

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**Sistemas Dinámicos en Superficies Cociente**



**Licenciado en Matemáticas**

**Presenta:**

**JESÚS FRANCISCO ESPINOZA FIERRO**

**Director: Dr. Yuri Mikhailovich Vorobiev**

Este trabajo fue financiado y apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) dentro del proyecto "Acoplamiento Mínimo en la Geometría de Poisson y la Teoría de Sistemas Hamiltonianos", con clave 35212-E, bajo la dirección del Dr. Yuri Mikhailovich Vorobiev.

# Índice General

|                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducción</b>                                                           | v         |
| <b>1 Grupos discretos de transformaciones en el plano y espacios cociente</b> | <b>1</b>  |
| 1.1 Definiciones y conceptos básicos                                          | 1         |
| 1.2 Ejemplos de espacios cociente                                             | 5         |
| 1.3 Grupos de isometrías                                                      | 9         |
| <b>2 Superficies cociente</b>                                                 | <b>12</b> |
| 2.1 Superficies abstractas                                                    | 12        |
| 2.2 Grupos de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$<br>y superficies cociente      | 16        |
| 2.3 Grupo fundamental                                                         | 18        |
| <b>3 Elementos de cálculo en superficies cociente y sistemas dinámicos</b>    | <b>21</b> |
| 3.1 Campos vectoriales                                                        | 21        |
| 3.2 Sistemas dinámicos en superficies cociente                                | 27        |
| 3.3 Equivalencia                                                              | 31        |
| 3.4 Medidas en superficies cociente                                           | 34        |
| 3.5 Medidas Riemannianas                                                      | 36        |
| 3.6 Sistemas dinámicos con medidas invariantes                                | 39        |
| <b>4 Sistemas dinámicos en el plano y el Teorema de Rectificación</b>         | <b>48</b> |
| 4.1 Espacio de órbitas                                                        | 48        |
| 4.2 Formas normales                                                           | 50        |
| 4.3 Teorema de Rectificación                                                  | 52        |
| 4.4 Segmentos con contacto libre                                              | 54        |

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.5      | Ecuación homológica                                                | 60        |
| 4.6      | Aplicaciones y ejemplos                                            | 64        |
| 4.7      | Equivalencia para campos vectoriales regulares                     | 67        |
| <b>5</b> | <b>Teorema de Rectificación para sistemas dinámicos en el toro</b> | <b>69</b> |
| 5.1      | Formas normales                                                    | 69        |
| 5.2      | Difeomorfismo de rectificación en el plano                         | 73        |
| 5.3      | Función de Poincaré                                                | 75        |
| 5.4      | Número de rotación                                                 | 80        |
| 5.5      | Retrato fase                                                       | 83        |
| <b>6</b> | <b>Sistemas dinámicos en la botella de Klein</b>                   | <b>86</b> |
| 6.1      | Formas normales                                                    | 86        |
| 6.2      | Difeomorfismo de rectificación en el plano                         | 90        |
| 6.3      | Función de Poincaré                                                | 91        |
| 6.4      | Difeomorfismo de rectificación en la botella de Klein              | 93        |
| 6.5      | Clasificación de trayectorias periódicas                           | 95        |
|          | <b>Bibliografía</b>                                                | <b>98</b> |

## Introducción

Los sistemas dinámicos sobre superficies aparecen en varios problemas de física-matemática, mecánica clásica, hidrodinámica, etcétera. El propósito de este trabajo es estudiar algunos aspectos teóricos del problema de clasificación de sistemas dinámicos sobre superficies, usando herramientas de Geometría Diferencial, Topología y Teoría de Grupos.

Tal teoría ha sido estudiada por muchos matemáticos importantes tales como Poincaré, Bendixon, Denjoy, Stepanov, Neminsky, Kolmogorov y Sinai, entre otros.

Este trabajo tiene dos objetivos principales. El primero de ellos consiste en presentar una introducción a la Teoría de Sistemas Dinámicos sobre superficies cociente, y el segundo en establecer y demostrar el Teorema de Rectificación Global en el plano y en superficies cociente tales como el toro y la botella de Klein.

Un *sistema dinámico* en el plano se puede definir como un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias; para definir un sistema dinámico en una superficie necesitamos hacer uso de nociones como campo vectorial y flujo sobre superficies. En general, el flujo en una superficie se puede definir como solución a un sistema de ecuaciones diferenciales sólo localmente (en una vecindad de un punto). La razón de esto es que una superficie no tiene coordenadas globales en general. Así, para estudiar un sistema dinámico en superficies necesitamos usar las herramientas del cálculo en variedades.

Existe una clase especial de superficies, llamadas *superficies cociente*, en las cuales no es necesario el cálculo en variedades. El estudio de sistemas dinámicos en tales superficies se puede reducir a sistemas dinámicos en el plano con ciertas condiciones específicas. Esta línea de estudio es la que seguiremos a lo largo del texto.

Hemos dividido el trabajo en dos partes, a saber, Geometría Diferencial y Sistemas Dinámicos.

Los primeros tres capítulos están dedicados a la parte de Geometría Diferencial, abarcando los conceptos y herramientas necesarios que se utilizan a lo largo de los tres últimos capítulos.

En el primer capítulo se da una introducción elemental a la teoría de grupos. En particular, discutimos las acciones de grupos en el plano para definir espacios cociente de la forma  $\mathbb{R}^2/\Gamma$ , tales como el *cilindro*, la *banda de Möbius infinita*, el *toro* y la *botella de Klein*. El resultado principal de este capítulo establece que tales espacios cociente son los únicos espacios que se pueden

obtener cuando la acción satisface cierta propiedad (Proposición 1.1 y Corolario 1.2).

En el segundo capítulo se estudian los espacios definidos en el Capítulo 1, en donde el Teorema 2.1 establece la existencia de una estructura diferenciable para tales espacios y entonces son considerados como *variedades diferenciables*. Además, se proporciona una introducción elemental al estudio del *Grupo Fundamental*, que en el caso de una superficie cociente  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  resulta ser precisamente el grupo  $\Gamma$ .

El capítulo tercero da una introducción al cálculo en el plano y superficies cociente, que necesitamos para el estudio de sistemas dinámicos. Se dedica gran parte del capítulo al estudio de *campos vectoriales, métricas y medidas Riemannianas*. Especialmente nos interesamos en *sistemas dinámicos con medidas invariantes*, los cuales aparecen en varios problemas de mecánica clásica y teoría ergódica, ver por ejemplo [1,15]. Para tales sistemas en el caso del plano, toro y botella de Klein obtenemos algunos resultados relevantes para sistemas conservativos y Hamiltonianos (ver proposiciones 3.4, 3.6 y 3.7).

La parte de Sistemas Dinámicos, la cual consta de los capítulos 4, 5 y 6, está dedicada al estudio del problema de formas normales para sistemas dinámicos, es decir, encontrar un cambio suave de coordenadas (difeomorfismo) que transforma un sistema en otro sistema con una estructura más "simple". En este sentido obtenemos algunas versiones globales del *Teorema de Rectificación* en el plano, en el Toro y en la botella de Klein.

En el Capítulo 4 se da una demostración completa del *Teorema de Rectificación Global* en el plano (Teorema 4.1), en términos de una noción topológica de los sistemas dinámicos, llamada *espacio de órbitas*, la cual es estudiada al inicio del capítulo. Se dan algunas aplicaciones de este teorema a sistemas conservativos y Hamiltonianos, y se establecen algunos criterios de equivalencia para campos vectoriales suaves y sin puntos críticos. Los principales resultados de este capítulo se pueden encontrar también en [8].

El resultado principal del Capítulo 5 es el Teorema 5.1, el cual establece que un sistema dinámico en el toro sin puntos críticos y con una medida invariante es equivalente a un sistema canónico cuyas órbitas son proyecciones de rectas en el plano. Además, discutimos un tipo de trayectorias en el toro, las cuales tienen la propiedad de ser densas en el toro. En la teoría de sistemas Hamiltonianos, tales trayectorias se conocen como trayectorias *casi periódicas*, ver [3]. Este teorema aparece por primera vez en un trabajo de Kolmogorov [13] (ver [1,15], para otras formulaciones). Para la demostración de este teorema usamos resultados e ideas del Capítulo 4.

En el Capítulo 6 se establece el Teorema 6.1, resultado análogo al Teorema 5.1 del Capítulo 5. En particular, se demuestra que todas las trayectorias de un sistema dinámico en la botella de Klein, sin puntos críticos y con una medida invariante, son trayectorias periódicas. Además, la forma en que se presenta tal resultado es poco común en la literatura de sistemas dinámicos. (ver [4,11], para más información de la teoría cualitativa general para sistemas dinámicos en la botella de Klein)

Por último, cabe mencionar que el mismo método de estudio que seguimos en este trabajo para el toro y la botella de Klein puede aplicarse a otras superficies cociente, como por ejemplo, el cilindro y banda de Möbius infinita.

# Capítulo 1

## Grupos discretos de transformaciones en el plano y espacios cociente

### 1.1 Definiciones y conceptos básicos.

En esta sección introduciremos algunos conceptos que nos serán de utilidad más adelante. Empezaremos recordando alguna terminología de Teoría de Grupos, necesaria para el desarrollo de este trabajo.

**Grupos.** Sea  $G$  un conjunto no vacío y  $* : G \times G \longrightarrow G$  una operación binaria. Decimos que la pareja  $(G, *)$  es un *grupo* si satisface los siguientes axiomas:

*Asocitividad.* Para cada  $g_1, g_2, g_3 \in G$ , se tiene  $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ ,

*Existencia de elemento identidad.* Existe  $e \in G$ , tal que  $g * e = e * g = g$  para todo  $g \in G$ ; el elemento  $e \in G$  es llamado el elemento identidad de  $G$ .

*Existencia de inverso.* Para cada elemento  $g \in G$ , existe  $g^{-1} \in G$  tal que  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ .

Cuando no haya riesgo de confusión escribiremos  $g_1 g_2$  en lugar de  $g_1 * g_2$  y denotaremos por  $G$  al grupo  $(G, *)$ .

En el caso de que  $g_1 g_2 = g_2 g_1$  para cada  $g_1, g_2 \in G$ , se dice que el grupo  $G$  es *conmutativo*.

Introducimos la siguiente notación. Decimos que un grupo  $G$  es *generado* por los elementos  $g_1, \dots, g_m$  si cada elemento  $g \in G$  se puede escribir como  $g = g_{j_1}^{n_1} \dots g_{j_m}^{n_m}$ ,  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ . Lo cual denotamos como  $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ .



Cuando  $G$  es generado por un solo elemento  $g_1$ ,  $G = \langle g_1 \rangle$ , decimos que  $G$  es un *grupo cíclico*.

Obsérvese que todo grupo cíclico es conmutativo.

Por ejemplo, la pareja  $(\mathbb{Z}, +)$ , donde  $\mathbb{Z}$  denota el conjunto de los enteros y  $+$  la suma usual, es un grupo; además  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ , por lo tanto  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo cíclico. También  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ , donde  $\mathbb{R} - \{0\}$  es el conjunto de los números reales distintos de 0 y  $\cdot$  el producto usual, forma un grupo bajo la multiplicación; sin embargo, este grupo no es cíclico.

**Grupos discretos.** Decimos que un grupo  $(G, *)$ , es un *grupo discreto* si el conjunto  $G$  es a lo más numerable.

Por ejemplo, el conjunto  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$  con la multiplicación y el grupo  $(\mathbb{Z}, +)$  son grupos discretos. Podemos tomar también el producto cartesiano de  $\mathbb{Z}$  con  $\mathbb{Z}$ , que se denota por  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Este conjunto es numerable y, si definimos la "suma"  $+$  en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  por.

$$+ : ((m_1, n_1), (m_2, n_2)) \mapsto (m_1 + m_2, n_1 + n_2),$$

entonces  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  es un grupo discreto, llamado "suma directa" de  $\mathbb{Z}$  con  $\mathbb{Z}$ , y denotado por  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Acciones de grupos.** Sea  $G$  un grupo y  $M$  un conjunto (no vacío), se dice que  $G$  *actúa sobre*  $M$  si existe una función  $\theta : G \times M \rightarrow M$  tal que:

(i) Si  $e$  es el elemento identidad de  $G$ , entonces

$$\theta(e, x) = x \quad \text{para todo } x \in M.$$

(ii) Si  $g_1, g_2 \in G$ , entonces

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x) \quad \text{para todo } x \in M.$$

Para facilitar la notación, escribiremos  $gx$  en lugar de  $\theta(g, x)$ ; así, podemos escribir (ii) como  $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$ .

Si para cada  $g \in G$  definimos  $\theta_g : M \rightarrow M$  por

$$\theta_g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(g, x), \tag{1.1}$$

entonces las condiciones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera:

(i') Si  $e$  es el elemento identidad en  $G$ , entonces  $\theta_e = id_M$  (la función identidad en  $M$ ).

(ii') Si  $g_1, g_2 \in G$ , entonces  $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$ .

Obsérvese que  $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$ , ya que  $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g = \theta_{g^{-1}g} = \theta_e = id_M$ . De donde se sigue que  $\theta_g$  es biyectiva con inversa  $\theta_{g^{-1}}$ .

Si  $G$  es un grupo que actúa sobre un subconjunto  $A \subset M$ , denotaremos por  $GA$  al conjunto  $\{ga \mid g \in G \text{ y } a \in A\}$ .

La  $G$ -órbita de  $x \in M$  es el conjunto  $Gx \stackrel{\text{def}}{=} G\{x\}$ . Si  $Gx = x$ , entonces  $x$  es un *punto fijo* de  $G$ ; si  $Gx = M$ , para algún  $x$ , entonces  $G$  se dice ser *transitivo* sobre  $M$ . En este caso  $Gx = M$  para todo  $x$ . Por ejemplo, el grupo aditivo  $G = (\mathbb{Z}, +)$  es transitivo sobre  $M = \mathbb{Z}$ , donde la acción está dada por la suma usual de enteros,  $\theta(g, x) = g + x$ .

Denotaremos por  $M/G$  al conjunto de todas las  $G$ -órbitas de  $M$ . Tal conjunto es llamado el *espacio cociente*. Sea  $h: M \rightarrow M/G$ , definida por

$$x \mapsto h(x) = Gx,$$

esto es,  $h$  envía puntos de  $M$  a su correspondiente  $G$ -órbita. Tal función es llamada la *proyección natural* de  $M$  en  $M/G$ . Obsérvese que  $h$  siempre es sobreyectiva, pero no necesariamente inyectiva. Por ejemplo, sea  $G = (\mathbb{Z}, +)$  y  $M = \mathbb{R}$ , donde  $\theta(g, x) = g + x$  (suma usual). La proyección natural está dada por

$$x \mapsto h(x) = x + \mathbb{Z} = \{x + z \mid z \in \mathbb{Z}\},$$

la cual no es inyectiva.

Cuando  $M$  es un espacio topológico, la proyección natural induce la topología cociente en  $M/G$ , es decir, un conjunto  $W \subset M/G$  es abierto sí y sólo si la imagen inversa de  $W$ ,  $h^{-1}(W)$ , es abierto en  $M$ . Así,  $M/G$  es un espacio topológico, con la topología cociente inducida por  $h$  y la topología de  $M$ .

Diremos que una acción  $\theta$  es *continua* si para cada  $g \in G$ , la función  $\theta_g$  satisface las siguientes propiedades:

- $\theta_g$  es continua,
- $\theta_g$  es biyectiva y,
- $(\theta_g)^{-1}$  es continua.

En este trabajo sólo consideraremos acciones continuas.

Obsérvese que el conjunto  $\{\theta_g \mid g \in G\}$  forma un grupo bajo la composición de funciones, donde el elemento identidad es  $\theta_e$  y el elemento inverso de  $\theta_g$  es precisamente  $\theta_{g^{-1}}$ .

**Acción libre.** En el caso cuando la acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $M$  satisfaga la siguiente propiedad:

- si  $gx = x$ , para algún  $x \in M$ , entonces  $g = e$ ,

diremos que la acción es una *acción libre*.

Esta condición implica que no existen puntos fijos para la función  $\theta_g$  (con  $g \neq e$ ), definida por (1.1). Además, se establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de  $G$  y el conjunto  $\{\theta_g \mid g \in G\}$ , dada por  $g \mapsto \theta_g$ . Este conjunto es un grupo bajo la composición de funciones, de hecho, tal correspondencia define un isomorfismo de grupos.

**Acción propia.** Un grupo discreto  $\Gamma$  se dice actuar *propia*mente sobre un espacio topológico  $M$  si satisface la siguiente condición:

- Para cada  $x \in M$  existe una vecindad abierta  $U$  tal que el conjunto  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\}$  es finito.

Obsérvese que la acción de un grupo finito siempre es propia, sin embargo, no tiene por qué ser libre; basta tomar un grupo finito de tal manera que algunos de sus elementos tengan puntos fijos. Tampoco es cierto que si una acción es libre entonces es propia.

En efecto, consideremos el siguiente ejemplo: Sea  $T = \{f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_r(x) = x + r, r \in \mathbb{Q}\}$ , es claro que  $T$  es un grupo discreto con la composición de funciones. Si tomamos  $\theta(f_r, x) = f_r(x)$ , entonces  $\theta$  define una acción de  $T$  sobre  $\mathbb{R}$ . Es fácil ver que tal acción es libre, sin embargo, esta acción no es propia (ya que  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ ).

**Acción discontinua.** Decimos que un grupo  $G$  actúa *discontinua*mente sobre un espacio topológico  $M$  si la acción satisface la siguiente condición:

- Si  $x, y \in M$  no están en una misma órbita, entonces existen vecindades  $U$  y  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tales que  $U \cap \Gamma V = \emptyset$ .

**Espacio cociente Hausdorff.** Un espacio topológico  $M$  es *Hausdorff* si para cada par puntos distintos  $x, y \in M$  existen vecindades abiertas  $U, V$  de  $x$  y  $y$ , respectivamente, tales que  $U \cap V = \emptyset$ .

En general, el espacio cociente  $M/\Gamma$  no es Hausdorff, aun siéndolo  $M$ . El siguiente teorema nos da condiciones suficientes bajo las cuales  $M/\Gamma$  es un espacio topológico Hausdorff en términos de la topología de  $M$  y la acción de  $\Gamma$  (ver, por ejemplo [6]).

**Teorema 1.1** *Sea  $\Gamma$  un grupo discreto y  $M$  un espacio topológico Hausdorff. Si  $\Gamma$  actúa discontinuamente sobre  $M$ , entonces  $M/\Gamma$  es un espacio topológico Hausdorff (con la topología cociente).*

**Demostración.** En efecto, sean  $u, v$  puntos distintos del espacio cociente y  $x, y \in M$  tales que  $u = \Gamma x$  y  $v = \Gamma y$ . Si  $\Gamma$  actúa discontinuamente sobre  $M$ , entonces existen vecindades  $U$  y  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tales que  $U \cap \Gamma V = \emptyset$ . Obsérvese que para cada  $\gamma \in \Gamma$  se tiene que  $\gamma U \cap \Gamma V = \emptyset$ , pues de no ser así, existirían  $\tilde{u} \in U$ ,  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  y  $\tilde{v} \in V$  tales que  $\gamma \tilde{u} = \tilde{\gamma} \tilde{v}$  y por tanto  $\tilde{u} = \gamma^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{v} \in \Gamma V$  y entonces  $U \cap \Gamma V \neq \emptyset$ , lo cual es absurdo. De aquí se sigue que  $\Gamma U \cap \Gamma V = \emptyset$ . Ahora, si  $U$  y  $V$  son abiertos, entonces  $\gamma U$  y  $\gamma V$  son abiertos ya que suponemos que la acción es continua, y como  $\Gamma U = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$  y  $\Gamma V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma V$  se sigue que  $\Gamma U$  y  $\Gamma V$  también son abiertos (por ser unión de conjuntos abiertos). Así, hemos encontrado vecindades abiertas  $\Gamma U$  y  $\Gamma V$  de  $u$  y  $v$ , respectivamente, tales que  $\Gamma U \cap \Gamma V = \emptyset$ , por lo tanto  $M/\Gamma$  es un espacio topológico Hausdorff. ■

## 1.2 Ejemplos de espacios cociente

Existen algunos grupos que al actuar sobre  $\mathbb{R}^2$  generan espacios cociente muy interesantes y conocidos, como veremos en esta sección.

Sea  $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$  el plano Euclidiano, con la topología inducida por la métrica euclidiana (topología usual). Una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es llamada *homeomorfismo* si es continua, biyectiva y con inversa continua.

Si consideramos el conjunto de todos los homeomorfismos del plano, esto es,

$$\text{Hom}(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es homeomorfismo}\},$$

entonces para  $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$ , la composición  $f \circ g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$  y además satisface las siguientes propiedades:

1. Para  $f, g, h \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$ , se cumple  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .
2. La función identidad,  $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto x$ , es un homeomorfismo del plano,  $id \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$ , tal que  $f \circ id = id \circ f = f$  para todo  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$ .
3. Para cada  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$ , la función inversa  $f^{-1}$  es también un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$ , con  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ .

Así, el conjunto  $\text{Hom}(\mathbb{R}^2)$  forma un grupo bajo la composición, con elemento identidad  $id$ .

Existe una gran cantidad de subconjuntos de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^2)$  que también forman un grupo bajo la composición, algunos de los cuales son de suma importancia en el desarrollo de este trabajo, razón por la cual introducimos la siguiente definición.

**Definición 1.1** *Un subconjunto  $\Gamma \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$ , el cual es un grupo bajo la composición, es llamado un grupo de homeomorfismos del plano.*

Para que  $\Gamma$  sea un grupo debe satisfacer los axiomas presentados al inicio de la sección 1.1, o bien, podemos utilizar el siguiente criterio, el cual nos proporciona una manera práctica para saber si un subconjunto de un grupo es también un grupo.

**Criterio:** *Si para cada  $g_1, g_2 \in \Gamma \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$  se cumple  $g_1 \circ g_2^{-1} \in \Gamma$ , entonces  $\Gamma$  es un grupo de homeomorfismos del plano.*

Por ejemplo, el grupo  $\Gamma_1 = \{id, R_\pi\}$  (respecto a la composición), que consta de la función identidad y una rotación del plano por un ángulo igual a  $\pi$  alrededor del origen, es un grupo de homeomorfismos del plano.

Si consideramos el conjunto

$$\Gamma_2 = \{f^n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

es claro que cada  $f^n \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$  y además, si  $f^n, f^m \in \Gamma_2$  entonces  $f^n \circ f^{-m} = f^{n-m} \in \Gamma_2$ . Por lo tanto,  $\Gamma_2$  es un grupo discreto de homeomorfismos del plano (grupo de traslaciones del plano).

Además, si tomamos  $\Gamma_2$  y  $\theta(f, x) = f(x)$ , entonces  $\theta$  define una acción libre sobre  $\mathbb{R}^2$ . En cambio, si tomamos el grupo  $\Gamma_1$  con la misma acción, esta ya no es una acción libre, pues  $(0, 0)$  es un punto fijo de  $R_\pi$ . Los grupos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  actúan propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ .

De hecho, si  $\Gamma$  es un grupo de homeomorfismos del plano que actúa sobre  $\mathbb{R}^2$ , con acción

$$\theta(f, x) = f(x), \quad (1.2)$$

entonces la acción es libre si y sólo si ningún homeomorfismo (excepto la identidad) tiene puntos fijos.

Por otro lado, observemos que si  $G$  es un grupo que actúa sobre  $\mathbb{R}^2$ , con acción continua  $\theta$ , esto es,  $\theta_g$  es un homeomorfismo para cada  $g \in G$ , entonces  $\Gamma = \{\theta_g \mid g \in G\}$  es un grupo de homeomorfismos del plano.

Consideremos ahora algunos ejemplos de espacios cociente, los cuales estudiaremos con más detalle en secciones posteriores.

**El cilindro.** Sea  $a_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$a_1(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2), \quad (1.3)$$

y consideremos el conjunto

$$\Gamma_C = \langle a_1 \rangle = \{a_1^n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Es claro que tal conjunto forma un grupo bajo la composición de funciones y como  $a_1^n$  es un homeomorfismo, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , se tiene que  $\Gamma_C \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^2)$  es un grupo de homeomorfismos del plano. Llamaremos *cilindro* al espacio cociente definido por  $\mathbb{R}^2/\Gamma_C$  y la acción dada por (1.2) (ver Figura 1).

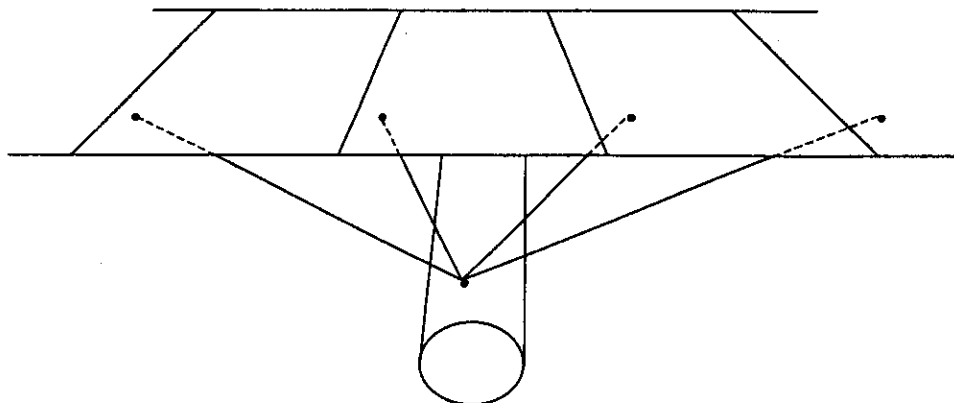


Figura 1. El cilindro  $C = \mathbb{R}^2/\Gamma_C$ .

Probaremos más adelante que  $\Gamma_C$  actúa discontinuamente y del Teorema 1.1 se sigue que el cilindro es un espacio topológico Hausdorff.

El cilindro, definido de esta manera, es homeomorfo a la superficie en  $\mathbb{R}^3$  dada por  $C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ; sin embargo, por la forma en que se definió, no tiene por qué ser considerado como un subconjunto de algún espacio euclidiano.

Es claro que si tomamos el espacio cociente  $([0, 1] \times \mathbb{R}) / \Gamma_C$ , obtenemos nuevamente el cilindro. Esto se debe a que el dominio  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  contiene al menos un representante de cada  $\Gamma_C$ -órbita. Una región conexa del plano con esta característica se llama *dominio fundamental*; así, tomaremos como dominio fundamental para el cilindro la región  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ .

**La banda de Möbius infinita.** Sea  $\iota : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\iota(x_1, x_2) = (x_1 + \frac{1}{2}, -x_2), \quad (1.4)$$

y consideremos el conjunto

$$\Gamma_M = \langle \iota \rangle = \{ \iota^n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

Nótese que  $\iota^2 = \iota \circ \iota = a_1$ . No es difícil ver que la función  $\iota$  es un homeomorfismo y tal conjunto, bajo la composición de funciones, es un grupo de homeomorfismos del plano. Al espacio cociente dado por  $\mathbb{R}^2 / \Gamma_M$  y la acción definida por (1.2) lo llamaremos *banda de Möbius infinita*. En este caso, la acción de  $\Gamma_M$  también es discontinua, de modo que  $\mathbb{R}^2 / \Gamma_M$  es un espacio topológico Hausdorff.

Para la banda de Möbius infinita tomaremos como dominio fundamental la región  $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$ . Geométricamente, este espacio puede pensarse como la banda de Möbius construida con una banda de "anchura infinita", de modo que si limitamos el dominio fundamental a la región  $[0, \frac{1}{2}] \times [-1, 1]$ , obtenemos la banda de Möbius usual.

**El toro y la botella de Klein.** Sea  $a_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$a_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1) \quad (1.5)$$

y consideremos el conjunto

$$\Gamma_T = \langle a_1, a_2 \rangle = \{ a_1^n \circ a_2^m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \},$$

donde  $a_1$  se define por (1.3). Es claro que tal conjunto es un grupo de homeomorfismos del plano. Definimos el *toro* como el espacio cociente  $\mathbb{R}^2 / \Gamma_T$

y la acción dada en (1.2), y tomaremos como dominio fundamental la región  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

La *botella de Klein* se define como el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/\Gamma_K$  con la acción (1.2), donde

$$\Gamma_K = \langle \iota, a_2 \rangle,$$

el cual también es un grupo de homeomorfismos del plano. El dominio fundamental estará dado por  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Al igual que en los casos anteriores, la acción de cada uno de estos grupos es discontinua, por lo tanto estos dos espacios también son espacios topológicos Hausdorff.

Obsérvese que los grupos  $\Gamma_C$  y  $\Gamma_M$  son cíclicos y, por lo tanto, conmutativos. El grupo  $\Gamma_T$  es generado por los elementos  $a_1$  y  $a_2$ , los cuales satisfacen:

$$\begin{aligned} a_1 \circ a_2(x_1, x_2) &= a_1(x_1, x_2 + 1) \\ &= (x_1 + 1, x_2 + 1) \\ &= a_2(x_1 + 1, x_2) \\ &= a_2 \circ a_1(x_1, x_2), \end{aligned}$$

es decir, conmutan para cada  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , por lo tanto,  $\Gamma_T$  es un grupo conmutativo. Por otro lado, los elementos  $\iota$  y  $a_2$ , generadores del grupo  $\Gamma_K$ , satisfacen la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \iota \circ a_2(x_1, x_2) &= \iota(x_1, x_2 + 1) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2 - 1\right) \\ &= a_2^{-1} \left(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2\right) \\ &= a_2^{-1} \circ \iota(x_1, x_2), \end{aligned}$$

de donde se sigue que tales elementos no conmutan, por lo tanto, el grupo  $\Gamma_K$  no es un grupo conmutativo.

### 1.3 Grupos de isometrías

Los grupos  $\Gamma_C$ ,  $\Gamma_M$ ,  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_K$  definidos en la sección anterior aparecen en el contexto de la Geometría Diferencial como mostramos a continuación.



**Definición 1.2** Una *isometría* de  $\mathbb{R}^2$ , o *isometría euclidiana*, es una función  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , la cual preserva la distancia euclidiana  $d$ , esto es,

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Al inicio de la sección 1.2 se probó que el conjunto de todos los homeomorfismos del plano forman un grupo. De hecho, las isometrías también son homeomorfismos y el conjunto de todas las isometrías de  $\mathbb{R}^2$  forman un grupo bajo la composición. Es fácil ver que cada isometría es continua, pues puntos cercanos en el dominio tienen imágenes cercanas en el contradominio ya que éstas preservan la distancia; además, puntos de distancia no nula no pueden tener imágenes de distancia nula (misma imagen), y por lo tanto cada isometría es inyectiva. Así, cada isometría es invertible, y además su inversa es continua. Aunque no es tan obvio que cada isometría es sobreyectiva, se aclarará este hecho más adelante, cuando calculemos explícitamente cada isometría de  $\mathbb{R}^2$ .

Veremos a continuación algunos ejemplos de isometrías del plano.

1. Sean  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  y  $t_{(\alpha, \beta)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$(x, y) \longmapsto t_{(\alpha, \beta)}(x, y) = (x + \alpha, y + \beta),$$

esto es,  $t_{(\alpha, \beta)}$  es una traslación del plano, donde cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es trasladado al punto  $(x + \alpha, y + \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

2. Sea  $\bar{r} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$(x, y) \longmapsto \bar{r}(x, y) = (x, -y),$$

esto es,  $\bar{r}$  es una reflexión del plano en el eje  $X$ .

3. Sea  $r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$(x, y) \longmapsto r_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

esto es,  $r_\theta$  corresponde a una rotación del plano alrededor del origen por un ángulo  $\theta$ .

Es fácil convencerse de que las funciones anteriores son isometrías.

Por otro lado, mediante composición de isometrías podemos obtener reflexiones en cualquier recta  $L$ . Si además, ésta va seguida de una traslación en un punto  $(\alpha, \beta)$ , entonces tal isometría es llamada *reflexión con traslado*. Por ejemplo, las funciones  $a_1$ ,  $a_2$  y  $\iota$  de la sección anterior se pueden escribir como  $a_1 = t_{(1,0)}$ ,  $a_2 = t_{(0,1)}$  y  $\iota = t_{(\frac{1}{2},0)} \circ \bar{r}$

Un resultado muy interesante, que nos dice cómo puede ser una isometría, es el siguiente (ver [19], p. 10):

**Lema 1.1** *Cada isometría de  $\mathbb{R}^2$  es el producto de una, dos o tres reflexiones.*

No es difícil probar (usando el lema anterior y el hecho de que cada reflexión es su propia inversa) que el conjunto de todas las isometrías de  $\mathbb{R}^2$  forman un grupo. Mediante un análisis más detallado del producto de reflexiones se puede probar lo siguiente (ver [19], p. 13):

**Clasificación de Isometrías Euclidianas.** *Cada isometría de  $\mathbb{R}^2$  es una rotación, una traslación o una reflexión con traslado.*

Si consideramos un grupo de isometrías  $\Gamma$  que actúa libremente sobre  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\Gamma$  no puede incluir rotaciones ni reflexiones, ya que éstas tienen puntos fijos. Por lo tanto, sólo puede incluir traslaciones o reflexiones con traslado propias (es decir, con traslado no nulo).

**Proposición 1.1** *Un grupo de isometrías de  $\mathbb{R}^2$  que actúa libre y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$  es generado por uno o dos elementos.*

Un hecho muy interesante y de suma importancia es que para un grupo de isometrías  $\Gamma$  con las propiedades de la Proposición 1.1, el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  es un espacio topológico Hausdorff (se sigue del Teorema 1.1) y además, su estructura está limitada a las siguientes opciones (ver [19]).

**Corolario 1.2**  *$S = \mathbb{R}^2/\Gamma$  es homeomorfo a un cilindro, una banda de Möbius infinita, un toro, o la botella de Klein.*

Resumiendo lo anterior, podemos escribir la siguiente tabla:

| Generadores de $\Gamma$                                 | Grupo $\Gamma$                   | Espacio cociente $\mathbb{R}^2/\Gamma$ |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------|
| Una traslación $g$                                      | $\Gamma = \{g^n\}$               | Cilindro                               |
| Una reflexión con traslado $g$                          | $\Gamma = \{g^n\}$               | Banda de Möbius infinita               |
| Dos traslaciones $g_1, g_2$                             | $\Gamma = \{g_1^n \circ g_2^m\}$ | Toro                                   |
| Una reflexión con traslado $g_1$ y una traslación $g_2$ | $\Gamma = \{g_1^n \circ g_2^m\}$ | Botella de Klein                       |

## Capítulo 2

### Superficies cociente

En este capítulo estudiaremos la noción de superficie cociente, la cual puede considerarse como una variedad de dimensión 2 (o superficie abstracta). Veremos que los espacios cociente definidos en el capítulo anterior pueden ser considerados como variedades diferenciables. Para esto, espezaremos introduciendo el concepto de variedad diferenciable. (Para un estudio más detallado ver, por ejemplo, [6])

#### 2.1 Superficies abstractas

Definimos una *variedad diferenciable  $n$ -dimensional*  $M$  como un espacio topológico Hausdorff con una base topológica numerable, que satisface las siguientes propiedades:

- (1) Para cada abierto  $U \subset M$  existe un homeomorfismo  $\varphi : U \longrightarrow V$ , donde  $V$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces la función  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$  entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

Llamamos *carta local* o *sistema de coordenadas* sobre  $M$  a la pareja  $(U, \varphi)$  donde  $U$  es un abierto en  $M$  y  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo de  $U$  en un abierto  $\varphi(U)$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Un *atlas*  $\mathcal{A}$  de dimensión  $n$  es una colección de cartas locales cuyos dominios cubren  $M$  y tales que, si  $(U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$  y  $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ , entonces la

función  $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$  es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$  entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Los difeomorfismos anteriores  $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$  son llamados *funciones de transición o cambio de coordenadas*, ver Figura 2.

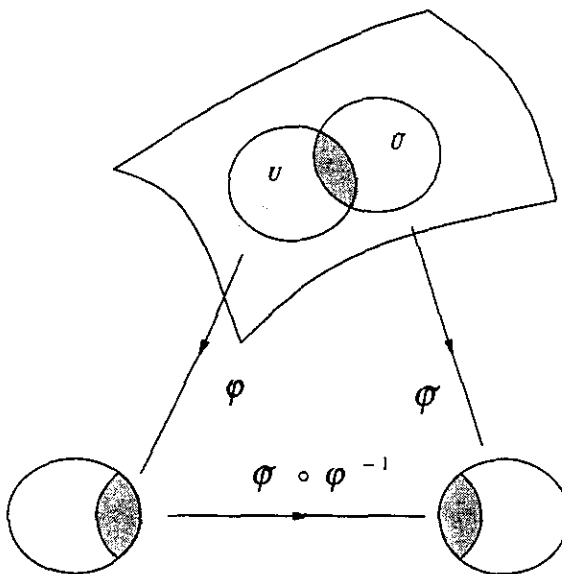


Figura 2. Funciones de transición

Es claro que si en los espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$  consideramos solo la carta  $(\mathbb{R}^n, id)$ , entonces la noción de diferenciabilidad dada anteriormente coincide con la usual.

Un atlas  $\mathcal{A}$  de clase  $C^\infty$  sobre  $M$  es llamado *maximal* cuando éste contiene todas las cartas locales  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  cuyo cambio de coordenadas con elementos  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}), \quad (2.1)$$

son difeomorfismos de clase  $C^\infty$ . La ventaja de considerar un atlas maximal  $\mathcal{A}$  es que en este caso los dominios de las cartas locales forman una base topológica de  $M$ .

Por otro lado, cada atlas  $\mathcal{A}$  está contenido en un único atlas maximal  $\overline{\mathcal{A}}$ . De hecho,  $\overline{\mathcal{A}}$  se define como la unión de todas las cartas locales  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  tales que si  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  y  $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ , entonces los cambios de coordenadas (2.1) son de clase  $C^\infty$ .

Un atlas maximal de dimensión  $n$  y clase  $C^\infty$  sobre  $M$  es llamado una *estructura diferenciable de dimensión  $n$  y clase  $C^\infty$* .

En éstos términos, una *variedad diferenciable*  $M$  (o de clase  $C^\infty$ ) de *dimensión*  $n$  es un espacio topológico Hausdorff  $M$  con una base numerable y con una estructura diferenciable de dimensión  $n$  y clase  $C^\infty$ . Es usual denotar a una variedad  $M$  de dimensión  $n$  por  $M^n$ .

Llamaremos *superficie abstracta* (o *superficie*) a una variedad diferenciable de clase  $C^\infty$  y dimensión 2.

Una función continua  $f : M \rightarrow N$  entre espacios  $M$  y  $N$  con estructuras diferenciables  $C^\infty$  es de suave (diferenciable) si y sólo si para cada  $x \in M$  existen cartas locales  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  sobre  $M$  y  $N$ , respectivamente, tales que  $x \in U$ ,  $f(U) \subset V$  y  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^\infty$ .

Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables suaves y  $f : M \rightarrow N$  una función continua. Decimos que  $f$  es un *difeomorfismo* si satisface las siguientes propiedades:

- $f$  es de clase  $C^\infty$ ,
- $f$  es biyectiva,
- $f^{-1}$  es de clase  $C^\infty$ .

Cuando existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  entre las variedades  $M$  y  $N$ , se dice que las variedades son *difeomorfas*.

Sea  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $m$  un punto sobre  $M$ . Consideremos una curva suave  $\alpha : (-T, T) \rightarrow M$ , tal que  $\alpha(0) = m$ . Si  $(U, \varphi)$  es una carta local alrededor de  $m$ , entonces  $\varphi \circ \alpha$  es una curva suave en  $\mathbb{R}^n$ , con vector velocidad en el punto  $(\varphi \circ \alpha)(0)$  dado por  $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0}$ .

Si  $\beta : (-T', T') \rightarrow M$  es otra curva suave sobre  $M$ , decimos que  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes si y sólo si  $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)|_{t=0}$ .

Un *vector tangente* a  $M$  en el punto  $m$ , se define como una clase de equivalencia de curvas  $\alpha(t)$ , con  $\alpha(0) = m$ .

El conjunto de vectores tangente a  $M$  en el punto  $m$  forma un *espacio vectorial* con las operaciones usuales de suma de vectores y multiplicación de un vector por un número real. Este espacio es llamado el *espacio tangente* a  $M$  en el punto  $m$ , y se denota por  $T_m M$ .

La unión de todos los espacio tangente a  $M$  en cada uno de sus puntos,  $\bigcup_{m \in M} T_m M$ , tiene una estructura natural de variedad diferenciable y su dimensión es  $2n$ .

Esta variedad es llamada el *haz tangente* de  $M$  y se denota por  $TM$ . Una función suave  $X : M \rightarrow TM$ , dada por

$$m \mapsto X(m) \in T_m M.$$

es llamada *campo vectorial* sobre  $M$ .

**Variedades orientables.** Consideremos ahora, una variedad diferenciable  $M$ . Decimos que  $M$  es *orientable* si admite una estructura diferenciable  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  tal que:

- (i) para todo  $\alpha, \beta$ , con  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , la diferencial del cambio de coordenadas tiene determinante positivo.

En caso contrario decimos que  $M$  es *no-orientable*. Si  $M$  es orientable, una elección de una estructura diferenciable que satisface (i) es llamada una *orientación* de  $M$ . Entonces  $M$  se dice *orientada*. Dos estructuras diferenciables que satisfacen (i) determinan la misma orientación si su unión de nuevo satisface (i).

**Variedades no-Hausdorff.** En la definición de variedad se requirió que cada variedad diferenciable sea un espacio topológico Hausdorff. Sin embargo, existen espacios que satisfacen todos los axiomas de la definición de variedad excepto la de ser Hausdorff. Tales espacios son llamados *variedades no-Hausdorff*.

Veamos el siguiente ejemplo. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = (1 - x^2)e^y$ . Es fácil ver que las curvas de nivel de  $f$ ,  $f^{-1}(t)$ ,  $t$  fijo, tienen la forma dada en la Figura 3.

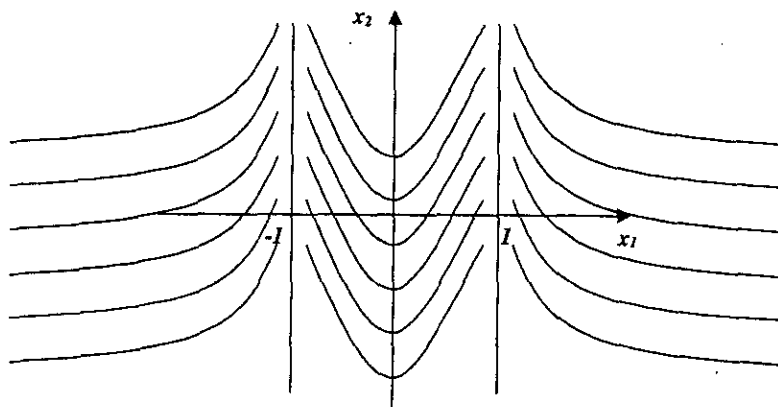


Figura 3. Curvas de nivel de  $f$

Cada componente conexa de una curva de nivel de  $f$  es llamada una *rama* de  $f$ . Sea  $M$  el espacio cociente de  $\mathbb{R}^2$  por la relación de equivalencia que identifica puntos en la misma rama de  $f$ . Sea  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  la proyección natural. El espacio  $M$  con la topología cociente no es Hausdorff ya que los puntos  $a = h(1, t)$  y  $b = h(-1, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , son puntos de ramificación, esto es, no admiten vecindades ajenas de  $M$ . Sin embargo, es posible definir un atlas  $C^\infty$  sobre  $M$  de dimensión 1.

En efecto, consideremos los conjuntos  $U_1 = \{h(x, y) \in M \mid x < 1\}$  y  $U_2 = \{h(x, y) \in M \mid x > -1\}$ , los cuales son abiertos en  $M$  y  $M = U_1 \cup U_2$ . Definimos  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi_i(h(x, y)) = f(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ . Es fácil probar que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son homeomorfismos, que  $\varphi_i(U_1 \cap U_2) = (0, +\infty)$  y  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  es la identidad en  $(0, +\infty)$ . Entonces  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  es un atlas  $C^\infty$  para  $M$ .

Obsérvese que  $M$  es homeomorfa al espacio cociente de dos copias ajenas de  $\mathbb{R}$  por la relación de equivalencia la cual identifica puntos con la misma coordenada negativa.

## 2.2 Grupos de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ y superficies cociente

Sea  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  el conjunto de todos los difeomorfismos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , esto es,

$$\text{Diff}(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es difeomorfismo}\}.$$

Es fácil ver que tal conjunto es un grupo bajo la composición de funciones. Veremos enseguida la estructura de los espacios cociente obtenidos bajo la acción de ciertos subgrupos de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ . Diremos que  $\Gamma$  es *grupo de difeomorfismos del plano* (o de  $\mathbb{R}^2$ ) si  $\Gamma \subset \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  es un grupo bajo la composición de funciones.

Al igual que en la sección 1.1, tenemos un resultado acerca de la acción de  $\Gamma$  sobre el plano (ver [6], p.97).

**Teorema 2.1** Sea  $\Gamma$  un grupo discreto de difeomorfismos del plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ . Entonces existe una única estructura  $C^\infty$  de variedad diferenciable sobre  $M = \mathbb{R}^2 / \Gamma$  (con la topología cociente inducida por la proyección natural  $h$  y la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ ), tal que cada  $p \in M$  tiene una vecindad conexa  $U$  con la siguiente propiedad:  $h^{-1}(U) = \cup U_\alpha$  es una descomposición de  $h^{-1}(U)$  en sus componentes conexas (abiertas) y  $h|_{U_\alpha}$  es un difeomorfismo sobre  $U$  para cada componente  $U_\alpha$ .

Consideremos los grupos  $\Gamma_C$ ,  $\Gamma_M$ ,  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_K$  definidos en la sección 1.2. Estos grupos son generados por los elementos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $\iota$ , los cuales claramente son difeomorfismos de clase  $C^\infty$ . Por lo tanto, cada uno de estos es un grupo de difeomorfismos del plano.

Mostraremos que tales grupos actúan libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Es claro que la acción de tales grupos sobre  $\mathbb{R}^2$  es libre, ya que ninguno de sus elementos (excepto la identidad) tiene puntos fijos. Para probar que la acción es propia basta tomar, para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , la vecindad  $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x_0, x) < \frac{1}{8}\}$ , con la que se obtiene  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\} = \emptyset$  y, por lo tanto finito.

Mostraremos enseguida que la acción de estos grupos es discontinua, para lo cual procederemos de la siguiente manera: Supongamos que para todas las vecindades  $U$  y  $V$  de  $x$  y  $y$ , se tiene que  $U \cap \Gamma V \neq \emptyset$  y mostraremos que  $x$  y  $y$  están en la misma  $\Gamma$ -órbita. En particular, la hipótesis se cumple para las sucesiones de vecindades  $U_n$  y  $V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , donde

$$U_n = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, z) < \frac{1}{n} \right\} \text{ y } V_n = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \mid d(y, z) < \frac{1}{n} \right\}.$$

De modo que para cada  $n$  existe  $z_n \in U_n \cap \Gamma V_n$ , por lo tanto,  $z_n \in U_n$  y  $z_n \in \Gamma V_n$  para todo  $n$ . Del hecho de que  $z_n \in U_n$  para todo  $n$  se sigue que  $z_n \rightarrow x$ .

Por otro lado, si tomamos  $n$  suficientemente grande, entonces el conjunto  $\Gamma V_n$  se puede expresar como

$$\Gamma V_n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma V_n$$

donde esta unión es una unión ajena. Esta propiedad se sigue del hecho de que para todos los grupos en consideración cada elemento de una  $\Gamma$ -órbita está separado del resto de los elementos de la misma  $\Gamma$ -órbita por una distancia mayor a  $\frac{1}{8}$ . Por lo tanto, para  $n > 8$  debe existir  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $z_n \in \gamma V_n$  para todo  $n > 8$ , pues  $z_n \in U_n$  para todo  $n$ ; de donde se sigue que  $z_n \rightarrow \gamma y$  y como  $z_n \rightarrow x$ , obtenemos que  $\gamma y = x$ , es decir,  $x$  y  $y$  están en la misma  $\Gamma$ -órbita.

Así, por el teorema anterior y el Teorema 1.1, se sigue que los espacios cociente definidos en la sección 1.2 poseen una estructura de variedad diferenciable inducida por la proyección natural y la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ . En



estos términos, llamaremos *superficies cociente* a estos espacios con tal estructura de variedad diferenciable. Formalmente, los podemos definir de la siguiente manera.

**Definición 2.1** Si  $\Gamma$  es un grupo discreto de difeomorfismos del plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ , llamamos *superficie cociente* a la variedad diferenciable  $M = \mathbb{R}^2 / \Gamma$ , con la estructura diferenciable inducida por la proyección natural y la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ .

En estos términos, se tiene que el cilindro, la banda de Möbius infinita, el toro y la botella de Klein son superficies cociente.

## 2.3 Grupo fundamental

Una característica topológica muy importante asociada a espacios topológicos (y en particular a una variedad diferenciable) es el grupo fundamental.

**Definición 2.2** Sean  $F, G$  funciones continuas de un espacio topológico  $X$  a un espacio topológico  $Y$  y sea  $I = [0, 1]$ , el intervalo unitario. Entonces  $F$  es homotópica a  $G$  si existe una función continua (llamada homotopía)

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

la cual satisface las condiciones:  $F(x) = H(x, 0)$  y  $G(x) = H(x, 1)$  para todo  $x \in X$ .

Si además,  $X$  y  $Y$  son variedades diferenciables y  $F, G : X \longrightarrow Y$  son funciones de clase  $C^\infty$ , decimos que la homotopía es suave (o de clase  $C^\infty$ ) si  $H$  es suave.

Como una primera aplicación del concepto de homotopía consideremos las clases de homotopía de funciones continuas del intervalo unitario  $I = [0, 1]$  sobre una variedad  $M$ . Una función  $f : I \longrightarrow M$  de este tipo es llamada un *camino*,  $f(0)$  su punto inicial, y  $f(1)$  su punto final. Consideraremos clases de homotopías bajo la restricción adicional de que las homotopías mantengan sus puntos inicial y final fijos, esto es,  $H(t, 0)$  y  $H(t, 1)$  son funciones constantes. Dada una variedad  $M$ , fijamos un punto base  $b$  sobre  $M$  y consideramos los caminos con  $b$  como punto inicial. Si  $b$  es también el punto final, entonces el camino es llamado un *lazo*; así, un lazo es una función continua  $f : I \longrightarrow M$

tal que  $f(0) = b = f(1)$ . Denotamos su clase de homotopía por  $[f]$ . Entre las clases de homotopía esta el lazo constante  $e_b(s) = b, 0 \leq s \leq 1$ . Si esta es la única clase de homotopía y  $M$  es conexa, entonces decimos que  $M$  es simplemente conexa; esto significa que todo lazo en  $b$  puede ser deformado sobre  $M$  al lazo constante.

Si  $M$  es una variedad conexa y  $f, g$  son caminos sobre  $M$  con el punto final  $f(1)$  que coincide con el punto inicial  $g(0)$ , podemos claramente combinar estas para formar un sólo camino  $h$  después de reajustar la parametrización; en efecto,

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

es obviamente una función continua  $h : I \rightarrow M$  que recorre la imagen de  $f$  y enseguida la de  $g$ . Llamaremos esto el producto de  $f$  y  $g$ , denotado  $f * g$ .

**Teorema 2.2** Sea  $\pi_1(M, b)$  el conjunto de clases de homotopía de todos los lazos en  $b \in M$ . Entonces  $\pi_1(M, b)$  es un grupo con el producto  $[f][g] = [f * g]$ . Si  $F : M \rightarrow N$  es continua, entonces  $F$  determina un homomorfismo  $F_* : \pi_1(M, b) \rightarrow \pi_1(N, F(b))$  por  $F_*[f] = [F \circ f]$ .

El grupo  $\pi_1(M, b)$  es llamado el grupo fundamental (ver [6]).

**Corolario 2.3** Si  $M_1$  y  $M_2$  son homeomorfos mediante  $F : M_1 \rightarrow M_2$  y  $F(b_1) = b_2$ , entonces  $F_*$  es un isomorfismo entre los correspondientes grupos fundamentales  $\pi_1(M_1, b_1) \cong \pi_1(M_2, b_2)$ .

Si la función identidad de  $M$  en  $M$  es homotópica a la función constante de  $M$  sobre uno de sus puntos  $b$ , entonces  $M$  se dice ser *contractible* a  $b$ . Por ejemplo, cualquier subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  el cual tenga forma de estrella con respecto a un punto  $b$  es contractible ya que  $H(x, t) = (1 - t)x + tb$  es una homotopía.

Para espacios contractibles tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 2.4** Si  $M$  es contractible a un punto  $b$ , entonces  $\pi_1(M, b) = \{e\}$ . De esto se sigue que  $M$  es simplemente conexa.

De aquí, se sigue que  $\pi_1(\mathbb{R}^2) = \{e\}$ . Un resultado importante relativo a los espacios cociente considerados es el siguiente. (ver [19], p. 146)

**Teorema 2.5** Si  $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , entonces  $\pi_1(S) \cong \Gamma$

Como una aplicación de este teorema, calculemos el grupo fundamental del toro y la botella de Klein.

Para el toro, definido como el espacio cociente  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma_T$  se tiene que

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \Gamma_T.$$

El grupo  $\Gamma_T$  es generado por los difeomorfismos  $a_1$  y  $a_2$  y no es difícil ver que

$$a_1^m \circ a_2^n \longmapsto (m, n)$$

es un isomorfismo entre  $\Gamma_T$  y  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , ya que  $a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1$ ; por lo tanto

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Para la botella de Klein definida como el espacio cociente  $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2/\Gamma_K$  se tiene que

$$\pi_1(\mathbb{K}) \cong \Gamma_K.$$

El grupo  $\Gamma_K$  es definido abstractamente por los generadores  $\iota$ ,  $a_2$  y la relación

$$\iota = a_2 \iota a_2.$$

## Capítulo 3

# Elementos de cálculo en superficies cociente y sistemas dinámicos

En este capítulo estudiaremos algunos elementos de cálculo y sistemas dinámicos sobre superficies cociente. Podemos estudiar tales nociones considerando a las superficies cociente como superficies abstractas, para lo cual es necesario hacer uso de cartas locales sobre tales superficies, difeomorfismos, etcétera. La manera en que realizaremos tal estudio será añadiendo ciertas condiciones a tales elementos de cálculo y sistemas dinámicos en el plano, de tal forma que puedan definirse en superficies cociente. De esta manera, tenemos la ventaja de poder aplicar los resultados que tengamos en el plano a una superficie cociente.

### 3.1 Campos vectoriales

Empezaremos recordando algunos resultados acerca de campos vectoriales en el plano, para posteriormente dar condiciones bajo las cuales un campo vectorial en el plano puede definirse como un campo vectorial en una superficie cociente  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ .

Consideremos un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ , dado por

$$x \longmapsto X(x) = (X_1(x), X_2(x)) \in T_x \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2,$$

donde  $X_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , son funciones suaves. Se dice que  $X$  no tiene puntos críticos si  $X(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  al conjunto de todos los campos vectoriales suaves y sin puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo, entonces podemos definir otro campo vectorial  $f_*X$  dado por

$$(f_*X)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (d_{f^{-1}(x)}f)X(f^{-1}(x)) \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^2,$$

donde  $d_x f : T_x \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^2$  es la diferencial de  $f$ . Cabe destacar que si el campo vectorial  $X$  no tiene puntos críticos, entonces el campo  $f_*X$  tampoco los tiene, ya que la diferencial de  $f$  es no singular.

No es difícil probar que esta operación satisface las siguientes propiedades:

- $f_*(X_1 + X_2) = (f_*X_1) + (f_*X_2)$  para cualesquiera campos vectoriales  $X_1$  y  $X_2$  en  $\mathbb{R}^2$ ;
- Para cada función suave  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y un campo vectorial  $X$  tenemos

$$f_*(\varphi X) = (f_*\varphi)(f_*X)$$

donde  $(f_*\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \circ f^{-1})(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Si  $f_*X = X$ , se dice que  $X$  es invariante respecto a  $f$ .

Sea  $\Gamma$  un grupo de difeomorfismos del plano y  $X$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $X$  es invariante respecto a  $\Gamma$  si satisface la siguiente condición:

$$\gamma_*X = X \quad \text{para cada } \gamma \in \Gamma.$$

**Proposición 3.1** Sea  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$  una superficie cociente, donde  $\Gamma$  es un grupo de difeomorfismos del plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$  y  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  la proyección natural. Si  $X$  es un campo vectorial en el plano invariante respecto a  $\Gamma$ , entonces existe un único campo vectorial  $X_M$  sobre  $M$  tal que

$$(d_x h)(X(x)) = X_M(h(x)). \quad (3.1)$$

Recíprocamente, si  $X_M$  es un campo vectorial sobre  $M$ , entonces existe un único campo en  $\mathbb{R}^2$  invariante respecto a  $\Gamma$  que satisface (3.1).

Es claro que si  $(M, X_M)$  es un sistema dinámico sobre la superficie cociente  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , entonces existe un único sistema dinámico en el plano  $(\mathbb{R}^2, X)$  que induce al sistema  $(M, X_M)$ . Así, a cada sistema en el plano  $(\mathbb{R}^2, X)$  que sea invariante respecto a  $\Gamma$  le corresponde un único sistema  $(M, X_M)$  sobre  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ . Esto establece una correspondencia biunívoca entre los sistemas en el plano invariantes respecto a  $\Gamma$  y los sistemas dinámicos en  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ .

Consideremos una superficie cociente  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo de difeomorfismos del plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ . Definimos un campo vectorial  $X_M$  en la superficie  $M$ , como un campo vectorial  $X$  en el plano el cual es invariante respecto a  $\Gamma$ , es decir,

$$\gamma_* X = X$$

para cada  $\gamma \in \Gamma$ . Si  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ , entonces basta pedir que satisfaga

$$(\gamma_i)_* X = X$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

De igual manera, funciones y formas diferenciales definidas en el plano pueden ser definidas en el espacio cociente; basta pedirles que sean invariantes respecto a  $\Gamma$ .

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y  $\Gamma$  un grupo discreto de difeomorfismos del plano. Decimos que  $f$  es invariante respecto a  $\Gamma$  si

$$\gamma_* f = f$$

para cada  $\gamma \in \Gamma$ , donde  $\gamma_* f \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \gamma^{-1}$ .

Si  $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$  es una 1-forma diferencial en plano y  $\mathbf{f} : (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2)$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$ , definimos

$$\mathbf{f}_* \omega \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{f}_* \omega_1) dy_1 + (\mathbf{f}_* \omega_2) dy_2$$

y decimos que  $\omega$  es invariante respecto a  $\mathbf{f}$  si  $\mathbf{f}_* \omega = \omega$ . Además, si  $\Gamma$  un grupo discreto de difeomorfismos del plano, se dice que  $\omega$  es invariante respecto a  $\Gamma$  si

$$\gamma_* \omega = \omega$$

para cada  $\gamma \in \Gamma$ .

A continuación, veremos cómo se expresan explícitamente, en términos del grupo  $\Gamma$ , las condiciones bajo las cuales los elementos enunciados pueden definirse sobre las siguientes superficies cociente.

**El cilindro.** Sea  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ . En general,  $X$  no define un campo vectorial en  $C = \mathbb{R}^2/\Gamma_C$ , pues para  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  no necesariamente se tiene  $X(x_1, x_2) = X(x_1 + 1, x_2)$ , lo que da lugar a la posibilidad de tener dos vectores tangente en un mismo punto de  $C$ , ya que  $h(x_1, x_2) = h(x_1 + 1, x_2)$ , es decir,  $(x_1, x_2)$  y  $(x_1 + 1, x_2)$  definen el mismo punto en el cilindro.

Para eliminar tal situación pedimos que  $X$  sea *invariante respecto a la acción de  $\Gamma$* , esto es,

$$(a_1)_*X = X, \quad (3.2)$$

Veamos cómo se expresa tal condición en términos de las coordenadas del campo  $X$ ,

$$\begin{aligned} (a_1)_*X(x) &= (d_{a_1^{-1}(x)}a_1)X(a_1^{-1}(x)) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(x_1 - 1, x_2) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x_1 - 1, x_2) \\ X_2(x_1 - 1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1(x_1 - 1, x_2) \\ X_2(x_1 - 1, x_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego, de la condición (3.2) se sigue que

$$X_i(x_1, x_2) = X_i(x_1 - 1, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

La condición anterior nos dice que todo campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  con  $X_i$  periódica, de período 1 en la primera componente, define un campo vectorial en el cilindro. Es claro que si tenemos un campo vectorial sobre  $C$ , siempre podemos definir un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ , el cual satisface (3.3). Así, para estudiar los campos vectoriales sobre  $C$ , basta estudiar los campos  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  que sean invariantes respecto a la acción de  $\Gamma_C$ , es decir, que satisfacen (3.3).

**La banda de Möbius infinita.** Para que un campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  defina un campo vectorial sobre  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^2/\Gamma_M$ , éste debe asignarle a todo punto del plano que corresponde a un mismo punto en  $\mathbb{M}$ , el mismo vector tangente, es decir, debe ser invariante bajo la acción de  $\Gamma_M$ ,

$$\iota_* X = X. \quad (3.4)$$

Además, como

$$\begin{aligned} (\iota_* X)(x) &= (d_{\iota^{-1}(x)} \iota) X(\iota^{-1}(x)) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X\left(x_1 - \frac{1}{2}, -x_2\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1\left(x_1 - \frac{1}{2}, -x_2\right) \\ X_2\left(x_1 - \frac{1}{2}, -x_2\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1\left(x_1 - \frac{1}{2}, -x_2\right) \\ -X_2\left(x_1 - \frac{1}{2}, -x_2\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se sigue, usando la condición (3.4) que

$$\begin{aligned} X_1\left(x_1 - \frac{1}{2}, -x_2\right) &= X_1(x_1, x_2) \\ -X_2\left(x_1 - \frac{1}{2}, -x_2\right) &= X_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notemos que si  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  satisface las condiciones anteriores, entonces satisface (3.3). Por lo tanto, todo campo sobre  $\mathbb{R}^2$  que define un campo vectorial sobre  $\mathbb{M}$  define también un campo vectorial sobre  $C$ . El recíproco no es cierto.

**El toro.** Al igual que en los casos anteriores, si deseamos que un campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  defina un campo vectorial en  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma_T$ , este debe ser invariante respecto a la acción de  $\Gamma_T$ , es decir, debe satisfacer

$$(a_1)_* X = X \quad \text{y} \quad (a_2)_* X = X. \quad (3.6)$$

En término de coordenadas, la condición  $(a_1)_* X = X$  está dada por las



ecuaciones (3.3). Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (a_2)_* X(x) &= (d_{a_2^{-1}(x)} a_2) X(a_2^{-1}(x)) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(x_1, x_2 - 1) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2 - 1) \\ X_2(x_1, x_2 - 1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2 - 1) \\ X_2(x_1, x_2 - 1) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

entonces, de la condición  $(a_2)_* X = X$  y las ecuaciones (3.3) se tiene que un campo vectorial en el plano define un campo vectorial en el toro si sus componentes satisfacen

$$X_i(x_1, x_2) = X_i(x_1 + 1, x_2) = X_i(x_1, x_2 + 1), \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

Es decir, todo campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ , donde cada  $X_i$  es periódica, de período 1 en cada componente, define un campo vectorial en  $\mathbb{T}^2$ .

**La botella de Klein.** Un campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  define un campo en  $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2/\Gamma_K$  si y sólo si,  $X$  es invariante respecto a la acción de  $\Gamma_K$ , es decir,

$$(\iota)_* X = X \quad \text{y} \quad (a_2)_* X = X, \quad (3.8)$$

que en términos de las componentes del campo, se escribe como

$$\begin{aligned}
 X_1(x_1, x_2) &= X_1(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = X_1(x_1, x_2 + 1), \\
 X_2(x_1, x_2) &= -X_2(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = X_2(x_1, x_2 + 1)
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como todo campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  que satisface (3.9) es un campo vectorial con componentes periódicas de período 1 en ambas variables, entonces también satisface (3.7), por lo tanto se sigue que todo campo sobre  $\mathbb{K}$  define un campo sobre  $\mathbb{T}^2$ .

Obsérvese la analogía entre los campos vectoriales del cilindro y la banda de Möbius infinita.

La siguiente tabla muestra las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de la 1-forma  $\omega$  y la función  $f$  de tal manera que puedan definirse en el espacio cociente indicado.

**Superficie cociente  $\mathbb{R}^2/\Gamma$** **Condición de invarianza***Cilindro:*

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, x_2)$$

$$\omega_i(x_1, x_2) = \omega_i(x_1 + 1, x_2)$$

*Banda de Möbius infinita:*

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2)$$

$$\omega_i(x_1, x_2) = -\omega_i(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2)$$

$$\omega_i(x_1, x_2) = \omega_i(x_1, x_2 + 1)$$

*Toro:*

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, x_2)$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 1)$$

$$\omega_i(x_1, x_2) = \omega_i(x_1 + 1, x_2)$$

$$\omega_i(x_1, x_2) = \omega_i(x_1, x_2 + 1)$$

*Botella de Klein:*

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2)$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 1)$$

$$\omega_i(x_1, x_2) = -\omega_i(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2)$$

$$\omega_i(x_1, x_2) = \omega_i(x_1, x_2 + 1)$$

### 3.2 Sistemas dinámicos en superficies cociente

En esta sección introducimos algunos conceptos y resultados acerca de sistemas dinámicos en el plano, para después definir tales conceptos en superficies cociente.

Sean  $\mathbb{R}^2$  el plano euclidiano y  $X = (X_1, X_2)$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ . Llamaremos *sistema dinámico en el plano*, asociado al campo  $X$ , a un sistema de dos ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

y lo denotaremos  $(\mathbb{R}^2, X)$ . Un sistema dinámico en el plano cuyas componentes del campo no dependen de  $t$  es llamado un *sistema autónomo* en  $\mathbb{R}^2$ , como es el caso de todos los sistemas que se estudiarán en este texto.

En el resto de este trabajo supondremos que el *campo vectorial*  $X$  del

sistema (3.10),

$$X(x) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2)) \in T_x \mathbb{R}^2,$$

es suave y sin puntos críticos,

$$X(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.11)$$

Sea  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . Por el Teorema de Existencia y Unicidad y el Teorema de Dependencia de Datos Iniciales (ver [14]), existe una única solución suave  $x(t; \xi) = (x_1(t; \xi), x_2(t; \xi))$  del sistema (3.10) que satisface la condición inicial

$$x(0; \xi) = \xi. \quad (3.12)$$

Se llama *intervalo de definición* de la solución  $x(t; \xi)$  al intervalo máximo  $I_\xi \subseteq (-\infty, \infty)$  en el que la solución  $x(t; \xi)$  está definida. Este siempre es abierto y, en general, depende del punto inicial  $\xi$ .

Si  $I_\xi = (-\infty, \infty)$  para cada punto  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , entonces el campo vectorial  $X$  se dice ser *completo*.

Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= e^{-x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= 1. \end{aligned}$$

La solución al problema con condición inicial  $x(0; \xi) = \xi$ , está dada por  $x(t, \xi) = (\ln(t + e^{\xi_1}), t + \xi_2)$ , para  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ . En este caso, el campo  $X(x) = (e^{-x_1}, 1)$  no es completo ya que  $I_\xi = (-e^{\xi_1}, \infty)$ .

Si el campo  $X$  es acotado,  $\|X\| \leq M$  para algún  $M > 0$ , entonces es completo, es decir,  $I_\xi = (-\infty, \infty)$  para cada  $\xi$ .

La curva parametrizada  $I_\xi \ni t \mapsto x(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$ , se llama *trayectoria* del sistema que pasa por el punto  $\xi$ . Es claro que la velocidad de la trayectoria  $x(t, \xi)$  en  $t = t_0$  es el vector  $X(x(t_0, \xi))$ .

Decimos que  $\xi^0 \in \mathbb{R}^2$  es un *punto crítico* del sistema (3.10) si  $X(\xi^0) = 0$ .

Si  $x(t, \xi)$  es una trayectoria del sistema (3.10) que pasa por el punto  $\xi$  al tiempo  $t = 0$  y existe  $T > 0$  tal que  $x(T, \xi) = \xi$ , entonces se dice que  $x(t, \xi)$  es una *trayectoria periódica*, y decimos que es *no periódica* en caso contrario. El mínimo valor  $T > 0$  que satisface tal relación se llama *período* de la trayectoria  $x(t, \xi)$ .

La imagen  $\gamma_\xi = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t, \xi), t \in I_\xi\}$  es una *curva orientada* (una 1-subvariedad orientada) en el plano, llamada *órbita* del sistema (3.10).

Si  $X$  es un campo vectorial completo, no es difícil ver que la solución  $x(t, \xi)$  al sistema (3.10) satisface las siguientes propiedades:

(i) *Invarianza bajo cambio de tiempo*: Para cada constante  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $x(t + \tau; \xi)$  es también una solución al sistema (3.10).

(ii) *Propiedad de grupo*: Para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$x(t_1; x(t_2; \xi)) = x(t_1 + t_2; \xi).$$

El *flujo* de un campo vectorial completo  $X$  en el plano, es la familia suave  $t$ -paramétrica de funciones  $\Phi^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que es determinada por los cambios a lo largo de las trayectorias del sistema (3.10),

$$\Phi^t(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} x(t; \xi)$$

para cada  $\xi \in \mathbb{R}^2$ .

**Proposición 3.2** *El flujo  $\Phi^t$  de un campo vectorial completo  $X$  en  $\mathbb{R}^2$  es un grupo uno-paramétrico de difeomorfismos de  $\mathbb{R}^2$ , es decir,*

(a)  $\Phi^0 \equiv \text{id}$  (la función identidad);

(b)  $\Phi^{t_1} \circ \Phi^{t_2} = \Phi^{t_1+t_2}$  para cada  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ;

(c)  $\Phi^t$  es un difeomorfismo para cada  $t \in \mathbb{R}$ , en particular,  $(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}$ .

*Recíprocamente, cada grupo uno-paramétrico de difeomorfismos  $\Phi^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  define un campo vectorial completo en  $\mathbb{R}^2$ , por la fórmula*

$$X(x) = \left. \frac{d\Phi^t(x)}{dt} \right|_{t=0},$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^2$

Para más información, ver [1, 3].

Ahora introduciremos la noción de sistema dinámico en una superficie cociente.

Sea  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$  una superficie cociente, donde  $\Gamma$  es grupo de difeomorfismos del plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Definimos un *sistema dinámico en  $M$*  como un sistema dinámico en el plano  $(\mathbb{R}^2, X)$ , el cual es invariante respecto a  $\Gamma$ , es decir,

$$\gamma_* X = X,$$

para cada  $\gamma \in \Gamma$ , y lo denotamos por  $(M, X_M)$ . Cuando  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ , es suficiente pedir que se satisfaga la condición

$$(\gamma_i)_* X = X$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Obsérvese que cada trayectoria de  $(M, X_M)$  se puede obtener de una trayectoria del sistema  $(\mathbb{R}^2, X)$  de la siguiente manera: si  $t \mapsto \alpha(t)$  es una trayectoria de  $(\mathbb{R}^2, X)$  y  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma = M$  es la proyección natural, entonces  $t \mapsto h \circ \alpha(t)$  es una trayectoria de  $(M, X_M)$ .

Además, si  $t \mapsto \alpha(t)$  es una trayectoria no periódica en el plano, puede darse el caso de que  $t \mapsto h \circ \alpha(t)$  sea una trayectoria periódica en  $M$ .

Por ejemplo, consideremos el sistema  $(\mathbb{R}^2, X)$  dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1, \\ \dot{x}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Tomemos  $\alpha(t) = (t, 0)$ , la cual es una trayectoria no periódica de  $(\mathbb{R}^2, X)$ . Además, tal sistema define también un sistema en el cilindro  $(C, X_C)$  ya que  $X_i(x_1, x_2) = X_i(x_1 + 1, x_2)$ . Entonces,  $(h \circ \alpha)(t)$  es una trayectoria en el cilindro la cual está dada por

$$(h \circ \alpha)(t) = h(t, 0)$$

Por otro lado, como los puntos  $(t, 0)$  y  $(t + k, 0)$  están en la misma órbita para  $k$  entero, se sigue que  $h(t, 0) = h(t + k, 0)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, la trayectoria  $h \circ \alpha$  es periódica con período 1.

### 3.3 Equivalencia

En esta sección estudiaremos la noción de *equivalencia suave* para sistemas dinámicos en superficies cociente. Empezaremos con un análisis de las condiciones bajo las cuales un difeomorfismo en el plano induce un difeomorfismo en una superficie cociente.

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difeomorfismo. Si deseamos que  $f$  también sea un difeomorfismo en una superficie cociente  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo de difeomorfismos del plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $f$  debe ser tal que, la imagen bajo  $f$  de una  $\Gamma$ -órbita es también una  $\Gamma$ -órbita. En términos de los elementos de  $\Gamma$ , esto significa que para cada  $\gamma \in \Gamma$ , existe  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  tal que

$$\tilde{\gamma} \circ f = f \circ \gamma.$$

Si  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ , entonces la condición anterior es equivalente a que se satisfaga

$$\gamma_1^{m_{i1}} \dots \gamma_n^{m_{in}} \circ f = f \circ \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

para algunos enteros  $m_{ij}$ .

Usando lo anterior podemos definir formalmente un difeomorfismo en una superficie cociente de la siguiente manera.

**Criterio 3.1** Sea  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$  una superficie cociente, donde  $\Gamma$  es un grupo de difeomorfismos del plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difeomorfismo en el plano. Entonces existe un difeomorfismo  $\tilde{f} : M \rightarrow M$  tal que

$$h \circ f = \tilde{f} \circ h$$

si y solo si,  $f$  satisface la siguiente condición: para cada  $\gamma \in \Gamma$ , existe  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  tal que

$$\tilde{\gamma} \circ f = f \circ \gamma. \tag{3.13}$$

En consecuencia, cada difeomorfismo con esta propiedad induce un difeomorfismo en la superficie cociente y viceversa. Así, podemos trabajar con difeomorfismos en el plano que satisfacen esta condición.

En estos términos, damos el siguiente criterio para la equivalencia de dos sistemas dinámicos en el espacio cociente: Sean  $X_M$  y  $Y_M$  campos vectoriales en la superficie cociente  $M$  y  $X, Y$  los respectivos campos vectoriales asociados en el plano. Entonces los sistemas dinámicos  $(M, X_M)$  y  $(M, Y_M)$  son equivalentes si y sólo si, existe un difeomorfismo en el plano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisface la condición (3.13) y tal que  $f_*X = Y$ .

**Difeomorfismos en el toro y la botella de Klein.** Para que un difeomorfismo  $f$  en el plano defina un difeomorfismo una superficie cociente  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , este debe satisfacer la condición de invarianza respecto a  $\Gamma$ . En el caso del toro es posible dar explícitamente la estructura de  $f$ .

Un difeomorfismo en el toro se define como un difeomorfismo en plano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisface la condición

$$a_1^{n_{i1}} a_2^{n_{i2}} \circ f = f \circ a_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.14)$$

para algunos enteros  $n_{ij}$ . Esto significa que la imagen bajo  $f$  de cada  $\Gamma_T$ -órbita es también una  $\Gamma_T$ -órbita. Entonces existe un único difeomorfismo  $f_{\mathbb{T}^2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  tal que

$$h \circ f = f_{\mathbb{T}^2} \circ h.$$

**Lema 3.1** Cada difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con la propiedad (3.14) es de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + F_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + F_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $n_{ij} \in \mathbb{Z}$  y  $F_i$  son funciones periódicas,

$$F_i(x_1, x_2) = F_i(x_1 + 1, x_2) = F_i(x_1, x_2 + 1), \quad i = 1, 2.$$

**Demostración.** Como  $f$  satisface (3.14),

$$a_1^{n_{i1}} a_2^{n_{i2}} \circ f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2) + n_{i1}, f_2(x_1, x_2) + n_{i2}) = f \circ a_i(x_1, x_2),$$

para  $i = 1$  se tiene

$$(f_1(x_1, x_2) + n_{11}, f_2(x_1, x_2) + n_{12}) = (f_1(x_1 + 1, x_2), f_2(x_1 + 1, x_2)),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) + n_{11} &= f_1(x_1 + 1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) + n_{12} &= f_2(x_1 + 1, x_2), \end{aligned}$$

definamos ahora

$$F_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) - n_{11}x_1 - n_{12}x_2$$

entonces,

$$\begin{aligned} F_1(x_1 + 1, x_2) &= f_1(x_1 + 1, x_2) - n_{11}(x_1 + 1) - n_{12}x_2 \\ &= f_1(x_1, x_2) + n_{11} - n_{11}x_1 - n_{11} - n_{12}x_2 \\ &= F_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2 + 1) &= f_1(x_1, x_2 + 1) - n_{11}x_1 - n_{12}(x_2 + 1) \\ &= f_1(x_1, x_2) + n_{12} - n_{11}x_1 - n_{12}x_2 - n_{12} \\ &= F_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

del mismo modo se prueba que  $F_2(x_1, x_2) = F_2(x_1 + 1, x_2) = F_2(x_1, x_2 + 1)$ .

Un *difeomorfismo en la botella de Klein* se define como un difeomorfismo en el plano  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \iota^{n_{11}} \circ a_2^{n_{12}} \circ f &= f \circ \iota, \\ \iota^{n_{21}} \circ a_2^{n_{22}} \circ f &= f \circ a_2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

para algunos enteros  $n_{ij}$ , es decir, para que un difeomorfismo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  pueda definir un difeomorfismo en la botella de Klein, este debe satisfacer que todas las imágenes de los puntos de una  $\Gamma_K$ -órbita estén en una misma  $\Gamma_K$ -órbita.

Por ejemplo, un difeomorfismo en el plano  $f$ , de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 + F_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= x_2 + F_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$



tiene la propiedad (3.16) si las funciones  $F_i$  satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= F_1(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2), \\ F_2(x_1, x_2) &= -F_2(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2), \\ F_i(x_1, x_2) &= F_i(x_1, x_2 + 1), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

### 3.4 Medidas en superficies cociente

En esta sección introduciremos algunos conceptos acerca de medidas, los cuales usaremos posteriormente. Para más información, ver [10, 15, 17].

Consideremos una medida  $\mu$  en el plano. Esta medida se puede escribir de la siguiente manera

$$\mu = \chi dx_1 dx_2$$

donde  $dx_1 dx_2$  es la *medida de Lebesgue* en el plano y  $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$  es una función llamada la *densidad* de  $\mu$ .

En el resto del trabajo supondremos que  $\chi$  es una función suave.

Si  $B$  es un conjunto de Borel en  $\mathbb{R}^2$ , entonces su medida respecto a  $\mu$  está dada por

$$\mu(B) = \int_B \chi dx_1 dx_2.$$

Por otro lado, si se tiene un cambio suave de coordenadas

$$f : (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2),$$

entonces la medida  $\mu$  en las nuevas coordenadas se puede escribir como

$$\tilde{\mu} = \chi(f) \cdot \left| \det \frac{Df}{D(x_1, x_2)} \right| dy_1 dy_2,$$

la cual denotaremos por  $f_*\mu$ , es decir,  $\tilde{\mu} = f_*\mu$ .

**Definición 3.1** Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difeomorfismo y  $\mu$  una medida en el plano. Decimos que  $\mu$  es *invariante respecto a  $f$*  si y sólo si  $f_*\mu = \mu$ .

Consideremos ahora una superficie cociente  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo de difeomorfismos en el plano que actúa libre, propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ . Definimos una medida  $\mu_M$  en  $M$ , como una medida  $\mu$  en el plano que es invariante respecto a  $\Gamma$ , es decir,

$$\gamma_*\mu = \mu \text{ para cada } \gamma \in \Gamma.$$

Cuando  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ , es suficiente pedir que se satisfaga la condición  $(\gamma_i)_*\mu = \mu$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Ahora, si  $\mu$  es una medida en el plano y  $X = (X_1, X_2) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ , definimos la *divergencia de  $X$  respecto a la medida  $\mu$* , como

$$\operatorname{div}^\mu(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + L_X(\ln \chi), \quad (3.17)$$

donde  $L_X$  es la *derivada de Lie* y  $\chi$  es la densidad de la medida  $\mu$ .

La divergencia satisface las siguientes propiedades:

- para cada función  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ :

$$\operatorname{div}^\mu(\varphi X) = (L_X \varphi) \operatorname{div}^\mu(X); \quad (3.18)$$

- para dos campos vectoriales  $X$  y  $Y$ :

$$\operatorname{div}^\mu(X + Y) = \operatorname{div}^\mu(X) + \operatorname{div}^\mu(Y)$$

$$L_X \operatorname{div}^\mu(Y) - L_Y \operatorname{div}^\mu(X) = \operatorname{div}^\mu([X, Y]) \quad (3.19)$$

donde  $[X, Y]$  es el *corchete de Lie* de los campos vectoriales  $X$  y  $Y$ , esto es,

$$[X, Y]_i = \sum_j (X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}).$$

- *Integración por partes.* Para cada función  $\varphi$ , con soporte  $\operatorname{supp}(\varphi)$  compacto, se tiene

$$\int (L_X \varphi) \mu = - \int \varphi \operatorname{div}^\mu(X) \mu. \quad (3.20)$$

### 3.5 Medidas Riemannianas

Una clase particular de medida es la inducida por una métrica Riemanniana, la cual recibe el nombre de *medida Riemanniana*. Tales medidas aparecen de forma natural en Geometría Diferencial y Mecánica Clásica (ver [1, 10]). Antes de definir las introduciremos algunos conceptos importantes.

Una *métrica Riemanniana* en una región del espacio  $\mathbb{R}^2$  relativa a las coordenadas  $(x_1, x_2)$ , es una familia de funciones suaves  $g_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , con las siguientes dos propiedades:

- (i) son simétricas, es decir,  $g_{ij} = g_{ji}$ ;
- (ii) la matriz  $(g_{ij})$  es definida positiva;
- (iii) si  $(y_1, y_2)$  son otras coordenadas en esta región, y  $x_i = x_i(y_1, y_2)$ ,  $i = 1, 2$ , entonces la métrica Riemanniana relativa a estas nuevas coordenadas es representada por la familia de funciones  $g'_{ij} = g'_{ij}(y_1, y_2)$ , dadas por

$$g'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial y_i} g_{kl} \frac{\partial x_l}{\partial y_j}$$

Denotaremos una métrica Riemanniana  $g$  por

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j,$$

o en forma más corta (cuando no haya riesgo de confusión), como

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$

De este modo, si  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(i=1,2)}$  son campos vectoriales base en una carta local alrededor de  $p \in \mathbb{R}^2$ , y  $u, v$  son campos vectoriales dados por

$$u = \sum_{i=1}^2 u^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad \text{y} \quad v = \sum_{i=1}^2 v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad (3.21)$$

entonces  $g_p(u, v) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) u^i v^j$ , donde

$$g_{ij}(p) = g \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right)$$

Por ejemplo,  $\mathbb{R}^2$  tiene la métrica Riemanniana canónica  $g = (dx_1)^2 + (dx_2)^2$ , la cual claramente no depende del punto de aplicación. Además, si  $u$  y  $v$  están dados por (3.21), entonces

$$g_p(u, v) = u^1(p) v^1(p) + u^2(p) v^2(p) = (u \cdot v)(p),$$

esto es, al evaluar la métrica en los campos  $u$  y  $v$ , obtenemos el valor de su "producto punto" en  $p$ .

En coordenadas polares  $(r, \theta)$ , los campos base están dados por

$$\frac{\partial}{\partial r}(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta),$$

por lo tanto  $g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = 1$ ,  $g(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}) = r^2$  y  $g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}) = 0$ . En consecuencia,

$$g = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2.$$

Un resultado muy importante es *siempre es posible definir una métrica Riemanniana sobre cualquier variedad diferenciable*. (Ver [6], p. 195)

A la pareja  $(M, g)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g$  una métrica sobre  $M$ , se le llama *variedad Riemanniana*.

Sea  $(\mathbb{R}^2, g)$  el plano con una métrica Riemanniana  $g$ . Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo, entonces se puede definir otra métrica  $f^*g$  en  $\mathbb{R}^2$  como

$$(f^*g)_x(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} g_{f(x)}(d_x f(u), d_x f(v)),$$

donde

$$d_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix}$$

es la diferencial de  $f$ .

Se dice que un difeomorfismo  $f$  *preserva la métrica* si  $f^*g = g$ , esto es,

$$g_x = (d_x f)^T \cdot g_{f(x)} \cdot d_x f. \quad (3.22)$$

En particular,

$$\det g_x = \det g_{f(x)} \cdot (\det d_x f)^2$$

Si una función  $f$  satisface (3.22), entonces preserva la distancia inducida por la métrica. En tal caso,  $f$  es llamada una *isometría* de  $(\mathbb{R}^2, g)$  (ver [6], p. 191).

**Definición 3.2** La métrica  $g$  es invariante con respecto a un campo vectorial  $X$  si el flujo de  $X$  es una isometría de  $(\mathbb{R}^2, g)$ .

En términos de la métrica Riemanniana esta propiedad se puede expresar de la siguiente manera (ver [7], p. 214 y [10], p. 74):

$$L_X g_{ij} + \frac{\partial X_s}{\partial x_i} g_{sj} + \frac{\partial X_s}{\partial x_j} g_{si} = 0, \quad (3.23)$$

donde  $L_X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$  es la derivada de Lie respecto al campo  $X = (X_1, X_2)$ .

La métrica  $g$  induce una *medida canónica*  $\mu_g$  en el plano:

- para cada función  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , con soporte  $\text{supp}(\psi)$  compacto en  $\mathbb{R}^2$ , se define

$$\langle \psi \rangle_{\mu_g} = \int \psi d\mu_g = \int \psi(x) \chi_g(x) dx_1 dx_2,$$

donde  $\chi_g(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\det g_x)^{\frac{1}{2}}$  y  $dx_1 dx_2$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^2$ .

- Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo, entonces

$$\begin{aligned} \langle \psi \rangle_{\mu_{f^*g}} &= \int \psi d\mu_{f^*g} \\ &= \int \psi(x) \chi_{f^*g}(x) dx_1 dx_2 \\ &= \int \psi(x) \chi_g(f(x)) |\det d_x f| dx_1 dx_2 \\ &= \int \psi(f^{-1}(y)) \chi_g(y) dy_1 dy_2, \quad \text{donde } y = f(x) \\ &= \langle f_* \psi \rangle_{\mu_g}. \end{aligned}$$

En la siguiente proposición se establece una relación muy simple entre un campo vectorial y una métrica invariante respecto a tal campo.

**Proposición 3.3** *Sea  $g$  una métrica invariante con respecto a un campo vectorial  $X$ . Entonces*

$$\operatorname{div}^{\mu_g}(X) = 0 \quad (3.24)$$

**Demostración.** Observemos que

$$L_X(\ln \chi) = \frac{1}{2 \det g_x} L_X(\det g_x).$$

Por otro lado, de (3.23) y el hecho de que  $\chi(x) = (\det g_x)^{\frac{1}{2}}$ , se tiene

$$\begin{aligned} L_X(\det g_x) &= (g_{11} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - g_{22} \frac{\partial X_2}{\partial x_1})(g_{21} - g_{12}) - 2(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}) \det g(x) \\ &= -2(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}) \det g(x) \end{aligned}$$

por lo tanto, se sigue (3.24). ■

De la proposición anterior tenemos que toda medida Riemanniana  $\mu_g$  inducida por la métrica  $g$  satisface (3.24); podemos decir, en cierto sentido, que la medida Riemanniana  $\mu_g$  es invariante respecto al campo  $X$  si satisface tal relación. En la siguiente sección formalizaremos esta terminología en un sentido más general.

### 3.6 Sistemas dinámicos con medidas invariantes

A continuación presentaremos una introducción elemental y ciertos resultados de la teoría de sistemas dinámicos con medidas invariantes. Tales sistemas aparecen de forma natural en varios problemas de física-matemática. Aquí discutiremos algunas propiedades de estos sistemas en el contexto de la teoría de sistemas conservativos y sistemas Hamiltonianos (ver, [1]).

De la misma forma que hemos hablado de métricas invariantes respecto a campos vectoriales, en la sección anterior, podemos hablar de *medidas invariantes* respecto a campos vectoriales, como se establece en la siguiente definición.

**Definición 3.3** Sean  $\mu$  una medida y  $X$  un campo vectorial, ambos definidos en el plano. Se dice que  $\mu$  es *invariante respecto a  $X$*  si y sólo si

$$\operatorname{div}^\mu(X) = 0. \quad (3.25)$$

Si  $X$  es un campo vectorial completo, entonces la condición (3.25) es equivalente a que la medida sea invariante respecto al flujo  $\Psi^t$  de  $X$ , es decir,

$$\Psi_*^t \mu = \mu.$$

(ver por ejemplo, [9]).

Obsérvese que cuando  $\mu$  es la medida de Lebesgue en el plano, entonces la condición (3.25) implica que el flujo  $\Psi^t$  preserva el área de cada dominio acotado en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, si  $B$  es un conjunto medible y acotado, entonces

$$\mu(B) = \mu(\Psi^t(B)) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Enseguida estudiaremos una clase particular de sistemas dinámicos en el plano que admiten una medida invariante.

### Sistemas Dinámicos Conservativos y Sistemas Hamiltonianos en el Plano.

Si  $X$  es un campo vectorial que admite una medida invariante  $\mu$ , entonces  $X$  se puede escribir en términos de la densidad de la medida y una cierta función relacionada con las componentes del mismo, como lo establece el siguiente resultado.

**Proposición 3.4** Si un campo vectorial  $X$  en  $\mathbb{R}^2$  admite una medida invariante  $\mu = \chi dx_1 dx_2$ , entonces existe una función suave  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$X = \frac{1}{\chi} J \nabla F \quad \text{donde } J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

esto es, el sistema dinámico asociado  $X$  toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{\chi} \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Demostración.** Definimos la siguiente 1-forma diferencial en  $\mathbb{R}^2$ , en términos del campo  $X$  y la densidad de la medida  $\mu$ :

$$\omega = \chi(X_2 dx_1 - X_1 dx_2).$$

Obsérvese que esta forma es cerrada,

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\chi X_2 dx_1 - \chi X_1 dx_2) \\ &= -(\chi \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \chi \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + X_1 \frac{\partial \chi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -(\chi (\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}) + L_X(\chi)) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -\chi \operatorname{div}^\mu(X) dx_1 \wedge dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos la función  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) = \int_0^x \omega, \quad (3.28)$$

donde el símbolo de integral denota la integral de línea de la forma  $\omega$ , desde el punto  $(0,0)$  hasta el punto  $x = (x_1, x_2)$ . Por el Teorema de Stokes y el hecho de que la forma  $\omega$  es cerrada, se sigue que el valor de la integral es independiente de la trayectoria de integración. Para probar esto, tomemos dos trayectorias arbitrarias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  con punto inicial  $(0,0)$  y punto final  $x$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega &= \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}} \omega \\ &= \int_D d\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\gamma_2^{-1}$  representa la trayectoria  $\gamma_2$  recorrida en sentido contrario y  $D$  es el dominio encerrado por tales trayectorias; por lo tanto  $F$  está bien definida.

La función  $F$  satisface (3.27), ya que

$$\omega(x) = d \int_0^x \omega = dF(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} dx_2,$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \chi X_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\chi X_1,$$

de donde se sigue la proposición. ■



**Corolario 3.1** Si un campo vectorial  $X$  admite una métrica invariante  $g$ , entonces la medida canónica  $\mu_g$  es invariante. Por lo tanto  $X$  tiene la forma (3.26).

La demostración se sigue directamente de las Proposiciones 3.3 y 3.4.

**Definición 3.4** Un sistema dinámico  $(\mathbb{R}^2, X)$  es llamado *conservativo* si admite una integral primera  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , es decir,

$$L_X F = 0,$$

tal que,  $\nabla F$  no tiene puntos críticos.

**Proposición 3.5** Un sistema dinámico  $(\mathbb{R}^2, X)$  en el plano sin puntos críticos es conservativo si y sólo si admite una medida invariante.

**Demostración.** *Suficiencia.* Supongamos que el campo vectorial  $X$  admite una medida invariante. Entonces, por la Proposición 3.4, podemos escribir el campo  $X$  de la forma (3.26), el cual tiene como integral primera a la función  $F$ , pues

$$\begin{aligned} L_X F &= \langle X, \nabla F \rangle \\ &= \frac{1}{\chi} \langle J \nabla F, \nabla F \rangle = 0 \end{aligned}$$

esto último se sigue del hecho de que  $J$  es la matriz de rotación del plano en un ángulo igual a  $\frac{\pi}{2}$ , por lo tanto, para cada vector  $v \in \mathbb{R}^2$  se tiene que  $Jv$  es ortogonal a  $v$ .

*Necesidad.* Supongamos que  $(\mathbb{R}^2, X)$  es un sistema conservativo y sea  $F$  una integral primera. Como  $L_X F = \langle X, \nabla F \rangle = 0$  y  $\langle J \nabla F, \nabla F \rangle = 0$  se sigue que los campos  $X$  y  $J \nabla F$  son paralelos, es decir, existe  $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $X = \lambda J \nabla F$ . Dado que ambos campos son suaves y  $X$  no tiene puntos críticos, se sigue que  $\lambda$  es suave y no nula. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\lambda > 0$ , y definimos  $\chi = \lambda^{-1}$ . Entonces  $\mu = \lambda^{-1} dx_1 dx_2$  es una medida invariante para el campo  $X$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^\mu(X) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\lambda \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + L_X (\ln \lambda^{-1}) \\ &= -\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - \frac{1}{\lambda} L_X (\lambda) \end{aligned}$$

y como

$$L_X(\lambda) = \lambda \left( -\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)$$

se sigue que  $\text{div}^\mu(X) = 0$ . ■

Si  $\chi \equiv 1$  en (3.27), entonces el sistema se llama *sistema Hamiltoniano* en el plano. Tales sistemas aparecen naturalmente en mecánica clásica y describen, por ejemplo, el movimiento de una partícula con momento  $p = x_1$  y coordenada  $q = x_2$ , donde la función  $F$  es precisamente la energía de esta partícula.

Por ejemplo, la ecuación de Newton, que describe el movimiento en el plano de una partícula bajo la influencia de un campo, se puede escribir como el siguiente sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1, \end{aligned}$$

donde  $F = \frac{1}{2}x_1^2 + U(x_2)$ . En este caso,  $F$  se interpreta como la energía total de la partícula elemental y la función  $U$  es el potencial del campo. (ver [1, 2])

Estudiaremos ahora los conceptos definidos anteriormente en el contexto de superficies cociente.

Sea  $(M, X_M)$  un sistema dinámico en la superficie cociente  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$  y sea  $(\mathbb{R}^2, X)$  el correspondiente sistema dinámico asociado. Una medida  $\mu_M$  en  $M$ , invariante con respecto a  $X_M$  se define por una medida  $\mu$  en  $\mathbb{R}^2$  que satisface las siguientes condiciones

- $\mu$  es invariante con respecto a  $X$  (definición 3.3)
- $\mu$  es invariante con respecto a  $\Gamma$ , es decir,  $\gamma_*\mu = \mu$  para cada  $\gamma \in \Gamma$ .

Formularemos resultados análogos a la Proposición 3.4 para las siguientes superficies cociente.

**El toro.** Un *sistema dinámico en el toro*  $\mathbb{T}^2$ , asociado al campo  $X_T$ , se define por un sistema dinámico en el plano asociado al campo  $X$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{3.29}$$

tal que,

$$(a_i)_* X = X, \quad i = 1, 2, \quad (3.30)$$

es decir,

$$X_i(x_1, x_2) = X_i(x_1 + 1, x_2) = X_i(x_1, x_2 + 1), \quad i = 1, 2. \quad (3.31)$$

Existe una correspondencia uno a uno entre los campos vectoriales suaves  $X_T$  en el toro y los campos vectoriales suaves  $X$  en el plano con la propiedad (3.30),

$$(d_x h)X(x) = X_T(h(x)).$$

- Una *métrica en el toro*  $g_T$  se define como una métrica  $g = g_{ij}(x_1, x_2)dx^i dx^j$  en el plano con la siguiente propiedad:

$$g_{ij}(x_1, x_2) = g_{ij}(x_1 + 1, x_2) = g_{ij}(x_1, x_2 + 1).$$

- Una *medida en el toro*  $\mu_{T^2}$  se define como una medida  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  en el plano que es invariante respecto a  $\Gamma_T$ , esto es,

$$\chi(x_1, x_2) = \chi(x_1 + 1, x_2) = \chi(x_1, x_2 + 1). \quad (3.32)$$

**Proposición 3.6** Sea  $(\mathbb{T}^2, X_T, \mu_T)$  un sistema autónomo en el toro con una medida invariante. Entonces la medida  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  en  $\mathbb{R}^2$  es invariante con respecto al campo vectorial  $X$  asociado a  $X_T$ . Además, si el sistema (3.29) asociado a  $X$ , satisface (3.31), entonces tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{\chi} \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

donde la función  $h$  es suave y tiene la representación

$$h(x_1, x_2) = \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2 + H(x_1, x_2),$$

donde

$$H(x_1, x_2) = H(x_1 + 1, x_2) = H(x_1, x_2 + 1),$$

y las constantes  $\omega_1, \omega_2$  se definen por

$$\omega_1 = \int_{\Pi} X_1 d\mu \quad y \quad \omega_2 = \int_{\Pi} X_2 d\mu,$$

donde  $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$ , es el dominio fundamental.

**Demostración.** Es claro que si  $\mu_T$  es una medida invariante para el campo  $X_T$ , entonces  $\mu$  (la medida asociada a  $\mu_T$ ) es también una medida invariante para  $X$  (el campo asociado a  $X_T$ ); esto se debe a que  $X_T$  y  $\mu_T$  son precisamente  $X$  y  $\mu$  con las propiedades (3.31) y (3.32).

La existencia de la función  $h$  se sigue de la Proposición (3.4) y del hecho de que  $X$  admite la medida invariante  $\mu$ . Se demostró en tal proposición que  $h$  tiene la forma

$$h(x) = \int_0^x \omega, \text{ donde } \omega = \chi(X_2 dx_1 - X_1 dx_2),$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} h(x_1 + 1, x_2) &= h(x_1, x_2) + c_2 \\ h(x_1, x_2 + 1) &= h(x_1, x_2) + c_1. \end{aligned}$$

Definamos  $H(x_1, x_2) := h(x_1, x_2) - c_2 x_2 - c_1 x_1$ . Se tiene que  $H(x_1, x_2) = H(x_1 + 1, x_2) = H(x_1, x_2 + 1)$ . Así, hemos encontrado funciones  $h$  y  $H$  con las propiedades de la proposición, sólo falta determinar las constantes  $c_1$  y  $c_2$ .

Sustituyendo  $h(x_1, x_2) = c_2 x_2 + c_1 x_1 + H(x_1, x_2)$  en el sistema de la proposición y comparándolo con el campo  $X = (X_1, X_2)$ , obtenemos

$$X_1 = -\frac{1}{\chi} \left( c_2 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \quad y \quad X_2 = \frac{1}{\chi} \left( c_1 + \frac{\partial H}{\partial x_1} \right),$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} c_2 &= - \int_{\Pi} X_1 \chi dx_1 dx_2 - \int_{\Pi} \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = - \int_{\Pi} X_1 d\mu = -\omega_1 \\ c_1 &= \int_{\Pi} X_2 \chi dx_1 dx_2 - \int_{\Pi} \frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Pi} X_2 d\mu = \omega_2, \end{aligned}$$

ya que  $H$  es periódica, con período 1. Por lo tanto,  $h(x_1, x_2) = \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2 + H(x_1, x_2)$ . ■

**Observaciones 3.1** *Notémos que la función  $h$  definida en  $\mathbb{R}^2$ , es una función en el toro si y sólo si,  $\omega_1 = 0$  y  $\omega_2 = 0$ .*

**La botella de Klein.** Un sistema dinámico en la botella de Klein, asociado al campo  $X_K$ , se define como un sistema dinámico en el plano, asociado al campo  $X$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{3.33}$$

tal que

$$(\iota)_*X = X \text{ y } (a_2)_*X = X.\tag{3.34}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}X_1(x_1, x_2) &= X_1(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = X_1(x_1, x_2 + 1), \\ X_2(x_1, x_2) &= -X_2(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = X_2(x_1, x_2 + 1).\end{aligned}\tag{3.35}$$

- Una métrica en la botella de Klein  $g_K$  se define por una métrica  $g = g_{ij}(x_1, x_2)dx^i dx^j$  en el plano con la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}g_{ii}(x_1, x_2) &= g_{ii}(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = g_{ii}(x_1, x_2 + 1), \quad i = 1, 2, \\ g_{12}(x_1, x_2) &= -g_{12}(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = g_{12}(x_1, x_2 + 1).\end{aligned}$$

- Una medida en la botella de Klein  $\mu_K$  se define por una medida  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  en el plano que es invariante respecto a  $\Gamma_K$ , es decir,

$$\chi(x_1, x_2) = \chi(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = \chi(x_1, x_2 + 1).$$

**Proposición 3.7** *Sea  $(\mathbb{K}, X_K, \mu_K)$  un sistema autónomo en la botella de Klein con una medida invariante. Entonces la medida  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  en el plano es invariante con respecto al campo vectorial  $X$  asociado a  $X_K$ .*

Además, si el sistema (3.33), asociado a  $X$  satisface (3.34), entonces tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{\omega_1}{\chi} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2),\end{aligned}$$

donde la función  $H$  es suave y satisface

$$H(x_1, x_2) = -H(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = H(x_1, x_2 + 1),$$

$$\text{y } \omega_1 = \int_{\Pi} X_1 d\mu, \Pi = [0, 1] \times [0, 1].$$

**Demostración.** Usando el hecho de que  $\iota^2 = \iota \circ \iota = a_1$ , se tiene que todo sistema en el plano que sea  $\Gamma_K$ -invariante será también  $\Gamma_T$ -invariante; por lo tanto, todo sistema en la botella de Klein define también un sistema en el toro. Así, existe una función suave  $h$  dada por la Proposición 3.6. Además, obsérvese que

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \int_{\Pi} X_2 d\mu \\ &\stackrel{\pm}{=} \int_{\iota^{-1}(\Pi)} \iota^*(X_2) \iota^*(d\mu) \\ &= - \int_{\iota^{-1}(\Pi)} X_2 d\mu \\ &= - \int_{\Pi} X_2 d\mu = -\omega_2,\end{aligned}$$

y por lo tanto,  $\omega_2 = 0$ . De esto se sigue que  $h(x_1, x_2) = -\omega_1 x_2 + H(x_1, x_2)$ .  
■

## Capítulo 4

# Sistemas dinámicos en el plano y el Teorema de Rectificación

En este capítulo presentamos un resultado fundamental en la teoría de clasificación de sistemas dinámicos, llamado Teorema de Rectificación Global para sistemas dinámicos en el plano. La parte básica de este capítulo puede encontrarse en el artículo [8]. Además, discutimos algunas aplicaciones de este resultado, el cual es muy importante para el estudio de sistemas dinámicos en superficies cociente, presentadas en los siguientes dos capítulos. Los conceptos básicos de ecuaciones diferenciales presentados aquí pueden encontrarse en [1, 11, 14], además del Capítulo 3 de este trabajo.

### 4.1 Espacio de órbitas

Sean  $\mathbb{R}^2$  el plano Euclidiano y

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{4.1}$$

un *sistema autónomo* en  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos que el *campo vectorial*  $X$  del sistema (4.1),

$$X(x) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2)) \in T_x \mathbb{R}^2,$$

es suave y sin puntos críticos,  $X(x) \neq 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Sea  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . Por el Teorema de Existencia y Unicidad, existe una única solución suave  $x(t; \xi) = (x_1(t; \xi), x_2(t; \xi))$  del sistema (4.1) que satisface la condición inicial

$$x(0; \xi) = \xi. \quad (4.2)$$

Tenemos la siguiente interpretación geométrica del Teorema de Existencia y Unicidad: para cada punto  $\xi \in \mathbb{R}^2$  existe una única órbita  $\gamma_\xi$  que pasa por  $\xi$ . De esta manera,  $\mathbb{R}^2$  es la unión de todas las órbitas del sistema (4.1), y cada una de estas es una clase de equivalencia de la relación:  $\xi \sim \eta$  si y sólo si  $\xi$  y  $\eta$  pertenecen a la misma órbita. Obviamente, la partición que induce esta relación de equivalencia esta formada precisamente por las órbitas. Esta partición es llamada el *retrato fase* del sistema.

**Definición 4.1** *El espacio de órbitas,  $\text{Orb}(X)$ , del sistema autónomo (4.1) se define como el espacio cociente de  $\mathbb{R}^2$  por la partición de sus órbitas, es decir,  $\text{Orb}(X) = \mathbb{R}^2 / \sim$ .*

Sea  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Orb}(X)$ ,  $x \mapsto h(x) = [x]$ , la proyección natural, donde  $[x]$  denota la órbita de  $x$  (la clase de equivalencia de  $x$ ). La función  $h$  induce la *topología cociente* en  $\text{Orb}(X)$ , donde  $W$  es abierto en  $\text{Orb}(X)$  si y sólo si  $h^{-1}(W)$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$ .

Un resultado importante es el siguiente (ver [11]): *el espacio de órbitas  $\text{Orb}(X)$  del sistema sin puntos críticos (4.1) es una 1-variedad conexa con una base numerable.*

**Observaciones 4.1** *Sea  $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$  una función suave. Entonces las órbitas de los campos  $X$  y  $aX$  que pasan por un mismo punto son iguales; esto es, sólo cambia la velocidad de las trayectorias en un factor  $a(x)$  y por lo tanto  $\text{Orb}(X) = \text{Orb}(aX)$ . En particular, si tomamos  $a = \|X\|^{-1}$ , entonces el campo vectorial  $\frac{X}{\|X\|}$  es **completo** (ver [1, 4, 14]) y  $\text{Orb}(X) = \text{Orb}(\frac{X}{\|X\|})$ . De esta manera, el espacio de órbitas de un campo vectorial  $X$  es una característica del retrato fase que se define sólo por el campo direccional asociado a  $X$ .*



Por otra parte,  $Orb(X)$  es un espacio *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos  $p_1, p_2 \in Orb(X)$ , existen dos vecindades abiertos  $W_1$  y  $W_2$  de  $p_1$  y  $p_2$ , respectivamente, tal que  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ . Se puede expresar este *axioma de separación* en términos del retrato fase del sistema (4.1), de la siguiente manera: Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  dos puntos en  $\mathbb{R}^2$  tales que  $h(\xi_1) \neq h(\xi_2)$  y  $\gamma_{\xi_1}, \gamma_{\xi_2}$  las órbitas de (4.1) que pasan por  $\xi_1$  y  $\xi_2$  respectivamente, entonces existen entornos  $U_1$  de  $\gamma_{\xi_1}$  y  $U_2$  de  $\gamma_{\xi_2}$  en  $\mathbb{R}^2$  con la propiedad de que para cada punto  $x \in U_1$  la órbita  $\gamma_x$  que pasa por  $x$  satisface  $U_2 \cap \gamma_x = \emptyset$ .

Por otro lado, si el espacio de órbitas resulta ser *Hausdorff*, entonces su estructura es muy simple, de hecho es difeomorfo a  $\mathbb{R}$  (ver [11]), es decir,

$$Orb(X) \cong \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Esto se sigue de la siguiente observación: como  $Orb(X)$  es una 1-variedad conexa, con una base numerable y *Hausdorff*, por hipótesis, entonces  $Orb(X)$  es paracompacta ([6], p.193) y por el Teorema de Clasificación de 1-variedades [11, 16], tenemos que  $Orb(X)$  es difeomorfo a una de las siguientes 1-variedades:  $[0, 1]$ ,  $(0, 1]$ ,  $\mathbb{R}$ , o bien  $\mathbb{S}^1$ . Además, dado que el campo es no singular, tenemos que  $Orb(X)$  no puede tener frontera, ni puede ser difeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .

## 4.2 Formas normales

De la Teoría de Sistemas Dinámicos se conoce el siguiente Teorema de Rectificación (local) (ver, por ejemplo, [4, 11, 14, 18]): *Para cada punto  $\xi \in \mathbb{R}^2$  existen una vecindad  $U$  de  $\xi$  y un cambio suave de coordenadas:*

$$(x_1, x_2) \mapsto y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

*tal que el sistema (4.1) toma la forma:*

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Geométricamente, esto significa que todas las trayectorias de (4.4) son rectas paralelas (ver Figura 4)

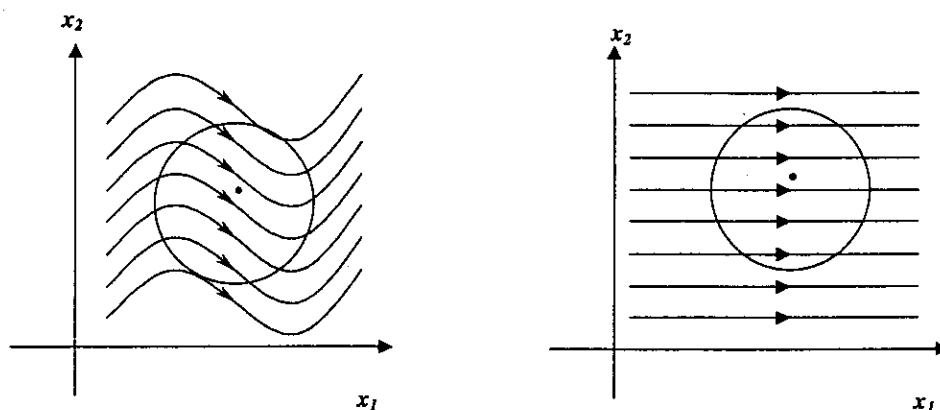


Figura 4. Rectificación local

En este caso se dice que el sistema (4.4) es la *forma normal (local)* del sistema (4.1).

El objetivo central de este capítulo es estudiar la *forma normal global* para sistemas autónomos suaves y sin puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$ . En general, no existe un cambio de coordenadas global tal que el sistema (4.1) tome la forma (4.4).

Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema autónomo

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (x_1 - 1)(x_1 + 1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Es claro que este sistema no tiene puntos críticos y su retrato fase está dado en la Figura 5.

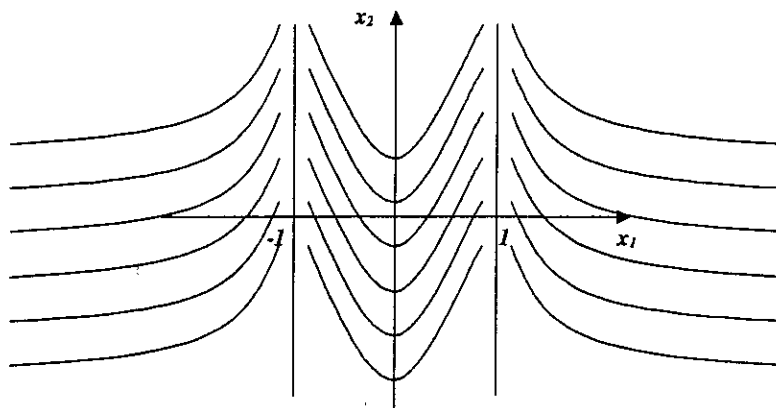


Figura 5. Retrato fase

Más adelante demostraremos que no se puede transformar este retrato fase a la forma normal de una manera global.

Obsérvese que el espacio de órbitas de  $\dot{X}(x_1, x_2) = ((x_1 - 1)(x_1 + 1), -x_1)$  no es Hausdorff. En efecto, consideremos las órbitas  $\gamma_{(1,1)} = \{x_1 = 1\}$  y  $\gamma_{(-1,1)} = \{x_1 = -1\}$  que pasan por los puntos  $(1, 1)$  y  $(-1, 1)$ , respectivamente. De la figura 2 es claro que los puntos  $h(1, 1)$  y  $h(-1, 1)$  no satisfacen el axioma de separación. Por lo tanto,  $Orb(X)$  no es Hausdorff.

### 4.3 Teorema de Rectificación

Antes de enunciar el Teorema de Rectificación, recordaremos algunos conceptos básicos que nos serán necesarios.

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$ ,  $x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ , una función suave que toma valores en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Sabemos que  $f$  es un *difeomorfismo* si

- (i)  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ;
- (ii)  $f$  es biyectiva;
- (iii) la función inversa  $f^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  es de clase  $C^\infty$ .

Del Teorema de la Función Inversa se puede deducir el siguiente criterio: una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  que satisface las condiciones (i) y (ii) es un difeomorfismo si y sólo si la *matriz jacobiana* de  $f$  es no singular en cada punto del plano,

$$\det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)\right) \neq 0 \quad (4.6)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Como vimos anteriormente, si  $X$  es un campo vectorial suave en  $\mathbb{R}^2$ , entonces se puede definir otro campo vectorial  $f_*X$  en el dominio abierto  $D$  como

$$(f_*X)(x) \stackrel{def}{=} (d_{f^{-1}(x)}f)X(f^{-1}(x)) \text{ para cada } x \in D.$$

Donde  $d_x f : T_x \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^2$  es la diferencial de  $f$ .

Además, esta operación satisface las siguientes propiedades:

- $f_*(X_1 + X_2) = (f_*X_1) + (f_*X_2)$  para cualesquiera campos vectoriales  $X_1$  y  $X_2$  en  $\mathbb{R}^2$ ;
- Para cada función suave  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y un campo vectorial  $X$  tenemos

$$f_*(\varphi X) = (f_*\varphi)(f_*X) \quad (4.7)$$

donde  $(f_*\varphi)(x) \stackrel{def}{=} (\varphi \circ f^{-1})(x)$  para cada  $x \in D$ .

**Teorema 4.1** (*Teorema de Rectificación Global*) Sea  $X$  un campo vectorial suave sin puntos críticos. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- (a) Existen una vecindad abierta conexa  $D$  de la línea  $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0\}$  y un difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  que transforma el campo vectorial  $X$  a un campo vectorial constante,

$$(f_*X)(y) = (1, 0) \quad (4.8)$$

para todo  $y \in D$ ;

- (b) El espacio de órbitas,  $\text{Orb}(X)$ , es Hausdorff.

Si el campo vectorial  $X$  es completo, entonces se puede tomar  $D = \mathbb{R}^2$  en la condición (4.8).

Una función que satisface la condición (4.8) se llama *difeomorfismo de rectificación*.

Recuérdese que si  $X$  es un campo vectorial sin puntos críticos, entonces  $x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$  es completo en  $\mathbb{R}^2$  ya que este campo es acotado. Por el Teorema

(4.1), aplicado al campo  $\frac{X}{\|X\|}$ , deducimos que existe un difeomorfismo de rectificación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f_* \left( \frac{X}{\|X\|} \right)$  es un campo vectorial constante, si y solo si  $\text{Orb}(X)$  es Hausdorff. Aplicando la regla (4.7), deducimos el siguiente

**Corolario 4.2** (*Forma Normal*) Sea  $X$  un campo vectorial sin puntos críticos con  $\text{Orb}(X)$  Hausdorff. Entonces existe un difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que el sistema autónomo del campo  $f_*(X)$  toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= m(y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde  $m > 0$  es una función suave dada por

$$m(y) = \|X(f^{-1}(y))\|, \quad y = (y_1, y_2) \tag{4.10}$$

Podemos ahora deducir del Teorema de Rectificación Global que para el sistema (4.4) no existe un cambio de coordenadas global que transforme el campo vectorial de (4.4) a un campo constante pues su espacio de órbitas no es Hausdorff.

## 4.4 Segmentos con contacto libre

Para la demostración del Teorema de Rectificación Global haremos uso de la siguiente noción de la Teoría de Poincaré [4, 14],

**Definición 4.2** Definimos un *segmento con contacto libre* del sistema (4.1) como una curva suave parametrizada  $\sigma = \{x = \sigma(s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\}$  tal que

1.  $\sigma$  es transversal al campo  $X$ ;
2.  $\sigma$  intersecta a cada órbita del sistema (4.1) en un único punto;
3.  $\sigma$  es regular (la función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo en su imagen).

Estas tres condiciones se expresan en la Figura 6.

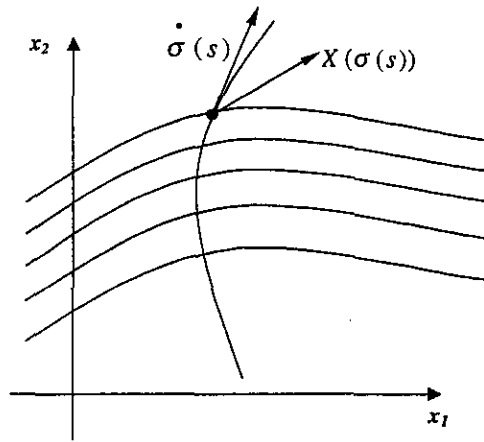


Figura 6. Segmento con contacto libre

Supondremos que la proyección  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow Orb(X)$  es un difeomorfismo sobre cada arco transversal al campo  $X$ .

Si  $Orb(X)$  es Hausdorff, entonces la proyección  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow Orb(X) \cong \mathbb{R}$  es una submersión sobreyectiva (llamada “haz fibrado” sobre  $\mathbb{R}$ ). Dado un segmento con contacto libre  $\sigma$ , se tiene que la función  $r = h \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo. Entonces la reparametrización  $\alpha = \sigma \circ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva parametrizada que satisface la propiedad  $h \circ \alpha = id_{\mathbb{R}}$ . En la teoría de haces fibrados [16] tal función  $\alpha$  se llama sección transversal (“cross section”)

De la misma manera se puede definir la noción de segmento con contacto libre para un sistema autónomo dado, en una región abierta  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Usando esta noción, podemos reformular el Teorema de Rectificación Global de la siguiente manera.

**Teorema 4.3** *Sea  $X$  un campo vectorial suave y sin puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$ . Existe un difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  que transforma el sistema autónomo (4.1) a la forma constante (4.4) en  $D$  si y sólo si existe un segmento con contacto libre  $\sigma$  del retrato fase de  $X$ .*

**Demostración.** *Suficiencia.* Sea  $f$  un difeomorfismo que satisface (4.8). Entonces el segmento con contacto libre se puede definir por

$$\sigma = f^{-1}\{y = (y_1, y_2) \in D \mid y_1 = 0\}.$$

*Necesidad.* Sea  $\sigma = \{x = \sigma(s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\}$  un segmento con contacto libre del sistema (4.1). La idea para construir el difeomorfismo de rectificación  $f$  es hacer un cambio de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$  a coordenadas  $(t, s)$  donde  $t$  es "tiempo" a lo largo de una trayectoria del sistema y  $s$  es el "parámetro" a lo largo de  $\sigma$ .

Por lo extenso de la demostración, la dividiremos en cuatro pasos.

Paso 1. Construcción del dominio  $D$ .

Para cada punto fijo  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , consideremos la solución  $x(t, \xi)$  del sistema (4.1) con la condición inicial (4.2) y dominio de definición  $I_\xi$ ,

$$\frac{dx(t, \xi)}{dt} = X(x(t, \xi)) \quad (4.11)$$

para cada  $x \in I_\xi$ , con

$$x(0, \xi) = \xi.$$

Luego,  $I_\xi = (a_\xi, b_\xi)$  es un intervalo abierto, donde la dependencia de los puntos  $a_\xi$  y  $b_\xi$  de  $\xi$ , es suave. La solución  $x(t, \xi)$  define la órbita  $\gamma_\xi$  que pasa por el punto  $\xi$ . Recuerdese que el campo vectorial  $X$  no tiene puntos críticos, entonces del Teorema de Poincaré-Bendixon [4, 14, 18], se sigue que cada órbita  $\gamma_\xi$  es no-periódica. Esto significa que para cada punto fijo  $\xi$ , la función

$$I_\xi \ni t \mapsto x(t, \xi) \in \gamma_\xi \text{ es uno a uno.} \quad (4.12)$$

Además, del Teorema de Dependencia de Datos Iniciales [1, 14, 18] deducimos que la función

$$(t, \xi) \mapsto x(t, \xi) \quad (4.13)$$

es de clase  $C^\infty$ . Definimos ahora en el plano  $\mathbb{R}^2 = \{y = (y_1, y_2)\}$  el siguiente abierto

$$D = \cup_{s \in \mathbb{R}} \{(y_1, y_2) \mid y_1 = s, y_2 \in I_{\sigma(s)}\}, \quad (4.14)$$

donde  $I_{\sigma(s)}$  es el intervalo de definición de la trayectoria de (4.1) que pasa por un punto inicial  $\sigma(s)$  del segmento con contacto libre  $\sigma$ .

Paso 2. Definición de  $f$ .

Ahora se puede definir una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  de la siguiente manera: Dado cualquier punto  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , existe una única órbita  $\gamma_\xi$  que pasa por  $\xi$ ;

esta órbita intersecta el segmento con contacto libre  $\sigma$  en un único punto, por la propiedad 2 de la Definición 4.2. Usando esto último junto con la propiedad 3 de la Definición 4.2 y la propiedad (4.12) deducimos que existen  $t = t(\xi) \in I_\xi$  y  $s = s(\xi) \in \mathbb{R}$ , únicos, que satisfacen la ecuación

$$x(t, \xi) = \sigma(s). \quad (4.15)$$

La función  $\mathbf{f}$  se define como

$$\xi \mapsto \mathbf{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (t(\xi), s(\xi)), \quad (4.16)$$

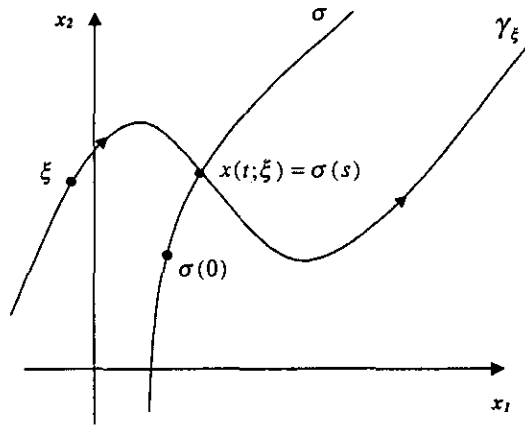


Figura 7. Función  $\mathbf{f} : \xi \mapsto (t, s)$

La función inversa  $\mathbf{f}^{-1}$  está dada por la regla: dado  $t \in I_\xi$  y  $s \in \mathbb{R}$  se toma el punto  $x(t, \sigma(s))$  en la órbita  $\gamma_{\sigma(s)}$  que pasa por  $\sigma(s)$ ,

$$y = (t, s) \mapsto \mathbf{f}^{-1}(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} x(t, \sigma(s)). \quad (4.17)$$

De la propiedad (4.13) se sigue que  $\mathbf{f}^{-1}$  es suave (ver Figura 8).



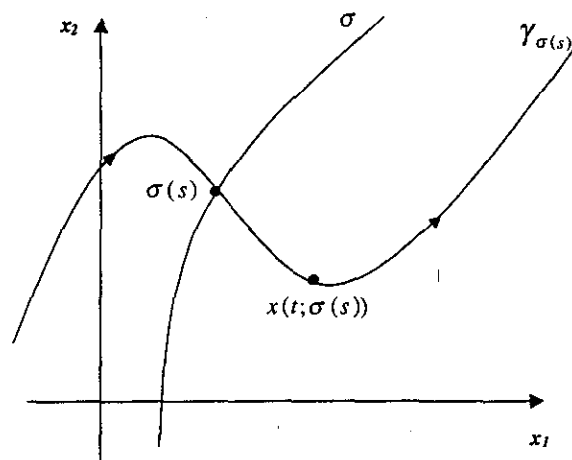


Figura 8. Función  $f^{-1} : (t, s) \mapsto x(t; \sigma(s))$

Paso 3. La matriz jacobiana de  $f^{-1}$ .

Mostraremos que la función  $f^{-1}$  también es suave. Recuérdese que la curva  $\sigma$  es *transversal* al campo  $X$  (por la propiedad 1 de la definición 4.2); esto significa que los vectores tangente  $\frac{dx(0, \sigma(s))}{dt}$  y  $\frac{d\sigma(s)}{ds}$ , a la órbita  $\gamma_{\sigma(s)}$  y al segmento con contacto libre  $\sigma$ , respectivamente, son linealmente independientes, es decir,

$$J_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} \frac{dx_1(0, \sigma(s))}{dt} & \frac{d\sigma_1(s)}{ds} \\ \frac{dx_2(0, \sigma(s))}{dt} & \frac{d\sigma_2(s)}{ds} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (4.18)$$

La función  $f^{-1}$  en (4.17) está definida implícitamente por la ecuación

$$x_1 = x_1(t, \sigma(s)), \quad x_2 = x_2(t, \sigma(s)). \quad (4.19)$$

Consideremos el Jacobiano

$$J(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t, \sigma(s))}{dt} & \frac{dx_1(t, \sigma(s))}{ds} \\ \frac{dx_2(t, \sigma(s))}{dt} & \frac{dx_2(t, \sigma(s))}{ds} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Demostraremos que para cada  $(t, s) \in D$  se tiene

$$J(t, s) \neq 0. \quad (4.21)$$

Consideremos la solución fundamental (ver [3,4])

$$F(t, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \left( \frac{\partial x_i(t, \xi)}{\partial \xi_j} \right) \right)_{2 \times 2}$$

de la ecuación lineal sobre la solución  $x(t, \xi)$  del sistema (4.1):

$$\begin{aligned}\frac{dF(t, \xi)}{dt} &= V(t, \xi)F(t, \xi), \\ F(0, \xi) &= I.\end{aligned}\tag{4.22}$$

donde  $V(t, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} ((\frac{\partial X_i(x(t, \xi))}{\partial x_j}))$ . Entonces  $\det F(t, \xi) \neq 0$ , y finalmente se obtiene

$$J(t, s) = J_0(s) \cdot \det F(t, \xi) \neq 0.$$

Usando (4.21) y aplicando el Teorema de la Función Implícita (ver [17]) para la ecuación (4.19), deducimos que  $f$  es suave. Así, vemos que se cumple la condición (4.6) y concluimos que  $f$  es un difeomorfismo.

Paso 4. Difeomorfismo de rectificación.

Ahora vamos a demostrar la propiedad (4.8), esto es, que  $f$  es un difeomorfismo de rectificación. Obsérvese que  $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ . Luego, es suficiente probar que  $X = (f^{-1})_*(1, 0)$ . Usando (4.11) y (4.17), obtenemos

$$\begin{aligned}(d_{(t,s)}f^{-1}(1, 0))(f^{-1}(t, s)) &= \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_1}{ds} \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dx_2}{ds} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = X(x).\end{aligned}$$

donde  $x_i = x_i(t, \sigma(s))$ ,  $i = 1, 2$ . Si el campo vectorial  $X$  es completo, entonces  $I_\xi = \mathbb{R}$  y obtenemos que  $D = \mathbb{R}^2$ . ■

Si el campo vectorial  $X$  admite un segmento con contacto libre sólo en una región abierta  $G$  del plano, entonces de la demostración del teorema anterior se sigue la existencia de un difeomorfismo  $f : G \rightarrow D$  que lleva el sistema (4.1) a la forma constante.

Por ejemplo, de aquí se puede deducir el Teorema de Rectificación Local. Es suficiente probar que localmente existe un segmento con contacto libre. Dado un punto  $\xi^0 \in \mathbb{R}^2$  se tiene:  $X_1(\xi^0) \neq 0$  o  $X_2(\xi^0) \neq 0$ . Supóngase, sin pérdida de generalidad, que  $X_1(\xi^0) \neq 0$ . Entonces es claro que existe un entorno abierto  $G$  de  $\xi^0$  tal que

$$X_1(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in G.\tag{4.23}$$

Por el Teorema de Dependencia de Datos Iniciales podemos tomar la región  $G$  con la siguiente propiedad: existe una función suave  $x : (-T, T) \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$

Puesto que  $\mathbb{R}$  es Hausdorff, el espacio de órbitas también es Hausdorff.

II ( $b \Rightarrow c$ ). Supongamos que  $Orb(X)$  es Hausdorff y, por lo tanto, difeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Mostraremos la existencia de una función suave  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $L_X \varphi = 1$ .

Obsérvese que la proyección natural  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisface las siguientes propiedades

- $h$  es suave y sobreyectiva;
- $h$  no tiene puntos singulares,

$$\nabla h(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^2; \quad (4.26)$$

(se sigue del Teorema de Rectificación Local)

- Para cada  $s \in \mathbb{R}$ , la curva de nivel  $h^{-1}(s)$  es conexa.

Por definición, la órbita  $\gamma_\xi$  de  $X$  que pasa por  $\xi$  se define como la curva de nivel de  $h$ ,

$$\gamma_\xi = h^{-1}(s), \text{ donde } s = h(\xi).$$

Por lo tanto,  $\gamma_\xi = h^{-1}(s)$  es conexa.

Además la función  $h$  es constante en cada órbita de  $X$ , entonces la derivada de Lie de  $h$  a lo largo del campo vectorial  $X$  es cero,

$$L_X h = \langle X, \nabla h \rangle = 0. \quad (4.27)$$

Una función con tal propiedad se llama *integral primera* del sistema (4.1).

Tenemos además el siguiente resultado, el cual es conocido como el "Teorema del flujo tubular largo" (ver [4, 14]):

Sea  $\gamma_{\xi^0}$  la órbita que pasa por un punto dado  $\xi^0$  y  $s^0 = h(\xi^0)$ . Entonces existen un intervalo abierto  $\Delta_{s^0} \subset \mathbb{R}$ , que contiene a  $s^0$ , y un difeomorfismo  $f_{s^0}$  del entorno abierto

$$\Pi_{s^0} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{h(\xi) \in \Delta_{s^0}} \gamma_\xi \quad (4.28)$$

a un dominio  $D_{s^0}$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $(f_{s^0})_* X$  es un campo vectorial constante en  $D_{s^0}$ .

Para demostrar tal resultado es suficiente probar la existencia de un intervalo  $\Delta_{s^0}$  tal que el campo  $X$  admite un segmento con contacto libre en el entorno  $\Pi_{s^0}$ .

Consideremos el campo vectorial

$$Y = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|^2}.$$

Sea  $\Delta_{s^0} \ni s \mapsto \sigma_{\xi^0}(s) \in \mathbb{R}^2$  la trayectoria de  $Y$  que pasa por  $\xi^0$  en  $s^0 = h(\xi^0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\xi^0}(s)}{ds} &= Y(\sigma_{\xi^0}(s)) \\ \sigma(s^0) &= \xi^0 \end{aligned}$$

con intervalo de definición  $\Delta_{s^0}$ . Entonces se tiene

$$(d_x h)Y(x) = \langle \nabla h(x), Y(x) \rangle = 1,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , donde  $d_x h : T_x \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{h(x)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$  es la diferencial. De aquí deducimos

$$\begin{aligned} \frac{dh(\sigma(s))}{ds} &= \left\langle \nabla h(\sigma(s)), \frac{d\sigma(s)}{ds} \right\rangle \\ &= \langle \nabla h(\sigma(s)), Y(\sigma(s)) \rangle \\ &= (d_{\sigma(s)} h)Y(\sigma(s)) = 1, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esto significa que  $h(\sigma(s)) = s$  para todo  $s \in \Delta_{s^0}$ . Entonces la trayectoria  $s \mapsto \sigma_{\xi^0}(s)$  es un segmento con contacto libre de  $X$  en  $\Pi_{s^0}$ .

Por un razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 4.3 se deduce que existe un difeomorfismo  $f_{s^0}$  entre el entorno  $\Pi_{s^0}$  y un abierto  $D_{s^0}$ ,

$$\Pi_{s^0} \ni x \mapsto y = (y_1, y_2) = f_{s^0}(x) = ((f_{s^0})_1(x), (f_{s^0})_2(x)) \in D_{s^0}$$

tal que  $(f_{s^0})_* X = (1, 0)$ .

En estos términos, la solución de la ecuación (4.25) se define por

$$\varphi_{s^0}(x) = (f_{s^0})_1(x).$$

Consideremos ahora un subconjunto denso numerable  $S \subset \mathbb{R}$ . Por el resultado anterior, se tiene que para cada  $s \in S$  existe un intervalo abierto  $\Delta_s \subset \mathbb{R}$  y un difeomorfismo de rectificación  $f_s$  de  $\Pi_s$  en un abierto  $D_s$ . Fijemos una cubierta numerable  $\{\Delta_s\}_{s \in S}$  de  $Orb(X) \cong \mathbb{R}$ , esto es,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{s \in S} \Delta_s.$$

Sea  $\varphi_s$  tal que

$$L_X \varphi_s = 1,$$

donde  $\varphi_i \in C^\infty(\Pi_s)$ .

Podemos tomar una *partición de la unidad*  $\{e_s \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}$  para  $\mathbb{R}$ , subordinada al recubrimiento  $\{\Delta_s\}$  (ver, por ejemplo, [17]), entonces

- para cada  $x \in \mathbb{R}$  se tiene  $0 \leq e_i(x) \leq 1$  para todo  $i$ ;
- para cada  $x \in \mathbb{R}$  existe un entorno abierto  $\Omega$  de  $x$  tal que todas, excepto un número finito de las  $e_s$ , son 0 en  $\Omega$ ;
- para cada  $x \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\sum_s e_s(x) = 1$$

(en virtud de la propiedad anterior esta suma es finita en el intervalo abierto de  $x$ );

- para cada número  $s$  se tiene  $\text{supp}(e_s) \subset \Delta_s$ .

Se define la siguiente función suave global en el plano

$$\varphi = \sum_i (h^* e_i) \varphi_i \tag{4.29}$$

donde  $(h^* e_i)(x) = e_i(h(x))$ . De (4.27) se sigue que  $L_X(h^* e_i) = 0$ . Finalmente deducimos que la función  $\varphi$  de (4.29) es una solución de la ecuación (4.25),

$$\begin{aligned} L_X \varphi &= L_X \sum_i (h^* e_i) \varphi_i \\ &= \sum_i (L_X(h^* e_i)) \varphi_i + \sum_i (h^* e_i) L_X \varphi_i \\ &= \sum_i (h^* e_i) \\ &= h^* \left( \sum_i e_i \right) = 1. \end{aligned}$$

III ( $c \implies a$ ). Sea  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  una solución de la ecuación (4.25). Entonces se tiene

$$\nabla\varphi(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.30)$$

Sea  $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$  una trayectoria del sistema (4.1) que pasa por un punto  $\xi$ . Usando (4.25), obtenemos

$$\frac{d\varphi(x(t, \xi))}{dt} = (L_X\varphi)(x(t, \xi)) = 1.$$

Entonces

$$\varphi(x(t, \xi)) = t + \varphi(\xi) \quad (-\infty < t < \infty). \quad (4.31)$$

En particular, se sigue de aquí que la función  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es sobreyectiva. Consideremos la imagen inversa  $\varphi^{-1}(0)$ . Por la propiedad (4.30) y el Teorema de la Función Implícita deducimos que  $\varphi^{-1}(0)$  es una subvariedad 1-dimensional del plano. Por otro lado, de (4.31) se sigue que la intersección de  $\varphi^{-1}(0)$  con cada órbita  $\gamma_\xi = \{x = x(t, \xi) \mid -\infty < t < \infty\}$  es un único punto definido por  $t_* = -\varphi(\xi)$ . Además, es claro de (4.25) que  $\varphi^{-1}(0)$  es transversal al campo  $X$ . Entonces tomamos como segmento con contacto libre a la curva  $\varphi^{-1}(0)$ . ■

**Corolario 4.5** Sea  $X$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  sin puntos críticos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes :

- (a) Existe un segmento con contacto libre  $\sigma$  del sistema (4.1) en  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b) El espacio de órbitas  $\text{Orb}(X)$  de  $X$  es Hausdorff ;

Obsérvese que el Teorema 4.1 se sigue del Teorema 4.3 y el Corolario 4.5.

## 4.6 Aplicaciones y ejemplos

**Sistemas Gradiente.** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave que satisface la condición

$$\|\nabla F(x)\| \geq M > 0, \quad (4.32)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  y algún  $M \in \mathbb{R}$ .

Esto significa que el gradiente de  $F$  no puede ser arbitrariamente pequeño en magnitud. Es claro que para cada compacto en  $\mathbb{R}^2$  siempre existe tal  $M$ , sin embargo, esta condición puede fallar cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Por ejemplo, la función  $F(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$  no satisface la condición (4.32).

Para una función  $F$  con la propiedad (4.32) se tiene el siguiente resultado:  
*El espacio de órbitas del sistema gradiente*

$$\frac{dx}{dt} = \nabla F(x) \quad (4.33)$$

*es Hausdorff.*

En efecto, consideremos el campo vectorial

$$Y = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|^2}, \quad (4.34)$$

el cual es completo, pues  $\|Y\| = \frac{1}{\|\nabla F\|} \leq \frac{1}{M}$ , además,

$$L_Y F = \langle Y, \nabla F \rangle = \left\langle \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|^2}, \nabla F \right\rangle = \frac{\langle \nabla F, \nabla F \rangle}{\|\nabla F\|^2} = 1.$$

Por lo tanto,  $Orb(\nabla F) = Orb(Y)$  es Hausdorff.

**Sistemas Conservativos.** Consideremos el siguiente sistema autónomo sin puntos críticos, en el plano

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{\chi} \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde  $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$  es una función. En particular, si  $\chi \equiv 1$ , entonces el sistema (4.35) es Hamiltoniano. Obsérvese que  $F$  es una integral primera del sistema, es decir, que  $F$  es constante a lo largo de las trayectorias del sistema.

Para obtener información acerca de la topología del espacio de órbitas de este sistema podemos utilizar la siguiente proposición.

**Proposición 4.1** *Si para cada  $a \in F(\mathbb{R}^2)$  la curva de nivel*

$$F^{-1}(a) \text{ es conexa,} \quad (4.36)$$

*entonces el espacio de órbitas del sistema (4.35) es Hausdorff.*

**Demostración.** Tenemos que la función  $F$  es una integral primera del sistema (4.35), por lo tanto, para cada órbita  $\gamma_\xi$  de este sistema que pasa por  $\xi$  se tiene  $\gamma_\xi \subseteq F^{-1}(a)$ , donde  $F(\xi) = a$ . Se deduce de la condición (4.36) que  $\gamma_\xi = F^{-1}(a)$ . Entonces la función  $F$  es la proyección natural del plano en el espacio de órbitas del sistema (4.35), aquí  $Orb(X) = F(\mathbb{R}^2)$ . Como  $F$  es suave, se tiene que el espacio de órbitas del sistema (4.35) es Hausdorff, pues la topología de éste es la topología cociente inducida por  $F$  y la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ . ■

De esta proposición se deduce el siguiente resultado.

**Corolario 4.6** *Cada sistema autónomo suave y sin puntos críticos, cuyo espacio de órbitas es Hausdorff, tiene la forma (4.35), donde  $F$  y  $\chi$  son algunas funciones suaves.*

**Criterio 4.1** *Sea  $F$  una función que satisface la propiedad (4.32). Entonces el sistema (4.35) admite un difeomorfismo de rectificación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$*

**Demostración.** Sea  $Y$  el campo vectorial de (4.34). Entonces  $Y$  es completo y  $Orb(Y)$  es Hausdorff. Del Teorema 4.1 se sigue que existe un difeomorfismo  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g_*Y = (1, 0)$ . Así,  $L_{g_*Y}g_*F = g_*(L_Y F) = 1$  y por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial y_1} g_*F = 1 \implies g_*F(y_1, y_2) = y_1 + A(y_2)$$

donde  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave. Finalmente

$$F^{-1}(a) = g^{-1}\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = -A(y_2) + g(a)\},$$

lo cual implica que  $F^{-1}(a)$  es conexa.

Del criterio anterior deducimos que el espacio de órbitas del sistema (4.35) es Hausdorff, y del Teorema 4.1 se sigue que existe un difeomorfismo de rectificación  $f$ . ■

Observemos que si solamente se tiene que  $\|\nabla F\| > 0$  entonces no necesariamente  $F^{-1}(a)$  es conexa para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Por ejemplo, consideremos la función

$$F(x) = (1 - x_1^2)e^{x_2}$$



donde  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , entonces  $\nabla F(x) = (-2x_1 e^{x_2}, (1 - x_1^2) e^{x_2})$ , por lo que

$$\|\nabla F(x)\| = (4x_1^2 + (1 - x_1^2)^2)^{\frac{1}{2}} e^{x_2}$$

y claramente se tiene

$$\|\nabla F(x)\| > 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , sin embargo,

$$F^{-1}(0) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -1\}$$

no es conexo.

## 4.7 Equivalencia para campos vectoriales regulares

Mostraremos ahora que la noción de espacio de órbitas aparece naturalmente en la teoría de clasificación de sistemas autónomos en el plano.

**Definición 4.3** *Dos sistemas autónomos suaves en el plano asociados con campos vectoriales  $X$  y  $Z$  respectivamente, son **equivalentes** si existe un difeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $Z = \phi_* X$ .*

Es claro que para dos sistemas equivalentes,  $X$  y  $Z$ , se tiene la siguiente propiedad: si  $t \mapsto x(t, \xi)$  es una trayectoria de  $X$ , entonces  $t \mapsto \phi(x(t, \xi))$  es una trayectoria de  $Z$ .

Se tiene otra noción de la *equivalencia orbital*: existe un difeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que transforma cada órbita de  $X$  a una órbita de  $Z$ . En este caso, el difeomorfismo  $\phi$  no necesariamente preserva la orientación, pero preserva retratos fase.

**Definición 4.4** *Se dice que un campo vectorial  $X$  en  $\mathbb{R}^2$ , suave y sin puntos críticos es **regular** si su espacio de órbitas  $\text{Orb}(X)$  es Hausdorff.*

Del Teorema de Rectificación se sigue el siguiente resultado.

**Proposición 4.2** *Dos sistemas autónomos asociados a campos vectoriales regulares y completos son equivalentes.*

**Demostración.** Para ver esto, tomemos dos campos vectoriales regulares completos  $X$  y  $Y$ . Del Teorema 4.1 se sigue que existen difeomorfismos de rectificación  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que  $\mathbf{f}_*X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{g}_*Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Luego, si tomamos  $\phi = \mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \phi_*Y &= (\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g})_*Y \\ &= (\mathbf{f}^{-1})_*\mathbf{g}_*Y \\ &= (\mathbf{f}^{-1})_*\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{f}_*)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= X, \end{aligned}$$

por lo tanto,  $X$  y  $Y$  son equivalentes. ■

Obsérvese que para cada dos campos vectoriales regulares, no necesariamente completos, existe sólo una equivalencia orbital.

## Capítulo 5

# Teorema de Rectificación para sistemas dinámicos en el toro

A continuación, haremos uso de los resultados anteriores para el análisis de sistemas dinámicos en el toro con medidas invariantes. Estudiamos el problema de formas normales para tales sistemas, esto es, reducir el sistema original en el toro a un sistema canónico. Este problema es muy importante y tiene gran historia, se conocen resultados de Poincaré, Denjoy, Siegel, Kolmogorov, entre otros. En este capítulo presentamos una demostración completa del Teorema de Rectificación para sistemas dinámicos en el toro, usando ideas del trabajo [15]. Además, en el caso del toro se presentan cierto tipo de trayectoria, llamadas trayectorias casi-periódicas.

### 5.1 Formas normales

Consideremos el sistema dinámico en el toro  $(\mathbb{T}^2, X_T)$ , asociado al sistema  $(\mathbb{R}^2, X)$  en el plano,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $X = (X_1, X_2)$  es un campo vectorial suave, con componentes periódicas de período 1 en cada variable

$$X_i(x_1, x_2) = X_i(x_1 + 1, x_2) = X_i(x_1, x_2 + 1), \quad i = 1, 2 \quad (5.2)$$

y sea  $\Gamma_T = \langle a_1, a_2 \rangle$ , donde

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= (x_1 + 1, x_2), \\ a_2(x_1, x_2) &= (x_1, x_2 + 1). \end{aligned}$$

Supongamos que el sistema  $(\mathbb{T}^2, X_T)$  no tiene puntos críticos y admite una medida invariante. Entonces, en términos del sistema  $(\mathbb{R}^2, X)$ , esto significa que se tienen las siguientes hipótesis:

(i) El campo  $X$  no tiene puntos críticos, es decir,

$$X(x) \neq 0$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ .

(ii) Existe una medida en plano  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  tal que,

$$\chi(x_1, x_2) = \chi(x_1 + 1, x_2) = \chi(x_1, x_2 + 1), \quad (5.3)$$

la cual es invariante respecto a  $X$ , esto es,

$$\operatorname{div}^\mu(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + L_X(\ln \chi) = 0. \quad (5.4)$$

De la sección 3.6, sabemos que toda medida  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  en el plano cuya densidad  $\chi$  satisface la condición (5.3) induce una medida  $\mu_T$  en el toro.

Nuestro objetivo es encontrar un difeomorfismo en el toro que lleve el sistema dinámico  $(\mathbb{T}^2, X_T)$  a otro sistema más simple. Como estamos considerando al sistema  $(\mathbb{T}^2, X_T)$  como el sistema (5.1) con las condiciones (5.2), entonces buscamos un difeomorfismo en el plano  $f$  que satisfaga la condición

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + F_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + F_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $n_{ij}$  son enteros y  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) son funciones suaves periódicas, con período 1,

$$F_i(x_1, x_2) = F_i(x_1 + 1, x_2) = F_i(x_1, x_2 + 1)$$

Es claro que este difeomorfismo induce también un difeomorfismo en el toro (ver sección 3.3).

Bajo estas hipótesis, podemos establecer el Teorema de Rectificación en el toro como sigue:

**Teorema 5.1** *Si el sistema (5.1), (5.2) satisface las hipótesis (i)-(ii), entonces existe un difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma (5.5) dado por*

$$(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (y_1, y_2),$$

*tal que, el sistema (5.1) toma la forma*

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= m(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 &= \rho m(y_1, y_2),\end{aligned}\tag{5.6}$$

*donde  $\rho$  es una constante y  $m$  una función suave no nula con*

$$m(x_1, x_2) = m(x_1 + 1, x_2) = m(x_1, x_2 + 1).$$

**Corolario 5.2** *El sistema  $(\mathbb{T}^2, X_T)$  en el toro definido por (5.1), (5.2) es equivalente al sistema canónico en el toro asociado al sistema (5.6).*

Obsérvese que las órbitas del sistema (5.6) son líneas rectas en el plano y las órbitas de este sistema canónico se obtienen como proyecciones de tales rectas.

**Observaciones 5.1** *Este resultado aparece con referencia al trabajo de Kolmogorov [13]. Exposiciones modernas de este teorema se pueden encontrar en [2, 4, 9, 15]. Si alguna de las condiciones (i) o (ii) no se cumplen, el estudio de este teorema en el contexto de formas normales es más complicado. Para mas información, ver [4, 14].*

Un difeomorfismo  $f$  del teorema es llamado un *difeomorfismo de rectificación en el toro* para el sistema (5.1), (5.2).

Discutiremos primero la idea de la demostración del Teorema de Rectificación. Obsérvese que podemos aplicar el Teorema de Rectificación en el plano al sistema (5.1), (5.2). Esto se sigue de lo siguiente.

**Lema 5.1** *Si  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave y periódica en ambas variables, tal que  $G(x) > 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ , entonces existe  $k > 0$  tal que  $G(x) \geq k$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .*

Ahora, como el campo vectorial  $X$  del sistema (6.1) admite una medida invariante (hipótesis (ii)), se sigue de la Proposición 3.6 que existe una función  $h$  dada por  $h(x_1, x_2) = \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2 + H(x_1, x_2)$ , donde  $H(x_1, x_2) = H(x_1 + 1, x_2) = H(x_1, x_2 + 1)$ , y  $\omega_1, \omega_2$  son constantes, de tal manera que el sistema (6.1) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{\chi} \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Así, si definimos  $f = \|\nabla h\|$ , es claro que tal función es periódica; además se tiene que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , pues el sistema no tiene puntos críticos. Por lo tanto, del lema anterior se sigue que existe una constante  $k > 0$  tal que  $f(x) = \|\nabla h(x)\| \geq k$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ . De esto y aplicando el Criterio 4.1 de la sección 4.6, se tiene que el sistema (6.1) admite un difeomorfismo de rectificación  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ya que dicho sistema es completo.

Por otra parte, aplicando primeramente el Teorema de Rectificación en el plano, obtenemos un difeomorfismo de rectificación que no necesariamente es un difeomorfismo en el toro. Posteriormente, "corregimos" tal difeomorfismo con otro cambio de coordenadas, de modo que la función resultante sea un difeomorfismo de rectificación en el toro.

Para demostrar este teorema, basta estudiar el caso cuando

$$X_1(x_1, x_2) \neq 0 \text{ para cada } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.7)$$

Esto se sigue del resultado (ver [1], p.103): El sistema (5.1), (5.2) sin puntos críticos ni ciclos, satisface la condición (5.7) después de un cambio apropiado de coordenadas en el toro.

Supongamos que el campo satisface la condición (5.7). Observemos que es suficiente probar la existencia de  $f$  para el campo vectorial  $c(x_1, x_2)X$ , donde  $c(x_1, x_2) \neq 0$  es cualquier función suave.

Así, tomemos  $c(x_1, x_2) = X_1^{-1}(x_1, x_2)$  y consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1, \\ \dot{x}_2 &= w(x_1, x_2),\end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $w = \frac{X_2}{X_1}$ ; de esto se sigue que

$$w(x_1, x_2) = w(x_1 + 1, x_2) = w(x_1, x_2 + 1). \quad (5.9)$$

De esto, se sigue que el campo  $Y = (1, w)$  asociado al sistema (5.8), es acotado y por lo tanto, completo.

Además, obsérvese que tal sistema admite también una medida invariante

$$\tilde{\mu} = \tilde{\chi}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (5.10)$$

donde su densidad  $\tilde{\chi}$  está dada por

$$\tilde{\chi}(x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) X_1(x_1, x_2), \quad (5.11)$$

como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^{\tilde{\mu}}(X) &= \frac{\partial w}{\partial x_2} + L_Y \ln \tilde{\chi} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{X_2}{X_1} \right) + L_Y \ln \chi X_1 \\ &= \frac{1}{X_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_1^2} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{1}{X_1} (L_X (\ln \chi + \ln X_1)) \\ &= \frac{1}{X_1} \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + L_X \ln \chi + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{X_2}{X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{1}{X_1} \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + L_X \ln \chi + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{X_1} \operatorname{div}^{\mu}(X) = 0. \end{aligned}$$

Además, se tiene  $\tilde{\chi}(x_1, x_2) = \tilde{\chi}(x_1 + 1, x_2) = \tilde{\chi}(x_1, x_2 + 1)$ .

Ahora, el problema original se reduce a encontrar un difeomorfismo de rectificación en el toro para el sistema (5.8).

## 5.2 Difeomorfismo de rectificación en el plano

El primer paso de la demostración consiste en encontrar un difeomorfismo de rectificación en plano para el sistema. Consideremos la solución  $x(t; \xi)$  al sistema (5.8) con la condición inicial

$$x(t; \xi)|_{t=0} = \xi$$

donde  $\xi = (s, s)$  es un punto en  $\mathbb{R}^2$ . Tal solución esta dada por

$$x(t; \xi) = (x_1 = t + s, x_2 = x_2(t; \xi))$$

donde  $x_2(t; \xi)$  es la solución al problema de Cauchy

$$\frac{dx_2}{dt} = w(t, x_2), \quad (5.12)$$

$$x_2|_{t=0} = s. \quad (5.13)$$

Definamos

$$\sigma = \{x_1 = 0\} \quad (5.14)$$

y obsérvese que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para cada trayectoria  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  del sistema (5.8) que intersecta a  $\sigma$ , en el tiempo  $t_0$ , se tiene que  $\dot{\alpha}_1(t_0) = 1 \neq 0$ , por lo tanto  $\sigma$  es transversal al campo  $Y$ .
2. La línea  $\sigma = \{x_1 = 0\}$  intersecta a cada trayectoria del sistema (5.8) en un único punto. En efecto, consideremos una trayectoria  $\alpha$  del sistema (5.8) y sea  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  un punto sobre  $\alpha$ . Entonces, podemos escribir  $\alpha$  como

$$x(t; \xi) = (x_1 = t + \xi_1, x_2 = x_2(t; \xi))$$

donde  $x_2(t; \xi)$  es la solución al problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= w(t, x_2), \\ x_2|_{t=0} &= \xi_2. \end{aligned}$$

y como el sistema (5.8) es completo, cada trayectoria está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Así, si tomamos  $t = -\xi_1$ , entonces  $x(-\xi_1; \xi) = (0, x_2(-\xi_1; \xi))$  el cual es un punto sobre  $\sigma$  y por tanto intersecta a  $\alpha$ .

3. Claramente  $\sigma = \{x_1 = 0\}$  es regular, pues es una línea recta en el plano.

De lo anterior, se sigue que  $\sigma = \{x_1 = 0\}$  es un segmento con contacto libre para el sistema (5.8). Por lo tanto, del Teorema 4.3 se sigue la existencia de un difeomorfismo de rectificación  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  para el sistema (5.8), de coordenadas  $(x_1, x_2)$  a coordenadas  $(t, s)$ , tal que  $g^{-1}$  está dado por

$$g^{-1}: (t, s) \mapsto (x_1 = t, x_2 = x_2(t, s))$$



donde  $x_2(t, s)$  es solución al problema de Cauchy (5.12)–(5.13) y la función  $w$  satisface

$$w(t, x_2) = w(t + 1, x_2) = w(t, x_2 + 1).$$

El difeomorfismo  $g$  no necesariamente induce un difeomorfismo en el toro. Pero es posible “corregir” tal difeomorfismo de modo que satisfaga la condición (5.5). Para estudiar las propiedades de la función  $g$  usaremos algunos elementos de la Teoría de Poincaré.

### 5.3 Función de Poincaré

Consideremos la trayectoria  $x(t, s) = (t, x_2(t, s))$  del sistema (5.8), (5.9) que pasa por el punto inicial  $(0, s) \in \sigma$ . Cuando  $t = 1$  esta trayectoria intersecta por primera vez a la línea  $\{x_2 = 1\}$  en el punto  $(1, P(s))$  (ver Figura 9).

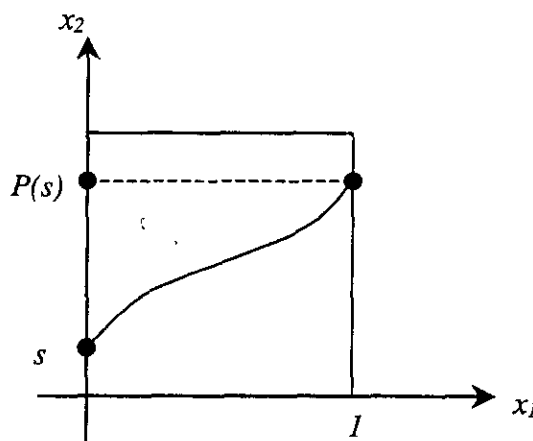


Figura 9. La función de Poincaré.

Definimos la *función de Poincaré*  $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , por

$$P(s) \stackrel{\text{def}}{=} x_2(1, s)$$

Se sigue que  $P$  es un difeomorfismo con las siguientes propiedades:

1. Para cada  $s \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $P(s+1) = P(s) + 1$ .

► Definamos la función

$$y(t, s) = x_2(t, s) + 1.$$

Entonces, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(x_2 + 1)}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = w(t, x_2),$$

además,  $y(0, s) = x_2(0, s) + 1 = s + 1$ . Por lo tanto, tal función es solución al problema de Cauchy (5.12) con  $y_2|_{t=0} = s + 1$ .

Por otro lado,  $x_2(t, s+1)$  también satisface la ecuación (5.12) y como  $x_2(0, s+1) = s+1$ , se sigue que  $x_2(t, s+1)$  también es solución al problema de Cauchy (5.12) con la condición  $x_2|_{t=0} = s+1$ . Por lo tanto, del Teorema de Existencia y Unicidad se sigue que

$$x_2(t, s+1) = x_2(t, s) + 1. \quad (5.15)$$

De esta relación se sigue que  $P(s+1) = x_2(1, s+1) = x_2(1, s) + 1 = P(s) + 1$ . ◀

2. La derivada de  $P$  es estrictamente positiva y está dada por

$$\frac{dP(s)}{ds} = 1 + \exp \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x_2}(\tau, x_2(\tau, s)) d\tau > 0. \quad (5.16)$$

► En efecto, se derivamos ambos lados de la ecuación (5.12) con respecto a la variable  $s$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx_2}{ds} \right) = \frac{\partial w}{\partial x_2}(t, x_2) \frac{\partial x_2}{\partial s}.$$

Integrando respecto a la variable  $t$ , desde  $t = 0$  hasta  $t = 1$ , se tiene

$$\frac{dx_2}{ds}(t, s) \Big|_{t=0}^{t=1} = \exp \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x_2}(\tau, x_2(\tau, s)) d\tau.$$

Esto es,

$$\frac{dP(s)}{ds} = 1 + \exp \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x_2}(\tau, x_2(\tau, s)) d\tau > 0.$$

◀

3. Para todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene que  $x_2(t+1, s) = x_2(t, P(s))$ .

► Para probar esta igualdad observemos que  $x_2(t+1, s)|_{t=0} = x_2(1, s) = P(s)$  y  $x_2(t, P(s))|_{t=0} = x_2(0, P(s)) = P(s)$ ; además, ambas funciones satisfacen la ecuación (5.12). Por lo tanto, del Teorema de Existencia y Unicidad se sigue que

$$x_2(t+1, s) = x_2(t, P(s)).$$

◀

Obsérvese que la condición 1 implica que  $P$  induce un difeomorfismo del círculo  $\hat{P} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ , que se define de la siguiente manera: sea  $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$  la proyección natural y  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  el segmento definido por (5.14). Es claro que la imagen de  $\sigma$  bajo  $h$  es un círculo en el toro,  $h(\sigma) \approx \mathbb{S}^1$ . Consideremos la trayectoria del sistema  $(\mathbb{T}^2, Y_T)$  que pasa por el punto inicial  $h((0, s)) \in \mathbb{S}^1$ , entonces el primer punto de retorno de tal trayectoria es el valor de  $\hat{P}$  en el punto  $h((0, s))$ . Esta es la definición usual de la función de Poincaré, ver por ejemplo [4, 2, 15].

**Generadores de  $\Gamma_T$  en coordenadas  $(t, s)$ .** En términos de la función de Poincaré, podemos calcular los generadores de  $\Gamma_T = \langle a_1, a_2 \rangle$ , en las coordenadas  $(t, s)$  como sigue.

**Lema 5.2** *Los generadores del grupo  $\Gamma_T$ , en coordenadas  $(t, s)$ , tienen la siguiente estructura,*

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 & : (t, s) \longmapsto (t+1, P^{-1}(s)), \\ \tilde{a}_2 & : (t, s) \longmapsto (t, s+1). \end{aligned}$$

**Demostración.** Usando el hecho de que  $\tilde{a}_i$  satisface que  $\tilde{a}_i = g \circ a_i \circ g^{-1}$  para  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_1(t, s) &= g \circ a_1 \circ g^{-1}(t, s) \\
 &= g \circ a_1(t, x_2(t, s)) \\
 &= g(t+1, x_2(t, s)) \\
 &= g(t+1, x_2(t+1, P^{-1}(s))) \\
 &= (t+1, P^{-1}(s)) \\
 \tilde{a}_2(t, s) &= g(t, x_2(t, s) + 1)x_2(t, s+1) = x_2(t, s) + 1 \\
 &= g(t, x_2(t, s+1)) \\
 &= (t, s+1)
 \end{aligned}$$

■

**Flujo del sistema (5.8).** Si  $\Psi^t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  es el flujo de  $Y$ , entonces

$$\Psi^t(\tau, s) = (t + \tau, x_2(t + \tau, \tilde{s}(\tau, s))),$$

donde  $\tilde{s}$  es tal que  $x_2(\tau, \tilde{s}) = s$ . En particular, se tiene

- $\Psi^t(0, s) = (t, x_2(t, s))$
- $\Psi^1(0, s) = (1, P(s))$
- $\Psi^1(\tau, s) = (1 + \tau, x_2(1 + \tau, \tilde{s}(\tau, s)))$ , donde que  $\tilde{s}(0, s) = s$

Consideremos la matriz Jacobiana

$$\frac{D\Psi^t}{D(\tau, s)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi^t}{\partial \tau}(\tau, s) & \frac{\partial \Psi^t}{\partial s}(\tau, s) \end{bmatrix}$$

**Lema 5.3** *El Jacobiano del flujo  $\Psi^t$  del campo  $Y$ , en el tiempo  $t = 1$  y en cada  $(0, s)$  es positivo, y está dado por la siguiente fórmula*

$$\left( \det \frac{D\Psi^1}{D(\tau, s)} \right) \Big|_{\tau=0} = \frac{dP(s)}{ds} > 0. \quad (5.17)$$

**Demostración.** Usando las propiedades anteriores, podemos calcular  $\det \frac{D\Psi^t}{D(\tau, s)}$  de la siguiente manera,

$$\det \frac{D\Psi^1}{D(\tau, s)} = \left| \frac{D\Psi^1}{D(\tau, s)} \right|$$

lo cual, se escribe explícitamente como,

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau}(1 + \tau, \tilde{s}(\tau, s)) + \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{s}}(1 + \tau, \tilde{s}(\tau, s)) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau}(\tau, s) & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{s}}(1 + \tau, \tilde{s}(\tau, s)) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s}(\tau, s) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{s}}(1 + \tau, \tilde{s}(\tau, s)) \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s}(\tau, s). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $\tilde{s}(0, s) = s$  y la definición de  $P$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \left( \det \frac{D\Psi^1}{D(\tau, s)} \right) \Big|_{\tau=0} &= \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{s}}(1, \tilde{s}(0, s)) \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s}(0, s) \\ &= \frac{dP(s)}{ds}, \end{aligned}$$

por lo tanto, de (5.16) se sigue que  $\det \frac{D\Psi^1}{D(\tau, s)} > 0$ . ■

Ahora, consideremos la medida  $\tilde{\mu}$ , definida por (5.10).

Del hecho de que  $(\Psi^t)^* \tilde{\mu} = \tilde{\mu}$ , se tiene que

$$\tilde{\chi}(\Psi^t(\tau, s)) \cdot \left| \det \frac{D\Psi^t}{D(\tau, s)} \right| = \tilde{\chi}(\tau, s)$$

De (5.17) obtenemos la siguiente relación entre la densidad de la medida y la función de Poincaré,

$$\tilde{\chi}(1, P(s)) \cdot \frac{dP(s)}{ds} = \tilde{\chi}(0, s).$$

Finalmente, de la propiedad  $\tilde{\chi}(x_1, x_2) = \tilde{\chi}(x_1 + 1, x_2)$ , se deduce

$$\tilde{\chi}(0, P(s)) \cdot \frac{dP}{ds} = \tilde{\chi}(0, s),$$

o bien,

$$\tilde{\chi}(0, s) = \tilde{\chi}(0, P^{-1}(s)) \cdot \frac{dP^{-1}(s)}{ds}. \quad (5.18)$$

## 5.4 Número de rotación

Otra característica muy importante del sistema (5.8), (5.9) es el *número de rotación*, el cual se define por

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{P(0)} \tilde{\chi}(0, s') ds'. \quad (5.19)$$

En términos del número de rotación, podemos corregir el difeomorfismo  $g$  para obtener un difeomorfismo  $f$  en el toro, como mostraremos enseguida.

Podemos suponer,

$$\int_0^1 \chi(0, s') ds' = 1$$

Sea  $\phi : (t, s) \mapsto (y_1, y_2)$  dado por

$$\begin{aligned} y_1 &= t \\ y_2 &= \int_0^s \tilde{\chi}(0, s') ds' + \rho t. \end{aligned}$$

Es fácil probar que  $\phi$  es un difeomorfismo del plano. Definimos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como la composición

$$f = \phi \circ g : (x_1, x_2) \xrightarrow{g} (t, s) \xrightarrow{\phi} (y_1, y_2),$$

donde  $g$  es el difeomorfismo de rectificación definido en la sección 5.2, por lo que la función  $f$  es un difeomorfismo del plano. Probaremos que esta función también define un difeomorfismo en el toro

**Lema 5.4** *Los generadores del grupo  $\Gamma_T$ , en coordenadas  $(y_1, y_2)$ , se pueden escribir de la siguiente manera,*

$$\begin{aligned} b_1 &: (y_1, y_2) \mapsto (y_1 + 1, y_2), \\ b_2 &: (y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2 + 1). \end{aligned}$$

**Demostración.** En efecto, si  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  y  $\phi(t, s) = (t, \int_0^s \chi(0, s') ds' + \rho t)$ , entonces existen  $t$  y  $s$  tales que  $y_1 = t$  y  $y_2 = \int_0^s \chi(0, s') ds' + \rho t$ . Luego,

usando el Lema 5.2 y la definición de  $\rho$ ,

$$\begin{aligned}
b_1(y_1, y_2) &= \phi \circ \tilde{a}_1 \circ \phi^{-1}(y_1, y_2) \\
&= \phi \circ \tilde{a}_1(t, s) \quad \tilde{a}_1 : (t, s) \longmapsto (t+1, P^{-1}(s)) \\
&= \phi(t+1, P^{-1}(s)) \\
&= (t+1, \int_0^{P^{-1}(s)} \chi(0, s') ds' + \rho(t+1)) \\
&= (t+1, \int_0^{P^{-1}(0)} \chi(0, s') ds' + \int_{P^{-1}(0)}^{P^{-1}(s)} \chi(0, s') ds' + \rho(t+1)),
\end{aligned}$$

y haciendo el cambio de coordenadas  $\eta = P(s')$ ,

$$\begin{aligned}
&= (t+1, \int_{P(0)}^0 \chi(0, P^{-1}(\eta))(P^{-1}(\eta))' d\eta \\
&\quad + \int_0^s \chi(0, P^{-1}(\eta))(P^{-1}(\eta))' d\eta + \rho(t+1))
\end{aligned}$$

aplicando la fórmula (5.18) y (5.19), se sigue

$$\begin{aligned}
&= (t+1, \int_{P(0)}^0 \chi(0, \eta) d\eta + \int_0^s \chi(0, \eta) d\eta + \rho(t+1)) \\
&= (t+1, -\rho + \int_0^s \chi(0, \eta) d\eta + \rho t + \rho) \\
&= (t+1, \int_0^s \chi(0, \eta) d\eta + \rho t) \\
&= (y_1 + 1, y_2).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 b_2(y_1, y_2) &= \phi \circ \tilde{a}_2 \circ \phi^{-1}(y_1, y_2) \\
 &= \phi \circ \tilde{a}_2(t, s) \\
 &= \phi(t, s+1) \\
 &= (t, \int_0^s \chi(0, s') ds' + \int_s^{s+1} \chi(0, s') ds' + \rho t) \\
 &= (t, \int_0^s \chi(0, s') ds' + \int_0^1 \chi(0, s') ds' + \rho t) \\
 &= (t, \int_0^s \chi(0, s') ds' + \rho t + 1) \\
 &= (y_1, y_2 + 1).
 \end{aligned}$$

■

**Corolario 5.3** *El difeomorfismo  $f$  define un difeomorfismo en el toro, es decir, satisface la siguiente relación*

$$a_i = f \circ a_i \circ f^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Ahora probaremos que  $f$  es difeomorfismo de rectificación para el sistema  $(\mathbb{T}^2, Y_T)$ .

**Lema 5.5** *El difeomorfismo  $f$  lleva el campo  $Y$  a un campo vectorial constante,*

$$f_* Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix},$$

donde  $\rho$  es el número de rotación.

**Demostración.** Como  $(\phi \circ g)_* = \phi_* g_*$  y  $g$  es un difeomorfismo de rectificación, se sigue que

$$f_* Y = (\phi \circ g)_* Y = \phi_* g_* Y = \phi_* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$



y además,

$$\begin{aligned}\phi_* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (y) &= (d_{\phi^{-1}(y)}\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \tilde{\chi}(0, s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

Ahora, para finalizar la demostración del Teorema 5.1, observemos que aplicando  $f$  al campo  $X$ , obtenemos

$$f_* X = f_* \left( \frac{1}{X_1} Y \right) = f_* \left( \frac{1}{X_1} \right) f_* (Y) = m \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix},$$

donde  $m(x) = f_* \left( \frac{1}{X_1} \right) (x) = \frac{1}{X_1(f^{-1}(x))}$ .

## 5.5 Retrato fase

Del Teorema 5.1 se puede deducir la siguiente información del sistema original en el toro. Primero consideremos el sistema (5.6), y obsérvese que  $m \neq 0$ , por lo tanto este sistema tiene el mismo retrato fase que el sistema en el toro

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 1 \\ \dot{y}_2 &= \rho.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Es claro que las trayectorias del sistema (5.20) son proyecciones de rectas en el plano de la forma  $y(t; \xi) = (t + \xi_1, \rho t + \xi_2)$ . El retrato fase de tal sistema depende del número de rotación  $\rho$ . Tenemos los siguientes dos casos:

(i) Cada trayectoria en el toro es *periódica* si y sólo si,  $\rho$  es *racional*.

Si  $\rho$  es racional, entonces puede expresarse como

$$\rho = \frac{n_2}{n_1},$$

donde  $n_1, n_2$  son enteros primos relativos. En este caso,  $T = n_1$  ya que  $y(T; \xi) = (n_1 + \xi_1, n_2 + \xi_2)$  se encuentra en la misma órbita que el punto inicial  $(\xi_1, \xi_2)$ , esto es, la trayectoria  $y(t; \xi)$  es periódica.

Recíprocamente, si la trayectoria  $y(t; \xi) = (t + \xi_1, \rho t + \xi_2)$  es periódica con período  $T$ , entonces existen enteros  $n_1, n_2$  tales que

$$y(T; \xi) = (T + \xi_1, \rho T + \xi_2) = (n_1 + \xi_1, n_2 + \xi_2),$$

de donde se sigue que  $T = n_1$  y  $T = \frac{n_2}{\rho}$ , por lo tanto  $\rho = \frac{n_2}{n_1}$ . (ver Figura 10)

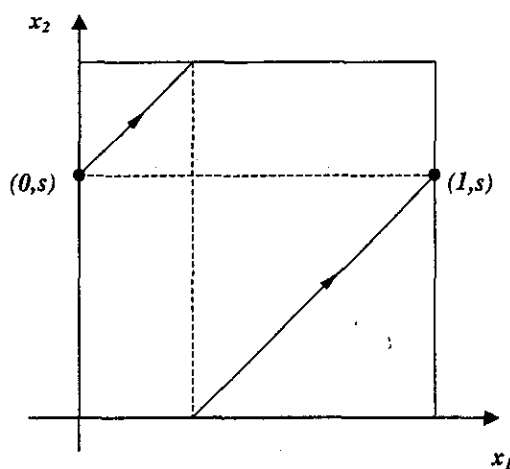


Figura 10. Trayectoria periódica.

(ii) Si  $\rho$  es *irracional*, entonces cada trayectoria  $\gamma$  del sistema (5.20) es *no periódica*; de hecho es *densa en todas partes* (respecto a la métrica en el toro inducida por la métrica euclidiana)

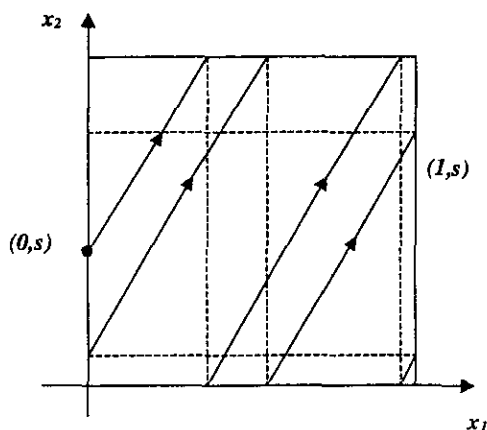


Figura 11. Trayectoria no periódica

La demostración de este resultado se deduce de las siguientes observaciones (ver [2]).

En términos de la distancia euclidiana  $d$ , la condición de que la proyección de la trayectoria  $y(t; \xi) = (t + \xi_1, \rho t + \xi_2)$  es densa en el toro se puede expresar de la siguiente manera:

Para cada  $\epsilon > 0$  y  $a \in \mathbb{R}^2$ , existe  $k = (k_1(\epsilon), k_2(\epsilon)) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  tal que

$$d(y(t; \xi) + k, a) < \epsilon.$$

Además, tenemos el siguiente resultado de teoría de números: si  $\rho$  es irracional, entonces el conjunto

$$\Omega_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \{k_2\rho - k_1 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en  $\mathbb{R}$ . Este conjunto es un grupo respecto a la suma.

Ahora, regresamos al sistema original (5.1). Del Teorema 5.1, deducimos que cada trayectoria  $\gamma$  del sistema (5.1) es periódica si  $\rho$  es racional, y densa en el toro si  $\rho$  es irracional. En particular, en el segundo caso los conjuntos  $\omega$  y  $\alpha$ -límite de una trayectoria casi-periódica  $\gamma$ , son precisamente el toro (ver Figura 11)

$$\omega(\gamma) = \alpha(\gamma) = \mathbb{T}^2.$$

## Capítulo 6

# Sistemas dinámicos en la botella de Klein

En este capítulo presentamos algunos resultados para sistemas dinámicos en la botella de Klein. Tales sistemas tienen un gran interés en la teoría de sistemas dinámicos, y para más información sobre la estructura de las soluciones se puede consultar [4, 11]. Estudiaremos el caso cuando un sistema dinámico sobre la botella de Klein admite una medida invariante. Tal estudio, en la forma aquí expuesta, es poco común en la literatura de sistemas dinámicos.

### 6.1 Formas normales

Consideremos el sistema dinámico en la botella de Klein  $(\mathbb{K}, X_K)$ , asociado al sistema  $(\mathbb{R}^2, X)$  en el plano,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde  $X = (X_1, X_2)$  es un campo vectorial suave, cuyas componentes satisfacen

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2) &= X_1(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = X_1(x_1, x_2 + 1), \\ X_2(x_1, x_2) &= -X_2(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = X_2(x_1, x_2 + 1) \end{aligned} \quad (6.2)$$

y sea  $\Gamma_K = \langle \iota, a_2 \rangle$ , donde

$$\begin{aligned} \iota(x_1, x_2) &= (x_1 + \frac{1}{2}, -x_2), \\ a_2(x_1, x_2) &= (x_1, x_2 + 1). \end{aligned}$$

Supongamos que el sistema  $(\mathbb{K}, X_K)$  no tiene puntos críticos y admite una medida invariante. Entonces, en términos del sistema  $(\mathbb{R}^2, X)$ , se tienen las siguientes hipótesis:

(i) El campo  $X$  no tiene puntos críticos, es decir,

$$X(x) \neq 0$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ .

(ii) Existe una medida en plano  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  tal que,

$$\chi(x_1, x_2) = \chi\left(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2\right) = \chi(x_1, x_2 + 1), \quad (6.3)$$

la cual es invariante respecto a  $X$ , esto es,

$$\operatorname{div}^\mu(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + L_X(\ln \chi) = 0. \quad (6.4)$$

De la sección 3.6, sabemos que toda medida  $\mu = \chi dx_1 dx_2$  en el plano cuya densidad  $\chi$  satisface la condición (5.3) induce una medida  $\mu_K$  en la botella de Klein.

Nuestro objetivo es encontrar un difeomorfismo en la botella de Klein que lleve el sistema dinámico  $(\mathbb{K}, X_K)$  a un sistema canónico. Como estamos considerando al sistema  $(\mathbb{K}, X_K)$  como el sistema (5.1) con las condiciones (5.2), entonces buscamos un difeomorfismo en el plano  $f$  que sea invariante respecto a  $\Gamma_K$ .

Bajo estas hipótesis, podemos establecer el Teorema de Rectificación en la botella de Klein como sigue

**Teorema 6.1** Existe un difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma  $f(x) = x + F(x)$ , donde  $F = (F_1, F_2)$  y

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= F_1\left(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2\right), \\ F_2(x_1, x_2) &= -F_2\left(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2\right) \text{ y} \\ F_i(x_1, x_2) &= F_i(x_1, x_2 + 1) \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

tal que el sistema asociado al campo  $f_*X$  toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= m(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

Donde  $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$  es una función suave, tal que

$$m(x_1, x_2) = m\left(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2\right) = m(x_1, x_2 + 1). \tag{6.6}$$

**Corolario 6.2** El sistema  $(\mathbb{K}, X_K)$  en la botella de Klein asociado a (6.1), (6.2) es equivalente al sistema canónico en la botella de Klein asociado al sistema (6.5).

Obsérvese que las trayectorias del sistema (6.5) son líneas rectas en el plano y las trayectorias de este sistema canónico se obtienen como proyecciones de rectas.

Un difeomorfismo  $f$  como el descrito en el teorema, es llamado un *difeomorfismo de rectificación en la botella de Klein* para el sistema (6.1), (6.2).

Discutiremos primero la idea de la demostración del Teorema de Rectificación.

Obsérvese que en este caso, podemos aplicar el Teorema de Rectificación en el plano al sistema (6.1), (6.2). Esto se debe a que podemos probar, usando el mismo razonamiento que en el caso del toro, que el espacio de órbitas de este sistema es Hausdorff.

De esta manera, aplicando el Teorema de Rectificación, obtenemos un difeomorfismo de rectificación en el plano que no necesariamente es un difeomorfismo en la botella de Klein y como segundo paso corregimos tal función para obtener un difeomorfismo en la botella de Klein.

Para demostrar este teorema, basta estudiar el caso cuando

$$X_1(x_1, x_2) \neq 0 \text{ para cada } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.7)$$

Esto se sigue del resultado (ver [1], p.103): El sistema (6.1), (6.2) sin puntos críticos ni ciclos, satisface la condición (6.7) después de un cambio apropiado de coordenadas en la botella de Klein.

Supongamos que el campo satisface la condición (6.7). Observemos que es suficiente probar la existencia de  $f$  para el campo vectorial  $c(x_1, x_2)X$ , donde  $c(x_1, x_2) \neq 0$  es cualquier función suave.

Así, tomemos  $c(x_1, x_2) = X_1^{-1}(x_1, x_2)$  y consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, \\ \dot{x}_2 &= w(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde  $w = \frac{X_2}{X_1}$ . Entonces

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &= -w(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = w(x_1 + 1, x_2). \\ w(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2 + 1) \end{aligned} \quad (6.9)$$

De esto, se sigue que el campo  $Y = (1, w)$  asociado al sistema (6.8), es acotado y por lo tanto, completo.

Además, obsérvese que tal sistema también admite una medida invariante

$$\tilde{\mu} = \tilde{\chi}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (6.10)$$

donde su densidad  $\tilde{\chi}$  esta dada por

$$\tilde{\chi}(x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) X_1(x_1, x_2), \quad (6.11)$$

como se demostró en el caso del toro. Además, la densidad  $\tilde{\chi}$  satisface  $\tilde{\chi}(x_1, x_2) = -\tilde{\chi}(x_1 + \frac{1}{2}, -x_2) = \tilde{\chi}(x_1, x_2 + 1)$ .

Ahora, el problema original se reduce a encontrar un difeomorfismo de rectificación en la botella de Klein para el sistema (6.8).

## 6.2 Difeomorfismo de rectificación en el plano

El primer paso de la demostración consiste en encontrar un difeomorfismo de rectificación en plano para el sistema. Consideremos ahora la solución  $x(t; \xi)$  al sistema (6.8) con la condición inicial

$$x(t; \xi)|_{t=0} = \xi$$

donde  $\xi = (s', s)$  es un punto en  $\mathbb{R}^2$ . Tal solución está dada por

$$x(t; \xi) = (x_1 = t + s', x_2 = x_2(t; \xi))$$

donde  $x_2(t; \xi)$  es la solución al problema de Cauchy

$$\frac{dx_2}{dt} = w(t, x_2), \quad (6.12)$$

$$x_2|_{t=0} = s. \quad (6.13)$$

Definamos

$$\sigma = \{x_1 = 0\} \quad (6.14)$$

y obsérvese que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para cada trayectoria  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  del sistema (6.8) que intersecta a  $\sigma$ , en el tiempo  $t_0$ , se tiene que  $\dot{\alpha}_1(t_0) = 1 \neq 0$ , por lo tanto  $\sigma$  es transversal al campo  $Y$ .
2. La línea  $\sigma = \{x_1 = 0\}$  intersecta a cada trayectoria del sistema (6.8) en un único punto. En efecto, consideremos una trayectoria  $\alpha$  del sistema (6.8) y sea  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  un punto sobre  $\alpha$ . Entonces, podemos escribir  $\alpha$  como

$$x(t; \xi) = (x_1 = t + \xi_1, x_2 = x_2(t; \xi))$$

donde  $x_2(t; \xi)$  es la solución al problema de Cauchy

$$\frac{dx_2}{dt} = w(t, x_2),$$

$$x_2|_{t=0} = \xi_2.$$

y como el sistema (6.8) es completo, cada trayectoria está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Así, si tomamos  $t = -\xi_1$ , entonces  $x(-\xi_1; \xi) = (0, x_2(-\xi_1; \xi))$  el cual es un punto sobre  $\sigma$  y por tanto intersecta a  $\alpha$ .



3. Claramente  $\sigma = \{x_1 = 0\}$  es regular, pues es una línea recta en el plano.

De lo anterior, se sigue que  $\sigma = \{x_1 = 0\}$  es un segmento con contacto libre para el sistema (6.8). Por lo tanto, del Teorema 4.3 se sigue la existencia de un difeomorfismo de rectificación  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  para el sistema (6.8), de coordenadas  $(x_1, x_2)$  a coordenadas  $(t, s)$ , tal que  $g^{-1}$  está dado por

$$g^{-1} : (t, s) \mapsto (x_1 = t, x_2 = x_2(t, s))$$

donde  $x_2(t, s)$  es solución al problema de Cauchy (6.12)–(6.13) y la función  $w$  satisface

$$w(t, x_2) = -w(t + \frac{1}{2}, -x_2) = w(t, x_2 + 1).$$

El difeomorfismo  $g$  no necesariamente induce un difeomorfismo en la botella de Klein. Pero es posible corregir tal difeomorfismo de modo que sea un difeomorfismo en la botella de Klein. Para estudiar las propiedades de  $g$  necesitamos algunos elementos de la Teoría de Poincaré.

### 6.3 Función de Poincaré

Consideremos ahora las siguientes funciones

- $x_2(t + 1, s)$ ;
- $x_2(t, s) + 1$ ;
- $-x_2(t + \frac{1}{2}, s)$ .

No es difícil verificar que tales funciones son solución al problema de Cauchy (6.12), (6.13); esto se sigue del Teorema de Existencia y Unicidad. Usando la solución  $x_2(t, s)$ , del problema de Cauchy (6.12), (6.13) definimos la función  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$P(s) \stackrel{\text{def}}{=} x_2(1, s)$$

Además, se tienen las siguientes igualdades:

1.  $x_2(t+1, s) = x_2(t, P(s))$ , donde
2.  $x_2(t, s) + 1 = x_2(t, s+1)$
3.  $-x_2(t + \frac{1}{2}, s) = x_2(t, -x_2(\frac{1}{2}, s))$

Definamos la función

$$Q(s) \stackrel{def}{=} -x_2(\frac{1}{2}, s).$$

Se tiene que  $x_2(t + \frac{1}{2}, s) = -x_2(t, Q(s))$  y

$$P = Q \circ Q.$$

Es posible demostrar que,  $Q(0) = 0$ , y en consecuencia

$$P(0) = 0. \tag{6.15}$$

Además, la derivada de  $Q$  se representa por

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \exp \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w}{\partial x_2}(\tau, -x_2(\tau + \frac{1}{2}, s)) d\tau > 0.$$

**Generadores de  $\Gamma_K$  en coordenadas  $(t, s)$ .** Usando la función de Poincaré, se puede calcular los generadores de  $\Gamma_K = \langle \iota, a_2 \rangle$ , donde  $\iota$  y  $a_2$  se definen por (1.3) y (1.5).

En estas nuevas coordenadas se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &: (t, s) \longmapsto (t+1, P^{-1}(s)) \\ \tilde{a}_2 &: (t, s) \longmapsto (t, s+1) \\ \tilde{\iota} &: (t, s) \longmapsto (t + \frac{1}{2}, Q^{-1}(s)) \end{aligned}$$

Estas fórmulas se deducen de la misma manera que se hizo en el toro (ver Capítulo 5).

**Flujo del sistema (6.8).** Si  $\Psi^t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  el flujo de  $Y$ , entonces

$$\Psi^t(\tau, s) = (t + \tau, x_2(t + \tau, \tilde{s}(\tau, s))),$$

donde  $\tilde{s}$  es tal que  $x_2(\tau, \tilde{s}) = s$ . En particular, se tiene

- $\Psi^t(0, s) = (t, x_2(t, s))$
- $\Psi^1(0, s) = (1, P(s))$
- $\Psi^1(\tau, s) = (1 + \tau, x_2(1 + \tau, \tilde{s}(\tau, s)))$ , donde que  $\tilde{s}(0, s) = s$ .

Tomando los valores  $t = 1$  y  $t = \frac{1}{2}$  en el flujo  $\Psi^t$  del campo  $Y = (1, w)$ , asociado al sistema (6.8), obtenemos después de algunos cálculos (ver también Capítulo 5):

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(0, P(s)) \cdot \frac{dP}{ds} &= \tilde{\chi}(0, s) \\ \tilde{\chi}(0, Q(s)) \cdot \frac{dQ}{ds} &= -\tilde{\chi}(0, s)\end{aligned}\tag{6.16}$$

## 6.4 Difeomorfismo de rectificación en la botella de Klein

Observemos que  $P(0) = 0$  implica que el número de rotación  $\rho$ , definido por

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{P(0)} \tilde{\chi}(0, s') ds',$$

es cero:  $\rho = 0$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\int_0^1 \tilde{\chi}(0, s') ds' = 1$ , y tomemos el cambio de coordenadas  $\phi : (t, s) \mapsto (y_1, y_2)$ , dado por

$$\begin{aligned}y_1 &= t \\ y_2 &= \int_0^s \tilde{\chi}(0, \tau) d\tau\end{aligned}$$

De donde se tiene que  $y_2 \circ \iota = -y_2$ . En efecto,

$$\begin{aligned}
 y_2(\iota(t, s)) &= y_2\left(t + \frac{1}{2}, Q^{-1}(s)\right) = \int_0^{Q^{-1}(s)} \tilde{\chi}(0, \tau) d\tau \\
 &= \int_{Q(0)}^s \tilde{\chi}(0, Q^{-1}(\eta)) \frac{dQ^{-1}(\eta)}{d\eta} d\eta \quad \text{haciendo } \eta = Q(\tau) \\
 &= - \int_{Q(0)}^s \tilde{\chi}(0, \eta) d\eta \\
 &= - \int_0^s \tilde{\chi}(0, \eta) d\eta + \int_0^{Q(0)} \tilde{\chi}(0, \eta) d\eta \\
 &= -y_2 + \int_0^{Q(0)} \tilde{\chi}(0, \eta) d\eta = -y_2 \quad \text{pues } Q(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Se puede probar que los generadores de  $\Gamma_K$ , en coordenadas  $(y_1, y_2)$  están dados por

$$\begin{aligned}
 \iota(y_1, y_2) &= (y_1 + \frac{1}{2}, -y_2), \\
 a_2(y_1, y_2) &= (y_1, y_2 + 1).
 \end{aligned}$$

**Corolario 6.3** *El difeomorfismo  $f$  define un difeomorfismo en la botella de Klein, es decir, satisface la siguiente relación*

$$\begin{aligned}
 \iota &= f \circ \iota \circ f^{-1}, \\
 a_2 &= f \circ a_2 \circ f^{-1}
 \end{aligned}$$

Ahora probaremos que  $f$  es difeomorfismo de rectificación para el sistema  $(\mathbb{K}, Y_K)$ .

**Lema 6.1** *El difeomorfismo  $f$  lleva el campo  $Y$  a un campo vectorial constante,*

$$f_* Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Demostración.** Como  $(\phi \circ g)_* = \phi_* g_*$  y  $g$  es un difeomorfismo de rectificación, se sigue que

$$f_* Y = (\phi \circ g)_* Y = \phi_* g_* Y = \phi_*(1, 0).$$

Además,

$$\begin{aligned}\phi_*(1,0)(y) &= (d_{\phi^{-1}(y)}\phi)Y(\phi^{-1}(y)) \\ &= (1,0)\end{aligned}$$

■

Ahora, para finalizar la demostración del Teorema 6.1, observemos que aplicando  $f$  al campo  $X$ , obtenemos

$$f_*X = f_*\left(\frac{1}{X_1}Y\right) = f_*\left(\frac{1}{X_1}\right)f_*(Y) = m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $m(x) = f_*\left(\frac{1}{X_1}\right)(x) = \frac{1}{X_1(f^{-1}(x))}.$

## 6.5 Clasificación de trayectorias periódicas

Primero consideremos el sistema (6.5), (6.6) en la botella de Klein. Sea  $\gamma_s$  la trayectoria de este sistema que pasa por el punto inicial  $h((0,s)) \in \mathbb{K}$ . Se deduce que cada trayectoria  $\gamma(s)$  es una *trayectoria periódica*, con período  $T(s)$ . Las fórmulas para el período y las clases de homotopía  $\gamma(s)$  se definen de la siguiente manera:

(i) Si  $s = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}[\gamma_0] &= \iota, \\ T(0) &= \int_0^1 \frac{dx_1}{m(x_1, 0)}.\end{aligned}$$

(ii) Si  $s = \frac{1}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned}[\gamma_{\frac{1}{2}}] &= a_2 \circ \iota, \\ T\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 \frac{dx_1}{m(x_1, \frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

(iii) Si  $s \neq 0, \frac{1}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned}[\gamma_s] &= \iota^2, \\ T(s) &= 2 \int_0^1 \frac{dx_1}{m(x_1, s)}.\end{aligned}$$

Aquí, la función  $m$  se define por el Teorema 6.1. Entonces, existen tres clases de trayectorias periódicas con clases de homotopía diferente. Obsérvese que la función período  $T(s)$  no es una función continua.

Probaremos tal resultado en el caso particular  $m = 1$ . Consideremos el sistema en la botella de Klein asociado al siguiente sistema en el plano

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Cada trayectoria de este sistema es de la forma  $x(t; \xi) = (t + \xi_1, \xi_2)$  y es periódica con período  $T$  si y sólo si existen enteros  $k_1, k_2$  tales que

$$(t + T + \xi_1, \xi_2) = \left( t + \xi_1 + \frac{k_1}{2}, (-1)^{k_1} \xi_2 + k_2 \right)$$

de donde se tiene que  $T = \frac{k_1}{2}$  y  $\xi_2 = (-1)^{k_1} \xi_2 + k_2$ . Así, si  $k_1 = 1$ , entonces  $k_2 = 2\xi_2$  y como  $k_2 = 0, 1$ , se debe tener que  $\xi_2 = 0$  o bien  $\xi_2 = 1$ , por lo tanto las trayectorias con puntos iniciales  $(0, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$  tienen período  $T = \frac{1}{2}$ . Cuando  $k_1 = 2$ , se tiene que  $\xi_2$  no depende de  $k_2$ , por lo tanto cada trayectoria con punto inicial  $(0, \xi_2)$ ,  $\xi_2 \neq 0, \frac{1}{2}$ , tiene período  $T = 1$ .

El retrato fase de este sistema, en el dominio fundamental, se muestra en la siguiente figura:

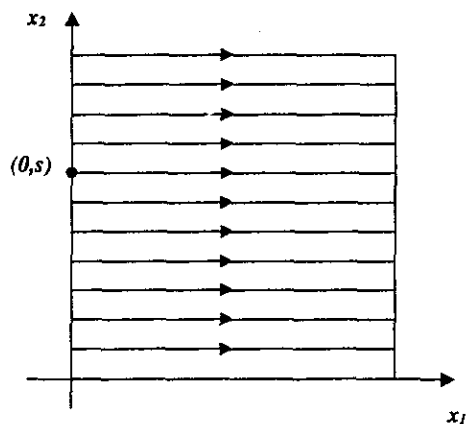


Figura 12. Órbitas en la botella de Klein

Es fácil observar lo siguiente:

- Si  $s = 0$ , entonces la trayectoria  $y(t; (0, 0))$  tiene período  $T(0) = \frac{1}{2}$  ya que se encuentra en el punto  $(\frac{1}{2}, 0)$  al tiempo  $t = \frac{1}{2}$ , el cual es un punto en la misma órbita que  $(0, 0)$ .
- Si  $s = \frac{1}{2}$ , la trayectoria  $y(t; (0, \frac{1}{2}))$  tiene período  $T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  ya que se encuentra en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  al tiempo  $t = \frac{1}{2}$ , el cual es un punto en la misma órbita que  $(0, \frac{1}{2})$ .
- Si  $s = 1$ , entonces la trayectoria  $y(t; (0, 1))$  tiene período  $T(1) = \frac{1}{2}$  ya que se encuentra en el punto  $(\frac{1}{2}, 1)$  al tiempo  $t = \frac{1}{2}$ , el cual es un punto en la misma órbita que  $(0, 1)$ .

# Bibliografía

- [1] V.I.Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge, 1973
- [2] V.I.Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, 1988
- [3] V.I.Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Second Edition), Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1989
- [4] S.Aranson, G.Belitsky and E. Zhuzhoma, *Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, AMS, Mathematical Monographs, vol. 153, 1996.
- [5] B.O'Neill, *Elementos de Geometria Diferencial*, Editorial Limusa-Wiley, S.A.,1972
- [6] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1986
- [7] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry- Methods and Applications*, 2nd Edition, Part I, Springer-Verlag, 1992
- [8] J. F. Espinoza, Y. M. Vorobiev, *Teorema de Rectificación en el Plano y Aplicaciones*, revista *arenario*, Departamento de Matematicas de la Universidad de Sonora, Vol. 2, Numero 3, 2002
- [9] R.Flores Espinoza and Yu.M.Vorobiev, *Linear Hamiltonian Systems and Symplectic Geometry*, Textos de Matematica Avanzada, Universidad de Sonora, 1998
- [10] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, 2nd Edition, Springer-Verlag



- [11] C. Godbillon, *Dynamical Systems on Surfaces*, Springer-Verlag, 1983
- [12] W. Greub, *Connections, Curvature and Cohomology*, Academic Press, 1972
- [13] A. N. Kolmogorov, *On dynamical systems with integral invariance on the torus*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 93, (1953) 763-766.
- [14] V. V. Nemytskii and Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Dover Publ., INC, N-Y, 1989
- [15] Ya. G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, 1976
- [16] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951
- [17] M. Spivak, *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverté, S.A., 1987
- [18] E. O. Roxin, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Teoría de Control*, T.1, Ed. Universitaria de Buenos Aires, 1968
- [19] J. Stillwell, *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, 1992