \ \ \forall \ \ n > N \Rightarrow \{y_n\} \in V \cap Y \cap f^k(U') = V' \cap f^k(U') \ \ \forall$ $n > N$ por tanto $f^k(U') \cap V' \neq \emptyset$.

($\Longleftarrow$) Supóngase que f restringida a Y es topologicamente transitiva. Sean U y V conjuntos abiertos no vacíos arbitrarios de X, y sea $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U') \cap V' \neq \emptyset$. Entonces $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ ya que $f^k(U') \subset f^k(U)$ y $V' \subset V$, $(\emptyset \neq f^k(U') \cap V' \subset f^k(U) \cap V)$. $\square$

PROPOSICION 2.1.15.-*Sean* (X, d) *un espacio métrico acotado y* $f : Y \to Y$ *una función continua, donde* $\overline{Y} = X$. *Entonces* $f : X \to X$ *exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales si y sólo si* $f : Y \to Y$ *exhibe sensible dependencia a la condiciones iniciales.*

DEMOSTRACION.-($\Longrightarrow$) Primero se verá que la sensibilidad a las condiciones iniciales se extiende al subconjunto invariante Y. Como f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en X entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier vecindad $N_\delta(x)$ de cualquier $x \in Y$, existe $y \in N_\delta(x) \subset X$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$.

Además, existe $\{y_n\} \in Y$ tal que $\{y_n\} \to y$, en particular, se puede elegir la sucesión $\{y_n\}$ de tal manera que todos sus elementos esten contenidos en una bola abierta localizada en el

interior de $N_\delta(x)$.

Como f es continua, la sucesión $\{f(y_n)\}$ tiene como punto límite a $f(y)$.

Entonces se puede elegir una $y' \in \{y_n\}$ arbitrariamente cercana a x, tal que $d(f^k(x), f^k(y')) > \frac{\delta}{2}$. Esto es porque

$$\delta < d(f^k(x), f^k(y)) \leq d(f^k(x), f^k(y')) + d(f^k(y'), f^k(y)).$$

Además $\{f^k(y_n)\} \to f^k(y)$. Luego si se toma $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^k(y_n), f^k(y)) < \frac{\delta}{2} \quad \text{para} \quad n > N.$$

Como $y' \in \{y_n\}$ entonces $d(f^k(y'), f^k(y)) < \frac{\delta}{2}$ si $n > N$. Por tanto $d(f^k(x), f^k(y')) > \frac{\delta}{2}$.

($\Longleftarrow$) Ahora se verá que sensible dependencia a las condiciones iniciales se extiende a la cerradura de Y. Para $f : Y \to Y$ sea la constante de sensibilidad $\delta > 0$. Sea $x \in X \setminus Y$, y sea $N_\delta(x)$ una vecindad arbitraria de x.

Como $N_\delta(x) \cap Y \neq \emptyset$, existe un punto $x_1 \in N_\delta(x) \cap Y$. Entonces $N_\delta(x)$ es una vecindad de x_1 y como $f : Y \to Y$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales existen $x_2 \in N_\delta(x) \cap Y$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^k(x_1), f^k(x_2) > \delta$. La órbita de x no puede "seguir" a la órbita de x_1 y x_2 al mismo tiempo ya que estan separadas, es decir, nótese que:

$$\delta < d(f^k(x_1), f^k(x_2)) \leq d(f^k(x_1), f^k(x)) + d(f^k(x), f^k(x_2)).$$

Luego, al menos uno de los dos sumandos de la derecha de la desigualdad tiene que ser mayor que $\frac{\delta}{2}$. Por lo tanto $d(f^k(x), f^k(x')) > \frac{\delta}{2}$, donde $x' = \{x_1, x_2\}$. $\square$

Observación: Como consecuencia de las dos Proposiciones anteriores, considere un sistema dinámico (X, f) caótico de acuerdo a la definición de Devaney, sea Y el conjunto invariante de puntos periodicos de (X, f) (es decir, $f(Y) \subset Y$). Ahora considere el sistema dinámico (Y, f). Entonces $\overline{Y} = X$ ya que Y es denso en X. Luego por las Proposiciones 2.1.14 y 2.1.15, se tiene que el sistema dinámico (Y, f) es topologicamente transitivo y exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales, y junto con la condición trivial de puntos periódicos densos, esto implica

que el sistema (Y, f) es caótico.

Debido a la falta de puntos no periódicos, esta no es la clase de sistemas que comunmente se consideran como caóticos. Pero, como para cualquier punto periódico, existe otro punto periódico cercano de período arbitrariamente mas grande, este sistema si merece ser llamado caótico.

Considere el ejemplo de la función logística $f_4 = 4x(1-x)$. En el Capítulo 4 se verá que el sistema (X, f_4) es caótico con $X = [0, 1]$ según Devaney. Sea Y_0 el conjunto de puntos periódicos de f_4, por la observación anterior, el sistema (Y_0, f_4) es caótico. Pero, si se restringe al conjunto de puntos no periódicos Y_1, resulta que $\overline{Y_1} = X$ y aplicando las Proposiciones 2.1.14 y 2.1.15, el sistema (Y_1, f_4) es topologicamente transitivo y tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para mostrar que $\overline{Y_1} = X$ tome en cuenta que como f_4 es topologicamente transitiva en X, existe $x_0 \in X$ tal que $O(x_0, f_4)$ es densa en X (Ver Proposición 2.1.19), es decir $\overline{\{x_0, f_4(x_0), ...\}} = X$. Además, como $\{x_0, f_4(x_0), ...\} \subset Y_1$ esto implica que $\overline{\{x_0, f_4(x_0), ...\}} \subset \overline{Y_1}$ de aquí que $X \subset \overline{Y_1}$. Ahora, como $Y_1 \subset X$ entonces $\overline{Y_1} \subset \overline{X}$, pero $\overline{X} = X$ así que $\overline{Y_1} \subset X$.

El sistema (Y_1, f_4) no tiene puntos periódicos, sin embargo esta "lleno" de puntos no periódicos, es topologicamente transitivo y tiene sensibilidad a las condiciones iniciales por lo que, en algún sentido este sistema merece ser llamado caótico. Es por eso que se propone la siguiente definición de caos la cual no incluye la condición de puntos periódicos.

DEFINICION 2.1.16. *Sean (X, d) un espacio métrico acotado y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es caótica en X si:*

1) f tiene una órbita densa en X.

2) f exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales en X.

Otra definición de caos es presentada por Wiggins, en la que, al igual que en la Definición 2.1.16, no incluye la condicion de puntos periódicos densos.

DEFINICION 2.1.17 (S. Wiggins) *Sean (X,d) un espacio métrico donde $X \subset \mathbb{R}^q$ y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es caótica en X si:*

1) f es topologicamente transitiva en X.

2) f exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales en X.

Otra definición de caos es la de Martelli, aunque más adelante se verá que es equivalente a la definición de Wiggins.

Sea $L(x_0)$ el conjunto de puntos límites de la órbita $O(x_0, f)$.

Recuerde que una órbita $O(x_0, f)$ es inestable, si existe $\delta(x_0) > 0$ tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $y_0 \in X$ y $n \in N$, tal que $d(x_0, y_0) \leq \varepsilon$ y $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) > \delta(x_0)$.

DEFINICION 2.1.18 (Martelli) *Sean (X,d) un espacio métrico donde $X \subset \mathbb{R}^q$, y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es caótica en X, si existe $x_0 \in X$ tal que;*

1) $L(x_0) = X$

2) $O(x_0, f)$ es inestable.

La definición de Wiggins requiere sensibilidad a las condiciones iniciales en X, mientras que la de Martelli requiere inestabilidad respecto a X. Las siguientes Proposiciones establecen la equivalencia entre estas dos definiciones de caos.

PROPOSICION 2.1.19 *Sean $X \subset \mathbb{R}^q$ cerrado y acotado, $f : X \to X$ una función continua. Entonces f es topologicamente transitiva en X si y sólo si existe $x_0 \in X$ tal que $L(x_0) = X$.*

DEMOSTRACION.- ($\Longleftarrow$) Ya que $L(x_0) = X$, se tiene que $O(x_0, f)$ es densa en X, y por la Proposición 2.1.2 f es topologicamente transitiva.

($\Longrightarrow$) Ahora, supóngase que $f : X \to X$ es topologicamente transitiva en X.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, fijo, se considera una cubierta abierta (de bolas de radio $\frac{1}{m}$) del conjunto X. Luego como X es cerrado y acotado, existe una subcolección finita de la cubierta, misma que se denotará por $B^1(\frac{1}{m})$, $B^2(\frac{1}{m})$, ..., $B^{l(\frac{1}{m})}(\frac{1}{m})$, donde $l(\frac{1}{m})$ es el número de elementos de ésta subcolección.

Entonces X satisface las siguientes contenciones:

$$\begin{array}{rcl} X & \subset & B^1(1) \cup B^2(1) \cup ... \cup B^{l(1)}(1) \\ X & \subset & B^1(\frac{1}{2}) \cup B^2(\frac{1}{2}) \cup ... \cup B^{l(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}) \\ & \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ X & \subset & B^1(\frac{1}{m}) \cup B^2(\frac{1}{m}) \cup ... \cup B^{l(\frac{1}{m})}(\frac{1}{m}) \\ & \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Es decir, $X \subset \cup_{i=1}^{l(\frac{1}{m})} B^i(\frac{1}{m})$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Para cada $1 \leq j \leq l(\frac{1}{m})$, sea el conjunto $B_{j,\frac{1}{m}} = \cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(B^j(\frac{1}{m}))$, el cual es un conjunto abierto y denso en X. De hecho, sea $x \in X$ y $N_\delta(x)$ una vecindad de x. Como f es topologicamente transitiva existen $z \in N_\delta(x)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(z) \in B^j(\frac{1}{m})$. Entonces $z \in f^{-n}(B^j(\frac{1}{m})) \subset \cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(B^j(\frac{1}{m}))$. Así que $B_{j,\frac{1}{m}}$ es denso en X.

Ahora, considere los conjuntos $B_{\frac{1}{m}} = \cap_{j=1}^{l(\frac{1}{m})} B_{j,\frac{1}{m}}$, mismos que son densos y abiertos por ser intersección finita de conjuntos densos y abiertos.

Sea $B = \cap_{m=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m}}$, entonces por el Teorema de Baire .(ver [3, p. 200]), B es denso y abierto en X.

Sea $x_0 \in B$, se debe demostrar que $L(x_0) = X$.

Sea $y \in X$ y sea $N_\varepsilon(y)$ una vecindad de y, se toma n_0 tal que $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

Además, $x_0 \in B = \cap_{m=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m}}$, en particular $x_0 \in B_{\frac{1}{n_0}} = \cap_{j=1}^{l(\frac{1}{n_0})} B_{j,\frac{1}{n_0}}$ entonces, $x_0 \in B_{j,\frac{1}{n_0}}$ para todo $j = 1, ..., l(\frac{1}{n_0})$.

Como $x_0 \in \cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(B^j(\frac{1}{n_0}))$, existe $k > 0$ tal que $x_0 \in f^{-k}(B^j(\frac{1}{n_0}))$; es decir, $f^k(x_0) \in B^j(\frac{1}{n_0}) \subset N_\varepsilon(y)$.

Por tanto, $O(x_0, f) \cap N_\varepsilon(y) \neq \varnothing$. Además como y es arbitrario, se tiene que $\overline{O(x_0, f)} = X$, es decir, $L(x_0) = X$. $\square$

PROPOSICION 2.1.20 *Sean $X \subset \mathbb{R}^q$, $f : X \to X$ una función continua y $x_0 \in X$ tal que $L(x_0) = X$. Entonces f exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales si y sólo si $O(x_0, f)$ es inestable respecto a X.*

DEMOSTRACION.-($\Longrightarrow$) Claramente esta implicación se cumple ya que la misma constante de sensiblidad δ satisface la condición de inestabilidad de cualquier órbita.

($\Longleftarrow$) Supóngase que $O(x_0, f)$ es inestable respecto a X.

Primeramente se demostrará que $O(f^n(x_0), f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es inestable con la misma constante de inestabilidad de $O(x_0, f)$.

Como f es continua en x_0, para cada $N_\delta(f(x_0))$ existe $N_\varepsilon(x_0)$ tal que

$$f(N_\varepsilon(x_0)) \subset N_\delta(f(x_0)).$$

Además, como $O(x_0, f)$ es inestable, para $\varepsilon > 0$ existen $\delta(x_0) > 0$, $i \in \mathbb{N}$ y $p_0 \in X$ tales que

$$d(x_0, p_0) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(f^i(x_0), f^i(p_0)) > \delta(x_0).$$

De aquí que, como $p_0 \in N_\varepsilon(x_0)$, entonces $f(p_0) \in N_\delta(f(x_0))$, es decir

$$d(f(x_0), f(p_0)) < \delta.$$

Procediendo de esta misma forma se puede encontrar ξ tal que

$$d(f^n(x_0), f^n(p_0)) < \xi \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \text{ con } n < i.$$

Ahora, se demostrará que si $O(x_0, f)$ es inestable, entonces f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

Sea $y_0 \in X$, ya que $L(x_0) = X$ entonces $O(x_0, f)$ es densa en X, por lo tanto existen $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(f^n(x_0), y_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $O(x_0, f)$ y $O(f^n(x_0), f)$ son inestables con la misma constante de inestabilidad, sea $\delta(x_0)$ dicha constante. Entonces existen $z_0 \in X$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(f^n(x_0), z_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } d(f^{n+m}(x_0), f^m(z_0)) > \delta(x_0).$$

De aquí que

$$\delta(x_0) < d(f^{n+m}(x_0), f^m(z_0)) \leq d(f^{n+m}(x_0), f^m(y_0)) + d(f^m(y_0), f^m(z_0)).$$

Entonces

$$d(f^{n+m}(x_0), f^m(y_0)) > \frac{\delta(x_0)}{2} \quad \acute{o} \quad d(f^m(y_0), f^m(z_0)) > \frac{\delta(x_0)}{2}.$$

Por otra parte se tiene que

$$d(z_0, y_0) \leq d(z_0, f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en X con la constante de sensibilidad $\delta = \frac{\delta(x_0)}{2}$, ya que para $y_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ existen $m \in \mathbb{N}$ y $z_0 \in X$ tales que

$$d(z_0, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } d(f^m(y_0), f^m(z_0)) > \frac{\delta(x_0)}{2}$$

oequivalentemente, existe $f^n(x_0) \in X$ tal que

$$d(f^n(x_0), y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(f^{n+m}(x_0), f^m(y_0)) > \frac{\delta(x_0)}{2}. \quad \square$$

2.2 Caos en intervalos.

Esta sección se restringe a funciones continuas de un intervalo en sí mismo. En este caso se puede ver que solamente se requiere que la función sea topologicamente transitiva para asegurar un comportamiento caótico.

PROPOSICION 2.2.1. *Sea I un intervalo no necesariamente finito y $f : I \to I$ una función continua topologicamente transitiva, entonces*

1) Los puntos periódicos de f son densos en I.

2) f exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales .

Antes de demostrar esta Proposición, se verá el siguiente resultado que facilitará la demostración.

PROPOSICION 2.2.2. *Sea I un intervalo, no necesariamente finito y $f : I \to I$ una función continua. Si $J \subset I$ es un intervalo que no contiene puntos periódicos de f, y además $z, f^m(z), f^n(z) \in J$, con $0 < m < n$, entonces se cumple:*

$$z < f^m(z) < f^n(z) \qquad \acute{o} \qquad z > f^m(z) > f^n(z).$$

DEMOSTRACION.- Supóngase que existe $z \in J$ con $z < f^m(z)$ y $f^m(z) > f^n(z)$.

Se define la función $g(x) = f^m(x)$, así $z < g(z)$. Entonces, $z < g(z) < g^{k+1}(z)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto se demostará por inducción en g.

Para $k = 1$ claramente se cumple, ya que $z < g(z)$.

Supóngase que se cumple para k, es decir,

$$z < g(z) < g^k(z). \tag{2.5}$$

Hay que demostrar que se cumple para $k+1$, esto es, $z < g(z) < g^{k+1}(z)$.

Esto se demostrará por contradicción. Supóngase que no se cumple para $k+1$, es decir

$$z > g(z) > g^{k+1}(z). \tag{2.6}$$

Sea $h(x) = g^k(x) - x$ entonces, de (2.5) se tiene $h(x)$ tiene un valor positivo en z, ya que $h(z) = g^k(z) - z > 0$ y de (2.6) se tiene que tiene un valor negativo en $g(z)$, ya que $h(g(z)) = g^{k+1}(z) - g(z) < 0$.

Así, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $c \in (z, g(z)) \subset J$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $g^k(c) = c$ dando un punto períodico de f de período km en J $(c = g^k(c) = f^{km}(c))$, lo cual es imposible ya que por hipótesis f no tiene puntos periódicos en J.

Así $z < g^k(z)$ para toda $k > 0$. En particular, si $k = n - m > 0$,se tiene

$$z < g^k(z) = f^{km}(z) = f^{(n-m)m}(z). \tag{2.7}$$

Por otra parte, se esta suponiendo que

$$f^{(n-m)}(f^m(z)) = f^n(z) < f^m(z). \tag{2.8}$$

Ahora, se define $g(x) = f^{n-m}(x)$. De (2.8) se tiene que $g(f^m(z)) < f^m(z)$. Entonces $g^{m+1}(f^m(z)) < g(f^m(z)) < f^m(z)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto se demostrará por inducción en g.

Para $m = 1$, se cumple ya que $g(f^m(z)) < f^m(z)$.

Supóngase que se cumple para m, es decir,

$$g^m(f^m(z)) < g(f^m(z)) < f^m(z). \tag{2.9}$$

Hay que demostrar que se cumple para $m+1$, esto es, $g^{m+1}(f^m(z)) < g(f^m(z)) < f^m(z)$.

Esto se demostará por contradicción. Supóngase que no se cumple para $m+1$, es decir

$$g^{m+1}(f^m(z)) > g(f^m(z)) > f^m(z) \tag{2.10}$$

Sea $h(x) = g^m(x) - x$. Entonces de (2.9) se tiene que $h(x)$ tiene un valor negativo en $f^m(z)$, ya que $h(f^m(z)) = g^m(f^m(z)) - f^m(z) < 0$ y de (2.10) tiene un valor positivo en $g(f^m(z))$, ya que $h(g(f^m(z))) = g^{m+1}(f^m(z)) - g(f^m(z)) > 0$.

Así, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $d \in (f^m(z), g(f^m(z))) \subset J$ tal que $h(d) = 0$, es decir, $g^m(d) = d$, dando un punto periódico de f de período $(n-m)m$ en J, lo cual es imposible ya que por hipótesis f no tiene puntos periódicos en J.

Por tanto $g^m(f^m(z)) < f^m(z)$; es decir

$$f^{(n-m)m}(f^m(z)) < f^m(z). \tag{2.11}$$

De (2.7) y (2.11) se tiene que la función $f^{(n-m)m}(x) - x$ tiene un valor positivo en z y un valor negativo en $f^m(z)$, dando de nuevo un punto periódico de f de período $(n-m)m$ en J, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $f^m(z) < f^n(z)$. $\square$

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 2.2.1.-Supóngase que f es continua y topologicamente transitiva. Por la Proposición 2.1.6 solamente es necesario probar que los puntos periódicos son densos en I. Supóngase que este no es el caso. Entonces existe un intervalo $J \subset I$ que no contiene puntos periódicos. Sean $x \in J$ que no sea un extremo de J, y una vecindad abierta $N_\varepsilon(x) \subsetneq J$ y un intervalo abierto $E \subset J \setminus N_\varepsilon(x)$. Ya que f es topologicamente transitiva en I, existe un número natural $m > 0$, con $f^m(N_\varepsilon(x)) \cap E \neq \emptyset$ y por lo tanto, existe un $y \in N_\varepsilon(x) \subset J$ con $f^m(y) \in E \subset J$. Ya que J no contiene puntos periódicos, se cumple que $y \neq f^m(y)$. Como f es continua, se puede encontrar una vecindad U de y, con $f^m(U) \cap U = \emptyset$. Ya que U es un conjunto abierto, se puede usar transitividad topológica otra vez y encontrar un $n > m$ y un $z \in U$ con $f^n(z) \in U$.

Pero entonces, se tiene $0 < m < n$, y $z, f^n(z) \in U$ mientras que $f^m(z) \notin U$ esto contradice la Proposición 2.2.2, porque $f^m(z)$ debería estar entre z y $f^n(z)$ pero éstos estan en diferentes conjuntos. □

Observación: Como se puede notar, para funciones definidas en un intervalo, la única condición que debe satisfacer para cumplir con la Definición 2.1.5 (Definición de caos de Devaney) es la transitividad topológica. Además, la demostración no puede ser generalizada para dimensiones mas grandes, ya que la Proposición 2.2.2 ultiliza el orden de los números reales de forma esencial.

Ahora se probará que una función f uno a uno y continua en un intervalo I, no puede ser caótica, pero si f tiene por lo menos un punto de discontinuidad, puede ocurrir algún "tipo" de comportamiento caótico.

PROPOSICION 2.2.3. *Sea I un intervalo cerrado y acotado de los números reales con más de un punto, y sea $f : I \to I$ una función continua y uno a uno. Entonces:*

a) f es estrictamente creciente ó f es estrictamente decreciente en I.

b) f no es topologicamente transitiva, y f no exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales.

c) Si f es estrictamente creciente, cada punto periódico de f es un punto fijo de f. Además, si $f(x) \neq x$ para algún $x \in I$, I no tiene un conjunto denso de puntos periódicos o fijos de f.

d) Si f es estrictamente decreciente, existe exactamente un punto fijo de f y todos los otros

puntos periódicos de f tienen período dos. Además, si $f^2(x) \neq x$ para algún $x \in I$, entonces I no tiene un conjunto denso de puntos periódicos de f.

DEMOSTRACION.- **(a)** Este es un resultado estandar, el cual puede ser encontrado en [4, p. 98].

(b) Primero se probará el caso donde f es estrictamente creciente. Si $f(x) = x$ para toda $x \in I$, entonces es claro que no es topologicamente transitiva ni tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

Supóngase que $x \in I$ con $f(x) \neq x$. Entonces $f(x) > x$ o $f(x) < x$, considere el primer caso (la prueba es similar para el caso $f(x) < x$).

Como f es continua, se puede suponer que x no es un extremo de I. Sea $J = \{y \in I : y \geq x\}$. Si $y \in J$, entonces $f(y) \geq f(x) > x$, así que $f(y) \in J$. Entonces f mapea J sobre J y f^n mapea J sobre J para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $z \in I$ tal que $z < x$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x - z > \varepsilon$. De aquí se tiene que

$$|f^n(y) - z| > \varepsilon \text{ para toda } y \in J \text{ y } n \in \mathbb{N} \tag{2.12}$$

así que la transitividad no se satisface.

Ahora se demostrará que f no tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Si $f(x) > x$, y es estrictamente creciente, se sigue que $f^2(x) = f(f(x)) > f(x) > x$ y $f^3(x) > f^2(x) > f(x) > x$ y que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n+1}(x) > f^n(x) > f^{n-1}(x) > \cdots > f^2(x) > f(x) > x.$$

Entonces en este caso $\{f^n(x)\}$ es una sucesión creciente en I y como I es cerrado y acotado, esta sucesión debe converger a un límite $f^*(x)$. Nótese que $f^*(x) \in I$ y $f^*(x) > x$. Se quiere demostrar que $y < f(y)$ para toda $y \in (x, f^*(x))$ de otro modo $f(y) \leq y$ y se tiene $x < f(x) < f(y) \leq y < f^*(x)$. Ya que f es estrictamente creciente se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(x) < f^{n+1}(y) \leq f^n(y) \leq \cdots \leq f(y) \leq y < f^*(x).$$

Entonces $f^*(x) = \lim_{n \to \infty} f^n(x) \leq y < f^*(x)$ lo cual es imposible. Entonces $f(y) > y$. De aquí se

sigue que para toda $y \in (x, f^*(x))$,

$$y < f(y) < f(f^*(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = f^*(x).$$

Ahora, sea $\delta > 0$. Existe $\delta' > 0$ tal que $\delta' > \delta$ y $(f^*(x) - \delta', f^*(x)) \subseteq (x, f^*(x))$. Sea $K = (f^*(x) - \delta', f^*(x))$. Si $y \in K$ entonces $x < y < f(y) < f^*(x)$ así que f mapea K en K. Entonces, f^n mapea K en K para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora se puede decir que

$$|f^n(z_1) - f^n(z_2)| < \delta' < \delta \quad \text{para todo} \quad z_1, z_2 \in K \quad \text{y para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esto demuestra que el sistema no es sensible a las condiciones iniciales.

El caso cuando f es estrictamente decreciente, se hará después de probar (d).

(c) Sea x un punto periódico de f con período p. Entonces si $f(x) > x$ se sigue que

$$x < f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} f^{np}(x) = x,$$

lo cual es imposible, entonces si x es un punto periódico y $f(x) \geq x$. Entonces $f(x) = x$ y x es un punto fijo. Similarmente, si x es un punto periódico y $f(x) \leq x$ entonces $f(x) = x$ y x es otra vez un punto fijo.

Entonces todos los puntos periódicos de f son fijos.

Ahora, supóngase que el conjunto de puntos periódicos es denso. Entonces los puntos fijos son densos y, por continuidad, $f(x) = x$ para toda $x \in I$. Esto prueba la segunda parte de (c).

(d) Supóngase que f es estrictamente decreciente. Sea $I = [u, v]$. Si $f(u) = u$ entonces $u = f(u) > f(v) \geq u$ lo cual es imposible. Entonces $f(u) > u$. Un argumento similar demuestra que $f(v) < v$. Entonces la función $x \mapsto f(x) - x$ es continua, positiva en u y negativa en v, por lo tanto aplicando el Teorema del Valor Intermedio, existe un punto en I en el cual la función vale cero; este es un punto fijo para f.

Ahora, si x_1 y x_2 son puntos fijos distintos de f con $x_1 < x_2$ entonces $x_1 = f(x_1) > f(x_2) = x_2$ lo cual es imposible. Entonces f tiene exactamente un punto fijo.

Para completar la prueba, obsérvese que f es estrictamente decreciente. Entonces f^2 es estrictamente creciente en I. El resto de la demostración se obtiene aplicando la conclusión de (c) a la función f^2.

Finalmente considere (b) para el caso de que f es estrictamente decreciente.

Sea $I = [u, v]$ y por (d) existe un único punto fijo, el cual será denotado por x_0. Sea $L = [u, x_0]$ y $M = [x_0, v]$.

Como f es estrictamente decreciente, vemos que f mapea L sobre M y M sobre L, así que f^2 mapea L en L y M en M. También f^2 es estrictamente creciente ya que f es estrictamente decreciente.

Entonces la conclusión en la ecuación (2.12) puede ser aplicada a f^2 y L en lugar de f e I. Sea un subintervalo $L' \subset L$, un punto $z \in L$ con $x_0 \neq z$ y un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|f^{2n}(y) - z\right| > \varepsilon \text{ para toda } y \in L' \text{ y para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Por lo tanto f^2 no es topologicamente transitiva.

Ahora, se demostrará que f no es topologicamente transitiva. Sea M' el subintervalo cerrado tal que $M' = f(L') \subset M$. Entonces $z \notin M'$ así que existe $\varepsilon' > 0$ tal que $|w - z| > \varepsilon'$ para todo $w \in M'$. Pero como $M' = f(L') = \{f(y) : y \in L'\}$ se tiene

$$|f(y) - z| > \varepsilon' \text{ para todo } y \in L'.$$

Así que, como $f^{2n}(L') \subset L'$, se tiene que $f^{2n}(y) \in L'$. Entonces

$$\left|f(f^{2n}(y)) - z\right| = \left|f^{2n+1}(y) - z\right| > \varepsilon' \ \ \forall\, y \in L', \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

De (2.13) y (2.14) se tiene

$$|f^n(y) - z| > \min(\varepsilon, \varepsilon') \quad \text{para toda } y \in L' \text{ y toda } n \in \mathbb{N}.$$

Así que f no es topologicamente transitiva.

Para probar que f no tiene sensibilidad a las condiciones iniciales para el caso estrictamente

decreciente, la prueba es directa, usando la idea de que f^2 es estrictamente creciente. □

Entonces, la Proposición anterior demuestra que cuando f es continua y uno a uno, la función no puede ser caótica, ya que no es topologicamente transitiva y no tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

2.3 Discontinuidad y caos.

En la Proposición 2.2.3 de la sección anterior se requiere que la función sea continua en todo punto. Ahora se debilitará la condición de continuidad, pero en el menor grado posible. Se verá que si una función tiene un punto de discontinudad, puede ocurrir algún "tipo" de comportamiento caótico.

Para esto se considera una familia de funciones uno a uno, donde cada función mapea $[0,1)$ en si mismo y tiene un punto de discontinuidad.

Cada número real x puede ser escrito como la suma de un entero y un número $frac(x)$ en $[0,1)$; $frac(x)$ es llamada la parte fraccional de x.

Nótese que si $y \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$frac(frac(x)+y) = frac(x+y). \tag{2.15}$$

Ahora, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definamos la función $f_\alpha : [0,1) \to [0,1)$ por

$$f_\alpha(x) = frac(x-\alpha) \tag{2.16}$$

Una descripción alternativa de f_α es

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x+1-frac(\alpha) & si \quad 0 \le x < frac(\alpha) \\ x-frac(\alpha) & si \quad frac(\alpha) \le x < 1 \end{cases}. \tag{2.17}$$

Claramente cada función f_α es continua y creciente en cada intervalo $[0, frac(\alpha))$ y $[frac(\alpha), 1)$, pero cuando α no es un entero f_α es discontinua en $frac(\alpha)$.

En la siguiente figura se muestra la grafica de $f_{0.3}$.

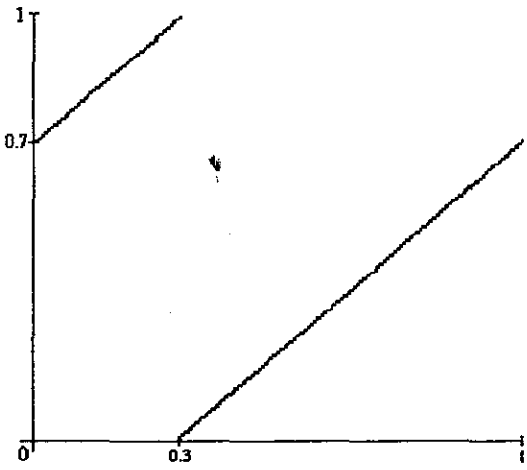


Figura 2.6

Además, f_α es uno a uno y mapea [0,1) en [0,1). Usando la ecuación (2.16) para α y β reales, se tiene

$$f_\alpha(x) = frac(x-\alpha) \quad \text{y} \quad f_\beta(x) = frac(x-\beta)$$

así que,

$$\begin{aligned}
(f_\alpha \circ f_\beta)(x) &= f_\alpha(f_\beta(x)) = f_\alpha(frac(x-\beta)) \\
&= frac(frac(x-\beta)-\alpha) \\
&= frac(x-\beta-\alpha) \quad \text{por (2.15)} \\
&= frac(x-(\alpha+\beta)) \\
&= f_{\alpha+\beta}(x) \quad \text{por (2.16).}
\end{aligned}$$

De aquí que:

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta} \tag{2.18}$$

PROPOSICION 2.3.1 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces*

(a) f_α es uno a uno en [0,1) y mapea [0,1) en [0,1).

(b) f_α tiene un punto fijo en [0,1) si y sólo si α es un entero, en tal caso $f_\alpha(x) = x$ y todo punto es un punto fijo.

(c) Si α no es un entero, entonces f_α tiene una discontinuidad en frac(α), pero f_α es continua y creciente en cada intervalo [0,frac(α)) y [frac(α),1).

DEMOSTRACION.- El resultado es inmediato de la definición (2.16), (2.17).

PROPOSICION 2.3.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces f_α tiene un punto periódico si y sólo si α es racional. En este caso, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha = \pm\frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{N}$ y no tienen factor común, todo punto en [0,1) es punto periódico de f_α, con período q.*

DEMOSTRACION.- Supóngase que $\alpha = \frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{N}$ no tienen factor común. Sea $x \in [0,1)$ y $n \in \mathbb{N}$. Por (2.18) se sigue que $f_\alpha^n(x) = x \Leftrightarrow f_{n\alpha}(x) = x$. Entonces como $\alpha = \frac{p}{q}$ se tiene que $f_{n\alpha}(x) = x \Leftrightarrow f_{\frac{np}{q}}(x) = x$. Además, de la Proposición 2.3.1 (*b*) se cumple que $f_{\frac{np}{q}}(x) = x \Leftrightarrow \frac{np}{q}$ es un entero. Además, $\frac{np}{q}$ es un entero $\Leftrightarrow n$ es divisible por q.

Si n es divisible por q, entonces $f_\alpha^n(x) = f_{\frac{np}{q}}(x) = x$ para toda x, así en este caso, todo punto de [0,1) es periódico con primer período menor o igual a n. Además, el mínimo valor posible de n, divisible por q es el mismo q, por lo tanto cada punto de [0,1) tiene período q. □

La siguiente Proposición es de alguna manera el recíproco de la Proposición 2.2.3, la cual afirma que si una función f es uno a uno, y tiene un punto de discontinuidad, entonces f es topologicamente transitiva y exhibe sensibilidad en las condiciones iniciales.

PROPOSICION 2.3.3. *Sea α un número irracional. Entonces $f_\alpha : [0,1) \to [0,1)$ no tiene puntos periódicos, pero es topologicamente transitiva y exhibe sensible dependencia a las condiciones iniciales.*

DEMOSTRACION.- El hecho de que f_α no tiene puntos periódicos es inmediato de la Proposición 2.3.2. Además, el conjunto $\{frac(n\alpha) : n = 1, 2, \cdots\}$ es denso en $[0,1)$. (8, pp. $211 - 212$).

Ahora se probará transitividad topológica. Sea $\varepsilon > 0$, sea $x, y \in [0,1)$, con $x \leq y$. Sea $\eta > 0$ tal que $\eta < \varepsilon$, y $1 - y - \eta > 0$. Entonces $0 < 1 + x - y - \eta < 1$, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que (por ser el conjunto $\{frac(n\alpha) : n = 1, 2, \cdots\}$ denso) $1 + x - y - \eta < frac(n\alpha) < 1 + x - y + \eta$. Esto implica que $x < 1 + x - y - \eta < frac(n\alpha)$ (porque $1 - y - \eta > 0$) y que $y - \eta < x - frac(n\alpha) + 1 < y + \eta$.

Entonces, $f_{n\alpha}$ dada en la ecuación (2.17), satisface

$$f_{n\alpha}(x) = x - frac(n\alpha) + 1 \in (y - \eta, y + \eta) \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon).$$

Además como $f_{n\alpha} = f_\alpha^n$, se tiene $|f_\alpha^n(x) - y| < \varepsilon$. (la conclusión se sigue similarmente si $x > y$). Esto muestra transitividad topológica.

Para probar sensibilidad en las condiciones iniciales, sea $x \in [0,1)$, sea $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta = 1 - \varepsilon$. Sea $y \in [0,1)$ tal que $x < y < x + \varepsilon$. Se elige $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < frac(n\alpha) < y$. Se sigue que $|x - y| < \varepsilon$ y

$$\begin{aligned} |f_\alpha^n(x) - f_\alpha^n(y)| &= |f_{n\alpha}(x) - f_{n\alpha}(y)| \\ &= |1 - frac(n\alpha) + x - y + frac(n\alpha)| \\ &= |1 + x - y| \\ &= 1 - (y - x) \\ &> 1 - \varepsilon = \delta. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Observación: Nótese que cuando α es irracional, el sistema (f_α, I) en algún sentido merece ser llamado caótico aunque no cumpla con la condición de continuidad.

El no tener un conjunto denso de puntos periódicos, significa que f_α no es caótica de acuerdo a la definición de Devaney (Definición 2.1.5), pero f_α puede tener un conjunto denso de puntos "aproximadamente periódicos" descrito en el siguiente sentido. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in [0,1)$, entonces como f_α es topologicamente transitiva por la Proposición 2.3.3, existe $y \in [0,1)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|x - f_\alpha^n| < \frac{\varepsilon}{2}$, así que $|y - f_\alpha^n(y)| < \varepsilon$. Entonces en general, en el sistema (I, f) un

punto y se dice ε-periódico, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f^n(y) - y| \leq \varepsilon$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto de puntos ε-periódicos de $([0,1), f_\alpha)$ es denso en $[0,1]$. (Los puntos periódicos pueden ser considerados como puntos "0-periódicos"). Como f_α es topologicamente transitiva y exhibe sensibilidad en las condiciones iniciales parece razonable pensar que el sistema $([0,1), f_\alpha)$ sea caótico, aunque en un sentido mas débil que la Definición de Devaney.

2.4 Período tres y caos.

En esta sección, se dará la definición de caos propuesta por Li-Yorke, la cual es válida para funciones definidas en intervalos.

DEFINICION 2.4.1. (Li-Yorke) *Sea J un intervalo y $f : J \to J$ una función continua. Se dice que f es caótica en J si:*

i) f tiene en J puntos periódicos de cualquier período.

ii) Existe un subconjunto no numerable $S \subset J$ (que no contiene puntos periódicos) tal que

1) Para todo $x, y \in S$ con $x \neq y$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &> 0 \quad y \\ \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &= 0 \end{aligned}$$

2) Para cualquier $x \in S$ y cualquier punto periódico $z \in J$,

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| > 0.$$

Una desventaja de esta Definición es que no especifica si el comportamiento debe ser considerado en todo el intervalo J o simplemente en S.

PROPOSICION 2.4.2. *Sea J un intervalo y sea $f : J \to J$ una función continua. Si existe un punto $a \in J$ para el cual los puntos $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, y $d = f^3(a)$ satisfacen $d \leq a < b < c$ (o $d \geq a > b > c$). Entonces f es caótica de acuerdo a la Definición de Li-Yorke.*

Observación 2.4.2 Nótese que si una función f tiene un punto periódico de período tres, entonces la hipótesis de la Proposición se satisface y por tanto f es caótica de acuerdo a Li-Yorke.

De esto se deriva un resultado sorprendente, ya que si una función tiene un punto de período tres, entonces de acuerdo a la Proposición 2.4.2 tiene puntos de cualquier período. Además, existe un conjunto no numerable $S \subset J$, tal que para cualquiera dos puntos $x, y \in S$, la distancia entre las dos sucesiones de iteraciones $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$, tienen la propiedad que cuando n tiende a ∞, el límite inferior es igual a cero mientras que el límite superior es positivo.

Que el límite inferior sea igual a cero, quiere decir que existe una infinidad de $n's$ tales que $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ están tan cercanos como se quiera, y que el límite superior sea positivo, quiere decir que existe una infinidad de $n's$ tales que la distancia entre $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ siempre es positiva. En otras palabras, bajo las iteraciones de f, diferentes puntos de S estan algunas veces cercanos y algunas otras veces separados, y ninguno de estos es periódico.

Para la demostración de la Proposición 2.4.2 se necesitarán las siguientes Proposiciones.

PROPOSICION 2.4.3. *Sea $g : J \to \mathbb{R}$ una función continua donde J es un intervalo. Para cualquier intervalo compacto $I_1 \subset g(J)$ existe un intervalo compacto $Q \subset J$ tal que $g(Q) = I_1$.*

DEMOSTRACION.- Sea $I_1 = [a, b]$, $J = [c, d]$, como $[a, b] \subset g([c, d])$ existen puntos $\alpha, \beta \in [c, d]$ tales que $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Para el caso $\alpha < \beta$ es posible que existan puntos distintos de α en $[\alpha, \beta]$ tales que bajo g caen en a. Sea $e = \max\{x \in [\alpha, \beta] : g(x) = a\}$, ahora es posible que existan puntos en $[e, \beta]$ tales que bajo g caen en b. Sea $h = \min\{x \in [e, \beta] : g(x) = b\}$.

Por la forma en que se tomaron e y h, se tiene que $g([e, h]) = [a, b]$, donde $Q = [e, h]$ (ver Figura 2.7). En el caso $\alpha > \beta$ se argumenta de manera analoga.

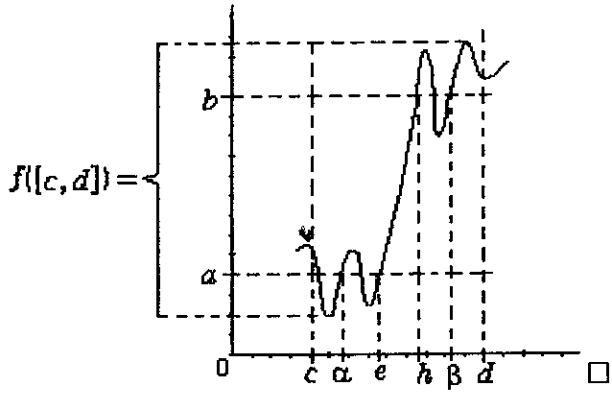


Figura 2.7

PROPOSICION 2.4.4. *Sea $f : J \to J$ una función continua y sea $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de intervalos compactos con $I_n \subset J$ y $I_{n+1} \subset f(I_n)$ $\forall$ n.*

Entonces existe una sucesión de intervalos compactos $\{Q_n\}$ tal que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ y $f^n(Q_n) = I_n$ para $n \geq 0$. Además, para cualquier $x \in Q = \cap Q_n$ se tiene $f^n(x) \in I_n$ $\forall$ n.

DEMOSTRACION.- (Por inducción) Defina $Q_0 = I_0$. Entonces $f^0(Q_0) = I_0$.

·Se demostrá para $k = 1$, como $I_n \subset J$ y $I_{n+1} \subset f(I_n) \Rightarrow I_0 \subset J$, $I_1 \subset f(I_0)$ y por la Proposición 2.4.3, existe $Q_1 \subset I_0$ tal que $f(Q_1) = I_1$.

·Supóngase que se cumple para $k = n-1$, es decir, que existe Q_{n-1} tal que $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ $(Q_{n-1} \subset Q_{n-2} \subset \cdots \subset I_0)$.

·Se demostrá que se cumple para $k = n$. Como $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ entonces por hipótesis se tiene que $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1})$. Por la Proposición 2.4.3 aplicado a $g = f^n$, como $I_n \subset f^n(Q_{n-1}) = g(Q_{n-1})$ se sigue que existe $Q_n \subset Q_{n-1}$ tal que $g(Q_n) = I_n$ es decir,

$$f^n(Q_n) = I_n \quad \text{y} \quad Q_n \subset Q_{n-1} \subset \cdots \subset Q_1 \subset I_0.$$

Ahora, sea $x \in Q = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n$ entonces si $x \in Q_n$ $\forall$ n, y como $f^n(Q_n) = I_n$. Entonces si $x \in Q_1 \Rightarrow f(x) \in I_1$; si $x \in Q_2 \Rightarrow f^2(x) \in I_2 \cdots$; si $x \in Q_n \Rightarrow f^n(x) \in I_n$. □

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 2.4.2.- Primero se demostrará que f tiene puntos periódicos de cualquier período.

Sea $E = [a, b]$, $L = [b, c]$ y k un entero positivo.

Para $k > 1$, sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos, $I_n = L$ para $n = 0, 1, 2, \cdots, k-2$ y $I_{k-1} = E$, se define I_n periódicamente por $I_{n+k} = I_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Si $k = 1$, sea $I_n = L$ $\forall n$.

Nótese que la sucesión de intervalos $\{I_n\}$ antes definida satisface las hipotesis de la Proposición 2.2.4, ya que por definición son L ó E y estos son compactos. Además $I_n \subset J$, y como $I_{n+1} = L$, $I_n = L$, entonces

$$[b, c] = I_{n+1} \subset f(I_n) = f([b, c]) = [c, d] \quad \text{con } d \leq a.$$

Sean Q_n los conjuntos de la demostración de la Proposición 2.4.4. Entonces satisfacen $Q_k \subset Q_0$ y $f^k(Q_k) = I_k = I_0 = Q_0$.

Por el Proposición 1.3.1, $g = f^k$ tiene un punto fijo $p_k \in Q_k$, ya que $Q_k \subset Q_0 = f^k(Q_k)$.

Además, p_k no puede tener período menor que k para f, ya que si p_k tiene período $k-1$, entonces $f^{k-1}(p_k) = p_k \in Q_k \subset I_0 = L$ y $f^{k-1}(p_k) \in I_{k-1} = E$, por tanto $f^{k-1}(p_k) = b$. Entonces $f^{k+1}(p_k) = d \notin L, E$, lo cual es una contradicción porque $f^{k+1}(p_k) \in I_{k+1} = I_1 = L$. Entonces el punto p_k no puede tener período $k-1$. Por tanto p_k es de periódo k.

Ahora, se demostrará que existe un subconjunto no numerable $S \subset J$ (que no contiene puntos periódicos) tal que

1) Para todo $x, y \in S$ con $x \neq y$,

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \quad \text{y} \tag{2.19}$$

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \tag{2.20}$$

2) Para cualquier $x \in S$ y cualquier punto periódico $z \in J$,

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| > 0. \tag{2.21}$$

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de sucesiones de intervalos $M = \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$M_n = E \quad \text{o} \quad M_n \subset L \quad \text{y} \quad f(M_n) \supset M_{n+1} \tag{2.22}$$

si $M_n = E$, entonces

$$n \text{ es el cuadrado de un entero y } M_{n+1}, M_{n+2} \subset L, \tag{2.23}$$

donde $E = [a,b]$ y $L = [b,c]$.

Si n es el cuadrado de un entero, entonces $n+1$ y $n+2$ no lo son, así el último requerimiento en (2.23) es redundante.

Para $M \in \mathcal{L}$, sea $P(M,n)$ el número de $i's$ en $\{1,2,..,n\}$ para el cual $M_i = E$.

Para cada $r \in \left(\frac{3}{4},1\right)$ se elige la sucesión $M^r = \{M_n^r\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{L}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(M^r,n^2)}{n} = r. \tag{2.24}$$

Sea $\mathcal{L}_0 = \left\{M^r : r \in \left(\frac{3}{4},1\right)\right\} \subset \mathcal{L}$. Entonces $\mathcal{L}_0$ es no numerable ya que $M^{r_1} \neq M^{r_2}$ para $r_1 \neq r_2$.

Para cada $M^r = \{M_n^r\} \in \mathcal{L}_0$ por la Proposición 2.4.4, existe un punto x_r con $f^n(x_r) \in M_n^r$ para toda n.

Sea $S = \left\{x_r : r \in \left(\frac{3}{4},1\right)\right\}$. Entonces S es también no numerable.

Para $x \in S$, sea $P(x,n)$ el número de $i's$ en $\{1,2,\cdots,n\}$ para las cuales $f^i(x) \in E$. Nunca se puede tener que $f^k(x_r) = b$, porque entonces x_r sería eventualmente periódico de período 3, $(f^k(x_r) = b \in E,\ f^{k+1}(x_r) = c \in L,\ f^{k+2}(x_r) = d \notin L)$, en contradicción con (2.23). Entonces $f^k(x_r) \neq b$.

Además, recuerde que $P(x_r,n)$ cuenta el número de $i's$ tal que $f^i(x_r) \in E$ y como $f^n(x_r) \in M_n^r$, es equivalente a contar el número de veces que $M_n^r = E$. De aquí que $P(x_r,n) = P(M^r,n)\ \forall\ n$ y así

$$\rho(x_r) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(x_r,n^2)}{n} = r \qquad \text{para todo } r.$$

Se afirma que, para $p, q \in S$ con $p \neq q$,

existen una infinidad de $n's$ tales que $f^n(p) \in E$ y $f^n(q) \in L$ o viceversa. (2.25)

Como $p \neq q$, se puede suponer que $\rho(p) \gtrless \rho(q)$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{P(p,n^2)-P(q,n^2)}{n}\right] > 0$ y por tanto $P(p,n) - P(q,n) \to \infty$, así que debe haber una infinidad de $n's$ tales que $f^n(p) \in E$ y $f^n(q) \in L$. Supóngase que solo existe una cantidad finita de $n's$ tales que $f^n(p) \in E$ y $f^n(q) \in L$. Entonces existe N tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{P(p,n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(q,n^2)}{n}$ para $n > N$, por lo tanto $\rho(p) = \rho(q)$, lo cual es una contradición, ya que se esta suponiendo que $\rho(p) > \rho(q)$.

Se tiene que $f^2(b) = d \leq a$ y además f^2 es continua, por tanto, dado $\varepsilon = \frac{b-d}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left|f^2(x) - f^2(b)\right| < \frac{b-d}{2}$. Entonces

$$f^2(x) < \frac{b-d}{2} + f^2(b) = \frac{b-d}{2} + d = \frac{b+d}{2} \tag{2.26}$$

para toda $x \in [b-\delta, b] \subset E$.

Si $p \in S$ y $f^n(p) \in E$, entonces (2.23) implica que $f^{n+1}(p) \in L$ y $f^{n+2}(p) \in L$.

Por lo tanto $f^n(p) < b - \delta$, por que si $f^n(p) \geq b - \delta$ entonces por (2.26), $f^{n+2}(p) < \frac{b+d}{2}$ de aquí que $f^{n+2}(p) \notin L$, y esto no es posible.

Si $f^n(q) \in L$ entonces $f^n(q) \geq b$, así

$$|f^n(p) - f^n(q)| > \delta.$$

Por la afirmación (2.25), para cualquier $p, q \in S$, con $p \neq q$ se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| \geq \delta > 0.$$

Esto demuestra (2.19).

Esta técnica puede ser usada similarmente para probar (2.21).

Ahora se iniciará con la demostración de (2.20). Ya que $f(b) = c$, $f(c) = d \leq a$ se pueden elegir intervalos $[b^n, c^n]$ con $n = 0, 1, 2, \cdots$. tal que:

(a) $[b, c] = [b^0, c^0] \supset [b^1, c^1] \supset \cdots \supset [b^n, c^n] \supset \cdots$

(b) $f(x) \in (b^n, c^n) \quad \forall \quad x \in (b^{n+1}, c^{n+1})$

$(c)\, f\left(b^{n+1}\right) = c^n, \quad f(c^{n+1}) = b^n.$

Para darse una idea de la forma como estan dados los intervalos $[b^n, c^n]$, obsérvese que de (c) se tiene $f(b^1) = c^0 = c$, y entonces $b^1 = b$. Además, como $f(b) = c > b$ y $f(c) = d < b$ aplicando el Teorema del Valor Intermedio, existe $c^1 \in (d, c)$ o más especificamente, $c^1 \in (b, c)$, tal que $f(c^1) = b$. Así se encuentra el intervalo $[b^1, c^1]$.

Ahora, como $f(c^2) = b^1 = b$ por (c), se tiene que $c^2 = c^1$. Además $f(b^1) = c > c^1$ y $f(c^2) = b < c^1$. Entonces por el Teorema del Valor Intermedio existe $b^2 \in (b^1, c^2)$ tal que $f(b^2) = c^1$, encontrando asi el intervalo $[b^2, c^2]$. (Ver Figura 2.8).

Siguiendo con este mismo proceso se encuentran todos los intervalos $[b^n, c^n]$ de tal manera que cumplan con las condiciones (a), (b) y (c).

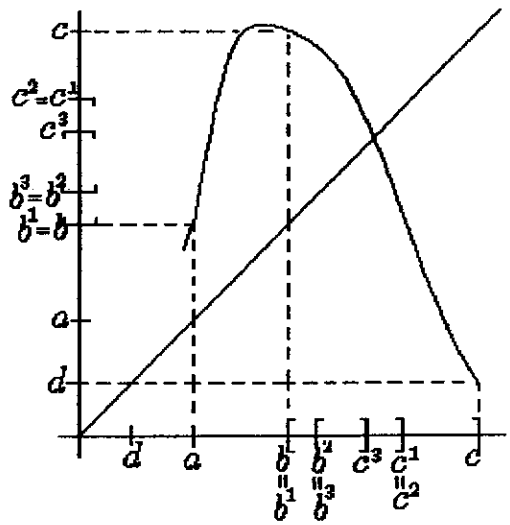


Figura 2.8

Sea $A = \cap_{n=0}^{\infty} [b^n, c^n]$, $b^* = \inf A$ y $c^* = \sup A$. Además, ya que b^n es una sucesión monotona creciente entonces $b^n \to b^*$ y como c^n es una sucesión monotona decreciente, $c^n \to c^*$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f(b^{n+1}) = \lim_{n\to\infty} c^n \quad \text{por } (c),$$

y por la continuidad de f, $f(\lim_{n\to\infty} b^{n+1}) = b^*$. Por tanto, $f(b^*) = c^*$. Por el mismo argumento se llega a que $f(c^*) = b^*$.

Para probar (2.20) se puede ser más específico en la elección de las sucesiones M^r.

Además para los anteriores requerimientos en $M \in \mathcal{L}$, se supondrá que si $M_k = E$ para

$k = n^2$ y $(n+1)^2$ entonces $M_k = \left[b^{2n-(2j-1)}, b^*\right]$ para $k = n^2 + (2j-1)$, $M_k = \left[c^*, c^{2n-2j}\right]$ para $k = n^2 + 2j$ donde $j = 1, 2, \cdots, n$.

Para las $k's$ las cuales no son cuadrados de enteros, se supondrá que $M_k = L$.

Del hecho que $\rho(x)$ es el límite de la fracción de $n's$ para las cuales $f^{n^2}(x) \in E$, se sigue que para cualquier $r^*, r \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ existen una infinidad de $n's$ tales que $M_k^r = M_k^{r^*} = E$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$, ya que de lo contrario, solo existe una cantidad finita de $n's$ tales que $M_k^r = M_k^{r^*} = E$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$. Entonces la proporción de elementos de $M_k^r = M_k^{r^*} = E$ es tal que $r^*, r \notin \left(\frac{3}{4}, 1\right)$, lo cual es una contradicción.

Para ver (2.20) sea $x_r \in S$ y $x_{r^*} \in S$. Ya que $b^n \to b^*$, $c^n \to c^*$ cuando $n \to \infty$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b^n - b^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |c^n - c^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > N.$$

Entonces, para cualquier $n > N$ y $M_k^r = M_k^{r^*} = E$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$, se tiene

$$f^{n^2+1}(x_r) \in M_k^r = \left[b^{2n-1}, b^*\right] \quad \text{con} \quad k = n^2 + 1.$$

Así que $f^{n^2+1}(x_r)$, $f^{n^2+1}(x_{r^*})$ ambos deben estar en $\left[b^{2n-1}, b^*\right]$. Por lo tanto

$$\left|f^{n^2+1}(x_r) - f^{n^2+1}(x_{r^*})\right| < \varepsilon.$$

Ya que son una infinidad de $n's$ con esta propiedad, el $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x_r) - f^n(x_{r^*})| = 0$. $\square$

Observación: Otra desventaja de la definición de Li-Yorke es que se pueden encontrar ejemplos de mapeos para los cuales el conjunto S tiene medida cero. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

EJEMPLO 2.4.5. Sea $I = [0, 1]$ y $f : I \to I$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 0.25 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad 0.25 \leq x < 0.5 \\ -4x + 3 & \text{si} \quad 0.5 \leq x < 0.75 \\ 0 & \text{si} \quad 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

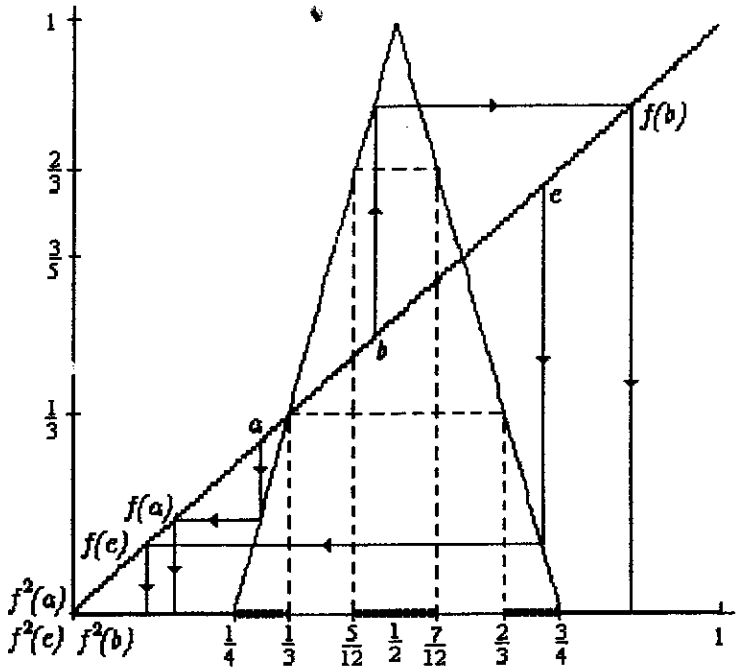


Figura 2.9

Como $O\left(\frac{23}{65}\right) = \left\{\frac{23}{65}, \frac{27}{65}, \frac{43}{65}\right\}$ es una órbita de período 3, f satisface la definición de Li-Yorke por tanto es caótica en I, pero se verá que el conjunto S el cual cumple con la definición es de medida cero.

Por medio del análisis gráfico se puede observar que $f^2(x) = 0$ cuando $x < \frac{1}{3}$ ó $x > \frac{2}{3}$ (ver Figura 2.9), además que $f^2(x) = 0$ si $x \in I_1 = \left[\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right]$ cuya longitud es $\frac{1}{6}$. Por otra parte se tiene que

$$f^{-1}(I_1) = I_{21} \cup I_{22} = \left\{x : f^3(x) = 0\right\}$$

donde $I_{21} = \left[\frac{17}{48}, \frac{19}{48}\right]$, $I_{22} = \left[\frac{29}{48}, \frac{31}{48}\right]$ y la longitud total de los dos intervalos es $\frac{1}{12}$. De esta misma forma se tiene que

$$f^{-1}(I_{21} \cup I_{22}) = I_{31} \cup I_{32} \cup I_{33} \cup I_{34} = \left\{x : f^4(x) = 0\right\}$$

donde $I_{31} = \left[\frac{65}{192}, \frac{67}{192}\right]$, $I_{32} = \left[\frac{77}{192}, \frac{79}{192}\right]$, $I_{33} = \left[\frac{113}{192}, \frac{115}{192}\right]$, $I_{34} = \left[\frac{125}{192}, \frac{127}{192}\right]$ y la longitud total es $\frac{1}{24}$. Siguiendo con este mismo proceso se encuentra una familia de intervalos disjuntos contenidos en $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ cuya longitud total es $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \frac{1}{3}$. Todo punto x que pertenece a uno de estos intervalos satisface $f^n(x) = 0$ para algún $n \geq 1$. Por tanto el conjunto de puntos S_0 cuya órbita no va a 0 tiene medida cero. Además como en el conjunto S_0 estan los puntos que no convergen, se tiene que S debe estar contenido en S_0.

Así que cualquier punto $x \in [0,1]$ escogido al azar converge a cero.

El siguiente ejemplo muestra que la condición de continuidad no puede debilitarse ni en el menor grado posible.

EJEMPLO 2.4.6. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = \begin{cases} x + 0.5 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{si} \quad 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$

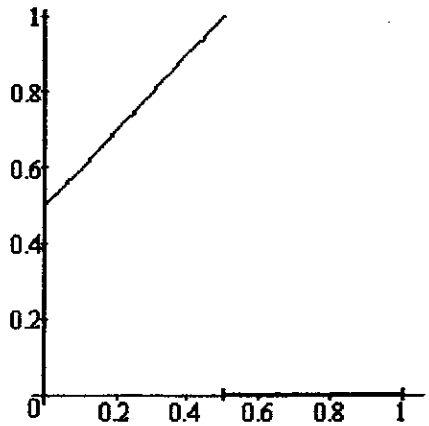


Figura 2.10

Obsérvese que $O(0, f) = \{0, 0.5, 1\}$ es una órbita de período 3. Por lo anterior se podría pensar que f es caótica de acuerdo a Li-Yorke. Pero nótese que cada órbita de f en $[0,1]$ es eventualmente periódica de período 3. Por ejemplo si $x = 0.2$, $f(x) = 0.7$, $f^2(x) = 0$,.... Por tanto no satisface la condición (i) de la Definición 2.4.1, es decir f no es caótica. Esto se debe a que f es discontinua en 0.5.

Otra desventaja de la definición de Li-Yorke es que no se aplica en dimensiones mayores que 1. Por ejemplo, sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación en $\mathbb{R}^2$ de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor del origen, es decir $f(r, \theta) = (r, \theta + \frac{2\pi}{3})$. f tiene una órbita de período 3 pero no satisface (i) ya que cualquier órbita es de periodo 3.

Capítulo 3

EL TEOREMA DE SARKOVSKII

En el estudio de los sistemas dinámicos discretos la existencia de puntos periódicos juega un papel muy importante en particular, en las diferentes definiciones de Caos. El Matemático Ucraniano Alexander Nikolaevich Sarkovskii, se preguntaba si había alguna relación entre la existencia de una órbita periódica, digamos de período n y la existencia de otra órbita periódica de período m. Por ejemplo, si $f : I \to I$ donde $I \subset \mathbb{R}$ y f continua tiene una órbita de período 2 ¿implicará esto que f tiene una órbita de período 1?, ¿la presencia de una órbita de período 3 implicará la existencia de una órbita de período 2? y preguntas similares, tendran respuesta en esta sección, mediante el Teorema de Sarkovskii.

3.1 La investigación de Sarkovskii.

Sarkovskii descubrió que había relación entre la existencia de puntos periódicos. El resultado de sus indagaciones se resume en lo que hoy conocemos como el Teorema de Sarkovskii. Antes de enunciar este resultado, se responderan las siguientes preguntas:

¿Si se tiene una función continua con un punto de período 2, implicará que esta función tenga un punto de período 1?. La siguiente Proposición establece que la respuesta es afirmativa.

PROPOSICION 3.1.1 *Sea $f : I \to I$ una función continua donde $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto de primer período 2, entonces f tiene un punto de primer período 1.*

DEMOSTRACION.- Sea $O(x_1, f) = \{x_1, x_2\}$ una órbita de período 2. Supóngase sin perdida de generalidad que $x_1 < x_2$. Como $f(x_1) = x_2 > x_1$ y $f(x_2) = x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) - x_1 > 0$ y $f(x_2) - x_2 < 0$.

El Teorema del Valor Intermedio aplicado a la función $g(x) = f(x) - x$, asegura la existencia de un punto x_0, $x_1 < x_0 < x_2$ tal que $g(x_0) = 0$, por tanto $f(x_0) = x_0$. De aquí que x_0 es un punto de primer período 1. □

Ahora, sea f una función continua ¿si f tiene un punto de período n para todo $n \in \mathbb{N}$, implicará que f tiene un punto de período 1?

PROPOSICION 3.1.2 *Sea $f : I \to I$ una función continua donde $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto de primer período $n>1$, entonces f tiene un punto de primer período 1.*

DEMOSTRACION.- Sea una órbita de período n y supóngase que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, son los puntos de la óbita.

Se tiene que $f(x_1) > x_1$ y $f(x_n) < x_n$, entonces $f(x_1) - x_1 > 0$ y $f(x_n) - x_n < 0$. El Teorema del Valor Intermedio aplicado a la función $g(x) = f(x) - x$, asegura que existe un punto $x_0 \in (x_1, x_n)$ tal que $g(x_0) = 0$, por tanto $f(x_0) = x_0$, luego x_0 es un punto fijo y no puede ser ningún elemento de la órbita de x_1. □

Se ha demostrado que si se tiene una función continua con un punto de período 2, entonces tiene un punto de período 1, ahora la pregunta es ¿si se tiene una función continua con un punto de período 1, implicará la existencia de un punto de período dos?. El siguiente ejemplo muestra que la respuesta es negativa.

EJEMPLO 3.1.3 Sea $I = [0, 1]$, $f : I \to I$ dada por $f(x) = x$ para toda $x \in I$.

Todas las órbitas son de período 1, $O(x, f) = x$ para toda $x \in I$, por tanto, no hay ninguna órbita de período 2.

PROPOSICION 3.1.4 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f tiene una órbita de primer período 3, entonces f tiene una órbita de primer período 2.*

DEMOSTRACION.- Sea $a \in \mathbb{R}$ y supóngase que su órbita es de período 3,

$O(a, f) = \{a, b, c\}$ con $a < b < c$. Existen dos formas de recorrer esta órbita, ilustrado en la figura 3.1.

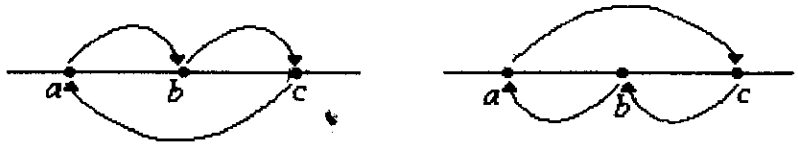
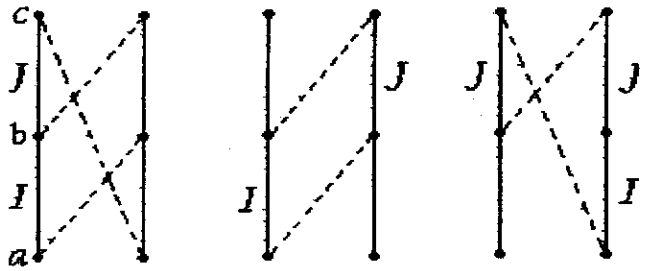


Figura 3.1

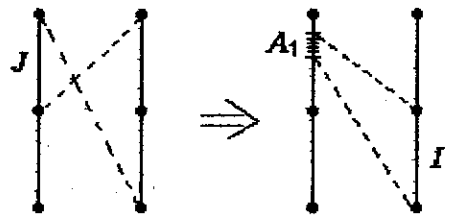
Supóngase que ocurre el primer caso. La demostración para el segundo caso es similar.

Sea $I = [a, b]$ y $J = [b.c]$. Como $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$ se tienen las siguientes contenciones:

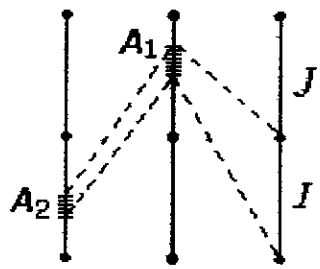
$J \subset f(I)$, $I \cup J \subset f(J)$.



De la contención $I \cup J \subset f(J)$, se sigue, por la Proposición 2.4.3, que existe un intervalo $A_1 \subset J$ tal que $f(A_1) = I$



La contención $A_1 \subset J \subset f(I)$, implica la existencia de un intervalo $A_2 \subset I$ tal que $f(A_2) = A_1$. De aquí $f^2(A_2) = I$ y con ello $A_2 \subset f^2(A_2)$.



Por la Proposición 1.3.1 existe $x \in A_2$ tal que $f^2(x) = x$. Este es el candidato para ser un punto periódico de período 2.

Como $x \in A_2 \subset I$ y $f(x) \in A_1 \subset J$, entonces $f(x) \neq x$ ó $x = b = f(x)$. Esta segunda opción es imposible ya que b es de período 3. Por lo tanto la órbita de x cumple $f(x) \neq x$ y $f^2(x) = x$, de aquí que x es un punto de período 2. □

La siguiente pregunta es ¿una función continua que tiene un punto de período 2, tendrá un punto de período 3?. Con el siguiente ejemplo se muestra que la respuesta es negativa.

EJEMPLO 3.1.5 Sean $I = [0,1]$ y $f : I \to I$ dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

En este ejemplo $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto fijo. Todos los otros puntos son de período 2, ya que

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{1-1+x^2} = \sqrt{x^2} = x$$

entonces $f^2(x) = x$ para toda $x \in I$. Por tanto no hay puntos de período 3.

Hasta el momento se tiene las siguientes implicaciones: si una función continua tiene un punto de período 3, entonces tiene un punto de período 2, y si tiene un punto de período 2, entonces tiene un punto de período 1. Además, se sabe que las implicaciones en sentido contrario no son ciertas. Tal vez en este momento se podría pensar que si existe un punto de período 4, entonces existe un punto de período 3. El siguiente ejemplo muestra que lo anterior no necesariamente se cumple.

EJEMPLO 3.1.6 Sean $I = [1,4]$ y $f : I \to I$ tal que $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 4$, $f(4) = 1$ y lineal en cada intervalo $[n, n+1]$ para $n = 1, 2, 3$.

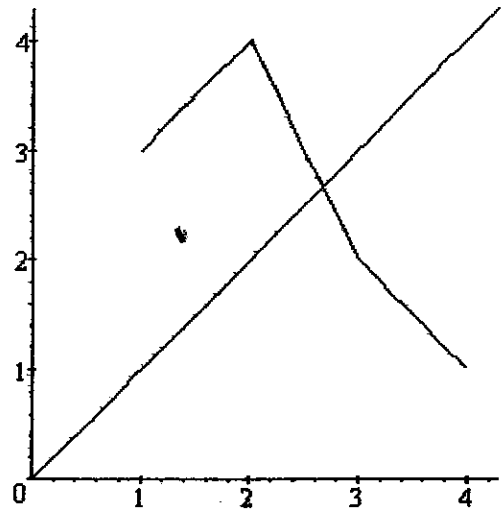


Figura 3.2

Obsérvese que los puntos 1,2,3,4 son de período 4. Además $x = \frac{8}{3}$ es el único punto fijo de f. Nótese también que:

$$\begin{aligned} f([1,2]) &= [3,4], \quad f^2([1,2]) = [1,2] \text{ y} \\ f([3,4]) &= [1,2], \quad f^2([3,4]) = [3,4] \end{aligned}$$

Nótese que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$, $f^2(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$ y que $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $f^2(\frac{7}{2}) = \frac{7}{2}$, por lo tanto los puntos $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{2}$ son de período 2. Además, $f(x) = x + 2$, $f^2(x) = -x + 3$, $f^3(x) = -x + 5$, $f^4(x) = x$ para toda $x \in [1,2]$. También $f(x) = -x + 5$, $f^2(x) = -x + 7$, $f^3(x) = x - 2$, $f^4(x) = x$ para toda $x \in [3,4]$. De aquí que $f^4(x) = x$ para toda $x \in [1,2] \cup [3,4]$.

Por otro lado, $f([2,3]) = [2,4] = [2,3] \cup [3,4]$, así que hay puntos en $[2,3]$ que bajo algunas iteraciones de f, caen en el intervalo $[3,4]$. Por tanto son atraídos a una órbita de período 2 ó 4, ya que en este intervalo solo existen puntos de estos períodos. Pero hay otros puntos que se quedan en el intervalo $[2,3]$ para todas las iteraciónes.

Nótese que si la órbita de un punto $x \in [2,3]$ es un subconjunto del intervalo $[2,3]$, entonces $f^3(x) = -8x + 24$, así que el único punto de f^3 que corta a la recta $y = x$, es el punto $x = \frac{8}{3}$, que anteriormente se vió que es de período 1. Por tanto, en este ejemplo se tienen puntos de período 1,2,4 pero ninguno de período 3. □

Recuerde del capítulo dos, observación 2.4.2, que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, y tiene una órbita de período 3, entonces tiene al menos una órbita de período n, para todo $n \in N$.

Este resultado es sólo un caso particular del Teorema de Sarkovskii, publicado en 1964. Sarkovskii introdujo un nuevo orden de los números naturales donde el 3 aparece primero.

Considere el siguiente arreglo de los números naturales:

$$\underset{\text{números impares}}{3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots} \qquad \underset{2 \times \text{números impares}}{2 \times 3 \rhd 2 \times 5 \rhd 2 \times 7 \rhd \cdots} \qquad \underset{2^2 \times \text{números impares}}{2^2 \times 3 \rhd 2^2 \times 5 \rhd 2^2 \times 7 \rhd \cdots}$$

$$\underset{2^n \times \text{números impares}}{2^n \times 3 \rhd 2^n \times 5 \rhd 2^n \times 7 \rhd \cdots} \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad \underset{\text{potencias de 2}}{\cdots \rhd 2^n \rhd \cdots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.}$$

Donde $m \rhd n$ significa que m aparece antes que n, a este ordenamiento se le llama el orden de Sarkovskii.

A continuación se enunciará el resultado principal de la investigación de Sarkovskii.

TEOREMA DE SARKOVSKII: *Sea $f : I \to I$ una función continua. Si $l \rhd m$ y f tiene un punto de primer período l, entonces f tiene un punto de primer período m.*

Observación: (1) Si f tiene un punto periódico cuyo período no es una potencia de 2, entonces f debe tener una infinidad de puntos periódicos. Inversamente, si f tiene un número finito de puntos periódicos, entonces cada punto periódico debe ser una potencia de 2.

(2) Período tres en el orden de Sarkovskii, es el período mas pequeño y esto implica la existencia de todos los otros períodos.

(3) La inversa del Teorema de Sarkovskii es verdadera, existen funciones que tienen puntos de período n, pero no puntos de período menor, de acuerdo al orden de Sarkovskii, (esto se demostrará en la siguiente sección).

La demostración del Teorema de Sarkovskii requiere de los siguientes resultados.

BIBLIOTECA

PROPOSICION 3.1.7 *Sea f una función continua en $[a,b]$, y sean $I_0, I_1, \cdots, I_{n-1}$ subintervalos cerrados de $[a,b]$. Si*

$$\begin{aligned} f(I_k) &\supset I_{k+1} \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-2 \\ f(I_{n-1}) &\supset I_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

entonces, la ecuación

$$f^n(x) = x \tag{3.2}$$

tiene al menos una solución $x = x_0 \in I_0$, tal que

$$f^k(x_0) \in I_k, \quad k = 0,1,\cdots,n-1. \tag{3.3}$$

DEMOSTRACION.- Es importante que el rango de f en I_k contenga a I_{k+1}, es decir, $f(I_k) \supset I_{k+1}$. Se usará la notación $I_i \to I_j$ ó $I_j \longleftarrow I_i$, cuando $f(I_i) \supset I_j$.

Entonces la condición (3.1) se puede escribir como $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$.

Por la Proposición 2.4.3, si $I_{n-1} \to I_0$ entonces, existen subintervalos $I^*_{n-1} \subset I_{n-1}$ tal que $f(I^*_{n-1}) = I_0$, ahora, como $I_{n-2} \to I_{n-1}$ es decir, $f(I_{n-2}) \supset I_{n-1} \supset I^*_{n-1}$ entonces existe $I^*_{n-2} \subset I_{n-2}$ tal que $f(I^*_{n-2}) = I^*_{n-1}$ y así sucesivamente hasta llegar, $I_0 \to I_1$ entonces, existe $I^*_0 \subset I_0$ tal que $f(I^*_0) = I^*_1$. En otras palabras, existe $I^*_k \subset I_k$ tal que

$$\begin{aligned} f(I^*_k) &= I^*_{k+1} \subset I_{k+1} \qquad k = 0,1,\cdots,n-2 \\ f(I^*_{n-1}) &= I_0 \supset I^*_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces de (3.4), $f(I^*_0) = I^*_1$, $f^2(I^*_0) = f(I^*_1) = I^*_2$, y así haciendo k iteraciones de f se llega a que $f^k(I^*_0) = I^*_k$ para $k = 0,1,\cdots,n-2$, de aquí que $f^{n-2}(I^*_0) = I^*_{n-2}$ así $f^{n-1}(I^*_0) = f(I^*_{n-2}) = I^*_{n-1}$ entonces $f^n(I^*_0) = f(I^*_{n-1}) = I_0 \supset I^*_0$. Y por el Teorema del Valor Intermedio, la ecuación (3.2) tiene una solución $x_0 \in I^*_0 \subset I_0$ tal que $f^k(x_0) \in I^*_k \subset I_k$ por tanto $f^k(x_0) \in I_k$ para $k = 0,1,\cdots,n-1$. □

PROPOSICION 3.1.8. *Sea $f : I \to I$ una función continua, supóngase que tiene una órbita de período $(2n+1)$, y que no tiene órbitas de período $(2m+1)$ para $1 \leq m < n$. Además supóngase que x_0 esta en el centro de la órbita $\{x_0, x_1, ..., x_{2n}\}$.*

Entonces se cumple una de las dos permutaciones

$$(i)\quad x_{2n} < x_{2n-2} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n-3} < x_{2n-1}$$

ó

$$(ii)\quad x_{2n-1} < x_{2n-3} < \cdots < x_1 < x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n}.$$

En la Figura 3.3 se puede observar el caso para $n = 3$.

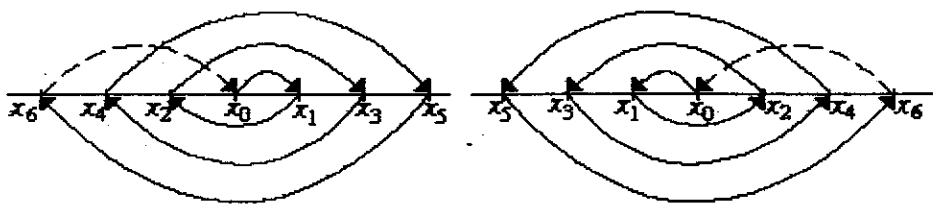


Figura 3.3

DEMOSTRACION.- Supóngase $n > 1$. Reordene $\{x_i,\ i = 0, 1, \cdots, 2n\}$ como $\{z_i,\ i = 1, 2, \cdots, 2n+1\}$, de tal manera que $z_1 < z_2 < \cdots < z_{2n+1}$.

Sea el conjunto $S_{kl} = \{z_i : k \leq i \leq l\}$.

Sean $z_i = \min\{f(z) : z \in S_{kl}\}$, $z_j = \max\{f(z) : z \in S_{kl}\}$.

Se define f^* como

$$f^*(S_{kl}) = S_{ij} \tag{3.5}$$

Se usará la notación $S_{kl} \to S_{ij}$, para denotar $f^*(S_{kl}) \supset S_{ij}$.

La demostración esta basada en las siguientes afirmaciones:

(i) Existen enteros positivos m, l $(m, l < 2n+1)$,

(ii) Existe una familia de conjuntos $S_i = S_{k_i l_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, 2n)$ tal que:

$\cdot\ S_1 = \{z_m, z_{m+1}\}$, $S_{2n} = \{z_l, z_{l+1}\}$,

· $S_{i+1} \setminus S_i$ tiene un solo punto, y además

$$S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_{2n} \to S_1 \tag{3.6}$$

$$S_1 \subset S_2 \subsetneq \cdots \subset S_{2n-1} \not\supseteq S_{2n}.$$

Para verificar estas afirmaciones, nótese que

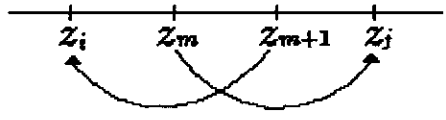
$$f(z_1) > z_1 \text{ y } f(z_{2n+1}) < z_{2n+1},$$

se elige la i más grande la cual será denotada por m , tal que $f(z_m) > z_m$, $(m = \max\{i : f(z_i) > z_i\})$. Claramente , $m \leq 2n$.

Sea $S_1 = \{z_m, z_{m+1}\}$, $S_2 = f^*(S_1) = f^*(z_m, z_{m+1}) = \{z_i, ..., z_j\}$, recuerde de que

$$\begin{aligned} z_i &= \min\{f(z_m), f(z_{m+1})\} \leq z_m \quad \text{y} \\ z_j &= \max\{f(z_m), f(z_{m+1})\} \geq z_{m+1}, \end{aligned}$$

entonces $\{z_m, z_{m+1}\} = S_1 \subset S_2 = f^*(S_1)$ (es decir $S_1 \to S_2$). Esto se ilustra en la siguiente figura



$$z_m < f(z_m), \quad f(z_{m+1}) < z_{m+1}.$$

Analogamente se define $S_{i+1} = f^*(S_i)$, y se cumple

$$S_{i+1} \supset S_i, \qquad i = 1, 2, 3, ... \quad \text{y}$$

$$S_i \not\supseteq S_{i+1}, \quad \text{si } S_i \text{ no es el conjunto } \{z_1, z_2, ..., z_{2n+1}\}$$

Supóngase que $i = 1, 2, ..., t-1$. Si $t = 2n$ entonces (3.6) es válido. Solo se necesita probar que $t = 2n$.

Ya que el número de puntos en $S_{1,m} = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ difiere de $S_{m+1,2n+1} = \{z_{m+1}, ..., z_{2n+1}\}$,

entonces no puede ocurrir que: todos los puntos de $S_{1,m}$ bajo f esten en $S_{m+1,2n+1}$, y además que todos los puntos de $S_{m+1,2n+1}$ bajo f esten en $S_{1,m}$.

Por lo tanto existen $l \neq m$, tal que $f(z_l)$ y $f(z_{l+1})$ no estan en el mismo conjunto $S_{1,m}$ ó $S_{m+1,2n+1}$. Luego $f(z_l)$ y $f(z_{l+1})$ estan en diferentes lados de $[z_m, z_{m+1}]$.

De donde se sigue $[z_m, z_{m+1}] \subset f([z_l, z_{l+1}])$, lo cual significa $[z_l, z_{l+1}] \to [z_m, z_{m+1}]$.

Sea $S_t = \{z_l, z_{l+1}\}$. Donde $t-1$, es elegido como el más pequeño i tal que $S_i \to \{z_l, z_{l+1}\}$, esto es posible porque $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \cdots$.

Como una ilustración considere $S_1 = \{z_m, z_{m+1}\} = \{z_4, z_5\}, S_2 = \{z_3, z_4, z_5\}$, $S_3 = \{z_3, z_4, z_5, z_6\}$, $S_4 = \{z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$, $S_5 = \{z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$, $S_t = \{z_l, z_{l+1}\} = \{z_1, z_2\}$, $S_{1m} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ y $S_{m+1,2n+1} = \{z_5, z_6, z_7\}$, de acuerdo a la siguiente figura.

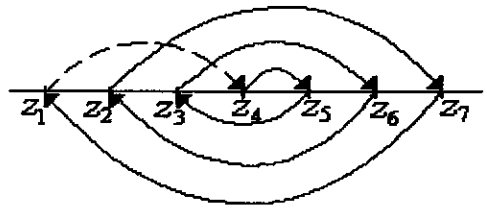


Figura 3.4

Supóngase que I_i es el intervalo cerrado más pequeño que contiene a S_i. Entonces

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_{t-1} \not\supseteq I_t \tag{3.7}$$

$$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_t \to I_1.$$

Obsérvese que $S_{t-1} \not\supseteq S_t = \{z_l, z_{l+1}\}$, porque si $S_t \subset S_{t-1} = f^*(S_{t-2})$, se tiene que $S_{t-2} \to S_t = \{z_m, z_{m+1}\}$, lo cual es una contradicción, ya que $t-1$ es la mínima i tal que $S_i \to \{z_m, z_{m+1}\}$.

Ya que $S_{t-1} \not\supseteq S_t$ y S_{t-1} contiene por lo menos t puntos, entonces se tiene $t \leq 2n$, porque si $t = 2n+1$, entonces S_{t-1} tendría por lo menos $2n+1$, pero este es el número total de puntos de la órbita y como se tiene $S_t \not\subseteq S_{t-1}$ se llega a que S_t es el conjunto vacío, y esto es una contradicción. (Ya que $\emptyset \subset S_{t-1}$).

Supóngase que $t < 2n$. Sea

$$J_0 = J_1 = \cdots = J_{2n-t-1} = I_1, \quad J_{2n-t} = I_2, \quad J_{2n-t+1} = I_3, \ \cdots, \quad J_{2n-2} = I_t.$$

Entonces, se tiene:

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{2n-2} \to J_0.$$

Por la Proposición 3.1.7, existe $x_0^* \in J_1$ tal que

$$f^{2n-1}(x_0^*) = x_0^* \qquad \text{y} \tag{3.8}$$

$$f^k(x_0^*) \in J_k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \cdots, 2n-2.$$

Nótese que x_0^*, $f(x_0^*)$, $\cdots$, $f^{2n-2}(x_0^*)$ deben ser distintos, porque de lo contrario, el período de x_0^* es menor que $2n-1$ y consecuentemente $f^{2n-2}(x_0^*)$ debe ser igual a uno de los x_0^*, $f(x_0^*)$, $\cdots$, $f^{2n-3}(x_0^*)$. Entonces por (3.8)

$$f^{2n-2}(x_0^*) \in J_0 \cap J_{2n-2} = I_1 \cap I_t \tag{3.9}$$

Lo cual es imposible por la construcción de los $I_i's$, $I_1 \cap I_t = \emptyset$. Entonces $t = 2n$, y además $S_{i+1} \setminus S_i$ es un solo punto para $i = 1, 2, \cdots, 2n-2$.

Para la Proposición 3.1.8 es suficiente demostrar que para cada $i = 1, 2, \cdots, 2n-1$, f siempre mapea un extremo de S_i, llamele A, en el otro extremo llamele B, y que A siempre esta entre B y $f(B)$. Sea $S_i \setminus S_{i-1} = \{A_i\}$.

Si esto no pasa para algún $k < 2n$, entonces se tiene:

$$\curvearrowright [A_{k-2}, A_k] \rightleftarrows [A_{k-1}, A_{k-3}],$$

de acuerdo a la siguiente figura.

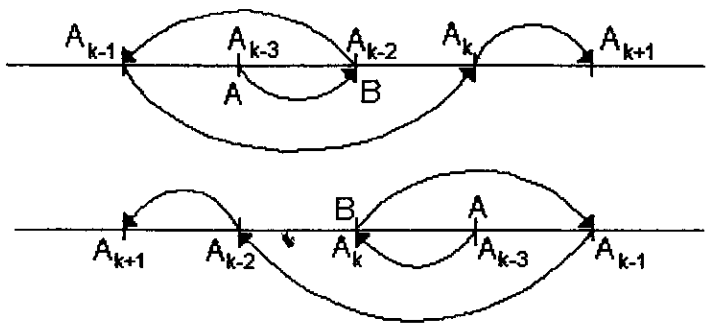


Figura 3.5

Sea $I_0 = I_1 = [A_{k-2}, A_k]$, $I_2 = [A_{k-1}, A_{k-3}]$. Entonces

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_0.$$

Aplicando la Proposición 3.1.7, se llega a que f tiene un punto de periódo 3. Esto es una contradicción, ya que se esta suponiendo que f no tiene puntos de período $2m+1$ para $1 \leq m < n$.. □

Ahora se procederá a demostrar el Teorema de Sarkovskii.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE SARKOVSKII.- Esta demostración se divide en cuatro casos.

Caso 1. Si f tiene una órbita de periódo 2^m, entonces f tiene una órbita de periódo 2^l para cada $l < m$.

Caso 2. Si f tiene una órbita de periódo $2m+1$ $(m > 1)$, entonces f tiene una órbita de periódo k, para todo $k > 2m+1$.

Caso 3. Si f tiene una órbita de periódo $2m+1$ $(m > 1)$, entonces f tiene una órbita de periódo $2k$ para cualquier entero positivo k.

Caso 4. Sea $m \rhd n$, donde $m = 2^k p$, $n = 2^t q$, p y q son números impares $p > 1$ y $k \geq 1$. Entonces periódo m implica periódo n.

Caso 1. Si f tiene una órbita de periódo 2^m, entonces f tiene una órbita de periódo 2^l para cada $l < m$.

Se probará por inducción que periódo 2^m implica periódo 2^{m-1}.

Si $m = 1$ entonces se sigue de la Proposición 3.1.1 que periódo 2 implica periódo 1.

Ahora supóngase que se cumple para $m = k$, es decir periódo 2^k implica periódo 2^{k-1}.

Se demostrará que se cumple para $m = k+1$, es decir periódo 2^{k+1} implica periódo 2^k.

Sea $g = f^2$, entonces, cuando f tiene una una órbita de periódo 2^{k+1}, implica que g tiene una órbita de período 2^k, ya que

$$g^{2^k} = f^{2\times 2^k} = f^{2^{k+1}}.$$

Ahora, por hipótesis de inducción, aplicada a g, se tiene, que si f tiene una órbita de período 2^k, entonces g tiene una órbita de período 2^{k-1}.

Entonces, existe $x_0 \in I$ tal que

$$g^{2^{k-1}}(x_0) = x_0, \quad \text{y}$$

$$g^t(x_0) \neq x_0 \quad \text{para} \quad t = 1, 2, \cdots, 2^{k-1} - 1.$$

Lo cual es equivalente a:

$$f^{2^k}(x_0) = x_0, \quad \text{y}$$

$$f^{2t}(x_0) \neq x_0 \quad \text{para} \quad t = 1, 2, \cdots, 2^{k-1} - 1.$$

Supóngase que x_0 no es un punto de período 2^k de f, entonces debe existir algún $s \in \{1, 3, 5, \cdots, 2^k - 1\}$, tal que

$$f^s(x_0) = x_0.$$

Pero esto es imposible porque implicaría que

$$f^{2s_0}(x_0) = x_0 \quad \text{para algún} \quad s_0 \in \left\{1, 2, 3, \cdots, 2^{k-1} - 1\right\}.$$

Por lo tanto período 2^{k+1} implica período 2^k.

Caso 2. Si f tiene una órbita de período $2m + 1$ $(m > 1)$ entonces f tiene una órbita de período k para todo $k > 2m + 1$.

Supóngase que no existe un punto con período $2n + 1$ para $1 \leq n < m$. Luego por

la por la Proposición 3.1.8 sean $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_2, x_3]$, $\cdots$, $I_{2n-1} = [x_{2n-3}, x_{2n-1}]$, $I_{2n} = [x_{2n}, x_{2n-2}]$, como se ilustra en el siguiente diagrama.

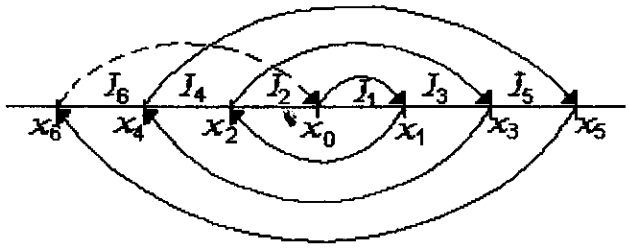
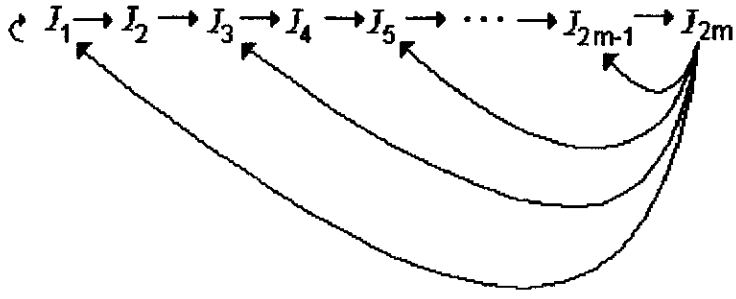


Figura 3.6

entonces los intervalos satisfacen:



(3.10)

Entonces para $k > 2m+1$, se tiene

$$\underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{k-(2m-1)} \to I_2 \to \cdots \to I_{2m} \to I_1. \tag{3.11}$$

Aplicando la Proposición 3.1.7, se llega a que f tiene un punto con período k.

Caso 3. Si f tiene una órbita de período $2m+1$ $(m > 1)$, entonces f tiene una órbita de período $2k$ para cualquier entero positivo k.

Solo se necesita probar el caso donde $2k \leq 2m$, ya que si $k > m$ entonces $2k > 2m+1$, y el resultado se sigue del caso anterior.

De (3.10) se tiene:

$$I_{2(m-k)+1} \to I_{2(m-k)+2} \to \cdots \to I_{2m} \to I_{2(m-k)+1}$$

Por el mismo argumento del caso 2, f tiene un punto de período $2k$.

Caso 4. Sea $m \rhd n$, donde $m = 2^k p$, $n = 2^t q$, p y q son números impares $p > 1$ y $k \geq 1$. Entonces período m implica período n.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que para $l \rhd m$ no existe un punto con período l de f. Recordando el orden de Sarkovskii, se necesitan considerar las siguiente posibilidades:

$$(i)\ t > k, \quad q \geq 1 \quad \text{y}$$

$$(ii)\ t = k, \quad q > p.$$

Sea $g(x) = f^{2^k}(x)$. Como f tiene período $2^k p$ entonces g tiene período p.

Por el caso 3, g tiene período $2^{t-k}q$ para $t > k$ y $q \geq 1$, por tanto f tiene período $2^t q$ para $t > k$ y $q \geq 1$ ya que $g^{2^{t-k}q} = (f^{2^k})^{2^{t-k}q} = f^{2^t q}$, así que (i) es válido.

Por el caso 2, que g tenga período p implica que g tenga período q. Entonces f tiene una órbita de período $2^t q$ para $t = k$ y $q > p$,así que (ii) es válido. □

Apesar de que Sarkovskii publico sus resultados en 1964 estos no fueron conocidos de manera amplia y no fue si no hasta 1974 que los Matemáticos Li y Yorke redescubrierón el extraordinario papel que juega una órbita de período 3.

3.2 El inverso del Teorema de Sarkovskii.

El Teorema de Sarkovskii asegura que dados dos números m, n con $m \rhd n$, y una función continua con un punto de período m, implica la existencia de otro punto de período n. Ahora, la pregunta siguiente es ¿existe una función continua que tenga un punto de período n, pero no puntos de período m? es decir, ¿la implicación contraria se cumple?. La respuesta a esta pregunta, es afirmativa.

Lo anterior se puede ver en el siguiente resultado, el cual en cierto sentido es el inverso del Teorema de Sarkovskii.

PROPOSICION 3.2.1. *Para cualquier $r \in \mathbb{N}$, existe una función $f : I \to I$ continua tal que f tiene puntos de primer período r, pero no puntos de primer período s, para todo entero positivo s, que satisface $s \rhd \cdots \rhd r$.*

BIBLIOTECA

DEMOSTRACION.- En esta demostración hay tres casos a considerar:

Caso 1 Períodos impares.

Caso 2 Períodos de la forma $2^n \times k$, donde k es un número natural impar.

Caso 3 Períodos de la forma 2^n.

Se iniciará dando un ejemplo en particular para cada caso, y posteriormente se verá un bosquejo de la generalización.

Caso 1. (a) Una función que tiene puntos de período 5, pero no puntos de período 3.

Se define $f : [1,5] \to [1,5]$ como sigue, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2, f(5) = 1$, y en cada intervalo $[n, n+1]$ para $n = 1, 2, 3, 4$, f es lineal, como se muestra en la Figura 3.7

Primeramente se demostrará que f no tiene puntos de período 3.

Obsérvese que:

· 1,2,3,4,5 son de período 5, esto se puede ver por la forma como se definio f.

· Además, $\frac{10}{3}$ es el único punto fijo, ya que $f(x) = -2x + 10$ en el intervalo $[3,4]$.

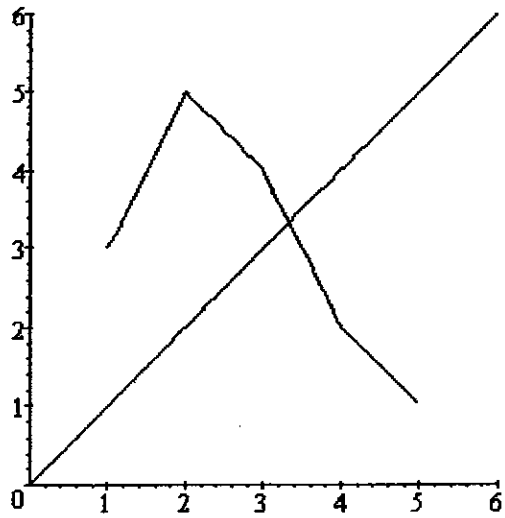


Figura 3.7

Nótese también que

$$f([1,2]) = [3,5],\ f^2([1,2]) = [1,4],\ f^3([1,2]) = [2,5]$$
$$f([2,3]) = [4,5],\ f^2([2,3]) = [1,2],\ f^3([2,3]) = [3,5]$$

BIBLIOTECA

$$f([4,5]) = [1,2],\ f^2([4,5]) = [3,5],\ f^3([4,5]) = [1,4]$$

De estas observaciones se concluye que la tercera iteración de f no tiene puntos fijos en los intervalos $[1,2]$, $[2,3]$ y $[4,5]$. La situación en el intervalo $[3,4]$ es mas complicada ya que

$$f([3,4]) = [2,4],\ f^2([3,4]) = [2,5],\ f^3([3,4]) = [1,5] \supset [3,4]$$

Entonces por el Proposición 1.3.1, f^3 tiene un punto fijo en $[3,4]$.

Ahora se demostrará que el punto fijo de f^3 es único y que es punto fijo de f.

Sea $p \in [3,4]$ el punto fijo de f^3, entonces $f(p) \in [2,4]$. Si $f(p) \in [2,3]$ entonces $f^2(p) \in [4,5]$ y así $p = f^3(p) \in [1,2]$ lo cual es imposible ya que p no podría ser punto fijo de f^3. Entonces $f(p) \in [3,4]$ y $f^2(p) \in [2,4]$, otra vez, si $f^2(p) \in [2,3]$ entonces $f^3(p) \in [4,5]$ otra contradicción. Por lo tanto p, $f(p)$, $f^2(p) \in [3,4]$.

Ahora, ya que $f^3(x) = -8x + 30$ para toda x cuya órbita no se sale del intervalo $[3,4]$, entonces se tiene que el único punto fijo de f^3 es $x^* = \frac{10}{3}$, el cual es punto fijo de f. Por tanto, f no tiene puntos de período 3.

(b) Ahora se puede generalizar esta construcción para hacer una función continua que tiene puntos de período $(2n+1)$ pero no puntos de período $(2n-1)$, de la siguiente manera:

Sea $f : [1, 2n+1] \to [1, 2n+1]$ definida por $f(1) = n+1$, $f(2) = 2n+1$, $f(3) = 2n$, $f(4) = 2n-1, \cdots$, $f(n) = n+3$, $f(n+1) = n+2$, $f(n+2) = n$, $f(n+3) = n-1, \cdots$, $f(2n+1) = 1$.

BIBLIOTECA

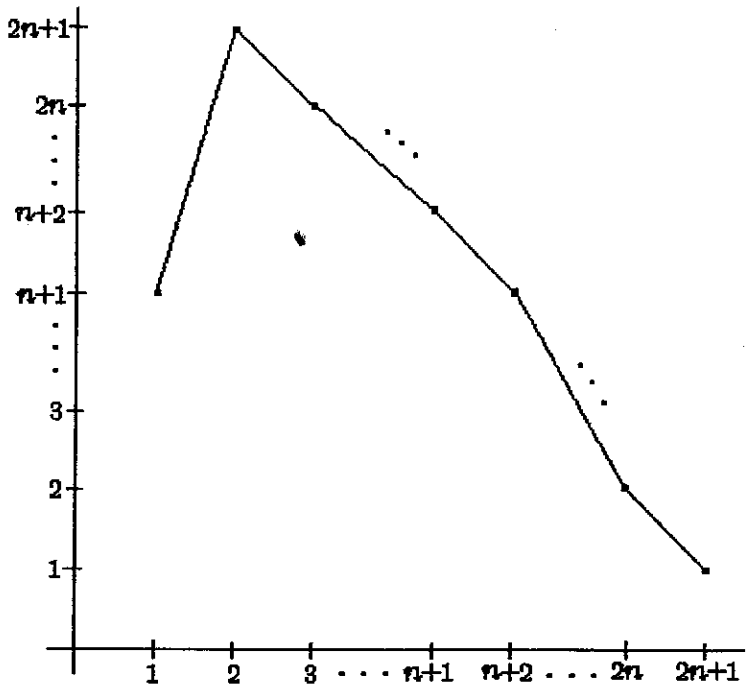


Figura 3.8

Obsérvese que todo entero en el intervalo $[1, 2n+1]$ es de período $(2n+1)$. Por ejemplo, la órbita del 1 es dada por la serie:

$$1 \to n+1 \to n+2 \to n \to n+3 \to n-1 \to n+4 \to n-2 \to \cdots \to 2 \to 2n+1.$$

Además, obsérvese que existen dos subsucesiones de longitud n; una creciente $\{n+2, n+3, n+4, \cdots, 2n+1\}$ y la otra decreciente $\{n+1, n, n-1, \cdots, 2\}$. Se verá que no existen puntos de período $(2n-1)$ en el intervalo $[1, 2n+1]$.

Tomese $(2n-1)$ iteraciones del intervalo $[1,2]$, entonces surge la siguiente serie de intervalos: $[1,2] \to [n+1, 2n+1] \to [1, n+2] \to [n, 2n+1] \to [1, n+3] \to [n-1, 2n+1] \to \cdots \to [1, 2n] \to [2, 2n+1]$.

Esto muestra que $f^{2n-1}([1,2]) \cap [1,2) = \emptyset$. Entonces, el intervalo $[1,2]$ no contiene puntos de período $(2n-1)$.

Se puede demostrar que todo intevalo $[j, j+1]$, con excepción del intervalo $[n+1, n+2]$, exponen el mismo comportamiento que el intervalo $[1,2]$. En particular, se puede ver que existe

una iteración en el intervalo $[j, j+1]$ que es precisamente el intervalo $[1,2]$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} [2,3] &\rightarrow [2n, 2n+1] \rightarrow [1,2] \\ [3,4] &\rightarrow [2n-1, 2n] \rightarrow [2,3] \\ [4,5] &\rightarrow [2n-2, 2n-1] \rightarrow [3,4]. \end{aligned}$$

Como el intervalo $[1,2]$ no tiene puntos de período $(2n-1)$, se sigue que el intervalo $[j, j+1]$ no tiene puntos de período $(2n-1)$. Ya que si existe $x \in [j, j+1]$ de período $(2n-1)$, es decir $f^{2n-1}(x) = x \in [j, j+1]$, entonces

$$f^{2n-1}(f^k(x)) = f^k(f^{2n-1}(x)) = f^k(x) \in [1,2]$$

ya que existe k tal que $f^k([j, j+1]) = [1,2]$. Entonces $f^k(x)$ es un punto de período $(2n-1)$ en $[1,2]$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $[j, j+1]$ no tiene puntos de período $(2n-1)$.

Como $f([n+1, n+2]) = [n, n+2]$. Entonces, existen dos casos a considerar para $x \in [n+1, n+2]$.

Caso (i) $f^k(x) \in [n+1, n+2]$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$. Ya que $|f'| = 2 > 1$ en el intervalo $[n+1, n+2]$, se sigue que x es un punto fijo de f.

Caso(ii) $f^k(x) \notin [n+1, n+2]$ para algún entero positivo k. Entonces $f^k(x) \in [n, n+1]$ y como es de la forma $[j, j+1]$, entonces una iteración de x se queda en el intervalo $[1,2]$.

En cualquiera de los dos casos, x no puede tener período $(2n-1)$.

Caso 2. (a) Una función que tenga puntos de período 2×5 pero no puntos de período 2×3.

Sea $f : [1,5] \rightarrow [1,5]$ la función definida en el caso $1(a)$ es decir $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$, $f(5) = 1$, y en cada intervalo $[n, n+1]$ para $n = 1, 2, 3, 4$, f es lineal,.

Sea $g : [1,13] \rightarrow [1,13]$, definida como:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 8 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 5 \\ x - 8 & \text{si} \quad 9 \leq x \leq 13 \end{cases}$$

BIBLIOTECA

y para $5 < x < 9$, se unen linealmente los puntos $(5,9)$ y $(9,1)$, como se muestra en la figura.

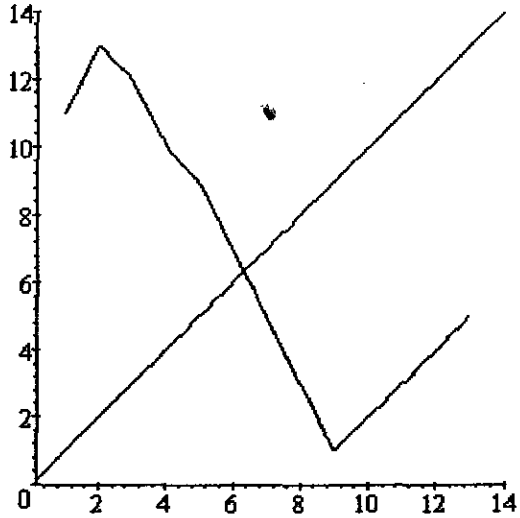


Figura 3.9

La función g es llamada el "doble mapeo" de f. Obsérvese que ninguno de los puntos 1,2,3,4,5,9,10,11,12,13 es de período 6, todos son de período 10.

Además si $x \in [1,5]$, entonces $g(x) \in [9,13]$ y $g^2(x) = f(x)$, ya que

$$g^2(x) = g(g(x)) = g(f(x)+8) = f(x)+8-8 = f(x).$$

Además, f no tiene puntos de período 3, consecuentemente g no tiene puntos de período 6 en el intervalo $[1,5]$.

Ya que $g([9,13]) = [1,5]$, se sigue que no hay puntos en el intervalo $[9,13]$ de período 6. La situación en el intervalo $[5,9]$ requiere de diferentes argumentos.

Como $g^6([5,9]) = [4,10] \supset [5,9]$, se sigue que g^6 tiene un punto fijo $p \in (5,9)$.

Ahora supóngase que para algún n, con $1 \leq n \leq 5$, $g^n(p) \notin (5,9)$, entonces $g^{n+r}(p) \in [1,5] \cup [9,13]$ para toda $r > 0$, esto implica que $g^6(p) \neq p$, lo cual es una contradicción. Así p , $g(p)$, $g^2(p)$, $\cdots$, $g^5(p) \in (5,9)$.

Haciendo cálculos se tiene que $g(x) = -2x+19$, $g^2(x) = 4x-19$, $g^3(x) = -8x+57$, $g^4(x) = 16x-95$, $g^5(x) = -32x+209$, $g^6(x) = 64x-399$, para toda x cuya órbita no se sale

BIBLIOTECA

del intervalo $(5,9)$,de aquí que el unico punto fijo de g, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6 es $p=\frac{19}{3}$. Entonces g no tiene puntos de período 6.

(b) El procedimiento general para construir mapeos que tengan puntos de período $2(2n+1)$ pero no puntos de período $2(2n-1)$, con $n=1,2,\cdots$ puede hacerse de la siguiente manera:

Sea $f:[1,1+h]\to[1,1+h]$ con puntos de período $(2n+1)$ pero no puntos de período $(2n-1)$. Se define el doble mapeo $g:[1,1+3h]\to[1,1+3h]$ como sigue:

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+2h & \text{si} \quad 1\le x\le 1+h \\ x-2h & \text{si} \quad 1+2h\le x\le 1+3h \end{cases}$$

y lineal para $x\in(1+h,1+2h)$.

Repitiendo el procedimiento anterior se crean funciones con puntos periódicos de período $2^k(2n+1)$, pero no de período $2^k(2n-1)$ para $k=2,3,4,...$

Caso 3. (a) Una función que tiene puntos de período 2 pero no puntos de período 2^2.

Sea $f:[1,2]\to[1,2]$ definida por $f(x)=-x+3$. Se puede ver que en el intervalo $[1,2]$ todo punto es de período 2, excepto el punto fijo $\frac{3}{2}$.

$$f^2(x)=f(f(x))=f(-x+3)=-(-x+3)+3=x-3+3=x.$$

Entonces no hay puntos en el intervalo $[1,2]$ con primer período 2^2.

(b) Una función que tiene puntos de período 2^2 pero no puntos de período 2^3.

Sea $f:[1,4]\to[1,4]$ la función del ejemplo 3.1.6, donde.$f(1)=3$, $f(3)=2$, $f(2)=4$, $f(4)=1$ y es lineal en cada intervalo $[n,n+1]$ para $n=1,2,3$.

Recuerde que todos los puntos en la unión de intervalos $[1,2]\cup[3,4]$ son de período 4, excepto $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{2}$ que son de período 2, $\frac{8}{3}$ es punto fijo de f.

Además si la órbita de un punto $x\in[2,3]$ es un subconjunto del intervalo $[2,3]$, entonces se cumple que $f^8(x)=256x-680$, de aquí que el único punto fijo de f^8 es $\frac{8}{3}$, el cual también es un punto fijo de f. Por lo tanto f no tiene puntos de período 2^3.

BIBLIOTECA

(c) Una función que tiene puntos de período 2^3 pero no puntos de período 2^4.

Sea f la función definida en el caso $3(b)$, la cual tiene puntos de período 2^2 pero no puntos de período 2^3, y sea el doble mapeo $g : [1, 10] \to [1, 10]$ definido por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 6 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 4 \\ x - 6 & \text{si} \quad 7 \leq x \leq 10 \end{cases},$$

y para $4 < x < 7$ se unen linealmente los puntos $(4, 7)$, $(7, 1)$, como se muestra en la figura.

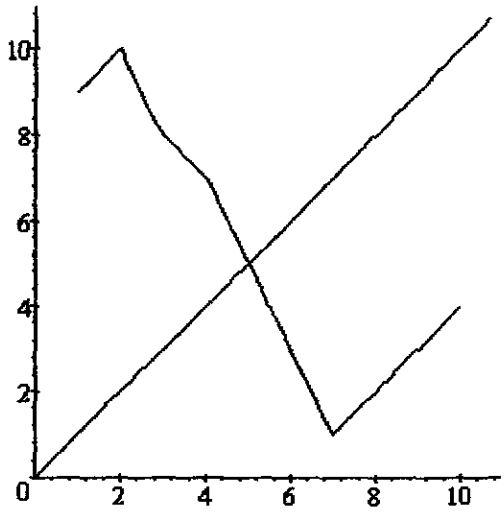


Figura 3.10

Nótese que ninguno de los puntos 1,2,3,4,7,8,9,10 son de período 2^4, ya que todos son de período 2^3, además, $x = 5$ es el único punto fijo de g, ya que $g(x) = -2x + 15$ para toda $x \in (4, 7)$.

Además si $x \in [1, 4]$, entonces $g(x) \in [7, 10]$, y

$$g^2(x) = g(g(x)) = g(f(x) + 6) = f(x) + 6 - 6 = f(x),$$

entonces $g^2(x) = f(x)$.

Ya que f no tiene puntos de período 2^3 se sigue que g no tiene puntos de período $2 \times 2^3 = 2^4$ en el intervalo $[1, 4]$.

BIBLIOTECA

Además, como $g([7,10]) = [1,4]$ se sigue que el intervalo $[7,10]$ no tiene puntos de período 2^4.

Ahora como $g^{16}[4,7] \supset [4,7]$ se sigue que g^{16} tiene un punto fijo $p \in (4,7)$. Supóngase que para $1 \leq n \leq 15$, $g^n(p) \notin (4,7)$ entonces $g^{n+r}(p) \in [1,4] \cup [7,10]$ para toda $r > 0$, esto implica que $g^{16}(p) \neq p$, lo cual es una contradicción.

Así que $p, g(p), \cdots, g^{15}(p) \in [4,7]$. Haciendo calculos se tiene que $g^{16}(x) = 65536x - 327675$, para toda x cuya órbita no se sale del intervalo $(4,7)$,de aquí el único punto fijo de g^{16} es $x^* = 5$, el cual es un punto fijo de g. Por lo tanto el mapeo g tiene puntos de período 2^3 pero no puntos de período 2^4.

La construcción anterior se puede repetir indefinidamente; para construir mapeos que tengan puntos de período 2^n pero no puntos de período 2^{n+1}.

BIBLIOTECA

Capítulo 4

EJEMPLOS DE FUNCIONES CAOTICAS

En este capítulo se verán ejemplos de mapeos caóticos de acuerdo a la definición de Devaney. Para algunos ejemplos es fácil verificar si el sistema dinámico muestra un comportamiento caótico, pero para otros no es tan sencillo mostrar este tipo de comportamiento. Para esto se introducirá en la sección 4.3, el concepto de conjugado topológico.

4.1 Dos mapeos caóticos

EJEMPLO 4.1.1 Sea la función del ejemplo 1.1.9 del capitulo 1, es decir $g : S^1 \to S^1$ definida como $g(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$. Se demostrará que es caótica en S^1.

(a) Primero se demostrará que el conjunto de puntos periódicos de g es denso en S^1.

Obsérvese que un punto $e^{i\theta}$ en S^1 es un punto periódico con período n, si y sólo si, $g^n(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ ó $e^{i2^n\theta} = e^{i\theta}$. Esto es verdad si y sólo si $2^n\theta = \theta + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Despejando θ se tiene $\theta = \frac{2k\pi}{2^n-1}$.

Por lo tanto un punto $e^{i\theta}$ es periódico con período n si y sólo si $\theta = \frac{2k\pi}{2^n-1}$ para $k = 0, 1, ..., 2^n - 2$. Entonces existen $2^n - 1$ puntos periódicos con período n, mismos que pueden ser escritos como

$$x(k) = e^{i\frac{2k\pi}{2^n-1}}, \qquad 0 \leq k \leq 2^n - 1. \tag{4.1}$$

Nótese que los puntos $x(k)$ son las raices de la ecuación $z^{2n-1} = 1$, en el dominio complejo.

Sea U un arco abierto en S^1 definido como $U = \left\{e^{i\theta} : \theta_1 < \theta < \theta_2\right\}$, (ver Figura 4.1). Sea $d = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$.

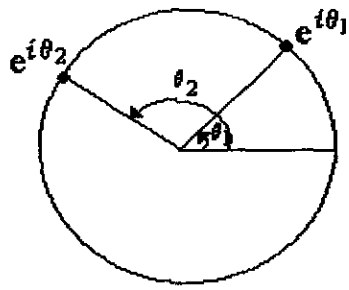


Figura 4.1

Si $\theta(k) = \frac{2k\pi}{2^n-1}$ y $\theta(k+1) = \frac{2(k+1)\pi}{2^n-1}$ son dos angulos consecutivos en (4.1), entonces $\theta(k+1) - \theta(k) = \frac{2\pi}{2^n-1}$. Se escoge $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{2\pi}{2^n-1} < d$. Entonces existen k, $n \in \mathbb{N}$ tal que $e^{i\theta(k)} = e^{i\frac{2k\pi}{2^n-1}} \in U$. De aquí que los puntos periódicos de g son densos en S^1.

(b) Ahora se demostrará que g es topologicamente transitiva en S^1.

Sean U, V dos arcos abiertos en S^1, y sea δ la longitud de U. Entonces $g(U)$ tiene longitud 2δ, $g^2(U)$ tiene longitud $2^2\delta$ y así sucesivamente. Entonces $g^k(U) = S^1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por tanto $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Por la Proposición 2.1.6 se concluye que g exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales, así que g es caótica en S^1. $\square$

EJEMPLO 4.1.2 Considérese el ejemplo 1.1.10 del capitulo 1. Sea $\Sigma_2 = \{s = \{s_0 s_1 s_2 ...\} : s_i = 0 \text{ o } 1\}$, el conjunto de todas las sucesiones infinitas de 0's y 1's.

Para $s = \{s_0 s_1 ...\}$, $t = \{t_0 t_1 ...\} \in \Sigma_2$, se definio

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Además, se definio el mapeo cambio $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ por

$$\sigma\{s_0 s_1 s_2 ...\} = \{s_1 s_2 s_3 ...\}$$

Se mostrará que el mapeo $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es caótico en Σ_2.

Para esto se requieren los siguientes resultados.

PROPOSICION 4.1.3 *Sean* $s, t \in \Sigma_2$

(a) Si los primeros $(n+1)$ *digitos de* s *y* t *son iguales, entonces* $d[s,t] \leq \frac{1}{2^n}$.

(b) Si $d[s,t] \leq \frac{1}{2^n}$, *entonces los primeros* $n-$*digitos de* s *y* t *son iguales.*

DEMOSTRACION.- (*a*) Sean $s = \{s_0 s_1 s_2 ...\}$ y $t = \{t_0 t_1 t_2 ...\}$ puntos en Σ_2, tales que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, 2, ..., n$. Entonces

$$\begin{aligned} d[s,t] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n+1} - t_{i+n+1}|}{2^{i+n+1}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n+1} - t_{i+n+1}|}{2^i} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

así que $d[s,t] \leq \frac{1}{2^n}$.

(*b*) Esta demostración se hará por contradicción.

Supóngase que no se cumple que los primeros $n-$digitos son iguales; es decir, $s_j \neq t_j$, para alguna $j = 0, 1, 2, ..., n-1$. Entonces

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = |s_0 - t_0| + \frac{|s_1 - t_1|}{2} + ... + \frac{|s_{j-1} - t_{j-1}|}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^j} + ... \geq \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^n}, \text{ si } n > j.$$

Por tanto $d[s,t] > \frac{1}{2^n}$, lo cual es una contradicción. □

En la siguiente Proposición se demostrará que el mapeo cambio es continuo.

PROPOSICION 4.1.4 *El mapeo* $\sigma\{s_0 s_1 s_2 ...\} = \{s_1 s_2 ...\}$ *es continuo en* Σ_2.

DEMOSTRACION.- Se demostrará que existe $\delta > 0$, tal que $d[\sigma(s), \sigma(t)] < \varepsilon$, si $d[s,t] < \delta$.

Sea $s \in \Sigma_2$ y $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y se toma $\delta = \frac{1}{2^{n+2}}$. Entonces si $d[s,t] < \delta$, los primeros $n+2$–digitos de s y t son iguales, por la Proposición 4.1.3 (b). Entonces $\sigma(s), \sigma(t)$ tienen los primeros $n+1$–digitos iguales. Por tanto $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. □

PROPOSICION 4.1.5 *El mapeo* $\sigma\{s_0 s_1 s_2 ...\} = \{s_1 s_2 ...\}$ *tiene las siguientes propiedades:*

(a) El conjunto de puntos periódicos de σ *es denso en* Σ_2.

(b) El mapeo σ *tiene* 2^n *puntos periódicos de período* n.

(c) El conjunto de puntos eventualmente periódicos del mapeo σ *es denso en* Σ_2.

(d) Existe un elemento $s^* \in \Sigma_2$ *cuya órbita es densa en* Σ_2, *es decir, el conjunto* $\{s^*, \sigma(s^*), \sigma(s^*), ...\}$ *es denso en* Σ_2.

(e) El conjunto de puntos que no son periódicos ni eventualmente periódicos es denso en Σ_2.

DEMOSTRACION.- (a) Sea $t \in \Sigma_2$, $t = \{t_0 t_1 t_2 ...\}$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se toma una vecindad de t con radio ε, $N_\varepsilon(t)$.

Sea $s = \{t_0 t_1 t_2 ... t_n t_0 t_1 t_2 ... t_n ...\}$. Como los primeros $n+1$–digitos de s y t son iguales, por la Proposición 4.1.3 (a), $d[s,t] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Esto implica que $s \in N_\varepsilon(t)$ y además, por construcción, s es periódico. Por tanto, los puntos perfodicos de σ son densos en Σ_2.

(b) Si $s \in \{$el conjunto de puntos periódicos de período $n\}$ entonces,

$$s = \{\overline{s_0 s_1 s_2 ... s_{n-1}}\},$$

donde, cada s_k con $k = 0, 1, ..., n-1$, puede ser 0 o 1. Por tanto, Σ_2 tiene 2^n puntos períodicos de período n.

(c) Si $s = \{s_0 s_1 s_2 ...\}$ es eventualmente periódico con período k, entonces existe N tal que $\sigma^{k+n}(s) = \sigma^k(s)$ para toda $n > N$, es decir, $s = \{s_0 s_1 s_2 ... s_{N-1} s_N s_{N+1} ... s_{N+k} s_N ...\}$.

Sea $t \in \Sigma_2$, $t = \{t_0 t_1 t_2 ... t_n t_{n+1} ... t_{n+k} t_n t_{n+1} ... t_{n+k} t_n ...\}$.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Sea $s = \{t_0 t_1 t_2 ... t_n t_{n+1} ... t_{n+k} t_{n+1} ...\}$, entonces como los primeros $n+1-$digitos de s y t son iguales, $d[s,t] < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, por tanto, $s \in N_\varepsilon(t)$ además s es eventualmente periódico.

(d) Se toma una sucesión s^* que comience con 01, 00, 10, 11, luego se incluyen todos los posibles bloques de 0 y 1 con tres digitos, luego todos los posibles bloques de 0 y 1 con cuatro digitos, y así sucesivamente. es decir

$$s^* = \{01\ 00\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 100\ 011\ 101\ 110\ 111 ...\}.$$

Sea $t \in \Sigma_2$, $t = \{t_0 t_1 t_2 ...\}$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Ahora, se construye s de tal forma que los primeros $n+1$ digitos sean iguales a los primeros $n+1$ digitos de t, después se busca este block de $n+1$ digitos en s^* ya que en s^* estan todas las posibles combinaciones de $0's$ y $1's$, luego a s se le agregan los digitos de s^* que siguen después del block, es decir

$$s = \{t_0 t_1 t_2 ... t_n s_i^* s_{i+1}^* ...\}. \quad \text{para algún } i \in \mathbb{N}.$$

Entonces $d[s,t] < \frac{1}{\varepsilon}$. Además existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^m(s^*) = s$.

(e) Nótese que la órbita de s^* esta contenida en el conjunto de puntos que no son periódicos ni eventualmente periódicos. □

Ahora, ya se puede demostrar que el mapeo $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es caótico en Σ_2.

SOLUCION DEL EJEMPLO 4.1.2 Por el inciso (d) de la Proposición anterior y por la Proposición 2.1.2, σ es topologicamente transitiva. Además, los puntos periódicos de σ son densos en Σ_2 por la Proposición anterior inciso (a), por tanto si se aplica la Proposición 2.1.6 se tiene que σ es caótica en Σ_2. □

4.2 Conjugados topológicos

El conjugado topológico es una herramienta que se ultiliza para mostrar de forma indirecta, cuando una función presenta un comportamiento caótico.

En esta sección aparte de introducir el concepto de conjugado topológico, se demostrará que cuando se tienen dos funciones, donde una de ellas es caótica y existe un conjugado topológico entre las dos, se concluye que la otra función también es caótica.

DEFINICION 4.2.1 *Sean X, Y espacios métricos, se dice que $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, si es continua, uno a uno, sobre y tiene inversa continua.*

Si $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces se dice que X y Y son homeomorfos.

DEFINICION 4.2.2 *Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \to X$, $g : Y \to Y$. Si existe un homeomorfismo $\tau : X \to Y$ tal que*

$$\tau \circ f = g \circ \tau.$$

Se dice que τ es un conjugado topológico entre f y g.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

Observación: También se puede decir que τ es un conjugado topológico entre g y f, esto se verá en la Proposición 4.2.3 al demostrar que τ^{-1} es un conjugado topológico.

Enseguida se verán algunas propiedades del conjugado topológico.

PROPOSICION 4.2.3 *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos, $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ y $\tau : X \to Y$ un conjugado topológico entre f y g, entonces*

(a) $\tau^{-1} : Y \to X$ es un conjugado topológico entre g y f.

(b) $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

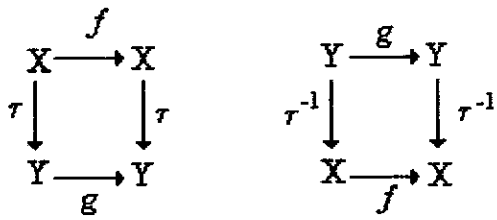
(c) p es un punto periódico de f si y sólo si $\tau(p)$ es un punto periódico de g (además el primer período de p y $\tau(p)$ son iguales)

(d) Los puntos periódicos de f son densos en X si y sólo si los puntos periódicos de g son densos en Y.

(e) f es topologicamente transitiva en X si y sólo si g es topologicamente transitiva en Y.

(f) Si f y g son funciones continuas, entonces f es caótica en X si y sólo si g es caótica en Y.

DEMOSTRACION.- *(a)* Se debe ver que $\tau^{-1} \circ g = f \circ \tau^{-1}$. Se sabe que $\tau \circ f(x) = g \circ \tau(x)$ entonces $g(x) = \tau(f(\tau^{-1}(x)))$, luego $\tau^{-1}(g(x)) = f(\tau^{-1}(x))$ por tanto $\tau^{-1} \circ g = f \circ \tau^{-1}$.



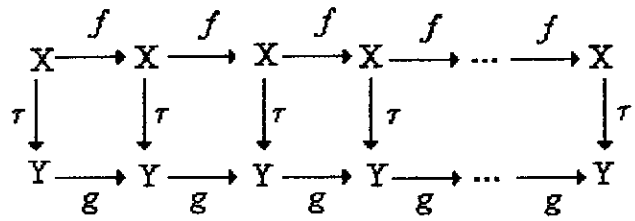
(*b*) La demostración se realizará por inducción.

Para $n = 1$, se cumple que $\tau \circ f = g \circ \tau$.

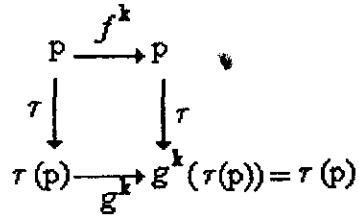
Supóngase que se cumple para $n = k$, $\tau \circ f^k = g^k \circ \tau$.

Por demostrar que se cumple para $n = k + 1$. Nótese que

$$\tau \circ f^{k+1} = (\tau \circ f^k) \circ f = (g^k \circ \tau) \circ f = g^k \circ (\tau \circ f) = g^k \circ (g \circ \tau) = g^{k+1} \circ \tau.$$

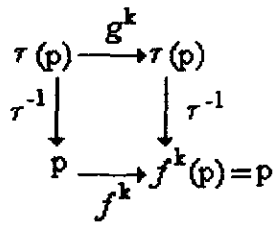


(c) $(\Longrightarrow)$Sea p un punto periódico de f con primer período k, es decir, $f^k(p) = p$ y $f^n(p) \neq p$ si $1 \leq n < k$, entonces el siguiente diagrama conmutativo dice que: $g^k(\tau(p)) = \tau(p)$, así que $\tau(p)$ es un punto periódico con período k de la función g.



Si $1 \leq n < k$, se tiene $g^n(\tau(p)) = \tau(p)$, además como $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$, entonces por ser τ uno a uno se cumple $f^n(p) = p$, pero esto no es posible ya que el primer período de p es igual a $k > n$.

$(\Longleftarrow)$ Sea $\tau(p)$ un punto periódico de g con período k, es decir, $g^k(\tau(p)) = \tau(p)$ y $g^n(\tau(p)) \neq \tau(p)$ para $1 \leq n < k$. Entonces, por el siguente diagrama se tiene que $f^k(p) = p$.



Por tanto, p es punto periódico con período k de la función f.

(d) $(\Longrightarrow)$ Sea P el conjunto de puntos periódicos de g, se demostrará que P es denso en Y. Sea U cualquier subconjunto abierto de Y, entonces $\tau^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X el cual debe contener un punto periódico con período k, $x \in \tau^{-1}(U)$. Ya que $x = f^k(x)$ se sigue que

$$\tau(x) = \tau(f^k(x)) = g^k(\tau(x)) \quad \text{por el inciso (b)}$$

así que $\tau(x)$ es un punto con período k de g, por lo tanto P es denso es Y.

$(\Longleftarrow)$ Sea $\tau^{-1}(P)$ el conjunto de puntos periódicos de f, se demostrará que $\tau^{-1}(P)$ es denso en X. Sea $\tau^{-1}(U)$ un subconjunto abierto de X, entonces U es un subconjunto abierto de Y el

cual debe contener un punto con período k, $x \in U$. Ya que $x = g^k(x)$ se tiene que

$$\tau^{-1}(x) = \tau^{-1}(g^k(x)) = f^k(\tau^{-1}(x)) \quad \text{por los incisos } (a) \text{ y } (b)$$

de aquí que $\tau^{-1}(x)$ es un punto de período k de f, por tanto $\tau^{-1}(P)$ es denso en X.

(e) $(\Longrightarrow)$ Sean $U, V \subset Y$ abiertos, entonces $\tau^{-1}(U)$, $\tau^{-1}(V)$ son abiertos en X y como f es topologicamente transitiva, entonces existe $y \in \tau^{-1}(U)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in \tau^{-1}(V)$.

Sea $x = \tau(y)$, entonces

$$g^n(x) = g^n(\tau(y)) = \tau(f^n(y)) \quad \text{por el inciso } (b)$$

pero $f^n(y) \in \tau^{-1}(V)$, así que $\tau(f^n(y)) \in V$ por tanto $g^n(x) \in V$, es decir, existe $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(x) \in V$, entonces g es topologicamente transitiva en Y.

$(\Longleftarrow)$ Sean $\tau^{-1}(U)$, $\tau^{-1}(V) \subset X$ abiertos, entonces U, V son abiertos en Y y como g es topologicamente transitiva, existe $y \in U$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $g^n(y) \in V$.

Sea $x = \tau^{-1}(y)$, entonces

$$f^n(x) = f^n(\tau^{-1}(y)) = \tau^{-1}(g^n(y)),$$

pero $g^n(y) \in V$, así que $\tau^{-1}(g^n(y)) \in \tau^{-1}(V)$ por tanto $f^n(x) \in \tau^{-1}(V)$, es decir, existe $x \in \tau^{-1}(U)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in \tau^{-1}(V)$, entonces f es topologicamente transitiva en X.

(f) $(\Longrightarrow)$ Como f es topologicamente transitiva en X, g es topologicamente transitiva en Y por (e). Además los puntos periódicos de f son densos en X así que los puntos periódicos de g son densos en Y por (d).

Luego, como g es continua se puede aplicar la Proposición 2.1.6 y se tiene que g exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales en Y, por lo tanto g es caótica en Y.

$(\Longleftarrow)$ Ya que g es topologicamente transitiva en Y, se tiene que f es topologicamente transitiva en X. Como los puntos periódicos de g son densos en Y, los puntos periódicos de f

son densos en X. Como f es continua se puede aplicar la Proposición 2.1.6 y se llega a que f exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales en X, por tanto f es caótica en X. □

Observación 4.2.3. Nótese que para la demostración de la Proposición 4.2.3 en la implicación ($\Longrightarrow$) de los incisos (d) y (e), sólo fue necesario usar el hecho de que τ es sobre, continua y que $\tau(U)$ es abierto en Y para todo U abierto en X, también nótese que no se ultilizó la condición de que τ sea uno a uno. Esto lleva a introducir un nuevo concepto llamado semiconjugado topológico.

DEFINICION 4.2.4 *Sean X, Y espacios metricos y sean $f : X \to X$, $g : Y \to Y$. Si existe una función $\tau : X \to Y$ con $\tau \circ f = g \circ \tau$ tal que τ es sobre, continua y $\tau(U)$ es abierto en Y para todo U abierto en X. Se dice que τ es un semiconjugado topológico entre f y g.*

En este caso, ya no se cumple que τ sea un conjugado topológico entre g y f, esto es porque no existe τ^{-1}, ya que τ no es uno a uno.

COROLARIO 4.2.5 *Sean X, Y espacios metricos, $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ y sea $\tau : X \to Y$ un semiconjugado topológico entre f y g. Si f es caótica en X, entonces g es caótica en Y.*

El resultado es inmediato de la observación 4.2.3.

4.3 La función logistica.

En esta sección se demostrará que la familia de funciones logísticas $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ es caótica para $\mu \geq 4$. Primeramente se hará para el caso $\mu = 4$ usando el concepto de semiconjugado topológico que se definio en la sección anterior y posteriormente, se hará para el caso $\mu > 4$ utilizando el concepto de conjugado topológico.

EJEMPLO 4.3.1 La función $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = 4x(1-x)$ es caótica en $[0,1]$.

SOLUCION.- Sea $\tau : S^1 \to [0,1]$ definida por $\tau(e^{i\theta}) = sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Esta función es un semiconjugado topológico entre f y $g(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$. Para esto nótese que $\tau \circ g = f \circ \tau$,

$\tau \circ g = \tau(e^{2i\theta}) = sen^2\left(\frac{2\theta}{2}\right) = sen^2\theta$

$f \circ \tau = f\left(sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = sen^2\theta.$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\ g\ } & S^1 \\ {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ [0,1] & \xrightarrow[\ f\ ]{} & [0,1] \end{array}$$

Así por el Corolario 4.2.5 y el ejemplo 4.1.1 se sigue que $f(x) = 4x(1-x)$ es caótica en $[0,1]$. $\square$

Considere la familia de funciones $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 4$. En este caso, es una familia de parábolas con vértice en $\left(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4}\right)$, ya que $f_\mu(\frac{1}{2}) > 1$.

Los puntos que satisfacen la ecuación $f_\mu(x) = 1$, son

$$q_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}, \qquad q_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$$

de acuerdo a la siguiente figura:

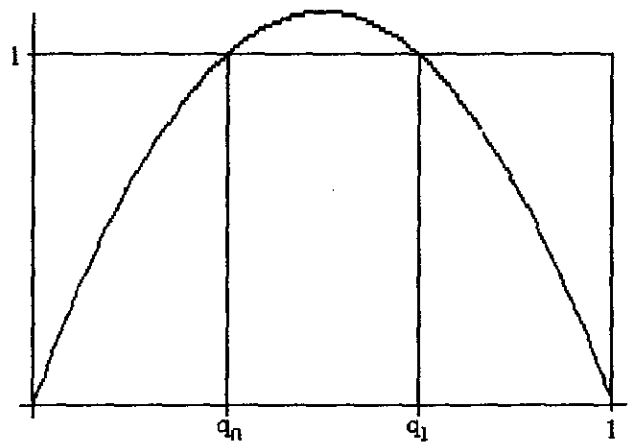


Figura 4.2

Cuando $\mu > 4$, existen puntos del intervalo $[0,1]$ que dejan el intervalo bajo f_μ. Es decir de acuerdo a la figura 4.2 se definen:

$A_0 = [0,1]\,,\ \ I_0 = [0,q_0]\,,\ \ I_1 = [q_1,1]$

$A_1 = f_\mu^{-1}(A_0) = \{x : f_\mu(x) \in [0,1]\} = [0,q_0] \cup [q_1,1]\,.$

Nótese que f_μ mapea a I_0 y I_1 sobre A_0, de forma monótona en ambos casos.

Analogamente se define el conjunto

$$A_2 = f_\mu^{-1}(A_1) = f_\mu^{-1}(f_\mu^{-1}(A_0)) = f_\mu^{-2}(A_0)\,.$$

Además, de acuerdo a la Figura 4.3, A_2 es la unión de los cuatro intervalos cerrados:

$$\begin{aligned} I_{20} &= \{x : x \in I_0 \ \text{ y } \ f_\mu(x) \in I_0\} \\ I_{21} &= \{x : x \in I_0 \ \text{ y } \ f_\mu(x) \in I_1\} \\ I_{22} &= \{x : x \in I_1 \ \text{ y } \ f_\mu(x) \in I_1\} \\ I_{23} &= \{x : x \in I_1 \ \text{ y } \ f_\mu(x) \in I_0\}. \end{aligned}$$

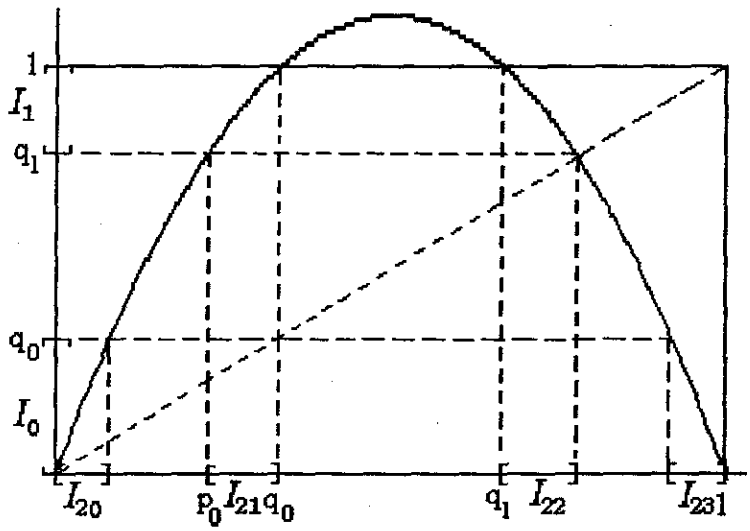


Figura 4.3

En general, se definen los conjuntos

$$A_n = f_\mu^{-1}(A_{n-1}) = f_\mu^{-n}(A_0).$$

Nótese que en A_n estan puntos de $[0,1]$, que se quedan en $[0,1]$ bajo las primeras n iteraciones

de f_μ, además $A_n \subset A_{n-1}$.

Sea el conjunto

$$\Lambda_\mu = \cap_{n=0}^{\infty} A_n = \cap_{n=0}^{\infty} f_\mu^{-n}([0,1]),$$

Λ_μ tiene los puntos de $[0,1]$, que nunca escapan del intervalo $[0,1]$ bajo iteraciones de f_μ.

PROPOSICION 4.3.2 *Si $\mu > 4$ entonces :*

(a) Los A_n estan formados por 2^n intervalos cerrados y ajenos para toda $n \in N$.

(b) Si I es un de los intervalos cerrados de A_n entonces $f_\mu^n(x) : I \to [0,1]$ es uno a uno y sobre.

DEMOSTRACION.- (Se demostrará (a) y (b) por inducción) Para $n = 1$ se tiene que $A_1 = [0, q_0] \cup [q_1, 1]$ además $f_\mu(0) = f_\mu(1) = 0$ y $f_\mu\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}\right) = 1$ como f_μ es continua, aplicando el Teorema del Valor Intermedio se tiene que f_μ toma todos los valores entre 0 y 1. Esto es $f_\mu : I \to [0,1]$ es sobre (donde $I = [0, q_0]$ o $I = [q_1, 1]$).

Ahora, nótese que $f'_\mu(x) = \mu(1-2x)$, entonces $f'_\mu(x) > 0$ si $x < \frac{1}{2}$ y $f'_\mu(x) < 0$ si $x > \frac{1}{2}$, por tanto $f'_\mu(x) > 0$ si $x \in I = [0, q_0]$. De aquí que $f_\mu(x)$ es estrictamente creciente, entonces es uno a uno.

Analogamente, $f'_\mu(x) < 0$ si $x \in I = [q_1, 1]$, por tanto f_μ es estrictamente decreciente, entonces es uno a uno.

Supóngase que se cumple para $n = k$, es decir A_k es la unión de 2^k intervalos cerrados y ajenos, además, si I es uno de los intervalos de A_k, entonces $f_\mu^k : I \to [0,1]$ es sobre y $(f_\mu^k)'(x) < 0$ o $(f_\mu^k)'(x) > 0$ para toda $x \in I$.

Se demostrará que se cumple para $n = k+1$.

Se tiene $A_{k+1} \subset A_k$, ya que si se toma $x \in A_{k+1}$, entonces $f_\mu^{k+1}(x) \in [0,1]$ es decir, $f_\mu(f_\mu^k(x)) \in [0,1]$, de aquí que $f_\mu^k(x) \in [0,1]$, entonces $x \in A_k$.

Supóngase que $I = [a,b]$ es uno de los intervalos de A_k y además $(f_\mu^k)'(x) > 0$ para toda $x \in [a,b]$. Entonces $f_\mu^k(x)$ es estrictamente creciente en $[a,b]$, también f_μ^k es continua y $f_\mu^k([a,b]) = [0,1]$ es uno a uno y sobre.

Entonces por el Teorema del Valor Intermedio, existen x_2, x_3 tales que

1. $-\ a < x_2 < x_3 < b$,
2. $-\ f_\mu^k([a,x_2]) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}\right]$,

3. – $f_\mu^k((x_2,x_3)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}\right)$,

4. – $f_\mu^k([x_3,b]) = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}, 1\right]$.

Entonces existen x_2, x_3 entre a y b tales que son las preimagenes de $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$. Es decir, satisface

$$f_\mu^k(x_2) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}, \quad f_\mu^k(x_3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}.$$

La condición 1 implica que $[a,x_2]$ y $[x_3,b]$ son ajenos. Además

$$f_\mu^{k+1}([a,x_2]) = f_\mu(f_\mu^k[a,x_2]) = f_\mu\left(\left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}\right]\right) = [0,1],$$

$f_\mu^{k+1}(x) = f_\mu(f_\mu^k(x)) > 1$ para toda $x \in (x_2,x_3)$, por la condición 3.

$$f_\mu^{k+1}([x_3,b]) = f_\mu(f_\mu^k[x_3,b]) = f_\mu\left(\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}, 1\right]\right) = [0,1].$$

Entonces el conjunto de puntos de $[a,b]$ que estan en A_{k+1} esta formado por los intervalos cerrados $[a,x_2] \cup [x_2,b]$.

Si $x \in [a,x_2]$, entonces $f_\mu^k(x) \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}\right]$, además $f'_\mu(f_\mu^k(x)) > 0$ (ya que $f'_\mu(x) > 0$ si $x < \frac{1}{2}$), también se tiene, por hipótesis, que $(f_\mu^k)'(x) > 0$ para toda $x \in [a,x_2]$, y aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$(f_\mu^{k+1})'(x) = f'_\mu(f_\mu^k(x))(f_\mu^k)'(x) > 0 \quad \text{para toda} \quad x \in [a,x_2].$$

Entonces $f_\mu^{k+1}(x)$ es estrictamente creciente en $[a,x_2]$, por tanto es uno a uno.

Analogamente se tiene que $f_\mu^{k+1}(x)$ es estrictamente decreciente en $[x_3,b]$, por lo que es uno a uno.

$$f_\mu^{k+1} : [a,x_2] \to [0,1] \quad \text{y} \quad f_\mu^{k+1} : [x_3,b] \to [0,1].$$

Esto se puede hacer con cada uno de los intervalos cerrados I de A_k. Entonces por cada intervalo I de A_k se tienen dos intervalos cerrados y ajenos que estan en A_{k+1}, por lo tanto, A_{k+1} esta formado por $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ intervalos cerrados y ajenos, y en cada intervalo I cerrado

de A_{k+1}, se cumple que $f_\mu^{k+1} : I \to [0,1]$ es uno a uno y sobre. □

Se denotará a la j—ésima componente de A_n por $I_{n,j}$. La longitud de cada $I_{n,j}$ sera denotada por $|I_{n,j}|$.

EJEMPLO 4.3.3 *Si $\mu > 4$, la función f_μ es caótica en Λ_μ:*

La solución de este ejemplo no es un trabajo facíl de realizar, para llegar a este resultado se necesitan seguir los siguientes pasos:

1.-Demostrar que Λ_μ es conjunto de Cantor para $\mu > 2+\sqrt{5}$.

2.-Demostrar que Λ_μ es conjunto de Cantor para $\mu > 4$.

3.-Construir un conjugado topológico entre el mapeo cambio y f_μ.

DEFINICION 4.3.4 *Sea un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}$, se dice un conjunto de Cantor si:*

(a) Λ es compacto (cerrado y acotado).

(b) Λ es perfecto (cada punto de Λ es un punto de acumulación de Λ).

(c) Λ no contiene intervalos.

PROPOSICION 4.3.5 *Si $\mu > 4$. Entonces Λ_μ es un conjunto compacto y perfecto.*

DEMOSTRACION.- Ya que $\Lambda_\mu = \cap_{n=0}^{\infty} A_n$ y por la Proposición 4.3.2, cada A_n es compacto por tanto Λ_μ es compacto.

Para demostrar que Λ_μ es perfecto, primero nótese que para cada n, todo extremo de los intervalos de A_n estan contenidos en Λ_μ.

Sea $x \in \Lambda_\mu$, y para cada n, sea I_{n,j_x} la componente A_n que contiene a x.

Si $|I_{n,j_x}| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces los extremos de I_{n,j_x}, estan arbitrariamente cercanos a x, así que x esta en la cerradura de $\Lambda_\mu \setminus \{x\}$. Por otra parte, si $|I_{n,j_x}|$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces $\cap_{n=0}^{\infty} I_{n,j_x}$ es un intervalo cerrado, y $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{n,j_x} \subset \Lambda_\mu$, así que otra vez x esta en la cerradura de $\Lambda_\mu \setminus \{x\}$.

Esto demuestra que Λ_μ es perfecto. □

Para finalizar la prueba de que Λ_μ es un conjunto de Cantor cuando $\mu > 2+\sqrt{5}$, se necesita probar que este no contiene intervalos.

PROPOSICION 4.3.6 *Si $\mu > 2+\sqrt{5}$. Entonces Λ_μ es un conjunto de Cantor.*

DEMOSTRACION.- Supóngase que Λ_μ contiene un intervalo, sea $[a,b] \subset \Lambda_\mu$. Para cualquier $n \geq 1$, el Teorema del Valor Medio aplicado a f_μ^n en el intervalo $[a,b]$, asegura que existe un punto $c_n \in (a,b)$ tal que

$$f_\mu^n(b) - f_\mu^n(a) = (f_\mu^n)'(c_n)(b-a).$$

Sea $\lambda = f'_\mu(q_0)$, además $\left|f'_\mu(x)\right| \geq \lambda \ \ \forall \ x \in A_1$. Nótese que,

$$\left|f'(q_0)\right| = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1 \ \text{ para } \ \mu > 2+\sqrt{5}$$

por lo tanto $\lambda > 1$.

Ya que $c_n \in [a,b] \subset \Lambda_\mu$ se tiene,

$$f_\mu^i(c_n) \in \Lambda_\mu \subset A_1, \ \text{ para todo } \ 0 \leq i \leq n-1.$$

Además $\left|(f_\mu^n)'(c_n)\right| \geq \lambda^n$ por la regla de la cadena, luego

$$\left|f_\mu^n(b) - f_\mu^n(a)\right| = \left|(f_\mu^n)'(c_n)\right| |b-a| \geq \lambda^n |b-a|.$$

Ya que $\lambda > 1$, esto implica que $\left|f_\mu^n(b) - f_\mu^n(a)\right| > 1$ para toda n suficientemente grande. Pero Λ_μ es invariante, entonces

$$\{f^n(a), f^n(b)\} \subset \Lambda_\mu \subset [0,1] \quad \text{para toda } n,$$

luego $|f^n(a) - f^n(b)| < 1$, así se tiene una contradicción, entonces Λ_μ no contiene intervalos y por la Proposición 4.3.4, Λ_μ es un conjunto de Cantor. $\square$

Al demostrar que Λ_μ es un conjunto de Cantor para $\mu > 4$, se necesitan las siguientes definiciones y resultados.

DEFINICION 4.3.7 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función en C^1 y Λ es un conjunto compacto invariante para f, (es decir $f(\Lambda) \subset \Lambda$), se dice Λ es un conjunto hiperbólico para f si existen*

constantes $c > 0$ *y* $\lambda > 1$ *tales que*

$$\left|(f^n)'(x)\right| \geq c\lambda^n \ \ \forall \ \ x \in \Lambda \ \ y \ \ \forall \ \ n \geq 1.$$

La siguiente Proposición da alternativas para la definición de conjunto hiperbólico.

PROPOSICION 4.3.8 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función en* C^1 *y* Λ *es un conjunto compacto invariante para* f. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1). *Existen constantes* $c > 0$ *y* $\lambda > 1$ *tales que* $\left|(f^n)'(x)\right| \geq c\lambda^n \ \ \forall \ \ x \in \Lambda \ \ y \ \ \forall\, n \geq 1.$

(2). *Existe un entero* $N \geq 1$ *tal que* $\left|(f^n)'(x)\right| > 1 \ \ \forall \ \ x \in \Lambda \ \ y \ \ \forall\, n \geq N$.

(3). *Existe un entero* $n_0 \geq 1$ *tal que* $\left|(f^{n_0})'(x)\right| > 1 \ \ \forall \ \ x \in \Lambda.$

(4). *Para cada* $x \in \Lambda$ *existen enteros* $n_x \geq 1$ *que dependen de* x *tales que* $\left|(f^{n_x})'(x)\right| > 1.$

Observación.- Si $|f'(x)| > 1$ para toda $x \in \Lambda$,entonces las cuatro condiciones de la Proposición son verdaderas.

DEMOSTRACION.-(4) $\Longrightarrow$ (3) Ya que f esta en C^1, $(f^n)'$ es continua para cada n.

Para cada $x \in \Lambda$, $|(f^{n_x})'(x)| > 1$ y $(f^{n_x})'$ es continua, por lo tanto existe una vecindad $N(x)$ y un $\lambda_x > 1$, tal que $|(f^{n_x})'(y)| > \lambda_x$ para toda $y \in N(x)$.

Los conjuntos abiertos $\{N(x) : x \in \Lambda\}$ es una cubierta del conjunto compacto Λ, por lo tanto existe una subcubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^k$, números $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ todos estrictamente mayores que 1, y enteros $\{n_i\}_{i=1}^k$ tal que $|(f^{n_i})'(y)| > \lambda_i$ para todo $y \in U_i$.

Sean $\nu = \max\{n_1, ..., n_k\}$, $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ y $m = \min\{|f'(x)|\}$, entonces $m > 0$ ya que

$$\left|(f^{n_x})'(x)\right| = \left|f'(x)\right| \left|f'(f(x))\right| ... \left|f'(f^{n_x-1}(x))\right|.$$

Se elige un entero k tal que, $\lambda_0^k m^\nu > 1$ y sea $n_0 = k\nu + \nu$. Ahora se ha definido la elección de n_0, se necesita ver que $|(f^{n_0})'(x)| > 1 \ \ \forall \ \ x \in \Lambda$.

Se elige $x \in \Lambda$ y se realiza el siguiente proceso de elección que depende de x, para terminar después de un número finito de pasos.

Se elige ν_1 tal que $x \in U_{\nu_1}$.

Sea la colección $\{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_j\}$.

Sea $\eta = \sum_{i=1}^{j} n_{\nu_i}$.

Se toma ν_{j+1} tal que $f^{\eta}(x) \in U_{\nu_{j+1}}$.

Si $\eta + \nu_{j+1} > k\nu$, entonces se detiene el proceso, de otra forma, se sigue eligiendo ν_{j+2}.

Si el proceso de selección se detiene después de j pasos, entonces $k\nu < \sum_{i=1}^{j} n_{\nu_i} \leq k\nu + \nu$.

Se escribe $n_0 = n_{\nu_1} + n_{\nu_2} + ... + n_{\nu_j} + i_x$, donde $0 \leq i_x \leq \nu$.

Ya que cada $n_{\nu_i} \leq \nu_i$, se sabe que $j \geq k$.

Usando la regla de la cadena, se puede estimar

$$
\begin{aligned}
|(f^{n_0})'(x)| &= \left|(f^{i_x}(f^{n_{\nu_j}}(f^{n_{\nu_j-1}} \cdots f^{n_{\nu_1}})))'(x)\right| \\
&\geq m^{i_x}\lambda_{\nu_j}\lambda_{\nu_{j-1}} \cdots \lambda_{\nu_1} && \text{(por las propiedades de la subcubierta } \{U_i\}_{i=1}^{k}) \\
&\geq m^{\nu}\lambda_{\nu_j}\lambda_{\nu_{j-1}} \cdots \lambda_{\nu_1} && (m \leq 1 \text{ y } i_x \leq \nu) \\
&\geq m^{\nu}\lambda_0^{j} && \text{(por la elección de } \lambda_0) \\
&\geq m^{\nu}\lambda_0^{k} && (j \geq k \text{ y } \lambda_0 > 1) \\
&> 1 && \text{(por la elección de } k).
\end{aligned}
$$

Entonces, $|(f^{n_0})'(x)| > 1 \ \ \forall \ \ x \in \Lambda$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) Si $n_0 = 1$ en (3), no hay nada que probar, así que, supóngase que $n_0 > 1$.

Sea

$$\lambda = \min_{x \in \Lambda} \left\{\left|(f^{n_0})'(x)\right|\right\} \quad \text{y} \quad m = \min_{x \in \Lambda} \left\{\left|f'(x)\right|\right\},$$

entonces, $\lambda > 1$ y $m > 0$. Ya que se esta suponiendo que $n_0 > 1$, se tiene que $m \leq 1$.

Se elige k tal que $m^{n_0-1}\lambda^k > 1$. Sea $N = n_0k+(n_0-1)$. Si $n > N$, se escribe $n = n_0(k+\nu)+i$, donde $\nu > 0$ y $0 \leq i \leq n_0 - 1$. Entonces, para algún $x \in \Lambda$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|(f^{n})'(x)| &= \left|(f^{n_0(k+\nu)})'(f^{i}(x))\right| \left|(f^{i})'(x)\right| \\
&\geq \lambda^{k+\nu}m^{i} \\
&\geq \lambda^{\nu}\lambda^{k}m^{n_0-1} && \text{(ya que } m \leq 1 \text{ y } i \leq n_0 - 1) \\
&\geq \lambda^{\nu} && \text{(por la elección de } k) \\
&> 1 && \text{(ya que } \lambda > 1)
\end{aligned}
$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Si $N = 1$ en (2), no hay nada que probar.

Supóngase que $N > 1$. Sea

$$m_1 = \min_{x \in \Lambda} \{|(f^N)'(x)|\} \quad \text{y} \quad m = \min_{x \in \Lambda} \{|f'(x)|\},$$

de aquí que $m_1 > 1$. Ya que se esta suponiendo que $N > 1$, se tiene $m \leq 1$.

Sea

$$\lambda = m_1^{1/N} \qquad \text{y} \qquad c = (m/\lambda)^{N-1},$$

así que $\lambda > 1$ y $c > 0$. Para cualquier $n > 0$ se escribe $n = kN + i$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq i \leq N-1$. Entonces para cualquier $x \in \Lambda$ se tiene

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(x)| &= \left|(f^{kN})'(f^i(x))\right| \left|(f^i)'(x)\right| \\
&\geq m_1^k m^i \\
&= \lambda^{kN} m^i && \text{(por la elección de } \lambda) \\
&= \lambda^{kN} \lambda^i (m/\lambda)^i \\
&\geq \lambda^{kN+i} (m/\lambda)^{N-1} && \text{(ya que } m/\lambda < 1 \text{ y } i \leq N-1) \\
&= c\lambda^n && \text{(por la elección de } c).
\end{aligned}$$

(1) $\Longrightarrow$ (4) Se elige n suficientemente grande tal que $c\lambda^n > 1$. Entonces se tiene $|(f^n)'(x)| \geq c\lambda^n > 1$. Ahora, sea $n_x = n \ \ \forall \ \ x \in \Lambda$. $\square$

Cuando $\mu > 2+\sqrt{5}$, se tiene $\left|f'_\mu(x)\right| > 1$ para toda $x \in \Lambda_\mu$, y esta fué la clave para demostrar que Λ_μ es un conjunto de Cantor. Para la demostración en el caso $\mu > 4$, se necesita reemplazar la condición "$\left|f'_\mu(x)\right| > 1$ para toda $x \in \Lambda_\mu$", por la de que "Λ_μ es un conjunto hiperbólico para f_μ". Para lo anterior, se necesita el concepto de la derivada Schwarziana.

Recuerde la Definición 1.3.10 que se dio en el Capítulo 1.

La derivada Schwarziana de una función $f \in C^3$ en un punto x, donde $f'(x) \neq 0$ es:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2. \tag{4.2}$$

PROPOSICION 4.3.9 *Para la familia logística f_μ con $\mu > 0$.*

(i) $Sf_\mu(x) < 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

(ii) $Sf_\mu^n(x) < 0 \quad \forall \ n > 1 \ \ y \ \ \forall \, x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i=0}^{n-1} f_\mu^{-i}(1/2)$.

DEMOSTRACION.- *(i)* Se tiene que $f_\mu = \mu x(1-x)$, entonces $f'_\mu = \mu - 2\mu x$ y $f''_\mu = -2\mu$, $f''' = 0$ así

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = 0 - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 < 0.$$

(ii) Ya que f_μ^n es un polinomio de grado 2^n, este resultado se sigue de (i), de la siguiente Proposición y de inducción. □

PROPOSICION 4.3.10 *Si $g'(x) \neq 0$ y $f'(g(x)) \neq 0$. Entonces*

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x).$$

Tambien, si $Sg(x) < 0$ y $Sf(g(x)) < 0$, entonces $S(f \circ g)(x) < 0$.

DEMOSTRACION.- Usando la regla de la cadena se tiene

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$,

$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$, y

$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)$.

Luego, sustituyendo en (4.2) se obtiene el resultado. □

La siguiente Proposición da una consecuencia geométrica de la derivada Schwarziana negativa.

PROPOSICION 4.3.11 *Sea I un intervalo abierto y $Sf(x) < 0$ en I, entonces f' no tiene un mínimo local positivo en I, ni tiene un máximo local negativo en I.*

DEMOSTRACION.- Supóngase que x es un mínimo local positivo para f' en I. Entonces $f'(x) > 0$, $f''(x) = 0$ y $f'''(x) > 0$. Esto implica que $Sf(x) \geq 0$, lo cual contradice que $Sf(x) < 0$ en I.

Similarmente, si x es un máximo local negativo para f' en I, entonces $f'(x) < 0$, $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \leq 0$, esto implica que $Sf(x) \geq 0$, lo cual contradice que $Sf(x) < 0$ en I. □

PROPOSICION 4.3.12 *(Principio del Mínimo) Sea* $I = [a,b]$ *y* $f \in C^3$ *en* I. *Si* $Sf(x) < 0$ *en* (a,b), *entonces*

$$|f'(x)| > \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \quad \forall\ x \in (a,b).$$

DEMOSTRACION.- Ya que $|f'|$ es continua en el intervalo cerrado I, debe tener un mínimo en algún punto $x_0 \in I$. Si $x_0 \in (a,b)$, entonces $f'(x_0) \neq 0$ ya que $Sf(x) < 0$ en (a,b).

Si $f'(x_0) > 0$, entonces f' tiene un mínimo local positivo en (a,b), lo cual contradice la Proposición 4.3.11.

En el otro caso si $f'(x_0) < 0$, entonces f' tiene un máximo local negativo en (a,b), otra contradicción para la Proposición 4.3.11. De esto se sigue que $x_0 = a$ o $x_0 = b$. □

La Proposición 4.3.12 es de gran ayuda en el resultado de la derivada Schwarziana negativa. Cuando se le aplica a las iteraciones f_μ^n, da información acerca de la gráfica de f_μ^n entre los puntos críticos.

Considere f_μ. Para cualquier $\mu > 0$, f_μ tiene un punto fijo en $p_1 = 1-(1/\mu)$ y $f'_\mu(p_1) = 2-\mu$, así que $|f'_\mu(p_1)| > 1$ cuando $\mu > 3$.

Sea $p_0 = 1/\mu$, así p_0 y p_1 son simétricos respecto a $1/2$; ver la Figura 4.4.

Nótese que $f_\mu(p_0) = p_1$ (cuando $\mu > 2$), y que $f_\mu([p_0, q_0]) = f_\mu([q_1, p_1]) = [p_1, 1]$.

Así que, si $J = (p_0, q_0) \cup (q_1, p_1)$, y si x es cualquier punto en J, entonces $f_\mu(x) \notin J$.

Pero se tiene la siguiente Proposición.

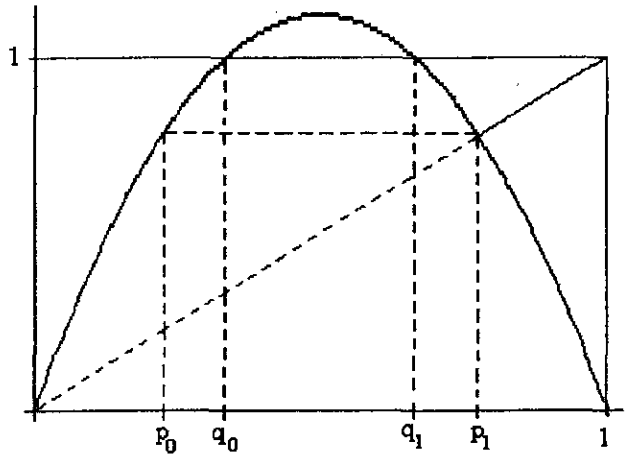


Figura 4.4

PROPOSICION 4.3.13 *Si $\mu > 4$ y si $x \in J$, entonces existe un entero $n \geq 2$, tal que* $f_\mu^n(x) \in [p_0, p_1)$.

DEMOSTRACION.- Se elige $x \in J$, así $f_\mu(x) \in (p_1, 1)$ y $f_\mu^2(x) \in (0, p_1)$. Si $f_\mu^2(x) \in [p_0, p_1)$, entonces se cumple la conclusión. Supóngase que $f_\mu^2(x) \in (0, p_0)$. Luego, para algún $n \geq 1$, $f_\mu^{2+n}(x)$ esta en $[p_0, p_1)$. Supóngase que no. Además, $f_\mu(z) > z \quad \forall \ z \in (0, p_0)$, se sabe que $f_\mu^{2+n}(x)$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por p_0. Así $f_\mu^{2+n}(x)$ converge cuando $n \to \infty$ a algún punto $z_0 \leq p_0$. De aquí, se sigue que z_0 es un punto fijo de f_μ, ya que

$$f_\mu^{2+n}(z_0) \leq z_0 \leq f_\mu(z_0) \leq \cdots \leq f_\mu^{2+n}(z_0) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Pero $0 < z_0 < p_1$, así se llega a una contradicción. □

PROPOSICION 4.3.14 *Si $\mu > 4$, entonces $q_0 - p_0 < p_0$. Así los intervalos (p_0, q_0) y (q_1, p_1) tienen menor longitud que los intervalos $(0, p_0)$ y $(p_1, 1)$.*

DEMOSTRACION.- Se probará que $\mu > 4$ implica $2p_0 > q_0$. Recuerde que

$$p_0 = \frac{1}{\mu} \quad \text{y} \quad q_0 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}}$$

Ya que $\mu > 4$, se tiene $0 < 1 - (4/\mu) < 1$, así $\sqrt{1 - (4/\mu)} > 1 - (4/\mu)$. Después multiplicando ambos lados por $1/2$, se tiene

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}} > \frac{1}{2} - \frac{2}{\mu} \quad \text{o} \quad 2\left(\frac{1}{\mu}\right) > \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}}$$

finalmente, sustituyendo los valores de p_0 y q_0 se tiene que $2p_0 > q_0$. □

Ahora, se tienen todos los ingredientes necesarios para probar que Λ_μ es un conjunto hiperbólico para $\mu > 4$.

PROPOSICION 4.3.15 *Si $\mu > 4$, entonces Λ_μ es un conjunto hiperbólico para f_μ.*

DEMOSTRACION.- Sea $x \in \Lambda_\mu$. Supóngase que $x > 1/2$, el caso donde $x < 1/2$ se sigue por simetría de f_μ en $1/2$. Se necesita encontrar un entero n (el cual puede depender de x) tal que $\left|(f_\mu^n)'(x)\right| > 1$. Entonces la hiperbolicidad de Λ_μ se sigue de la Proposición 4.3.8.

Si $x \geq p_1$, se puede escoger $n = 1$. Si $x = q_1$, entonces $f_\mu^n(q_1) = 0$ para $n \geq 2$, así

$$\begin{aligned} |(f_\mu^n)'(q_1)| &= |f'_\mu(q_1)|\,|f'_\mu(f_\mu(q_1))|\,|f'_\mu(f_\mu^2(q_1))|\cdots|f'_\mu(f_\mu^{n-1}(q_1))| \\ &= |f'_\mu(q_1)|\,|f'_\mu(1)|\,|f'_\mu(0)|^{n-2} \\ &= \left(\sqrt{\mu^2-4\mu}\right)(\mu)(\mu^{n-2}) \\ &= \mu^n\sqrt{1-(4/\mu)}, \end{aligned}$$

lo cual es estrictamente mayor que 1 para toda n suficientemente grande.

Ahora, sea x entre q_1 y p_1. La Proposición 4.3.13 asegura que existe n tal que $f_\mu^n \in [p_0, p_1)$. Sea $I_{n,j}$ la componente de A_n que contiene a x. Existen dos casos a considerar: cuando $I_{n,j} \subset [q_1, p_1)$, o $I_{n,j} \not\subseteq [q_1, p_1)$.

Supóngase que $I_{n,j} \subset [q_1, p_1)$. Por la Proposición 4.3.2, se tiene que f_μ^n mapea monotonamente $I_{n,j}$ sobre $[0,1]$, entonces se puede partir $I_{n,j}$ en tres subintervalos, $I_{n,j} = L_{n,j} \cup K_{n,j} \cup R_{n,j}$, donde

$$f_\mu^n(L_{n,j}) = [0, p_0], \quad f_\mu^n(K_{n,j}) = (p_0, p_1) \quad \text{y} \quad f_\mu^n(R_{n,j}) = [p_1, 1].$$

Ya que $L_{n,j} \subset I_{n,j} \subset [q_1, p_1)$, y $R_{n,j} \subset I_{n,j} \subset [q_1, p_1)$, la Proposición 4.3.14 asegura que

$$|f_\mu^n(L_{n,j})| > |L_{n,j}| \quad \text{y} \quad |f_\mu^n(R_{n,j})| > |R_{n,j}|. \tag{4.3}$$

Es decir, f_μ^n expande $I_{n,j}$. Por el Teorema del Valor Medio aplicado a f_μ^n, existe un punto $y \in L_{n,j} = [l_1, l_2]$ tal que

$$|f_\mu^n(l_1) - f_\mu^n(l_2)| = |(f_\mu^n)'(y)|\,|l_1 - l_2|.$$

Como $|f_\mu^n(l_1) - f_\mu^n(l_2)|$ es la longitud de $f_\mu^n(L_{n,j})$ y $|l_1 - l_2|$ es la longitud de $L_{n,j}$, entonces

$$|f_\mu^n(L_{n,j})| = |(f_\mu^n)'(y)|\,|L_{n,j}|$$

por (4.3) $\frac{|f_\mu^n(L_{n,j})|}{|L_{n,j}|} > 1$, de aquí que $|(f_\mu^n)'(y)| > 1$. Por este mismo argumento, existe

$z \in R_{n,j}$ tal que $\left|(f_\mu^n)'(z)\right| > 1$.

Además, como $f_\mu^n(x) \in [p_0, p_1)$ se tiene que x esta en la cerradura de $K_{n,j}$, así $y \leq x < z$. Además f_μ^n no tiene un punto crítico en $[y, z]$, la Proposición 4.3.12 asegura que $\left|(f_\mu^n)'(x)\right| > 1$

.

Ahora, supóngase que $I_{n,j}$ no es un subconjunto de $[q_1, p_1)$. Otra vez, se parte el intervalo $I_{n,j}$ en tres subintervalos $I_{n,j} = L_{n,j} \cup K_{n,j} \cup R_{n,j}$, donde

$$f_\mu^n(L_{n,j}) = [0, p_0], \quad f_\mu^n(K_{n,j}) = (p_0, p_1) \quad \text{y} \quad f_\mu^n(R_{n,j}) = [p_1, 1].$$

Como se tenía anteriormente, x esta en la cerradura de $K_{n,j}$ porque $f_\mu^n(x) \in [p_0, p_1)$.

Ya que $x \in (q_1, p_1)$, uno de los $L_{n,j}$ o $R_{n,j}$ esta contenido en $[q_1, p_1)$. Pero, ya que $I_{n,j}$ no es un subconjunto de $[q_1, p_1)$, uno de los conjuntos $L_{n,j}$ o $R_{n,j}$ no esta contenido en $[q_1, p_1)$.

Supóngase que $L_{n,j}$ esta contenido en $[q_1, p_1)$ y $R_{n,j}$ no lo esta (el otro caso es similar).

Además $I_{n,j} \subset [q_1, 1]$ y $I_{n,j} \cap [q_1, p_1) \neq \varnothing$, debe ser que $p_1 \in I_{n,j}$. Como anteriormente, $\left|f_\mu^n(L_{n,j})\right| > |L_{n,j}|$, así el Teorema del Valor Medio asegura que existe un punto $y \in L_{n,j}$ tal que $\left|(f_\mu^n)'(y)\right| > 1$.

Y $\left|(f_\mu^n)'(p_1)\right| > 1$, ya que p_1 es un punto fijo hiperbólico repulsor. Entonces $x \in [y, p_1]$ y f_μ^n no tiene un punto crítico en $[y, p_1]$, así que la Proposición 4.3.12 asegura que $\left|(f_\mu^n)'(x)\right| > 1$.

□

Ultilizando el mismo procedimiento que se hizo en la Proposición 4.3.6, se demostrará que Λ_μ es un conjunto de Cantor para $\mu > 4$ pero ahora, se usará el hecho de que Λ_μ es un conjunto hiperbólico.

PROPOSICION 4.3.16 *Si $\mu > 4$, entonces Λ_μ es un conjunto de Cantor.*

DEMOSTRACION.- (Por contradicción) Supóngase que Λ_μ contiene un intervalo. Sea $[a, b] \subset \Lambda_\mu$ para algún $n \geq 1$, aplicando el Teorema del Valor Intermedio a f_μ^n en el intervalo $[a, b]$, asegura que existe un punto $c_n \in (a, b)$ tal que

$$f_\mu^n(b) - f_\mu^n(a) = (f_\mu^n)'(c_n)(b - a).$$

Además, Λ_μ es un conjunto hiperbólico, existe $c > 0$ y $\lambda > 1$ tal que $\left|(f_\mu^n)'(x)\right| \geq c\lambda^n$ $\forall\, x \in \Lambda_\mu$ y $\forall\, n \geq 1$. Como, $c_n \in (a,b) \subset \Lambda_\mu$, entonces

$$\left|f_\mu^n(b) - f_\mu^n(a)\right| = \left|(f_\mu^n)'(c_n)\right| |b-a| \geq c\lambda^n |b-a|,$$

y como $\lambda > 1$ implica que $\left|f_\mu^n(b) - f_\mu^n(a)\right| > 1$ $\forall\, n$ suficientemente grande. Pero Λ_μ es invariante por tanto

$$\left\{f_\mu^n(a), f_\mu^n(b)\right\} \subset \Lambda_\mu \subset [0,1] \quad \text{para toda} \quad n,$$

lo cual es una contradicción. Así que, Λ_μ no contiene ningún intervalo.

Y por la Proposición 4.3.5, se tiene que Λ_μ es un conjunto de Cantor. □

PROPOSICION 4.3.17 *Sea $f_\mu : \Lambda_\mu \to \Lambda_\mu$ si $\mu > 4$, entonces la longitud de cada de intervalo $I_{n,j}$ es menor que $\frac{1}{c\lambda^n}$.*

DEMOSTRACION.- Sea $x \in A_n \subset \Lambda_\mu$, ya que Λ_μ es un conjunto hiperbólico, por la Proposición 4.3.8 existen $c > 0$ y $\lambda > 1$ tales que

$$\left|(f_\mu^n)'(x)\right| \geq c\lambda^n \quad \text{para toda } n \geq 1.$$

Luego, si $x \in A_n$, entonces $(f_\mu^k)'(x) \geq c\lambda^n$. Ahora, sean a, b los extremos de un intervalo de A_n, es decir $I_{n,j} = [a,b] \subset A_n$, aplicando el Teorema del Valor Medio a f_μ^n en $[a,b]$, se tiene que existe p tal que

$$f_\mu^n(a) - f_\mu^n(b) = (f^n)'(p)(b-a) \qquad \text{con} \quad p \in [a,b] \subset A_n.$$

así

$$\left|f_\mu^n(a) - f_\mu^n(b)\right| = \left|(f^n)'(p)\right| |b-a| \geq c\lambda^n \ |b-a|$$

además se sabe que $\left|f_\mu^n(a) - f_\mu^n(b)\right| \leq 1$, por tanto

$$c\lambda^n \ |b-a| \leq 1$$

así que $|b-a| \leq \frac{1}{c\lambda^n}$. $\square$

Ahora se construirá un conjugado topólogico Ψ entre $f_\mu : \Lambda_\mu \to \Lambda_\mu$ con $\mu > 4$ y $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.

Recuerde que

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}\right], \qquad I_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}, 1\right],$$

y $A_1 = I_0 \cup I_1$.

Ya que $\Lambda_\mu \subset A_1$, Λ_μ también esta en $I_0 \cup I_1$.

DEFINICION 4.3.18 *Sea* $\Psi : \Lambda_\mu \to \Sigma_2$, *tal que para cada* $x \in \Lambda_\mu$, $\Psi(x) = \{s_0 s_1 s_2 ...\}$, *donde*

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f_\mu^n(x) \in I_0 \\ 1 & \text{si} \quad f_\mu^n(x) \in I_1 \end{cases}.$$

Entonces $\Psi(x) = \{s_0 s_1 s_2 ...\}$ si y sólo si $f_\mu^n(x) \in I_{s_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\Psi(x)$ es llamada el itinerario de x.

Por ejemplo, si $\mu = 5$ entonces $f_\mu^0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ que esta en I_0, $f_\mu^1\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) = 1$ esta en I_1, y $f_\mu^k\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) = 0$ esta en I_0 para toda $k \geq 2$. Así $\Psi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) = 010000....$

PROPOSICION 4.3.19 *Sea* $s = \{s_0 s_1 s_2 ...\} \in \Sigma_2$, *entonces el conjunto*

$$I_{s_0 s_1 s_2 ... s_n} = \{x : f_\mu^k(x) \in I_{s_k}, \quad k \leq n\},$$

es uno de los intervalos de A_{n+1}, *donde* $A_{n+1} = \{x : f_\mu^{n+1}(x) \in [0,1]\}$.

DEMOSTRACION.- La demostración se hará por inducción.

Sea $n = 0$,

$$I_{s_0} = \left\{x : f_\mu^0(x) \in I_{s_0}\right\} = \begin{cases} I_0, & \text{si} \quad s_0 = 0 \\ I_1, & \text{si} \quad s_0 = 1 \end{cases},$$

Entonces I_{s_0} es uno de los intervalos de $A_1 = I_0 \cup I_1$. Supóngase que $I_{s_0 s_1 s_2 ... s_{n-1}}$ es uno de los intervalos de A_n.

Se quiere demostrar que $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$ es uno de los intervalos de A_{n+1}.

Nótese que $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} \subset I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_{n-1}}$, ya que

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} &= \{x : f_\mu^0(x) \in I_{s_0}\} \cap \{x : f_\mu^1(x) \in I_{s_1}\} \cap \ldots \cap \{x : f_\mu^n(x) \in I_{s_n}\}, \\ I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} &= \{x : f_\mu^0(x) \in I_{s_0}\} \cap \{x : f_\mu^1(x) \in I_{s_1}\} \cap \ldots \cap \{x : f_\mu^{n-1}(x) \in I_{s_{n-1}}\}. \end{aligned}$$

Sea $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} = [a, b]$. Entonces, $f_\mu^n([a, b]) = [0, 1]$, además f_μ^n es monótona en $[a, b]$. Supóngase que f_μ^n es creciente en $[a, b]$. Luego, aplicando el Teorema del Valor Intermedio, existen c_1, c_2 con $a < c_1 < c_2 < b$, tales que

$$f_\mu^n(c_1) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu} = q_0, \qquad f_\mu^n(c_2) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu} = q_1.$$

Por lo tanto,

$$f_\mu^n [a, c_1] = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}\right] = I_0$$

$$f_\mu^n [c_2, b] = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}, 1\right] = I_1, \quad \text{y}$$

$$f_\mu^n(c_1, c_2) = (q_0, q_1).$$

Por lo tanto, si $s_n = 0$, entonces $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = [a, c_1]$. Si $s_n = 1$, entonces $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = [c_2, b]$. Así que $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$ es uno de los intervalos de A_{n+1}. □

PROPOSICION 4.3.20 *La función $\Psi : \Lambda_\mu \to \Sigma_2$ dada en la definición 4.3.18, es un conjugado topológico. Es decir,*

(a) Ψ es uno a uno y sobre.

(b) Ψ es continua.

(c) Ψ^{-1} es continua.

(d) $\Psi \circ f_\mu = \sigma \circ \Psi$.

DEMOSTRACION.- (a) Sea $s = \{s_0 s_1 s_2 \ldots\} \in \Sigma_2$, entonces se demostrará que $\Psi^{-1}(s)$ tiene un solo elemento.

Sea $x \in \Psi^{-1}(s)$, entonces $\Psi(x) = s = \{s_0 s_1 s_2 \ldots\}$, por lo tanto $f_\mu^k(x) \in I_{s_k}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

De aquí se sigue que $x \in I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$, para toda $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = \Psi^{-1}(s)$.

Por demostrar que $\cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$ contiene un solo punto.

Supóngase que $x, y \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$, entonces $x, y \in I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$ para toda $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Sea $[a_n, b_n] = I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$, recuerde que $[a_n, b_n]$ es un intervalo del conjunto A_{n+1}, entonces $x, y \in [a_n, b_n]$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y por la Proposición 4.3.17

$$0 \leq |x - y| \leq (b_n - a_n) \leq \frac{1}{c\lambda^n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

entonces $|x - y| = 0$ por tanto $x = y$.

Ahora se demostrará que $\Psi^{-1}(s) = \cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} \neq \emptyset$, $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = [a_n, b_n]$ y las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_m \leq b_m, \quad m \geq n, \\ a_n &\leq b_n \leq b_m, \quad m \leq n. \end{aligned}$$

Entonces $a_n \leq b_m$ para toda $n \geq m$.

Sea $a = \sup(a_1 a_2 \ldots a_n \ldots) \leq b_m$, entonces $a \leq b_m$, para toda $m \geq 1$ y $a_n \leq a$ para toda $n \geq 1$, por tanto

$$a_n \leq a \leq b_n \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

De aquí que $a \in [a_n, b_n]$ para toda $n \in \mathbb{N}$, luego $a \in \cap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$, por lo tanto

$$\cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = \Psi^{-1}(s) \neq \emptyset.$$

(*b*) Sean $x \in \Lambda_\mu$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Ahora sean $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_{2^{n+1}}, b_{2^{n+1}}]$ los intervalos de A_{n+1}. Sea $\delta = \frac{1}{2} \min\{|a_i - b_i|\}$ con $i = 1, 2, \ldots, 2^{n+1}$ (Nótese que $\delta > 0$ ya que $a_i < b_{i-1}$ para toda i). Luego si $y \in \Lambda_\mu$, tal que $|x - y| < \delta$, entonces x, y estan en el mismo intervalo de A_{n+1} (si no cumple esto, se tiene que $|x - y| > \delta$).

Entonces $x, y \in I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$ así, $\Psi(x), \Psi(y)$ se tienen los primeros $n+1$ digitos iguales, entonces

por la Proposición 4.1.3 (a) se tiene que

$$d[\Psi(x), \Psi(y)] < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

por tanto Ψ es continua.

(c) Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > \frac{1}{c\lambda^n}$. Sean $x \in \Sigma_2$ y $\delta = \frac{1}{2^n}$, se toma $y \in \Sigma_2$ tal que $d[x, y] < \delta = \frac{1}{2^n}$. Entonces, por la Proposición 4.1.3 (b) se tiene que los primeros n-digitos de x y y son iguales. Así que $\Psi^{-1}(x)$ y $\Psi^{-1}(y)$ estan en el mismo intervalo de A_n, aplicando la Proposición 4.3.17 se tiene que

$$d[\Psi^{-1}(x), \Psi^{-1}(y)] < \frac{1}{c\lambda^n} = \varepsilon$$

por tanto Ψ^{-1} es continua.

(d) Por demostrar que $\Psi \circ f_\mu = \sigma \circ \Psi$. Sea $x \in \Lambda_\mu$, y $\Psi(x) = s = \{s_0 s_1 s_2 ...\}$. Nótese que $\sigma(\Psi(x)) = \{s_1 s_2 s_3 ...\}$.

Por otra parte x es el único punto tal que $x = \Psi^{-1}(s) = \cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 ... s_n}$. Además,

$$I_{s_0 s_1 s_2 ...} = \cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 ... s_n} = \cap_{n=0}^{\infty} \{x : f_\mu^k(x) \in I_{s_k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n\}.$$

Sea $y = f_\mu(x)$. Entonces, nótese que:

$$x \to \begin{cases} x & \in & I_{s_0} \\ f_\mu(x) & \in & I_{s_1} \\ f_\mu^2(x) & \in & I_{s_2} \\ \vdots & & \\ f_\mu^n(x) & \in & I_{s_n} \end{cases} \qquad y = f_\mu(x) \to \begin{cases} y = f_\mu(x) & \in & I_{s_1} \\ f_\mu(y) = f_\mu^2(x) & \in & I_{s_2} \\ \vdots & & \\ f_\mu^{n-1}(y) = f_\mu^n(x) & \in & I_{n_n} \\ f_\mu^n(y) & \in & I_{s_{n+1}} \end{cases}$$

por lo tanto $y = f_\mu(x) = \Psi^{-1}\{s_1 s_2 s_3 ... s_n ...\}$, $\Psi(f_\mu(x)) = \{s_1 s_2 s_3 ... s_n\}$. □

Ahora se puede demostrar que f_μ es caótica en el conjunto de Cantor Λ_μ.

SOLUCION DEL EJEMPLO 4.3.2.- Como se vio en la Proposición anterior, Ψ es un conjugado topológico entre f_μ y σ, así, por la Proposición 4.2.3 inciso (f), ya que σ es caótica en Σ_2 se tiene que f_μ es caótica en el conjunto de Cantor Λ_μ para $\mu > 4$. $\square$

Bibliografía

[1] Carsten Knudsen, Chaos without non periodicity, Am. Math. Month. 101, 1994, 563-565.

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, On Devaney´s definition of chaos, Am. Math. Month. 99, 1992, 332-334.

[3] John L. Kelley, General Topology, D. Van Nostrand Company, Inc. Toronto, 1967.

[4] Kenneth A. Ross, Elementary Analysis: The Theory of Calculus, Springer, New York, 1996.

[5] M. Martelli, M. Dany y T. Seph, Defining chaos, Math. Mag. 71(2), 1998, 112-121.

[6] M. Vellekoop y R. Berglund, On intervals: transitivity=chaos, Am. Math. 101(4), 1994, 353-355.

[7] Pat Touhey, Yet another definition of chaos, Am. Math. Month. 1997, 411-414.

[8] R. L. Devaney, A First Course in Chaotic System, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1992.

[9] Richard A. Holmgren, A First Course in Discrete Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 1994.

[10] Rodney Nillsen, Chaos y one-to-oneness, Math. Mag. 72(1), 1999, 14-20.

[11] Roger L. Kraft, Chaos, Cantor sets, and hyperbolocity for the logistic maps, Am. Math. Month. 1999, 400-408.

[12] Saber N. Elaydi, A converse of Sharkovsky's theorem, Am. Math. Month. 103(5), 1996, 386-392.

[13] Saber N. Elaydi, Discrete Chaos, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[14] T. Y. Li y J. A. Yorke, Period three implies chaos, Am. Math. Manth. 82, 1975, 985-992.

[15] Xun-Cheng Huang, From intermediate value theorem to chaos, Math. Mag. 65(2), 1992, 91-103.