

BIBLIOTECA CIENCIAS  
EXACTAS Y NATURALES

QA324  
.V34



15/T130

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

**“Distribuciones y Aplicaciones de Green  
y Aplicaciones”**



presenta

**Horacio Valenzuela Martínez**

Hermosillo, Sonora, México

Octubre del 2001.

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

**“Distribuciones, Funciones de Green  
y Aplicaciones”**



que para obtener el grado de

**Licenciado en Matemáticas**

presenta

**Horacio Valenzuela Martínez**

# DEDICATORIA

A DIOS Nuestro señor por hacerme de mi un hombre de bien.

A mis Padres ALEJANDRO y ALICIA que con su empeño, dedicación y comprensión supieron guiarme a lo largo de esta etapa de la vida.

A mis Hermanos ALEJANDRO y YUNIVA con quiénes escribí una de las más bellas páginas de mi vida.

A mis Abuelos JUAN y REFUGIO por su apoyo moral y espiritual.

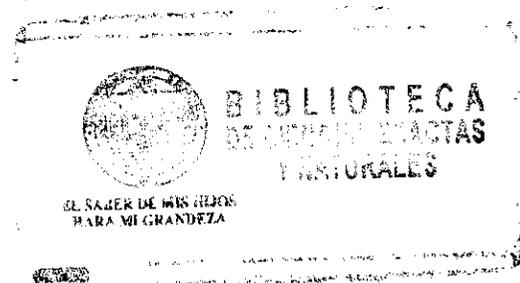
A todos mis Tíos que de alguna o de otra forma me apoyaron y me ayudaron para salir adelante.

A todos mis Maestros por su ayuda y dedicación que me brindaron en el transcurso de mis estudios.

# Contenido

<b>P R E F A C I O</b>	<b>iii</b>
<b>1 Elementos de la Teoría de Distribuciones</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	2
1.1.1 Motivación . . . . .	2
1.1.2 La Delta de Dirac . . . . .	4
1.2 Distribuciones Definidas sobre la Recta Real . . . . .	6
1.2.1 Definición y Ejemplos . . . . .	7
1.2.2 Derivadas, Multiplicación por una Función Suave e Integrales . . . . .	17
1.2.3 Argumentos Compuestos y Convolución . . . . .	23
1.3 Distribuciones Multidimensionales . . . . .	30
1.3.1 La Delta de Dirac Multidimensional . . . . .	34
1.3.2 Operaciones Generales . . . . .	38
1.3.3 Interpretación de $\delta(\sigma)$ . . . . .	40
1.3.4 Producto de Deltas . . . . .	42
1.3.5 Parte Finita de una Integral Divergente . . . . .	43
*Comentario 1 . . . . .	50
<b>2 Funciones de Green</b>	<b>51</b>
2.1 Introducción . . . . .	52
2.1.1 Motivación . . . . .	52
2.1.2 Solución Fundamental . . . . .	57
2.1.3 Construcción y Propiedades . . . . .	59
2.2 Funciones de Green en Dimensiones Mayores . . . . .	65
2.2.1 Funciones de Green en dos Dimensiones. . . . .	66
2.2.2 Método de la Función de Green . . . . .	69
2.2.3 Funciones de Green en tres Dimensiones. . . . .	70
*Comentario 2 . . . . .	72

<b>3 Aplicaciones</b>	<b>73</b>
3.1 Soluciones Generalizadas de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	74
3.1.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	74
3.1.2 Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .	78
3.2 Método de las Imágenes . . . . .	81
3.2.1 Función de Green sobre un Semi-Plano . . . . .	82
3.2.2 El Problema de Robin . . . . .	84
3.2.3 Funcion de Green sobre un Círculo . . . . .	85
3.2.4 Función de Green sobre una Esfera . . . . .	88
3.3 Algunas Aplicaciones Interesantes . . . . .	89
3.3.1 La Fórmula de Euler-Leibnitz . . . . .	89
3.3.2 Teorema de la Divergencia Generalizado . . . . .	92
3.3.3 Entre Espejos Te Veas . . . . .	94
3.3.4 Diferentes Representaciones para la Solución de la Ecuación de Onda . . . . .	95
3.3.5 La Fórmula de Kirchhoff . . . . .	97
*Conclusión . . . . .	101
 <b>B I B L I O G R A F I A</b>	 <b>102</b>



# P R E F A C I O

En el presente trabajo se cubre lo básico que se debe de saber acerca la Teoría de Distribuciones y Funciones de Green, desde un punto de vista aplicado. Esto es, en el material no se abordan los conceptos y resultados con el rigor requerido por las matemáticas abstractas; las construcciones teórico-formales abstractas se reducen prácticamente al mínimo. Quizá esto pueda significar la desaprobación de algunos matemáticos puros quienes tengan una formación más o menos buena en la teoría, pero no es relevante puesto que el enfoque sigue más o menos la filosofía de las matemáticas aplicadas y desde mi punto de vista puedo asegurar que hacerlo de esta forma no resta méritos ni mucho menos ya que el objetivo es presentar de la manera más clara y sencilla el material elegido, esperando sea de utilidad tanto para consulta como para referencia futura. Tal vez este comentario parezca un poco adelantado o fuera de lugar, sin embargo lo hago en base a que aún cuando hasta la fecha se han publicado gran cantidad de artículos y textos (incluyendo trabajos de tesis) sobre el tema, muchos de los cuales teniendo presentaciones densas y extremadamente abstractas, a final de cuentas además de ser de difícil lectura para los principiantes prácticamente no enseñan gran cosa. En particular, me refiero a que en muchas de estas publicaciones las funciones generalizadas multidimensionales, presentes en diversas aplicaciones reales, son tratadas como objetos raros y curiosos, la mayoría de las veces difíciles de comprender tanto por la notación utilizada como por el enfoque riguroso con el que se tratan, omitiendo en la mayoría de los casos aspectos verdaderamente importantes. Por supuesto que hay excepciones, pero también es cierto que muchos de estos materiales son difíciles de conseguir como sucede a menudo al no estar disponibles en bibliotecas cercanas o accesibles.

Además, una buena razón para seguir el enfoque elegido se debe a que la teoría de distribuciones es interesante, pero en toda su extensión, es una muy compleja, sutil y difícil rama del análisis matemático, que para su formalización requiere bases realmente sofisticadas, comúnmente difíciles de tener a nivel licenciatura. Sin embargo, las funciones generalizadas pueden tratarse de forma relativamente fácil de comprender y utilizar si inicialmente la teoría no se trata con mucha abstracción; con el enfoque aplicado, para estudiarlas con cierta libertad solo es necesario tener conocimiento elemental de geometría diferencial, análisis (real y complejo, vectorial, funcional y tensorial) y quizá un poco de topología, la cual es necesaria, pero no un obstáculo. Por consiguiente, el presente trabajo se dedica a presentar rudimentariamente la teoría de distribuciones, enfatizando la aplicación, intentando con esto despertar el interés hacia esta rama "olvidada" de las matemáticas, revelando de cierto modo la potencia de la teoría mediante ejemplos concretos e ilustrativos, ayudando así a entender aunque sea un poco los conceptos abstractos inherentes en las funciones generalizadas. El tema *clave* o de enlace es el manejo de la distribución delta de Dirac y distribuciones multidimensionales relacionadas; de hecho estas son las distribuciones que aparecen con más frecuencia en la mayoría de los problemas generalizados encontrados en la práctica. Además, el camino a seguir hasta llegar a resolver ciertos problemas clásicos de cálculo y de ecuaciones diferenciales es el estudio de las Funciones de Green, las cuales aparecen al introducir la función delta de Dirac como término no homogéneo en ciertas ecuaciones diferenciales, al momento de determinar la solución fundamental de una ecuación diferencial.

En la exposición, trato de ser claro y sencillo, probando algunos resultados, estableciendo otros y formulando suposiciones explícitamente de tal forma que el trabajo resulte lo más simple, pero ilustrativo posible.

Agradezco a la Universidad de Sonora, en específico al Departamento de Matemáticas, la oportunidad de presentar este trabajo para obtener el grado de licenciatura. En especial, agradezco al M.C. Rodrigo González González el apoyo tanto en las materias que impartió y de las que formé parte, las cuales contribuyeron bastante a la realización del presente trabajo, así como el apoyo brindado al dirigir el mismo.

Hermosillo, Sonora, México  
Octubre del 2001.

Horacio Valenzuela Martínez.



BIBLIOTECA  
UNIVERSITARIA  
MEXICANA

EL SABER DE MIS DIOS  
PARA MI GRANDEZA

## Capítulo 1

# Elementos de la Teoría de Distribuciones

Desde los 1950's, cuando Laurent Schwartz publicó su *Theories des Distributions*, las funciones generalizadas han tenido mucha aplicación en varios campos de las ciencias e ingeniería y tal vez uno de los aspectos más útiles de esta teoría sea el hecho que *las funciones discontinuas pueden manipularse con la misma facilidad y libertad que las funciones continuas o diferenciables*, lo cual proporciona una poderosa herramienta tanto en la formulación como en la solución de muchos problemas de aplicación.

En este capítulo, abusando de la terminología definiremos a las funciones generalizadas como *funcionales lineales y continuos* sobre cierto espacio especial de funciones, que llamaremos *funciones de prueba*, después introduciremos el concepto de *diferenciación generalizada*, de fundamental importancia para muchos aspectos aplicados y finalmente presentaremos con el nuevo enfoque algunos resultados del análisis clásico, los cuales tienen un gran impacto sobre muchas áreas de las matemáticas, en particular sobre las ecuaciones diferenciales parciales.

Para comprender la teoría de distribuciones es necesario un cambio de pensamiento en la forma usual de ver a las funciones ordinarias; funciones localmente (Lebesgue) integrables –funciones que tienen integral finita sobre cualquier conjunto finito. Esto implica la necesidad de ampliar el marco teórico de las funciones de tal forma que ahora las funciones ordinarias sean un subconjunto de las nuevas funciones al que denominaremos *funciones generalizadas regulares*. Cualquier otro tipo de “función” que se introduzca pertenecerá a la categoría de las *funciones generalizadas singulares*.

## 1.1 Introducción

Esta sección simplemente se utiliza como plataforma de visualización de la *teoría de distribuciones*, también llamadas *funciones generalizadas*. En la primer parte, como un primer intento de introducción, se relaciona esta teoría con las distribuciones de carga físicas y fuentes concentradas o instantáneas presentes en varias áreas; fuerzas y momentos concentrados de la mecánica de sólidos, fuentes de calor localizadas en la conducción de calor, masas puntuales en la teoría del potencial, fuerzas impulsivas en la acústica y mecánica de impactos, fuentes y vórtices en la mecánica de fluidos, cargas puntuales, por capas o volumétricas en la electrostática, entre otras. En la segunda parte, se introduce la más importante y popular de las funciones generalizadas, la “*función*” *delta de Dirac*. De hecho, esta entidad matemática recibe un tratamiento especial a lo largo de todo el trabajo ya que es la que tiene el más amplio rango de aplicación. Además, muchas de las propiedades importantes de las “nuevas funciones” se pueden ejemplificar e ilustrar fácilmente con la *función simbólica* delta de Dirac.

### 1.1.1 Motivación

Con el fin de preparar el terreno para empezar de lleno con la teoría de distribuciones, es buena idea introducir primeramente el concepto de *distribución de carga*, el cual es muy utilizado por físicos e ingenieros. En la aplicación, frecuentemente se habla de carga puntual, línea de carga, superficie de carga, volumen de carga y dipolos. Pero, exactamente ¿cómo se puede dar un significado matemático preciso a tales términos?, considerando la física de la situación. Es decir, ¿cómo se puede modelar y/o manipular matemáticamente situaciones o procesos físicos que involucren términos de esta naturaleza? Por ejemplo, cuando físicamente se trata de medir una carga de inmediato se piensa en hacerlo mediante un experimento en el que se utilice algún instrumento cuya lectura proporcione la medida de la carga contenida en una región cuyo tamaño dependa precisamente de la clase de instrumento que se utiliza. Si la carga es puntual, podría utilizarse un instrumento o un conjunto de instrumentos con la capacidad de medir la carga en regiones cada vez más pequeñas conteniendo al punto de interés. Pero, resulta que prácticamente llega un momento en el que ya no es posible tener un instrumento físico que logre tal objetivo. Lo mismo sucede con cualquier otro tipo de

carga. Por consiguiente, es conveniente buscar una forma indirecta de hacerlo y una posible alternativa podría ser: *proponer un conjunto determinado de instrumentos, de tal forma que correspondiendo a cada uno de estos instrumentos,  $\phi$ , exista un número,  $Q(\phi)$  (la lectura del instrumento) que proporcione precisamente la medida de la carga.* Por ejemplo, para medir la carga en un sólido, con densidad volumétrica de carga  $\rho(\mathbf{x})$ , el número  $Q(\phi)$  podría obtenerse mediante la integral triple

$$Q(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.1.1)$$

proporcionando una especie de promedio, para funciones  $\phi$  apropiadas, de la carga volumétrica en el sólido. Las propiedades inmediatas que se observan en este proceso son

$$Q(\alpha\phi) = \int \rho(\mathbf{x}) [\alpha\phi(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \alpha Q(\phi), \quad (1.1.2)$$

donde  $\alpha$  es un escalar y

$$Q(\phi_1 + \phi_2) = \int \rho(\mathbf{x}) [\phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = Q(\phi_1) + Q(\phi_2), \quad (1.1.3)$$

para cualquier par de instrumentos  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . De hecho, en general siempre será necesario suponer que los instrumentos a utilizar mínimamente tengan las propiedades (1.1.2) y (1.1.3), lo cual matemáticamente significa que  $Q(\phi)$  es un *funcional lineal* sobre el conjunto de instrumentos  $\phi$ , los cuales pertenecerán a un conjunto especialmente elegido de forma tal que si se utiliza un funcional integral por lo menos se asegure su convergencia. Por supuesto, además deberán de cumplirse otras condiciones y restricciones tanto físicas como matemáticas. De esta forma, la elección del conjunto de instrumentos y sus operaciones lleva al establecimiento de un nuevo conjunto de “objetos” matemáticos que originan cierta estructura, realmente digna de estudio; *la teoría de distribuciones*, la cual dará respuesta a la pregunta anteriormente planteada, pero mucho más aún, representará una poderosa herramienta en la solución de varios problemas importantes. En efecto, esta construcción de nuevos objetos representará una ampliación del marco teórico de las funciones ordinarias utilizadas en el análisis clásico y como tal deberá incluir todas las operaciones y propiedades previamente establecidas. Además, una vez establecidos los principales elementos y resultados de la nueva estructura, el siguiente paso será desarrollar un *nuevo cálculo* con sus elementos, inmediatamente tratar de formalizarlo, para finalmente buscar su posible aplicación, y este precisamente es el esquema que se sigue en el presente trabajo.

### 1.1.2 La Delta de Dirac

La *teoría de distribuciones* es una rama de las matemáticas relativamente reciente, muy importante en áreas de la aplicación física, la cual tomó su forma final aproximadamente hacia la mitad del Siglo XX. Aún cuando Paul Dirac y Sergey Sobolev (así como varios antecesores) contribuyeron bastante, la teoría de distribuciones fue desarrollada de forma elegante y definitiva por Laurent Schwartz, con el fin de dar una base matemática rigurosa para las "*funciones*" delta, las cuales durante años habían estado siendo utilizadas de forma incorrecta y con impunidad por físicos e ingenieros, quienes hablaban de y usaban el término función delta de Dirac en un sentido intuitivo. Pero, de todos es bien sabido que utilizar algo intuitivamente lleva en la mayoría de los casos a conclusiones falsas o paradójicas extrañas.

De hecho uno de los errores en la aplicación fue introducir la función delta como un límite puntual de ciertas funciones regulares, lo cual por supuesto no es correcto. En específico, se consideraba (y tal vez aún se considere) a la función delta de Dirac como el límite, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de la familia de funciones rectangulares

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{para } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{para } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

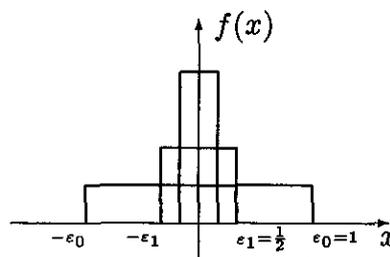


Fig.1 Representación Simple (INGENUA) de la "función" delta de Dirac.

La observación inmediata es que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , los rectángulos cada vez son más angostos, pero más altos, conservando áreas constantes, ya que para cada  $\varepsilon$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx = 1. \quad (1.1.4)$$

Esto llevó a definir la función delta de Dirac como el límite puntual

$$\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x), \quad (1.1.5)$$

el cual, como se puede ver fácilmente, es cero dondequiera excepto en el punto  $x = 0$ , donde es infinito.

Así, incluso en nuestros días, la definición ordinaria de la función delta de Dirac que frecuentemente se maneja es

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x = 0, \\ 0 & \text{para } |x| > 0. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Además, por supuesto con la condición que  $\int \delta(x) dx = 1$ , que tenga la bien probada propiedad de convolución  $\int \delta(x-a)\phi(x) dx = \phi(a)$ , que tenga unidades de frecuencia cuando la variable sea el tiempo,  $[\delta(t)] = 1/\tau$ , y que sea la derivada de la función escalón o salto unitario, llamada *función de Heaviside*,  $\delta(x) = \frac{d}{dx}h(x)$ ,

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

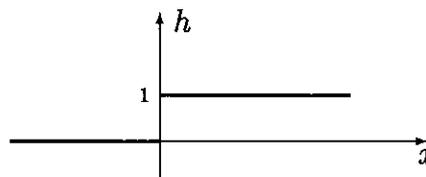


Fig.2 Función de Heaviside.

Todas estas propiedades lucen muy atractivas, sin embargo antes de poder utilizarlas es necesario tener una definición precisa de la “función” delta de Dirac ya que a esta altura surgen las preguntas de rigor: ¿cómo puede una función tomar como valor a  $\infty$  y anularse en todos los demás puntos? y más aún, ¿cómo puede ser posible que sea la derivada de una función con salto (discontinua) y además ser diferenciable? Pero, el verdadero dilema no son estas preguntas, incluso podrían hasta omitirse, sino que el asunto crítico surge desde el mismo momento en el que se intenta establecer el límite puntual (1.1.5) como definición, ya que de ser así la integral (1.1.4) no está bien definida si se considera en el sentido de Riemann y es igual a cero si se extiende como una integral de Lebesgue. Sin embargo, observemos que para cada  $\varepsilon > 0$ , la integral

$$T_\varepsilon[\phi] = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\phi(x) dx \quad (1.1.7)$$

existe para cualquier función continua  $\phi$ , y cuando  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ , converge al valor de esta función en cero,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} T_\varepsilon[\phi] = T[\phi] = \phi(0)$ , donde  $\phi$  se denomina *función de prueba* (el instrumento de medición que se mencionó anteriormente) la cual pertenece a cierto conjunto por establecer. Así, una posible definición matemática correcta de la “función” delta de Dirac puede ser mediante un proceso de este tipo. Es decir,

como límite de una integral del tipo (1.1.7), en vez de un límite puntual de funciones ordinarias como en (1.1.5). Esto es, utilizar para definirla un funcional lineal sobre el conjunto de las funciones de prueba, generado por una función que determine todas las propiedades del funcional a la que se le denominará el *kernel* del funcional.

Paul A. M. Dirac (1902-1984), uno de los principales creadores de la mecánica cuántica y “padre” de la función delta, reconoció antes que muchos de sus contemporáneos la necesidad de emplear un enfoque funcional para este tipo de “funciones” a las que llamó *distribuciones*. Por esta razón, de aquí en adelante la versión rigurosa para la intuitiva función delta de Dirac será la de distribución delta de Dirac o simplemente *delta de Dirac*. Esto para enfatizar que la “delta” no es una función. Por su parte, el matemático ruso Sergey Sobolev empezó la creación formal de la teoría de distribuciones en los 1930's (alrededor de 1936) al buscar soluciones generalizadas para ecuaciones diferenciales parciales y contribuyó bastante. Poco tiempo después (1945), el matemático francés Laurent Schwartz completó el trabajo de estos fundamentos al construir una estructura precisa para la teoría de distribuciones basándose en los conceptos de espacios vectoriales topológicos localmente convexos. De hecho, Schwartz ganó en 1950 la *Field Medal* (versión matemática del Premio Nobel) por este trabajo. De esta forma, por primera vez desde Newton, las ideas acerca de las funciones y su diferenciabilidad vinieron a tener una mayor revisión.

## 1.2 Distribuciones Definidas sobre la Recta Real

Las distribuciones, también conocidas con el nombre de *funciones generalizadas* o *funciones simbólicas*, se introducen en esta parte de una manera un tanto informal, utilizando una dimensión e ilustrando con algunos ejemplos la razón del nombre “generalizadas o simbólicas”. Como hay mucho que decir y es necesario entender los principales conceptos y resultados de esta teoría, esta sección resulta extensa. Además, resulta interesante hacer una “copia” del cálculo elemental utilizando estos nuevos objetos matemáticos y una vez logrado esto, inmediatamente establecer la generalización de una forma mucho más rápida y natural. Habrá muchas cosas que se escapen como sucede en todo escrito y habrá otras que no queden del todo claras, sin embargo para complementar ambas se puede encontrar una buena referencia en la bibliografía.

### 1.2.1 Definición y Ejemplos

En Cálculo se relaciona a una función  $f(x)$  con una tabla de pares ordenados  $(x, f(x))$  y, aún cuando comúnmente esta tabla tiene un número infinito de elementos, se establece que esta tabla representa a una curva plana a la que se le llama *gráfica de la función*. En la teoría de las funciones generalizadas, también se describe a  $f(x)$  con una tabla de números, los cuales son producidos por un funcional lineal  $T[\phi]$  que se define mediante el proceso integral

$$T[\phi] \equiv T_f[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx, \quad (1.2.1)$$

generado por el kernel  $f(x)$ , actuando sobre las funciones de prueba  $\phi$ , las cuales pertenecen a cierto conjunto  $\mathcal{D}$ , por seleccionar. Una vez que se elije el conjunto de funciones de prueba,  $\mathcal{D}$ , el conjunto de funcionales lineales sobre este, llamado el *espacio dual* de  $\mathcal{D}$ , y denotado por  $\mathcal{D}'$ , se determina automáticamente. Precisamente, este tipo de funcionales cuando son continuos son los que se identifican como *distribuciones*. Por lo tanto, una función  $f(x)$  se puede describir ahora por una tabla de sus valores funcionales sobre un conjunto dado de funciones de prueba. Así que primeramente se debe de especificar el espacio de las funciones de prueba.

**Afirmación:** Entre más reducido sea el conjunto de funciones de prueba, más grande será el conjunto de funcionales lineales definido sobre este y viceversa.

Como resultado es posible identificar todos y cada uno de los valores de  $f(x)$  a partir de la tabla de valores  $\{T[\phi], \phi \in \mathcal{D}\}$ . Además, esta tabla debe ser tal que se pueda distinguir diferentes funciones ordinarias en el sentido de Lebesgue; dos funciones ordinarias  $f$  y  $g$  son iguales casi dondequiera si difieren solo sobre un conjunto de medida cero. Por lo tanto, como regla, para obtener un amplio conjunto de distribuciones tenemos que imponer restricciones estrictas y específicas sobre el conjunto de funciones de prueba. Sin embargo, al mismo tiempo, el conjunto de funciones de prueba no debe ser demasiado reducido, ya que esto restringiría el rango de problemas donde la herramienta de la teoría de distribuciones podría utilizarse, entre otras complicaciones que implicaría.

**Ejemplo 1:** El funcional que asigna a cada función de prueba su valor en cero se identifica con la distribución delta de Dirac.

□

Nótese que en el sentido usual de funciones no existe ninguna función  $f(x)$  tal que  $\int f(x)\phi(x) dx = \phi(0)$ , para toda función de prueba  $\phi$ . No obstante, la representación es muy conveniente y útil en el sentido que podemos introducir el término *función simbólica*  $\delta(x)$  de tal forma que

$$\int \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0), \quad (1.2.2)$$

quedando claro con esto que  $\delta(x)$  no es una función de  $x$  (por ejemplo, no tiene ningún sentido hablar de  $\delta(5)$ ). Lo mismo aplica para otras distribuciones más generales, que más tarde identificaremos con el nombre de *distribuciones singulares*.

Ahora, respecto al conjunto de funciones de prueba  $\mathcal{D}$ , existen algunas demandas naturales. En particular, es conveniente identificar kernels continuos  $f$  vía la definición integral (1.2.1). En otras palabras, una vez que los valores del funcional  $T[\phi]$  son conocidos, para toda  $\phi \in \mathcal{D}$ , el kernel  $f$  debe determinarse de forma única. Es decir, se requiere que el conjunto de distribuciones  $\mathcal{D}'$  sea lo suficientemente rico como para incluir por lo menos a todas las funciones continuas.

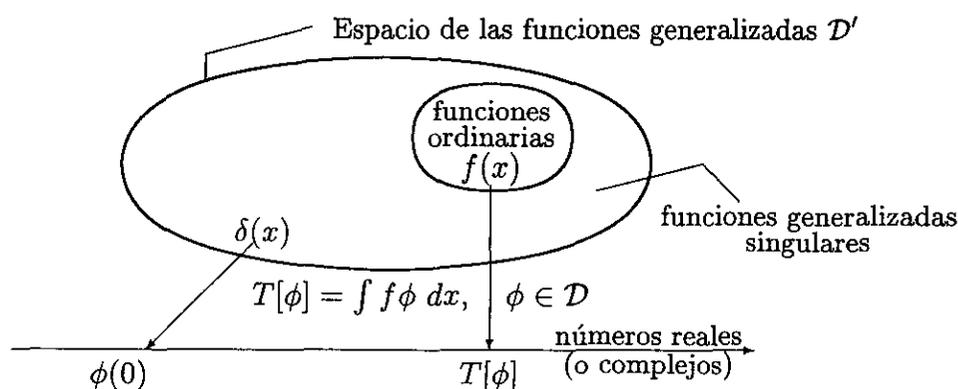


Fig.3 Las Funciones Generalizadas  $\mathcal{D}'$  son Funcionales Lineales y Continuos sobre el Espacio  $\mathcal{D}$  de las Funciones de Prueba.

Un buen candidato (tal como S. Sobolev lo eligió) para el conjunto de funciones de prueba  $\mathcal{D}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{\phi \mid \phi \in C_0^\infty\} \\ &= \text{familia de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto.} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

**Definición 1.1** Una función  $\phi$  se dice ser de *soporte compacto* si es igual a cero fuera de cierto conjunto acotado, denotado por  $\text{Sopt } \phi$ , el cual se denomina *soporte de  $\phi$*  y se define como la cerradura del conjunto donde la función es diferente de cero. Esto es,

$$\text{Sopt } \phi = \overline{\{x \mid \phi(x) \neq 0\}}. \quad (1.2.4)$$

**Nota:**  $\mathcal{D}$  tiene la estructura de espacio vectorial (lineal) y no es vacío trivialmente, ya que por lo menos contiene a la función

$$\omega(x) = \begin{cases} C e^{1/(x^2-1)}, & \text{para } |x| < 1 \\ 0, & \text{para } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Seleccionando  $C \approx 2.25$  (condición de normalización),  $\int \omega(x) dx = 1$ .

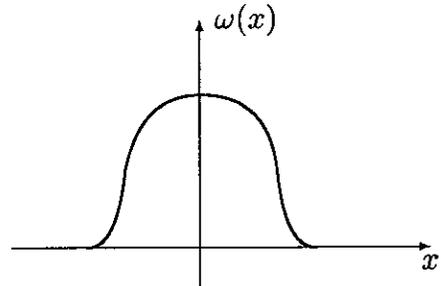


Fig.4 Función en Forma de Campana.

Si se cambia de escala para  $\omega$ , para cada  $\varepsilon > 0$ , se produce una nueva función  $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , la cual está en  $\mathcal{D}$ . Aplicando la fórmula de cambio de variable se tiene que  $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$ . A partir del Teorema del Valor Medio Generalizado para integrales se tiene que si  $f(x)$  es una función continua, entonces cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$T_\varepsilon[f] = \int f(x) \omega_\varepsilon(x) dx \rightarrow f(0).$$

Así, el valor de  $f$  en 0 puede recobrase evaluando funcionales  $T_\varepsilon$ . El valor de  $f$  en cualquier otro punto  $y$  puede recobrase evaluando la integral sobre funciones de prueba  $\omega_\varepsilon$  trasladadas por  $y$ . Esto muestra la afirmación de que *el valor de una función continua en un punto cualquiera es determinado por los valores de un funcional sobre las funciones de prueba elegidas y viceversa.*

**Definición 1.2** Un funcional  $T[\phi]$  lineal y continuo sobre el conjunto  $\mathcal{D}$  se llama *distribución* y el conjunto de todas las distribuciones sobre  $\mathcal{D}$ , denotado por  $\mathcal{D}'$ , el espacio dual de  $\mathcal{D}$ , se denomina *espacio de Sobolev-Schwartz*.

(\*) Un funcional  $T$  se dice que es *lineal* sobre  $\mathcal{D}$  si  $T[\alpha\phi + \psi] = \alpha T[\phi] + T[\psi]$ , para todo par  $\phi, \psi \in \mathcal{D}$  y todo escalar  $\alpha$ . Si el funcional está dado por la integral (1.2.1), entonces su linealidad es inmediata.

(\*\*) Un funcional  $T$  sobre  $\mathcal{D}$  se dice que es *continuo* si para cualquier sucesión de funciones  $\{\phi_k(x)\} \subset \mathcal{D}$  que converge a  $\phi(x) \in \mathcal{D}$ , los números  $T[\phi_k]$  convergen al número  $T[\phi]$ . La convergencia de la sucesión de funciones de prueba  $\phi_k$  en  $\mathcal{D}$  a la función de prueba  $\phi$  es en el siguiente sentido:

- i) los soportes de las  $\phi_k$ 's están todos contenidos en un mismo conjunto acotado del eje  $x$ ,
- ii) cuando  $k \rightarrow \infty$ , las funciones  $\phi_k$ , y todas sus derivadas  $\phi_k^{(n)}(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , convergen uniformemente a las derivadas correspondientes de la función límite  $\phi(x)$ . Esto es, para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\phi_k^{(n)} \rightarrow \phi^{(n)}.$$

Lo anterior genera un tipo especial de topología, que sería interesante estudiar, así como la topología respectiva (más especial aún) del espacio dual generada por sucesiones débiles, a la cual se le llama *topología débil*. Sin embargo, ni el tiempo y ni el espacio, disponibles para este trabajo, permiten entrar en este tipo de detalles.

**Ejemplo 2:** Algunas Distribuciones Básicas.

- i) Consideremos el conjunto  $L^1_0 = \{f(x) \mid f \text{ es localmente integrable}\}$ , donde *localmente integrable* significa que es integrable (en el sentido de Lebesgue) sobre cualquier intervalo finito del eje  $x$ . Las funciones continuas sobre  $\mathbb{R}$  son la mejor ilustración de estas. Así,

$$T[\phi] \equiv \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx$$

está bien definido para cualquier  $\phi \in \mathcal{D}$  y es claro que define un funcional lineal sobre  $\mathcal{D}$ . También la continuidad de este funcional es fácil de verificar.

Una distribución definida de esta forma, con la ayuda de una función estándar  $f \in L^1_o$ , se llama *distribución regular* y se denota por  $T_f$ , como en (1.2.1). Es común también llamar al kernel  $f(x)$  *función densidad* y utilizar la notación  $\langle f, \phi \rangle$  ya que se puede considerar como el producto interior ordinario entre  $f$  y  $\phi$ . En general, podemos decir que las distribuciones son generalización de funciones y productos interiores. Así, toda función localmente integrable  $f$  genera una distribución a través del producto interior usual,  $\langle f, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x) dx$ . En este contexto, decimos que las funciones localmente integrables pueden identificarse con ciertas distribuciones en el espacio  $\mathcal{D}'$ . Sin embargo, algunos funcionales lineales y continuos (distribuciones) sobre  $\mathcal{D}$  no pueden identificarse con kernels localmente integrables y entonces son denominados *distribuciones singulares*.

- ii) El ejemplo más simple de una distribución singular es el funcional que asigna a cada función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$  su valor en  $x = 0$  (Ejemplo 1). Esto es, la *distribución delta de Dirac*, a la cual nos referimos por  $\delta[\phi] = \phi(0)$ . Cabe señalar, para este caso, que algunas veces (1.2.1) se escribe heurísticamente como  $\int \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0)$ , aunque formalmente ésto no representa la integración en algún sentido (Riemann o Lebesgue). Sin embargo, sirve como una regla nemotécnica intuitiva que, si se usa con cuidado, facilita muchos cálculos en los que este involucrada la delta de Dirac, la cual no es una función, sino una distribución singular y hablar del argumento  $x$  es conveniente ya que se puede hablar de la distribución  $\delta(x - \xi)$  definida por la fórmula

$$\int \delta(x - \xi)\phi(x) dx = \phi(\xi),$$

algo así como trasladar  $\xi$  unidades la delta de Dirac (ver Subsección 1.2.3 para el caso más general), la cual denotaremos por  $\delta_\xi$  y diremos la delta centrada en  $\xi$ . Otros ejemplos importantes de distribuciones singulares son los dipolos o multipolos, los cuales se introducen posteriormente en la Subsección 1.2.3.

- iii) En muchos contextos aparece el concepto de *valor principal de Cauchy* (Augustin Louis Cauchy (1789–1857), fue uno de los matemáticos más prolíficos y creativos de los “tiempos modernos”) el cual se puede establecer de diferentes formas.

Para empezar, se define la distribución valor principal de Cauchy como el límite simétrico de la integral singular  $\int \frac{\phi(\tau)}{\tau - x} d\tau$ . Por ejemplo, para  $x = 0$ ,

$$T_{1/\tau}[\phi] = \mathcal{PV} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right] \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (1.2.5)$$

cuando el límite existe, con una definición análoga para otros valores de  $x$ . □

Podríamos seguir dando ejemplos de distribuciones importantes, pero no es el momento adecuado para hacerlo ya que se requiere profundizar un poco más en la teoría. En el punto *iii*) de la siguiente observación se ilustra esta necesidad.

**Observación:** *i*) En (1.2.5) podemos escribir  $\int_{|x| > \varepsilon}$  para  $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}$ .

*ii*) Si  $\phi \in \mathcal{D}$ , entonces existe  $R$  tal que  $\phi(x) \equiv 0$  para  $|x| > R$  y

$$\mathcal{PV} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau = \mathcal{PV} \int_{-R}^R \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Ahora, escribiendo  $\phi(x) = [\phi(x) - \phi(0)] + \phi(0)$ , se obtiene un proceso

$$\mathcal{PV} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau = \int_{-R}^R \frac{\phi(\tau) - \phi(0)}{\tau} d\tau$$

que remueve la singularidad en 0. Es decir, *regulariza* al integrando, lo cual sigue del hecho que  $\phi \in \mathcal{D}$  satisface la condición de Lipschitz,  $|\phi(a) - \phi(b)| < k|a - b|$ . También, aún cuando  $\phi$  no sea de soporte compacto, tenemos que

$$\mathcal{PV} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\phi(\tau) - \phi(0)}{\tau} d\tau$$

$$\mathcal{PV} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \frac{\phi(\tau) - \phi(-\tau)}{\tau} d\tau$$

lo cual sigue de la fórmula de cambio de variable y del teorema del valor medio del cálculo.

iii) Otro enfoque conveniente para el valor principal es utilizar una integral de Cauchy,\*

$$\int \frac{\phi(\tau)}{\tau - x} d\tau = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (1.2.6)$$

donde  $z = x + iy$  es un parámetro complejo. Separando las partes real e imaginaria,

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{\tau - x}{(\tau - x)^2 + y^2} + \frac{iy}{(\tau - x)^2 + y^2}.$$

y sustituyendo esta última relación en (1.2.6), obtenemos

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \mathcal{PV} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau - x} d\tau + i \lim_{y \rightarrow 0^+} \int \frac{y}{(\tau - x)^2 + y^2} \phi(\tau) d\tau.$$

Como el término que multiplica a  $\phi$  en la integral del lado derecho es una curva de Lorentz multiplicada por  $\pi$ , que converge débilmente a  $\delta(x - \tau)$  (ver Ejemplo 3b)), entonces

$$\int \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \mathcal{PV} \int \frac{\phi(\tau)}{\tau - x} d\tau \pm i\pi\phi(x),$$

donde el signo (+) significa que  $y \rightarrow 0_+$  (a través del semi-plano superior) y el signo (-) cuando  $y \rightarrow 0_-$  (a través del semi-plano inferior). Esto determina las dos distribuciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau - x - i0} &= \mathcal{PV} \frac{1}{\tau - x} + i\pi\delta(x - \tau), \\ \frac{1}{\tau - x + i0} &= \mathcal{PV} \frac{1}{\tau - x} - i\pi\delta(x - \tau). \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Por ejemplo, una vez que se introduce el concepto de derivada generalizada (Subsección 1.2.2), es posible mostrar que  $\mathcal{PV} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\bar{d}}{dx} \ln |x|$ .

iv) También, es posible definir el concepto de soporte de una distribución; una distribución  $T$  se dice que se anula en una región abierta  $\mathcal{B}$  del eje  $x$  si  $T[\phi] = 0$ ,  $\forall \phi \in \mathcal{D}$  con  $\text{Sopt } \phi \subset \mathcal{B}$ . El complemento de la región más grande para la que la distribución  $T$  se anula es a lo que se llama el *soporte de la distribución  $T$*  y se denota por  $\text{Sopt } T$ . Por ejemplo,

$$\text{Sopt } \delta = \{0\}.$$

v) Además, como ya se observó en *iii*), para definir ciertas distribuciones es necesario introducir el concepto de convergencia débil. Aún cuando la distribución delta de Dirac formalmente no puede representarse como un funcional integral, esta puede obtenerse como un límite de una sucesión de funcionales integrales,

$$T_k[\phi] = \int f_k(x)\phi(x) dx, \quad (1.2.8)$$

respecto a kernels *funciones regulares*, como por ejemplo las funciones rectangulares vistas anteriormente. En este sentido, muchas de las propiedades de la delta  $\delta$  pueden derivarse de las propiedades de la sucesión  $\{f_k\}$ . La aproximación de la  $\delta$  por  $f_k$  en el sentido que para cada  $\phi \in \mathcal{D}$ ,

$$T_k[\phi] \rightarrow \delta[\phi] \quad (1.2.9)$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ , es llamada *aproximación débil* y la convergencia correspondiente, *convergencia débil*.

La elección de una sucesión de distribuciones  $\{T_k\}$ , representadas por funciones regulares  $\{f_k\}$ , no es única y se puede seleccionar de diferentes formas, incluso se puede seleccionar de forma tal que las funciones  $f_k(x)$  sean infinitamente diferenciables (suaves, pero no necesariamente con soporte compacto).

**Ejemplo 3:** a) Considerar la familia de *funciones Gaussianas*,

$$\gamma_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-x^2/2\varepsilon}$$

(parametrizada por un parámetro  $\varepsilon > 0$ ),

con la propiedad  $\int \gamma_\varepsilon(x) dx = 1$ .

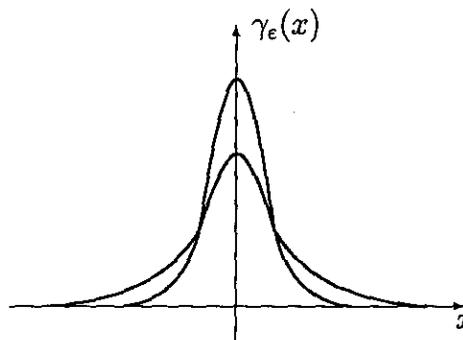


Fig.5 Funciones Gaussianas, las cuales convergen débilmente a la  $\delta$ .

La sucesión  $f_k(x) = \gamma_{1/k}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , aproxima en forma débil a la delta de Dirac. Obsérvese que las campanas tienen picos cada vez más altos, concentrándose alrededor de  $x = 0$ , mientras conservan el área bajo sus gráficas.

b)\* Las *curvas de Lorentz* (físicos) o *densidades de Cauchy* (matemáticos),

$$\lambda_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

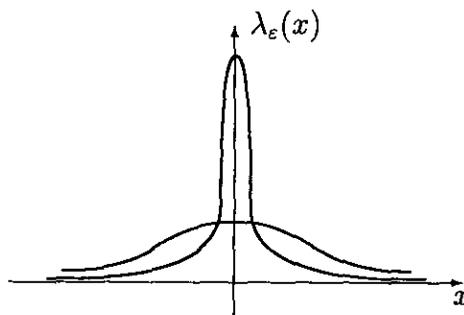
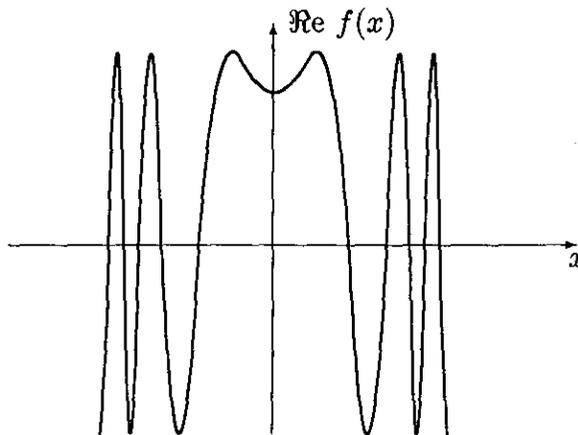


Fig.6 Curvas de Lorentz o Densidades de Cauchy.

son elementos de otra sucesión de funciones regulares que converge débilmente a la delta de Dirac, al definir de nuevo los kernels  $f_k = \lambda_{1/k}$ . Nótese que aunque a primera vista las funciones de Lorentz se parecen mucho a las funciones Gaussianas, tienen ligeras diferencias; una de estas es que una función Gaussiana decrece exponencialmente a 0, cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , mientras que una función de Lorentz decrece más lentamente y las áreas bajo las Gaussianas son mucho más concentradas alrededor de  $x = 0$ .

c) Las funciones regulares que convergen débilmente a  $\delta$  no necesariamente concentran sus valores diferentes de cero alrededor del origen  $x = 0$  y no necesariamente tienen valores positivos, como en a) y b). Incluso existen funciones con argumentos complejos cuyas partes real e imaginaria tienden débilmente a la delta de Dirac,

$$f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{i}{2\pi\varepsilon}} e^{-ix^2/2\varepsilon}$$



$f_\varepsilon(x)$  oscila a razones cada vez más grandes mientras que  $\varepsilon$  se hace pequeño, dando como resultado que  $\Re \{T_\varepsilon[\phi]\} \rightarrow \phi(0)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

d)\* Todavía más aún, las funciones regulares no necesariamente son pares o simétricas.

Considerar

$$D(x) = \begin{cases} x^{-2}e^{-1/x} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{para } x \leq 0. \end{cases}$$

La sucesión de funciones  $D_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

también aproxima débilmente a la delta.

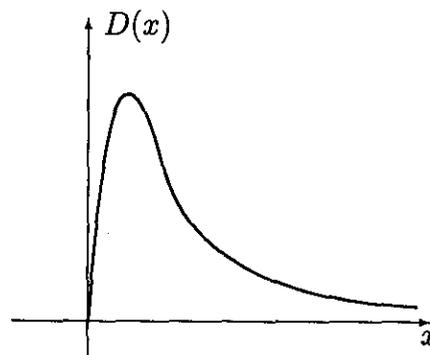


Fig.7 Curvas de Dawson.

e) Así como estos ejemplos, existen muchas sucesiones de funciones regulares que convergen débilmente a la delta de Dirac o a otro tipo de distribuciones singulares (ver Ejemplo 4). Otros ejemplos importantes son algunas de las sucesiones que Heaviside utilizó en sus cálculos,

$$T_n(x) = \begin{cases} n^2 \left(\frac{1}{n} - |x|\right), & |x| \leq 1/n \\ 0, & |x| > 1/n \end{cases}$$

$$S_n(t) = \frac{\text{sen } nt}{\pi t} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \Gamma_\alpha = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (\alpha \rightarrow -1),$$

las cuales también convergen débilmente a la delta de Dirac.

□

A continuación se enuncia uno de los principales resultados de la teoría de distribuciones (para su demostración referirse a [6]).

**Teorema 1.2.1** *El espacio  $\mathcal{D}'$  es completo.*

Este resultado nos dice que toda sucesión convergente de funciones generalizadas en  $\mathcal{D}'$  siempre convergerá a una función generalizada también en  $\mathcal{D}'$ .

### 1.2.2 Derivadas, Multiplicación por una Función Suave e Integrales

La diferenciabilidad infinita de las funciones de prueba elegidas  $\mathcal{D}$  nos permite definir derivadas de orden arbitrario para cualquier distribución  $T \in \mathcal{D}'$ , sin ningún temor por la existencia o no existencia de la diferenciabilidad como el que se tiene para las funciones ordinarias. Esta es una de las muchas ventajas que tienen las distribuciones sobre las funciones elementales del cálculo. También, es posible definir nuevas distribuciones a partir de otras distribuciones previamente conocidas, como por ejemplo multiplicar por una función suave y determinar la primitiva de una distribución.

Antes de dar una definición general observemos que la familiar fórmula de integración por partes aplicada a una función diferenciable  $f(x)$  y una función de prueba  $\phi(x) \in \mathcal{D}$  se reduce a

$$\int f'(x)\phi(x) dx = - \int f(x)\phi'(x) dx \quad (1.2.10)$$

ya que  $f(x)\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} = 0$  debido a que la función de prueba  $\phi$  es cero fuera de cierto conjunto acotado en el eje  $x$ . Si consideramos la distribución asociada a la función regular  $f$ , entonces (1.2.10) nos dice que

$$(T_f)'[\phi] = -T_f[\phi'], \quad (1.2.11)$$

la cual es válida para cualquier función de prueba  $\phi$ . Nótese que (1.2.11) no depende de la diferenciabilidad de  $f$ . Por lo tanto, esta idea se puede extender a cualquier distribución, dando como resultado la siguiente definición de diferenciabilidad.

**Definición 1.3** Si  $T$  es una distribución en  $\mathcal{D}'$ , entonces su *derivada*  $T'$  es definida como una distribución en  $\mathcal{D}'$ , determinada por sus valores (como un funcional) sobre las funciones de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$  por la relación

$$T'[\phi] = -T[\phi'], \quad (1.2.12)$$

la cual está bien definida ya que representa a un funcional lineal y continuo sobre  $\mathcal{D}$ .

Las derivadas de orden superior se definen mediante la aplicación recursiva de la operación de la primer derivada, dando como resultado que la  $n$ -ésima derivada de  $T$  es de nuevo una distribución sobre  $\mathcal{D}$  determinada por sus valores sobre las funciones de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$  por la fórmula

$$T^{(n)}[\phi] = (-1)^n T[\phi^{(n)}]. \quad (1.2.13)$$

Así, en el sentido distribucional, siempre se tienen derivadas de todos los ordenes. En mi opinión esta es una de las mejores propiedades que tienen las funciones generalizadas. De hecho, otra de las razones por la que surge la teoría de distribuciones es precisamente por el deseo tanto de físicos como de matemáticos de emplear derivadas más generales de funciones no diferenciables en el sentido del cálculo.

**Ejemplo 4:** Consideremos la distribución  $\delta(x-\xi)$ , definida por  $\delta(x-\xi)[\phi] = \phi(\xi)$ . De acuerdo a (1.2.13), su  $n$ -ésima derivada es  $\delta(x-\xi)^{(n)}[\phi] = (-1)^n \phi^{(n)}(\xi)$ . En particular, su primera derivada  $\delta'$  es un funcional sobre  $\mathcal{D}$ , el cual con signo negativo describe a un *dipolo*, otro ejemplo de distribución singular, el cual también puede obtenerse como límite débil de sucesiones regulares, por ejemplo, si se consideran las derivadas de las funciones Gaussianas  $\gamma_\epsilon$ , se tiene que

$$-\int \gamma'_\epsilon(x)\phi(x) dx = \int \gamma_\epsilon(x)\phi'(x) dx \rightarrow \delta[\phi'] = -\delta'[\phi], \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

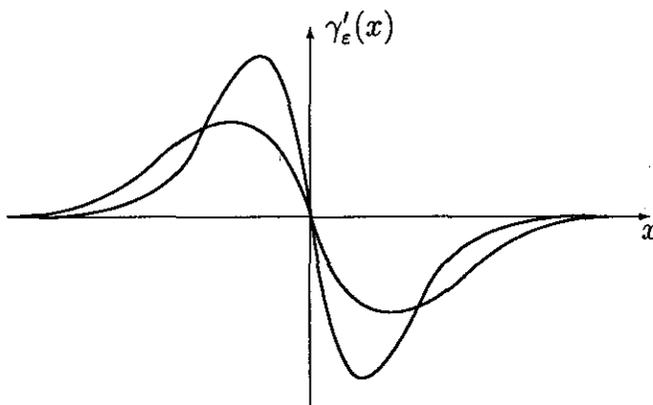


Fig.8 Funciones aproximadoras al negativo del dipolo

Similarmente, se obtiene el mismo resultado si se utiliza cualquier otro tipo de aproximadores de la delta.

□

Otra operación lineal, la cual produce una nueva distribución a partir de una distribución dada  $T$  y una función infinitamente diferenciable  $a$ , es la multiplicación de  $T$  por  $a$ .

**Definición 1.4** El producto de una función  $a \in C^\infty$  y una distribución  $T \in \mathcal{D}'$  es una distribución en  $\mathcal{D}'$  determinada por

$$(aT)[\phi] = T[(a\phi)], \quad \phi \in \mathcal{D}. \quad (1.2.14)$$

En el caso particular de una función constante  $a(x) = c$ , se tiene la nueva distribución en  $\mathcal{D}'$ ,

$$(cT)[\phi] = T[(c\phi)]. \quad (1.2.15)$$

**Ejemplo 5:** Multiplicación de la delta  $\delta(x - \xi)$  por una función suave,

$$(a(x)\delta(x - \xi))[\phi] = \delta(x - \xi)[a\phi] = a(\xi)\phi(\xi) = a(\xi)\delta(x - \xi)[\phi].$$

Es decir,  $a(x)\delta(x - \xi) = a(\xi)\delta(x - \xi)$ .

□

La diferenciación de distribuciones multiplicadas por funciones suaves satisface la clásica regla de Leibniz para la derivada del producto de dos funciones.

**Teorema 1.2.2** Si  $a \in C^\infty$  y  $T \in \mathcal{D}'$ , entonces  $(aT)' = a'T + aT'$ .

**Dem.** Tenemos que para cualquier función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} (aT)'[\phi] &= -(aT)[\phi'] = -T[a\phi'] = -T[(a\phi)' - a'\phi] = -T[(a\phi)'] + T[a'\phi] \\ &= T'[a\phi] + (a'T)[\phi] = (aT')[\phi] + (a'T)[\phi] = (a'T + aT')[\phi]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(aT)' = a'T + aT'$ .

■

Similarmente, es fácil probar la fórmula de Leibniz generalizada, para distribuciones,

$$(aT)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(k)} T^{(n-k)}.$$

**Ejemplo 6:** a)  $(a(x)\delta(x-\xi))'[\phi] = -a(\xi)\phi'(\xi)$ , ya que

$$\begin{aligned}(a(x)\delta(x-\xi))'[\phi] &= -(a(x)\delta(x-\xi))[\phi'] = -(a(\xi)\delta(x-\xi))[\phi'] \\ &= -a(\xi)\delta(x-\xi)[\phi'] = -a(\xi)\phi'(\xi).\end{aligned}$$

En particular,  $(c\delta(x-\xi))'[\phi] = -c\phi'(\xi)$  y en general  $(a(x)\delta(x-\xi))^{(n)} = a(\xi)\delta^{(n)}(x-\xi)$ . Es decir, cualquier función suave que multiplique a la delta de Dirac puede considerarse como una constante que sale fuera de la operación diferenciación.

b)  $(a\delta')[\phi] = \delta'[a\phi] = -\delta[(a\phi)'] = -\delta[a'\phi + a\phi'] = -a'(\xi)\phi(\xi) - a(\xi)\phi'(\xi)$ . En particular, para  $a(x) = x$  y  $\xi = 0$ , tenemos que

$$x\delta'(x) = -\delta(x). \quad (1.2.16)$$

Es decir, la delta de Dirac es una solución generalizada de la ecuación diferencial ordinaria  $xy' = -y$ . □

**Nota:** i) La ecuación (1.2.16), así como la ecuación más general

$$x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x), \quad (1.2.17)$$

no es posible establecerlas sin el enfoque de la delta de Dirac en el sentido distribucional. A partir de aquí ya podemos observar la diferencia y la potencia de las herramientas matemáticas modernas como lo es la teoría de distribuciones.

ii)  $\delta'(x) \neq -\frac{\delta(x)}{x}$  ya que  $\frac{1}{x}$  no es una función de clase  $C^\infty$  (¡no está permitido dividir a una distribución por una función que se anula en ciertos puntos!). Esto es, la multiplicación de distribuciones no está bien definida. Por ejemplo, la multiplicación de la delta  $\delta(x)$  por si misma (es decir,  $\delta^2(x)$ ) no tiene ningún significado en el sentido de las distribuciones.

**Ejemplo 7:** Es buen ejercicio verificar que  $T = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(x)$  es una solución generalizada de la ecuación  $x^n T = 0$  (solución del problema de la división del cero). □

Ahora, al igual como se hace en cálculo integral, consideremos el problema de determinar una distribución  $S$  tal que  $S' = T$ . Es decir, encontrar la primitiva o integral indefinida de una distribución. Por ejemplo, la función de Heaviside genera la *distribución de Heaviside*

$$T_h[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\phi(x) dx = \int_0^{\infty} \phi(x) dx.$$

En el sentido del análisis clásico  $h(x)$  no tiene derivada en cero. Sin embargo, su derivada distribucional la cual de aquí en adelante denotaremos con una barrita ( $\bar{\phantom{x}}$ ) está bien definida y está dada por

$$\bar{h}'(x) = \delta(x), \quad (1.2.18)$$

ya que  $T_h'[\phi] = -T_h[\phi'] = -\int h(x)\phi'(x) dx = -\int_0^{\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) = \delta[\phi]$ . Así, se dice que la función de Heaviside es la primitiva de la delta de Dirac, en el sentido generalizado o de distribuciones.

Una vez determinada la derivada de la función de Heaviside, inmediatamente se puede calcular la derivada distribucional de cualquier función  $f(x)$  continua por piezas, con discontinuidades de salto en los puntos  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Es evidente que una función de este tipo siempre se puede expresar en la forma

$$f(x) = f_s(x) + \sum_{k=1}^m [f_k]h(x - x_k), \quad (1.2.19)$$

donde  $[f_k] = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$  denota el tamaño del salto en  $x_k$  y  $f_s$  es una función continua suave por piezas.

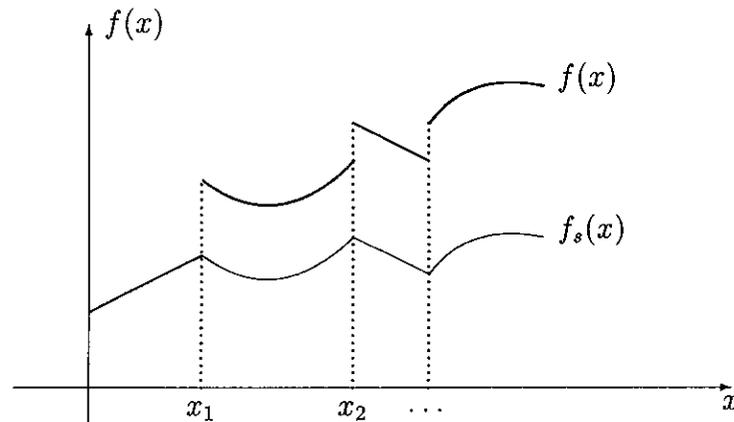


Fig.9 La parte continua  $f_s(x)$  puede obtenerse de  $f(x)$  removiendo de esta los saltos.

Por lo tanto, como la derivada distribucional es una operación lineal, tenemos que

$$\bar{f}' = \{f_s\}' + \sum_{k=1}^m [f_k] \delta(x - x_k), \quad (1.2.20)$$

donde  $\{\cdot\}$  significa "únicamente la parte suave". Si consideramos el orden contrario obtenemos la antiderivada de cualquier distribución que consta de una función localmente integrable más una combinación lineal de deltas centradas en los puntos de salto. En el mismo sentido, tenemos la fórmula

$$\bar{f}^{(n)} = \{f_s\}^{(n)} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n [f_k^{(n-j)}] \delta^{(j-1)}(x - x_k) \quad (1.2.21)$$

para la  $n$ -ésima derivada de una función  $f$  continua por piezas.

**Ejemplo 8:** Como parte del trabajo, pero no se incluye el procedimiento para no agotar espacio, fue interesante mostrar que

a)  $\text{sgn}'(x) = 2\delta(x)$ , donde  $\text{sgn}$  denota a la función signo,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ -1 & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

b) si  $f(x) = x^2 \text{sgn}(x)$ , entonces

$$f'(x) = 2|x|, \quad f'' = 2 \text{sgn}(x), \quad f'''(x) = 4\delta(x), \quad \text{etc.}$$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$  satisface a la ecuación diferencial ordinaria  $-y'' + y = \delta(x)$  y  $v(x, \zeta) = \frac{1}{2ik}e^{ik|x-\zeta|}$  es solución generalizada de  $v'' + k^2v = \delta(x - \zeta)$ .

□

Ahora, vamos a finalizar esta sección enunciando el siguiente resultado (su demostración se puede encontrar en [6, 11]), el cual es de gran importancia y de una enorme potencia.

**Teorema 1.2.3 (Teorema Estructural de la Teoría de Distribuciones):** Las funciones generalizadas en  $\mathcal{D}'$  son derivadas generalizadas de orden finito de funciones continuas.

**Observación:** El concepto de *integral definida* para una distribución, es mucho más complejo de manipular, está presente solo en ciertos contextos; para trabajar con éste se necesitan algunas suposiciones y restricciones adicionales y por lo mismo, no se considera en este trabajo.

### 1.2.3 Argumentos Compuestos y Convolución

En esta parte consideraremos otras dos operaciones con las cuales se generan nuevas distribuciones a partir de otras ya dadas o construidas: la composición y convolución de distribuciones.

Si  $f(x)$  es una función regular, entonces la *fórmula de cambio de variable usual* nos establece que

$$\int f(\alpha(x))\phi(x) dx = \int f(y)\phi(\beta(y))|\beta'(y)| dy,$$

donde  $y = \alpha(x)$ ,  $x = \beta(y)$ . Esto es,  $\beta \equiv \alpha^{-1}$ .

Una suposición que garantiza la validez de la fórmula de cambio de variable es que  $\alpha(x)$  sea una función estrictamente monótona y que aplique el eje  $x$  completo en el eje  $y$  completo (función 1-1 y sobre). En el sentido funcional, se necesita que  $\phi(\beta(y))|\beta'(y)| \in \mathcal{D}$ , lo cual se asegura si  $\beta \in C^\infty$ . Así, con esta condición,

$$T(\alpha(x))[\phi(x)] = T[\phi(\beta(y))|\beta'(y)|] \quad (1.2.22)$$

determina la *composición de una distribución  $T$  con una función  $\alpha(x)$* .

**Ejemplo 9:** a) Si  $\alpha(x) = x - \xi$  (una traslación), entonces

$$\delta(\alpha(x))[\phi] = \delta[\phi(y + \xi)] = \phi(\xi) = \delta(x - \xi)[\phi].$$

Es decir,  $\delta(\alpha(x)) = \delta(x - \xi)$ , la cual actúa sobre las funciones de prueba de la siguiente manera

$$\delta(x - \xi)[\phi] = \phi(\xi).$$

b) En cambio,  $\delta(\alpha(x) - \xi) = \frac{\delta(x - \beta(\xi))}{|\alpha'(\beta(\xi))|}$  ya que

$$\delta(\alpha(x) - \xi)[\phi] = \delta(y - \xi)[\phi(\beta(y))|\beta'(y)|] = \phi(\beta(\xi))|\beta'(\xi)|,$$

donde  $\beta'(\xi) = 1/\alpha'(\beta(\xi))$  (por el teorema de la función inversa). En específico tenemos por ejemplo que  $\delta(-7x + 5) = \frac{1}{7}\delta(x - \frac{5}{7})$ .

c) También, tenemos la propiedad de *auto-similaridad* de la delta  $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$  y con esto vemos que  $\delta(-x) = \delta(x)$ , algo así como que la delta es una "función" par o simétrica.

□

En general, si  $T[\phi(-x)] = T[\phi(x)]$ , se dice que la distribución es par y si  $T[\phi(-x)] = -T[\phi(x)]$ , entonces impar.

Bajo las mismas condiciones para  $\alpha(x)$ , la fórmula de cambio de variable (1.2.22) es equivalente a

$$\int f(\alpha(x))\phi(x) dx = \int f(y) \left[ \frac{d}{dy} \int_{\alpha(\xi) < y} \phi(\xi) d\xi \right] dy, \quad (1.2.23)$$

la cual tiene sentido si  $\frac{d}{dy} \int_{\alpha(\xi) < y} \phi(\xi) d\xi \in D$ , siendo este el caso si la función inversa de  $\alpha(x) = y$  es  $C^\infty$  y de lento crecimiento en el infinito. Por ejemplo, si  $\alpha(x) = cx - b$ , la integral (1.2.23) se reduce a

$$\int f(cx - b)\phi(x) dx = \int f(y) \left[ \frac{d}{dy} \int_{c\xi - b < y} \phi(\xi) d\xi \right] dy.$$

Poniendo  $\int_{-\infty}^x \phi(\xi) d\xi = \Phi(x)$ , tenemos que

$$\int_{c\xi - b < y} \phi(\xi) d\xi = \begin{cases} \int_{-\infty}^{(y+b)/c} \phi(\xi) d\xi = \Phi\left(\frac{y+b}{c}\right) - \Phi(-\infty) & \text{si } c > 0, \\ \int_{(y+b)/c}^{\infty} \phi(\xi) d\xi = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{y+b}{c}\right) & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Así, para cualquier valor de  $c \neq 0$ , tenemos

$$\frac{d}{dy} \int_{c\xi - b < y} \phi(\xi) d\xi = |c|^{-1} \phi\left(\frac{y+b}{c}\right).$$

Sustituyendo esta relación en la integral correspondiente a (1.2.23), obtenemos

$$\int f(cx - a)\phi(x) dx = |c|^{-1} \int f(y)\phi\left(\frac{y+a}{c}\right) dy,$$

resultado obtenido al aplicar directamente la fórmula de cambio de variable del cálculo. La ventaja de la fórmula (1.2.23) es que se puede aplicar aún si el argumento es una función no monótona. Esto ejemplifica que hay ocasiones en las que es conveniente abandonar el enfoque riguroso de la teoría de distribuciones. Por ejemplo, (1.2.23) se puede utilizar para establecer  $\delta(x^2 - a^2)$ . Calcular

$$\int \delta(x^2 - a^2)\phi(x) dx = \int \delta(y) \left[ \frac{d}{dy} \int_{\xi^2 - a^2 < y} \phi(\xi) d\xi \right] dy,$$

pero

$$\int_{\xi^2 - a^2 < y} \phi(\xi) d\xi = \int_{-\sqrt{y+a^2}}^{\sqrt{y+a^2}} \phi(\xi) d\xi = \Phi(\sqrt{y+a^2}) - \Phi(-\sqrt{y+a^2}),$$

de donde

$$\frac{d}{dy} \int_{\xi^2 - a^2 < y} \phi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{y+a^2}} [\phi(\sqrt{y+a^2}) - \phi(-\sqrt{y+a^2})]$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \delta(x^2 - a^2)\phi(x) dx &= \frac{1}{2} \int \delta(y) \frac{1}{\sqrt{y+a^2}} [\phi(\sqrt{y+a^2}) + \phi(-\sqrt{y+a^2})] dy \\ &= \frac{1}{2|a|} [\phi(a) + \phi(-a)]. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{2|a|} [\phi(a) + \phi(-a)] = \frac{1}{2|a|} \int [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \phi(x) dx,$$

se concluye que

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)].$$

• En general, cuando se opera la delta de Dirac con argumentos no monótonos,  $\delta(\alpha(x) - y)$ , donde la función  $y = \alpha(x)$  tiene raíces simples o múltiples,  $x_k = \beta_k(y)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n(y)$ ,

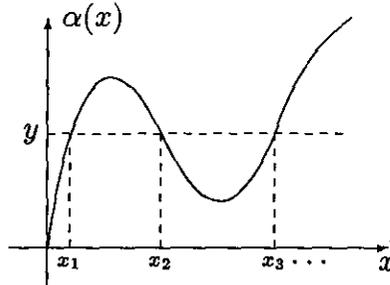


Fig.10 Argumento para la delta de Dirac no monótono.

necesariamente se tiene que abandonar el enfoque riguroso de la teoría de distribuciones, resultando de gran utilidad la fórmula (1.2.23). Este es el caso cuando nos encontramos con la fórmula

$$\delta(\alpha(x) - y) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - x_k)}{|\alpha'(x_k)|}$$

o en vista de las propiedades de la delta de Dirac,

$$\delta(\alpha(x) - y) = \frac{1}{|\alpha'(x)|} \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k), \quad (1.2.24)$$

válida siempre que la función  $\alpha(x)$  tenga derivadas continuas no cero en vecindades de los puntos  $x_k$ .

Ahora, si  $\alpha(x)$  es estrictamente creciente, entonces

$$\delta(\alpha(x) - y) = \frac{\delta(x - \beta(y))}{\alpha'(\beta(y))} = \frac{\delta(x - \beta(y))}{\alpha'(x)},$$

de donde  $\alpha'(x)\delta(\alpha(x) - y) = \delta(x - \beta(y))$ . Diferenciando esta igualdad con respecto a  $y$ , obtenemos

$$\alpha'(x) \frac{\partial}{\partial y} \delta(\alpha(x) - y) = \frac{\partial}{\partial y} \delta(\beta(y) - x).$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(\alpha(x) - y) = -\alpha'(x) \frac{\partial}{\partial y} \delta(\alpha(x) - y).$$

Combinando estas dos últimas expresiones, obtenemos la relación

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(\alpha(x) - y) + \frac{\partial}{\partial y} \delta(\beta(y) - x) = 0.$$

Nótese que las variables  $x$  y  $y$  juegan el mismo papel y al aplicarse a las funciones de prueba, producen

$$\frac{d}{dy} \phi(\beta(y)) = \beta'(y) \frac{d}{d\beta} \phi(\beta)$$

$$\frac{d}{dx} \phi(\alpha(x)) = \alpha'(x) \frac{d}{d\alpha} \phi(\alpha),$$

la regla de la cadena usual. Estas expresiones junto con la multiplicación por una función suave implican la *regla de la cadena para distribuciones*,

$$\frac{d}{dx} T(\alpha(x)) = \frac{d}{d\alpha} T(\alpha(x)) \alpha'(x). \quad (1.2.25)$$

**Nota:** También, podemos utilizar la fórmula (1.2.23) para establecer este resultado. De la definición (1.2.12) y la fórmula (1.2.23), tenemos que

$$\begin{aligned} \int \{f(\alpha(x))\}' \phi(x) dx &= - \int f(\alpha(x)) \phi'(x) dx = - \int f(y) \left[ \frac{d}{dy} \int_{\alpha(\xi) < y} \phi'(\xi) d\xi \right] dy \\ &= \int f'(y) \left[ \int_{\alpha(\xi) < y} \phi'(\xi) d\xi \right] dy. \end{aligned}$$

Como  $\alpha(\xi)$  es una función creciente de  $y$ , entonces tenemos que  $\alpha(\xi_0) = y$ . Por consiguiente,

$$\int_{\alpha(\xi) < y} \phi'(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\xi_0} \phi'(\xi) d\xi = \phi(\xi_0).$$

Por otro lado, si ponemos  $\eta = \alpha(\xi)$ , entonces

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(\xi) < y} \alpha'(\xi) \phi(\xi) d\xi = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^y \phi(\xi) d\eta = \phi(\xi_0),$$

así que

$$\int_{\alpha(\xi) < y} \phi'(\xi) d\xi = \frac{d}{dy} \int_{\alpha(\xi) < y} \alpha'(\xi) \phi(\xi) d\xi$$

y

$$\begin{aligned} \int \{f(\alpha(x))\}' \phi(x) dx &= \int f'(y) \left[ \frac{d}{dy} \int_{\alpha(\xi) < y} \alpha'(\xi) \phi(\xi) d\xi \right] dy \\ &= \int f'(\alpha(x)) \alpha'(x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

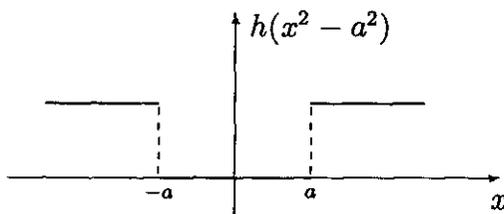
lo que demuestra (1.2.25).

**Ejemplo 10:** Supongamos que  $f(x) = h(x)$ , la función de Heaviside unitaria y  $\alpha(x) = x^2 - a^2$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dx} h(x^2 - a^2) &= \delta(x^2 - a^2) 2x = \frac{x}{a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \\ &= \delta(x - a) - \delta(x + a). \end{aligned}$$

□

**Observación:** La función considerada tiene un salto de magnitud -1 en  $x = -a$  y otro de magnitud +1 en  $x = a$ .



Por lo que su derivada es  $-\delta(x + a) + \delta(x - a)$ .

Una combinación de traslación e integración da como resultado otra operación lineal importante sobre las distribuciones: la *convolución* de una distribución  $T$  con una función  $\phi \in \mathcal{D}$  o en general con otra distribución  $S \in \mathcal{D}'$ . A continuación vamos a dar la definición de convolución de una manera muy general, solo por mencionar este tipo de operación.

La convolución  $T * \phi$  de una distribución  $T$  con una función suave  $\phi$ , es una función regular  $C^\infty$  dada por la fórmula

$$(T * \phi)(x) = T_t[\phi(x - t)] = \int f(t)\phi(x - t) dt \quad (1.2.26)$$

definida puntualmente para cada  $x$  por separado. En particular,  $(T * \phi)(0) = T[\tilde{\phi}]$ , donde  $\tilde{\phi}(t) = \phi(-t)$ . En especial  $\delta * \phi = \phi$ . Es decir, la delta se comporta como el elemento unidad para la "multiplicación" convolución.

También, es posible convolucionar dos distribuciones, pero con un enfoque más débil. Si  $S$  es una distribución con soporte compacto y  $T$  es una distribución arbitraria en  $\mathcal{D}'$ , entonces su convolución  $T * S$  es una distribución en  $\mathcal{D}'$  que actúa sobre las funciones de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$  de la siguiente manera:

$$(T * S)[\phi] = T_x[S_y[\phi(x + y)]] \quad (1.2.27)$$

o equivalentemente

$$(T * S)[\phi] = (T * (S * \phi))(0). \quad (1.2.28)$$

De nuevo,  $\delta * S = S$ . Además, se puede diferenciar la convolución de dos distribuciones, obteniendo

$$(S * T)^{(k)} = S^{(k)} * T = T^{(k)} * S. \quad (1.2.29)$$

Si las dos distribuciones involucradas en la convolución son de soporte compacto, entonces la operación además de ser conmutativa es asociativa, lo cual da al espacio de las distribuciones  $\mathcal{D}'$  "cierta" estructura algebraica. En general, la convolución de distribuciones no es asociativa, como se puede observar con el caso  $1 * (\delta' * h)$ .

### 1.3 Distribuciones Multidimensionales

Por analogía con las distribuciones en  $\mathbb{R}$ , las distribuciones sobre  $\mathbb{R}^n$  se definen como funcionales lineales y continuos sobre el espacio  $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  de las funciones de prueba  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  infinitamente diferenciables (existen las derivadas parciales de cualquier orden) con soporte compacto en  $\mathbb{R}^n$ , donde el soporte de una función con argumento vectorial se define igual que en (1.2.4), con la diferencia que ahora la función se anula fuera de un subconjunto  $n$  dimensional.

**Ejemplo 11:** De nuevo, al igual que en la Definición 1.1, el ejemplo inmediato de función de prueba es

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{a^2}{e^{(\|\mathbf{x}\|^2 - a^2)}} & \|\mathbf{x}\| < a, \\ 0 & \|\mathbf{x}\| \geq a. \end{cases} \quad \|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

□

Es fácil verificar que  $\mathcal{D}$  tiene la estructura de espacio vectorial y por consiguiente, si  $\phi_1$  y  $\phi_2 \in \mathcal{D}$ , también  $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \in \mathcal{D}$  y si  $\phi \in \mathcal{D}$ , también  $\phi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{D}$ , la cual se anula fuera de una bola de radio  $\varepsilon$  centrada en  $\mathbf{x}_0$ . Además, si  $\phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}$  y  $a(\mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $a(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}$  y si  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  y  $\psi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-m})$ , entonces  $\phi\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Antes de continuar, es preciso introducir una notación especial que servirá para compactar algunas expresiones utilizadas posteriormente. Sean  $k_1, k_2, \dots, k_n$  enteros positivos de tal forma que  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  representa a un multi-índice  $n$  dimensional,  $|\mathbf{k}| \stackrel{\text{def}}{=} k_1 + k_2 + \dots + k_n$  y

$$D^{\mathbf{k}} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad (1.3.1)$$

$k_j = 0$  significa que la diferenciación con respecto a la variable correspondiente  $j$  no está presente.

En el mismo contexto, cualquier operador diferencial lineal  $L$  de orden  $r$  en  $n$  variables puede expresarse en la forma

$$L = \sum_{|\mathbf{k}| \leq r} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) D^{\mathbf{k}}, \quad (1.3.2)$$

donde los coeficientes  $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = a_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son funciones arbitrarias. Por ejemplo, si el orden es 2 y el número de variables es también dos, entonces

$$\begin{aligned} L &= \sum_{|\mathbf{k}| \leq 2} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) D^{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}|=0} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) D^{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}|=1} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) D^{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}|=2} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) D^{\mathbf{k}} \\ &= a_{0,0}(x, y) + a_{1,0}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{0,1}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + a_{2,0}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{1,1}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{0,2}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

**Definición 1.5** La sucesión de funciones de prueba  $\{\phi_m(\mathbf{x})\}_{m=1}^{\infty}$  se dice que es una *sucesión nula* en  $\mathcal{D}$  si y solo si

- i) existe una región común acotada fuera de la cual toda  $\phi_m(\mathbf{x})$  se anula. Es decir, los soportes de todos los miembros de la sucesión están contenidos en una misma bola simple, lo suficientemente grande.
- ii) para todo multi-índice  $\mathbf{k}$  de dimensión  $n$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |D^{\mathbf{k}} \phi_m(\mathbf{x})| = 0.$$

Esto es,  $\{\phi_m(\mathbf{x})\}$  tiende *uniformemente* a cero en  $\mathbb{R}^n$ , lo mismo para la sucesión  $\{D^{\mathbf{k}} \phi_m(\mathbf{x})\}$ .

Por lo tanto, decir que  $\{\phi_m(\mathbf{x})\}$  es una sucesión nula en  $\mathcal{D}$  significa que la convergencia a 0 es muy fuerte (se requiere que  $\phi_m$  y todas sus derivadas parciales tiendan a cero uniformemente en  $\mathbb{R}^n$ ).

**Definición 1.6** Un funcional lineal sobre  $\mathcal{D}$  es continuo si siempre que  $\{\phi_m(\mathbf{x})\}$  sea una sucesión nula en  $\mathcal{D}$ , la sucesión numérica

$$T_m[\phi] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

tiende a 0 cuando  $m \rightarrow \infty$ . La integral es múltiple con respecto al volumen usual. En este caso, el funcional lineal y continuo

$$T[\phi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.3.3)$$

recibe el nombre de *distribución  $n$ -dimensional*. El conjunto de distribuciones  $n$ -dimensionales se denota por  $\mathcal{D}'_n$ , el cual tiene la estructura de espacio vectorial. Se podría decir mucho más acerca del espacio de las funciones de prueba  $\mathcal{D}$  y espacio de las distribuciones  $\mathcal{D}'_n$ , incluso se podría hablar de la topología presente en estos espacio y establecer el análisis de los mismos, pero además de desviar el sentido aplicado del presente trabajo, esto representaría bastante espacio de discusión. Por esta razón es que se introducen únicamente las distribuciones  $n$ -dimensionales más importantes, algunas de sus principales propiedades y conceptos de cálculo, sin restar la importancia del aspecto riguroso que posee la teoría de distribuciones.

**Teorema 1.3.1** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente integrable ( $\int_{\Omega} |f| d\mathbf{x}$  existe, en el sentido de Lebesgue, para todo dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ), entonces  $f$  genera una distribución  $n$ -dimensional mediante la definición del producto interior usual

$$T_f[\phi] \equiv \langle f, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.3.4)$$

**Dem.** La linealidad de  $\langle f, \phi \rangle$  sobre  $\mathcal{D}$  sigue directamente de la definición (1.3.4). Para probar la continuidad, sea  $\{\phi_m(\mathbf{x})\}$  una sucesión nula tal que todos sus elementos se anulan fuera de la bola finita  $\Omega$ . Entonces,

$$|\langle f, \phi_m \rangle| < \left( \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\phi_m(\mathbf{x})| \right) \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Como  $\{\phi_m\}$  es una sucesión nula, implica que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \max |\phi_m| = 0$ . La integrabilidad local de  $f$  garantiza que  $\int_{\Omega} |f| d\mathbf{x}$  es finito, así que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f, \phi_m \rangle = 0$ . Por lo tanto, el funcional (1.3.4) es continuo y por consiguiente una distribución. ■

**Observación:** *i)* Por medio de (1.3.4) toda función  $f$  localmente integrable puede considerarse también como una distribución. Como función puntual,  $f$  tiene el valor  $f(\mathbf{x})$  en cada punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ; como distribución,  $f$  tiene una acción (promedio)  $\langle f, \phi \rangle$  sobre una función de prueba elegida  $\phi \in \mathcal{D}$ . Además, el valor de una función en cualquier punto puede recuperarse (de forma única) de los valores del funcional sobre las funciones de prueba que se elijan.

*ii)* Si  $f_1(\mathbf{x})$  y  $f_2(\mathbf{x})$  coinciden excepto en un número finito de puntos, entonces generan la misma distribución. En general, dos funciones se dice que son iguales *casi dondequiera* si  $\int_{\Omega} |f_1 - f_2| dx = 0$  para todo conjunto acotado  $\Omega$ . Dos funciones localmente integrables iguales casi dondequiera generan la misma distribución. En caso contrario, generan distribuciones diferentes. Una vez que se muestra esta afirmación, se considera a funciones iguales casi dondequiera como la misma distribución. Para hacer esto más formal y consistente es necesario introducir la noción de clases de equivalencia, no necesario debido al objetivo de este trabajo.

**Definición 1.7** Una distribución se llama *regular* si es generada por un kernel  $f(\mathbf{x})$  localmente integrable, mediante la expresión (1.3.4).

**Ejemplo 12:** *a)*  $\langle c, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} c \phi(\mathbf{x}) dx$  (distribución regular generada por la función constante  $f(\mathbf{x}) = c$ ).

*b)* Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ . El funcional

$$\langle h_{\Omega}, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) dx \quad (1.3.5)$$

es una distribución regular, llamada *distribución de Heaviside general*. La función  $h_{\Omega}$  es la función de Heaviside, también llamada la *función indicador* del conjunto  $\Omega$ ,

$$h_{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

*c)* Cualquier función continua o continua por piezas define, por medio de (1.3.4), una distribución regular.

□

Las distribuciones que no son regulares se llaman *distribuciones singulares*. Los ejemplos más comunes de tal tipo de distribuciones son las deltas de Dirac, sus derivadas y los valores principales de Cauchy que se desprenden de integrales cuyos integrandos tienen singularidades simples.

### 1.3.1 La Delta de Dirac Multidimensional

La más importante de las distribuciones singulares, desde el punto de vista del presente trabajo, es la delta de Dirac, ya que para determinar una función de Green (Capítulo 2) es de mucha utilidad conocer sus propiedades, además de otras aplicaciones interesantes en las que está presente. También, sin restar importancia se introducen otras distribuciones singulares, con el fin de establecer que el marco teórico de las funciones elementales se extiende de manera considerable.

La delta de Dirac multidimensional es el funcional lineal y continuo del tipo (1.3.3) que asigna a la función de prueba su valor en un punto específico  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , el cual es llamado *polo* o singularidad de la delta,

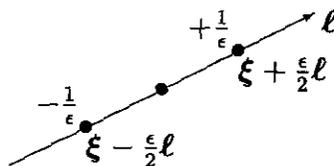
$$\delta(x - \xi)[\phi] = \phi(\xi) \quad (1.3.7)$$

y tiene la propiedad que  $\int_{\Omega} \delta(x - \xi) dx = 1$ , si  $\xi \in \Omega$ .

Otro ejemplo de distribución singular es el dipolo multidimensional, el cual vamos denotar por

$$\Upsilon(x - \xi) \stackrel{\text{def}}{=} -\ell \cdot \nabla \delta(x - \xi), \quad (1.3.8)$$

donde  $\ell$  es el vector unitario en la dirección del dipolo, y el operador derivada direccional  $\ell \cdot \nabla$  actúa sobre  $\delta$  de tal manera que  $\Upsilon(x - \xi)[\phi] = \ell \cdot \nabla \phi|_{x=\xi}$ . Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$  la configuración de una fuente electrostática que consiste de una carga positiva  $\frac{1}{\epsilon}$  localizada en el punto  $\xi + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)\ell$ , y una carga negativa de la misma magnitud en  $\xi - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)\ell$ ,



La distribución correspondiente a estas cargas tiene la acción

$$\frac{1}{\epsilon} \phi \left( \xi + \frac{\epsilon}{2} \ell \right) - \frac{1}{\epsilon} \phi \left( \xi - \frac{\epsilon}{2} \ell \right)$$

sobre cualquier  $\phi \in \mathcal{D}$ . El dipolo unitario con eje  $\ell$  se obtiene cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  (algo así como que se juntan las cargas a la vez, incrementando la magnitud de ambas indefinidamente). La función generalizada correspondiente

$$\Upsilon[\phi] = \frac{d\phi}{d\ell}(\xi),$$

derivada distribucional de la delta, define una distribución singular, que se identifica con el dipolo.

En el caso multidimensional,  $\delta(\mathbf{x})$  también se puede obtener mediante límites débiles de distribuciones representadas por kernels regulares  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$  es conveniente tomar  $f_k(\mathbf{x}) = g_k(x_1)g_k(x_2)g_k(x_3)$ , con  $g_k$  función regular de una variable aproximadora de la delta. En este contexto,

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3). \quad (1.3.9)$$

Esta separación como un producto se conoce como *propiedad de isotropía* de la delta 3-dimensional (o invariancia respecto a el grupo de rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ ). Una prueba de esta propiedad es considerar la sucesión de funciones Gaussianas, Ejemplo 3a) y su producto coordenada a coordenada, lo cual lleva a

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \epsilon} \right)^3 e^{-r^2/2\epsilon^2},$$

que depende únicamente de la magnitud del vector,  $r = \|\mathbf{x}\|$ , y no de su orientación en el espacio. Lo mismo sucede con otro tipo de aproximadores débiles. Similarmente, podemos considerar a la delta de Dirac en el espacio-tiempo como el producto

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t).$$

Ahora, si se considera el cambio de coordenadas 1-1,  $\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x})$ , entonces

$$\delta(\alpha(\mathbf{x}) - \xi) = \frac{\delta(\beta(\xi) - \mathbf{x})}{|J(\mathbf{x})|}, \quad (1.3.10)$$

donde  $\mathbf{x} = \beta(\mathbf{y})$  son las coordenadas inversas a  $\alpha(\mathbf{x})$  y  $J$  es el Jacobiano de la transformación de las coordenadas  $\mathbf{y}$  a las coordenadas  $\mathbf{x}$ .

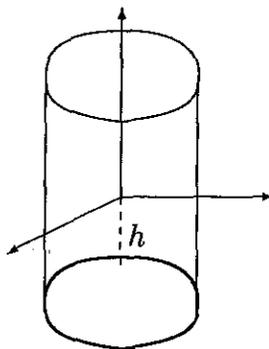
**Ejemplo 13:** En particular, es interesante mostrar que la delta de Dirac en coordenadas esféricas y cilíndricas tiene la expresión

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 (x, y, z) \\
 \text{COORDENADAS CARTESIANAS}
 \end{array}
 \delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)
 \begin{array}{l}
 \nearrow \\
 \searrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \delta(\mathbf{u}) = \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho^2} \\
 \delta(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{\delta(r)\delta(z)}{2\pi r}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (\rho, \phi, \theta) \\
 \text{COORDENADAS ESFÉRICAS} \\
 \\
 (r, \theta, z) \\
 \text{COORDENADAS CILÍNDRICAS}
 \end{array}
 \end{array}$$

Únicamente vamos a considerar el caso del cambio de coordenadas rectangulares  $x, y, z$  a cilíndricas  $r, \theta, z$ . Tenemos que para este caso, la ecuación (1.3.10) tiene la expresión

$$\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{\delta(r - r_o)\delta(\theta - \theta_o)\delta(z - z_o)}{r} \quad r_o > 0. \quad (1.3.11)$$

De aquí podemos observar que, debido a que el sistema cilíndrico es singular en el origen, no se puede considerar directamente la situación cuando la fuente está localizada en el origen. Sin embargo, vamos a considerar el problema mediante un proceso de límite,



considerando un anillo uniforme de fuentes de magnitud total unitaria, a una profundidad  $h$  ( $r = r_o, z = -h$ ). Como la porción de anillo entre  $\theta_o$  y  $\theta_o + \Delta\theta_o$  representa a un fuente de magnitud  $\frac{\Delta\theta_o}{2\pi}$ , su representación distribucional está dada por (1.3.11) multiplicada por  $\Delta\theta_o/2\pi$ . Así, la representación de todo el anillo se obtiene integrando desde  $\theta_o = 0$  hasta  $\theta_o = 2\pi$ , dando como resultado

$$\frac{\delta(r - r_o)\delta(z + h)}{2\pi r}$$

Tomando el límite cuando  $r_0 \rightarrow 0$ , tenemos que para una fuente puntual unitaria localizada a una profundidad  $h$  tiene la representación

$$\delta(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \frac{\delta(r)\delta(z+h)}{2\pi r},$$

donde  $\mathbf{h} = (0, 0, -h)$ , de tal forma que si la fuente se localiza en el origen, entonces tiene la representación

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\delta(r)\delta(z)}{2\pi r}.$$

□

Por otro lado, la discusión en torno a la delta de Dirac de hecho puede extenderse a distribuciones delta cuyo soporte singular sea más general que un simple punto. Por ejemplo, si  $\sigma$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y  $\rho(\mathbf{x})$  es una función localmente integrable sobre  $\sigma$  (densidad de área, que por simplicidad se toma  $\rho(\mathbf{x}) \equiv 1$ ), entonces la *delta de Dirac superficie* (o capa superficial simple)  $\delta_\sigma \equiv \delta(\sigma)$  se establece como

$$\delta_\sigma[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\sigma)\rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\sigma \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) dS, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (1.3.12)$$

Un caso especial ocurre cuando  $\sigma$  es la esfera  $\|\mathbf{x}\| = r$  y  $\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2}$ :

$$\delta_\sigma[\phi] = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\|\mathbf{x}\|=r} \phi(\mathbf{x}) dS.$$

De la misma forma, se establece que la *delta de Dirac línea*  $\delta_\ell \equiv \delta(\ell)$  para una curva  $\ell$  en  $\mathbb{R}^3$  es

$$\delta_\ell[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\ell)\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\ell \phi(\mathbf{x}) ds. \quad (1.3.13)$$

En la Subsección 1.3.3 consideraremos con más detalle la deducción e interpretación de estas expresiones de la delta para este tipo de soportes, las cuales son importantes porque se utilizan en física en muchos contextos. Por ejemplo, se utilizan como modelo matemático para superficies y alambres eléctricamente cargados en electrostática, fuerzas concentradas y momentos en mecánica de sólidos, vórtices y fuentes en mecánica de fluidos, entre otras.

### 1.3.2 Operaciones Generales

Ahora, si  $a(x)$  y  $f(x)$  son localmente integrables, el producto  $a(x)f(x)$  no necesariamente es localmente integrable (aún cuando  $af$  sea localmente integrable, su acción sobre  $\phi$  puede no estar relacionada con la acción individual de  $a$  y  $f$ ). Sin embargo, si  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $a\phi \in \mathcal{D}$  y

$$aT[\phi] \equiv \langle af, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)f(x)\phi(x) dx = \langle f, a\phi \rangle \equiv T[a\phi].$$

Así,  $a(x)f(x)$  genera una nueva distribución, la *multiplicación de una distribución por una función infinitamente diferenciable*. Un caso específico es

$$a(x)\delta(x - \xi) = a(\xi)\delta(x - \xi). \quad (1.3.14)$$

En general, bajo las condiciones apropiadas, es válida la *fórmula de cambio de variable multidimensional para distribuciones*

$$\int f(y - \xi)\phi(y) dy = \int f(\alpha(x) - \xi)\phi(\alpha(x))|J(x)| dx. \quad (1.3.15)$$

Generalizando el concepto de derivada, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T[\phi] = -T \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] \quad (1.3.16)$$

y aplicando repetidas veces (1.3.16),

$$D^k T[\phi] = (-1)^{|k|} [D^k \phi]. \quad (1.3.17)$$

Si  $L$  es un operador diferencial lineal de orden  $r$  en  $n$  variables (ver (1.3.2)), con coeficientes  $a_k$  infinitamente diferenciables, entonces

$$\begin{aligned} L T[\phi] &= \langle Lf, \phi \rangle = \left\langle \sum_{|k| \leq r} a_k D^k f, \phi \right\rangle = \left\langle f, \sum_{|k| \leq r} (-1)^{|k|} D^k (a_k \phi) \right\rangle \\ &= T \left[ \sum_{|k| \leq r} (-1)^{|k|} D^k (a_k \phi) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

**Nota:** \*i) El operador de orden  $r$  que aparece en el lado derecho de (1.3.18) es conocido como el *operador formal adjunto* de  $L$  y se denota por  $L^*$ . Así,

$$L T[\phi] = T[L^* \phi]. \quad (1.3.19)$$

ii) Siempre se tiene que  $(L^*)^* = L$  y si  $L = L^*$ , entonces  $L$  se llama *operador formal auto-adjunto*.

Por último, consideremos ahora una función  $f(\mathbf{x})$  con discontinuidades multidimensionales. En específico, sobre la superficie  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ , con discontinuidad de salto  $[f]$  dado por la relación

$$[f] = f(\sigma = 0^+) - f(\sigma = 0^-). \quad (1.3.20)$$

**Nota:**  $\sigma = 0^+$  representa al lado derecho de la superficie (hacia donde apunta  $\nabla\sigma$ ). Al igual que en la ecuación (1.2.20), nos gustaría determinar  $\frac{\bar{\partial}f}{\partial x_i}$ . Para hacer esto es necesario poner sobre la superficie un sistema de coordenadas  $(u_1, u_2)$  y extender el sistema al espacio en una vecindad de la superficie a lo largo de sus normales. Sea  $u_3 = \sigma$  la tercer coordenada, la cual está bien definida en la vecindad de  $\sigma = 0$ . Debemos señalar que  $f$  es continua en las variables  $u_1$  y  $u_2$ , pero discontinua en la tercer variable  $u_3$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{\bar{\partial}f}{\partial u_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2 \quad (1.3.21)$$

$$\frac{\bar{\partial}f}{\partial u_3} = \frac{\partial f}{\partial u_3} + [f] \delta(u_3).$$

Así, por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\bar{\partial}f}{\partial x_i} = \frac{\bar{\partial}f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + [f] \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \delta(u_3) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + [f] \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \delta(\sigma). \quad (1.3.22)$$

En forma vectorial tenemos que

$$\bar{\nabla} f = \nabla f + [f] \nabla \sigma \delta(\sigma). \quad (1.3.23)$$

Análogamente, podemos definir la divergencia y el rotacional generalizados como

$$\bar{\nabla} \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \sigma \cdot [\mathbf{f}] \delta(\sigma), \quad (1.3.24)$$

$$\bar{\nabla} \times \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \sigma \times [\mathbf{f}] \delta(\sigma).$$

La derivación rigurosa de ambos resultados requiere cierto manejo de la invariancia de la divergencia y rotacional en sistemas de coordenadas curvilíneas en general, parte importante del análisis vectorial-tensorial clásico. Los resultados (1.3.23) y (1.3.24) se pueden compactar, utilizando  $\star$  para las tres operaciones, en la fórmula

$$\bar{\nabla} \star \mathbf{f} = \nabla \star \mathbf{f} + \nabla \sigma \star [\mathbf{f}] \delta(\sigma). \quad (1.3.25)$$

Lo más importante de esta parte es que la ecuación (1.3.17) implica la excelente y definitiva conclusión acerca de la diferenciabilidad.

**Teorema 1.3.2** *Toda distribución es diferenciable a orden arbitrario.*

### 1.3.3 Interpretación de $\delta(\sigma)$

El interés principal que nos mueve en esta parte es referente al significado de  $\delta(\sigma)$  y  $\delta'(\sigma)$ , donde  $\sigma = 0$  es una superficie en el espacio 3-dimensional, bajo la suposición que  $\|\nabla\sigma\| = 1$  en todo punto sobre la superficie. Si  $\sigma$  no tiene esta propiedad, entonces  $\sigma_1 = \sigma/\|\nabla\sigma\|$  si la tiene y se redefine la superficie. Con estas condiciones, consideremos de nuevo la integral (1.3.12),

$$\delta_\sigma[\phi] = \int \delta(\sigma)\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (1.3.26)$$

introduciendo para su análisis un sistema de coordenadas curvilíneas  $(u_1, u_2)$  sobre la superficie  $\sigma = 0$ , extendiendo localmente estas variables al espacio a lo largo de las normales a la superficie. La tercer coordenada,  $u_3 = \sigma$ , representa la distancia local desde la superficie ya que  $\|\nabla\sigma\| = \frac{d\sigma}{du_3} = 1$ . Así,  $\sigma = u_3 = \text{const} \neq 0$  es una superficie paralela a  $\sigma = 0$ , con  $u_3$  pequeña.

De la Geometría Diferencial (ver por ejemplo [7]), se tiene que si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$  es uno a uno sobre la superficie, entonces

$$d\mathbf{x} = \sqrt{g_2(u_1, u_2, u_3)} du_1 du_2 du_3 \quad (1.3.27)$$

donde  $g_2$  es el determinante de la primera forma fundamental correspondiente a la superficie  $\sigma = u_3 = \text{const.}$  Utilizando (1.3.27) en (1.3.26) e integrando respecto a  $u_3$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_\sigma[\phi] &= \int \phi[\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)] \delta(u_3) \sqrt{g_2(u_1, u_2, u_3)} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int \phi[\mathbf{x}(u_1, u_2, 0)] \sqrt{g_2(u_1, u_2, 0)} du_1 du_2 \\ &= \int_{\sigma=0} \phi(\mathbf{x}) dS \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Ahora, respecto a  $\delta'(\sigma)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \delta'_\sigma[\phi] &= \int \phi(\mathbf{x}) \delta'(\sigma) d\mathbf{x} \\ &= \int \phi[\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)] \delta'(u_3) \sqrt{g_2(u_1, u_2, u_3)} du_1 du_2 du_3 \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial u_3} \left[ \phi(\mathbf{x}) \sqrt{g_2(u_1, u_2, u_3)} \right]_{u_3=0} du_1 du_2. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

De nuevo, utilizando otro resultado de Geometría Diferencial, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial u_3} \sqrt{g_2(u_1, u_2, u_3)} = -2K_\sigma(u_1, u_2, u_3) \sqrt{g_2(u_1, u_2, u_3)},$$

donde  $K_\sigma$  denota a la curvatura media de la superficie  $\sigma = u_3 = \text{const.}$  Así,

$$\begin{aligned} \delta'_\sigma[\phi] &= - \int \frac{\partial \phi}{\partial u_3} (\mathbf{x}(u_1, u_2, 0)) \sqrt{g_2(u_1, u_2, 0)} du_1 du_2 \\ &\quad + \int 2K_\sigma(u_1, u_2, 0) \phi[\mathbf{x}(u_1, u_2, 0)] \sqrt{g_2(u_1, u_2, 0)} du_1 du_2 \\ &= \int_{\sigma=0} \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial n} + 2K_\sigma(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right] dS, \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$  es la derivada normal usual de  $\phi$ . Esto muestra la importancia de la Geometría Diferencial en la teoría de distribuciones multidimensionales y que estas no son fáciles de tratar.

### 1.3.4 Producto de Deltas

En general, en el espacio de distribuciones  $\mathcal{D}'$  la multiplicación no está definida. Sin embargo, este hecho debe de esclarecerse puesto que por un lado, obviamente las funciones ordinarias, las cuales también son funciones generalizadas, siempre pueden multiplicarse y por consiguiente también deben poder multiplicarse en el sentido distribucional. Pero, puede ser que la multiplicación de una distribución regular por si misma lleve a a cierta ambigüedad, como por ejemplo, en el caso de multiplicar la función de Heaviside por si misma  $n$  veces,  $h^n(x) = h(x)h(x) \cdots h(x) = h(x)$ . Tomar la derivada en ambos lados lleva a  $nh^{n-1}(x)h'(x) = h'(x)$ , de donde supuestamente se obtiene que  $h^{n-1}(x) = 1/n$  lo cual es una contradicción ya que si se toma  $n = 2$ , entonces  $h(x) = 1/2$ . La multiplicación de una distribución regular y una no singular o dos distribuciones singulares puede que no siempre este definida. Por ejemplo,  $\delta^2$  no tiene ningún significado en el sentido de distribuciones, así como tampoco  $f(x)\delta(x - \xi)$  cuando  $f(x)$  tiene discontinuidad de salto en  $x = \xi$ . Sin embargo, es posible que este problema de la multiplicación se pueda remediar considerando otros espacios de distribuciones, pero ya esto es material que no vamos a abordar en el presente trabajo. Únicamente vamos a considerar un caso muy especial; dos deltas de Dirac multidimensionales se pueden multiplicar siempre que sus soportes sean apropiados.

Sean  $\sigma_1 = 0$  y  $\sigma_2 = 0$  dos superficies que se intersectan a lo largo de una curva  $\Gamma$  (ver Fig.11)

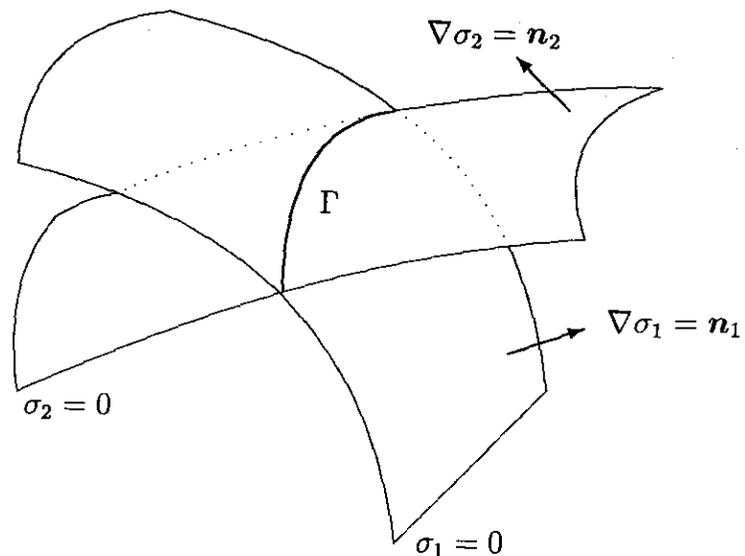


Fig.11 Soporte del Producto de dos Deltas.

Supongamos que  $\nabla\sigma_1 = \mathbf{n}_1$  y  $\nabla\sigma_2 = \mathbf{n}_2$ , donde  $\|\mathbf{n}_1\| = \|\mathbf{n}_2\| = 1$ . El asunto ahora es interpretar

$$\delta_{\sigma_1}\delta_{\sigma_2}[\phi] = \int \delta(\sigma_1)\delta(\sigma_2)\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.3.31)$$

Sobre el plano normal local a la  $\Gamma$ -curva definimos  $u_1 = \sigma_1$ ,  $u_2 = \sigma_2$  y  $u_3 = s$ , donde  $s$  es la distancia a lo largo de la  $\Gamma$ -curva. Extendiendo  $u_1, u_2$  al espacio en una vecindad del plano a lo largo de una de sus normales, tenemos

$$d\mathbf{x} = \frac{du_1 du_2 du_3}{\text{sen } \theta}, \quad (1.3.32)$$

donde  $\text{sen } \theta = \|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\|$ . Sustituyendo (1.3.32) en (1.3.31) e integrando con respecto a  $u_1$  y  $u_2$ , tenemos que

$$\delta_{\sigma_1}\delta_{\sigma_2}[\phi] = \int \frac{\phi(\mathbf{x})}{\text{sen } \theta} \delta(u_1)\delta(u_2) du_1 du_2 du_3 = \int_{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1=0 \\ \sigma_2=0 \end{array} \right\}} \frac{\phi(\mathbf{x})}{\text{sen } \theta} ds. \quad (1.3.33)$$

Este resultado podría resultar muy útil en la aplicación, así como otros más generales derivados de multiplicar distribuciones Delta adecuadas.

### 1.3.5 Parte Finita de una Integral Divergente

La parte finita de una integral divergente es sin duda un punto clave para muchos problemas aplicados. Previamente en la Sección 1.2 se dió la definición y una breve introducción de este tópico con funciones de una variable, denominando al resultado "valor principal de Cauchy". Por ejemplo, mencionábamos que es interesante mostrar que

$$\mathcal{PV} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} \ln|x|$$

y precisamente aprovecharemos el espacio de esta parte para obtener esta relación. La función  $f(x) = \ln|x|$  es localmente integrable, mientras que su derivada ordinaria  $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$  no lo es sobre cualquier intervalo que contenga  $x = 0$ . Sin embargo, sabemos que como una función generalizada,  $\ln|x|$  tiene derivada de todos los ordenes. Pero, ¿cuál es entonces la relación entre la derivada generalizada y la derivada ordinaria de  $f(x)$ ?

Trabajemos con el funcional  $T_f[\phi]$ , que representa a  $f(x)$ , como sigue

$$T[\phi] = \int \ln|x|\phi(x) dx.$$

Utilizando la definición de derivada generalizada (1.2.12), tenemos

$$T'[\phi] = - \int \ln|x|\phi'(x) dx.$$

La integración por partes sería una opción para obtener el término  $1/x$  en esta representación integral, pero no se puede efectuar debido a que  $1/x$  no es localmente integrable. Otra opción es introducir otro funcional auxiliar, dependiendo de  $\varepsilon$  del cual  $T'[\phi]$  se pueda obtener como límite. Sea  $h_\varepsilon(x)$  la función ayuda

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & -\varepsilon < x < \alpha\varepsilon \\ 1 & \text{otra parte} \end{cases}$$

definida para alguna constante  $\alpha > 0$  y un parámetro  $\varepsilon > 0$  (ver Fig.12)

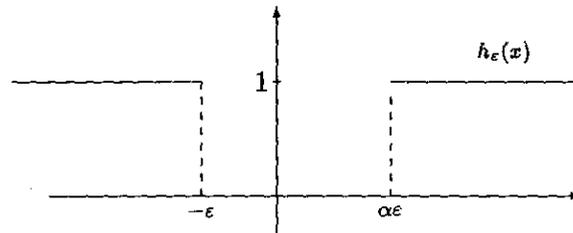


Fig.12 Función de ayuda para obtener la parte finita de la integral divergente  $\int \phi(x)/x$

Es obvio que  $\ln|x|$  puede escribirse como el límite de funciones

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x) \ln|x| = \ln|x|.$$

Si definimos

$$T'_\varepsilon[\phi] = - \int h_\varepsilon(x) \ln|x|\phi'(x) dx,$$

entonces por el Teorema de Completos de  $\mathcal{D}'$  (Teorema 1.2.1) tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T'_\varepsilon[\phi] = T'[\phi].$$

La función  $h_\varepsilon(x)\ln|x|$  tiene dos discontinuidades de salto en  $x = -\varepsilon$  y  $x = \alpha\varepsilon$ . Podemos usar la integración por partes clásica, partiendo la recta real en dos intervalos o usar la derivada generalizada (mucho más conveniente)

$$T'_\varepsilon[\phi] = \int \frac{\bar{d}}{dx} [h_\varepsilon(x)\ln|x|] \phi(x) dx,$$

integrando sobre  $\text{Sopt } \phi$ , sin tener que preocuparnos de los límites en la integración por partes puesto que  $\phi$  se anula en estos puntos límite.

Tomando la derivada del término entre parentesis cuadrados en la expresión anterior y utilizando  $a(x)\delta(x - \xi) = a(\xi)\delta(x - \xi)$  (Ejemplo 5), tenemos que

$$\frac{\bar{d}}{dx} [h_\varepsilon(x)\ln|x|] = \frac{h_\varepsilon(x)}{x} - \ln \varepsilon \delta(x + \varepsilon) + \ln(\alpha\varepsilon)\delta(x - \alpha\varepsilon).$$

y por consiguiente, tenemos que

$$\begin{aligned} T'_\varepsilon[\phi] &= -\ln \varepsilon \phi(-\varepsilon) + \ln(\alpha\varepsilon)\phi(\alpha\varepsilon) + \int \frac{h_\varepsilon(x)}{x} \phi(x) dx \\ &= \phi(0)\ln \alpha + \int \frac{h_\varepsilon(x)}{x} \phi(x) dx + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

donde  $o(\varepsilon)$  representa a los términos en  $\varepsilon$  de orden grande. Tomando el límite, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} T'[\phi] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T'_\varepsilon[\phi] \\ &= \phi(0)\ln \alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{h_\varepsilon(x)}{x} \phi(x) dx \\ &= \phi(0)\ln \alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\alpha\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right]. \end{aligned}$$

Para  $\alpha = 1$ ,  $\ln \alpha = 0$  y el límite que queda precisamente es lo que se define como valor principal de Cauchy, relación (1.2.5). Esto es,

$$T'[\phi] = \mathcal{PV} \int \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Tomar  $\alpha \equiv 1$  en el procedimiento anterior es por conveniencia, pero no es necesario ya que numéricamente el resultado es el mismo para cualquier valor de  $\alpha$ . En general, a este procedimiento de límite se le conoce como "tomar la parte finita de una integral divergente o regularizar una integral con singularidades" (regularización canónica de Gelfand, [6]). Así,

$$\frac{\bar{d}}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

sobre cualquier intervalo abierto que no incluya a  $x = 0$ , pero cuando  $x = 0$  pertenece al intervalo considerado, entonces

$$\mathcal{PV} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\bar{d}}{dx} \ln|x|.$$

Ahora, ¿cómo se utiliza este procedimiento en la aplicación? Supongamos, por ejemplo, que hemos reducido la solución de un problema a la evaluación de la expresión

$$u(x) = \frac{d}{dx} \int_I \phi(y) \ln|x-y| dy, \quad x \in I.$$

Si la integral es continua como función de  $x$ , entonces

$$u(x) = \int_I \phi(y) \frac{\bar{d}}{dx} \ln|x-y| dy = \int_I \phi(y) \mathcal{PV} \left( \frac{1}{x-y} \right) dy.$$

la cual se interpreta como la parte finita de la integral divergente por medio del procedimiento descrito anteriormente.

**Nota:** Si no se utilizara el valor principal de Cauchy, entonces aplicando integración por partes implicaría que

$$u(x) = - \int_I \phi'(y) \ln|x-y| dy$$

también sería un resultado legítimo en el caso de existir la integral. Sin embargo, el problema es que aún cuando esta ecuación integral se desprendiera de algún problema aplicado la función  $\phi(x)$  podría tener singularidades en la frontera del intervalo  $I$ , de tal forma que el procedimiento de integración por partes no sería válido y la ecuación integral sería divergente. Por lo tanto, la única alternativa que nos queda es introducir el proceso de regularización mediante el valor principal de Cauchy de  $1/(x-y)$ , el cual es un kernel bien conocido en la teoría de las ecuaciones integrales singulares, y ahora lo podemos identificar como una distribución singular.

El concepto equivalente para dimensiones mayores es de difícil manipulación, depende del problema y puede tener serias implicaciones. Por ejemplo, en tres dimensiones, consideremos la integral

$$I(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{\Omega} \frac{\phi(\mathbf{y})}{r} d\mathbf{y}, \quad (1.3.34)$$

donde  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , y  $\mathbf{x} \in \Omega$  (alguna región en el espacio). Suponiendo que la integral es una función  $C^1$  en  $\mathbf{x}$ , podemos reemplazar  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$  por  $\frac{\bar{\partial}^2}{\partial x_1^2}$  e intercambiar integración y derivada,

$$I(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{y}) \frac{\bar{\partial}^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{1}{r} \right) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{y}) \frac{\bar{\partial}^2}{\partial y_1^2} \left( \frac{1}{r} \right) d\mathbf{y}. \quad (1.3.35)$$

**Nota:** i) Utilizamos diferenciación generalizada en lugar de diferenciación ordinaria porque el resultado es una integral divergente.

ii) Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{r_1}{r^3}, \quad r_1 = x_1 - y_1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{3r_1^2 - r^2}{r^5}.$$

iii) Como  $r_1/r^3$  es localmente integrable, escribimos

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\bar{\partial}}{\partial y_1} \left( \frac{r_1}{r^3} \right). \quad (1.3.36)$$

Con estas observaciones, procedemos a encontrar la parte finita de la integral divergente (1.3.35). Sea

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) = g(r_1, r_2, r_3) - \varepsilon = 0 \quad (1.3.37)$$

una superficie suave por pedazos que contiene al punto  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , donde  $r_i = x_i - y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  y  $g$  una función homogénea de orden 1;  $g(\alpha r_1, \alpha r_2, \alpha r_3) = \alpha g(r_1, r_2, r_3)$ , condición que asegura que la superficie  $g(\alpha r_1, \alpha r_2, \alpha r_3) - \varepsilon = 0$  corresponde a

$g(r_1, r_2, r_3) - \varepsilon/\alpha = 0$  para  $\alpha \neq 0$ . Así, las superficies  $g - \varepsilon = 0$  para diferentes valores de  $\alpha$  son similares en forma. Además, de la homogeneidad de  $g$  se sigue que  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = g(r_1, r_2, r_3) = 0$  consiste de un solo punto ( $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ). Por ejemplo, para una esfera con centro en  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  y radio  $\varepsilon$ , tenemos que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} - \varepsilon = 0.$$

Ahora, sea  $\nabla_{\mathbf{y}} f = \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario a la superficie. Además, suponiendo que  $f > 0$  fuera y  $f < 0$  dentro de esta superficie, respectivamente, introducimos una función auxiliar  $H_\varepsilon(\mathbf{y})$  mediante la relación

$$H_\varepsilon(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & (f > 0), \\ 0 & (f < 0). \end{cases} \quad (1.3.38)$$

La derivada generalizada requerida en (1.3.36) se define por la relación

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}^2}{\partial y_1^2} \left( \frac{1}{r} \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{\partial}}{\partial y_1} \left[ \frac{H_\varepsilon(\mathbf{y}) r_1}{r^3} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{r_1 n_1}{r^3} \delta(f) + \frac{3r_1^2 - r^2}{r^5} H_\varepsilon(\mathbf{y}) \right], \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

donde  $n_1$  es la componente de  $\mathbf{n}$  en la dirección del eje  $y_1$ . Por consiguiente,  $I(\mathbf{x})$  puede escribirse como

$$I(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{f=0} \frac{r_1 n_1}{r^3} \phi(\mathbf{y}) dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{3r_1^2 - r^2}{r^5} H_\varepsilon(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (1.3.40)$$

donde hemos usado (1.3.28) para integrar  $\delta(f)$  en (1.3.40). Utilizando una expansión en series de Taylor para  $\phi(\mathbf{y})$  en  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , encontramos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{f=0} \frac{r_1 n_1}{r^3} \phi(\mathbf{y}) dS \approx \alpha_f \phi(\mathbf{x}),$$

donde  $\alpha_f$  es una constante que depende de la forma de la superficie  $f = 0$ . Por ejemplo, para la esfera dada por  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \varepsilon$ , tenemos que  $\alpha_f = \frac{4\pi}{3}$ , mientras

que si  $f = 0$  es un cilindro circular con eje paralelo al eje  $y_1$ , radio de la base  $\varepsilon$  y altura  $\gamma$ ,  $\varepsilon/\gamma \gg 1$ , entonces  $\alpha_f = 4\pi$ . Así, la ecuación (1.3.40) puede finalmente escribirse como

$$I(\mathbf{x}) = \alpha_f \phi(\mathbf{x}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{3r_1^2 - r^2}{r^5} H_{\varepsilon}(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.3.41)$$

Numéricamente,  $I(\mathbf{x})$  debe ser la misma sin importar la forma de la superficie  $f = 0$ . Como  $(3r_1^2 - r^2)/r^5$  cerca de  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  toma valores tanto positivos como negativos, la forma de  $f = 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  afecta al valor de la integral de volumen en el proceso de suma (efecto similar al del conocido resultado para series condicionalmente convergentes, las cuales pueden hacerse convergentes a cualquier valor reordenando los términos). El término  $\alpha_f \phi(\mathbf{x})$  en la ecuación (1.3.41) compensa el cambio en el valor de la integral cuando la superficie  $f = 0$  cambia de tal forma que  $I(\mathbf{x})$  numéricamente es el mismo valor sea cual sea esta superficie. Precisamente en esto consiste el proceso de regularización.

En la aplicación, la principal implicación es en la forma de obtener el valor de la integral de volumen, ya que comúnmente en la práctica esta se obtiene numéricamente. La región de integración en la integral de volumen tiene un hoyo en el que se encuentra  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , cuya frontera está dada por  $f = 0$ . El valor de  $\alpha_f$  debe, por consiguiente, corresponder a la malla utilizada en la integración de volumen numérica. Si el hoyo es rectangular, caso más frecuente, entonces ninguno de los valores mencionados para  $\alpha_f$  es apropiado para el problema. Si en lugar de tomar una derivada generalizada dentro de la integral impropia (1.3.35) se utiliza una derivada ordinaria, entonces nos lleva a una integral divergente y parecería que el problema físico del cual proviene esta integral estaría mal o no tendría solución. Por lo tanto, en muchas ocasiones, no es que un problema sea difícil o éste mal planteado lo que lo hace complicado, sino los procedimientos no adecuados que se utilizan para atacarlo. Así, el analista debe revisar siempre la causa de la apariencia errónea de un problema real y utilizar la técnica más apropiada para resolverlo, y la teoría de las funciones generalizadas en algunos casos se convierten en un buen candidato.

## Comentario 1

\* En cualquier dimensión, tenemos la relación

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \implies \mathcal{D}' \supset \mathcal{S}' \supset \mathcal{E}',$$

donde

$\mathcal{D} = \{\text{funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto}\}$

$\mathcal{D}' = \text{espacio dual de } \mathcal{D}, \text{ Distribuciones de Schwartz.}$

$\mathcal{S} = \{\text{funciones infinitamente diferenciables de rápido decrecimiento}\}$

$\mathcal{S}' = \text{espacio dual de } \mathcal{S}, \text{ Distribuciones Moderadas o Naturales (de Temple).}$

$\mathcal{E} = \{\text{funciones infinitamente diferenciables } C^\infty\}$

$\mathcal{E}' = \text{espacio dual de } \mathcal{E}, \text{ Distribuciones con Soporte Compacto.}$

En nuestro contexto es más que suficiente considerar las distribuciones comunes, las Distribuciones de Schwartz  $\mathcal{D}'$  puesto que este es el más general (el espacio de las distribuciones fuertes). De hecho la distribución que más se utiliza en el presente trabajo es la delta de Dirac la cual es una distribución de soporte compacto, lo que implica que pertenece a los tres espacios más importantes de distribuciones  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{S}'$  y  $\mathcal{D}'$ . Por consiguiente, podemos trabajar en cualquiera de estos espacios de funciones generalizadas. Sin embargo, no está demás señalar que el espacio  $\mathcal{E}'$  es suficiente para el aspecto algebraico formal, mientras que el espacio  $\mathcal{S}'$  es necesario para el análisis riguroso, en específico para el estudio de la *Transformada de Fourier Generalizada*, la cual es herramienta de fundamental importancia para tratar con libertad un gran número de problemas en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Estudiar y analizar con detalle todo el material lleva tiempo, espacio y esfuerzo, y por lo mismo, a manera de sugerencia es posible desarrollar un nuevo tema de tesis paralelo al presente trabajo.

## Capítulo 2

# Funciones de Green

A través del tiempo el hombre ha tenido que modelar procesos naturales que ha observado a su alrededor; física y matemáticamente. Una buena parte de las leyes de la naturaleza se describen mediante ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, algunas de estas provienen de procesos de difusión, movimiento de partículas, flujo de fluidos, ondas elásticas, acústicas, electromagnéticas, entre otras. Algunas ecuaciones que sirven como modelo son la *Ecuación de Laplace, Poisson y de Onda*. Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son fundamentales en el estudio de mecánica de fluidos, campos gravitacionales y electrostáticos, y también muy útiles en el análisis de películas de jabón y cristales líquidos. Por su parte la ecuación de onda permite analizar todo tipo de problemas de vibración. Aún cuando las soluciones de estas ecuaciones se consideran en detalle hasta en el Capítulo 3, se mencionan en el presente capítulo porque el objetivo es establecer una forma de como resolver problemas con condiciones de frontera; el enfoque mediante las *funciones de Green* es un método de solución importante para este tipo de problemas.

En la primer parte del capítulo se introduce una función de Green de una manera motivadora al considerar el problema clásico de una cuerda vibrante. Posteriormente, se define formalmente el concepto de función de Green, se establecen los pasos para su construcción, se consideran las propiedades más importantes y se presentan algunos ejemplos simples en dos y tres dimensiones.

## 2.1 Introducción

Un problema con valores en la frontera (PVF) consiste de

$$\begin{aligned} \text{Una ecuación Diferencial} \quad Lu &= f, \\ \text{Condiciones de Frontera} \quad Bu &= h, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde el par  $f, h$  se conoce como los datos de entrada del problema y  $u$  la respuesta, o en otras palabras la función desconocida o solución por determinar.

Ahora, ¿cómo proceder si se tiene que  $f$  representa a una fuente concentrada, como por ejemplo una carga eléctrica puntual, una fuente de calor intensa o una fuerza externa que impacta a una masa intempestivamente? ¿Se puede determinar alguna solución que satisfaga tal condición? Si es así, ¿cómo se determina?

Para los casos descritos, se introduce la delta de Dirac en (2.1.1) como término no homogéneo y al resolver el nuevo problema aparece el concepto matemático llamado *función de Green*, la cual representa la respuesta inmediata o solución fundamental del problema planteado y depende del espacio, las condiciones de frontera y su geometría. En términos de las funciones de Green el PVF con datos arbitrarios se puede resolver de una forma explícita en la que se muestra claramente la dependencia de la solución de los datos involucrados, lo cual viene dado mediante un proceso de convolucion.

### 2.1.1 Motivación

Para motivar la introducción de las funciones de Green, primeramente consideraremos el problema de determinar la curva de deflexión de una cuerda elástica sujeta a cierta tensión producida por una carga. Esto es, consideraremos una cuerda elástica flexible que es estirada hasta una longitud  $\ell$  bajo una tensión  $T$  como se muestra en la siguiente figura

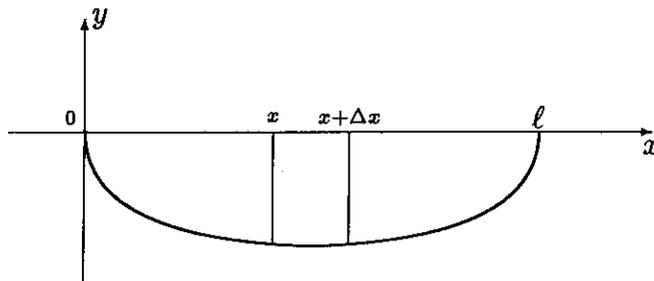


Fig.13 Cuerda estirada y deformada.

Supongamos que la cuerda soporta una carga distribuida por unidad de longitud  $\omega(x)$  de tal forma que bajo esta carga todas las deflexiones son perpendiculares a la longitud de la cuerda y para cualesquier valor de  $x$  la carga que actúa sobre esa posición en la cuerda es la misma antes y después de que la cuerda se deforma. Consideremos un elemento arbitrario de la cuerda estirada y deformada (Fig.14) por la acción de una carga distribuida para describir las fuerzas que actúan sobre el sistema

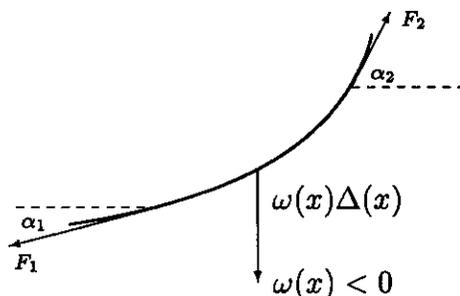


Fig.14 Fuerzas que actúan sobre la cuerda.

Cuando la cuerda deformada está en equilibrio tanto la fuerza horizontal como la fuerza neta vertical sobre cada elemento deben ser cero,

$$\begin{aligned} F_2 \cos \alpha_2 &= F_1 \cos \alpha_1, \\ F_2 \sin \alpha_2 - F_1 \sin \alpha_1 &= -\omega(x)\Delta x. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

La primera ecuación nos dice que suma de las componentes horizontales de la fuerza en la cuerda es cero, y además como las deflexiones son tan pequeñas, esta componente horizontal constante no difiere de manera apreciable de la tensión  $T$  en la cuerda. Entonces, dividiendo los términos de la primera ecuación de (2.1.2) entre las cantidades iguales  $F_1 \cos \alpha_1$ ,  $F_2 \cos \alpha_2$  y  $T$ , tenemos

$$\tan \alpha_2 = \tan \alpha_1 - \frac{\omega(x)\Delta x}{T}. \quad (2.1.3)$$

Como  $\tan \alpha_2$  es la pendiente de la curva de deflexión en el punto  $x + \Delta x$  y  $\tan \alpha_1$  es la pendiente de la curva de deflexión en el punto  $x$ , la ecuación (2.1.3) se puede escribir como

$$\frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} = \frac{-\omega(x)}{T}. \quad (2.1.4)$$

Cuando el límite  $\Delta x \rightarrow 0$ , se obtiene la ecuación diferencial que describe a la curva de deflexión de la cuerda,

$$Ty'' = -\omega(x). \quad (2.1.5)$$

Ahora, la cuestión es determinar la deflexión de la cuerda bajo la influencia de una carga concentrada de "magnitud"  $P$  en algún lugar de la cuerda. La representación matemática de una carga concentrada es un concepto ficticio, ya que físicamente no es posible; cualquier carga diferente de cero concentrada en un solo punto implicaría una presión infinita que cortaría inmediatamente a la cuerda. Sin embargo, el uso de las cargas concentradas al analizar los sistemas físicos, tal como en el caso de vigas, cuerdas y cargas eléctricas es común y natural, y el objetivo es mostrar que estas se pueden representar mediante la distribución delta de Dirac. Si en el sistema se considera una carga concentrada en algún punto sobre la cuerda, entonces la ecuación (2.1.5) es cero en todos los puntos de la cuerda excepto en el punto donde se localiza la carga. Esto es, la ecuación no homogénea (2.1.5) se reduce a la ecuación homogénea,  $y'' = 0$ , cuya solución es una función lineal, y por lo tanto, se concluye que la curva de deflexión de la cuerda bajo la influencia de una sola carga concentrada en algún punto sobre la cuerda consta de dos secciones lineales (triángulo) como se muestra en la figura siguiente,

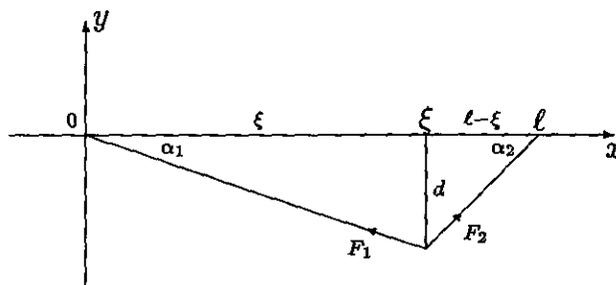


Fig.15 Carga concentrada en  $x = \xi$ .

Las condiciones sobre la cuerda están dadas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} F_1 \cos \alpha_1 &= F_2 \cos \alpha_2 = T, \\ F_1 \sin \alpha_1 &+ F_2 \sin \alpha_2 = -P. \end{aligned}$$

De aquí,  $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 = -\frac{P}{T}$  o bien  $-\frac{d}{\xi} - \frac{d}{l-\xi} = -\frac{P}{T}$ , de donde se sigue que

$$d = \frac{P(l-\xi)\xi}{Tl}. \quad (2.1.6)$$

\*Conocida la deflexión  $d$  en el punto de carga, es sencillo determinar la deflexión de la cuerda en cualquier punto, utilizando triángulos semejantes,

$$y(x) = \begin{cases} \frac{P(\ell - \xi)x}{T\ell} & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{P(\ell - x)\xi}{T\ell} & \xi \leq x \leq \ell. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Por lo tanto, podemos decir que la deflexión de una cuerda en un punto  $x$ , debida a una carga concentrada de magnitud  $P$  aplicada en un punto  $x = \xi$ , es igual a la deflexión producida en el punto  $\xi$  por una carga igual aplicada en el punto  $x$ . Cuando se tiene una carga unitaria,  $P = 1$ , es común usar la notación  $G(x, \xi)$  para  $y(x)$  para indicar que la deflexión depende tanto del punto  $\xi$  donde está aplicada la carga, como del punto  $x$  donde se observa la deflexión. En este ejemplo, directamente se observa que  $G(x, \xi)$  es simétrica en las dos variables  $x$  y  $\xi$ . Es decir,  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ . Comúnmente  $G(x, \xi)$  se conoce como *función de influencia*, ya que describe la influencia que una carga concentrada en el punto  $\xi$  tiene en cualquier punto de la cuerda  $x$ . La simetría de  $G(x, \xi)$  es un ejemplo del Principio de Reciprocidad de Maxwell-Rayleigh, el cual está presente en muchos sistemas mecánicos y eléctricos.

Es fácil checar que por medio de la función de influencia,  $G(x, \xi)$ , puede hallarse una expresión para la deflexión de una cuerda bajo una carga con distribución más general sin utilizar algún método convencional de ecuaciones diferenciales. Una forma sencilla de hacerlo es la siguiente. Se divide el intervalo  $[0, \ell]$  en  $n$  subintervalos, por medio de los puntos  $\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = \ell$ , con  $\Delta\xi_i = \xi_i - \xi_{i-1}$  la longitud del subintervalo  $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ . Además, sea  $s_i$  un punto arbitrario en el  $i$ -ésimo subintervalo y supongamos que la porción de carga distribuida que actúa sobre este subintervalo,  $\omega(s_i)\Delta\xi_i$ , es concentrada en el punto  $\xi = s_i$ . Así, la deflexión producida en un punto  $x$  por esta carga es la magnitud de la carga multiplicada por la deflexión producida en  $x$  por una carga unitaria en el punto  $\xi = s_i$ . Esto es,

$$[\omega(s_i)\Delta\xi_i] G(x, s_i) \quad (2.1.8)$$

Si sumamos las deflexiones infinitesimales producidas en el punto  $x$  por las cargas infinitesimales concentradas (equivalentes a la carga real distribuida), obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \omega(s_i) G(x, s_i) \Delta\xi_i. \quad (2.1.9)$$

Tomando el límite cuando  $\Delta\xi_i \rightarrow 0$ , la suma de Riemann (2.1.9) se convierte en la integral,

$$y(x) = \int_0^{\ell} \omega(\xi)G(\xi, x) d\xi \quad (2.1.10)$$

la cual representa a la deflexión de la cuerda en un punto arbitrario  $x$ . La función de influencia,  $G(x, \xi)$ , tiene la expresión

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_{<}(x, \xi) = \frac{(\ell - \xi)x}{T\ell} & 0 \leq x \leq \xi \\ G_{>}(x, \xi) = \frac{(\ell - x)\xi}{T\ell} & \xi \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Una de las principales propiedades es que  $G(x, \xi)$  debe satisfacer las condiciones en la frontera del problema; en este caso de la cuerda, las condiciones son de deflexión cero en  $x = 0, \ell$ . Claramente, de (2.1.11), tenemos que  $G(0, \xi) = G(\ell, \xi) = 0$  para todos los valores de  $\xi$  en  $[0, \ell]$ . Además, cabe mencionar que  $G(x, \xi)$  es una función continua de  $x$  sobre todo el intervalo  $[0, \ell]$ ; el único punto de conflicto es cuando  $x = \xi$ , pero tomando los límites por la izquierda y derecha de  $G(x, \xi)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} G(x, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{(\ell - \xi)x}{T\ell} = \frac{(\ell - \xi)\xi}{T\ell}, \quad (2.1.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} G(x, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{(\ell - x)\xi}{T\ell} = \frac{(\ell - \xi)\xi}{T\ell}$$

tenemos evidentemente que dichos límites son iguales entre si e iguales a  $G(\xi, \xi)$ , lo cual muestra que incluso en el punto problemático  $x = \xi$  la función  $G$  es continua.

Por otro lado, la derivada respecto a  $x$  de  $G(x, \xi)$  es discontinua en el punto  $x = \xi$ , donde se tiene un salto; en este caso de magnitud  $-1/T$  (hacia abajo). Para verificar esto debemos checar que  $G(x, \xi)$  es diferenciable en todos los puntos del intervalo  $[0, \ell]$ , excepto en  $x = \xi$ , donde se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{dG(x, \xi)}{dx} = \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{(\ell - \xi)}{T\ell} = \frac{(\ell - \xi)}{T\ell}, \quad (2.1.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{dG(x, \xi)}{dx} = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{-\xi}{T\ell} = \frac{-\xi}{T\ell}.$$

Estos valores de los límites laterales no son iguales; su diferencia es

$$\frac{-\xi}{T\ell} - \frac{(\ell - \xi)}{T\ell} = -\frac{1}{T} \quad (2.1.14)$$

Por lo tanto,  $G(x, \xi)$  consta de dos expresiones lineales (el triángulo de la Fig.15) continuas que satisfacen la ecuación diferencial homogénea  $Ty'' = 0$  en todos los puntos del intervalo  $[0, \ell]$ , excepto en  $x = \xi$ . En el punto  $x = \xi$ , la segunda derivada no existe en el sentido ordinario, pero si en el sentido distribucional, la cual de acuerdo a los resultados del Capítulo 1, es

$$\frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} = -\delta(x - \xi). \quad (2.1.15)$$

Las propiedades en las que hemos hecho énfasis no son accidentales de la función de influencia específica obtenida, sino todo lo contrario; las funciones de influencia, que de ahora en adelante llamaremos *funciones de Green*, son un tipo especial de funciones asociadas con las ecuaciones diferenciales que precisamente satisfacen todas y cada una de las propiedades descritas.

### 2.1.2 Solución Fundamental

Consideraremos ecuaciones diferenciales sobre todo el espacio completo  $\mathbb{R}^n$  y un método poderoso para resolverlas basado en el concepto *solución fundamental*.

Sea  $L$  un operador diferencial lineal arbitrario de orden  $r$ , (ecuación (1.3.2)), y sea

$$Lu = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.1.16)$$

una ecuación diferencial no homogénea en el sentido distribucional;  $u$  y  $f$  son funciones generalizadas.

**Definición 2.1** Una distribución  $u$  es solución de (2.1.16) sobre  $\Omega$  si

$$T_u[L^* \phi] = T_f[\phi] \quad \text{para cada } \phi \in \mathcal{D}, \quad (2.1.17)$$

donde  $L^*$  es el operador adjunto de  $L$ , fórmulas (1.3.18) y (1.3.19). Cuando  $f$  es continua,  $u$  es una *solución clásica* de (2.1.16) si  $u \in C^r(\Omega)$ . Mientras que si  $f$  es localmente integrable (o una distribución más general), entonces  $u$  se dice ser *solución débil o generalizada* de (2.1.16) en  $\Omega$ .

**Definición 2.2** Una *solución fundamental* para un operador diferencial  $L$  con polo o singularidad en  $\xi$  es una solución de la ecuación no homogénea

$$Lu = \delta(x - \xi), \quad (2.1.18)$$

donde  $\xi$  es considerado como un vector de parámetros.

**Observaciones:**

1. La ecuación (2.1.18) tiene que ser forzosamente considerada en el sentido distribucional. La solución de (2.1.18) se denota por  $G(x, \xi)$  y se refiere como *la función de Green* asociada con la ecuación diferencial producida por el operador  $L$ . Frecuentemente (pero no necesariamente siempre)  $G$  corresponde a una función localmente integrable de  $x$ . En cada caso, de acuerdo a (2.1.17),  $G$  satisface (2.1.18) si y solo si

$$T_G[L^* \phi] = \delta[\phi] \quad \text{para cada } \phi \in \mathcal{D}. \quad (2.1.19)$$

2. La ecuación (2.1.18) usualmente tendrá muchas soluciones, difiriendo una de otra por una solución de la ecuación homogénea y del tipo de condiciones dadas. Para problemas en los cuales  $\mathbb{R}^n$  sea considerado como un espacio isotrópico, frecuentemente se selecciona una solución particular sobre la base de la simetría y comportamiento en el infinito. Por su parte, si una de las variables es el tiempo, se tiene que utilizar el principio de causalidad como criterio apropiado respecto a tal coordenada.
3. Si  $L$  es de coeficientes constantes, es suficiente determinar la solución fundamental con polo en el origen,  $G(x, 0) = G(x)$ , y trasladar para obtener la solución fundamental con singularidad en  $\xi$ ,  $G(x, \xi) = G(x - \xi)$ .

Son dos las partes principales para determinar una solución fundamental. Primero debemos construir, frecuentemente por medios intuitivos (no existe nada global y formal, depende de la dimensión, del problema y sus condiciones) un candidato y segundo, verificar que se satisface (2.1.19). La primera parte a su vez puede dividirse en dos pasos: resolver la ecuación homogénea para  $x \neq \xi$ , tomando en cuenta las consideraciones físicas y entonces analizar en una vecindad alrededor de la singularidad en  $x = \xi$ , usando la forma integral de (2.1.18).

### 2.1.3 Construcción y Propiedades

Como el problema de determinar una función de Green depende del caso considerado, vamos a describir los pasos de la construcción de una función de Green para la ecuación diferencial de segundo orden

$$Ly = \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right] y(x) = -f(x), \quad (2.1.20)$$

sujeta a las condiciones homogéneas

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

ya que a final de cuentas ésta es una de las ecuaciones más importantes en las aplicaciones y de hecho muchas ecuaciones más generales (orden superior) se reducen a ella.

**Definición 2.3** Una función  $G(x, \xi)$  que cumple con las propiedades:

- i)  $G(x, \xi)$  satisface la ecuación diferencial homogénea (2.1.20) en  $a \leq x \leq \xi$ ,  $\xi \leq x \leq b$ .
- ii)  $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$ .
- iii)  $G(x, \xi)$  es una función continua de  $x$  en todo el intervalo  $a \leq x \leq b$ .
- iv)  $\frac{dG(x, \xi)}{dx}$  es continua en  $a \leq x < \xi$ ,  $\xi < x \leq b$ , pero tiene una discontinuidad de salto de magnitud  $-\frac{1}{p(\xi)}$  en  $x = \xi$ . Esto es,  $\frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\xi^+} = -\frac{1}{p(\xi)}$

se llama *función de Green* del problema definido por la ecuación diferencial (2.1.20) y las condiciones de frontera (2.1.21). Además, la función de Green tiene la propiedad de simetría,  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$  (Principio de Reciprocidad de Maxwell).

**Observación:** Por definición,  $G(x, \xi)$  es la solución de la ecuación  $Ly = -f_\epsilon(x)$ , donde  $f_\epsilon(x)$  es cero fuera del intervalo  $|x - \xi| < \epsilon$  y en dicho intervalo satisface

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f_\epsilon(x) dx = 1$$

por lo que  $f_\epsilon(x) = \delta(x - \xi)$ . Entonces, para  $x \neq \xi$ ,  $G(x, \xi)$  satisface la ecuación homogénea  $Ly = 0$  y cuando  $x = \xi$ , se tiene que

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right) dx + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} q(x)G(x, \xi) dx = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} -f_\epsilon(x) dx.$$

Esto es,

$$p(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+} + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} q(x)G(x, \xi) dx = -1$$

Si asumimos que  $G(x, \xi)$  es continua y diferenciable en  $x = \xi$ , entonces en el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , tenemos que

$$\frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+} = \frac{-1}{p(\xi)}$$

lo cual confirma que la derivada de  $G(x, \xi)$  tiene una discontinuidad de salto en  $x = \xi$ .

La solución de la ecuación no homogénea (2.1.20) está dada en términos de la función de Green sobre el intervalo  $[a, b]$  mediante el proceso de convolución.

**Teorema 2.1.1** *La solución  $y(x)$  del problema con valores en la frontera, ecuación (2.1.20), y condiciones (2.1.21) está dada por la integral*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.1.22)$$

**Nota:** Como  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$  al momento de integrar se debe intercambiar el papel de la variable y el parámetro en la función de Green  $G(x, \xi)$ .

**Dem.** Para probar el teorema, utilizaremos la Fórmula de Euler-Leibnitz de diferenciación respecto a un parámetro, ecuación (3.3.6), escribiendo (2.1.22) en la forma

$$y(x) = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.1.23)$$

obteniendo

$$y'(x) = \int_a^x \frac{dG(x, \xi)}{dx} f(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{dG(x, \xi)}{dx} f(\xi) d\xi + [G(x, x^-) f(x) - G(x, x^+) f(x)]. \quad (2.1.24)$$

Como  $G(x, \xi)$  es continua en  $x = \xi$ , se tiene que  $G(x, x^+) = G(x, x^-)$  por lo que

$$y'(x) = \int_a^b \frac{dG(x, \xi)}{dx} f(\xi) d\xi \quad (2.1.25)$$

**Nota:** Es claro que  $G(x, \xi)$  satisface las condiciones de frontera (2.1.21):

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= \int_a^b \left[ a_1 G(0, \xi) + a_2 \frac{dG(0, y)}{dx} \right] f(\xi) d\xi = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= \int_a^b \left[ a_1 G(b, \xi) + a_2 \frac{dG(b, y)}{dx} \right] f(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Ahora diferenciando  $y'(x)$ , ecuación (2.1.25), se tiene que

$$y''(x) = \int_a^b \frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} f(\xi) d\xi + \left[ \frac{dG(x, x^-)}{dx} f(x) - \frac{dG(x, x^+)}{dx} f(x) \right]. \quad (2.1.26)$$

Pero, como  $\frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+} = \frac{-1}{p(\xi)}$  es equivalente a  $\frac{dG(\xi, x)}{dx} \Big|_{\xi=x^-}^{\xi=x^+} = \frac{-1}{p(x)}$ , entonces (2.1.26) se reduce a

$$y''(x) = \int_a^b \frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} f(\xi) d\xi - \frac{f(x)}{p(x)} \quad (2.1.27)$$

Tomando el operador  $L$  de (2.1.20) en la forma  $Ly = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x)$  y sustituyendo (2.1.25) y (2.1.27), tenemos

$$L(y) = -f(x) + \int_a^b \left[ p(x) \frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} + p'(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} + q(x)G(x, \xi) \right] f(\xi) d\xi$$

que podemos reescribir como

$$L(y) = -f(x) + \int_a^b L(G(x, \xi)) f(\xi) d\xi.$$

Pero por definicion se tiene que  $L(G(x, \xi)) = 0$  para  $x \neq \xi$ , obteniendo entonces

$$L(y) = -f(x). \quad (2.1.28)$$

La expresión de la función de Green para dos intervalos separados por  $x = \xi$  se escribe como

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_{<}(x, \xi) & a \leq x \leq \xi, \\ G_{>}(x, \xi) & \xi \leq x \leq b. \end{cases} \quad (2.1.29)$$

La condición de continuidad es expresada como  $G_{<}(\xi^-, \xi) = G_{>}(\xi^+, \xi)$  y la condición de salto  $\frac{dG_{>}(\xi^+, \xi)}{dx} - \frac{dG_{<}(\xi^-, \xi)}{dx} = -\frac{1}{p(\xi)}$ .

**Ejemplo 14:** Consideremos el problema

$$y'' = -x$$

con condiciones de extremo  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

Para un valor fijo de  $\xi$  la función de Green debe satisfacer la ecuación homogénea  $G''(x, \xi) = 0$ . Además, debe cumplir con la condición de continuidad y de salto en  $x = \xi$ . Tal función de Green (caso particular del problema de la cuerda, ecuación (2.1.5)) está dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi) & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi(1 - x) & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Así, como  $f(x) = x$  en (2.1.20), entonces el Teorema 2.1.1 mediante la ecuación (2.1.23) implica que la solución está dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x \xi(1 - x)\xi d\xi + \int_x^1 x(1 - \xi)\xi d\xi = \frac{x(1 - x^2)}{6}. \end{aligned}$$

□

Una forma usual de construcción de una función de Green para la ecuación de segundo orden (2.1.20), es mediante la utilización del Wronskiano del sistema (Técnicas de Álgebra Lineal), con una ligera modificación. Consideremos la ecuación homogénea asociada al problema (2.1.20) y condiciones de frontera (2.1.21). Supongamos que  $y_1(x)$  es solución de tal ecuación homogénea, la cual satisface  $a_1y_1(a) + a_2y_1'(a) = 0$  y similarmente  $y_2(x)$  satisfaciendo la condición  $b_1y_2(b) + b_2y_2'(b) = 0$ , ambas válidas en el intervalo  $[a, b]$  y  $y_1, y_2$  linealmente independientes, de tal forma que la solución general de la ecuación homogénea es  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ . Así, la función de Green buscada se puede escribir como

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi)y_1(x) & \text{para } x < \xi, \\ C_2(\xi)y_2(x) & \text{para } \xi < x. \end{cases} \quad (2.1.30)$$

De la condición de continuidad en  $x = \xi$  se tiene la siguiente relación

$$C_2(\xi)y_2(\xi) - C_1(\xi)y_1(\xi) = 0 \quad (2.1.31)$$

y de la condición de discontinuidad de la derivada en  $x = \xi$  se tiene que

$$C_2(\xi)y_2'(\xi) - C_1(\xi)y_1'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \quad (2.1.32)$$

Las dos ecuaciones lineales en las incógnitas  $C_1(\xi)$  y  $C_2(\xi)$  tienen por solución

$$\begin{aligned} C_1(\xi) &= -\frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2; \xi)} \\ C_2(\xi) &= -\frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2; \xi)} \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

donde  $W(y_1, y_2; \xi)$  es el Wronskiano (determinante del sistema) dado por

$$W(y_1, y_2, \xi) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \quad (2.1.34)$$

**Nota:** Las soluciones  $y_1$  y  $y_2$  son linealmente independiente si el Wronskiano es diferente de cero.

Por lo tanto, la función de Green tiene la expresión

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2; \xi)} & \text{para } x \leq \xi, \\ -\frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(y_1, y_2; \xi)} & \text{para } x \geq \xi. \end{cases} \quad (2.1.35)$$

**Ejemplo 15:** Consideremos el siguiente PVF

$$\begin{aligned} y'' + y &= -1 \\ y(0) &= 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sin x & \text{para } 0 \leq x \leq \xi, \\ y_2(x) &= \cos x & \text{para } \xi \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Como  $W(y_1, y_2; \xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi) = -1$ , entonces

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sin x \cos \xi & \text{para } x \leq \xi, \\ \sin \xi \cos x & \text{para } x \geq \xi. \end{cases}$$

De la misma manera que antes se puede ver que  $G(x, \xi)$  es simétrica en  $x = \xi$ . Esto es,  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ . La solución del PVF está dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x G(x, \xi)f(\xi) d\xi + \int_x^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi)f(\xi) d\xi \\ &= -1 + \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

□

En el próximo capítulo se darán otros ejemplos de la solución fundamental para ecuaciones ordinarias ya que por ahora es más importante y quizá hasta más interesante considerar el caso de dimensiones mayores.

## 2.2 Funciones de Green en Dimensiones Mayores

Resolver un problema con condiciones en la frontera significa determinar una función que satisfaga una ecuación diferencial dada y condiciones de frontera específicas. El problema es independiente del tiempo, es decir solo involucra las coordenadas espaciales. Los problemas con condiciones iniciales (hay dependencia del tiempo) se describen con ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, mientras que los problemas con condiciones en la frontera están asociados con ecuaciones diferenciales parciales de tipo elípticas. La diferencia o el contraste entre los problemas con condiciones iniciales y los problemas con condiciones en la frontera es que estos últimos son mucho más difíciles de resolver. Así, para estudiar funciones de Green en dimensiones mayores a uno es necesario diferenciar entre unos y otros e introducir conceptos que nos ayuden en su solución.

Existen varias formas de resolver problemas con condiciones en la frontera, dependiendo del tipo de condiciones que se tengan. Cuatro son los problemas fundamentales los cuales a continuación se enumeran.

**\* Primer Problema con Valores en la Frontera (Problema de Dirichlet):** Consiste en determinar una función  $u$ , que además de satisfacer la ecuación diferencial considerada, en una región  $\Omega$ , satisface

$$u = g_1(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (2.2.1)$$

donde  $g_1(\mathbf{x})$  es una función continua sobre la frontera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ , el interior de una superficie suave por piezas. Geométricamente, podemos dar una interpretación simple a la solución  $u$  del problema de Dirichlet, como un estado estacionario con valores fijos en la frontera.

**\* Segundo Problema con Valores en la Frontera (Problema de Neumann):** Consiste en determinar una función  $u$  definida en  $\Omega$ , tal que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \text{con} \quad \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) dS = 0, \quad (2.2.2)$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial n}$  denota la derivada direccional a lo largo de la normal de la frontera  $\partial\Omega$ . La condición  $\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) dS = 0$  es conocida como condición de compatibilidad. Física y geométricamente, la condición de compatibilidad se interpreta como el flujo neto que cruza por la frontera (no hay fuentes ni sumideros).

\* **Tercer Problema con valores en la Frontera (Condiciones Mixtas):** Consiste en determinar una función  $u$  en  $\Omega$  que satisfice:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + q(\mathbf{x})u = g(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2.2.3)$$

donde  $g$  y  $q$  son funciones continuas. La interpretación física de esta condición es de radiación a través de la frontera.

\* **Cuarto Problema con Valores en la Frontera (Problema de Robin):** Consiste en determinar una función  $u$  que satisfaga condiciones en la frontera de diferente tipo sobre diferentes porciones de la frontera de  $\Omega$ , por ejemplo

$$u = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \quad \text{y} \quad u = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \partial\Omega_2, \quad (2.2.4)$$

donde  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ .

El problema que con mayor frecuencia se aborda en la aplicación es el de Dirichlet. Sin embargo, no todos los problemas de Dirichlet tienen solución; la existencia de una solución depende de la geometría de la región considerada.

**Definición 2.4** Una función  $u$  se dice ser una *función armónica* en un dominio  $\Omega$  si satisface la ecuación de Laplace  $\Delta u = 0$ , con sus dos primeras derivadas continuas en  $\Omega$ .

Esta es una de las principales ecuaciones en las aplicaciones, junto con la ecuación no homogénea relacionada,  $\Delta u = f(\mathbf{x})$ , llamada ecuación de Poisson.

### 2.2.1 Funciones de Green en dos Dimensiones.

Es momento ya de construir funciones de Green para problemas modelados por ecuaciones diferenciales parciales, considerando primeramente el caso 2-dimensional, enfocandonos en específico al problema de Dirichlet,

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x, y) & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= g(x, y) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

\* La solución en este caso está dada por

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \oint_{\partial\Omega} g \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} ds, \quad (2.2.6)$$

donde  $G$  es la función de Green asociada y  $\mathbf{n}$  el vector normal a la frontera  $\partial\Omega$  de la región  $\Omega$ . Como la solución  $u(x, y)$  se determina una vez que la función de Green es conocida, el primer paso se concreta a encontrar dicha función. La función de Green para el problema de Dirichlet satisface

i)  $\Delta G = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$  en  $\Omega$ .

ii)  $G = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

En el caso cuando se considera el operador de Laplace (2.2.5) la función de Green además satisface

iii)  $G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y)$ .

iv)  $G$  es continua en sus argumentos, pero  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$  tiene discontinuidad en el punto  $(\xi, \eta)$ , lo cual se especifica por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}'} ds = 1,$$

donde  $\mathbf{n}'$  es la normal unitaria al círculo  $C_\epsilon : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \epsilon^2$ .

La función de Green en este caso se interpreta como la respuesta del sistema en el conjunto de puntos  $(x, y)$  debido a la función  $\delta$ , fuente en el punto  $(\xi, \eta)$ .  $G$  es continua en  $\Omega$  casi dondequiera, y su primera y segunda derivada son continuas en  $\Omega$  excepto en  $(\xi, \eta)$ . Las últimas dos propiedades para la función de Green se establecen en base a los dos resultados siguientes, los cuales también son válidos en dimensiones mayores.

**Teorema 2.2.1 (Principio de Reciprocidad de Maxwell-Rayleigh)** La función de Green asociada al operador de Laplace (2.2.5) es simétrica,

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (2.2.7)$$

**Dem.** Partiendo de la fórmula de Green, identidad conocida del Cálculo Vectorial,

$$\iint_{\Omega} (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dS = \oint_{\partial \Omega} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) ds,$$

considerando que  $\phi = G(x, y, \xi, \eta)$  y  $\psi = G(x, y, \xi', \eta')$ , donde  $(\xi', \eta')$  es arbitrario, tenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (G(x, y, \xi, \eta) \Delta G(x, y, \xi', \eta') - G(x, y, \xi', \eta') \Delta G(x, y, \xi, \eta)) dS \\ &= \oint_{\partial \Omega} \left( G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial G(x, y, \xi', \eta')}{\partial \mathbf{n}} - G(x, y, \xi', \eta') \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} \right) ds. \end{aligned}$$

Pero, como  $G(x, y, \xi, \eta)$  y  $G(x, y, \xi', \eta')$  se anula en la frontera  $\partial \Omega$ , entonces

$$\iint_{\Omega} (G(x, y, \xi, \eta) \Delta G(x, y, \xi', \eta') - G(x, y, \xi', \eta') \Delta G(x, y, \xi, \eta)) dS = 0$$

como  $\Delta G(x, y, \xi, \eta) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta)$  y  $\Delta G(x, y, \xi', \eta') = \delta(x - \xi') \delta(y - \eta')$ , entonces

$$\iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \delta(x - \xi') \delta(y - \eta') dS = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi', \eta') \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) dS,$$

de donde tenemos que  $G(\xi', \eta', \xi, \eta) = G(\xi, \eta, \xi', \eta')$ , y por lo tanto  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \equiv G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ . ■

**Teorema 2.2.2**  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$  es discontinua en el punto  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ , si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_{\epsilon}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}'} ds = 1, \quad (2.2.8)$$

donde  $\mathbf{n}'$  es la normal del círculo  $C_{\epsilon} : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \epsilon^2$ .

**Dem.** Sea  $R_{\epsilon}$  la región acotada por  $C_{\epsilon}$ . Integrando  $\Delta G(x, y, \xi, \eta) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta)$  sobre el disco  $R_{\epsilon}$ , tenemos

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Delta G(x, y, \xi, \eta) dS = \iint_{R_{\epsilon}} \Delta G(x, y, \xi, \eta) dS = \iint_{R_{\epsilon}} \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) dS = 1.$$

Si tomamos el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{R_\epsilon} \Delta G(x, y, \xi, \eta) dS = 1.$$

Aplicando la fórmula de Green con  $\phi = 1$  y  $\psi = G(x, y, \xi, \eta)$ , obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{R_\epsilon} \Delta G(x, y, \xi, \eta) dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}'} ds,$$

de donde  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}'} ds = 1$ . Lo cual implica que  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$  es discontinua por el teorema fundamental de integrales de línea. ■

### 2.2.2 Método de la Función de Green

Al buscar la función de Green de un problema determinado, es conveniente hacerlo considerando la suma de una integral particular de la ecuación no homogénea y de la solución de la ecuación homogénea asociada. Esto es,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + G_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (2.2.9)$$

donde  $G_1$  satisface  $\Delta G_1 = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$  en  $\Omega$ . Mientras que  $G_2$  satisface  $\Delta G_2 = 0$  en  $\Omega$ . Es claro que  $G$  satisface  $\Delta G = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ . Para que  $G = 0$  sobre  $\partial\Omega$  se requiere que  $G_2 = -G_1$  sobre  $\partial\Omega$  y  $G_1$  no necesariamente tiene que satisfacer condiciones en la frontera.

Con estas propiedades satisfechas, podemos determinar la solución del problema de Dirichlet (2.2.5) mediante el método de la función de Green.

Tomando  $\phi(\xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y)$  y  $\psi(\xi, \eta) = u(\xi, \eta)$  en la fórmula de Green, tenemos

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (G(\xi, \eta, x, y) \Delta_\xi u(\xi, \eta) - u(\xi, \eta) \Delta_\xi G(\xi, \eta, x, y)) dA_\xi \\ &= \oint_{\partial\Omega} \left( G(\xi, \eta, x, y) \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} - u(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta, x, y)}{\partial \mathbf{n}} \right) ds. \end{aligned}$$

Como  $\Delta_\xi u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$  y  $\Delta_\xi G(\xi, \eta, x, y) = \delta(\xi - x)\delta(\eta - y)$ , entonces

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (G(\xi, \eta, x, y)f(\xi, \eta) - u(\xi, \eta)\delta(\xi - x)\delta(\eta - y)) \, d\xi d\eta \\ &= \oint_{\partial\Omega} \left( G(\xi, \eta, x, y) \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} - u(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta, x, y)}{\partial \mathbf{n}} \right) \, ds \end{aligned}$$

Además, de las condiciones de frontera, se tiene que  $G = 0$  y  $u = g$  sobre  $\partial\Omega$ . Esto y la simetría implican

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} G(\xi, \eta, x, y)f(\xi, \eta) \, d\xi d\eta + \oint_{\partial\Omega} g(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta, x, y)}{\partial \mathbf{n}} \, ds. \quad (2.2.10)$$

### 2.2.3 Funciones de Green en tres Dimensiones.

El método de las funciones de Green inmediatamente se extiende al caso de tres y hasta más dimensiones. Consideraremos solo el caso 3-dimensional ya que este es el más frecuente en las aplicaciones reales.

Al igual que en dos dimensiones, consideraremos el problema de Dirichlet. La función de Green para la ecuación de Poisson es la función que satisface

- i)  $\Delta G = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta)$  en  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .
- ii)  $G = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .
- iii)  $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)$ .
- iv)  $G$  es continua todos sus argumentos, pero  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$  tiene discontinuidad en el punto  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ , lo cual se especifica por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}'} \, dS = 1 \quad (2.2.11)$$

donde  $\mathbf{n}'$  es la normal unitaria a la esfera  $S_\epsilon : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = \epsilon^2$ .

Procediendo como en el caso de dos dimensiones, la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(\mathbf{x}) && \text{en } \Omega \\ u &= g(\mathbf{x}) && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

está dada por

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \iiint_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ &+ \oint_{\partial\Omega} g(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)}{\partial \mathbf{n}} dS, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

donde  $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G_1(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) + G_2(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ , con  $G_1$  satisfaciendo  $\Delta G_1 = \delta(\xi - x)\delta(\eta - y)\delta(\zeta - z)$  y  $G_2$  satisfaciendo  $\Delta G_2 = 0$  en  $\Omega$ .

## Comentario 2

A pesar de la importancia y la enorme potencia con la que nos equipa la utilización de las funciones de Green en la determinación de la solución de ecuaciones diferenciales, es lamentable que en ningún curso de la carrera de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora ni siquiera se mencione. Quiero o creo entender que esto principalmente se debe al hecho que quizá hace algún tiempo, cuando la tecnología no estaba tan desarrollada como lo está actualmente, estudiar esta técnica no era muy atractivo que digamos debido a que nos deja "a medio camino" al tener expresiones para las soluciones en forma integral, muchas de las cuales difíciles de evaluar (por lo menos manualmente) o tal vez se deba a la falta de interés o apatía tanto de estudiantes como de profesores por estudiar conceptos relacionados con la Física. Sin embargo, el enfoque de las funciones de Green es interesante por si mismo, por las matemáticas involucradas y por supuesto por el aspecto físico. Ahora en nuestros tiempos, el método de las funciones de Green ya no nos deja tan a medias, puesto que existen paquetes de cálculo simbólico como por ejemplo **Maple** o **Mathematica** los cuales representan una poderosa herramienta numérica, auxiliar a técnicas analíticas, y tal es el caso del enfoque de las funciones de Green. Este trabajo lo elaboré pensando precisamente en eso y espero sirva de punto de partida para un análisis mucho más profundo de estas técnicas, incorporándolas en alguno de los cursos de ecuaciones diferenciales.



## Capítulo 3

# Aplicaciones

En este capítulo se presentan algunas aplicaciones de la teoría de las funciones generalizadas con el fin de mostrar la potencia y la elegancia de sus métodos, los cuales, en ocasiones son más simples y directos que otros enfoques. De hecho para ciertos problemas no hay método alternativo para determinar la solución respectiva, como por ejemplo algunos que involucran ecuaciones diferenciales parciales. Esto sucede con frecuencia en aerodinámica, mecánica de fluidos, electrodinámica y acústica. Muchas situaciones físicas (problemas reales) se modelan con ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas cuyos términos no homogéneos se identifican con fuentes (sumideros) o singularidades que conviene ser descritos mediante distribuciones. Resolver esta clase de problemas significa determinar *soluciones generalizadas*, lo cual solo es posible con la herramienta proporcionada por la teoría de distribuciones. Además, también es posible encontrar funciones generalizadas en otro contexto; desde la derivación de leyes de conservación hasta en problemas más sofisticados como los de turbulencia en dinámica de fluidos.

### 3.1 Soluciones Generalizadas de Ecuaciones Diferenciales

Uno de los orígenes de la teoría de distribuciones fue la necesidad de determinar soluciones de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales fuera del marco teórico del análisis clásico; funciones altamente discontinuas o singulares, las cuales son llamadas *soluciones débiles o generalizadas*. En esta parte del trabajo se consideran algunos de estos problemas. No se presenta por completo o con detalle todo el procedimiento en la obtención de las soluciones. Simple y sencillamente pueden considerarse como ejercicios ya que nuestro interés principal es dar una introducción de la teoría, esperando motivar un análisis más profundo de la misma.

#### 3.1.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

- a) Sabemos, de las ecuaciones diferenciales elementales [15], que la solución general de la más simple de las ecuaciones de orden  $n$ ,  $y^{(n)} = 0$ , es un polinomio de grado  $n$ ,  $P_n(x)$ , mientras que si consideramos la ecuación no homogénea, entonces la solución general es  $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ , donde  $y_H$  es la solución de la ecuación homogénea y  $y_P$  una solución particular. Para la ecuación no homogénea

$$y^{(n)} = \delta(x - a)$$

es fácil verificar que una solución particular es

$$y_P(x) = \frac{(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!} h(x - a),$$

donde  $h$  es la función de Heaviside, ya que para  $n > 1$ ,

$$y'_P(x) = \begin{cases} \frac{(x - a)^{n-2}}{(n - 2)!} & x > a, \\ = 0 & x < a, \end{cases}$$

puesto que  $y_P$  es continua para  $n > 1$ .

De la misma forma, para  $0 \leq k \leq n$ ,

$$y_P^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} & x > a, \\ 0 & x < a, \end{cases}$$

pero para  $k = n$ ,  $y_P^{(n)}(x) = \delta(x-a)$ . Estas ideas se pueden resumir de la siguiente manera:

*“La solución general de la ecuación diferencial no homogénea  $y^{(n)} = \delta(x-a)$  es una función ordinaria de  $x$  que satisface la ecuación homogénea  $y^{(n)} = 0$  en  $x < a$ ,  $x > a$ . Esta función y sus primeras  $(n-2)$  derivadas son continuas en  $x = a$ , pero la  $(n-1)$ -ava derivada tiene un salto de magnitud unitaria”. Si  $n = 1$ , la función misma tiene un salto de magnitud uno en  $x = a$ . Esto es, la función de Heaviside se considera como la antiderivada de la delta de Dirac.*

Resultados similares son válidos para la solución de la ecuación diferencial de orden  $n$ ,

$$Ly = \left[ a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x) \right] y = \delta(x-\xi),$$

si las funciones  $a_0, \dots, a_n$  son continuas en  $x = \xi$ . Fácilmente se puede verificar que para  $x < \xi$ ,  $x > \xi$ , la función  $y(x)$  es la solución de la ecuación homogénea  $Ly = 0$  y que para  $x = \xi$  la función y sus primeras  $(n-2)$  derivadas son continuas, pero su  $(n-1)$ -ava derivada tiene discontinuidad de salto en ese punto. La solución de la ecuación  $Ly = \delta(x-\xi)$  se conoce como *solución fundamental o función de Green* (Capítulo 2). La solución de la ecuación diferencial ordinaria no homogénea de orden  $n$  más general,  $Ly = -f(x)$ , está dada en términos de la función de Green. Resultaría bastante interesante contrastar el Método de Variación de Parámetros contra el enfoque de las funciones de Green.

- b) Como ilustración de la ecuación general de 2<sup>do</sup> orden del inciso a), consideremos el problema de encontrar la solución fundamental de la ecuación

$$y'' \pm \lambda^2 y = \mp \delta(x-\xi). \quad (3.1.1)$$

Resolveremos primeramente con la combinación de signos,

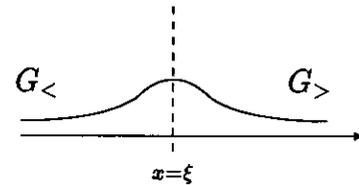
$$G'' - \lambda^2 G = -\delta(x - \xi).$$

Para  $x \neq \xi$ , tenemos que  $G$  satisface la ecuación homogénea

$$G'' - \lambda^2 G = 0.$$

Así, el problema se divide en dos partes:

$$\begin{aligned} G_>(x, \xi) &= A(\xi)e^{\lambda x} + B(\xi)e^{-\lambda x} & \text{para } x > \xi, \\ G_<(x, \xi) &= C(\xi)e^{\lambda x} + D(\xi)e^{-\lambda x} & \text{para } x < \xi. \end{aligned}$$



Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $G_>(x, \xi) = 0$  lo cual implica que  $A(\xi) = 0$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $G_<(x, \xi) = 0$  por lo que  $D(\xi) = 0$ . Así,

$$\begin{aligned} G_>(x, \xi) &= B(\xi)e^{-\lambda x} & \text{para } x > \xi, \\ G_<(x, \xi) &= C(\xi)e^{\lambda x} & \text{para } x < \xi. \end{aligned}$$

La continuidad,  $G_>(x, \xi)|_{x=\xi^+} = G_<(x, \xi)|_{x=\xi^-}$ , implica que  $B(\xi) = C(\xi)e^{2\lambda\xi}$ , mientras que la condición de salto

$$\left. \frac{dG_>}{dx} \right|_{x=\xi^+} - \left. \frac{dG_<}{dx} \right|_{x=\xi^-} = -1$$

implica que  $C(\xi) = e^{-\lambda\xi}/2\lambda$ . Por lo tanto, tenemos que

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_>(x, \xi) \\ G_<(x, \xi) \end{cases}$$

la cual finalmente se puede escribir como

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|x-\xi|}. \quad (3.1.2)$$

En caso de considerar los signos positivos (solución fundamental para el oscilador armónico),

$$G'' + \lambda^2 G = \delta(x - \xi)$$

tenemos que la función de Green es

$$G(x, \xi) = \frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{2i\lambda}. \quad (3.1.3)$$

Si se considera el problema en un dominio finito, entonces se necesita también especificar las condiciones de frontera. Por ejemplo, para condiciones de frontera cero en  $x = 0, 1$ , para la última ecuación considerada, "construyamos" una solución generalizada de la siguiente forma: para  $x \neq \xi$  la solución de la ecuación homogénea correspondiente que satisface la condición de frontera  $y(0) = 0$  es  $y = \text{sen } \lambda x$ , mientras que la solución que satisface  $y(1) = 0$  es  $y = \text{sen } \lambda(1 - x)$ . Esto es, tenemos que

$$y(x) = \begin{cases} A \text{ sen } \lambda x & x < \xi, \\ B \text{ sen } \lambda(1 - x) & x > \xi, \end{cases}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que se determinan de las condiciones que se tienen en  $x = \xi$ ; se requiere que  $y(x)$  sea continua en  $x = \xi$  y que su primer derivada tenga un salto de magnitud uno en  $x = \xi$ , lo cual implica que

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\text{sen } \lambda(1 - \xi)}{\lambda D}, \\ B &= -\frac{\text{sen } \lambda}{\lambda D}, \\ D &= \text{sen } \lambda \xi \cos \lambda(1 - \xi) + \text{sen } \lambda(1 - \xi) \cos \lambda \xi = \text{sen } \lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\text{sen } \lambda x \text{ sen } \lambda(1 - \xi)}{\lambda \text{ sen } \lambda} & x < \xi, \\ -\frac{\text{sen } \lambda(1 - x) \text{ sen } \lambda \xi}{\lambda \text{ sen } \lambda} & x > \xi, \end{cases}$$

Observemos que  $y(x, \xi) = y(\xi, x)$ , lo cual ilustra el Teorema de Reciprocidad de Maxwell (Sección 2.2).

### 3.1.2 Ecuaciones Diferenciales Parciales

a) Consideremos el problema de resolver la *ecuación de Poisson*,

$$\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad (3.1.4)$$

sobre todo el espacio infinito.

Para obtener su solución explícitamente (representación integral), primeramente determinaremos la función de Green asociada  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , la cual satisface

$$\Delta G = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \quad (3.1.5)$$

Como los resultados son diferentes dependiendo de la dimensión del espacio considerado, se presenta el resultado simultáneamente para dos y tres dimensiones y luego se generaliza.

Sea  $r$  ( $\rho$ ) la distancia radial desde  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  en dos (tres) dimensiones. Esto es,

$$\begin{aligned} r &= \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \\ (\rho &= \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}). \end{aligned}$$

Supongamos que  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  depende solo de  $r$  ( $\rho$ ):

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(r) \quad (G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(\rho)).$$

Lejos de la fuente ( $r \neq 0$  o  $\rho \neq 0$ ) tenemos  $\Delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ . En dos dimensiones, buscaremos soluciones de la ecuación de Laplace con simetría circular (en tres dimensiones con simetría esférica). Así, en coordenadas polares (esféricas), tenemos que resolver la ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dG}{dr} \right) = 0, \quad r \neq 0 \quad \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dG}{d\rho} \right) = 0, \quad \rho \neq 0 \right)$$

cuya solución general se obtiene por integración directa,

$$G(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad \left( G(\rho) = \frac{c_3}{\rho} + c_4 \right).$$

En cada caso, una de las constantes absorbe la singularidad de la fuente, la cual se obtiene integrando (3.1.5) alrededor de una pequeña circunferencia (esfera),

$$\iint \Delta G \, dA = -1 \quad \left( \iiint \Delta G \, dV = -1 \right).$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia, tenemos que

$$\iint \nabla \cdot (\nabla G) dA = \oint \nabla G \cdot \mathbf{n} ds = -1 \quad \left( \iiint \nabla \cdot (\nabla G) dV = \oint \nabla G \cdot \mathbf{n} dS = -1 \right).$$

En dos dimensiones la derivada de la función de Green en la dirección normal a una circunferencia,  $\nabla G \cdot \mathbf{n}$ , es  $\partial G / \partial r$  (en tres dimensiones  $\partial G / \partial \rho$ ), ya que solo hay dependencia radial. Como sobre la circunferencia (esfera) el radio es constante, entonces

$$2\pi r \frac{\partial G}{\partial r} = -1 \quad \left( 4\pi \rho^2 \frac{\partial G}{\partial \rho} = -1 \right).$$

En la mayoría de los problemas que involucran singularidades es necesario considerar el límite de una circunferencia (esfera) infinitamente pequeña. Así, la condición de singularidad se expresa como

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \quad \left( \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \frac{\partial G}{\partial \rho} = -\frac{1}{4\pi} \right).$$

Por consiguiente, tenemos que

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi} \quad \left( c_3 = \frac{1}{4\pi} \right).$$

Las constantes  $c_2$  y  $c_4$  son arbitrarias e indican que la función de Green para la ecuación de Poisson para el espacio no acotado es única, excepto por una constante aditiva. Por conveniencia  $c_2 = c_4 = 0$ , y por lo tanto,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad \left( G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi \rho} \right).$$

En general, la función de Green para la ecuación de Poisson está dada por

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} C \ln r, & n = 2, \\ K r^{2-n}, & n > 2, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

donde  $C = -\frac{1}{2\pi}$ ,  $K = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2(n-2)\pi^{n/2}}$  (área de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ ) y  $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ .

Para obtener la solución de la ecuación de Poisson (3.1.4) sobre todo el espacio infinito, mediante la función de Green asociada, se utiliza la fórmula de Green integrando sobre una gran circunferencia (esfera) y luego se toma el límite cuando el radio tiende a infinito, dando como resultado

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\boldsymbol{\xi})G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_{\boldsymbol{\xi}} \quad \left( u(\mathbf{x}) = \iiint f(\boldsymbol{\xi})G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dV_{\boldsymbol{\xi}} \right). \quad (3.1.7)$$

Es posible también resolver la ecuación de Poisson (3.1.4) para un dominio semi-infinito utilizando el método de las imágenes o incluso sobre un dominio acotado, pero resulta que el problema depende de la geometría y del tipo de condiciones de frontera, por lo que se tiene que considerar en particular cada problema en específico. Dedicaremos la siguiente sección para ilustrar este tipo de problemas.

b) Consideremos ahora el problema de determinar la solución de la ecuación de Helmholtz,

$$\Delta u \pm k^2 u = f(\mathbf{x}). \quad (3.1.8)$$

Con signo negativo la ecuación (3.1.8) describe procesos de difusión estacionaria con fase específica, mientras que con signo positivo es una reducción de la ecuación de onda al considerar el problema con una sola frecuencia (frecuencia monocromática). Este es un ejemplo clásico de problema radial.

Consideraremos el problema sobre todo el espacio 3-dimensional, con fuente estacionaria concentrada en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  y tomaremos por convenciencia primeramente el signo negativo. El flujo de salida a través de una pequeña esfera alrededor de la fuente es el mismo que el de entrada. Esto es,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 1. \quad (3.1.9)$$

La función  $u$  se anula lejos de la fuente y depende solo de la distancia radial desde la fuente. Así, en coordenadas esféricas  $u = u(\rho)$  satisface la ecuación

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{du}{d\rho} \right) - q^2 u = 0 \quad \rho > 0, \quad (3.1.10)$$

lo cual hace que (3.1.9) se reduzca a

$$-1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon^2 \left( \frac{du}{d\rho} \right) dS. \quad (3.1.11)$$

Haciendo la sustitución  $u = v/\rho$ , tenemos que (3.1.10) se transforma en

$$v'' - q^2 v = 0$$

cuya solución es de la forma  $v = c_1 e^{-q\rho} + c_2 e^{q\rho}$ . Debido al comportamiento cuando  $\rho \rightarrow \infty$ , tenemos que  $u = A e^{-q\rho}$ . La condición (3.1.11) implica que  $A = 1/4\pi$ . Así,  $u = e^{-q\rho}/4\pi\rho$ . Por lo tanto, la función de Green para la ecuación de Helmholtz (3.1.8) con signo negativo es

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{e^{-q\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|}. \quad (3.1.12)$$

Nótese que si  $q \rightarrow 0$ , entonces  $G \rightarrow \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|}$  lo cual concuerda con el resultado obtenido en a). Es decir, se obtiene de nuevo (3.1.6) la función de Green para la ecuación de Poisson.

Similarmente, considerando el signo positivo en (3.1.8), obtenemos

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{e^{iq\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|}. \quad (3.1.13)$$

En dos dimensiones, obtener la función de Green para la ecuación de Helmholtz es más complicado; el resultado queda en términos de funciones de Bessel. En general, la función de Green depende de la paridad de la dimensión; para dimensión impar, la función de Green es una combinación de funciones de Bessel esféricas, mientras que para dimensión par, la función de Green es una combinación de funciones de Bessel cilíndricas.

### 3.2 Método de las Imágenes

El método de las imágenes es una técnica que se utiliza para obtener una función de Green (construcción de) para un dominio finito o semi-infinito, a partir de un dominio infinito. El procedimiento es una buena alternativa cuando se requiere resolver una ecuación diferencial sobre un dominio finito sobre el que se especifican condiciones de frontera, solo que tiene la desventaja de que es aplicable únicamente cuando la frontera tiene simetría simple, por ejemplo respecto a un punto o con respecto a un eje. A continuación consideraremos algunos ejemplos.

### 3.2.1 Función de Green sobre un Semi-Plano

Consideremos el ejemplo clásico en el que se construye una función de Green en dos dimensiones para la conocida ecuación de Poisson en el semi-plano superior

$$\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad (3.2.1)$$

$x_2 > 0$ , sujeta a condiciones no homogéneas en  $x_2 = 0$ ,

$$u(x_1, 0) = g(x). \quad (3.2.2)$$

La función de Green correspondiente satisface

$$\Delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (3.2.3)$$

$$G(x_1, 0; \xi_1, \xi_2) = 0.$$

En el semi-plano  $x_2 > 0$  únicamente se tiene una fuente concentrada en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  y la función de Green para el espacio completo,  $-\frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ , no satisface la condición de frontera en  $x_2 = 0$ , pero el método de las imágenes precisamente proporciona el camino que permite que la solución satisfaga las condiciones de frontera especificadas.



Fig.16 a) Fuente real (positiva) y su imagen b)

Se considera el problema sobre la totalidad del espacio, proponiendo una fuente imagen (negativa) de la fuente  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$  en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ . Sea  $-\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*)$  la fuente imagen en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}^*$ , donde  $\boldsymbol{\xi}^* = (\xi_1, -\xi_2)$ , Fig.16b). Esto implica que la función de Green buscada satisface la ecuación

$$\Delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -[\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) - \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*)]. \quad (3.2.4)$$

Por el principio de superposición, la respuesta de tales fuentes es la suma de las dos respuestas individuales. Así, la función de Green está dada por

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*\| - \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|. \quad (3.2.5)$$

Por simetría, la respuesta en  $x_2 = 0$  debido a la fuente en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}^*$  debe ser el negativo de la respuesta debido a la fuente original en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ , de tal forma que se satisface la condición homogénea en  $x_2 = 0$ . Por lo tanto, la función de Green para el espacio semi-infinito  $x_2 > 0$  puede escribirse como

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*\|}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}. \quad (3.2.6)$$

Ahora claramente se puede ver que en  $x_2 = 0$  se tiene que  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ .

En general, la solución de la ecuación de Poisson, con condiciones de frontera no homogéneas, está dada en términos de la función de Green,

$$u(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (3.2.7)$$

En particular, para el caso cuando  $\Omega$  es el semi-plano  $x_2 > 0$ , tenemos que

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_{\boldsymbol{\xi}} - \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi_2} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{\xi_2=0} d\xi_1.$$

De (3.2.6) tenemos que

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0} = \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2},$$

Así, finalmente obtenemos la solución de la ecuación de Poisson (3.2.1), sujeta a la condición de frontera (3.2.2)

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{\xi}) \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} d\xi_1. \quad (3.2.8)$$

Partiendo de este hecho, si considera la ecuación de Laplace para el semi-plano infinito  $x_2 > 0$  con condición de frontera  $u(x_1, 0) = g(x_1)$ , la solución está dada por

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) \frac{1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} d\xi_1. \quad (3.2.9)$$

### 3.2.2 El Problema de Robin

Otro ejemplo clásico de problemas con condiciones de frontera en espacios semi-infinitos es el llamado *problema de Robin* el cual se resuelve también usando el método de las imágenes.

Consideremos la ecuación de Poisson (3.2.1) en el espacio 2-dimensional en la región  $x_1 > 0$  y  $x_2 > 0$ , sujeta a las condiciones no homogéneas

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2)|_{x_1=0} &= g_1(x_2), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_2=0} &= g_2(x_1), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

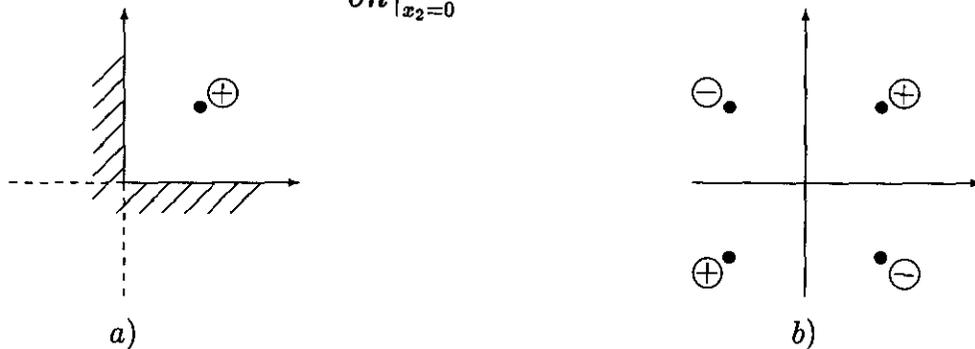


Fig.17 a) Fuente real y sus imágenes b)

La fuente se localiza en  $(x_1, x_2)$ , sus imágenes en  $(x_1, -x_2)$ ,  $(-x_1, -x_2)$ ,  $(x_1, -x_2)$ , como se ilustra en la Fig.17. Por inspección se puede construir la función de Green para este problema,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2][(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2]}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2][(x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2]} \quad (3.2.11)$$

la cual satisface condiciones homogéneas en la frontera.

Como la solución está expresada en términos de la función de Green,

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_{\boldsymbol{\xi}} + \oint \left[ G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS \quad (3.2.12)$$

entonces

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_{\boldsymbol{\xi}} + \int_0^{\infty} g_2(\xi_1) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\xi_1 - \int_0^{\infty} g_1(\xi_2) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} d\xi_2, \quad (3.2.13)$$

donde  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  está dada por (3.2.11).

### 3.2.3 Funcion de Green sobre un Círculo

La función de Green para la ecuación de Poisson sobre un círculo de radio  $a$  y con condiciones de frontera cero sobre la circunferencia se establece como

$$\begin{aligned} \Delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \\ G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= 0 \quad \text{para } \|\mathbf{x}\| = a, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

y por supuesto se determina por el método de las imágenes, ya que debido a una razón geométrica presente, existe un punto imagen  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}^*$  tal que la respuesta a lo largo de la circunferencia es constante. Cuando el punto de observación de la fuente se encuentra en el interior de la circunferencia, llamaremos a este caso *problema interior* (ver Fig.18), en cambio si el punto de observación se encuentra fuera, entonces le llamaremos *problema exterior*.

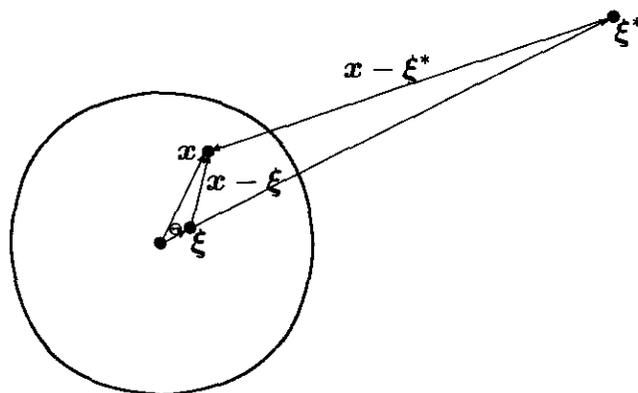


Fig.18 Fuente real e imagen para el círculo (Problema Interior).

Los problemas interior y exterior se resuelven de manera similar, la única diferencia es al momento de evaluar las condiciones de frontera ya que el vector normal cambia en cada caso su orientación. Determinaremos una expresión para el caso interior e inmediatamente a partir de ésta determinaremos la expresión para el caso exterior.

Consideremos la función de Green sobre todo el espacio correspondiente a una fuente en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  y una fuente imagen en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}^*$ ,

$$\Delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) - \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*) \quad (3.2.15)$$

la cual, por el principio de superposición, es la suma de las fuentes individuales,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| - \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*\| + c = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*\|} + c, \quad (3.2.16)$$

donde  $c$  es una constante de homogeneidad que se determina a partir de la existencia del punto imagen  $\xi^*$  y del hecho que  $G(\mathbf{x}, \xi) = 0$  sobre la circunferencia  $\|\mathbf{x}\| = a$ . Para que esto ocurra se necesita que

$$\|\mathbf{x} - \xi\|^2 = k\|\mathbf{x} - \xi^*\|^2, \quad (3.2.17)$$

lo cual implica que  $c = -\frac{1}{4\pi} \ln k$ . El punto imagen  $\xi^*$  está a lo largo de la misma línea radial que el punto fuente  $\xi$ ,

$$\xi^* = \gamma\xi. \quad (3.2.18)$$

El ángulo  $\Theta$  entre  $\mathbf{x}$  y  $\xi$  (el mismo entre  $\mathbf{x}$  y  $\xi^*$ ) satisface la Ley de los Cosenos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \xi\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\xi\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \|\xi\| \cos \Theta \\ \|\mathbf{x} - \xi^*\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\xi^*\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \|\xi^*\| \cos \Theta \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

La relación (3.2.17) es válida sobre la circunferencia  $\|\mathbf{x}\| = a$ , usando (3.2.18), si

$$a^2 + r_\xi^2 - 2ar_\xi \cos \Theta = k(a^2 + \gamma^2 r_\xi^2 - 2a\gamma r_\xi \cos \Theta),$$

donde  $r_\xi = \|\xi\|$ , para todos los ángulos  $\Theta$ . Esto lleva a dos ecuaciones para  $\gamma$  y  $k$

$$\begin{aligned} a^2 + r_\xi^2 &= k(a^2 + \gamma^2 r_\xi^2), \\ -2ar_\xi &= k(-2a\gamma r_\xi), \end{aligned}$$

las cuales tienen por solución  $k = 1/\gamma$  y  $\gamma = \frac{a^2}{r_\xi^2}$ . Así, el punto imagen se localiza en

$$\xi^* = \frac{a^2}{r_\xi^2} \xi.$$

Nótese que  $\|\xi^*\| = \frac{a^2}{r_\xi}$ . Es decir, el producto de los radios de la fuente y su imagen es el radio al cuadrado de la circunferencia. Por consiguiente, entre más cerca esté la fuente del centro de la circunferencia, más lejos deberá estar el punto imagen.

Por lo tanto, la función de Green buscada está dada por

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{\|\mathbf{x} - \xi\|^2 a^2}{\|\mathbf{x} - \xi^*\|^2 r_\xi^2} \right) \quad (3.2.20)$$

la cual, usando la Ley de los Cosenos, se puede expresar como

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{a^2 \frac{r^2 + r_\xi^2 - 2rr_\xi \cos \Theta}{r^2 r_\xi^2 + a^4 - 2rr_\xi a^2 \cos \Theta}}{r^2 r_\xi^2 + a^4 - 2rr_\xi a^2 \cos \Theta} \right), \quad (3.2.21)$$

donde  $\Theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $r = \|\mathbf{x}\|$  y  $r_\xi = \|\boldsymbol{\xi}\|$ . De aquí se verifica que  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ , sobre la circunferencia  $r = a$ .

Una vez obtenida la función de Green (3.2.21), se puede obtener la solución para la ecuación de Poisson directamente, utilizando la fórmula general,

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_\xi + \oint g(\boldsymbol{\xi}) \nabla_\xi G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.2.22)$$

Debido a la geometría del problema, para evaluar las integrales se utilizan coordenadas polares. Para la integral de línea se tiene que  $ds = a d\theta$  y así

$$\oint g(\boldsymbol{\xi}) \nabla_\xi G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n} ds = \int_0^{2\pi} g(\theta_\xi) \frac{\partial}{\partial r_\xi} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{r_\xi=a} a d\theta_\xi. \quad (3.2.23)$$

Por lo tanto, la expresión de la solución de la ecuación de Poisson queda expresada como

$$u(r, \theta) = \iint f(r_\xi, \theta_\xi) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dA_\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_\xi) \frac{a^2 - r^2}{r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \theta_\xi)} d\theta_\xi, \quad (3.2.24)$$

donde  $\theta - \theta_\xi = \Theta$ . Esta expresión es válida para el caso interior; la normal apunta en la dirección radial. Para el caso exterior se tiene que la normal apunta en dirección opuesta, por lo que solo cambia el signo de la integral de línea en (3.2.24).

Partiendo de esta expresión, ahora determinaremos la solución de la ecuación de Laplace con condición de frontera  $g(\theta)$  en el círculo  $r = a$ ,

$$u(r, \theta) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_\xi) \frac{a^2 - r^2}{r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \theta_\xi)} d\theta_\xi \quad (3.2.25)$$

con signo positivo cuando el punto de observación de la fuente está en el interior y signo negativo en el caso exterior.

A la expresión (3.2.25) se le conoce como *fórmula de Poisson*, la cual usualmente se expresa en la forma más compacta,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \theta_\xi) g(\theta_\xi) d\theta_\xi, \quad (3.2.26)$$

donde a

$$P(r, \theta - \theta_\xi) = \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \theta_\xi)} \quad (3.2.27)$$

se le llama *Kernel de Poisson*.

Similarmente, obtenemos que la función Green para el semi-círculo,  $0 < r < a$ ,  $0 < \theta < \pi$ , con  $G(x, \xi) = 0$  en la frontera, es

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \ln \left( a^2 \frac{r^2 + r_\xi - 2rr_\xi \cos(\theta - \theta_\xi)}{r^2 r_\xi^2 + a^4 - 2rr_\xi a^2 \cos(\theta - \theta_\xi)} \right) - \frac{1}{4\pi} \ln \left( a^2 \frac{r^2 + r_\xi - 2rr_\xi \cos(\theta + \theta_\xi)}{r^2 r_\xi^2 + a^4 - 2rr_\xi a^2 \cos(\theta + \theta_\xi)} \right). \quad (3.2.28)$$

### 3.2.4 Función de Green sobre una Esfera

La función de Green para la ecuación de Poisson sobre una esfera se establece de la misma forma que para el caso del círculo, ecuación (3.2.14), y tiene la forma

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - \xi\|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - \xi^*\|} \quad (3.2.29)$$

La relación entre  $\xi$  y  $\xi^*$  se determina utilizando una propiedad geométrica simple. Sea  $x$  un punto arbitrario de observación,  $\xi$  el punto donde se localiza la fuente y  $\xi^*$  el punto donde se localiza la fuente imagen (Ver Fig.18). Por semejanza de triángulos se tiene la relación  $\frac{\|\xi\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|\xi^*\|}$ . Como  $\|x\| = a$  y  $\|\xi\| = r_\xi$ , entonces  $\|\xi^*\| = \frac{a^2}{r_\xi}$  y por lo tanto

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{r_\xi}{\sqrt{r^2 r_\xi^2 + a^4 - 2rr_\xi a^2 \cos \Theta}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_\xi^2 - 2rr_\xi \cos \Theta}} \quad (3.2.30)$$

donde

$$\cos \Theta = \frac{x}{a} \cdot \frac{\xi}{r_\xi} = \cos \theta \cos \theta_\xi + \sin \theta \sin \theta_\xi \cos(\phi - \phi_\xi), \quad (3.2.31)$$

donde  $\theta$  y  $\phi$  son ángulos esféricos.

### 3.3 \* Algunas Aplicaciones Interesantes

Para concluir el trabajo vamos a considerar algunos problemas interesantes, esperando con esto ilustrar aún más el uso que tiene o puede tener la teoría de distribuciones. El primero de los problemas que se presenta es la justificación de una fórmula de derivación típica de cálculo elemental; la *fórmula de derivación de Euler-Leibnitz* y su generalización. El segundo problema, también un resultado clásico de cálculo; el *Teorema de la Divergencia* generalizado. El tercero de los problemas una propiedad que se puede experimentar físicamente; un efecto de óptica. Además, se presentan algunas representaciones de la solución de la ecuación de onda y por último, se presenta también una fórmula; la llamada *Fórmula de Kirchhoff*, la cual aún cuando es muy necesaria en las aplicaciones físicas es difícil de obtener y utilizar.

#### 3.3.1 La Fórmula de Euler-Leibnitz

En cálculo se obtiene, mediante la utilización de la Regla de la Cadena multidimensional la conocida *Fórmula de Euler-Leibnitz* para diferenciar una integral que depende de un parámetro. Ahora veremos como hacerlo utilizando el concepto de diferenciación generalizada. También, veremos que sólo con la teoría de las funciones generalizadas es posible establecer el resultado de manera más general.

El problema es determinar la derivada con respecto al parámetro  $\alpha$  de la integral

$$I(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_{A(\alpha)}^{B(\alpha)} f(x, \alpha) dx, \quad (3.3.1)$$

donde  $A, B$  y  $f$  son funciones continuas y  $B(\alpha) > A(\alpha)$  para  $\alpha \in [a, b]$ . Para hacerlo, se introduce la función de ayuda

$$H(x, \alpha) = h[x - A(\alpha)]h[B(\alpha) - x], \quad (3.3.2)$$

con  $h(\cdot)$  es la función de Heaviside.

Observemos que  $H(x, \alpha) = 1$  cuando  $A(\alpha) < x < B(\alpha)$  y  $H(x, \alpha) = 0$  en otra parte.

Usando esta función de ayuda  $H(x, \alpha)$ , podemos escribir  $I(\alpha)$  como

$$I(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, \alpha) f(x, \alpha) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} f + H \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) dx, \quad (3.3.3)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta \alpha}(x, \alpha) &= -A'(\alpha)h[B(\alpha) - x]\delta[x - A(\alpha)] + B'(\alpha)h[x - A(\alpha)]\delta[B(\alpha) - x] \\ &= -A'(\alpha)\delta[x - A(\alpha)] + B'(\alpha)\delta[B(\alpha) - x].\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

El primer sumando en (3.3.4) se reduce utilizando la propiedad

$$h[B(\alpha) - x]\delta[x - A(\alpha)] = h[B(\alpha) - A(\alpha)]\delta[x - A(\alpha)] = \delta[x - A(\alpha)],\tag{3.3.5}$$

ya que  $B(\alpha) - A(\alpha) > 0$  y similarmente el segundo. Por lo tanto, usando la ecuación (3.3.5) en la ecuación (3.3.3) e integrando con respecto a  $x$ , obtenemos la fórmula de Euler-Leibnitz

$$I(\alpha) = \int_{A(\alpha)}^{B(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx + B'(\alpha)f[B(\alpha), \alpha] - A'(\alpha)f[A(\alpha), \alpha].\tag{3.3.6}$$

Ahora, consideremos el problema más general de determinar la derivada respecto a un parametro de una integral de volumen. Esto es,

$$I_v = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} Q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},\tag{3.3.7}$$

donde  $\Omega(t)$  es una región en el espacio la cual depende del tiempo y  $Q(\mathbf{x}, t)$  una función  $C^1$ . Supongamos además que  $\partial\Omega(t)$ , la frontera de la región  $\Omega(t)$ , es suave por piezas y es descrita por la superficie  $f = 0$ , con  $f > 0$  en  $\Omega$ . Supongamos también que  $\nabla f = \mathbf{n}'$ , donde  $\mathbf{n}'$  es el vector normal unitario hacia dentro de la superficie. Por último, supongamos que el integrando es continuo respecto al tiempo. Entonces, podemos reemplazar  $d/dt$  por  $\bar{d}/dt$  y llevar la diferenciación dentro de la integral,

$$\begin{aligned}I_v &= \frac{\bar{d}}{dt} \int_{\Omega(t)} h(f)Q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \delta(f)Q(\mathbf{x}, t) + h(f) \frac{\partial Q}{\partial t} \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} Q(\mathbf{x}, t) dS + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial Q}{\partial t} d\mathbf{x},\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

donde  $h(f)$  es la función indicador y hemos usado (1.3.28) para integrar  $\delta(f)$  en el segundo paso en (3.3.8).

Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_{n'} = v_n, \quad (3.3.9)$$

donde  $v_{n'}$  y  $v_n$  son las velocidades locales normales en la dirección hacia dentro y hacia afuera, respectivamente. Así,

$$I_v = \int_{\partial\Omega(t)} v_n Q(\mathbf{x}, t) dS + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial Q}{\partial t} d\mathbf{x}. \quad (3.3.10)$$

Esta ecuación es una generalización de la fórmula de Euler-Leibnitz (3.3.6).

En el mismo contexto, también es posible calcular la derivada de la integral

$$I_s = \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega(t)} Q(\mathbf{x}, t) dS. \quad (3.3.11)$$

Para hacerlo, primeramente convertiremos la integral de superficie (3.3.11) en la integral de volumen,

$$I_s = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \delta(f) \tilde{Q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (3.3.12)$$

donde  $f = 0$  describe a  $\partial\Omega(t)$ ,  $\nabla f = \mathbf{n}$  es el vector normal unitario hacia afuera de la superficie y  $\tilde{Q}$  es la restricción de  $Q$  a la superficie  $f = 0$ . Por lo tanto,

$$I_s = \int \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \delta'(f) \tilde{Q}(\mathbf{x}, t) + \delta(f) \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} \right] d\mathbf{x}. \quad (3.3.13)$$

Usando (1.3.28) y (1.3.30), obtenemos

$$I_s = \int_{\partial\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} - 2v_n K_f Q(\mathbf{x}, t) \right] dS, \quad (3.3.14)$$

donde  $K_f$  es la curvatura media de  $\partial\Omega(t)$  y  $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + v_n \frac{\partial Q}{\partial n}$ .

La deducción de la fórmula (3.3.14) por cualquier otro método no es nada trivial. En la aplicación, las relaciones (3.3.10) y (3.3.14) son conocidas como Teoremas de Transporte, y son utilizadas en la derivación de leyes de conservación.

### 3.3.2 Teorema de la Divergencia Generalizado

El Teorema de la Divergencia es un resultado clásico de Cálculo Vectorial que relaciona una integral de volumen con una integral de superficie de un campo vectorial continuo y su derivada. Este resultado es utilizado en la derivación de algunas leyes de conservación físicas en forma diferencial. Lo relevante es que podemos considerar este resultado desde un mejor ángulo o punto de vista, (más generalizado); permanece válido para campos vectoriales discontinuos o singulares lo cual implica que también tales leyes de conservación permanecen válidas cuando todas las derivadas son consideradas como derivadas generalizadas.

Sea  $\Omega$  un volumen finito en el espacio y sea  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  un campo vectorial  $C^1(\Omega)$ . Definamos el campo vectorial discontinuo

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{V}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.3.15)$$

Sea  $f = 0$  la superficie frontera  $\partial\Omega$  de la región  $\Omega$  de tal forma que  $\mathbf{n} = \nabla f$  apunte hacia afuera de  $\partial\Omega$  y  $\|\nabla f\| = 1$  sobre  $f = 0$ . Tenemos que

$$\overline{\text{div}} \tilde{\mathbf{V}} = \overline{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} + [\tilde{\mathbf{V}}] \cdot \mathbf{n}\delta(f) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\delta(f), \quad (3.3.16)$$

usando el hecho que  $[\tilde{\mathbf{V}}] = \tilde{\mathbf{V}}(f = 0^+) - \tilde{\mathbf{V}}(f = 0^-) = -\mathbf{V}(f = 0)$ . Integrando sobre todo el espacio, obtenemos

$$\int \int \int \frac{\partial V_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int \int V_1|_{-\infty}^{\infty} dx_2 dx_3 = 0. \quad (3.3.17)$$

Similarmente, obtenemos integrales iguales a cero para  $\partial V_2/\partial x_2$  y  $\partial V_3/\partial x_3$ , donde  $V_i$  es la  $i$ -ésima componente del campo vectorial  $\mathbf{V}$ . Por lo tanto,

$$\int \overline{\text{div}} \tilde{\mathbf{V}} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.3.18)$$

Por otro lado, la integración del lado derecho de (3.3.16), usando la relación (1.3.28), definiendo  $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  y usando el hecho que

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.3.19)$$

da como resultado el Teorema de la Divergencia Clásico,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} V_n \, dS = 0. \quad (3.3.20)$$

Ahora, notemos que (3.3.20) es válida si  $\tilde{\mathbf{V}}$  tiene una discontinuidad sobre la superficie  $\sigma = 0$  en  $\Omega$ ,

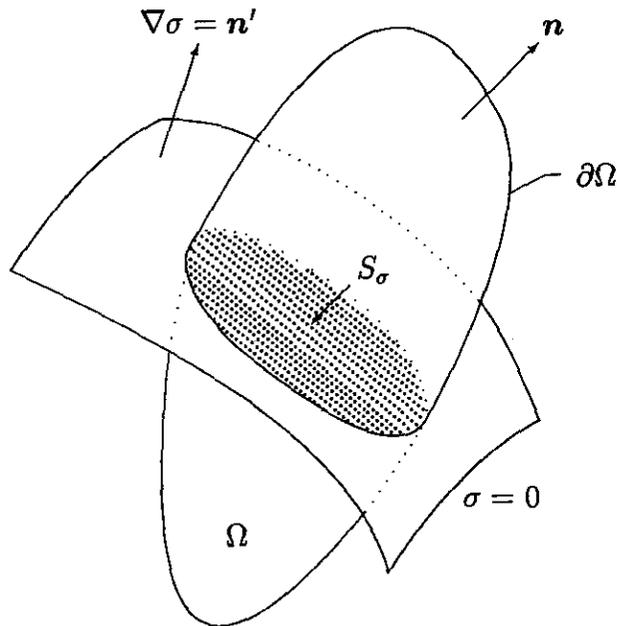


Fig.19 Superficie de discontinuidad del campo vectorial  $\mathbf{V}$ .

Entonces, la ecuación (3.3.20) es válida si  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  en la integral de volumen se reemplaza por  $\bar{\nabla} \cdot \mathbf{V}$ , donde el único salto de  $\mathbf{V}$  en la divergencia generalizada proviene de la discontinuidad en  $\sigma = 0$ . Esto es, tenemos que

$$\bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} + [\mathbf{V}] \cdot \mathbf{n}' \delta(\sigma), \quad (3.3.21)$$

con  $\mathbf{n}' = \nabla\sigma$  la normal unitaria a la superficie  $\sigma = 0$ . Así, la ecuación (3.3.20) puede ahora escribirse como

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} V_n \, dS, \quad (3.3.22)$$

la cual a su vez, al usar (3.3.21), se puede escribir como

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} V_n \, dS - \int_{S_\sigma} [V_{n'}] \, dS, \quad (3.3.23)$$

donde  $[V_{n'}] = [\mathbf{V}] \cdot \mathbf{n}'$  y  $S_\sigma$  es la parte de la superficie  $\sigma = 0$  encerrada en la región  $\Omega$ . (Ver figura 19).

### 3.3.3 Entre Espejos Te Veas

Un Problema interesante es encontrar la función de Green correspondiente a una fuente localizada en medio de dos planos paralelos a la misma distancia (espejos), con potencial específico en cada uno de ellos, como se muestra en la figura siguiente

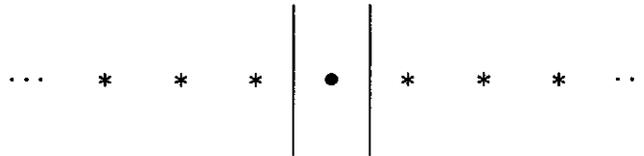


Fig.20 Espejos paralelos encontrados.

Como se puede observar, determinar la fuente imagen correspondiente a alguno de los planos es relativamente fácil puesto que esta satisface las condiciones sobre ese plano. Sin embargo, no satisface las correspondientes al otro plano y por consiguiente se tiene que considerar otra fuente imagen que las satisfaga, pero nuevamente encontramos que ésta no va a satisfacer las condiciones del primero y así sucesivamente hasta tener una infinidad de fuentes imagen. Por lo tanto, la función de Green es la suma infinita de las contribuciones individuales de cada fuente imagen. Físicamente, el problema es como si uno se mirara en dos espejos encontrados, en los cuales se vería nuestra imagen reflejada un número infinito de veces. Matemáticamente, el problema establecido significa determinar la función de Green que satisface la ecuación

$$\Delta G = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$$

sobre la banda (columna) infinita  $0 \leq x_1 \leq L$  y  $-\infty \leq x_i \leq \infty$ ,  $i = 2, 3, \dots$  y las condiciones de frontera  $G = 0$  en  $x_1 = 0$  y  $x_1 = L$ . Para el caso 2-dimensional, por construcción la función de Green está dada por

$$G(x, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\ln |x - \alpha_n| - \ln |x - \beta_n|)$$

donde  $\alpha_n = \boldsymbol{\xi} - 2nL$  y  $\beta_n = -\boldsymbol{\xi} + 2nL$ , mientras que para tres dimensiones tenemos que la función de Green asociada es

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_n\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}_n\|} \right)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\xi} - 2n\mathbf{D}$  y  $\boldsymbol{\beta}_n = -\boldsymbol{\xi} + 2n\mathbf{D}$ , con  $\mathbf{D} = (L, 0, \dots, 0)$ .

### 3.3.4 Diferentes Representaciones para la Solución de la Ecuación de Onda

La solución de la ecuación de onda admite diferentes formas, dependiendo del problema y del objetivo. A continuación se presenta su solución fundamental (función de Green), la cual es un ejemplo para problemas no estacionarios. Después, se introduce la solución en la forma de Poisson y de Kirchhoff, respectivamente, para concluir con la generalización de la fórmula de Kirchhoff para superficies móviles.

Consideremos la ecuación de onda

$$\square^2 \varphi = Q(\mathbf{x}, t) \quad (3.3.24)$$

donde  $\square^2$  denota al operador de D'Alembert, dado por  $\square^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ , sujeta a la condición inicial  $\varphi(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ .

Si el problema se analiza sobre una región finita o semi-infinita, entonces además es necesario considerar condiciones de frontera no homogéneas. Para determinar la solución de este problema introduciremos la función de Green  $G(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$  como la solución correspondiente a una fuente concentrada en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ , actuando instantáneamente en  $t = \tau$ . Esto es,

$$\square^2 G = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t - \tau).$$

La función de Green es la respuesta en  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$  debido a una fuente localizada en  $\boldsymbol{\xi}$  en el tiempo  $\tau$ . La respuesta es cero cuando la fuente actúa en  $t < \tau$  ("*principio de causalidad*");  $G(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = 0$  para  $t < \tau$ .

Introduciendo la Transformada de Fourier y algunas de sus propiedades, tenemos que

$$\frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial t^2} + \alpha^2 \omega^2 \widehat{G} = \frac{e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\xi}}}{(2\pi)^n} \delta(t - \tau),$$

donde  $\omega^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Por el principio de causalidad tenemos que

$$\frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial t^2} + \alpha^2 \omega^2 \widehat{G} = 0 \quad \text{para } t > \tau,$$

cuya solución es de la forma

$$\widehat{G} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau, \\ A \cos \alpha\omega(t - \tau) + B \sin \alpha\omega(t - \tau) & \text{si } t > \tau. \end{cases}$$

De la continuidad tenemos que  $A = 0$  y de la condición de salto  $B = \frac{e^{i\omega \cdot \xi}}{(2\pi)^n \alpha \omega}$ . Así, la solución  $\widehat{G}$  está dada por

$$\widehat{G}(\omega, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{e^{i\omega \cdot \xi}}{(2\pi)^n \alpha \omega} \operatorname{sen} \alpha \omega (t - \tau).$$

Por lo tanto, la función de Green asociada a la ecuación de onda es

$$G(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{e^{-i[\omega \cdot (\mathbf{x} - \xi)]} \operatorname{sen} \alpha \omega (t - \tau)}{\alpha \omega} d\omega.$$

En el caso de una dimensión sin considerar el efecto de fuente alguna, llegamos a la conocida *solución de D'Alembert*,

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + \alpha t) + f(x - \alpha t)] + \frac{1}{2\alpha} \int_{x - \alpha t}^{x + \alpha t} g(\xi) d\xi,$$

siendo en este caso

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\alpha} \{ -h[(x - \xi) - \alpha(t - \tau)] + h[(x - \xi) + \alpha(t - \tau)] \}$$

la función de Green asociada.

En el caso tridimensional, considerando condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int \int \int G(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) Q(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{4\alpha\pi} \int_0^t \int \int \int \frac{1}{R} \delta[R - \alpha(t - \tau)] Q(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

La función de Green para este caso específico tiene la expresión

$$G(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \frac{1}{4\alpha R \pi} \delta[R - \alpha(t - \tau)].$$

Las únicas fuentes que contribuyen satisfacen  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \alpha(t - t_0)$ . El efecto en  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$  se debe a todas las fuentes involucradas las cuales emiten ondas que se propagan a velocidad  $\alpha$ . A un tiempo  $t - \tau$  posterior, el efecto se localiza sobre una cáscara esférica a una distancia  $\alpha(t - \tau)$ . Esto es parte de lo que se conoce como "principio de Huygens" el cual solo es válido en tres dimensiones. En dos dimensiones el problema no es trivial.

### 3.3.5 La Fórmula de Kirchhoff

Consideremos primeramente el problema de Cauchy para la ecuación de onda en tres dimensiones. Esto es, determinar  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  que satisfaga la ecuación (3.3.24),  $Q = 0$  y las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \varphi|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z), \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z). \end{cases} \quad (3.3.25)$$

Una solución para este problema fue dada por Poisson, la cual se obtiene de la siguiente forma: se considera una esfera  $\mathcal{S}$  con centro en el punto  $\mathbf{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  y radio variable  $\rho = \alpha\ell$ , de tal forma que un punto sobre  $\mathcal{S}$  tiene coordenadas

$$(\bar{x} + \alpha\ell \sin \psi \cos \theta, \bar{y} + \alpha\ell \sin \psi \sin \theta, \bar{z} + \alpha\ell \cos \psi),$$

donde  $\theta$  y  $\psi$  son dos de las coordenadas esféricas. El valor promedio  $M_\rho(\varphi)$  de una función sobre esta esfera está dado por

$$M_\rho(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(\bar{x} + \alpha\ell \sin \psi \cos \theta, \bar{y} + \alpha\ell \sin \psi \sin \theta, \bar{z} + \alpha\ell \cos \psi) \sin \psi \, d\psi d\theta. \quad (3.3.26)$$

Entonces, la solución de la ecuación de onda en la forma de Poisson se escribe como

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \frac{d}{d\ell} [\ell M_\rho(\varphi_0)] + \ell M_\rho(\varphi_1), \quad (3.3.27)$$

la cual proporciona el valor de la función  $\varphi$  en el punto  $\mathbf{p}$  en el momento  $\ell$  en términos de sus valor inicial y el de su derivada con respecto al tiempo a una distancia  $\rho = \alpha\ell$  desde  $\mathbf{p}$ .

Otra forma del problema de Cauchy fue obtenida por Kirchhoff, la cual se puede determinar aún para casos más generales. Consideremos la ecuación de onda no homogénea (3.3.24), donde  $Q$  se interpreta como la distribución de densidad de la fuente. Para obtener el valor de  $\varphi$ , en cualquier punto  $\mathbf{p}$  en términos de sus valores en una región  $\Omega$ , se tiene que suponer que en esta región  $\varphi$  y sus primeras derivadas son continuas y que las segundas derivadas y  $Q$  son finitas e integrables. Denotando por  $R$  la distancia  $\mathbf{pq}$ , donde  $\mathbf{q}$  es cualquier punto en la región  $\Omega$ , por  $\partial\Omega$  la frontera cerrada de  $\Omega$  y por  $\frac{\partial}{\partial n}$  la diferenciación en la dirección de la normal exterior. La notación  $[\cdot]$

indica que el valor de la función se calcula en el tiempo  $t - \frac{R}{\alpha}$ . Entonces, la fórmula de Kirchhoff, para  $p$  en el interior de  $\Omega$ , está dada por

$$4\pi\varphi_p = \iiint_{\Omega} \frac{[Q]}{R} dV - \iint_{\partial\Omega} \left\{ [\varphi] \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] - \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial R}{\partial n} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \right\} dS. \quad (3.3.28)$$

Para  $p$  fuera de  $\Omega$ , la integral es cero. Para la ecuación de onda homogénea, la integral de volumen (la cual representa al así llamado "potencial retardado") no aparece en la expresión. Además, observemos para este caso que  $\varphi_p$  depende solo de los valores de  $\varphi$  y sus derivadas en puntos  $q$  sobre la superficie frontera de  $\Omega$  en un tiempo que antecede al instante  $t$  por la cantidad  $\frac{R}{\alpha}$ , el cual es el tiempo necesario para que una perturbación viaje de  $q$  a  $p$  con velocidad  $\alpha$ . Así, la fórmula de Kirchhoff se considera como la forma matemática general del Principio de Huygens, en el que  $q$  se considera como una fuente secundaria que manda perturbaciones al punto  $p$ . Si suponemos que la región  $\Omega$  es una bola de radio  $R = \alpha t$ , con centro en  $p$ , entonces la fórmula de Kirchhoff se reduce a la fórmula de Poisson, observando que  $\varphi(t - \frac{R}{\alpha}) = \varphi(0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial R}$ . Para una función periódica en el tiempo se obtiene la fórmula conocida como de Helmholtz. La obtención de la fórmula de Kirchhoff en base al análisis clásico es laboriosa y compleja. Sin embargo, desde el punto de vista generalizado el trabajo se reduce significativamente. En los últimos años de los 1980's Farassat y Myers [4] dieron una moderna deducción de la fórmula de Kirchhoff para superficies móviles, basándose en la teoría distribucional, la cual realmente es corta y evita la dificultad de tratar con espacios y funciones de Green en cuatro dimensiones. Este resultado es muy utilizado en aerodinámica, hidrodinámica, electrodinámica y acústica.

Supongamos que la superficie en movimiento sobre la cual se especifican las condiciones de una función  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  se denota por  $\sigma(\mathbf{x}, t)$ , la cual es una superficie deformable, definida de tal forma que  $\|\nabla\sigma\| = 1$  sobre esta. Supongamos que  $\varphi$  satisface la ecuación de onda en el exterior  $\bar{\Omega}$  de la superficie  $\sigma = 0$ , la cual es la región definida por  $\sigma > 0$ . Extendiendo  $\varphi$  al espacio completo,

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, t) & \sigma > 0 \\ 0 & \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.3.29)$$

tenemos que  $\tilde{\varphi}$  satisface la ecuación de onda sobre todo el espacio. Sin embargo,  $\tilde{\varphi}$  tiene discontinuidades sobre la superficie  $\sigma = 0$  las cuales aparecen como fuente en la

ecuación de onda y pueden ser de diferente naturaleza. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{x}, t) &= S(\mathbf{x}, t) \\
 &= S(\mathbf{x}, t)\delta(\sigma) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} [S(\mathbf{x}, t)\delta(\sigma)] \\
 &= \nabla [S(\mathbf{x}, t)\delta(\sigma)],
 \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

donde  $S(\mathbf{x}, t)$  puede ser una función ordinaria, una función con discontinuidades o bien una función generalizada, dependiendo del tipo de singularidad.

Notemos que los saltos de  $\tilde{\varphi}$  y sus derivadas dependen de los valores correspondientes de  $\varphi$  en la superficie ya que  $[\tilde{\varphi}] = \varphi(\sigma = 0_+)$  y  $[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}] = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\sigma = 0_+)$ . Aplicando las reglas de la diferenciación generalizada (el operador de onda) a  $\tilde{\varphi}$ , tenemos

$$\square^2 \tilde{\varphi} = - \left( \varphi_n + \frac{1}{\alpha} M_n \varphi_t \right) \delta(\sigma) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [M_n \varphi \delta(\sigma)] - \nabla \cdot [\varphi \mathbf{n} \delta(\sigma)], \tag{3.3.31}$$

donde  $v_n = -\partial\sigma/\partial t$  es la velocidad local normal de la superficie  $\sigma = 0$ ,  $M_n = v_n/\alpha$  el número local normal de Mach sobre  $\sigma = 0$ ,  $\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  y  $\varphi_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ . Como siempre, suponemos que  $\nabla\sigma = \mathbf{n}$  es la normal unitaria positiva a  $\sigma = 0$ . Los tres tipos de fuente en el lado derecho de (3.3.24) son del tipo estandar descrito en (3.3.30). Aplicando el método de las funciones de Green para el operador de onda sobre todo el espacio, encontramos la fórmula de Kirchhoff para movimiento subsónico, ya que debido a una de las singularidades en (3.3.31), llamada de Doppler, no es aplicable a movimiento supersónico. La solución para una superficie deformable dada por Farassat [4], es

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\Omega(\mathcal{S})} \left[ \frac{E_1 \sqrt{g_2}}{r(1 - M_r)} \right]_{\tau^*} du_1 du_2 + \int_{\Omega(\mathcal{S})} \left[ \frac{\varphi E_2 \sqrt{g_2}}{r(1 - M_r)} \right]_{\tau^*} du_1 du_2 \right\}, \tag{3.3.32}$$

donde  $\Omega(\mathcal{S})$  es una región en el espacio  $u_1, u_2$  que depende del tiempo sobre la cual es transformada la superficie  $\sigma = 0$ ,  $g_2$  es el determinante de los coeficientes de la primera forma fundamental y  $\tau^*$  es el tiempo de emisión del punto  $(u_1, u_2)$  sobre la superficie  $\sigma = 0$ . La expresión  $E_1$  depende de  $\varphi, \varphi_n, \nabla_2 \varphi$  (gradiente sobre la superficie de  $\varphi$ ) y de los parámetros geométricos y cinéticos de la superficie  $\sigma = 0$ . La expresión  $E_2$  únicamente depende de los parámetros geométricos y cinéticos.

\* En este problema se supone que la superficie cerrada  $\sigma = 0$  en movimiento es impenetrable. Sin embargo, es posible que se tenga ruido (contaminación por sonido, penetración de fluido, etc.) dentro de la superficie y como los principios de conservación continúan siendo válidos en el sentido generalizado, entonces se sigue satisfaciendo la ecuación de onda, solo que ahora este ruido aparece en los términos no homogéneos de una forma mucho muy complicada, bastante interesante como para estudiar con detalle.

**Nota:** Las fórmulas de Kirchhoff resultan atractivas y de fundamental importancia para la aeroacústica en el modelado de alta resolución aerodinámica y simulación bajo régimen de turbulencia. Las matemáticas utilizadas en la derivación de estas fórmulas son producto de la última década y ciertamente dignas de estudio.

### Conclusión:

De esta forma termino mi exposición "rudimentaria" de la teoría de distribuciones y algunas de sus aplicaciones, las cuales básicamente giran alrededor del concepto de la diferenciación generalizada, con el enfoque de las funciones de Green. En realidad el poder de la teoría de las funciones generalizadas proviene de sus propiedades operacionales con las cuales es posible obtener fácilmente soluciones discontinuas (soluciones generalizadas) de ecuaciones diferenciales lineales utilizando el método de las funciones de Green, al poner el problema en el nuevo marco teórico. Además, la teoría de distribuciones de Schwartz unifica muchos métodos empíricos y da respuesta a preguntas fundamentales de las ecuaciones diferenciales parciales lineales y tal vez con un poco de cuidado también sea posible atacar problemas no lineales, siempre y cuando la multiplicación de distribuciones presente así lo permita. Esto es lo que alcanzo a vislumbrar, pero sin duda lo más importante es que la teoría de distribuciones que nos heredo Laurent Schwartz equipa a cualquier científico o ingeniero con un arma más para hacer frente o resolver problemas de aplicación. En toda su extensión, el material de las funciones generalizadas es muy abstracto y de un nivel matemático muy sofisticado, en contrándose solamente en "excelentes" libros clásicos, difíciles de encontrar en nuestras bibliotecas. En nuestro contexto, la abstracción se dejó de lado parcialmente ya que el interés era el trabajar con la delta de Dirac multidimensional, sus propiedades y sus derivadas con el fin de utilizarla junto con las funciones de Green. El marco teórico utilizado fue el espacio de las distribuciones de Schwartz  $\mathcal{D}'$  por ser este el espacio más fuerte. Sin embargo, cuando la teoría de distribuciones se ancla sobre el conjunto específico de funciones de prueba,  $\mathcal{S}$ , el espacio de las distribuciones correspondiente resulta especial para el estudio de la Transformada de Fourier en su versión generalizada, con la cual es posible resolver aún muchos más problemas de ecuaciones diferenciales. Espero sinceramente que se considere y se retome el presente trabajo como base para un nuevo tema de tesis sobre la Transformada de Fourier Generalizada para de esta forma completar el material de la teoría de las distribuciones.



# Bibliografía

- [1] ARFKEN G., *“Mathematical Methods for Physicists”*,  
Academic Press, 1985
- [2] COURANT H. & HILBERT D., *“Method of Mathematical Physics”*,  
Interscience, 1953 (Vol.I), 1962 (Vol.II)
- [3] FARASSAT F., *“Introduction to Generalized Functions with Applications in Aerodynamics and Aeroacoustics”*,  
NASA Technical Paper, 1994
- [4] FARASSAT F. & Myers M.K., *“Extension of Kirchhoff’s Formula to Radiation from Moving Surfaces”*,  
Journal of Sound and Vibration, Vol.123, No.3, 1998
- [5] FRIEDMAN B., *“Lectures on Applications-Oriented Mathematics”*,  
John Wiley & Sons, Inc., 1991
- [6] GEL’FAND I. M. & Shilov G.E., *“Generalized Functions”*,  
*Vol.1-Properties and Operations*,  
Academic Press, 1964
- [7] GOETZ A., *“Introduction to Differential Geometry”*,  
Addison-Wesley, 1970
- [8] HILDEBRAND F. B., *“Advanced Calculus for Applications”*,  
Prentice-Hall, Inc., 1976

- [9] HABERMAN R., *"Elementary Applied Partial Differential Equations"*,  
Prentice-Hall, 1983
- [10] RAUCH J., *"Partial Differential Equations"*,  
Springer-Verlag, 1991
- [11] RICHARDS I. & Youn H., *"Theory of Distributions: A Non-Theoretical Introduction"*,  
Cambridge University Press, 1990
- [12] SAICHEV A. I. & WOYCZYŃSKI W. A., *"Distributions in the Physical and Engineering Sciences"*, Vol.I-Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets,  
Birkhäuser, 1997
- [13] STAKGOLD I., *"Green's Functions and Boundary Value Problems"*,  
John Wiley & Sons, Inc., 1979
- [14] STEWART J., *"Multivariable Calculus"*,  
Brooks/Cole Publishing Company, 1991
- [15] ZILL D.G., *"Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado"*,  
Thompson Editores, 1997

