

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

GRÁFICAS K-NULAS Y LA PROPIEDAD DE PUNTO FIJO



MARÍA DE JESÚS CARRILLO TREJO

DIRECTOR: DR. MARTÍN EDUARDO FRÍAS ARMENTA

HERMOSILLO, SONORA, A 9 DE MAYO DEL 2003

A mis padres

A mis hermanos

Guadalupe, Isabel, Sabino, Catalina, Aurelio, francisco, por su cariño y apoyo en los buenos y malos tiempos.

A David por su entrega, por ser amigo, complice y mucho más.

A Janeht, Fabiola, Joselin, Marcos, por sus juegos y sonrisas.

A Marisa, Isidro, Jaime, Gracias...

Para Guadalupe, Diego y Marielos

Por su grandiosa amistad

Agradecimientos

Esta es la ocasión de agradecer a todos y cada uno de quienes hicieron realizable este trabajo.

Primeramente deseo darle las gracias a Eduardo, que al ser mi director de tesis, me dio la oportunidad de terminar un ciclo, además depositó en mí una enorme confianza, que hoy entiendo y reconozco. Gracias Eduardo, sin tu apoyo este trabajo no existiera.

Los días para realizar esta tesis, no fueron tan complicados gracias a mi familia y amigos, quienes me apoyaron, confiaron en mí y soportaron mis malos momentos, por todo esto, gracias a mi hermana Guadalupe, Diego, Marielos, Rosario, Darwel, Eddy, Irene, Rene, Gaby, Rosa María, Myriam, José Luis, Gloria, Martha, Czarina, Ruth....

A Héctor por el ánimo, por la compañía, por sus programas, por los desayunos y las comidas, por ser amigo.

Un agradecimiento especial a Miguel Ángel Pizaña, por su tiempo, sus observaciones y correcciones.

A mis sinodales, Pedro Flores, Irene y Héctor, por brindarme generosamente su tiempo, su paciencia, observaciones y correcciones.

Quisiera agradecer la amable atención que siempre han tenido los compañeros de la Biblioteca de la División de Ciencias Exactas y Naturales. También agradezco el apoyo de Donal, Favela e Ivan; a las secretarías por tener siempre una respuesta, sobretodo a Lupita.

Por último, deseo agradecer a las instituciones que me brindaron apoyo en recursos económicos y materiales. Conacyt, Universidad de Sonora, Instituto de Matemáticas de la UNAM de Cuernavaca,

Contenido

1	Preliminares	7
1.1	Teoría elemental de conjuntos	7
1.2	Funciones	9
1.3	Relaciones	13
1.4	Complemento a la teoría de conjuntos	13
1.5	Órdenes	15
2	Conceptos básicos	17
2.1	Gráfica	18
2.2	Camino	21
2.3	Subgráficas	24
2.4	Eliminación y adición de vértices o aristas	27
2.5	Vecindad	29
2.6	Isomorfismo	32
2.7	Homomorfismo	37
2.8	Operaciones entre gráficas	40
2.8.1	Producto cartesiano de gráficas	40
2.8.2	Producto débil	44
2.8.3	Producto fuerte	48
2.8.4	Composición	52
2.8.5	Producto lleno	55
2.8.6	Suma de gráficas	58
3	Clanes y k-comportamiento	61
3.1	Gráfica de intersección	61
3.1.1	Gráfica de intersección de las completas de G	63
3.2	Clanes	66
3.3	Gráfica de clanes	67

3.4	k-Comportamiento	73
3.4.1	Gráfica k — <i>estacionaria</i>	73
3.4.2	Gráfica k — <i>nula</i>	74
3.4.3	Gráfica k — <i>divergente</i>	77
4	Desmantelamientos	83
4.1	Dominación	83
4.2	Desmantelamiento	84
4.3	Gráficas con el mismo k -comportamiento	90
5	Puntos fijos de conjuntos parcialmente ordenados	99
5.1	Definiciones y resultados preliminares	99
5.2	Teorema de punto fijo	110
6	Una aplicación del teorema de punto fijo y de los desmantelamientos	111
6.1	Diagrama de Hasse	111
6.2	Gráfica de comparabilidad de un orden parcial finito.	114

Introducción

La primera mención que se hizo sobre Teoría de Gráficas fue registrada en los trabajos de Leonhard Euler (1707-1782), en la actualidad esta materia es poco conocida y estudiada, sin embargo tiene aplicaciones en algunas áreas de física, química, ciencias de la computación, comunicación, ingeniería civil, arquitectura, genética, psicología, sociología, economía, lingüística, entre otras.

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación titulado "Gráficas k-nulas, órdenes parciales y el operador V" a cargo del Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, que tiene como línea de investigación el k-comportamiento, es decir, la clasificación de gráficas según su comportamiento respecto al operador de clanes.

Su lectura va dirigida para todos aquellos que esten interesados en introducirse o realizar investigación sobre clanes, concepto moderno en Teoría de Gráficas que plantea muchos retos, ya que al calcular los clanes de una gráfica cualquiera, obtenemos otra gráfica, sin embargo son pocas las familias de gráficas que pueden clasificarse con respecto a su comportamiento, al realizar este calculo.

Es importante mencionar que existe poca bibliografía a nivel básico sobre clanes, en su mayoría son artículos, reportes de investigación, tesis doctorales, que presentan resultados de investigaciones sobre problemas que tardaron mucho tiempo en resolverse; por tal motivo se eligió este tema para presentar de manera sencilla algunos resultados de clanes.

En el capítulo 3 se da la definición de clan y gráfica de clanes, también se habla del comportamiento de una gráfica al aplicarle iterativamente el operador de clanes, esto permiten clasificar a una gráfica como: k-divergente,

k- estacionaria y k-nula. Es significativo mencionar que el determinar el k-comportamiento de un gráfica es un problema abierto en el sentido que no se sabe si es computable [10], es decir, se ignora si existe algún algoritmo que calcule el k-comportamiento.

En el primer capítulo de este trabajo se enuncian algunas definiciones y resultados de teoría de conjuntos como son: funciones, relaciones, conjuntos parcial y totalmente ordenados, con la finalidad de tenerlos como referencia en los conceptos de Teoría de Gráficas. En este capítulo no se etiquetan las definiciones y en general en el resto del trabajo, definiciones que se suponen conocidas no se etiquetaran.

Algunos conceptos básicos como camino, subgráfica, vecindad, eliminación y adición de vértices, isomorfismo y homomorfismo de gráficas, son estudiados en el segundo capítulo; además de presentar algunas operaciones entre gráficas.

En el capítulo 4 se presenta un resultado de *Martín Eduardo Frías Armenta* [2, 3] sobre el k-comportamiento, este dice que la eliminación de vértices dominados no altera el k-comportamiento de una gráfica G .

El capítulo 5 esta basado en un artículo de *Simone Hazan y Víctor Neumann Lara* [6], en donde presentan un resultado que muestra que un orden finito tiene la propiedad de punto fijo si la sucesión de gráficas iteradas de clanes de sus gráficas de comparabilidad converge a la gráfica trivial.

Finalmente en el capítulo 6 damos una aplicación del resultado presentado en el capítulo 5 con la ayuda de los teoremas de desmantelamientos [2, 3, 6], también se muestra como se trabajo en ampliar el resultado a una familia de gráficas, las cuales se enumeran en las conclusiones.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar algunas definiciones y resultados de teoría de conjuntos como son funciones, relaciones, conjuntos parcial y totalmente ordenados; con el propósito de tenerlos presentes durante el desarrollo de este trabajo.

Se determinó exponer estos temas en este capítulo para introducir al lector de una manera fácil y familiar a los conceptos de Teoría de gráficas.

1.1 Teoría elemental de conjuntos

La teoría elemental de conjuntos es fundamental en Teoría de gráficas, así como lo es en el resto de las ramas de las matemáticas, por tal motivo, iniciamos con la revisión de algunos conceptos básicos.

Un **conjunto** es una colección cualesquiera de objetos diferentes bien definidos, por ejemplo: cosas, números, animales, personas, ciudades, entre otros. Cada objeto es llamado elemento del conjunto, se acostumbra denotar los conjuntos con letras mayúsculas y los elementos con minúsculas.

Si tenemos que un objeto a es elemento de un conjunto A , entonces a **pertenece** a A , se denota como $a \in A$. Si a **no pertenece** a A , se denota $a \notin A$.

Llamaremos **conjunto vacío** al conjunto sin elementos y es denotado por $\emptyset$.

Si todo elemento del conjunto A es también elemento del conjunto B , entonces se dice que A es un **subconjunto** de B , lo cual se denota de la siguiente manera $A \subseteq B$.

Observemos que la propiedad de subconjunto cumple con lo siguiente: si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de C , entonces A es un subconjunto de C , en símbolos: $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \implies A \subseteq C$, también se sabe que el conjunto vacío es considerado subconjunto de todo conjunto.

La **igualdad** entre dos conjuntos A y B , se da si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Por otra parte se dice que dos conjuntos A y B son comparables si $A \subseteq B$ o bien $B \subseteq A$, en caso contrario decimos que no son comparables.

La **unión** de los conjuntos A y B , se define como $A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$.

La **intersección** de los conjuntos A y B , se define como $A \cap B = \{x/x \in A, x \in B\}$.

Dos conjuntos A y B se dicen **ajenos o disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$.

La **diferencia** de los conjuntos A y B se define como el conjunto de elementos que pertenecen a A , pero no a B , en símbolos $A - B = \{x/x \in A, x \notin B\}$.

Dado un conjunto U y un subconjunto A de U , el conjunto $U - A$ es el **complemento** de A , es decir, todos los elementos de U , pero no pertenecen a A .

En la siguiente sección hablaremos de funciones, tema fundamental en la mayoría de las ramas de las matemáticas.

1.2 Funciones

Esta sección es una de las más importantes para el desarrollo de este trabajo, ya que el concepto de función es básico para definir algunos conceptos de Teoría de Gráfica.

Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder de algún modo a un elemento único de un conjunto B , se dice que esa correspondencia es una **función** y lo escribimos así: $f : A \rightarrow B$. El conjunto A se llama **dominio** y el conjunto B se llama **contradominio**.

Si $a \in A$, el elemento de B que le corresponde a a se llama **imagen** de a bajo f y se denota por $f(a)$.

Si f y g son funciones definidas en el mismo dominio D y si $f(a) = g(a)$ para todo $a \in D$, entonces f y g son **funciones iguales** y se escribe $f = g$.

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. El conjunto de los elementos de B que son imágenes de un elemento de A por lo menos, se llama **imagen de f** . Se simboliza la imagen de f por $f(A)$. Cabe observar que $f(A)$ es un subconjunto de B .

Una función $f : A \rightarrow B$, se dice **inyectiva** (o uno a uno), si siempre que $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$, o lo que es lo mismo, si $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$.

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Si $f(A) = B$, es decir, si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A , se dice entonces que f es una función **sobreyectiva** de A en B o que f es una función de A **sobre** B . Una función que es uno a uno y sobre es una **biyección**.

Sea A un conjunto cualquiera. La función $f : A \rightarrow A$, definida por $f(x) = x$, se llama **función identidad** o transformación idéntica sobre A y se denota por 1_A o también por Id_A .

Si $f : A \rightarrow B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B$ es la restricción de f a A_1 , donde $f|_{A_1}(a) = f(a)$ para toda $a \in A_1$.

Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, la función $(g \circ f) : A \rightarrow C$ es llamada función **composición**; se tiene que a cada elemento $a \in A$ le corresponde un

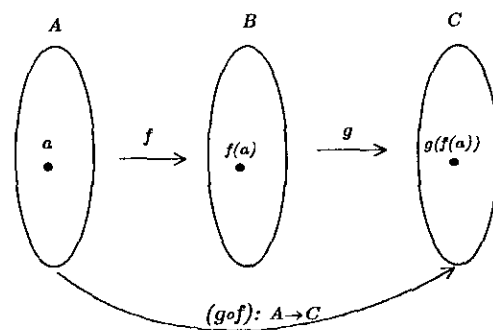
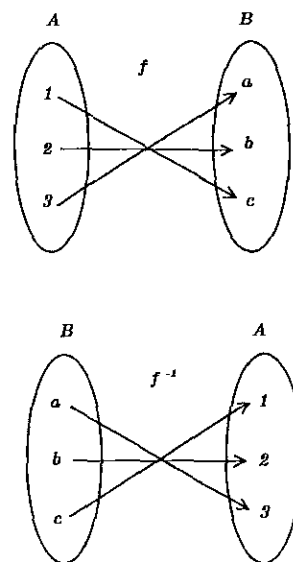
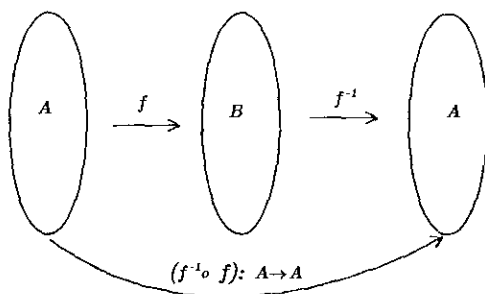
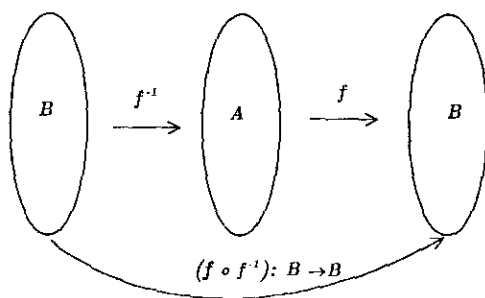


Figura 1.1: Función composición

Figura 1.2: $f : A \rightarrow B$ y su función inversa $f^{-1} : A \rightarrow B$

Figura 1.3: Función composición: $(f^{-1} \circ f) : A \rightarrow A$ Figura 1.4: Función composición: $(f \circ f^{-1}) : B \rightarrow B$

elemento $g(f(a)) \in C$, es decir, se tiene una función de A en C . Ver figura 1.1.

Sea $f : A \rightarrow B$, entonces $I_B \circ f = f$ y $f \circ I_A = f$, es decir, que la función composición de cualquier función y la función identidad es la función misma.

La **imagen inversa** de una función es definida de la siguiente manera. Sea $f : A \rightarrow B$ y sea $b \in B$. La imagen inversa de b , que se denota por $f^{-1}(b)$, son los elementos de A que tienen a b por imagen, en símbolos: $f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$.

Sea $f : A \rightarrow B$ una función inyectiva y sobre, se tiene que para cada $b \in B$ le corresponde un elemento único $f^{-1}(b)$ de A . Por lo que $f^{-1} : B \rightarrow A$, y es llamada **función inversa**. Ver figura 1.2

El siguiente resultado son teoremas sobre la función composición entre una función y su inversa.

Sea la función $f : A \rightarrow B$ inyectiva y sobreyectiva, $f^{-1} : B \rightarrow A$ existe. Entonces la composición $(f^{-1} \circ f) : A \rightarrow A$ es la función identidad sobre A , (figura ??) y la composición $(f \circ f^{-1}) : B \rightarrow B$ es la función identidad sobre B , figura 1.4.

Sea $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ y tenemos que $(g \circ f) : A \rightarrow A$ es la función identidad sobre A y $(f \circ g) : B \rightarrow B$ es la función identidad sobre B , entonces g es la función inversa de f , es decir, $g = f^{-1}$.

Si $f : A \rightarrow A$, definimos $f^1 = f$ y para cualquier entero positivo n , $f^{n+1} = f \circ (f^n)$

Sean dos conjuntos A y B , se llama **conjunto producto** de A y B al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Se denota por $A \times B$ que se lee A cruz B . En símbolo $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. La **gráfica f^* de la función f** es el conjunto de todos los pares ordenados en los que $a \in A$, figura como primer elemento y su imagen como segundo elemento. En símbolo $f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$

1.3 Relaciones

Una **relación** $\mathcal{R}$ consiste en lo siguiente:

- 1) Un conjunto A .
- 2) Un conjunto B .
- 3) Un enunciado formal $P(x, y)$ tal que $P(a, b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado $(a, b) \in A \times B$.

Entonces una relación $\mathcal{R}$ entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.

Si $P(a, b)$ es verdadero, se escribe $a\mathcal{R}b$ que se lee a está relacionado con b y si $P(a, b)$ es falso, entonces a no está relacionado con b .

Sea $\mathcal{R}$ un subconjunto de $A \times A$. Entonces $\mathcal{R}$ es una **relación reflexiva** si, para todo $a \in A$, se cumple que $a\mathcal{R}a$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{R}$ es reflexiva si todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

Sea $\mathcal{R}$ una relación en A . Se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación simétrica** si $a\mathcal{R}b$ implica $b\mathcal{R}a$, esto es, que si a está relacionado con b , entonces b está relacionado con a .

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A , se llama **relación antisimétrica** si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ implica $a = b$. En otras palabras, si $a \neq b$, entonces puede a estar relacionado con b , o bien b relacionado con a , pero no se cumplen ambas.

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A , se nombra **relación transitiva** si: $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ implica $a\mathcal{R}c$, es decir, si a está relacionado con b y b relacionado con c , entonces a está relacionado con c .

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si:

- 1) $\mathcal{R}$ es reflexiva, esto es, para toda $a \in A$, $a\mathcal{R}a$
- 2) $\mathcal{R}$ es simétrica, esto es, $a\mathcal{R}b$ implica $b\mathcal{R}a$
- 3) $\mathcal{R}$ es transitiva, esto es, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ implica $a\mathcal{R}c$

1.4 Complemento a la teoría de conjuntos

Sean $A_1, A_2, \dots, A_i$ subconjuntos de $\mathcal{A}$, para $i \in I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Se dice que I es el conjunto de índices y que los conjuntos $\{A_1, A_2, \dots, A_i\}_{i \in I}$ están indexados, donde $i \in I$ es un índice. A una familia semejante de conjuntos indexados, que se deota por $\{A_i\}_{i \in I}$ o $\mathcal{A}$.

Una familia indexada de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ se puede considerar también como una función $f : I \rightarrow \mathcal{A}$ en la cual el dominio de f es el conjunto de índices I y el contradominio $\mathcal{A}$, de f es una familia de conjuntos.

Las operaciones de unión y de intersección definidas para dos conjuntos, se generalizan fácilmente por inducción a un número finito de conjuntos.

Así, dados los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

Dada una familia $\{B_i\}_{i \in I}$ no vacía de subconjuntos de A , $\{B_i\}_{i \in I}$ es una **partición** de A si

$$i) \bigcup_{i \in I} B_i = A$$

$$ii) B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ Para todo } i, j \in I \text{ tal que } i \neq j.$$

Y entonces cada B_i se dice una **clase de equivalencia** de A .

El siguiente resultado es llamado Teorema fundamental sobre relaciones de equivalencia, en el que se vinculan particiones y relaciones de equivalencias.

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto A y para toda $a \in A$ sea $B_a = \{x / (x, a) \in \mathcal{R}\}$ el conjunto de elementos relacionados con a . Entonces la familia de conjuntos $\{B_a\}_{a \in A}$ es una **partición** de A .

El conjunto B_a es la clase de equivalencia determinada por a y el conjunto de clases de equivalencia $\{B_a\}_{a \in A}$ se denota por $A/\mathcal{R}$ y se llama el **conjunto cociente**.

Ilustraremos lo anterior con un ejemplo:

Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en los enteros por $x \equiv y \pmod{5}$, se lee x es congruente con y modulo 5, es decir, $x - y$ es divisible por 5.

$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Tenemos que hay cinco clases de equivalencia en:

$$E/\mathcal{R} : E_0, E_1, E_2, E_3, E_4$$

Como todo entero x se puede expresar de una única manera de la forma $x = 5q + r$, donde $0 \leq r < 5$, por lo que x es un elemento de la clase de equivalencia E_r donde r es el resto o residuo.

$$E_0 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$E_1 = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$E_2 = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$E_3 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$E_4 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

1.5 Órdenes

Una relación, definida en un conjunto A , es una relación de **orden** si cumple con ser:

- 1) Reflexiva, es decir, $(a, a) \in \mathcal{R}$ para toda $a \in A$,
- 2) Antisimétrica, esto es, $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ implica $a = b$
- 3) Transitiva, es decir, $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ implica $(a, c) \in \mathcal{R}$
- 4) Dicotómica, es decir, $(a, b) \in \mathcal{R}$ ó $(b, a) \in \mathcal{R}$

El conjunto dotado de una relación de orden se llama **ordenado**

Se dice que una relación definida en $A \times A$ es una relación de **preorden** en A , si cumple con las propiedades reflexiva y transitiva. Al conjunto en el cual se ha definido una relación de preorden se llama **preordenado**.

Un **orden parcial** en un conjunto A es una relación $\mathcal{R}$ en A , si cumple con ser una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica. Si una relación $\mathcal{R}$ en A define un orden parcial en A , entonces $(a, b) \in \mathcal{R}$ se denota por $a \lesssim b$ que se lee a anterior a b . Un conjunto A y una relación $\mathcal{R}$ de orden parcial en A constituyen un **conjunto parcialmente ordenado**, denotado por $(A, \lesssim)$.

Un **orden total** en un conjunto A es un **orden parcial** en A más la propiedad $a < b$ ó $a > b$ para cualesquiera dos elementos a y b de A . Un conjunto A y un **orden total** dado en A constituyen un **conjunto totalmente ordenado**.

Si $(A, \lesssim)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $x \in A$ es un elemento **maximal** de A si para todo $a \in A$ con $a \neq x$, entonces x no esta relacionada con a , es decir, a es un elemento maximal sino hay en A ningún elemento posterior a a .

Si $(A, \lesssim)$ es un conjunto parcialmente ordenado, un elemento $y \in A$ es un elemento **minimal** de A si para todo $b \in A$ con $b \neq y$, entonces b no esta relacionada con y , es decir, si ningún elemento de A es anterior a b .

Dos conjuntos ordenados son **isomorfos** si existe entre sus elementos una correspondencia biyectiva que preserva la relación de orden, en particular, un conjunto ordenado A es isomorfo a un conjunto ordenado B , lo que se denota por $A \simeq B$, si existe una función $f : A \rightarrow B$ inyectiva y sobre, que tiene la propiedad de que, para cualesquiera elementos $a, a' \in A$; $a \lesssim a'$ si y sólo si, $f(a) \lesssim f(a')$. La función f se dice **aplicación isomorfa o isomorfismo** de A en B .

Es importante enfatizar que en este capítulo inicial se enunciaron algunas definiciones y resultados de teoría de conjuntos y otros temas fundamentales para la intrucción en este trabajo. En el siguiente capítulo se presentan algunos conceptos básicos de Teoría de gráfica y la notación que usaremos.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En 1736, Leonhard Euler (1707-1782) planteó y presentó una solución del famoso problema llamado, “El problema de los puentes de Königsberg”, en el cual se tiene dos islas unidas mutuamente a las orillas del Río Pregel, Königsberg (ahora Kaliningrado, Rusia) por siete puentes. El problema consiste en iniciar partiendo de cualquiera de las cuatro áreas de tierra, recorriendo solamente una vez cada puente para regresar a la posición inicial. Este problema se modela mediante una gráfica. Así como este problema, muchos otros problemas de otras áreas es posible modelarlos mediante gráficas para llegar a una solución.

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados básicos e importantes de Teoría de gráficas, retomados de [5], en donde se pueden estudiar más ampliamente.

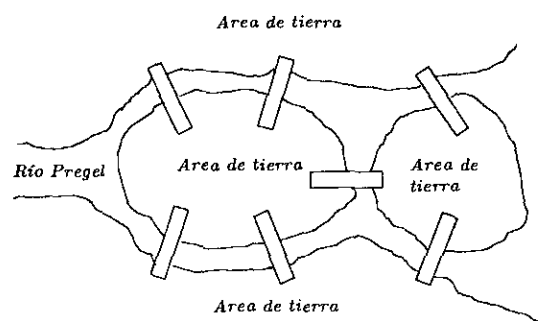


Figura 2.1: Representación del problema de los puentes de *Königsberg*.

2.1 Gráfica

Definición 2.1 Una *gráfica* consta de un conjunto V o $V(G)$ llamado conjunto de vértices y por un conjunto de pares no ordenados E o $E(G)$ de elementos de V llamados aristas. Si G es una gráfica con vértices V y aristas E escribimos $G = (V, E)$.

Una arista será denotada por los vértices que la componen $\{u, v\} \in E(G)$ ó $uv \in E(G)$. Los vértices extremos de la arista $\{u, v\}$ son u y v . Se dice que $v, w \in V(G)$ son vértices adyacentes si $vw \in E(G)$, o sea que dos vértices son adyacentes si existe una arista que los tiene por extremos. Dos aristas son incidentes cuando comparten un vértice como extremo; una arista y un vértice inciden si éste último es un extremo de la arista.

Se le dice **lazo** a una arista que inicia y termina en un solo vértice, en símbolo $\{u, u\}$ y las aristas **múltiples** o **paralelas** se presentan cuando entre dos vértices adyacentes existe más de una arista que tiene como extremos a estos vértices.

A menos que se indique lo contrario, supondremos que los conjuntos $E(G)$ y $V(G)$ son finitos y $V(G) \neq \emptyset$, además todas nuestras gráficas son simples, o sea, sin lazos ni aristas múltiples o paralelas.

La figura 2.2 es un ejemplo de una representación de la gráfica G , consta de los conjuntos:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \\ E(G) &= \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_7, v_4v_7, \\ &\quad v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7\} \end{aligned}$$

Una gráfica donde aparecen aristas múltiples pero no lazos, es llamada *multigráfica*; en la figura 2.3, damos un ejemplo de ella. Cuando en una gráfica se presentan aristas múltiples y lazos a la vez, es llamada *pseudográfica*, ver figura 2.4.

El grado de un vértice v es el número de aristas que inciden con v y se denota como $\text{grad}(v)$. En la gráfica G de la figura 2.5, tenemos que el $\text{grad}(v_1) = 4$, $\text{grad}(v_2) = 2$, $\text{grad}(v_3) = 3$, $\text{grad}(v_4) = 3$, $\text{grad}(v_5) = 2$.

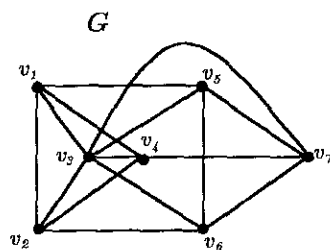


Figura 2.2: Ejemplo de representación de una *gráfica*.

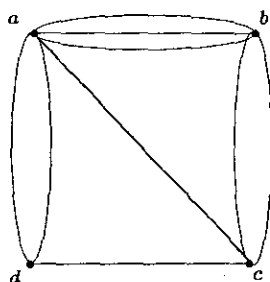


Figura 2.3: *Multigráfica* con tres aristas múltiples

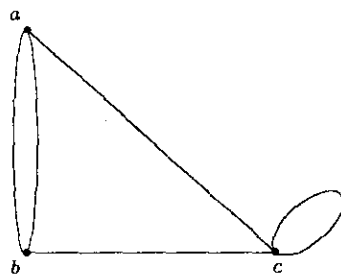


Figura 2.4: *Pseudográfica* con una arista múltiple y un lazo

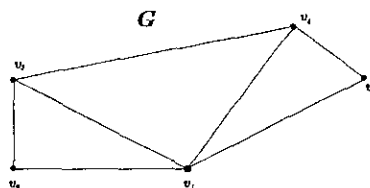
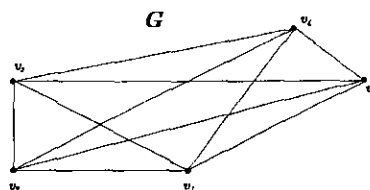
Figura 2.5: El grado de v_1 es 4

Figura 2.6: Gráfica regular de grado 4

Una gráfica es **regular** de grado r si todos sus vértices tienen grado r . La gráfica G de la figura 2.6 es regular de grado 4, ya que el grado de cada uno de sus vértices es 4.

$$\text{grad}(v_1) = \text{grad}(v_2) = \text{grad}(v_3) = \text{grad}(v_4) = \text{grad}(v_5) = 4$$

Teorema 2.2 La suma de los grados de los vértices de una gráfica G es dos veces el número de aristas,

$$\sum \text{grad}(v_i) = 2q,$$

donde q es el número de aristas de $E(G)$ y $v_i \in V(E)$

Demostración

Es consecuencia de que cada arista incide en dos vértices, o sea al llevar a cabo la suma de los grados de los vértices de una gráfica, las aristas se cuentan dos veces

■

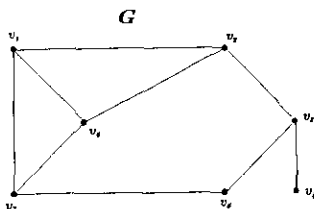


Figura 2.7: Gráficas con *caminos*, *ciclos*, *paseos* y *trayectorias*.

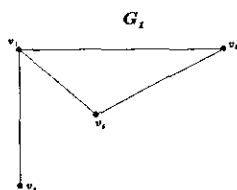


Figura 2.8: *Camino abierto*: v_1, v_2, v_6, v_1, v_7

2.2 Camino

Un **camino** de u a v en una gráfica G es una sucesión alternante de vértices y aristas $v_0, x_1, v_1, x_2, \dots, x_n, v_n$, empezando con $v_0 = u$ y terminando con $v_n = v$ donde cada par de vértices consecutivos son adyacentes y cada arista x_i es incidente a v_{i-1} y a v_i . Para gráficas simples el camino que une a $v_0 = u$ con $v_n = v$, es suficiente representarlo como la sucesión de vértices $v_0, v_1, \dots, v_n$, tal que v_i y v_{i+1} sean adyacentes y suele ser llamado uv -camino.

La **longitud de un camino** es el número de aristas que lo forman. Se dice que un camino es nulo si tiene longitud cero. Un camino que no repite arista se nombra **paseo**. Un camino que no repite vértices se llama **trayectoria**. Un camino no nulo cuyos extremos son iguales se llama **cerrado**. Un camino no nulo cuyos extremos son distintos se dice **abierto**.

Si un camino es cerrado y todos sus n vértices son distintos, excepto el primero y el último, para $n \geq 3$ entonces será llamado **ciclo**.

Tomando la gráfica G de la figura 2.7, ejemplificamos los conceptos de camino abierto y cerrado, paseo, trayectoria y ciclo, en las graficas 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12..

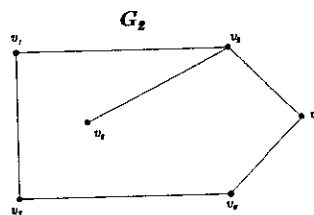


Figura 2.9: Camino cerrado: $v_7, v_5, v_3, v_2, v_6, v_2, v_1, v_7$

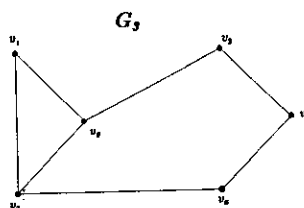


Figura 2.10: Paseo: $v_6, v_7, v_1, v_6, v_2, v_3, v_5, v_7$

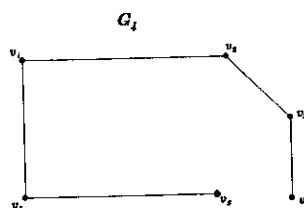


Figura 2.11: Trayectoria: $v_5, v_7, v_1, v_2, v_3, v_4$

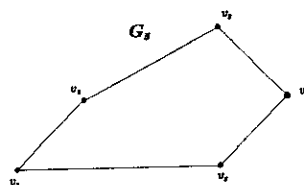
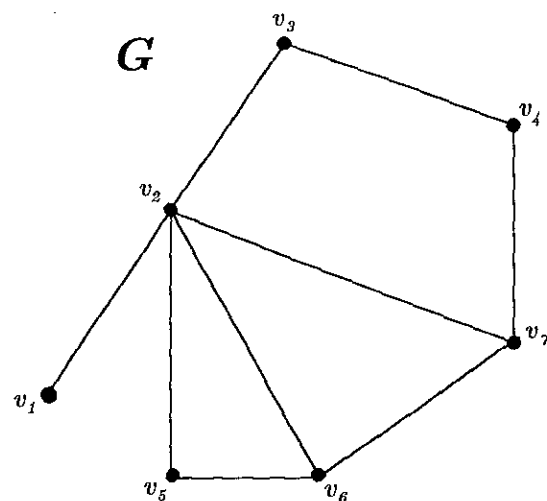
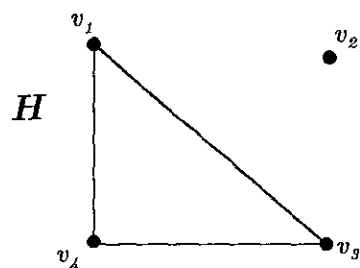


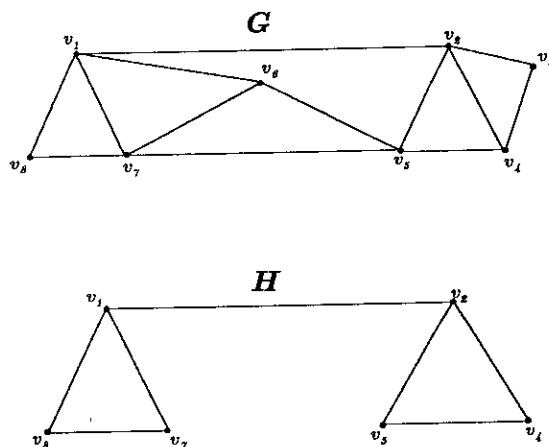
Figura 2.12: Ciclo: $v_7, v_6, v_2, v_3, v_5, v_7$

Figura 2.13: Ejemplo de una gráfica *conexa*

Definición 2.3 Sea G una gráfica. Diremos que G es **conexa** si para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ existe un uv -camino. Explicándolo de una manera intuitiva, una gráfica conexa es aquella en la cual podemos ir de cualquier vértice a cualquier otro por un camino.

En la gráfica G de la figura 2.13 se da un ejemplo de una gráfica conexa y en la figura 2.14 uno de una gráfica no conexa o **disconexa**, ya que al vértice v_2 no se puede llegar por algún camino partiendo de cualquier otro vértice.

Figura 2.14: H es una gráfica *no conexa* ó *disconexa*

Figura 2.15: H es una subgráfica de G

La **distancia** $d(u, v)$ entre dos vértices u y v en G es la longitud del camino más corto que los une. Si no existiese un camino entre u y v se dice que $d(u, v) = \infty$. En gráficas conexas la distancia cumple lo siguiente, para todos los puntos u, v y w .

- 1) $d(u, v) \geq 0$, donde $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$
- 2) $d(u, v) = d(v, u)$
- 3) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

Una operación que cumple con dichas propiedades se le llama **métrica**.

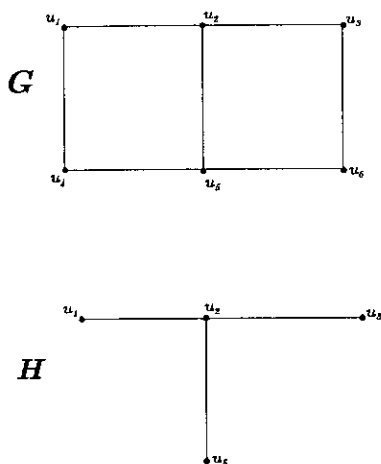
2.3 Subgráficas

Definición 2.4 Una gráfica H se dice **subgráfica** de G si tiene todos sus vértices y aristas en G , es decir, $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

La gráfica H de la figura 2.15 es subgráfica de G , ya que:

$$\begin{aligned} V(H) &\subseteq V(G) = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\} \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \\ E(H) &\subseteq E(G) = \{v_1v_2, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5, v_1v_7, v_1v_8, v_7v_8\} \subseteq \\ &\{v_1v_2, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_5v_7, v_1v_6\} \end{aligned}$$

Decimos que si H es subgráfica de G , entonces G es **supergráfica** de H .

Figura 2.16: H es una subgráfica inducida de G

Definición 2.5 Una *subgráfica inducida* H , es una subgráfica de G tal que si $u, v \in V(H)$ y $\{u, v\} \in E(G)$, se tiene que $\{u, v\} \in E(H)$. Se denota $H \subseteq_* G$.

En la figura 2.16, H es una subgráfica inducida de G , ya que $u_1, u_2, u_3, u_5 \in V(H)$, $\{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_5\} \in E(G)$ y como u_1u_2, u_2u_3, u_2u_5 son aristas de G , entonces lo son también en H .

En la figura 2.17, damos un ejemplo donde H es subgráfica de G , pero H no es una subgráfica inducida de G , por que $u_1, u_5 \in V(H)$ y $\{u_2u_5\} \in E(G)$, pero $\{u_2u_5\}$ no es arista de H .

Una **subgráfica generadora** es una subgráfica que contiene todos los vértices de G , es decir, si H es una subgráfica de G en donde $V(H) = V(G)$.

En la figura 2.18, se muestra un ejemplo en donde H es una subgráfica de G y se cumple que: $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = V(G)$, por lo tanto H es una subgráfica generadora de G .

Sea G una gráfica. H es una **subgráfica maximal** de G , si H no esta contenida en alguna subgráfica de G .

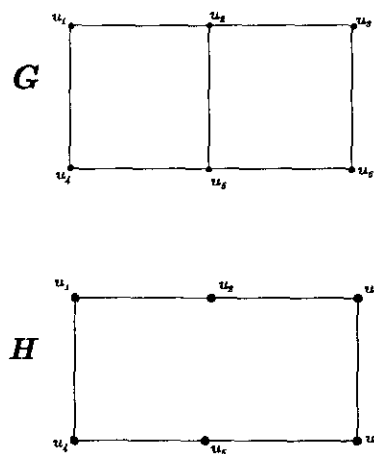


Figura 2.17: H es subgráfica de G , sin embargo H , no es una subgráfica inducida de G

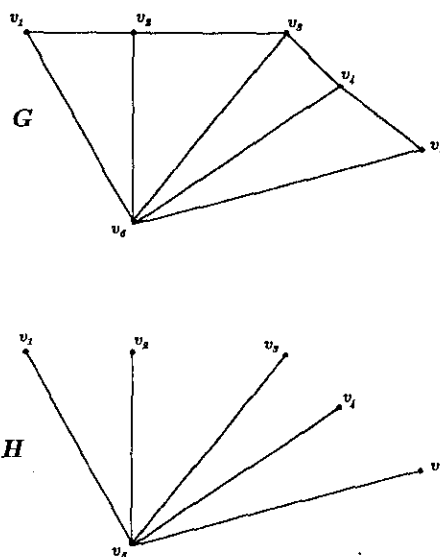


Figura 2.18: H es una subgráfica generadora de G

Se dice **componente conexa** de una gráfica G a una subgráfica conexa maximal de una gráfica G , es decir, a una subgráfica conexa y maximal a la vez.

2.4 Eliminación y adición de vértices o aristas

Esta sección tiene especial importancia, debido a que en un capítulo posterior titulado Desmantelamientos, estudiamos el comportamiento de las gráficas al eliminar vértices con ciertas características.

Por lo pronto en esta sección veremos como se transforma una gráfica dada, al quitarle o aumentar vértices o aristas.

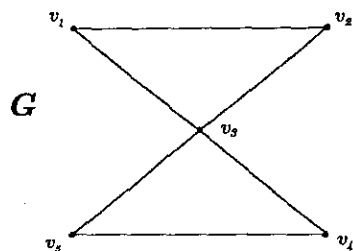
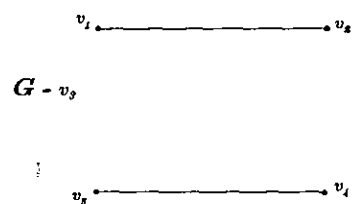
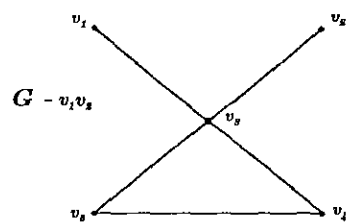
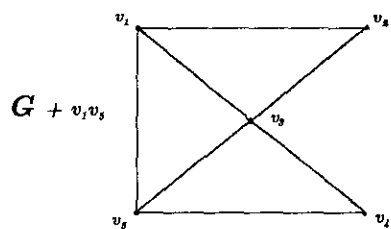
Si v es vértice de G , entonces $G - v$ es la subgráfica maximal de G que no contiene a v . Si e es una arista de G , $G - e$ es la subgráfica generadora que contiene todas las aristas de G excepto e .

Para eliminar un conjunto de vértices o aristas se elimina uno por uno en sucesión. Por otro lado, si v y u son vértices no adyacentes en G , el añadir la arista vu se tiene la supergráfica más pequeña de G que contiene a vu .

Tomando la gráfica G de la figura 2.19, observamos en la 2.20 como cambia al quitarle el vértice v_3 , ya que al restarlo también se restan las aristas que lo tienen como extremo, que son: v_1v_3 , v_2v_3 , v_3v_4 y v_3v_5 .

En la figura 2.21, se muestra la gráfica G al quitarle la arista v_1v_2 . En la figura 2.22, se muestra la gráfica G al añadirle la arista v_1v_5 . Por último en 2.23, a la gráfica G se le agrega el vértice v_6 .

Sea G una gráfica. Si H es la subgráfica de G , $G - H$ es la gráfica que resulta al eliminar en G cada uno de los vértices que pertenecen a H .

Figura 2.19: Gráfica G Figura 2.20: La gráfica G sin el vértice v_3 Figura 2.21: La gráfica G menos la arista v_1v_2 Figura 2.22: La gráfica G más la arista v_1v_3

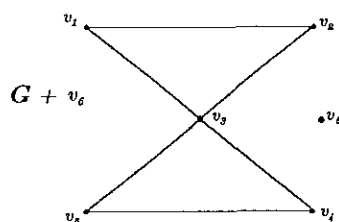
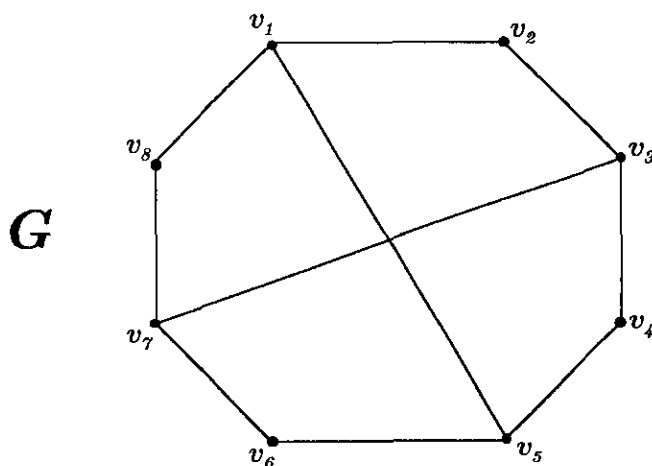
Figura 2.23: La gráfica G más el vértice v_5 

Figura 2.24:

2.5 Vecindad

La **vecindad abierta** de un vértice u de G , en símbolo: $N_G(u)$ o $N(u)$, se define por: $N(u) = \{w \mid w \in V(G), \{u, w\} \in E(G)\}$

La **vecindad cerrada** de un vértice u de una gráfica G , se denota como $N_G[u]$ o simplemente $N[u]$ y se define por: $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.

En la gráfica G de la figura 2.24 tenemos que la vecindad abierta y cerrada de los vértices v_1 y v_2 :

$$N(v_1) = \{v_2, v_5, v_8\}$$

$$N[v_1] = \{v_1, v_2, v_5, v_8\}$$

$$N(v_2) = \{v_1, v_3\}$$

$$N[v_2] = \{v_1, v_2, v_3\}$$

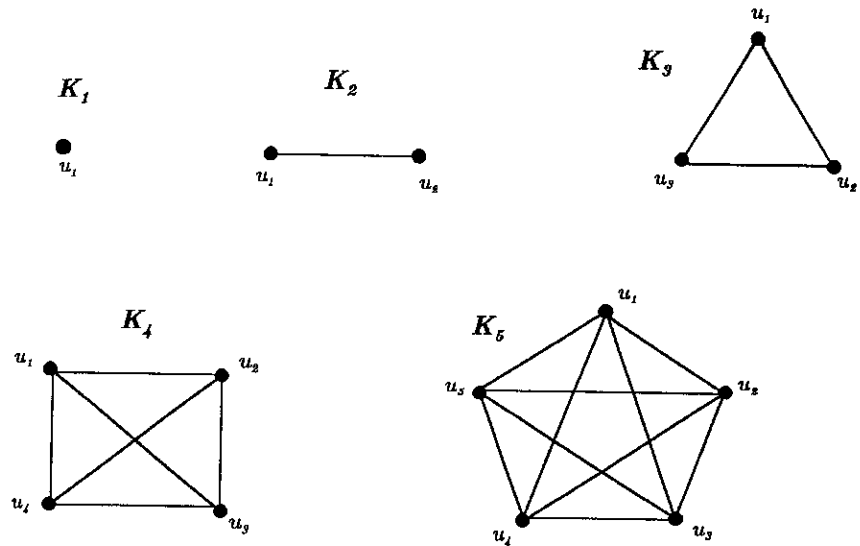


Figura 2.25: Ejemplos de gráficas completas

Definición 2.6 La *gráfica completa* de n vértices, que se denota K_n , es la gráfica con n vértices en la cual existe una arista entre cada par de vértices distintos.

Una **gráfica dirigida** o digráfica D consiste de un conjunto no vacío V o $V(D)$ de vértices y un conjunto E o $E(D)$ de pares de puntos ordenados distintos, llamados líneas dirigidas, flechas o arcos, figura 2.26. Una **gráfica orientada** es una digráfica que no tiene líneas simétricas, es decir, si $x, y \in V(D)$ y si x es el vértice en donde inicia línea y y el vértice a donde llega, no existe una línea que inicie en y y termine en x .

En el ejemplo de gráfica orientada de la figura 2.27, tenemos que:

$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(D) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_5v_2, v_4v_1, v_3v_1, v_2v_4, v_3v_5\}$$

En este ejemplo vemos claramente la diferencia entre una arista y una línea dirigida, ya que la línea v_2v_1 no pertenece a $E(D)$ de la figura 2.27, sin embargo si fuera una arista sería lo mismo decir v_1v_2 o v_2v_1 .

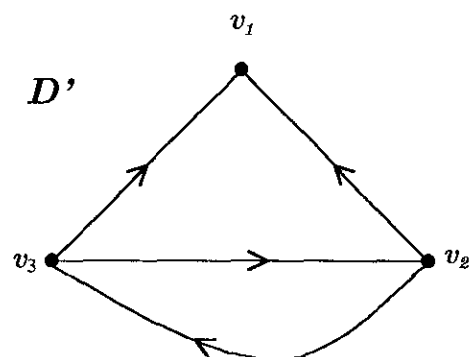


Figura 2.26: Ejemplo de Digráfica o gráfica dirigida.

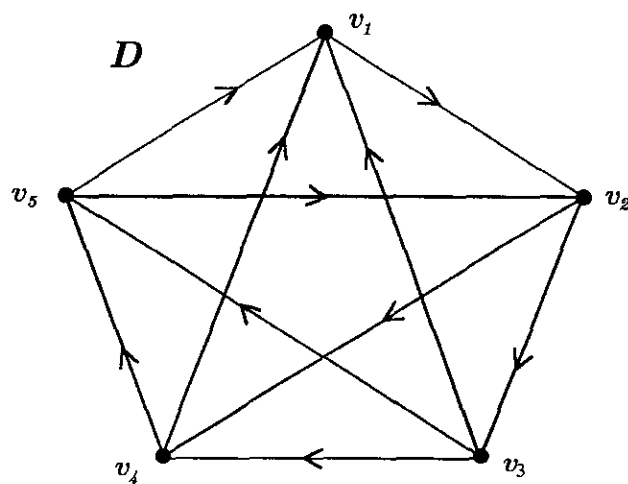


Figura 2.27: Ejemplo de gráfica orientada.

2.6 Isomorfismo

Definición 2.7 Las gráficas G y H son isomorfas si existe una función uno a uno y sobre, f , de los vértices de G a los de H y una función uno a uno y sobre, g , de las aristas de G a las aristas de H , de modo que una arista e es incidente en v y w en G , si y sólo si la arista $g(e)$ es incidente en $f(v)$ y $f(w)$ en H . El par de funciones f y g es llamado un **isomorfismo** de G sobre H .

En otras palabras, dos gráficas G y H son isomorfas, si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices que preservan adyacencias. Si existe un isomorfismo entre G y H diremos que G y H son isomorfas, en símbolo $G \cong H$.

Un isomorfismo para las gráficas G y H que aparecen en la figura 2.28 se define como:

$$\begin{array}{ll} f(v_1) = a & g(v_1v_5) = ad \\ f(v_2) = c & g(v_1v_2) = ac \\ f(v_3) = f & g(v_2v_3) = cf \\ f(v_4) = b & g(v_3v_4) = bf \\ f(v_5) = d & g(v_4v_5) = bd \end{array}$$

Definición 2.8 Un **automorfismo** de G es un isomorfismo de G en si misma.

En la figura 2.29 se da un ejemplo de automorfismos de la gráfica G , el isomorfismo esta definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} f(a) = d & g(ab) = df \\ f(b) = f & g(ac) = de \\ f(c) = e & g(ad) = ad \\ f(d) = a & g(de) = ac \\ f(e) = c & g(df) = ab \\ f(f) = b & g(ce) = ce \\ & g(cb) = ef \\ & g(bf) = bf \\ & g(ef) = bf \end{array}$$

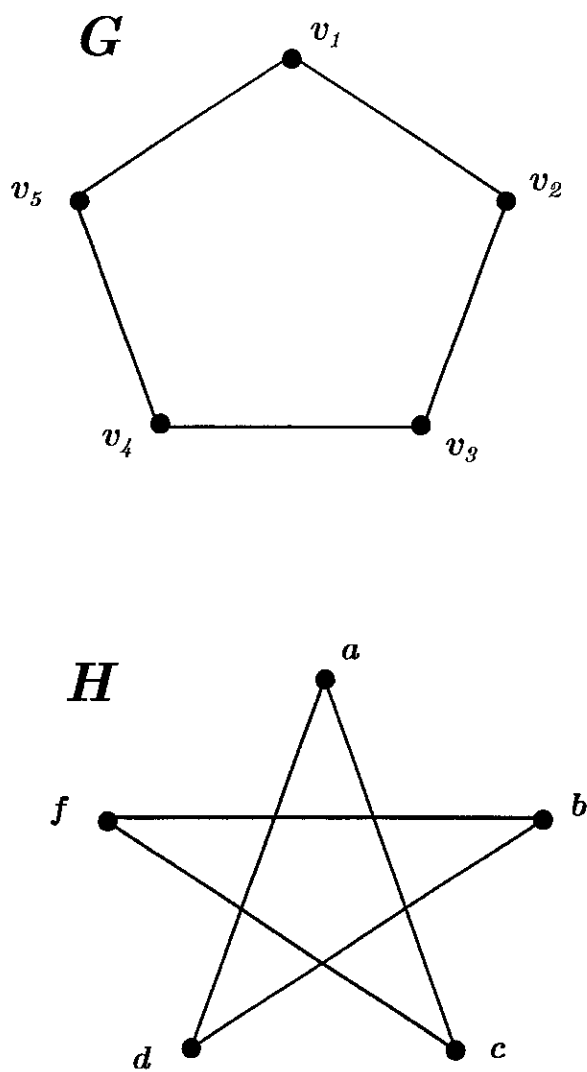


Figura 2.28: Las gráficas G y H son *isomorfas*

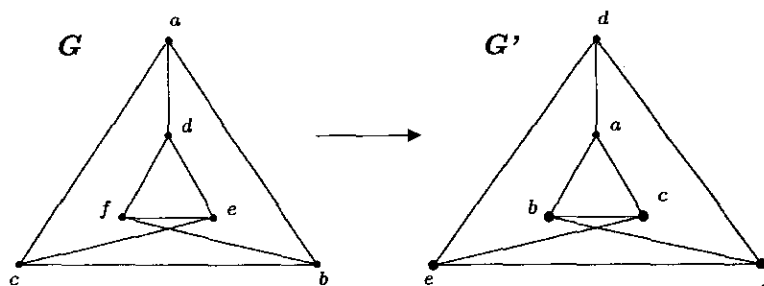


Figura 2.29: Ejemplo de un automorfismo entre gráficas.

Un **invariante** de una gráfica G es un número asociado con G el cual tiene el mismo valor para cualquier gráfica isomorfa a G .

Las definiciones de algunos ejemplos de invariantes de una gráfica G son:

- a) El cuello de una gráfica G , denotado por $g(G)$, es la longitud del ciclo de menor longitud en G .
- b) La circunferencia $c(G)$ es la longitud del ciclo más largo.
- c) El orden de G es el número de vértices de G y puede ser denotado por $or(G)$, $|G|$ o $|V(G)|$.

El número de ciclos, la cantidad de aristas, entre otros también son invariantes de una gráfica.

El **complemento** de una gráfica G es la gráfica $\overline{G}$ con los mismos vértices que G , tal que una arista existe en $\overline{G}$ si y sólo si no existe en G , Ver figura 2.30.

Una gráfica G es **autocomplementaria** si G y $\overline{G}$ son isomorfas, figura 2.31. La gráfica G de 2.30, no es autocomplementaria, ya que G y $\overline{G}$ no son isomorfas.

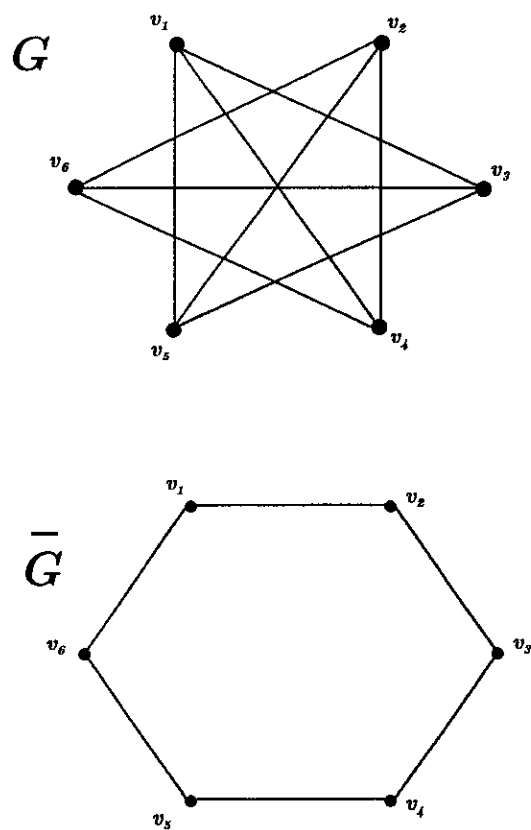


Figura 2.30: Ejemplo de una gráfica y su gráfica *complemento*. Estas gráficas **no** son *autocomplementarias*

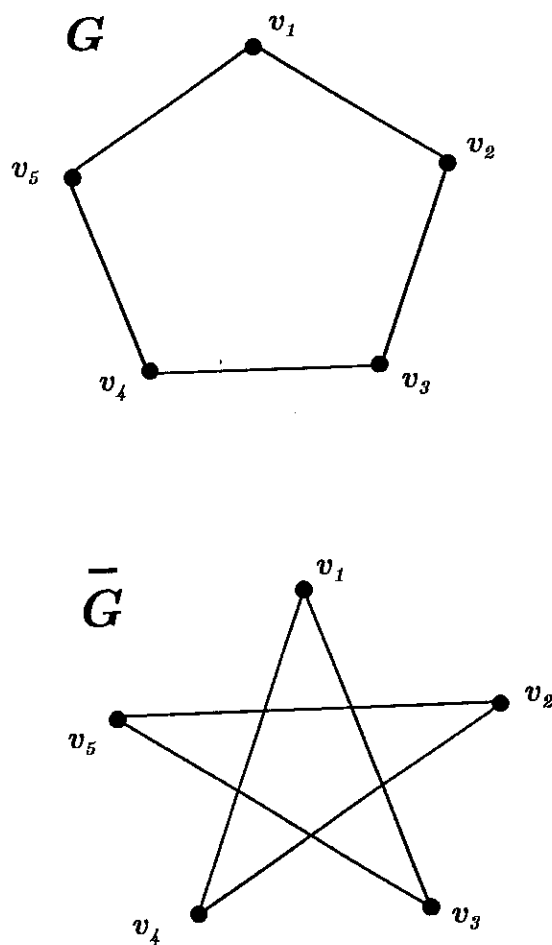


Figura 2.31: Ejemplo de una gráfica *auto-complementaria*

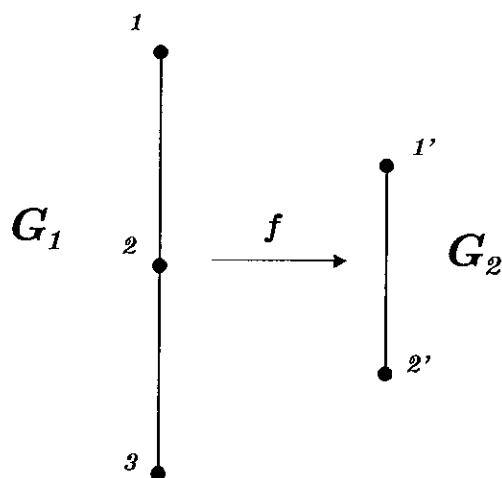


Figura 2.32: f es un homomorfismo de G_1 en G_2

2.7 Homomorfismo

Definición 2.9 Un *homomorfismo* de una gráfica G_1 en una gráfica G_2 , es una función f del conjunto de vértices de G_1 en el conjunto de vértices de G_2 con la propiedad de que si v y w son adyacentes en G_1 , entonces $f(v)$ y $f(w)$ son adyacentes o iguales en G_2 .

En otras palabras un homomorfismo entre dos gráficas G_1 y G_2 es una función $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que las imágenes de vértices adyacentes son adyacentes o iguales.

El homomorfismo para las gráficas G_1 y G_2 que se muestran en la figura 2.32 lo definimos como:

$$f(1) = 2'$$

$$f(2) = 1'$$

$$f(3) = 2'$$

Los vértices 1 y 2 son adyacentes en G_1 , $f(1) = 2'$ y $f(2) = 1'$ son adyacentes en G_2 , así como los vértices 2 y 3 son adyacentes en G_1 , $f(2) = 1'$ y $f(3) = 2'$ son adyacentes en G_2 .

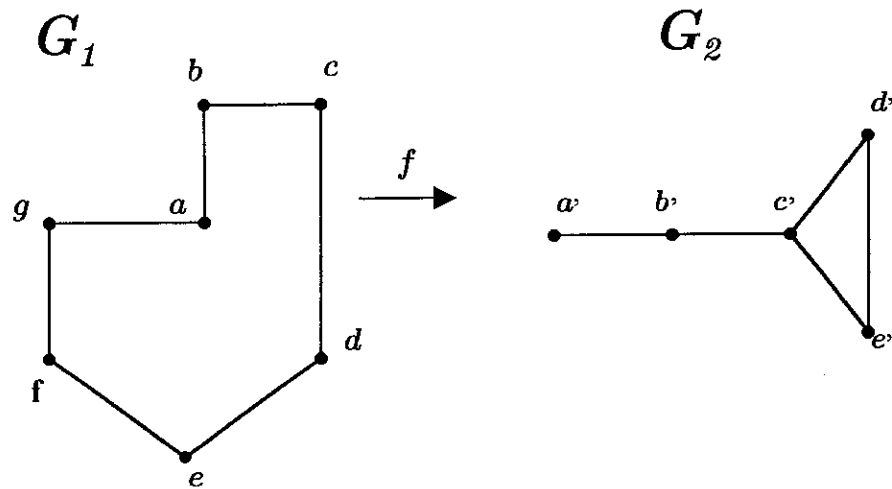


Figura 2.33: Ejemplo de un *homomorfismo* entre gráficas

En la figura 2.33, se da un segundo ejemplo de un homomorfismo entre gráficas, definido por:

$$f(a) = a'$$

$$f(b) = b'$$

$$f(c) = c'$$

$$f(d) = d'$$

$$f(e) = e'$$

$$f(f) = c'$$

$$f(g) = b'$$

Definición 2.10 Sean G y H dos gráficas, decimos que un homomorfismo entre ellas $\rho : G \rightarrow H$ es una **retracción** o **retracción reflexiva** si existe un homomorfismo $\sigma : H \rightarrow G$ tal que $\rho \circ \sigma$ es la identidad en H . En este caso, decimos que H es un **retracto** de G .

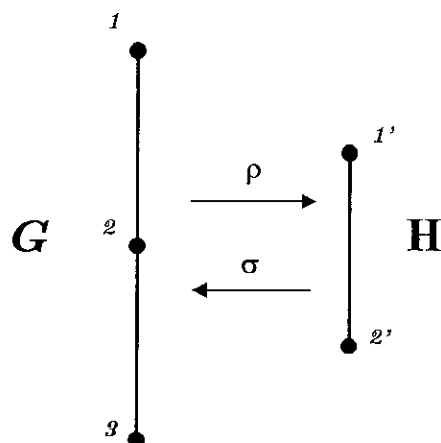


Figura 2.34: Ejemplo de una *retracción*. H es un *retracto* de G .

Sean G y H dos gráficas, ver figura 2.34. El homomorfismo entre G y H , definido como:

$$\begin{aligned}\rho : G &\rightarrow H \\ \rho(1) &= 1' \\ \rho(2) &= 1' \\ \rho(3) &= 2'\end{aligned}$$

ρ es una retracción, ya que existe un homomorfismo $\sigma : H \rightarrow G$, definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma(1') &= 2 \\ \sigma(2') &= 3\end{aligned}$$

Y tenemos que:

$$\begin{aligned}\rho(\sigma(1')) &= \rho(2) = 1' \\ \rho(\sigma(2')) &= \rho(3) = 2'\end{aligned}$$

Por lo que $\rho \circ \sigma$ es la identidad en H , por lo que H es un **retracto** de G .

Un **homomorfismo biyectivo** $f : G \rightarrow H$, cuya función inversa también es un homomorfismo $g : H \rightarrow G$, se dice que es un isomorfismo de gráficas.

2.8 Operaciones entre gráficas

Hablar de matemáticas para el común de las personas es hablar de números y operaciones entre ellos, como es sumar, restar, multiplicar, dividir, entre otras. En particular referirse a Teoría de gráficas, también es estudiar las operaciones entre gráficas.

Este capítulo, tiene el objetivo de mostrar y ejemplificar algunas de las operaciones definidas entre gráficas, como son el producto cartesiano de gráficas, producto débil, producto fuerte, composición, producto lleno y suma de gráficas.

2.8.1 Producto cartesiano de gráficas

Definición 2.11 Sean G y H gráficas, el **producto cartesiano** de G y H , que en símbolos se escribe $G \square H$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el producto cartesiano de vértices $V(G) \times V(H)$ y el conjunto de aristas definido por: $E(G \square H) = \{(x, y), (x', y') \mid (x, y), (x', y') \in V(G \square H) \text{ y } x = x', yy' \in E(H) \text{ ó } xx' \in E(G), y = y'\}$

Sean G y H gráficas, figura 2.35, sus conjuntos de vértices y aristas son los siguientes:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b\}, E(G) = \{a, b\} \\ V(H) &= \{1, 2\}, E(H) = \{1, 2\} \end{aligned}$$

El producto cartesiano de G y H , es la gráfica cuyos conjuntos de vértices y aristas son:

$$\begin{aligned} V(G \square H) &= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\} \\ E(G \square H) &= \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \{(b, 1), (b, 2)\} \end{aligned}$$

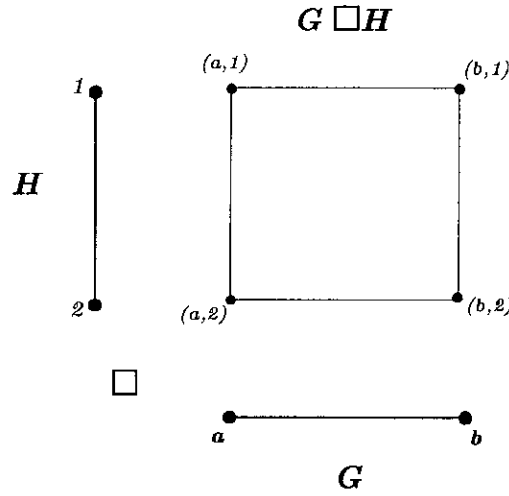
Note que

$\{(a, 1), (b, 2)\} \notin E(G \square H)$, ya que $a \neq b, \{1, 2\} \in E(H)$ y $\{a, b\} \in E(G), 1 \neq 2$.

$\{(a, 2), (b, 1)\} \notin E(G \square H)$, ya que $a \neq b, \{2, 1\} \in E(H)$ y $\{a, b\} \in E(G), 2 \neq 1$.

En la figura 2.36 damos un segundo ejemplo del producto cartesiano de gráficas, para A y B en donde:

$$\begin{aligned} V(A) &= \{w_1, w_2\} & E(A) &= \{w_1 w_2\} \\ V(B) &= \{u_1, u_2, u_3\} & E(B) &= \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\} \end{aligned}$$

Figura 2.35: Representación gráfica del *Producto cartesiano* entre G y H

Por lo que:

$$V(A \square B) = \{ (w_1, u_1), (w_1, u_2), (w_1, u_3), (w_2, u_1), (w_2, u_2), (w_2, u_3) \}$$

$$E(A \square B) = \{ \{ (w_1, u_1), (w_1, u_2) \}, \{ (w_1, u_1), (w_1, u_3) \}, \{ (w_1, u_1), (w_2, u_1) \}, \\ \{ (w_2, u_1), (w_2, u_2) \}, \{ (w_2, u_1), (w_2, u_3) \}, \{ (w_2, u_1), (w_2, u_2) \}, \\ \{ (w_1, u_2), (w_2, u_2) \}, \{ (w_1, u_2), (w_1, u_3) \}, \{ (w_1, u_3), (w_2, u_3) \} \}$$

Como se observa,

$$\{ (w_1, u_1), (w_2, u_2) \} \notin E(A \square B)$$

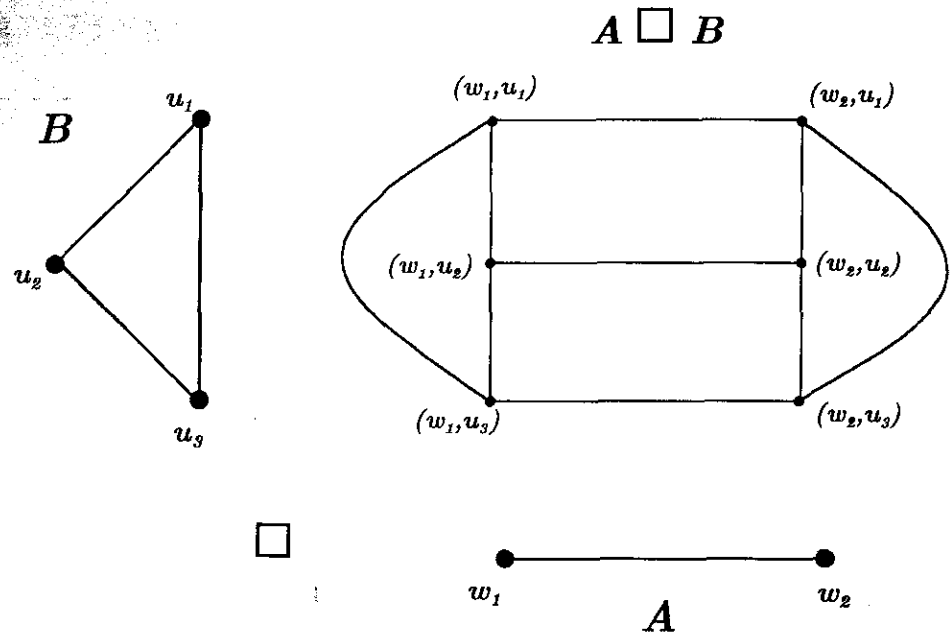
$$\{ (w_1, u_1), (w_2, u_3) \} \notin E(A \square B)$$

$$\{ (w_2, u_1), (w_1, u_2) \} \notin E(A \square B)$$

$$\{ (w_2, u_1), (w_1, u_3) \} \notin E(A \square B)$$

Ya que no cumplen con ninguna de las dos condiciones de la definición del producto cartesiano: $x = x', yy' \in E(B)$ ó $xx' \in E(A), y = y'$.

Los dos ejemplos de producto cartesiano que hemos dado hasta ahora, han sido entre dos gráficas completas, a continuación se presenta un ejemplo en donde una de ellas no es completa, ver 2.37.

Figura 2.36: Representación gráfica del *Producto cartesiano* entre A y B

Sean A y B dos gráficas en donde:

$$V(A) = \{1, 2, 3\} \quad E(A) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

$$V(B) = \{a, b\} \quad E(B) = \{a, b\}$$

Por lo que:

$$V(A \square B) = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$$

$$E(A \square B) = \{\{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 2), (a, 3)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \\ \{(a, 3), (b, 3)\}, \{(b, 1), (b, 2)\}, \{(b, 2), (b, 3)\}\}$$

Se observa,

$$\{(a, 1), (b, 2)\} \notin E(A \square B), \text{ ya que } \{a, b\} \in E(A) \text{ pero } 1 \neq 2$$

$$\{(a, 2), (b, 1)\} \notin E(A \square B), \text{ ya que } \{a, b\} \in E(A) \text{ pero } 1 \neq 2$$

$$\{(a, 2), (b, 3)\} \notin E(A \square B), \text{ ya que } \{a, b\} \in E(A) \text{ pero } 2 \neq 3$$

$$\{(a, 3), (b, 2)\} \notin E(A \square B), \text{ ya que } \{a, b\} \in E(A) \text{ pero } 2 \neq 3$$

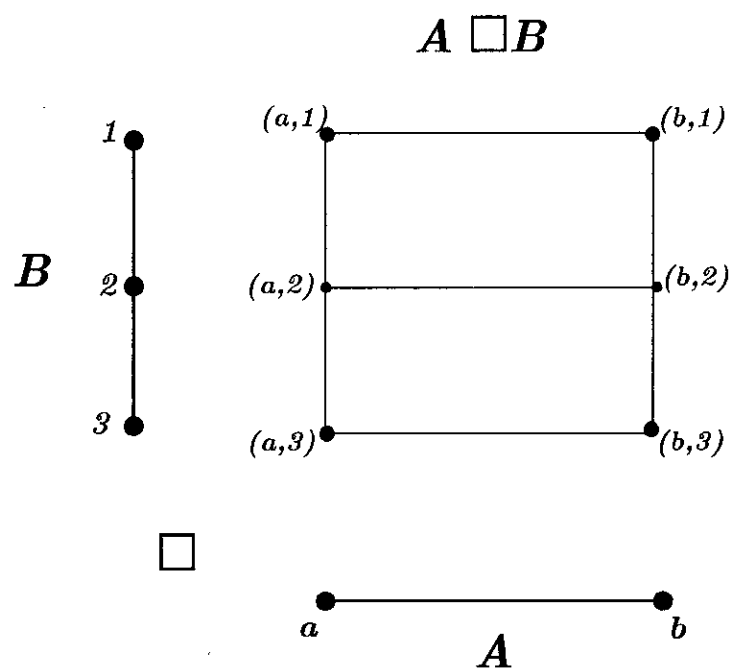


Figura 2.37: *Producto cartesiano* entre gráficas, en donde una de ellas no es completa.

2.8.2 Producto débil

Definición 2.12 Sean G y H gráficas, el **producto débil** entre G y H , denotado por $G \times H$, es la gráfica que se define tomando $V(G) \times V(H)$ como su conjunto de vértices y su conjunto de aristas está definido por: $E(G \times H) = \{(x, y), (x', y') \mid (x, y), (x', y') \in V(G \times H), xx' \in E(G) \text{ y } yy' \in E(H)\}$

A continuación damos un ejemplo de esta operación, tomando a las gráficas G y H , figura 2.38, que tienen como conjuntos de vértices y aristas a:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b\}, E(G) = \{a, b\} \\ V(H) &= \{1, 2\}, E(H) = \{1, 2\} \end{aligned}$$

Entonces el producto débil entre G y H , es la gráfica cuyo conjunto de vértices y aristas son:

$$\begin{aligned} V(G \times H) &= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\} \\ E(G \times H) &= \{(a, 1), (b, 2)\}, \{(b, 1), (a, 2)\} \end{aligned}$$

Observamos que:

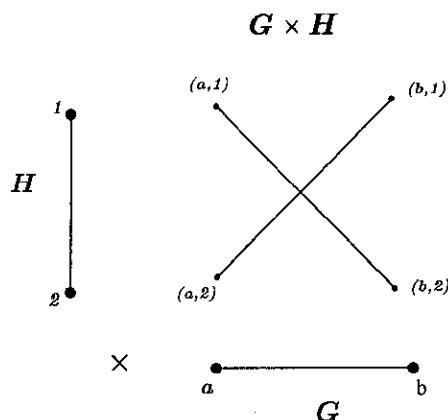
$$\begin{aligned} \{(a, 1), (a, 2)\} &\notin E(G \times H), \text{ ya que } \{a, a\} \notin E(G) \text{ aunque } \{1, 2\} \in E(H) \\ \{(b, 1), (b, 2)\} &\notin E(G \times H), \text{ ya que } \{b, b\} \notin E(G) \text{ aunque } \{1, 2\} \in E(H) \\ \{(a, 2), (b, 2)\} &\notin E(G \times H), \text{ ya que } \{a, b\} \in E(G) \text{ pero } \{2, 2\} \notin E(H) \\ \{(a, 1), (b, 1)\} &\notin E(G \times H), \text{ ya que } \{a, b\} \in E(G) \text{ pero } \{1, 1\} \notin E(H) \end{aligned}$$

Un segundo ejemplo del producto débil lo damos con las gráficas P y Q , 2.39, quienes están definidas por los siguientes conjuntos de vértices y aristas.

$$\begin{aligned} V(P) &= \{w_1, w_2\} & E(P) &= \{w_1, w_2\} \\ V(Q) &= \{u_1, u_2, u_3\} & E(Q) &= \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} V(P \times Q) &= \{(w_1, u_1), (w_1, u_2), (w_1, u_3), (w_2, u_1), (w_2, u_2), (w_2, u_3)\} \\ E(P \times Q) &= \{(w_1, u_1), (w_2, u_2)\}, \{(w_1, u_1), (w_2, u_3)\}, \{(w_1, u_2), (w_2, u_1)\}, \\ &\quad \{(w_1, u_2), (w_2, u_3)\}, \{(w_1, u_3), (w_2, u_1)\}, \{(w_1, u_3), (w_2, u_2)\} \end{aligned}$$

Figura 2.38: Representación gráfica del *Producto débil* entre G y H

Observamos que:

$\{(w_1, u_1), (w_1, u_2)\} \notin E(P \times Q)$, debido a que $\{w_1, w_1\} \notin E(P)$

$\{(w_1, u_2), (w_1, u_3)\} \notin E(P \times Q)$, debido a que $\{w_1, w_1\} \notin E(P)$

$\{(w_1, u_1), (w_1, u_3)\} \notin E(P \times Q)$, debido a que $\{w_1, w_1\} \notin E(P)$

$\{(w_2, u_1), (w_2, u_2)\} \notin E(P \times Q)$, ya que $\{w_2, w_2\} \notin E(P)$

$\{(w_2, u_1), (w_2, u_3)\} \notin E(P \times Q)$, ya que $\{w_2, w_2\} \notin E(P)$

$\{(w_2, u_2), (w_2, u_3)\} \notin E(P \times Q)$, ya que $\{w_2, w_2\} \notin E(P)$

$\{(w_1, u_1), (w_2, u_1)\} \notin E(P \times Q)$, porque $\{u_1, u_1\} \notin E(Q)$

$\{(w_1, u_2), (w_2, u_2)\} \notin E(P \times Q)$, porque $\{u_2, u_2\} \notin E(Q)$

$\{(w_1, u_3), (w_2, u_3)\} \notin E(P \times Q)$, porque $\{u_3, u_3\} \notin E(Q)$

En los dos ejemplos del producto débil presentados hasta el momento, ha sido entre gráficas completas, ahora mostramos un ejemplo entre una gráfica completa y una gráfica que no lo es, ver 2.40.

Sean A y B dos gráficas en donde:

$$V(A) = \{1, 2, 3\} \quad E(A) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

$$V(B) = \{a, b\} \quad E(B) = \{a, b\}$$

Por lo que:

$$V(A \times B) = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$$

$$E(A \times B) = \{\{(a, 1), (b, 2)\}, \{(a, 2), (b, 1)\}, \{(a, 2), (b, 3)\}, \{(a, 3), (b, 2)\}\}$$

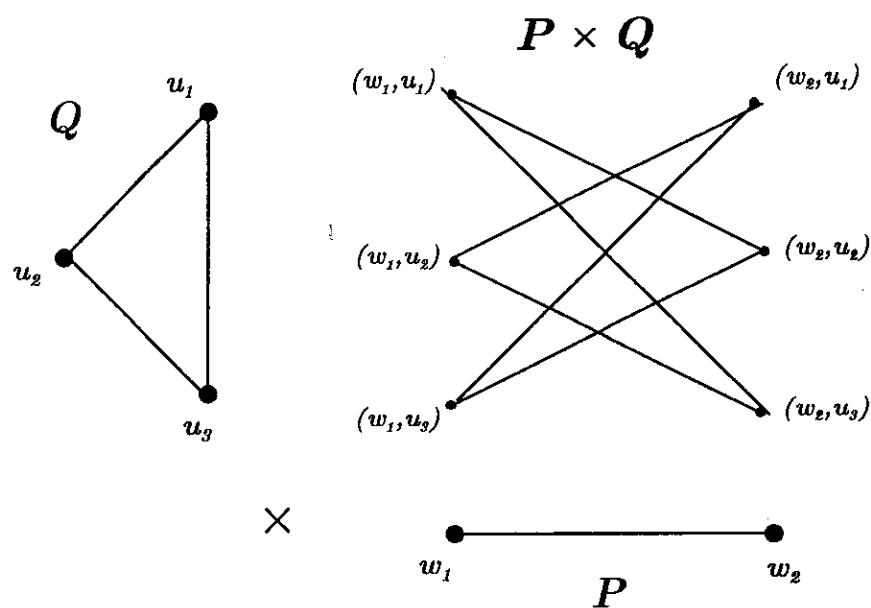


Figura 2.39: Representación gráfica del *Producto débil* entre P y Q

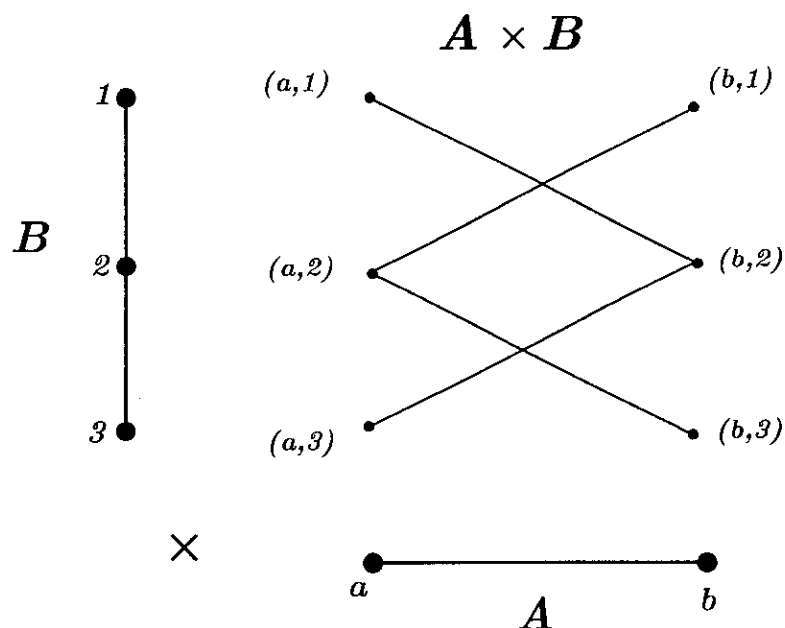
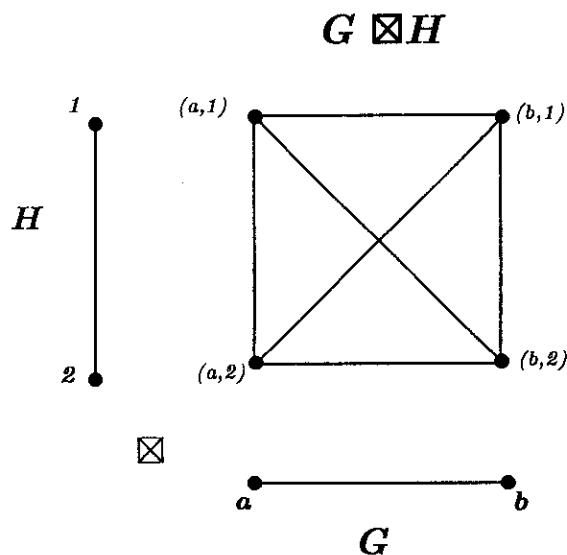


Figura 2.40: *Producto débil* entre dos gráficas, en donde una de ellas no es completa.

Las aristas que no están en $A \times B$ son:

$\{(a,1), (a,2)\}, \{(a,1), (b,1)\}, \{(a,2), (a,3)\}, \{(a,2), (b,2)\}, \{(a,3), (b,3)\},$
 $\{(b,1), (b,2)\}, \{(b,2), (b,3)\}, \{(a,1), (a,3)\}$ y $\{(b,1), (b,3)\}$

El producto cartesiano y el producto débil entre gráficas completas resultan gráficas complementarias, es decir si A y B son gráficas completas entonces $A \square B$ es el complemento de $A \times B$. Lo anterior no ocurre cuando una de las gráficas o ambas no son completas, ver ejemplos de las gráficas de las figuras 2.37 y 2.40.

Figura 2.41: Representación gráfica del *Producto fuerte* entre G y H

2.8.3 Producto fuerte

Definición 2.13 Sean G y H gráficas, el **producto fuerte** de G y H , en símbolos $G \boxtimes H$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el producto cartesiano $V(G) \times V(H)$ y su conjunto de aristas está definido por: $E(G \boxtimes H) = \{ \{(x, y), (x', y')\} \mid (x, y), (x', y') \in V(G \boxtimes H), xx' \in E(G), yy' \in E(H) \text{ ó } x = x', yy' \in E(H) \text{ ó } xx' \in E(G), y = y' \}$

Sean G y H gráficas, 2.41, definidas por los siguientes conjuntos de vértices y aristas:

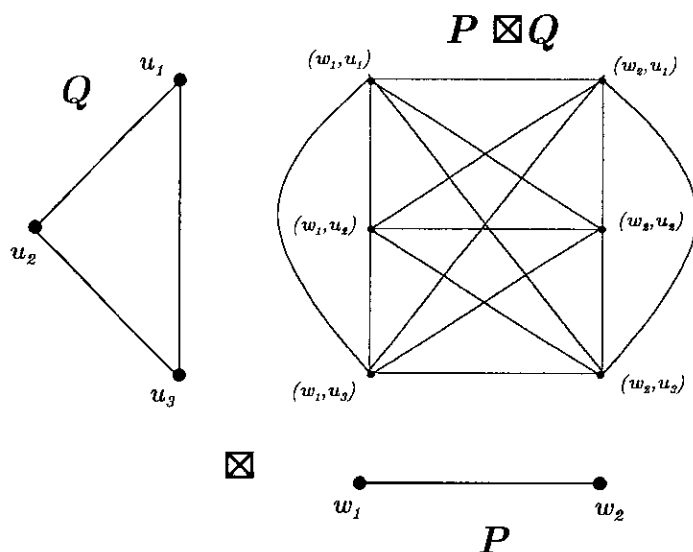
$$V(G) = \{a, b\}, E(G) = \{a, b\}$$

$$V(H) = \{1, 2\}, E(H) = \{1, 2\}$$

El producto fuerte de G y H , es la gráfica cuyo conjunto de vértices y su conjunto de aristas son:

$$V(G \boxtimes H) = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

$$E(G \boxtimes H) = \{ \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \{(b, 1), (b, 2)\}, \{(a, 1), (b, 2)\}, \{(a, 2), (b, 1)\} \}$$

Figura 2.42: Representación gráfica del *Producto Fuerte* entre P y Q

En la figura 2.42 tenemos un segundo ejemplo del producto fuerte entre las gráficas P y Q , quienes tienen

$$V(P) = \{w_1, w_2\}, E(P) = \{w_1w_2\}$$

$$V(Q) = \{u_1, u_2, u_3\}, E(Q) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3\}$$

Se sigue que:

$$V(P \boxtimes Q) = \{ (w_1, u_1), (w_1, u_2), (w_1, u_3), (w_2, u_1), (w_2, u_2), (w_2, u_3) \}$$

$$E(P \boxtimes Q) = \{ \{ (w_1, u_1), (w_1, u_2) \}, \{ (w_1, u_1), (w_1, u_3) \}, \{ (w_1, u_1), (w_2, u_1) \}, \\ \{ (w_2, u_1), (w_2, u_2) \}, \{ (w_2, u_1), (w_2, u_3) \}, \{ (w_2, u_1), (w_2, u_2) \}, \\ \{ (w_1, u_2), (w_2, u_2) \}, \{ (w_1, u_2), (w_1, u_3) \}, \{ (w_1, u_3), (w_2, u_3) \}, \\ \{ (w_1, u_1), (w_2, u_2) \}, \{ (w_1, u_1), (w_2, u_3) \}, \{ (w_2, u_1), (w_1, u_2) \}, \\ \{ (w_2, u_1), (w_1, u_3) \} \}$$

El ejemplo del producto fuerte que presentamos a continuación, es entre dos gráficas que no son completas, ver 2.43, por lo que la gráfica resultante no es completa. En los dos ejemplos anteriores, ver 2.41 y 2.42, ambas gráficas eran completas y la gráfica resultante al realizar el producto fuerte entre ellas, resultó una gráfica completa.

Sean A y B dos gráficas en donde:

$$\begin{aligned} V(A) &= \{1, 2, 3, 4\} & E(A) &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\} \\ V(B) &= \{a, b, c\} & E(B) &= \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$V(A \boxtimes B) = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4) \}$$

$$\begin{aligned} E(A \boxtimes B) = \{ & \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 1), (b, 2)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \\ & \{(a, 2), (a, 3)\}, \{(a, 2), (b, 3)\}, \{(a, 2), (b, 1)\}, \{(a, 3), (a, 4)\}, \\ & \{(a, 3), (b, 2)\}, \{(a, 3), (b, 3)\}, \{(a, 3), (b, 4)\}, \{(a, 4), (b, 3)\}, \\ & \{(a, 4), (b, 4)\}, \{(b, 1), (b, 2)\}, \{(b, 1), (c, 1)\}, \{(b, 1), (c, 2)\}, \\ & \{(b, 2), (b, 3)\}, \{(b, 2), (c, 1)\}, \{(b, 2), (c, 2)\}, \{(b, 2), (c, 3)\}, \\ & \{(b, 3), (b, 4)\}, \{(b, 3), (c, 2)\}, \{(b, 3), (c, 3)\}, \{(b, 3), (c, 4)\}, \\ & \{(b, 4), (c, 3)\}, \{(b, 4), (c, 4)\}, \{(c, 1), (c, 2)\}, \{(c, 2), (c, 3)\}, \\ & \{(c, 3), (c, 4)\} \} \end{aligned}$$

Las aristas que no estan en $A \boxtimes B$ son:

$$\begin{aligned} \{(a, 1), (a, 3)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } a = a \text{ pero } \{1, 3\} \notin V(B) \\ \{(a, 1), (a, 4)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } a = a \text{ pero } \{1, 4\} \notin V(B) \\ \{(a, 2), (a, 4)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } a = a \text{ pero } \{2, 4\} \notin V(B) \\ \{(a, 4), (c, 4)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } 4 = 4 \text{ pero } \{a, c\} \notin V(A) \\ \{(a, 3), (c, 3)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } 3 = 3 \text{ pero } \{a, c\} \notin V(A) \\ \{(a, 2), (c, 2)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } 2 = 2 \text{ pero } \{a, c\} \notin V(A) \\ \{(a, 1), (c, 1)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } 1 = 1 \text{ pero } \{a, c\} \notin V(A) \\ \{(b, 1), (b, 3)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } b = b \text{ pero } \{1, 3\} \notin V(B) \\ \{(b, 1), (b, 4)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } b = b \text{ pero } \{1, 3\} \notin V(B) \\ \{(b, 2), (b, 4)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } b = b \text{ pero } \{2, 4\} \notin V(B) \\ \{(c, 1), (c, 3)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } c = c \text{ pero } \{1, 3\} \notin V(B) \\ \{(c, 2), (c, 4)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } c = c \text{ pero } \{2, 4\} \notin V(B) \\ \{(c, 1), (c, 4)\} &\notin E(A \boxtimes B), \text{ ya que } c = c \text{ pero } \{2, 4\} \notin V(B) \end{aligned}$$

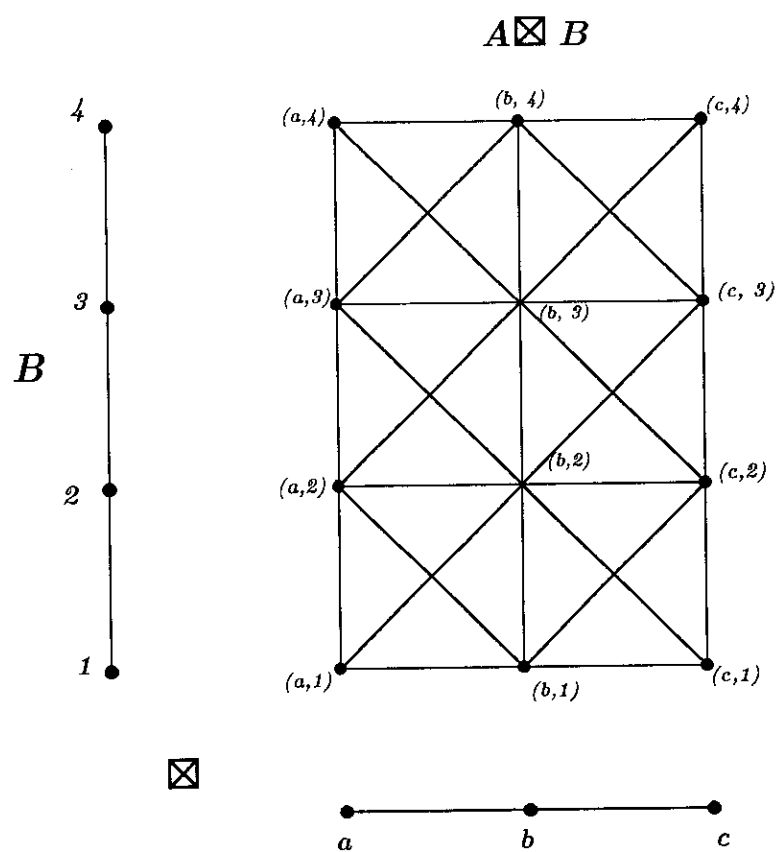


Figura 2.43: *Producto fuerte* entre graficas no completas.

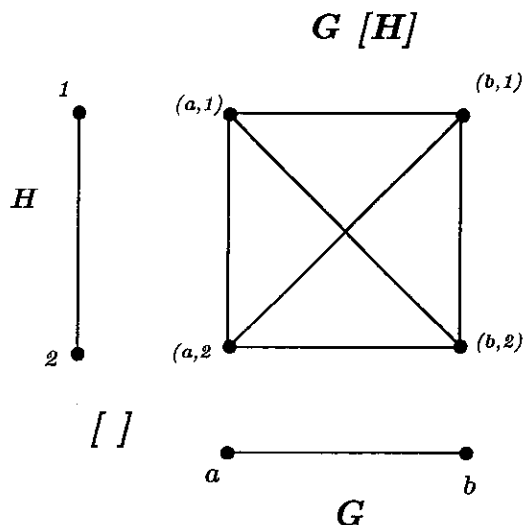


Figura 2.44: Ejemplo de Composición entre dos gráficas

2.8.4 Composición

Definición 2.14 Sean G y H gráficas. la *composición* de G y H , en símbolo $G[H]$, se define tomando $V(G) \times V(H)$ como su conjunto de vértices y el conjunto de aristas correspondiente es: $E(G[H]) = \{(x,y), (x',y')\} \mid (x,y), (x',y') \in V(G[H]), x = x' \text{ y } yy' \in E(H) \text{ ó } xx' \in E(G)\}$

Un ejemplo de la composición de gráficas, se presenta en la figura 2.44.

Sean G y H gráficas con:

$$V(G) = \{a, b\}, E(G) = \{a, b\}$$

$$V(H) = \{1, 2\}, E(H) = \{1, 2\}$$

La *composición* de G y H , esta dada por los siguientes conjuntos de vértices y aristas:

$$V(G[H]) = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

$$E(G[H]) = \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \\ \{(b, 1), (b, 2)\}, \{(a, 1), (b, 2)\}, \{(a, 2), (b, 1)\}$$

Un segundo ejemplo de la composición de gráficas, se muestra en la figura 2.45, donde M y N son gráficas con:

$$\begin{aligned} V(M) &= \{a, b, c\} & E(M) &= \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \\ V(N) &= \{1, 2, 3, 4\} & E(N) &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} V(M[N]) &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), \\ &\quad (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(M[N]) &= \{\{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 1), (b, 4)\}, \{(a, 1), (b, 3)\}, \{(a, 1), (b, 2)\}, \\ &\quad \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 2), (a, 3)\}, \{(a, 2), (b, 4)\}, \{(a, 2), (b, 3)\}, \\ &\quad \{(a, 2), (b, 2)\}, \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 3), (a, 4)\}, \{(a, 3), (b, 4)\}, \\ &\quad \{(a, 3), (b, 3)\}, \{(a, 3), (b, 2)\}, \{(a, 3), (b, 1)\}, \{(a, 4), (b, 4)\}, \\ &\quad \{(a, 4), (b, 3)\}, \{(a, 4), (b, 2)\}, \{(a, 4), (b, 1)\}, \{(b, 1), (b, 2)\}, \\ &\quad \{(b, 1), (c, 4)\}, \{(b, 1), (c, 3)\}, \{(b, 1), (c, 2)\}, \{(b, 1), (c, 1)\}, \\ &\quad \{(b, 2), (b, 3)\}, \{(b, 2), (c, 4)\}, \{(b, 2), (c, 3)\}, \{(b, 2), (c, 2)\}, \\ &\quad \{(b, 2), (c, 1)\}, \{(b, 3), (b, 4)\}, \{(b, 3), (c, 4)\}, \{(b, 3), (c, 3)\}, \\ &\quad \{(b, 3), (c, 2)\}, \{(b, 3), (c, 1)\}, \{(b, 4), (c, 4)\}, \{(b, 4), (c, 3)\}, \\ &\quad \{(b, 4), (c, 2)\}, \{(b, 4), (c, 1)\}, \{(c, 1), (c, 2)\}, \{(c, 2), (c, 3)\}, \\ &\quad \{(c, 3), (c, 4)\}\} \end{aligned}$$

Las siguientes aristas **no** pertenecen a $E(M[N])$, ya que no cumplen las condiciones de la definición:

$$\begin{aligned} &\{(a, 1), (a, 3)\}, \{(a, 1), (a, 4)\}, \{(a, 2), (a, 4)\}, \{(a, 1), (c, 1)\}, \{(c, 1), (c, 3)\}, \\ &\{(c, 1), (c, 4)\}, \{(c, 2), (c, 4)\}, \{(a, 4), (c, 4)\}, \{(a, 3), (c, 3)\}, \{(a, 2), (c, 2)\}, \\ &\{(b, 1), (b, 3)\}, \{(b, 1), (b, 4)\}, \{(b, 2), (b, 4)\}, \{(a, 4), (c, 1)\}, \{(a, 1), (c, 4)\}, \\ &\{(a, 1), (c, 2)\}, \{(a, 1), (c, 3)\}, \{(a, 2), (c, 1)\}, \{(a, 2), (c, 3)\}, \{(a, 2), (c, 4)\}, \\ &\{(a, 3), (c, 1)\}, \{(a, 3), (c, 4)\}, \{(a, 4), (c, 3)\}, \{(a, 4), (c, 2)\} \end{aligned}$$

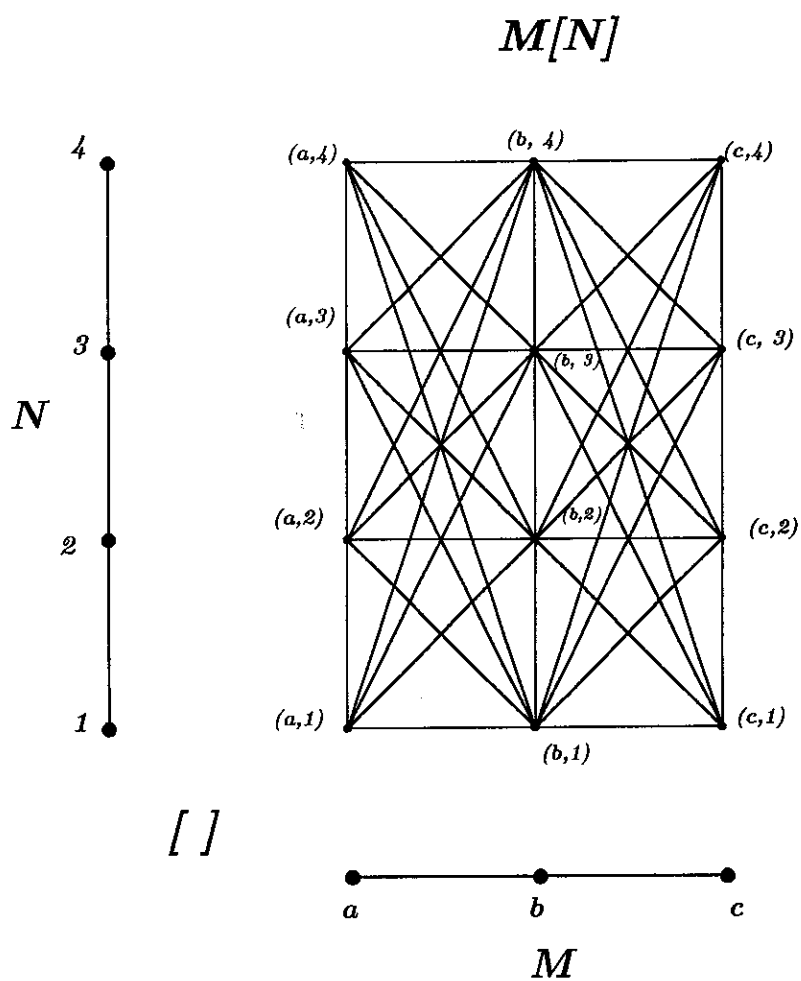
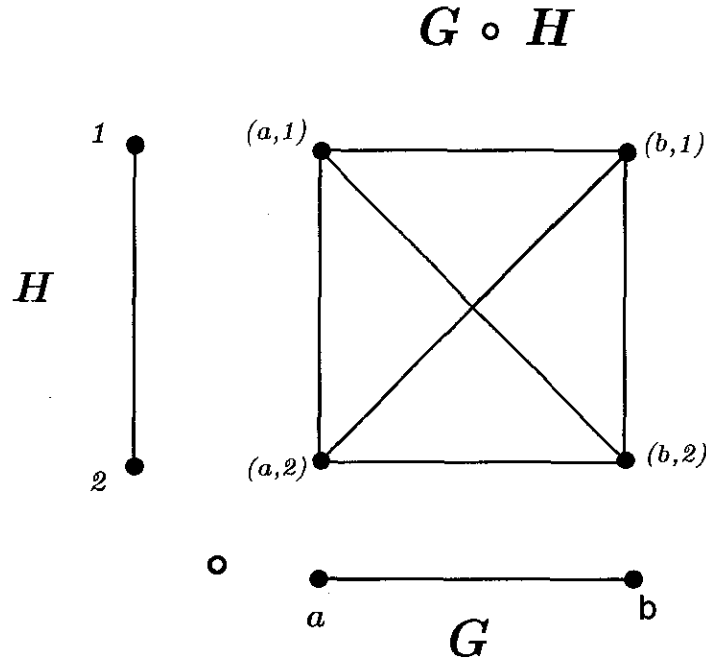


Figura 2.45: Representación gráfica de la *Composición* entre M y N

Figura 2.46: Representación gráfica del *Producto Lleno* entre G y H

2.8.5 Producto lleno

Definición 2.15 Sean G y H gráficas. Tomando $V(G) \times V(H)$ como el conjunto de vértices, se define el **producto lleno**, que se denota por $G \circ H$ y su conjunto de aristas correspondiente es: $E(G \circ H) = \{(x, y), (x', y')\} \mid (x, y), (x', y') \in V(G \circ H), xx' \in E(G) \text{ ó } yy' \in E(H) \text{ ó } x = x' \text{ ó } y = y'\}$

El producto lleno entre las gráficas G y H , ver 2.46, donde:

$$V(G) = \{a, b\} \quad E(G) = \{a, b\}$$

$$V(H) = \{1, 2\} \quad E(H) = \{1, 2\}$$

esta definido por los siguientes conjuntos:

$$V(G \circ H) = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

$$E(G \circ H) = \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \\ \{(b, 1), (b, 2)\}, \{(a, 1), (b, 2)\}, \{(a, 2), (b, 1)\}$$

Sean M y N las gráficas que se muestra en la figura 2.47.

$$V(M) = \{a, b, c\} \quad E(M) = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$V(N) = \{1, 2, 3, 4\} \quad E(N) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$$

El conjunto de vértices de $M \circ N$ es:

$$V(M \circ N) = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), \\ (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$$

Las aristas que se enlistan a continuación son las únicas que no pertenecen a $E(M \circ N)$.

$$\{(a, 4), (c, 1)\} \notin E(M \circ N)$$

ya que $\{a, c\} \notin E(M)$, $\{4, 1\} \notin E(N)$, $a \neq c$, $4 \neq 1$

$$\{(a, 1), (c, 4)\} \notin E(M \circ N)$$

ya que $\{a, c\} \notin E(M)$, $\{1, 4\} \notin E(N)$, $a \neq c$, $1 \neq 4$

$$\{(a, 1), (c, 3)\} \notin E(M \circ N)$$

ya que $\{a, c\} \notin E(M)$, $\{1, 3\} \notin E(N)$, $a \neq c$, $1 \neq 3$

$$\{(a, 2), (c, 4)\} \notin E(M \circ N)$$

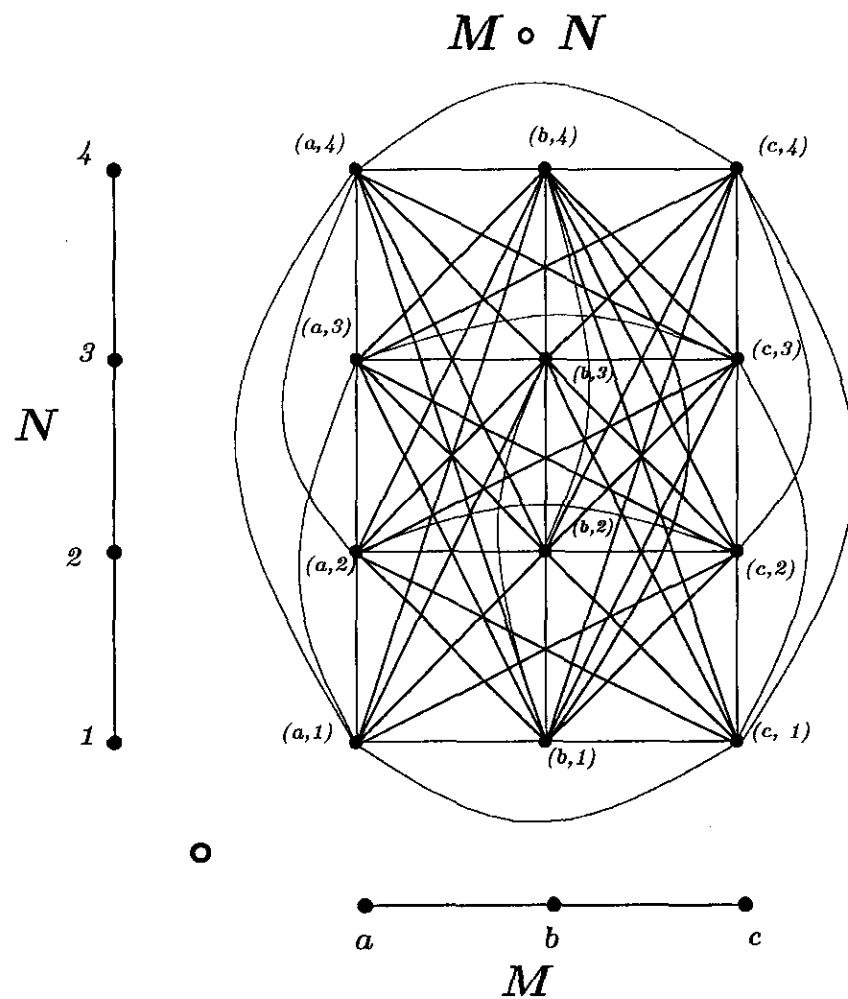
ya que $\{a, c\} \notin E(M)$, $\{2, 4\} \notin E(N)$, $a \neq c$, $2 \neq 4$

$$\{(a, 3), (c, 1)\} \notin E(M \circ N)$$

ya que $\{a, c\} \notin E(M)$, $\{3, 1\} \notin E(N)$, $a \neq c$, $3 \neq 1$

$$\{(a, 4), (c, 2)\} \notin E(M \circ N),$$

ya que $\{a, c\} \notin E(M)$, $\{4, 2\} \notin E(N)$, $a \neq c$, $4 \neq 2$

Figura 2.47: Representación gráfica del *Producto lleno* entre M y N

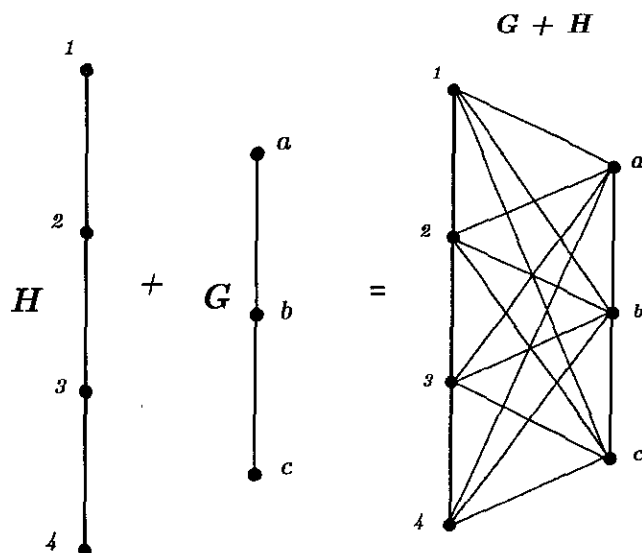


Figura 2.48: Ejemplo de suma de gráficas disjuntas

2.8.6 Suma de gráficas

Definición 2.16 Si G y H son gráficas disjuntas en vértices, la suma de G y H , denotada por $G + H$, se define como la gráfica que su conjunto de vértices es: $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ y su conjunto de aristas es $E(G + H) = \{\{x, y\} \mid xy \in E(G) \text{ ó } xy \in E(H) \text{ ó } x \in V(G) \text{ y } y \in V(H)\}$.

Sean G y H gráficas, figura 2.48, donde:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b, c\} & E(G) &= \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \\ V(H) &= \{1, 2, 3, 4\} & E(H) &= \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \end{aligned}$$

La gráfica $G + H$, esta definida por:

$$\begin{aligned} V(G + H) &= V(G) \cup V(H) \\ &= \{a, b, c\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, a, b, c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(G + H) &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, a\}, \{1, b\}, \{1, c\}, \{2, a\}, \\ &\quad \{2, b\}, \{2, c\}, \{3, a\}, \{3, b\}, \{3, c\}, \{4, a\}, \{4, b\}, \{4, c\}\} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Clanes y k-comportamiento

El objetivo de este capítulo es definir y ejemplificar los clanes de una gráfica, así como conocer su gráfica de clanes y qué es lo que sucede con una gráfica al aplicarle repetidas veces el operador de clanes, esto último se conoce como el k-comportamiento de una gráfica.

3.1 Gráfica de intersección

La definición de gráfica de intersección, posteriormente nos permitira definir y entender rapidamente qué es una gráfica de clanes.

Definición 3.1 Sea S un conjunto y $F = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ una familia no vacía de subconjuntos distintos de S no vacíos, cuya unión es S . **La gráfica de intersección** de F es denotada por $\Omega(F)$ y es definida por $V(\Omega(F)) = F$, con S_i y S_j adyacentes donde quiera que $i \neq j$ y $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

Entonces una gráfica G es una gráfica de intersección sobre S si existe una familia F de subconjuntos de S para el cual $G \cong \Omega(F)$.

A continuación daremos un ejemplo de una gráfica de intersección.

Sea G una gráfica, donde $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Tomemos una familia no vacía de subconjuntos distintos de $V(G)$ cuya unión es $V(G)$.

$$F = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{1, 2, 5\}, \{6, 7, 8\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$$

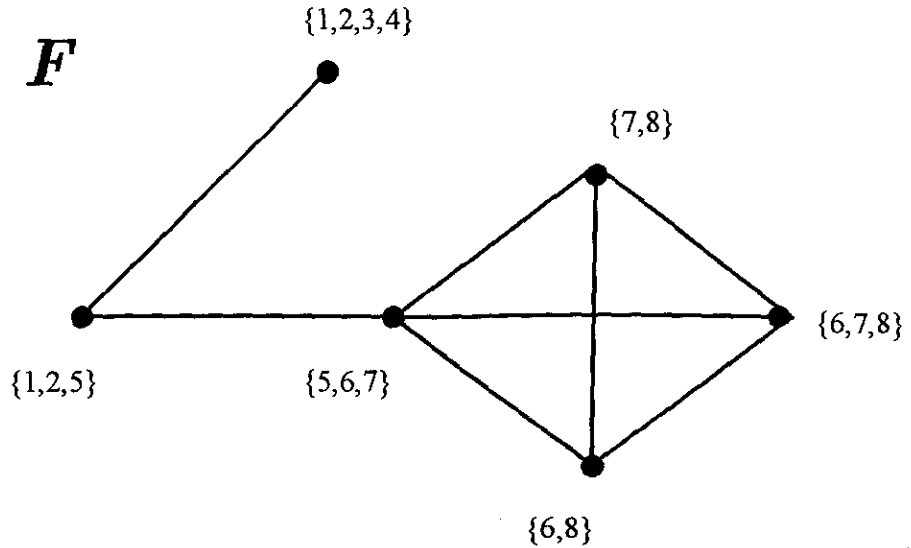


Figura 3.1: Ejemplo de una gráfica de intersección

Tenemos que la gráfica de intersección de F tendrá 6 vértices y 8 aristas, ver figura 3.1.

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 5\} \neq \emptyset$$

$$\{5, 6, 7\} \cap \{6, 7, 8\} \neq \emptyset$$

$$\{6, 8\} \cap \{7, 8\} \neq \emptyset$$

$$\{6, 8\} \cap \{6, 7, 8\} \neq \emptyset$$

$$\{6, 7, 8\} \cap \{7, 8\} \neq \emptyset$$

$$\{5, 6, 7\} \cap \{6, 8\} \neq \emptyset$$

$$\{5, 6, 7\} \cap \{7, 8\} \neq \emptyset$$

$$\{5, 6, 7\} \cap \{1, 2, 5\} \neq \emptyset$$

Tomando la misma gráfica, pero con otros subconjuntos, damos un segundo ejemplo de una gráfica de intersección.

Sea G una gráfica, donde $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

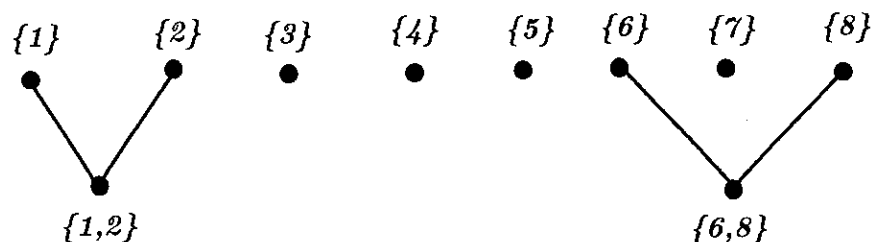


Figura 3.2: Gráfica de intersección.

Tomemos una familia no vacía de subconjuntos distintos de $V(G)$ cuya unión nos da $V(G)$.

$$F = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{1,2\}, \{6,8\}, \}$$

La gráfica de intersección de F tendrá 10 vértices y 4 aristas, ver figura 3.2.

$$\{1\} \cap \{1,2\} \neq \emptyset$$

$$\{2\} \cap \{1,2\} \neq \emptyset$$

$$\{6\} \cap \{6,8\} \neq \emptyset$$

$$\{8\} \cap \{6,8\} \neq \emptyset$$

3.1.1 Gráfica de intersección de las completas de G

La gráfica de intersección de todas las completas de G , para cualquier gráfica G , se denota $c(G)$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices son todas las subgráficas completas de G y dos vértices son adyacentes si su intersección es no vacía.

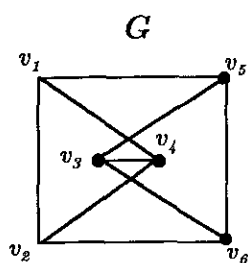
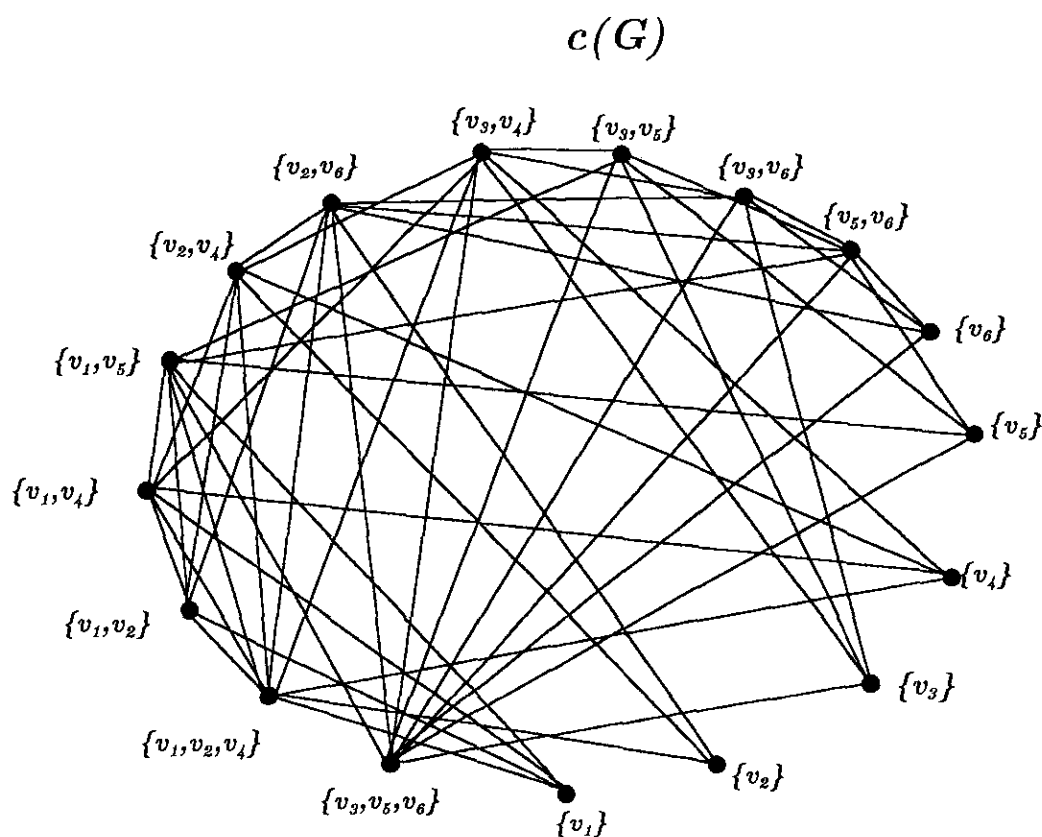
Tenemos la gráfica G , figura 3.3, sus gráficas completas son:

$$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\},$$

$$\{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, v_5, v_6\}$$

Por lo que $c(G)$ tendrá 17 vértices y 44 aristas.

$$\begin{array}{lll}
\{v_1\} \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset & \{v_1\} \cap \{v_1, v_4\} \neq \emptyset & \{v_1\} \cap \{v_1, v_5\} \neq \emptyset \\
\{v_2\} \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset & \{v_2\} \cap \{v_2, v_4\} \neq \emptyset & \{v_2\} \cap \{v_2, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_3\} \cap \{v_3, v_4\} \neq \emptyset & \{v_3\} \cap \{v_3, v_5\} \neq \emptyset & \{v_3\} \cap \{v_3, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_4\} \cap \{v_1, v_4\} \neq \emptyset & \{v_4\} \cap \{v_2, v_4\} \neq \emptyset & \{v_4\} \cap \{v_3, v_4\} \neq \emptyset \\
\{v_5\} \cap \{v_1, v_5\} \neq \emptyset & \{v_5\} \cap \{v_3, v_5\} \neq \emptyset & \{v_5\} \cap \{v_5, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_6\} \cap \{v_2, v_6\} \neq \emptyset & \{v_6\} \cap \{v_3, v_6\} \neq \emptyset & \{v_6\} \cap \{v_5, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_1, v_4\} \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset & & \{v_1, v_2\} \cap \{v_1, v_5\} \neq \emptyset \\
\{v_1, v_2\} \cap \{v_2, v_4\} \neq \emptyset & & \{v_1, v_2\} \cap \{v_2, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_3, v_4\} \cap \{v_3, v_5\} \neq \emptyset & & \{v_3, v_4\} \cap \{v_3, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_1, v_4\} \cap \{v_3, v_4\} \neq \emptyset & & \{v_1, v_5\} \cap \{v_3, v_5\} \neq \emptyset \\
\{v_1, v_5\} \cap \{v_5, v_6\} \neq \emptyset & & \{v_2, v_6\} \cap \{v_3, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_2, v_6\} \cap \{v_5, v_6\} \neq \emptyset & & \{v_1, v_2\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset \\
\{v_1, v_4\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset & & \{v_1, v_5\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset \\
\{v_2, v_4\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset & & \{v_2, v_6\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset \\
\{v_3, v_4\} \cap \{v_3, v_5, v_6\} \neq \emptyset & & \{v_3, v_5\} \cap \{v_3, v_5, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_3, v_6\} \cap \{v_3, v_5, v_6\} \neq \emptyset & & \{v_5, v_6\} \cap \{v_3, v_5, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_6\} \cap \{v_3, v_5, v_6\} \neq \emptyset & & \{v_3\} \cap \{v_3, v_5, v_6\} \neq \emptyset \\
\{v_2\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset & & \{v_1\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset \\
\{v_4\} \cap \{v_1, v_2, v_4\} \neq \emptyset & & \{v_5\} \cap \{v_3, v_5, v_6\} \neq \emptyset
\end{array}$$


Figura 3.3: Gráfica G .

Figura 3.4: Gráfica de intersección de todas las completas de G : $c(G)$

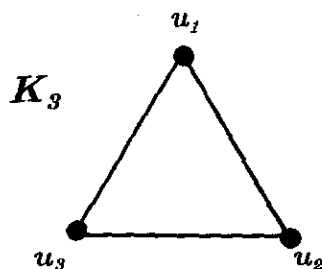


Figura 3.5: Gráfica completa de tres vértices

3.2 Clanes

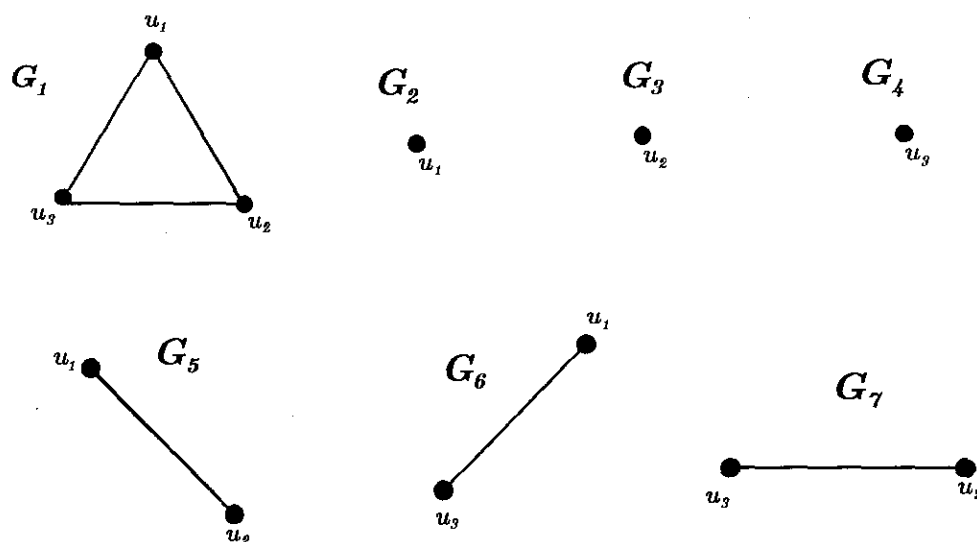
El concepto de clan, ha sido estudiado desde los inicios de la teoría de las gráficas, por ello los clanes de una gráfica han sido objeto de estudio en una amplia variedad de situaciones; la noción de clan es una idea fundamental en teoría de gráficas. [10].

Definición 3.2 *Un clan de G es una subgráfica completa maximal de una gráfica G .*

En la gráfica de la figura 3.5 existen siete subgráficas completas, como lo muestra la figura 3.6, pero solo G_1 , que coincide con K_3 , es una subgráfica completa maximal, por lo tanto esta gráfica tiene un único clan que es $A = \{u_1, u_2, u_3\}$.

En la figura 3.7, se muestran varias gráficas y se identifican sus clanes.

A los clanes de una gráfica G los veremos como subconjuntos de $V(G)$; hasta el momento ya sabemos identificar los clanes de una gráfica dada, a continuación definiremos qué es una gráfica de clanes.

Figura 3.6: Subgráficas completas de K_3

3.3 Gráfica de clanes

La construcción de una gráfica de clanes, muestra la estructura clánica de una gráfica G [10]. La gráfica de clanes se viene estudiando desde 1968 [4].

Definición 3.3 *La gráfica de clanes de G , que se denota $k(G)$, se define como la gráfica de intersección del conjunto de clanes de G . A k se le llama el operador de clanes.*

En otras palabras, $k(G)$ tiene por vértices a los clanes de G y dos vértices son adyacentes si tienen intersección no vacía. En la figura 3.8, observamos a cada gráfica con su respectiva gráfica de clanes.

La gráfica de clanes de las gráficas completas $K_1, K_2, \dots, K_n$, es un punto, ya que la única subgráfica completa maximal de una gráfica completa es ella misma.

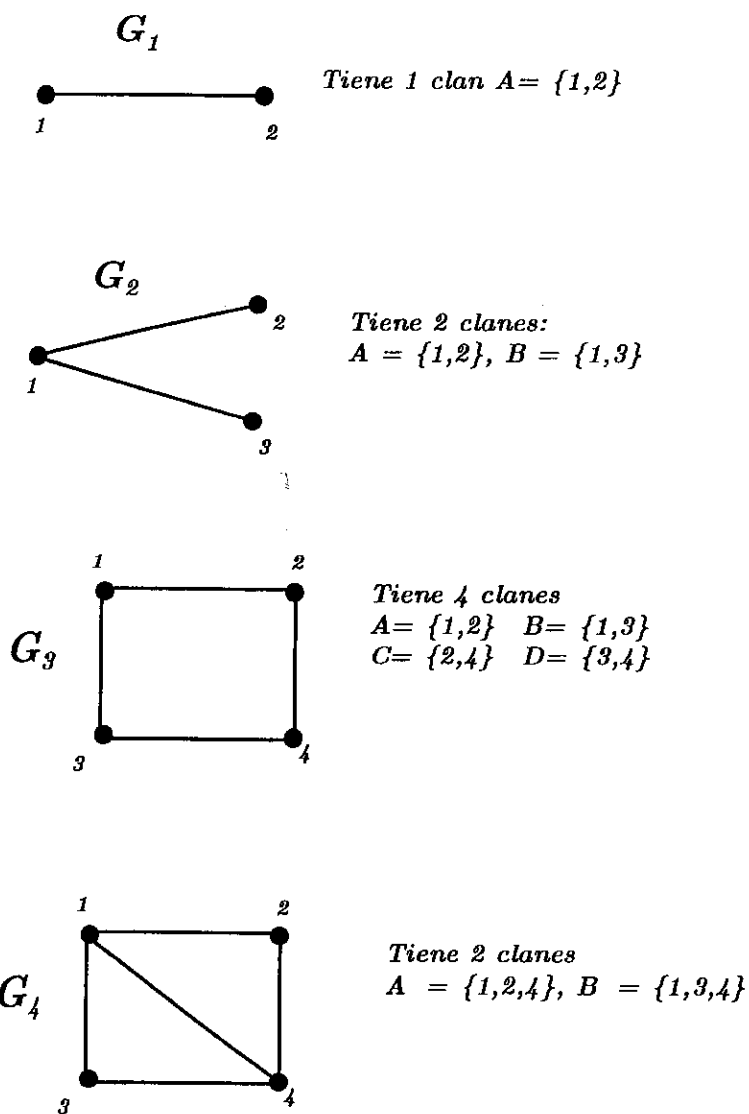


Figura 3.7: Clanes

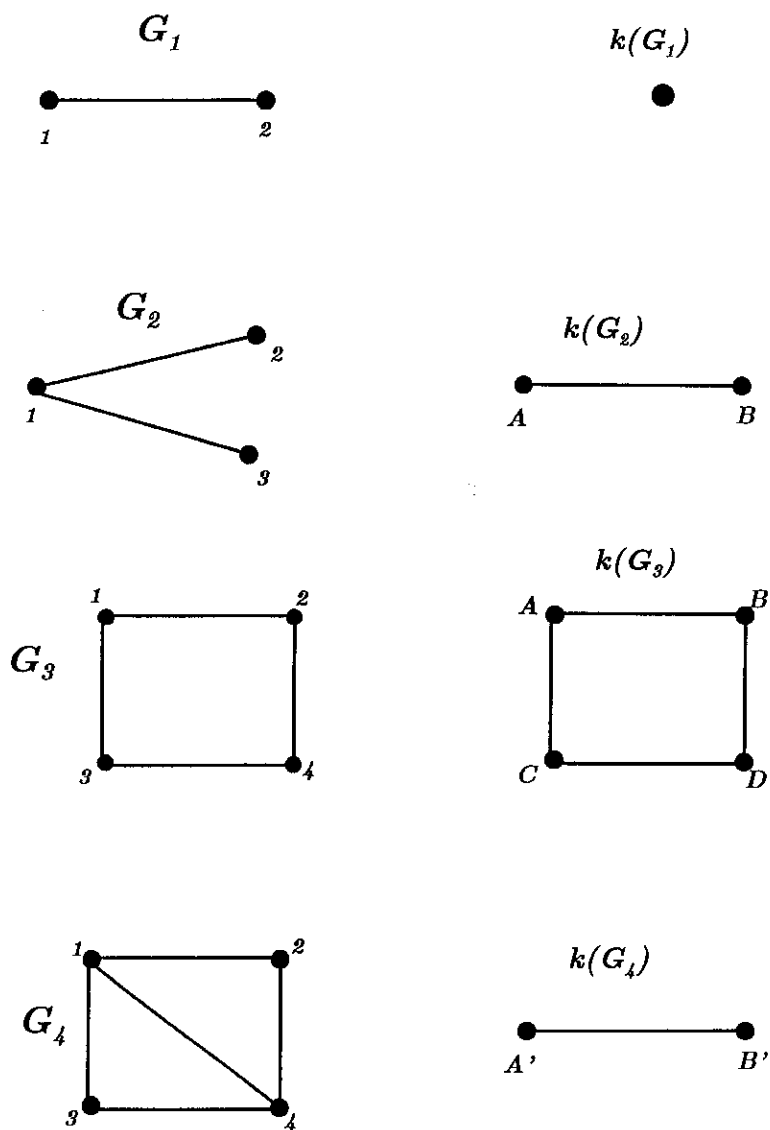


Figura 3.8: Gráficas con su respectiva gráfica de clanes.

El operador de clanes k lo aplicamos repetidas veces a una gráfica G y nos va transformando gráficas en gráficas, estas son las **gráficas iteradas de clanes** de G , que se definen por inducción por medio de las fórmulas $k^0(G) = G$ y $k^n(G) = k(k^{n-1}(G))$, ver figura 3.9.

Observación:

Si G y G' son isomorfas entonces $k(G)$ y $k(G')$ son isomorfas, es decir k es un operador en la clase de tipo de isomorfismo, un ejemplo de este resultado son las gráficas de las figuras 3.10 y 3.11.

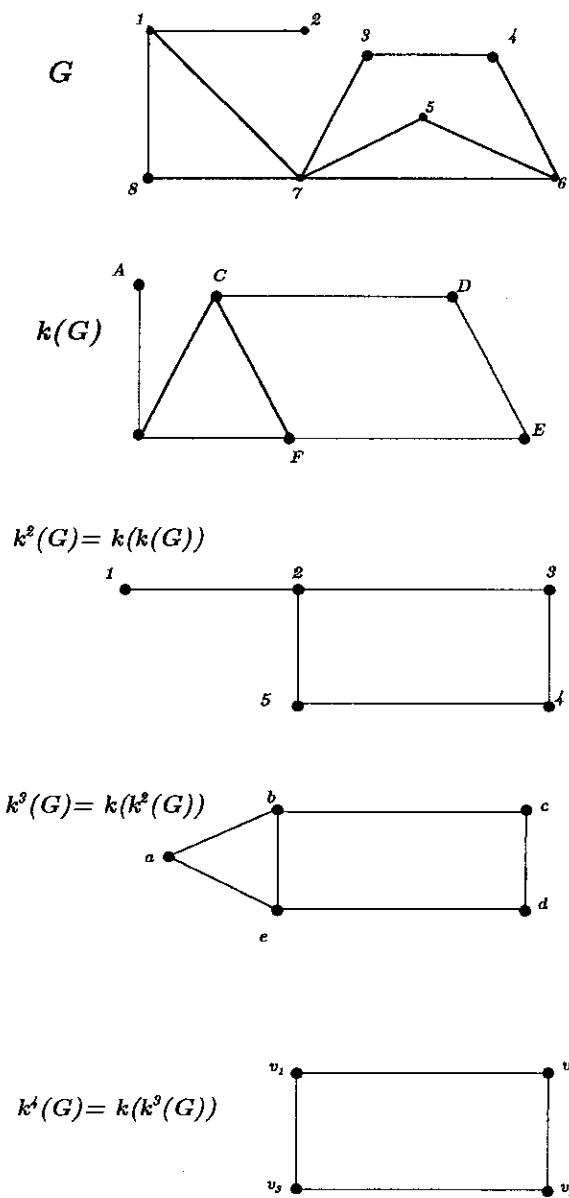


Figura 3.9: Gráficas iteradas de clanes de G .

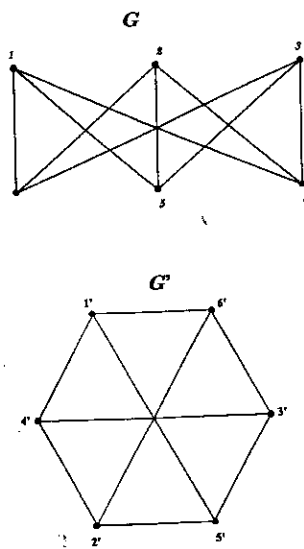
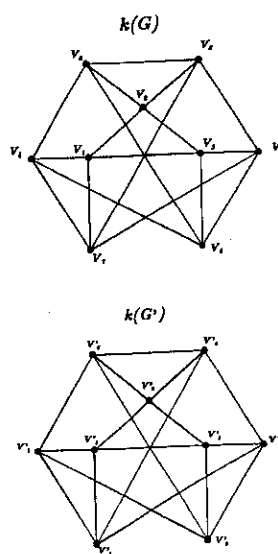


Figura 3.10: Las gráficas G y G' son isomorfas



$k(G)$ y $k(G')$ son isomorfas.

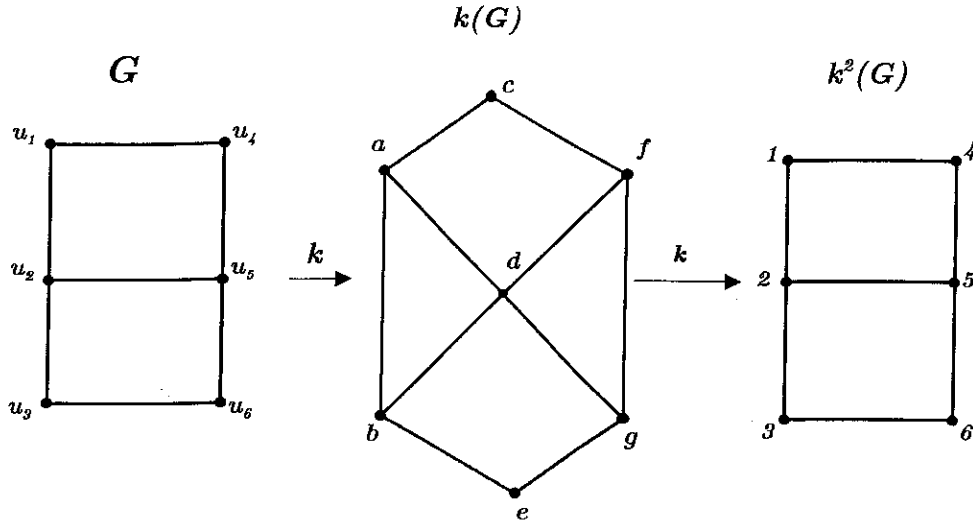


Figura 3.12: Ejemplo de una gráfica k – periódica con período 2.

3.4 k-Comportamiento

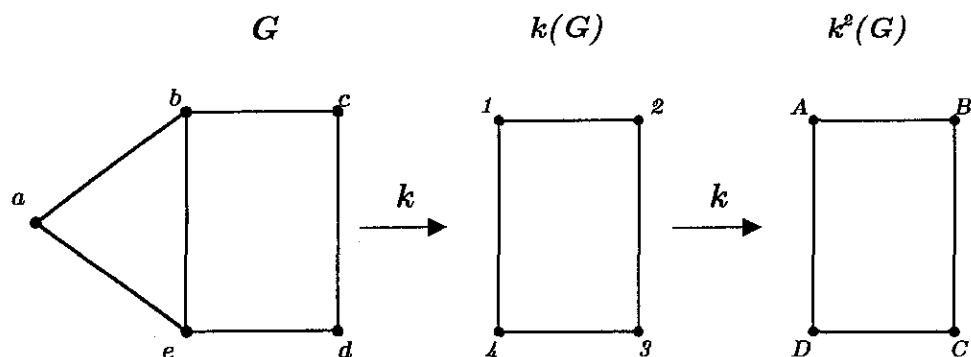
El objetivo de esta sección es presentar y estudiar lo que sucede al aplicar a una gráfica iterativamente el operador de clanes.

Las gráficas iteradas de clanes pueden presentar varios comportamientos, por ejemplo k – nula, k – divergente, k – estacionaria y k – periódica. Determinar el k – comportamiento (o k – carácter) de una gráfica G , consiste en poder decir si G es k – nula, k – estacionaria pero no k – nula o si es k – divergente, a continuación definiremos estos conceptos.

Diremos que una gráfica F es **k – periódica** con período p si es isomorfa a $k^p(F)$ pero F no es isomorfa a $k^q(F)$ para $1 \leq q < p$. Ver figura 3.12.

3.4.1 Gráfica k – estacionaria

Definición 3.4 Una gráfica G es **k – estacionaria** si existe un entero n para el cual $k^n(G)$ es k – periódica, al mínimo de esos n será llamado índice de clanes $I_K(G)$. Si no existe tal n diremos que el índice de clanes es ∞ . Ver 3.13.

Figura 3.13: Ejemplo de una gráfica k – estacionaria.

Es decir, $k^n(G) \cong k^{n+m}(G)$ para n, m enteros tal que $n \geq 0$ y $m \geq 0$, de manera equivalente, una gráfica G es **k – estacionaria** si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|k^n(G)| < m$, es decir $\{|V(k^n(G))| : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

3.4.2 Gráfica k – nula

Definición 3.5 Una gráfica G para la cual existe un entero n con la propiedad de que $k^n(G) = K_1$ es llamada **k – nula**.

Las gráficas completas K_n son k – nulas, Como comentamos anteriormente la gráfica de clanes de las gráficas completas $K_1, K_2, \dots, K_n$, es un punto, ya que tienen un único clan. Vemos un ejemplo en la figura 3.15.

También los arboles son gráficas k – nulas [7].

Un **árbol** es una gráfica acíclica conexa, (una gráfica acíclica es una gráfica que no contiene ciclos), donde cualquier dos vértices de T están unidos por una trayectoria única, ver ejemplos en la figura 3.16.

Si la gráfica de clanes de un árbol T puede resultar una gráfica completa, ver figura 3.17. El árbol T es k – nulo.

Si la gráfica de clanes de un árbol T puede resultar un árbol con menos vértices, T es k – nulo. Figura 3.14.

Si la gráfica de clanes de un árbol resulta ser una combinación de gráficas completas con arboles, ver 3.18, también resulta que T es k – nulo.

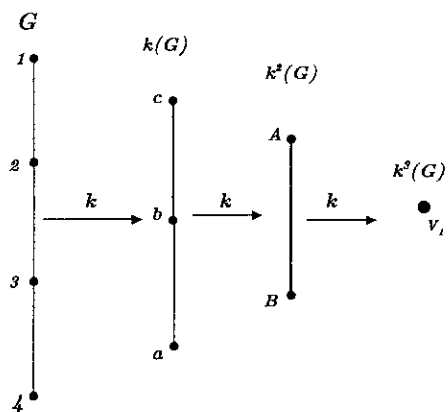
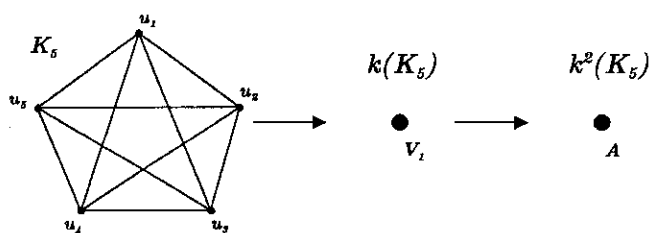
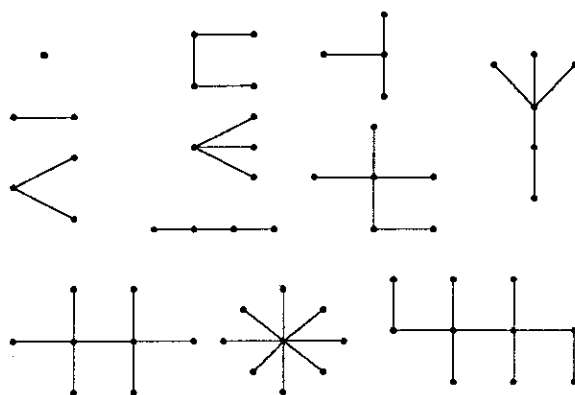
Figura 3.14: Ejemplo de una gráfica k - nula.Figura 3.15: Las gráficas completas son k - nulas

Figura 3.16: Ejemplo de arboles

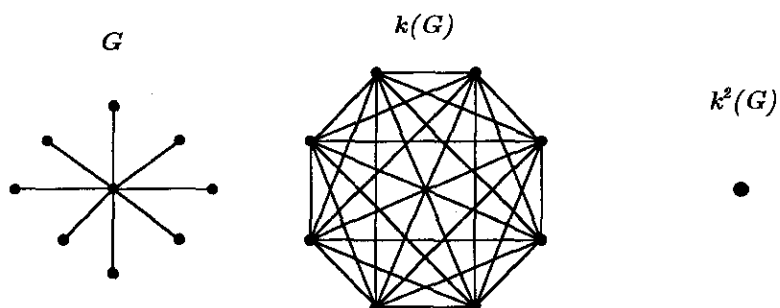


Figura 3.17: Ejemplo de cuando la gráfica de clanes de un árbol es una gráfica completa.

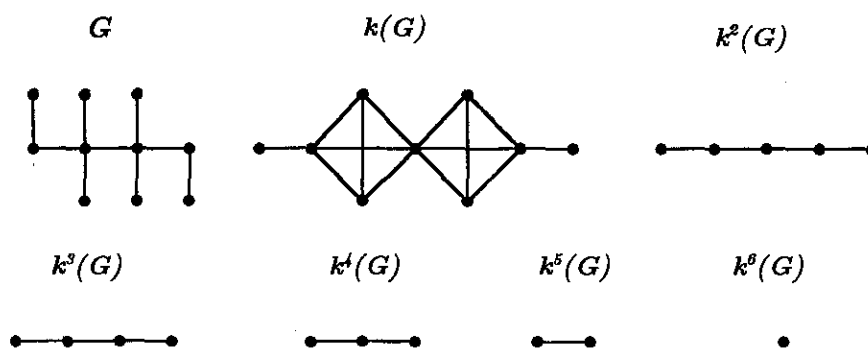


Figura 3.18: Ejemplo de un árbol al aplicarle el operador de clanes varias veces.

3.4.3 Gráfica k - *divergente*

Definición 3.6 Diremos que G , es k - **divergente** si $|k^n(G)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Diremos que G , es k - *divergente* si $|k^n(G)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$: O sea $\lim |k^n(G)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $\{|V(k^n(G))| : n \in N\}$ NO está acotado.

Victor Neumann-Lara descubrió los primeros ejemplos de gráficas k - *divergente* y Escalante reporto este descubrimiento y además muestra que existen gráficas k - *periódica*, de cualquier periodo [9, 1].

El ejemplo más simple de una gráfica k - *divergente* es el octaedro clásico O_3 , figura 3.19; la demostración de que todos los octaedros n -dimensionales O_n , $n \geq 3$ son k - *divergente*, se inicia trabajando con el complemento del octaedro, que son las tres pares de aristas que no estan en el octaedro, $3K_2$, es decir tres copias isomorfas de K_2 , $\overline{O_3} = 3K_2$, Ver figura 3.20.

Para calcular los clanes del octaedro, utilizando su complemento $3K_2$, se va eligiendo un vértice de cada arista en $3K_2$, como tenemos tres aristas y unicamente podemos elegir un solo vértice por arista, los clanes del octaedro seran conjuntos de tres vértices, asi sucesivamente hasta obtener todos los clanes.

Al conocer un clan del octaedro (conjuntos de tres vértices) podemos determinar el clan complemento (complemento del conjunto de tres vértices), esto nos permite afirmar que la intersección con el resto de los clanes (conjuntos de tres vértices) es no vacia.

Clanes del octaedro de O_3 , obtenido que tiene ocho clanes, $k(O_3) = O_4$. Ademas el complemento de O_4 es $4K_2$.

$1 = \{v_1, v_3, v_5\}$	· - - - - - ·	$2 = \{v_2, v_4, v_6\}$
$3 = \{v_1, v_3, v_6\}$	· - - - - - ·	$4 = \{v_2, v_4, v_5\}$
$5 = \{v_1, v_4, v_5\}$	· - - - - - ·	$6 = \{v_2, v_3, v_6\}$
$7 = \{v_1, v_4, v_6\}$	· - - - - - ·	$8 = \{v_2, v_3, v_5\}$

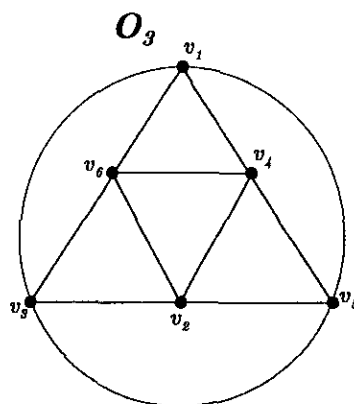


Figura 3.19: Octaedro clásico

En la figura 3.21, se representa $k(O_3) = O_4$. Ahora calculamos los clanes de O_4 , obteniendo que tiene 16 clanes, $k(O_4) = O_8$ y su complemento $8K_2$, figura 3.22.

$1' = \{1, 2, 3, 4\}$	. - - - - - .	$2' = \{5, 6, 7, 8\}$
$3' = \{1, 2, 5, 6\}$	. - - - - - .	$4' = \{3, 4, 7, 8\}$
$5' = \{1, 3, 5, 7\}$	. - - - - - .	$6' = \{2, 4, 6, 8\}$
$7' = \{1, 2, 3, 5\}$	. - - - - - .	$8' = \{4, 6, 7, 8\}$
$9' = \{1, 3, 4, 7\}$	. - - - - - .	$10' = \{2, 5, 6, 8\}$
$11' = \{3, 5, 7, 8\}$	. - - - - - .	$12' = \{1, 2, 4, 6\}$
$13' = \{1, 5, 6, 7\}$	. - - - - - .	$14' = \{2, 3, 4, 8\}$
$15' = \{1, 4, 6, 7\}$	. - - - - - .	$16' = \{2, 3, 5, 8\}$

Observamos que cada vez que aplicamos el operador de clanes, obtenemos un octaedro con más vértices, de esta manera se llega que $k(O_n) = O_{2^{n-1}}$, ver figura 3.23. Los octaedros de n -dimensionales O_n tiene $2n$ clanes.

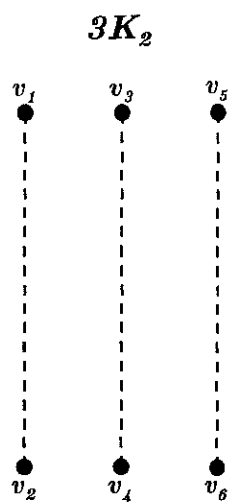
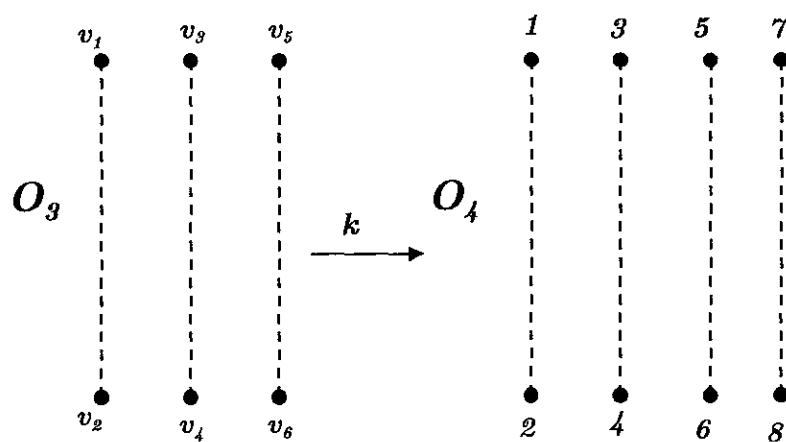
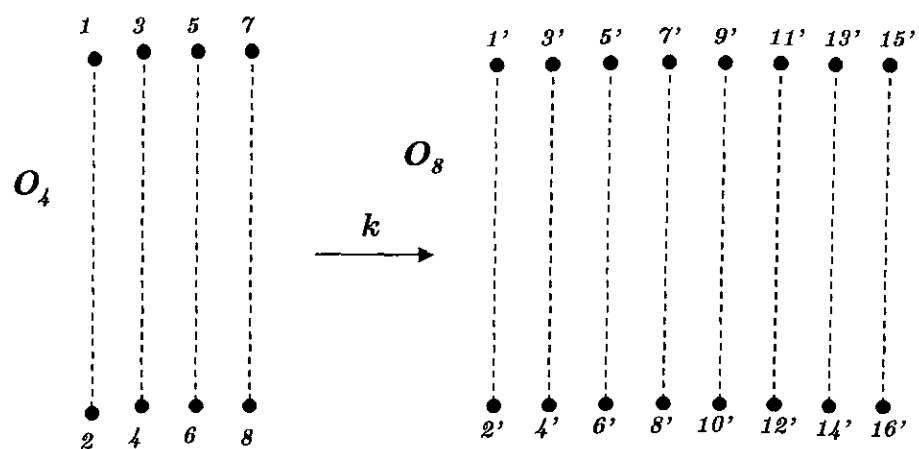
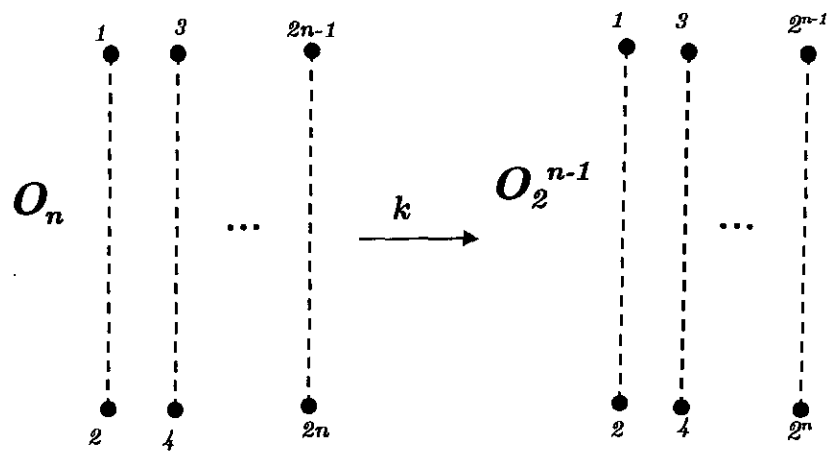


Figura 3.20: Complemento del octaedro

Figura 3.21: La gráfica de clanes del octaedro O_3 es O_4 , aquí se muestra en términos de su complemento.

Figura 3.22: La gráfica de O_4 es O_8 Figura 3.23: La gráfica de clanes de O_n es $O_{2^{n-1}}$

El problema de determinar el k - comportamiento (o k - carácter) de una gráfica G , es difícil, comenta Miguel Angel Pizaña, en su tesis doctoral [10].

"Calcular el k - carácter para gráficas en general es difícil, ni siquiera se sabe si existe algún algoritmo (no necesariamente polinomial) que calcule el k - carácter"

También en este trabajo, Pizaña plantea algunos problemas abiertos en relación al k - comportamiento.

*** Problema de la computabilidad del k - carácter**

¿Es computable el k - carácter?

"Observamos que existe un algoritmo que calcula el k - carácter si y sólo si existe un algoritmo que decide la k - divergencia. Por otro lado, un algoritmo que decide la k - nulidad no sería suficiente para calcular el k - carácter y de nuevo, nadie sabe si tal algoritmo existe".

*** Problema de la computabilidad de la k - nulidad**

¿Es computable la k - nulidad?

Los argumentos son iguales que en la pregunta anterior, solo podemos agregar que la capacidad de las computadoras hasta el momento no ha sido suficiente, para calcular todo los clanes de una gráfica.

*** Determinar el k - carácter de la gráfica de la figura 3.24.**

Todas las tecnicas conocidas hasta ahora para conocer el k -comportamiento no son suficientes para determinar el k -comportamiento de esta gráfica.

Con esto concluimos este capítulo, para continuar con el tema de desmantelamientos, concepto que permite simplificar un poco el problema de determinar el k -comportamiento de una gráfica. El siguiente capítulo esta basado en resultados de [2].

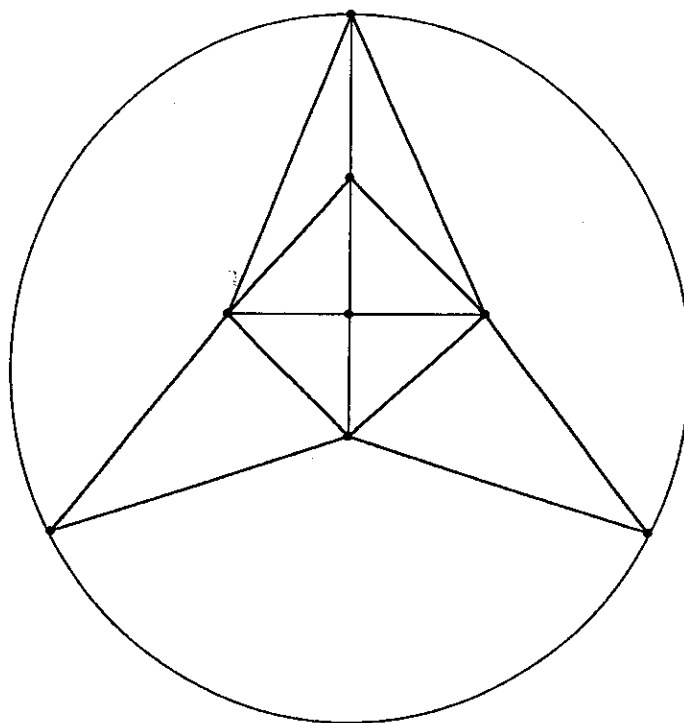


Figura 3.24: Gráfica de k - comportamiento desconocido

Capítulo 4

Desmantelamientos

En este capítulo se presenta uno de los resultados más importantes del k -comportamiento, que dice que la eliminación de vértices dominados no altera el k -comportamiento de una gráfica G . Este resultado se demostró en la tesis doctoral de Martín Eduardo Frías Armenta [2].

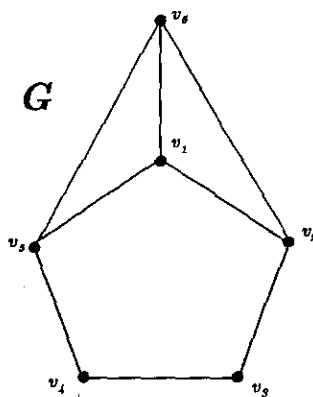
La idea de que una gráfica se desmantele a otra, es de simplificar, por ejemplo, el desmantelar una gráfica a la que es complicado conocer su k -comportamiento, a una que si se conoce fácilmente su k -comportamiento.

4.1 Dominación

Definición 4.1 Si G es una gráfica, $x, y \in V(G)$ y $\{x, y\} \in E(G)$ diremos que x es **dominado** por y si cualquier vecino de x (distinto de y) es también vecino de y , es decir, $N[y] \supseteq N[x]$, en símbolos, $y \succeq_G x$ o $y \succeq x$.

Podemos dar una orientación parcial en las aristas de G dirigiendo la arista de y a x cada vez que un vértice y domine a un vértice x . Claramente $\succeq$ es una relación de preorden en $V(G)$, hay que señalar que en las gráficas completas todos los vértices son dominados.

En la gráfica G de la figura 4.1 vemos que $N[v_1] = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ y $N[v_6] = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$, por lo tanto $N[v_1] \supseteq N[v_6]$, pero también se cumple que $N[v_1] \subseteq N[v_6]$ por lo que $v_1 \succeq v_6$ y $v_6 \succeq v_1$; este tipo de vértices se llaman **equivalentes**.

Figura 4.1: $v_1 \succeq v_6$ y $v_6 \succeq v_1$

4.2 Desmantelamiento

Definición 4.2 Sea G y H gráficas, decimos que G se **desmantela** a H en un paso, en símbolos $G \xrightarrow{\#} H$, si H es isomorfa a una subgráfica inducida H_0 de G , tal que cada vértice de $G - H_0$ está dominado por algún vértice de H_0 . Ver 4.2.

De forma equivalente podemos decir que G se desmantela a H , si hay una sucesión de gráficas que cumplen:

$$G \xrightarrow{\#} G_0 \xrightarrow{\#} G_1 \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} G_r = H$$

De la definición de desmantelamiento se deduce fácilmente que si G se desmantela a H , tenemos que el número de vértices de G es mayor o igual que el número de vértices de H . También observamos que una gráfica sin vértices dominados, no se desmantela.

En la figura 4.3, se da un ejemplo de una gráfica G que se desmantela a la gráfica H .

La figura 4.4 se ve que H y H_0 son isomorfas, además H_0 es una gráfica inducida de G y la figura 4.5, muestra que $v_6 \in V(G - H_0)$ está dominado por $v_1 \in H_0$.

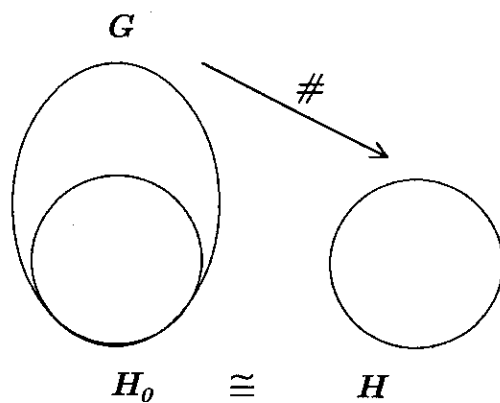
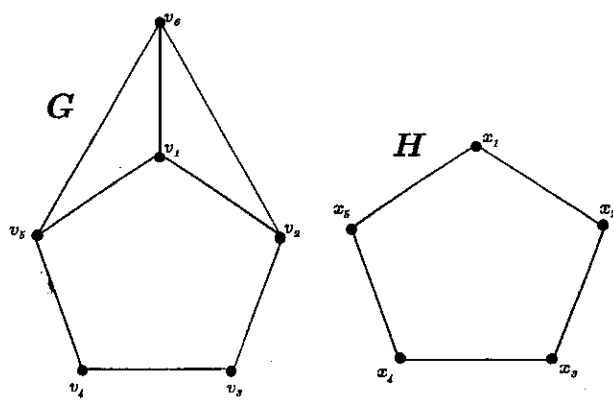


Figura 4.2: Diagrama de la definición de Desmantelamiento.

Figura 4.3: La gráfica G se desmantela a la gráfica H .

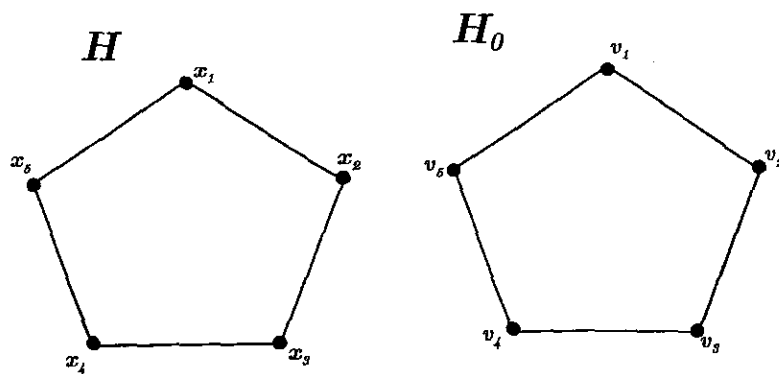


Figura 4.4: H y H_0 son isomorfas y H_0 es una gráfica inducida de G .

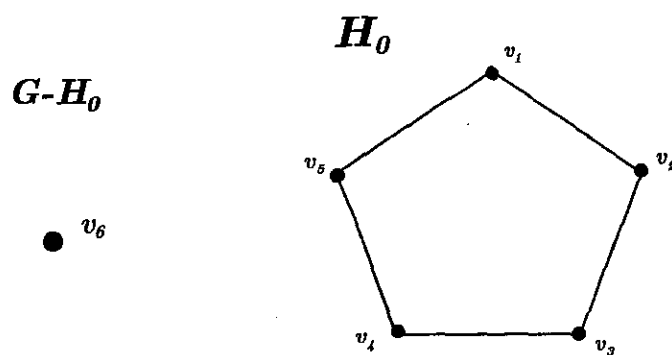


Figura 4.5: El vértice de $G - H_0$ está dominado por el vértice v_1 de H_0 .

Teorema 4.3 [2, 3] *La gráfica de intersección de todas las completas de G , para cualquier G , se desmantela a la gráfica de clanes de G , en símbolos $c(G) \xrightarrow{\#} k(G)$ para cada gráfica G .*

A continuación se presenta un ejemplo del Teorema 5.3.

En la figura 4.6, tenemos la gráfica G , sus gráficas completas son:

$$1 = \{u_1, u_3, u_4\}$$

$$2 = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$3 = \{u_1, u_2\}$$

$$4 = \{u_1, u_3\}$$

$$5 = \{u_1, u_4\}$$

$$6 = \{u_2, u_3\}$$

$$7 = \{u_3, u_4\}$$

$$8 = \{u_1\}$$

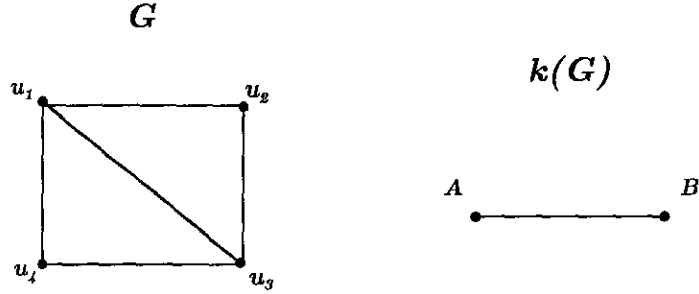
$$9 = \{u_2\}$$

$$10 = \{u_3\}$$

$$11 = \{u_4\}$$

Comprobemos que la gráfica de intersección de todas las completas de G , ver figura 4.6, se desmantela a $k(G)$. Para verificar esto, tiene que existir $k(G) \cong k(G_0) \subseteq_* c(G)$, tal que cada vértice $c(G) - k(G_0)$ esta dominado por algún vértice de $k(G_0)$.

Como $k(G) = (\{A, B\}, \{A, B\})$, entonces la subgráfica inducida de $c(G)$ que buscamos es $k(G_0) = (\{1, 2\}, \{1, 2\})$, ya que $k(G) \cong k(G_0)$, ver figura 4.8.

Figura 4.6: La gráfica G y su gráfica de clanes

Observamos que 9 vértices de $c(G)$ están dominados y 2 vértices no.

$$N[1] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$$

$$N[2] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$N[3] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

$$N[4] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

$$N[5] = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11\}$$

$$N[6] = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$$

$$N[7] = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11\}$$

$$N[8] = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

$$N[9] = \{2, 3, 6, 9\}$$

$$N[10] = \{1, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

$$N[11] = \{1, 5, 7, 11\}$$

$$\begin{array}{llllll} 1 \succeq 4, & 1 \succeq 5, & 1 \succeq 7, & 1 \succeq 8, & 1 \succeq 10, & 1 \succeq 11, \\ 2 \succeq 3, & 2 \succeq 6, & 2 \succeq 8, & 2 \succeq 9, & 2 \succeq 10 & \end{array}$$

Tenemos que $1 = \{u_1, u_3, u_4\}$, $2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ son los vértices que no están dominados y son adyacentes entre sí. Con esto concluimos que cada vértice $c(G) - k(G_0)$ está dominado por algún vértice de $k(G_0)$.

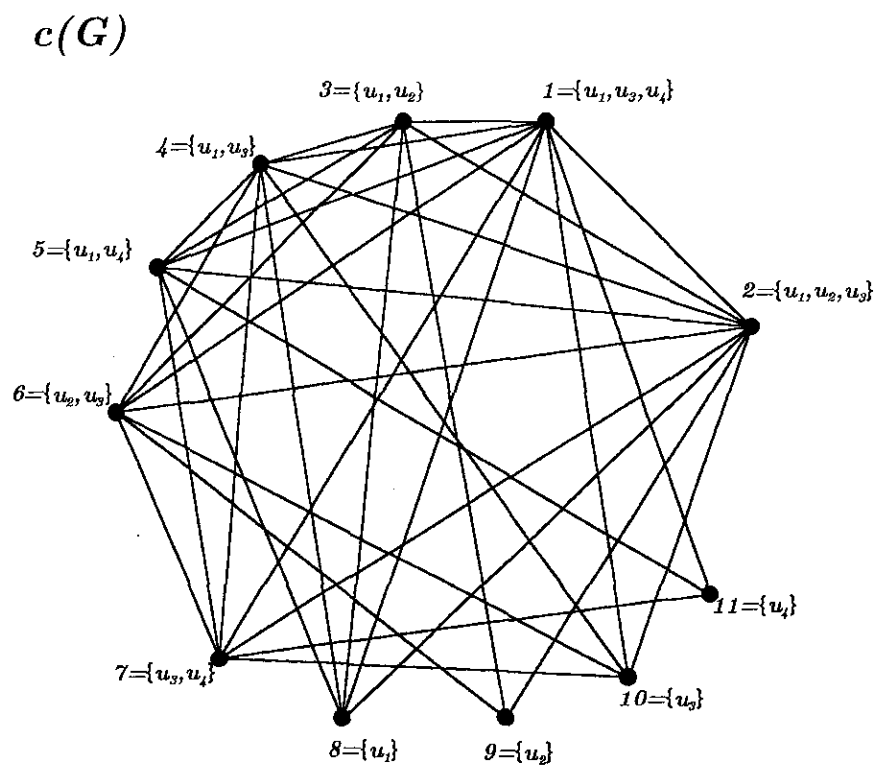


Figura 4.7: Gráfica de intersección de todas las completas de G : $c(G)$



Figura 4.8: $k(G)$ es isomorfa a la subgráfica inducida $k(G_0)$ de $c(G)$

4.3 Gráficas con el mismo k-comportamiento

A continuación se estudiará y se demostrará que si G se desmantela a H , entonces G y H tienen el mismo k -comportamiento, en particular si x es un vértice dominado, entonces G y $G - \{x\}$ tienen el mismo comportamiento dinámico bajo la iteración del operador de clanes, para ello primeramente enunciaremos y demostraremos el siguiente lema.

1 **Lema 4.4** [2, 3] Supongamos que $G \xrightarrow{\#} H$ y sea H_0 como la definición 4.2. Sean $Q_1, Q_2 \in V(k(G))$ (no necesariamente diferentes), entonces $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ si y sólo si $Q_1 \cap Q_2 \cap H_0 \neq \emptyset$.

Demostración:

Tomando a $Q_1, Q_2 \in V(k(G))$ y sea $x \in Q_1 \cap Q_2$

Si $x \in H_0$, se sigue que $x \in Q_1 \cap Q_2 \cap H_0 \neq \emptyset$.

Ahora

Si $x \in G - H_0$, por hipótesis tenemos que existe $y \in H_0$, tal que $y \succ x$.

Como $x \in Q_1$ y $x \in Q_2$; x es vecino de todos los vértices de Q_1 y también es vecino de todos los vértices de Q_2 , tenemos que $Q_1 \cup Q_2 \subseteq N_G[x]$, y como $N_G[x] \subseteq N_G[y]$ también y es adyacente a todo vértice en $Q_1 \cup Q_2$. Se sigue que $y \in Q_1$ y $y \in Q_2$ luego $\{y\} \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap H_0 \neq \emptyset$.

■

El lema nos dice que si $Q_1 = Q_2 \in V(k(G))$, entonces $Q_1 \cap Q_2 \cap H_0 \neq \emptyset$, es decir que todo clan de G va a estar tanto en $G - H_0$ como en H_0 , lo mismo para $Q_1, Q_2 \in V(k(G))$, cuando $Q_1 \neq Q_2$.

Las gráficas de las figuras 4.3 y 4.4, cumplen con lo que se observa en la definición 4.2 y la figura 4.9 muestra a $k(G)$ y H_0 , por lo tanto los clanes de G son adyacentes, si y sólo si son adyacentes también a H_0 .

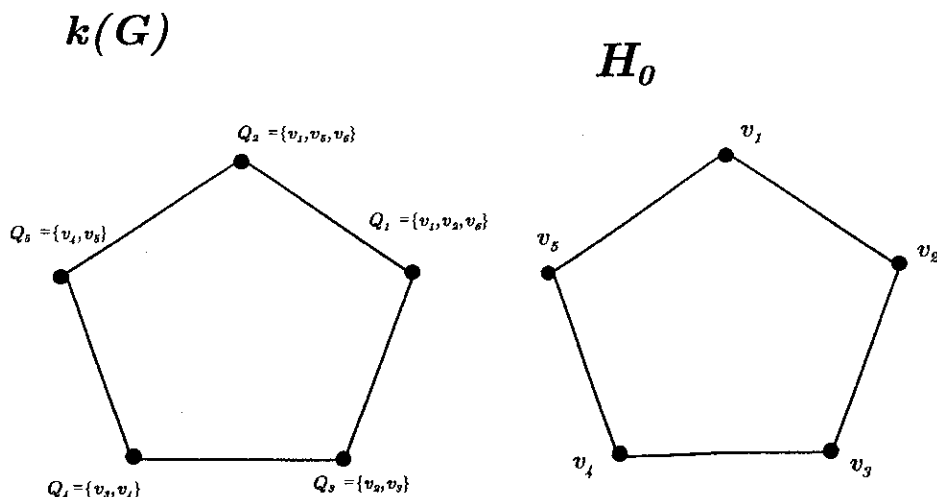
$$Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow Q_1 \cap Q_2 \cap H_0 \neq \emptyset$$

$$Q_1 \cap Q_3 \neq \emptyset \Leftrightarrow Q_1 \cap Q_3 \cap H_0 \neq \emptyset$$

$$Q_2 \cap Q_5 \neq \emptyset \Leftrightarrow Q_2 \cap Q_5 \cap H_0 \neq \emptyset$$

$$Q_3 \cap Q_4 \neq \emptyset \Leftrightarrow Q_3 \cap Q_4 \cap H_0 \neq \emptyset$$

$$Q_4 \cap Q_5 \neq \emptyset \Leftrightarrow Q_4 \cap Q_5 \cap H_0 \neq \emptyset$$

Figura 4.9: La gráfica de clanes de G y H_0

El siguiente teorema nos dice que si una gráfica G se desmantela a una gráfica H , sus respectivas gráficas de clanes también se desmentelan.

2. **Teorema 4.5** [2, 3] Si $G \xrightarrow{\#} H$, entonces $k(G) \xrightarrow{\#} k(H)$

Demostración:

Lo que tenemos que demostrar es que existe una subgráfica inducida de $k(G)$, le llamaremos $f(k(H_0))$ tal que es isomorfa a $k(H)$ y cada vértice en $k(G) - f(k(H_0))$ es dominado por algún vértice en $f(k(H_0))$.

Para ello primeramente demostraremos que existe un isomorfismo entre una subgráfica inducida de $k(G)$ y $k(H)$.

Sea H_0 igual que en la definición 4.2.

Para cada $Q \in V(k(H_0))$, tenemos $Q \subseteq H_0$

Sabemos que Q es una subgráfica completa de G , por ello para cada $Q \in V(k(H_0))$ elegimos un clan fijo $f(Q) \in V(k(G))$ tal que $Q \subseteq f(Q)$, por lo tanto $Q \subseteq f(Q) \cap H_0$.

Demostremos que $Q \supseteq f(Q) \cap H_0$.

Supongamos que $x \in f(Q) \cap H_0$ y $x \notin Q$, tenemos que $\{x\} \cup Q \subseteq H_0$, lo cual contradice que Q es un clan de H_0 , por lo que x tiene que estar en Q , por lo tanto $Q = f(Q) \cap H_0$.

De esta manera sabemos que f es inyectiva.

Si $f(Q_1) = f(Q_2)$ tenemos $H_0 \cap f(Q_1) = f(Q_2) \cap H_0$ por lo tanto $Q_1 = Q_2$

Por demostrar que f preserva adyacencia.

Sean $Q_1, Q_2 \in V(k(H_0))$ tal que $f(Q_1) \cap f(Q_2) \neq \emptyset$, por el lema 4.4, sabemos que

$$\emptyset \neq f(Q_1) \cap f(Q_2) \cap H_0 = (f(Q_1) \cap H_0) \cap (f(Q_2) \cap H_0) = Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$$

Entonces Q_1 y Q_2 son adyacentes si $f(Q_1)$ y $f(Q_2)$ lo son.

Sean $Q_1, Q_2 \in V(k(H_0))$ tal que $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, existe $x \in Q_1 \cap Q_2$ tenemos que $Q_1 \subseteq f(Q_1)$ y $Q_2 \subseteq f(Q_2)$ entonces $x \in f(Q_1) \cap f(Q_2) \neq \emptyset$. Entonces $f(Q_1)$ y $f(Q_2)$ son adyacentes si Q_1 y Q_2 lo son.

Por lo tanto f preserva adyacencia.

Se sigue que $k(H_0) \cong f(k(H_0))$, pero sabemos que $H \cong H_0$ entonces $k(H) \cong k(H_0)$ por lo tanto que $k(H) \cong f(k(H_0))$.

De aquí $f(k(H_0))$ es la subgráfica de $k(G)$ inducida por $\{f(Q) : Q \in k(H_0)\}$.

Finalmente

Sea $Q \in V(k(G))$ y $Q_0 \in V(k(H_0))$ tal que $Q \cap H_0 \subseteq Q_0$

Por demostrar que:

$$N_{k(G)}[Q] \subseteq N_{k(G)}[f(Q_0)], \text{ es decir } Q \text{ es dominado por } f(Q_0)$$

Sea $\{Q, Q_1\} \in E(k(G))$, por el lema 4.4, $Q_1 \cap Q \neq \emptyset$ si y sólo si $Q_1 \cap Q \cap H_0 \neq \emptyset$ pero $Q_1 \cap Q \cap H_0 \subseteq Q_1 \cap Q_0 \subseteq Q_1 \cap f(Q_0)$, ya que $Q_0 \subseteq f(Q_0)$, luego Q_1 también es adyacente a $f(Q_0)$.

■

En la figura 4.10, se da un ejemplo del Teorema 4.5, la gráfica G se desmantela a la gráfica H entonces $k(G)$ se desmantela a $k(H)$, como se observa en la figura 4.11.

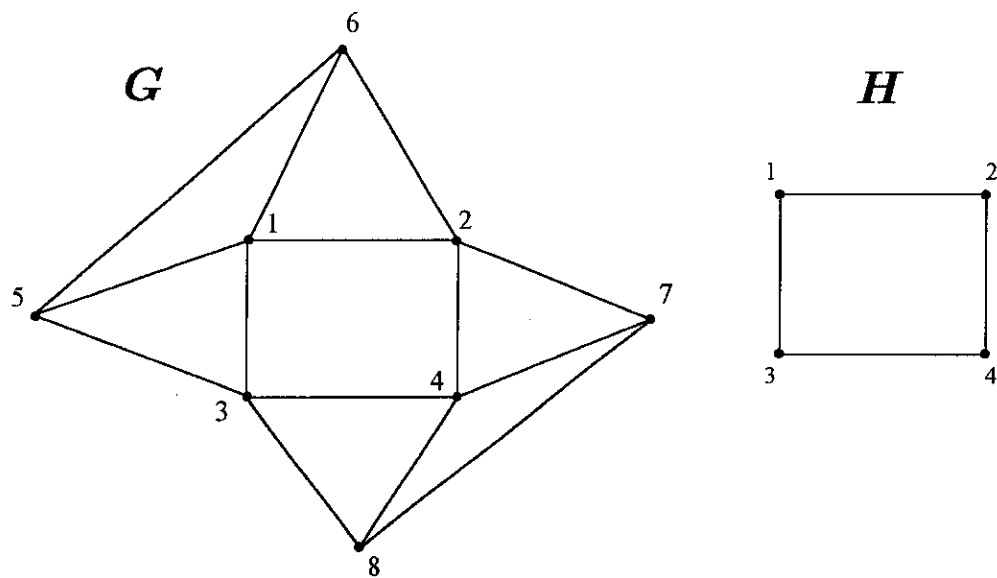


Figura 4.10: La gráfica G se dismantela a la gráfica H .

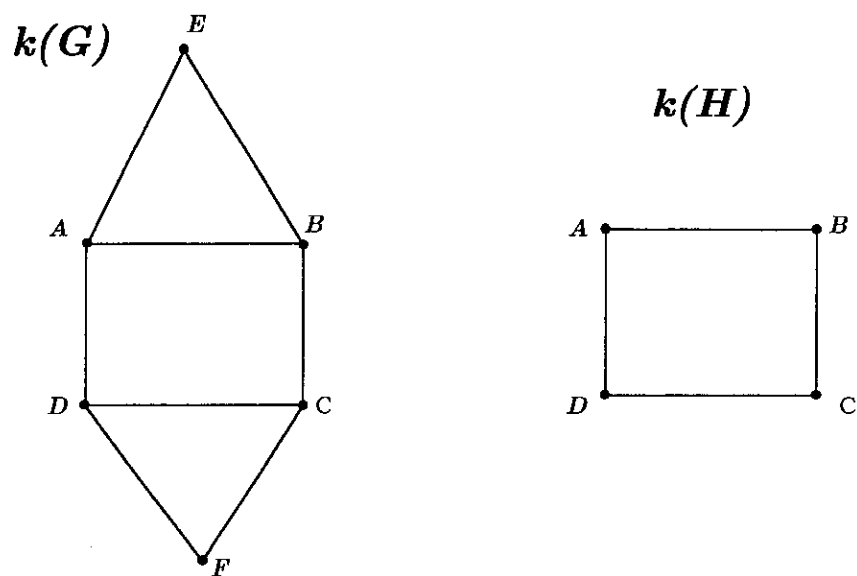


Figura 4.11: La gráfica $k(G)$ se dismantela a la gráfica $k(H)$.

3 **Teorema 4.6** [2, 3] Si $G \xrightarrow{\#} H$, entonces $k(c(H)) \xrightarrow{\#} k^2(G)$, en palabras: si G se desmantela a H , entonces la gráfica de clanes de la gráfica de intersección de todas las completas de H se desmantela a la segunda gráfica de clanes de G .

Demostración:

Sea $\mathbf{Q}$ un clan de $k(G)$ tal que $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_r\} \in V(k^2(G))$, donde $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_r$ son clanes de G o vértices en $k(G)$.

Conocemos por el Lema 4.4, que $\{Q_1 \cap H_0, \dots, Q_r \cap H_0\}$ es un conjunto de completas de H_0 que se intersectan dos a dos.

Entonces para cada clan $\mathbf{Q}$ de $k(G)$
 $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_r\} \in V(k^2(G))$
 seleccionamos un clan fijo $f(\mathbf{Q})$ de $c(H_0)$
 $f(\mathbf{Q}) \in V(k(c(H_0)))$
 que cumple que $f(\mathbf{Q}) \supseteq \{Q_1 \cap H_0, \dots, Q_r \cap H_0\}$.

Queremos demostrar que f es un isomorfismo sobre su imagen y que cada vértice en $k(c(H))$ es dominado por un vértice en $f(k^2(G))$.

Para ello, primeramente tenemos que probar que f es inyectiva.

Sea $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_r\}$, $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_s\} \in V(k^2(G))$.
 tenemos

$f(\mathbf{Q}) \supseteq \{Q_1 \cap H_0, \dots, Q_r \cap H_0\}$, $f(\mathbf{P}) \supseteq \{P_1 \cap H_0, \dots, P_s \cap H_0\} \in V(k(c(H_0)))$

Si $f(\mathbf{Q}) = f(\mathbf{P})$ tenemos $Q_i \cap H_0 \in f(\mathbf{P})$ para toda $i = 1, 2, \dots, r$.

Ya que $f(\mathbf{P})$ es un clan de $c(H_0)$ tenemos $Q_i \cap H_0 \cap P_j \neq \emptyset$, para toda $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, s$.

Ahora por el lema 4.4, sabemos que $Q_i \cap P_j \neq \emptyset$, para toda i y j , se sigue que $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$, por lo tanto f es inyectiva.

A continuación probaremos que f preserva adyacencias.

Si $f(\mathbf{Q})$ es adyacente a $f(\mathbf{P})$ para algún $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q} \in V(k^2(G))$.

Sea C_0 una completa de H_0 , tal que $C_0 \in f(\mathbf{Q}) \cap f(\mathbf{P})$ y sea Q_0 cualquier clan en G que contenga C_0 .

Como $C_0 \in f(\mathbf{Q})$ tenemos que $C_0 \cap Q_i \cap H_0 \neq \emptyset$

Pero como $C_0 \subseteq Q_0$ tenemos $C_0 \cap Q_i \cap H_0 = Q_0 \cap Q_i \cap H_0 \neq \emptyset$ para toda $i = 1, 2, \dots, r$.

Por lo tanto $Q_0 \in \mathbf{Q}$.

Por otro lado como $C_0 \in f(\mathbf{P})$ tenemos que $C_0 \cap P_j \cap H_0 \neq \emptyset$

Pero como $C_0 \subseteq Q_0$ tenemos $C_0 \cap P_j \cap H_0 = Q_0 \cap P_j \cap H_0 \neq \emptyset$ para toda $j = 1, 2, \dots, s$.

Por lo tanto $Q_0 \in \mathbf{P}$.

Entonces $Q_0 \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}$ y por lo tanto $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$ son adyacentes en $k^2(G)$.

Sean $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P} \in V(k^2(G))$, tal que $\mathbf{Q} \cap \mathbf{P} \neq \emptyset$, existe $Q_0 \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}$, tenemos que $Q_0 \cap H_0 \in f(\mathbf{P})$ y $Q_0 \cap H_0 \in f(\mathbf{Q})$ entonces $Q_0 \in f(\mathbf{Q}) \cap f(\mathbf{P})$.

por lo tanto $f(\mathbf{Q})$ y $f(\mathbf{P})$ son adyacentes en $k(c(H_0))$

De esta manera f es isomorfismo sobre su imagen.

De aquí $f(k^2(G))$ es la subgráfica de $k(c(H_0))$ inducida por $\{f(\mathbf{Q}) : \mathbf{Q} \in V(k^2(G))\}$.

Finalmente veremos que cada vértice en $k(c(H))$ es dominado por un vértice en $f(k^2(G))$.

Tomamos $\mathbf{Q} = \{C_1, C_2, \dots, C_r\} \in V(k(c(H_0)))$, $\mathbf{Q}$ es un clan de $c(H_0)$ y $C_1, C_2, \dots, C_r$ son completas de H_0

Sea $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_r\}$ un conjunto de clanes de G , tal que $C_i \subseteq Q_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, r$ y tomamos $\mathbf{Q}_0 \in V(k^2(G))$ que satisfaga $\mathbf{Q}_0 \supseteq \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_r\}$.

Afirmamos que $f(\mathbf{Q}_0)$ domina a $\mathbf{Q}$

Sea $\mathbf{P} \in V(k(c(H_0)))$ adyacente a $\mathbf{Q}$, probaremos que $\mathbf{P}$ también es adyacente a $f(\mathbf{Q}_0)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que C_1 es la completa de H_0 que esta en la intersección: $C_1 \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}$.

Tenemos que $Q_1 \cap H_0 \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}$ ya que cada completa de H_0 que intersecciona a C_1 también intersecciona a $Q_1 \cap H_0 \supseteq C_1$.

Se sigue que $Q_1 \cap H_0 \in \mathbf{P}$ y $Q_1 \cap H_0 \in f(\mathbf{Q}_0)$, es decir $Q_1 \cap H_0 \in \mathbf{P} \cap f(\mathbf{Q}_0)$ $\mathbf{P}$ es tambien adyacente a $f(\mathbf{Q}_0)$.

Por lo tanto $f(\mathbf{Q}_0)$ domina a $\mathbf{Q}$

■

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes del k -comportamiento, nos dice que si una gráfica G se desmantela a una gráfica H , entonces G y H tienen el mismo k -comportamiento. En particular si x es un vértice dominado de G , tenemos que G y $G - \{x\}$ tienen el mismo k -comportamiento.

En otras palabras el desmantelamiento ($\#$), no cambia el k -comportamiento de una gráfica dada.

4 **Teorema 4.7** [2, 3] Si $G \xrightarrow{\#} H$, entonces G y H tienen el mismo k -comportamiento

Es decir:

- i) G es k - nula si y sólo si H es k - nula.
- ii) G es k - estacionaria si y sólo si G es k - estacionaria.
- iii) G es k - divergente si y sólo si G es k - divergente.

Antes de iniciar con la demostración de este teorema, es importante comentar que las gráficas k - periódicas están contenidas en las gráficas k - estacionaria, así como las gráficas k - nulas son un caso particular de las k - periódicas. Con esto podemos concluir que toda gráfica es k - estacionaria ó k - divergente.

Todo esto nos lleva a que para demostrar este teorema basta probar lo siguiente:

- 1) G es k - nula si y sólo si H es k - nula.
- 2) H es k - estacionaria entonces G es k - estacionaria.
- 3) H es k - divergente entonces G es k - divergente.

Lo anterior es porque al demostrar 2) H es k - estacionaria entonces G es k - estacionaria, estamos probando que si G es k - divergente entonces H es k - divergente debido a que k - estacionaria, por definición es la negación de k - divergente.

Lo mismo pasa que al demostrar 3) H es k - divergente entonces G es k - divergente. estamos probando que si G es k - estacionaria entonces H es k - estacionaria, ya que k - divergente por definición es la negación de k - estacionaria.

Demostración:

1) G es k - nula si y sólo si H es k - nula.

a) H es k - nula entonces G es k - nula.

Si H es k - nula, por definición tenemos que $k^n(H) \cong K_1$

Por hipótesis y aplicando reiteradamente el teorema 4.5:

Si $G \xrightarrow{\#} H$ entonces $k(G) \xrightarrow{\#} k(H)$

Si $k(G) \xrightarrow{\#} k(H)$ entonces $k^2(G) \xrightarrow{\#} k^2(H)$

Si $k^2(G) \xrightarrow{\#} k^2(H)$ entonces $k^3(G) \xrightarrow{\#} k^3(H)$

Así sucesivamente

Si $k^{n-1}(G) \xrightarrow{\#} k^{n-1}(H)$ entonces $k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$

Entonces $k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H) \cong K_1$

Se sigue que $k^n(G) \xrightarrow{\#} K_1$

Por definición tenemos que existe X una subgráfica inducida de $k^n(G)$, donde $X \cong K_1$ tal que todo vértice en $k^n(G) - X$ está dominado por X . Es decir X es vecino de todo vértice en $k^n(G) - X$, por lo tanto $k^{n+1}(G)$ es una gráfica completa, por lo que $k^{n+2}(G)$ es un punto.

Así concluimos que G es k - nula.

b) G es k - nula entonces H es k - nula.

Si G es k - nula, por definición tenemos que $k^n(G) \cong K_1$

Por hipótesis y aplicando reiteradamente el teorema 4.5:

tenemos que $K_1 \cong k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$, esto implica que $k^n(H) \cong K_1$.

Por lo tanto H es k - nula.

2) Si H es k - estacionaria entonces G es k - estacionaria.

Sea H , k - estacionaria, pero no k - nula.

Por definición tenemos que $k^n(H) \cong k^{n+m}(H)$ para n, m enteros tal que $n \geq 0, m \geq 1$.

Por hipótesis y aplicando reiteradamente el teorema 4.5:

Como $G \xrightarrow{\#} H$ entonces $k(G) \xrightarrow{\#} k(H)$

Si $k(G) \xrightarrow{\#} k(H)$ entonces $k^2(G) \xrightarrow{\#} k^2(H)$

Si $k^2(G) \xrightarrow{\#} k^2(H)$ entonces $k^3(G) \xrightarrow{\#} k^3(H)$

Asi sucesivamente

Si $k^{n-1}(G) \xrightarrow{\#} k^{n-1}(H)$ entonces $k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$

Si $k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$ entonces $k^{n+m}(G) \xrightarrow{\#} k^{n+m}(H)$

Si $k^{n+m}(G) \xrightarrow{\#} k^{n+m}(H)$ entonces $k^{n+mi}(G) \xrightarrow{\#} k^{n+mi}(H)$ para toda $i \in \mathbb{N}$

Entonces $k^{n+mi}(G) \xrightarrow{\#} k^{n+mi}(H) \cong k^n(H)$

es decir, $k^{n+mi}(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$

Por el teorema 4.6:

Si $k^{n+mi}(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$ entonces $k(c(k^n(H))) \xrightarrow{\#} k^{n+mi+2}(G)$ para toda $i \in \mathbb{N}$

Sabemos que $k(c(k^n(H)))$ solo se desmantela aun número finito de gráficas no isomorfas, entonces existe $i_0 < i_1$ tal que $k^{n+mi_0+2}(G) \cong k^{n+mi_1+2}(G)$.

Por lo tanto G es k - estacionaria.

3) Si H es k - divergente entonces G es k - divergente.

Sea H k - divergente, por definición $|k^n(H)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$,

Por hipotesis y aplicando reiteradamente el teorema 4.5, tenemos que $k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$

Esto implica que $k^n(G)$ tiene igual o mas vertices que $k^n(H)$

$|k^n(G)| \geq |k^n(H)|$

Por lo tanto G es también k - divergente.

■

Capítulo 5

Puntos fijos de conjuntos parcialmente ordenados

Este capítulo está basado en un artículo de Simone Hazan y Victor Neumann Lara [6], en el cual presentan el resultado que dice que un orden parcial finito tiene la propiedad de punto fijo si la sucesión de gráficas iteradas de clanes de su gráfica de comparabilidad converge a la gráfica trivial.

Antes de presentar este resultado, recordaremos y enunciaremos algunas definiciones y resultados previos.

5.1 Definiciones y resultados preliminares

Como sabemos un orden es un par ordenado $\mathbf{P} = (P, \leq)$, donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación antisimétrica, transitiva y reflexiva sobre P . También recordemos que un homomorfismo entre dos gráficas A y B es una función $f : V(A) \rightarrow V(B)$ tal que las imágenes de vértices adyacentes son adyacentes o iguales. Un homomorfismo entre dos gráficas G y H , $\rho : G \rightarrow H$ es una retracción si existe un homomorfismo $\sigma : H \rightarrow G$ tal que $\rho \circ \sigma$ es la identidad en H , en este caso, decimos que H es un retracto de G .

Así como las anteriores definiciones son esenciales, las que a continuación se presentan también son importantes para comprender las demostraciones de los resultados que se presentan en este capítulo.

Definición 5.1 Un **Endomorfismo** de un orden parcial $\mathbf{P}$, es una función $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ que preserva el orden, es decir, si $a \leq b$ implica $f(a) \leq f(b)$ para toda $a, b \in \mathbf{P}$.

Ejemplo de un Endomorfismo:

Sea $U = \{1, 2, 3\}$, $X = 2^U$ y el orden parcial $\mathbf{P} = (X, \subseteq)$

$X = \{U, A, B, C, D, E, F, G\}$

$U = \{1, 2, 3\}$

$A = \{1, 2\}$

$B = \{1, 3\}$

$C = \{2, 3\}$

$D = \{1\}$

$E = \{2\}$

$F = \{3\}$,

$G = \{\}$

$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$

$f(U) = U$

$f(A) = U$

$f(B) = U$

$f(C) = U$

$f(D) = E$

$f(E) = D$

$f(F) = F$

$f(G) = G$

f es un endomorfismo de $\mathbf{P}$

$A \subseteq U$ y $f(A) \subseteq f(U)$

$B \subseteq U$ y $f(B) \subseteq f(U)$

$C \subseteq U$ y $f(C) \subseteq f(U)$

$D \subseteq A$ y $f(D) \subseteq f(A)$

$E \subseteq C$ y $f(E) \subseteq f(C)$

$F \subseteq B$ y $f(F) \subseteq f(B)$

$G \subseteq E$ y $f(G) \subseteq f(E)$

$D \subseteq B$ y $f(D) \subseteq f(B)$

$E \subseteq A$ y $f(E) \subseteq f(A)$

$F \subseteq C$ y $f(F) \subseteq f(C)$

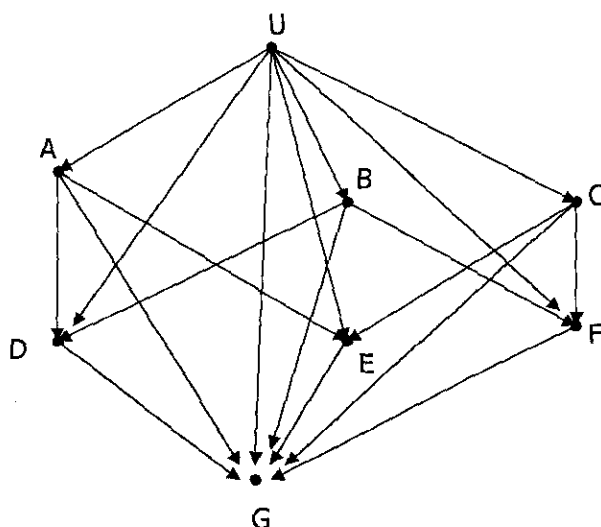


Figura 5.1: Gráfica de comparabilidad del orden parcial $\mathbf{P} = (X, \subseteq)$.

La **gráfica de comparabilidad** del orden parcial $\mathbf{P} = (X, \subseteq)$, es la que se muestra en la figura 5.1, existe una flecha si los conjuntos están relacionados.

Definición 5.2 Un endomorfismo f de orden parcial $\mathbf{P}$ se dice que tiene un **punto fijo** si existe un elemento a en $\mathbf{P}$ tal que $f(a) = a$.

El ejemplo del endomorfismo que se dio anteriormente, tiene tres puntos fijos.

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$$

$$\underline{f(U) = U}$$

$$\underline{f(A) = U}$$

$$f(B) = U$$

$$f(C) = U$$

$$f(D) = E$$

$$f(E) = D$$

$$\underline{f(F) = F}$$

$$\underline{f(G) = G}$$

Definición 5.3 Un orden parcial P se dice que tiene la propiedad de punto fijo si todo endomorfismo de P , tiene un punto fijo.

Definición 5.4 Sea G una gráfica. Una *coafinación* es un automorfismo φ de G tal que $\{x, \varphi(x)\} \notin E(G)$ para cada $x \in V(G)$.

Definición 5.5 Una gráfica $G = (V, E)$ es llamada *coafinable* si admite una coafinación.

Observemos que una gráfica coafinable tiene que tener al menos dos vértices.

En la figura 5.2, se da un ejemplo trivial de una gráfica G coafinable. La coafinación es f y esta definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(a) &= d \\ f(b) &= c \\ f(c) &= b \\ f(d) &= a \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \{a, f(a)\} &= \{a, d\} \notin E(G) \\ \{b, f(b)\} &= \{b, c\} \notin E(G) \\ \{c, f(c)\} &= \{c, b\} \notin E(G) \\ \{d, f(d)\} &= \{d, a\} \notin E(G) \end{aligned}$$

Un segundo ejemplo de una gráfica coafinable es la que se muestra en la figura 5.3.

$$\begin{aligned} \{a, \varphi(a)\} &= \{a, f\} \notin E(G) \\ \{b, \varphi(b)\} &= \{b, e\} \notin E(G) \\ \{c, \varphi(c)\} &= \{c, d\} \notin E(G) \\ \{d, \varphi(d)\} &= \{d, b\} \notin E(G) \\ \{e, \varphi(e)\} &= \{e, a\} \notin E(G) \\ \{f, \varphi(f)\} &= \{f, c\} \notin E(G) \end{aligned}$$

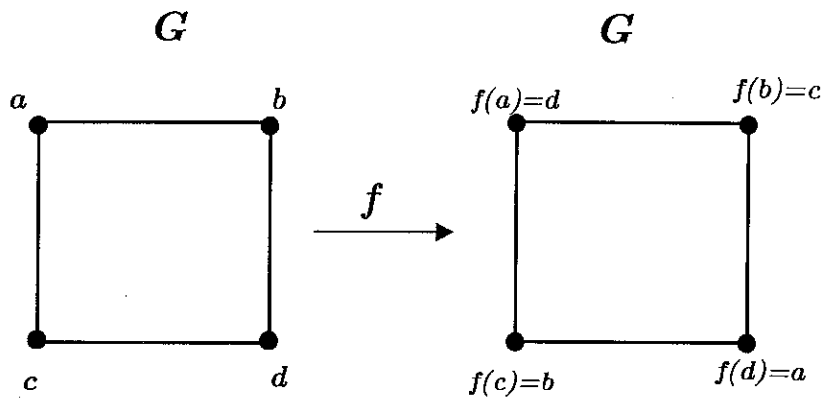


Figura 5.2: Ejemplo de una gráfica coafinable

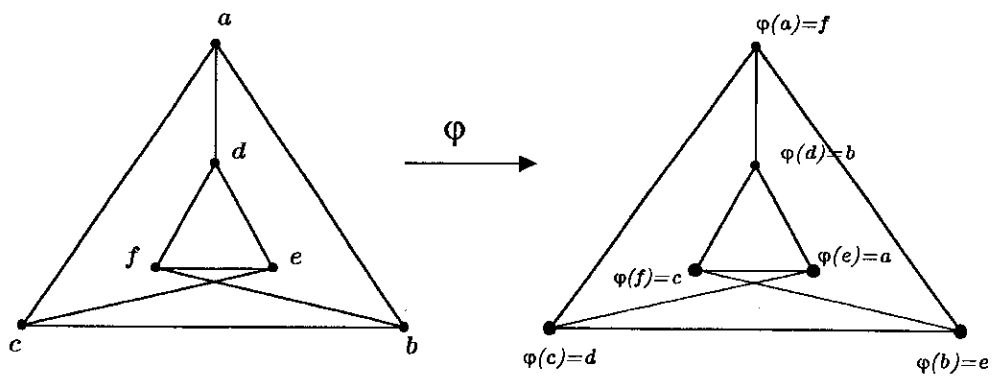


Figura 5.3: Gráfica coafinable

A continuación se presentan dos resultados de Víctor Neumann-Lara [8, 9], que son antecedentes para la demostración del teorema del punto fijo.

Proposición 5.6 [8, 9] *Sea G y H dos gráficas tal que H es un retracto de G . Entonces $k(H)$ es un retracto de $k(G)$.*

Demostración:

Por hipótesis tenemos un homomorfismo $f : G \rightarrow H$, es una retracción, ya que existe un homomorfismo $g : H \rightarrow G$, tal que $f \circ g$ es la identidad en H .

Por demostrar que $k(H)$ es un retracto de $k(G)$, para esto probaremos que un homomorfismo $f' : k(G) \rightarrow k(H)$ es una retracción, es decir, que existe $g' : k(H) \rightarrow k(G)$ tal que $f' \circ g'$ es la identidad en $k(H)$.

Definimos $f' : k(G) \rightarrow k(H)$.

Para cada $A \in V(k(G))$, A es un clan en G ; elegimos $f'(A) \in V(k(H))$ tal que $f(A) \subseteq f'(A)$ en H .

Ahora probemos que $f' : k(G) \rightarrow k(H)$ es un homomorfismo, es decir que las imágenes de vértices adyacentes son adyacentes o iguales.

Sean $A, A' \in V(k(G))$, tal que $A \cap A' \neq \emptyset$, tomamos $x \in A \cap A'$, por lo tanto $f(x) \in f(A) \cap f(A') \subseteq f'(A) \cap f'(A') \neq \emptyset$, entonces $f' : k(G) \rightarrow k(H)$, es un homomorfismo.

Definimos $g' : k(H) \rightarrow k(G)$.

Para cada $B \in V(k(H))$, B es un clan en H , elegimos $g'(B) \in V(k(G))$ tal que $g(B) \subseteq g'(B)$ en G .

Por demostrar que $g' : k(H) \rightarrow k(G)$ es un homomorfismo.

Sean $B, B' \in V(k(H))$, tal que $B \cap B' \neq \emptyset$, $y \in B \cap B'$, por consiguiente

$$g(y) \in g(B) \cap g(B') \subseteq g'(B) \cap g'(B') \neq \emptyset,$$

por lo tanto $g' : k(H) \rightarrow k(G)$ es un homomorfismo.

Ya tenemos que $f' : k(G) \rightarrow k(H)$ y $g' : k(H) \rightarrow k(G)$ son homomorfismos, nos falta demostrar que $f' \circ g'$ es la identidad en $k(H)$.

Sea $B \in V(k(H))$, B es un clan en H , como $f \circ g$ es la identidad en H , tenemos $f(g(B)) = B$.

Por la manera en que fueron definidas f' y g' tenemos:

$$B = f(g(B)) \subseteq f(g'(B)) \subseteq f'(g'(B))$$

luego: $B \subseteq f'(g'(B))$.

Como $f' : k(G) \rightarrow k(H)$ y $g' : k(H) \rightarrow k(G)$ son homomorfismos se sigue que $f'(g'(B))$ es una completa de H y como B es completa maximal (es un clan en H) se llega a que $B = f'(g'(B))$, de modo que $f' \circ g'$ es la identidad en $k(H)$.

Por lo tanto $k(H)$ es un retracto de $k(G)$.

■

Proposición 5.7 [8, 9] Sea G una gráfica coafinable. Entonces $k(G)$ es coafinable.

Demostración:

Como G es una gráfica coafinable, admite una coafinación, es decir, un automorfismo φ de G tal que $(x, \varphi(x)) \notin E(G)$ para cada $x \in V(G)$

Por demostrar que $k(G)$ es cofinable, es decir, que existe un automorfismo Ψ de $k(G)$ tal que $(Q, \Psi(Q)) \notin E(k(G))$ para cada $Q \in V(k(G))$.

Observamos en primer lugar que $\varphi : G \rightarrow G$ manda clanes en clanes, (véase las gráficas 5.2, 5.3), de modo que φ induce de manera natural un automorfismo $\Psi : k(G) \rightarrow k(G)$

definido por $\Psi(Q) = \{\varphi(q) \mid q \in Q\}$.

Afirmamos que Ψ es la coafinación buscada.

Supongamos que Ψ no fuera una coafinación.

Sea $Q \in V(k(G))$ tal que $\Psi(Q) \cap Q \neq \emptyset$ y sea $x \in \Psi(Q) \cap Q$ tenemos $\Psi(Q) = \{\varphi(x) \mid x \in Q\}$

entonces que x y $\varphi(x) \in \Psi(Q) \in V(k(G))$, es decir $\Psi(Q)$ es un clan de G .

luego $(x, \varphi(x)) \in E(G)$ que contradice el hecho que φ es una coafinación de G .

Por lo tanto $k(G)$ es cofinable.

■

El siguiente teorema nos dice que si un orden parcial finito $\mathbf{P}$ tiene un endomorfismo que no tiene punto fijo, entonces tenemos que el homomorfismo f es una retracción de la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$ a la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$, y existe un homomorfismo g de la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$ a la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$ tal que $f \circ g$ es la identidad de la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$. El retracto de la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$ es coafinable.

Es importante mencionar que al trabajar con la gráfica de comparabilidad de un orden parcial finito $\mathbf{P}$, para nosotros será lo mismo que trabajar con $\mathbf{P}$. Sólo cuando sea necesario aclarar diferenciaremos entre gráfica de comparabilidad y un orden parcial finito.

Teorema 5.8 [6] Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial finito que es libre de puntos fijos, (no tiene la propiedad del punto fijo). Entonces la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$ tiene un retracts coafinable.

Demostración:

Como $\mathbf{P}$ es un orden parcial finito libre de puntos fijos, existe un endomorfismo que no tiene punto fijo, lo denotaremos $\Psi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$.

Llamamos R_1 a la imagen de $\mathbf{P}$ bajo Ψ .

$$\Psi(\mathbf{P}) = R_1, \text{ tenemos } R_1 \subseteq \mathbf{P}$$

$$\Psi(R_1) = R_2$$

$$R_2 = \Psi(R_1) \subseteq \Psi(\mathbf{P}) = R_1, \text{ por lo tanto } R_2 \subseteq R_1 \subseteq \mathbf{P}$$

$$\Psi(R_2) = R_3$$

$$R_3 = \Psi(R_2) \subseteq \Psi(R_1) = R_2, \text{ por lo tanto } R_3 \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq \mathbf{P}$$

$$\text{Así sucesivamente hasta llegar a que } \Psi(R_{n-1}) = R_n = R_{n-1} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = R_3 = R_n = R_{n-1} \subseteq R_{n-2} \subseteq \dots \subseteq R_3 \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$$

Ya que $\mathbf{P}$ es un orden parcial finito tenemos que la cardinalidad de $\mathbf{R}$ es finita. Cuando la cardinalidad de R_n es igual a 1, Ψ tendría un punto fijo, por lo tanto se concluye que la cardinalidad de $R_n = \mathbf{R}$ es mayor que 1.

Por demostrar que $\mathbf{R}$ es retracts de $\mathbf{P}$, o sea que existe un homomorfismo $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}$ y existe un homomorfismo $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}$, tal que $f \circ g$ es la identidad en $\mathbf{R}$.

Tenemos $\Psi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, sabemos que $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ entonces $\Psi|_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, es la restricción de Ψ a $\mathbf{R}$, donde $\Psi|_{\mathbf{R}}(R_n) = \Psi(R_n)$ para toda $R_n \in \mathbf{R}$.

Observamos que Ψ es un automorfismo de $\mathbf{R}$, de orden digamos α , es decir α es el número de veces que se tiene que aplicar Ψ para que sea la identidad en $\mathbf{R}$.

$$\Psi^\alpha|_{\mathbf{R}} = Id_{\mathbf{R}}.$$

Sea $\beta \equiv 1 \pmod{\alpha}$ que satisfaga $\beta \geq n$.

Tomando $f = \Psi^\beta : P \rightarrow R$, como $R \subseteq P$ entonces $\Psi^\beta|_R : R \rightarrow R$, es la restricción de Ψ^β a R .

observamos que:

$$1) f|_R = \Psi^\beta|_R = \Psi|_R$$

$$\Psi^\beta|_R = \Psi^{\alpha t+1}|_R \text{ para } t \text{ entero.}$$

$$\Psi^{\alpha t+1}|_R = (\Psi^\alpha)^t|_R \circ \Psi|_R = (Id_R)^t|_R \circ \Psi|_R = Id_R \circ \Psi|_R = \Psi|_R$$

$$2) f : P \rightarrow R \text{ no tiene puntos fijos.}$$

Ya que $f = \Psi^\beta : P \rightarrow R$, si f tuviera puntos fijos, Ψ los tendría.

$$3) f|_R : R \rightarrow R \text{ es un homomorfismo biyectivo.}$$

Como $f|_R : R \rightarrow R$ es biyectiva tenemos un homomorfismo $g : R \rightarrow R$ tal que $f|_R \circ g = Id_R$. Usaremos el mismo símbolo g para el homomorfismo $g : R \rightarrow P$ que usa la misma regla de correspondencia que la g anterior.

En particular, tenemos la imagen de g es $R \subseteq P$ y también para $f = \Psi^\beta : P \rightarrow R$ y $g : R \rightarrow P$ tenemos que $f \circ g = Id_R$. Luego f es una retracción de ordenes parciales de P en R .

Es claro que f y g también son homomorfismos de gráficas de las gráficas de comparabilidad de P y R . Luego, la gráfica de comparabilidad de R es un retracto de la gráfica de comparabilidad de P .

Hasta aquí hemos probado que la gráfica de comparabilidad de P tiene un retracto, falta demostrar que este retracto es coafinable.

Es decir que $g : R \rightarrow R$ es una coafinación (de la gráfica de comparabilidad de R).

Supongamos que g no fuera una coafinación tendríamos que existe $x \in R$ que satisface una de tres condiciones:

- 1) $x = g(x)$
- 2) $x < g(x)$
- 3) $g(x) < x$

En términos de la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{R}$:

1) $x = g(x)$ significa $\cdot \text{---} x = g(x)$

2) $x < g(x)$ significa $\cdot \text{---} \cdot$
 $x < g(x)$

3) $g(x) < x$ significa $\cdot \text{---} \cdot$
 $g(x) < x$

Ahora en términos de orden parcial.

La condición (1) no se puede cumplir puesto que entonces $g : R \rightarrow R$ tendría puntos fijos y también los tendrían $f : R \rightarrow R$ y $f : P \rightarrow R$, lo que es una contradicción.

Las condiciones (2) y (3) no se pueden cumplir puesto que entonces los conjuntos $\{y \mid y < x\}$ y $\{y \mid y < g(x)\}$ tendría cardinalidad diferente y g sería una biyección entre ellas.

■

Con las definiciones y resultados anteriores ya estamos listos para presentar el resultado principal de este capítulo.

5.2 Teorema de punto fijo

El siguiente teorema del punto fijo de Simone Hazan y Victor Neumann Lara [6], es un resultado muy interesante, ya que la teoría de clanes es utilizada para probar un resultado en otra área de las Matemáticas. El resultado dice que un orden parcial finito tiene la propiedad de punto fijo si la sucesión de gráficas iteradas de clanes de su gráfica de comparabilidad es k -nula.

Teorema 5.9 [6] *Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial finito y supongamos que $\mathbf{P}$ es k -nula. Entonces $\mathbf{P}$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración:

Supongamos que $\mathbf{P}$ no tiene la propiedad de punto fijo.

Entonces por el Teorema 5.8, hay un retracto $\mathbf{R}$ de $\mathbf{P}$, cuya gráfica de comparabilidad es cofinable.

Por la Proposición 5.7, como la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{R}$ es cofinable se tiene que $k(\mathbf{R})$ es cofinable.

Por la proposición 5.6, como $\mathbf{R}$ es retracto de $\mathbf{P}$, entonces $k(\mathbf{R})$ es un retracto cofinable de $k(\mathbf{P})$.

Repitiendo estos argumentos con $k(\mathbf{P})$, podemos ver que $k^n(\mathbf{P})$ tiene un retracto cofinable para cada $n \geq 1$.

En particular esto implica que $k^n(\mathbf{P})$ tiene al menos dos elementos.

Por lo tanto $\mathbf{P}$ tiene la propiedad de punto fijo.

■

Este Teorema proporciona una condición suficiente para un orden finito que cumple la propiedad de punto fijo, en términos de su gráfica de comparabilidad.

De esta manera terminamos este capítulo, para dar paso al siguiente, en donde se dará un ejemplo de teorema de punto fijo con la ayuda de los resultados del capítulo 4.

Capítulo 6

Una aplicación del teorema de punto fijo y de los desmantelamientos

En este capítulo presentaremos un ejemplo del teorema de Hazan-Neumann-Lara [6], es decir daremos un orden parcial finito y verificaremos que la sucesión de las gráficas iteradas de clanes de su gráfica de comparabilidad es k -nula, entonces decimos que el orden parcial tiene la propiedad de punto fijo; para verificar que la gráfica de comparabilidad es k -nula haremos uso de los teoremas de desmantelamientos [2, 3].

6.1 Diagrama de Hasse

Para ejemplificar el resultado de Hazan y Neumann-Lara [6], tenemos que trabajar con un orden parcial finito y probar que su gráfica de comparabilidad es k -nula. Para mostrarlo de una manera sencilla se escogió trabajar con lo se llama **diagrama de Hasse**.

Recordemos que un orden parcial en un conjunto A es una relación R en A , si cumple con ser una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica. Un conjunto A y una relación R de orden parcial en A constituyen un conjunto parcialmente ordenado.

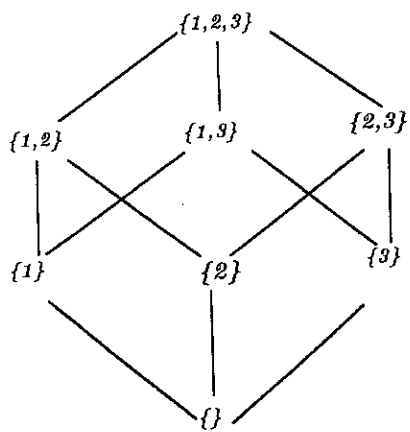
Si R es un orden parcial sobre un conjunto finito A , construimos su **diagrama de Hasse** para R sobre A trazando un segmento de x hacia y , si $x, y \in A$, son tales que xRy y si no existe otro elemento $z \in A$ tal que xRz y zRy (o sea no hay nada “en medio” de x y y).

A continuación se muestran los diagramas de Hasse de cuatro conjuntos parciales ordenados.

- a) Si $X = \{1, 2, 3\}$, $A = 2^X$ y el orden parcial es $(2^X, \subseteq)$
- b) Una relación R de orden parcial en A definido como “divide exactamente” donde $A = \{3, 9, 18, 36\}$.
- c) Una relación R de orden parcial en A definido como “divide exactamente” donde $A = \{7, 11, 17, 23\}$.
- d) Una relación R de orden parcial en A definido como “divide exactamente” donde $A = \{2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28\}$.

Observemos que un diagrama de Hasse puede tener todos los vértices aislados (c), también puede tener dos (o más) componentes conexas, (d). Véase figura 6.1.

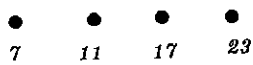
También veámos que en la figura 6.1 en donde se muestra el diagrama de Hasse del inciso (a) se omiten algunas aristas, (ver figura 5.1), esto se debe a que es una relación R de orden parcial en A , por ejemplo, basta con tener las aristas $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}\}$ y $\{\{1, 2\}, \{1\}\}$ para garantizar la existencia de la arista $\{\{1, 2, 3\}, \{1\}\}$.



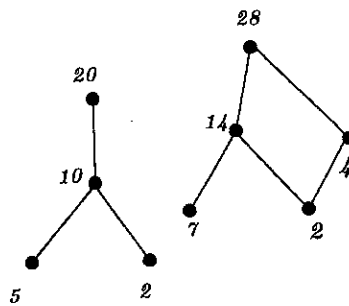
a)



b)



c)



d)

Figura 6.1: Diagramas de Hasse

6.2 Gráfica de comparabilidad de un orden parcial finito.

En esta sección trabajamos con la gráfica de comparabilidad de un orden parcial para conocer el k - comportamiento de el orden parcial.

Elegimos el diagrama "P1" de Rutkowski [11], que aparece en la figura 6.2, que representa al orden parcial finito dado por el conjunto parcialmente ordenado (A, R) , donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y R es la relación que esta dada por, "si puedo ir de x a y , sin bajar, entonces x es menor que y ".

Se escogió el diagrama "P1" de Rutkowski, es el único orden parcial que conocemos que podemos afirmar que tiene la propiedad de punto fijo haciendo uso de este teorema.

Para construir la grafica de comparabilidad de este orden parcial tomamos a los elementos de A como los vértices de nuestra gráfica G :

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Para determinar el conjunto de aristas de G , colocamos una arista entre cada dos elementos del conjunto A que estan relacionado.

$$E(G) = \{[1, 4], [1, 5], [1, 7], [1, 8], [1, 9], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [2, 7], [2, 8], [2, 9], [3, 5], [3, 6], [3, 7], [3, 8], [3, 9], [4, 7], [4, 8], [5, 7], [5, 9], [6, 8], [6, 9]\}$$

La gráfica de comparabilidad del orden parcial se muestra en la figura 6.3.

Por medio de los teoremas de desmantelamiento [2, 3], que se estudiaron en el capítulo 4, verificaremos que esta gráfica sea k - nula.

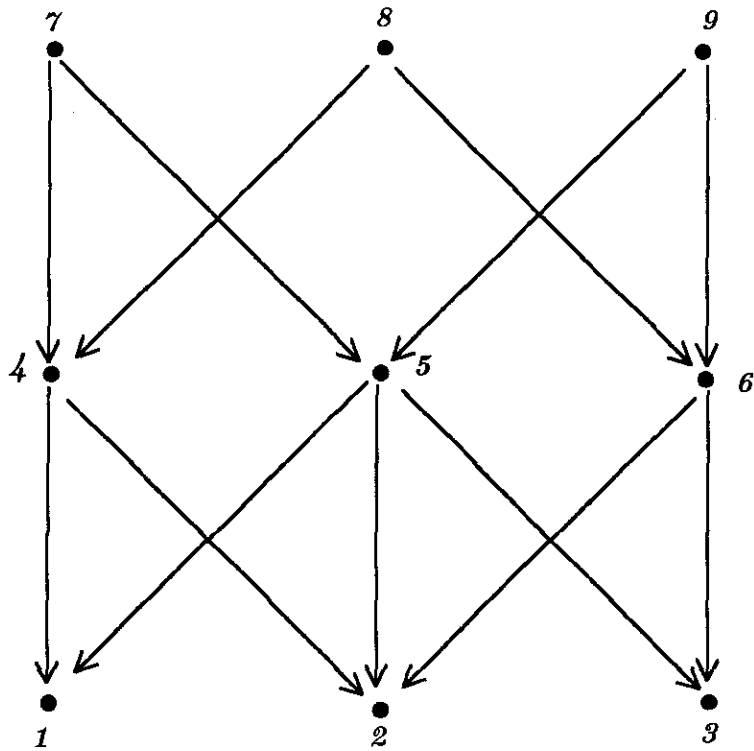


Figura 6.2: Diagrama P1 de Rutkowski.

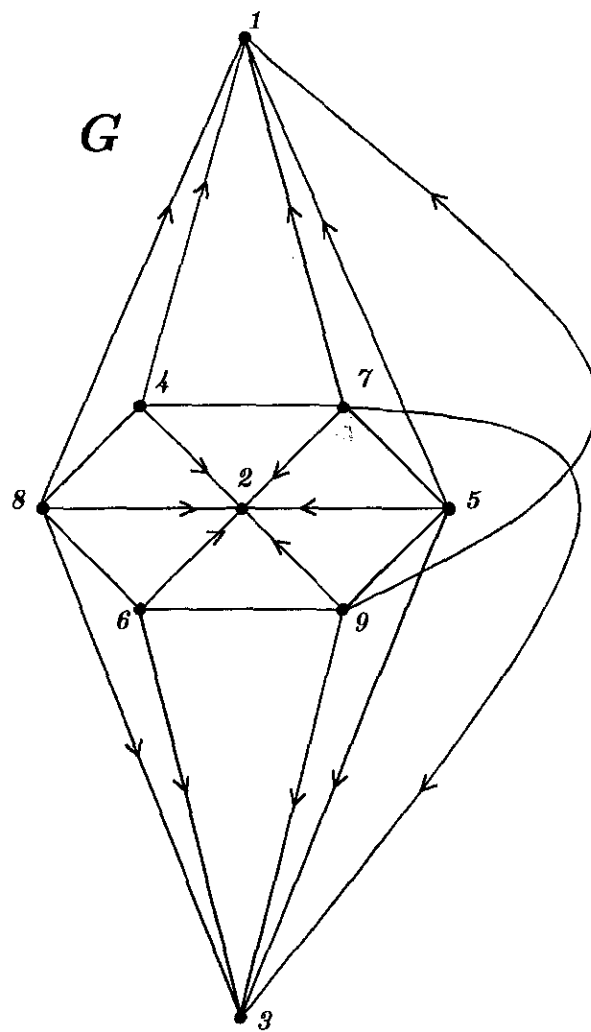


Figura 6.3: Gráfica de comparabilidad del orden parcial del diagrama P1

6.2. GRÁFICA DE COMPARABILIDAD DE UN ORDEN PARCIAL FINITO.117

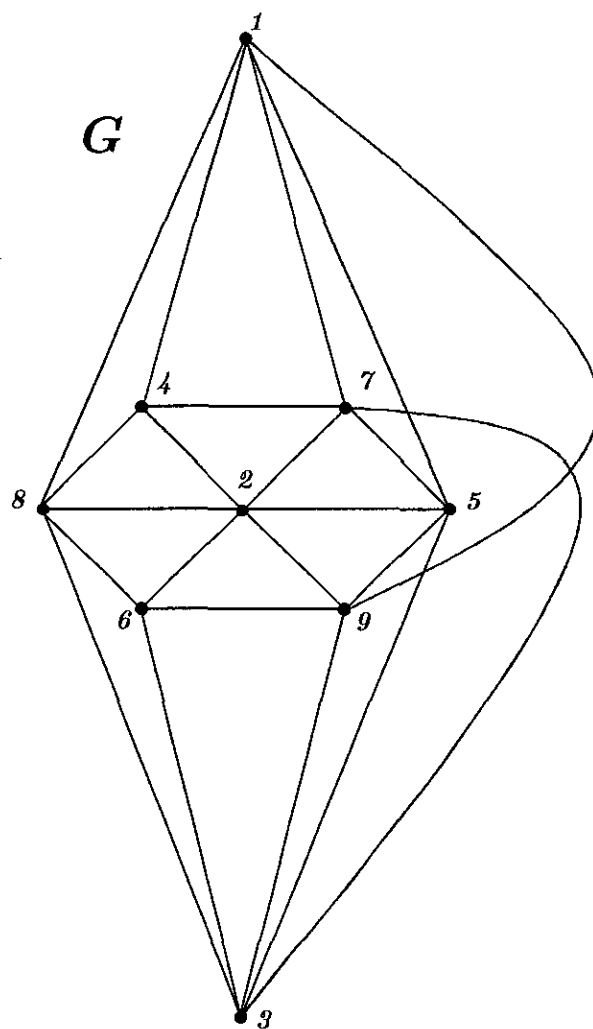


Figura 6.4: Gráfica de comparabilidad del diagrama P1 de Rutkowski

Para verificar que esta gráfica de comparabilidad, que le llamamos G , del orden parcial sea k -nula, primeramente calculamos la vecindad cerrada de cada uno de los vértices de la gráfica G , ver figura 6.4, para saber si tiene vértices dominados y con ello conocer si es desmantelable.

$$N[1] = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$N[2] = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$N[3] = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$N[4] = \{1, 2, 4, 7, 8\}$$

$$N[5] = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$N[6] = \{2, 3, 6, 8, 9\}$$

$$N[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$N[8] = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$N[9] = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$$

Tenemos que ninguno de los vértices está dominado, por lo que la gráfica de comparabilidad no se desmantela.

Nos queda entonces construir la gráfica de clanes de la gráfica de comparabilidad del orden parcial G , sus clanes son:

$$A = \{1, 4, 8\}$$

$$B = \{1, 4, 7\}$$

$$C = \{1, 5, 7\}$$

$$D = \{1, 5, 9\}$$

$$E = \{2, 4, 7\}$$

$$F = \{2, 4, 8\}$$

$$G = \{2, 5, 7\}$$

$$H = \{2, 5, 9\}$$

$$I = \{2, 6, 8\}$$

$$J = \{2, 6, 9\}$$

$$K = \{3, 5, 7\}$$

$$L = \{3, 5, 9\}$$

$$M = \{3, 6, 8\}$$

$$N = \{3, 6, 9\}$$

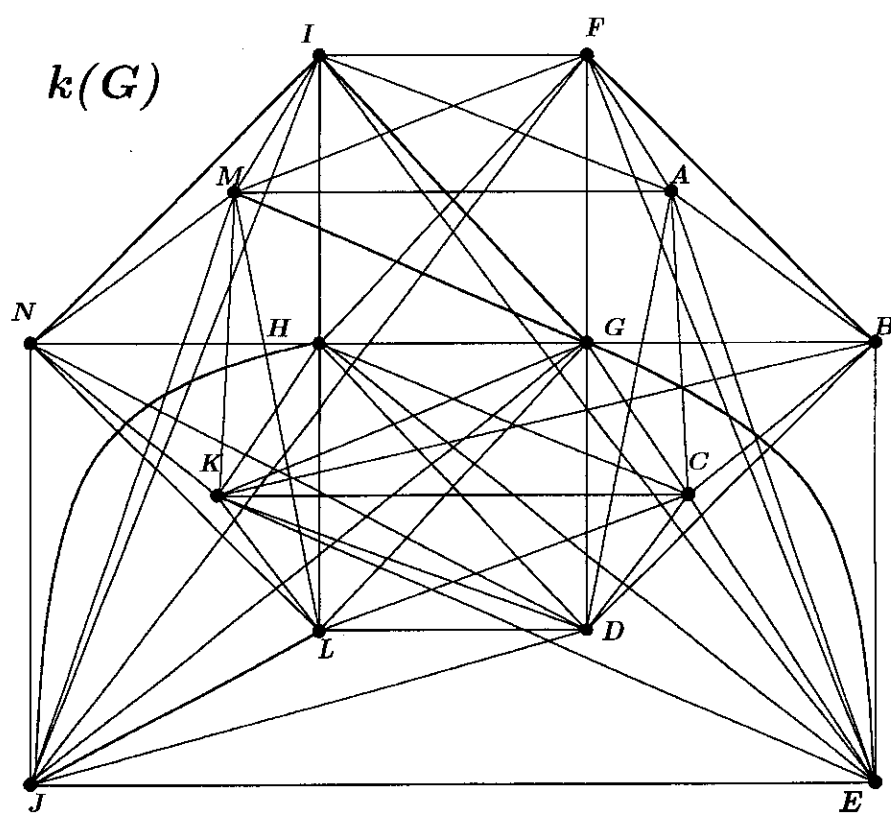


Figura 6.5: Gráfica de clanes de la grafica de comparabilidad G .

Calculamos la vecindad cerrada de cada uno de los vértices de $k(G)$, ver 6.5, y obtenemos que no tiene puntos dominados, por que no se desmantela.

$$\begin{aligned}
 N[A] &= \{A, B, C, D, F, I, M\} \\
 N[B] &= \{A, B, C, D, E, F, G, K\} \\
 N[C] &= \{A, B, C, D, E, G, H, K, L\} \\
 N[D] &= \{A, B, C, D, G, H, J, L, N\} \\
 N[E] &= \{A, B, C, E, F, G, H, I, J, K\} \\
 N[F] &= \{A, B, E, F, G, H, I, J, M\} \\
 N[G] &= \{B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\} \\
 N[H] &= \{C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, N\} \\
 N[I] &= \{A, E, F, G, H, I, J, M, N\} \\
 N[J] &= \{D, E, F, G, H, I, J, L, M, N\} \\
 N[K] &= \{B, C, D, E, G, H, K, L, M, N\} \\
 N[L] &= \{C, D, G, H, J, K, L, M, N\} \\
 N[M] &= \{A, F, I, J, K, L, M, N\} \\
 N[N] &= \{D, H, I, J, K, L, M, N\}
 \end{aligned}$$

Ahora calculemos los clanes de $k(G)$:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \{A, B, C, D\} \\
 v_2 &= \{E, F, G, H, I, J\} \\
 v_3 &= \{K, L, M, N\} \\
 v_4 &= \{A, B, E, F\} \\
 v_5 &= \{C, D, G, H, K, L\} \\
 v_6 &= \{I, J, M, N\} \\
 v_7 &= \{B, C, E, G, K\} \\
 v_8 &= \{A, F, I, M\} \\
 v_9 &= \{D, H, J, L, N\} \\
 v_{10} &= \{B, C, D, G, K\} \\
 v_{11} &= \{C, E, G, H, K\} \\
 v_{12} &= \{D, G, H, J, L\} \\
 v_{13} &= \{D, H, K, L, N\} \\
 v_{14} &= \{A, B, C, E\} \\
 v_{15} &= \{A, E, F, I\} \\
 v_{16} &= \{B, E, F, G\} \\
 v_{17} &= \{F, I, J, M\} \\
 v_{18} &= \{H, I, J, N\} \\
 v_{19} &= \{J, L, M, N\}
 \end{aligned}$$

Veamos si la gráfica $k^2(G)$ tiene vértices dominados:

$$\begin{aligned}
N[v_1] &= \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\} \\
N[v_2] &= \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_3] &= \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_4] &= \{v_1, v_2, v_4, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\} \\
N[v_5] &= \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_6] &= \{v_2, v_3, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}, v_{15}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_7] &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\} \\
N[v_8] &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_9] &= \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{13}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_{10}] &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}\} \\
N[v_{11}] &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{18}\} \\
N[v_{12}] &= \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_{13}] &= \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_{14}] &= \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\} \\
N[v_{15}] &= \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_7, v_8, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{19}\} \\
N[v_{16}] &= \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\} \\
N[v_{17}] &= \{v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_{18}] &= \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{15}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\} \\
N[v_{19}] &= \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}
\end{aligned}$$

La gráfica $k^2(G)$ sí tiene vértices dominados y son:

$$\begin{aligned}
N[v_4] &\subseteq N[v_{16}] \\
N[v_6] &\subseteq N[v_{11}] \\
N[v_7] &\subseteq N[v_{11}] \\
N[v_{10}] &\subseteq N[v_{11}] \\
N[v_{13}] &\subseteq N[v_{12}]
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $k^2(G) \xrightarrow{\#} G_1$, donde G_1 es la gráfica cuyo conjunto de vértices es:

$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

es decir, la gráfica de $k^2(G)$ sin los vértices dominados.

6.2. GRÁFICA DE COMPARABILIDAD DE UN ORDEN PARCIAL FINITO.123

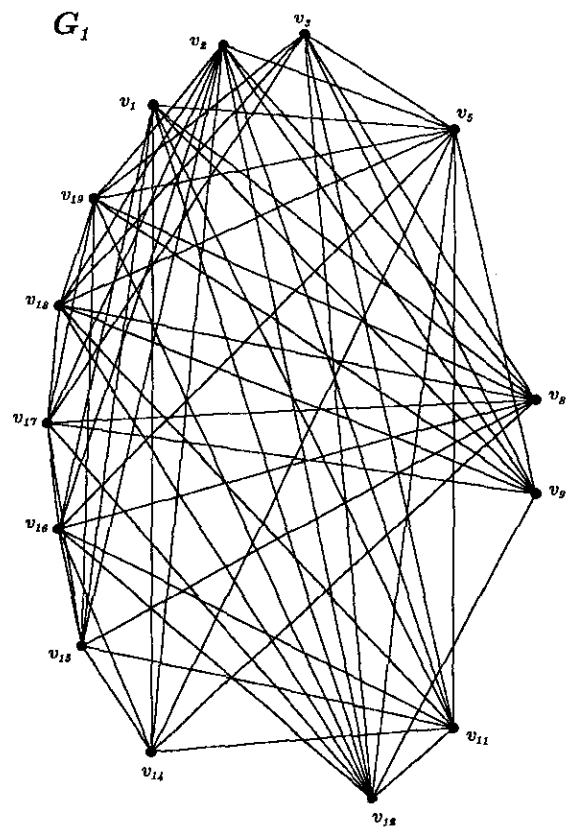


Figura 6.7: G_1 es la gráfica a la que se desmantela $k^2(G)$. En símbolo $k^2(G) \xrightarrow{\#} G_1$

El paso siguiente es verificar si G_1 tiene vértices dominados. Observamos la vecindad cerrada de los vértices.

$$N[v_1] = \{v_1, v_5, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$$

$$N[v_2] = \{v_2, v_5, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_3] = \{v_3, v_5, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_5] = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_8] = \{v_1, v_2, v_3, v_8, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_9] = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_9, v_{12}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_{11}] = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{18}\}$$

$$N[v_{12}] = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_{14}] = \{v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$$

$$N[v_{15}] = \{v_1, v_2, v_8, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{19}\}$$

$$N[v_{16}] = \{v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$$

$$N[v_{17}] = \{v_2, v_3, v_8, v_9, v_{12}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_{18}] = \{v_2, v_3, v_5, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

$$N[v_{19}] = \{v_2, v_3, v_5, v_8, v_9, v_{12}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

Comprobamos que v_3, v_9, v_{14} y v_{19} están dominados.

$$N[v_3] \subseteq N[v_{18}]$$

$$N[v_9] \subseteq N[v_{12}]$$

$$N[v_{14}] \subseteq N[v_{16}]$$

$$N[v_{19}] \subseteq N[v_{18}]$$

Entonces $G_1 \xrightarrow{\#} G_2$, donde G_2 es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}\}$.

6.2. GRÁFICA DE COMPARABILIDAD DE UN ORDEN PARCIAL FINITO.125

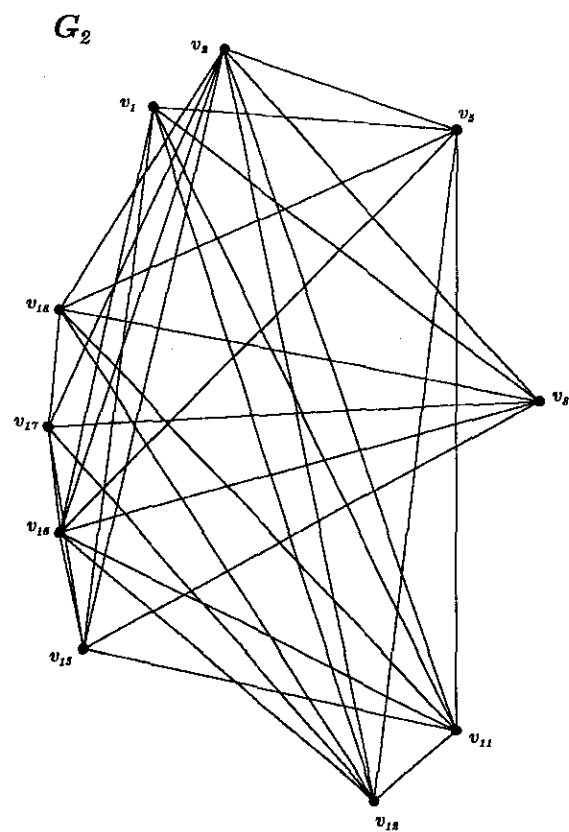


Figura 6.8: G_2 es la gráfica a la que se desmantela G_1 . En símbolo $G_1 \xrightarrow{\#} G_2$

Nuevamente verificamos los vértices dominados, pero ahora de G_2 .

$$N[v_1] = \{v_1, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{16}\}$$

$$N[v_2] = \{v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}\}$$

$$N[v_5] = \{v_1, v_2, v_5, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{18}\}$$

$$N[v_8] = \{v_1, v_2, v_8, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}\}$$

$$N[v_{11}] = \{v_1, v_2, v_5, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{18}\}$$

$$N[v_{12}] = \{v_1, v_2, v_5, v_{11}, v_{12}, v_{16}, v_{17}, v_{18}\}$$

$$N[v_{15}] = \{v_1, v_2, v_8, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$$

$$N[v_{16}] = \{v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$$

$$N[v_{17}] = \{v_2, v_8, v_{12}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}\}$$

$$N[v_{18}] = \{v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{17}, v_{18}\}$$

Obteniendo que los vértices dominados son:

$$N[v_1] \subseteq N[v_{16}]$$

$$N[v_5] \subseteq N[v_{11}]$$

$$N[v_{17}] \subseteq N[v_2]$$

$$N[v_{18}] \subseteq N[v_2]$$

Entonces $G_2 \xrightarrow{\#} G_3$, donde G_3 es la gráfica inducida cuyo conjunto de vértices es $V(G_3) = \{v_2, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{16}\}$.

Verificamos los vértices dominados pero ahora de G_3 .

$$N[v_2] = \{v_2, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$$

$$N[v_8] = \{v_2, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$$

$$N[v_{11}] = \{v_2, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$$

$$N[v_{12}] = \{v_2, v_{11}, v_{12}, v_{16}\}$$

$$N[v_{15}] = \{v_2, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$$

$$N[v_{16}] = \{v_2, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$$

Tenemos que los vértices dominados son:

$$N[v_8] \subseteq N[v_2]$$

$$N[v_{11}] \subseteq N[v_2]$$

$$N[v_{12}] \subseteq N[v_2]$$

$$N[v_{15}] \subseteq N[v_2]$$

$$N[v_{16}] \subseteq N[v_2]$$

Entonces $G_3 \xrightarrow{\#} K_1$, donde es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(K_1) = \{v_2\}$.

Como tenemos que: $k^2(G) \xrightarrow{\#} G_1 \xrightarrow{\#} G_2 \xrightarrow{\#} G_3 \xrightarrow{\#} K_1$, es decir, la segunda gráfica de clanes de la gráfica de comparabilidad del orden parcial finito, (ver 6.2), es k -nula, entonces por el teorema 5.9, afirmamos que este orden parcial finito tiene la propiedad del punto fijo.

Conclusiones

En este trabajo hemos dado una aplicación del Teorema de punto fijo [6], haciendo uso de los teoremas de desmantelamientos [2, 3]. Lo anterior se logró al trabajar con el diagrama “P1” de Rutkowski [11], ver figura 6.2, que representa un orden parcial finito.

Se deseaba dar más ejemplos de la aplicación de este teorema, avanzar más en este tema, para ello se analizó un diagrama similar al de la figura 6.2, pero con doce vértices, ver figura 6.11.

Primeramente construimos la gráfica de comparabilidad de orden parcial dado por el conjunto parcialmente ordenado (B, R) , donde R es la relación que esta dada por, “si puedo ir de x a y , sin bajar, entonces x es menor que y ” y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Para construir la gráfica de comparabilidad de este orden parcial tomamos a los elementos de A como los vértices de nuestra gráfica G :

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Para determinar el conjunto de aristas de G , colocamos una arista entre cada dos elementos del conjunto A que estan relacionado.

$$\begin{aligned} E(G) = \{ & [1, 4], [1, 5], [1, 7], [1, 8], [1, 9], [1, 10], [1, 11], [1, 12], \\ & [2, 4], [2, 6], [2, 7], [2, 8], [2, 9], [2, 10], [2, 11], [2, 112], \\ & [3, 5], [3, 6], [3, 7], [3, 8], [3, 9], [3, 10], [3, 11], [3, 12], \\ & [4, 7], [4, 8], [4, 10], [4, 11], [4, 12], [5, 7], [5, 8], [5, 9], \\ & [5, 10], [5, 11], [5, 12], [6, 8], [6, 9], [6, 10], [6, 11], \\ & [6, 12], [7, 10], [7, 11], [8, 10], [8, 12]\} \end{aligned}$$

La gráfica de comparabilidad del orden parcial se muestra en la figura 6.12.

Calculamos la vecindad cerrada de cada uno de sus vértices y vemos que no tiene puntos dominados.

$$N[1] = \{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$N[2] = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$N[3] = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$N[4] = \{1, 2, 4, 7, 8, 10, 11, 12\}$$

$$N[5] = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$N[6] = \{2, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$N[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11\}$$

$$N[8] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

$$N[9] = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 12\}$$

$$N[10] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

$$N[11] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$$

$$N[12] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$$

Por lo cual, tenemos que obtener la gráfica de clanes de la gráfica de comparabilidad del orden parcial G , que tiene 28 clanes y son:

$$a = \{1, 4, 7, 10\}$$

$$b = \{1, 4, 7, 11\}$$

$$c = \{1, 4, 8, 10\}$$

$$d = \{1, 4, 8, 12\}$$

$$e = \{1, 5, 7, 10\}$$

$$f = \{1, 5, 7, 11\}$$

$$g = \{1, 5, 8, 10\}$$

$$h = \{1, 5, 8, 12\}$$

$$i = \{1, 5, 9, 11\}$$

$$j = \{1, 5, 9, 12\}$$

$$k = \{2, 4, 7, 10\}$$

$$l = \{2, 4, 7, 11\}$$

$$ll = \{2, 4, 8, 10\}$$

$$m = \{2, 4, 8, 12\}$$

$$n = \{2, 6, 8, 10\}$$

$$\tilde{n} = \{2, 6, 8, 12\}$$

6.2. GRÁFICA DE COMPARABILIDAD DE UN ORDEN PARCIAL FINITO.131

$$o = \{2, 6, 9, 11\}$$

$$p = \{2, 6, 9, 12\}$$

$$q = \{3, 5, 7, 10\}$$

$$r = \{3, 5, 7, 11\}$$

$$s = \{3, 5, 8, 10\}$$

$$t = \{3, 5, 8, 12\}$$

$$u = \{3, 5, 9, 11\}$$

$$v = \{3, 5, 9, 12\}$$

$$w = \{3, 6, 8, 10\}$$

$$x = \{3, 6, 8, 12\}$$

$$y = \{3, 6, 9, 11\}$$

$$z = \{3, 6, 9, 12\}$$

Calculamos la vecindad cerrada de cada uno de los vértices de $k(G)$ y obtenemos que no tiene vértices dominados:

$$N[a] = \{a, \tilde{n}, o, p, t, u, v, x, y, z\}$$

$$N[b] = \{b, n, \tilde{n}, p, s, t, v, w, x, z\}$$

$$N[c] = \{c, o, p, r, u, v, y, z\}$$

$$N[d] = \{d, o, q, r, u, y\}$$

$$N[e] = \{e, m, \tilde{n}, o, p, x, y, z\}$$

$$N[f] = \{f, ll, m, n, \tilde{n}, p, w, x, z\}$$

$$N[g] = \{g, l, o, p, y, z\}$$

$$N[h] = \{h, k, l, o, y\}$$

$$N[i] = \{i, k, ll, m, n, \tilde{n}, w, x\}$$

$$N[j] = \{j, k, l, ll, n, w\}$$

$$N[k] = \{h, k, i, j, t, u, v, x, y, z\}$$

$$N[l] = \{g, h, j, l, s, t, v, w, x, z\}$$

$$N[ll] = \{f, i, j, ll, r, u, v, y, z\}$$

$$N[m] = \{e, f, i, m, q, r, u, y\}$$

$$N[n] = \{b, f, i, j, n, r, u, v\}$$

$$N[\tilde{n}] = \{a, b, e, f, i, \tilde{n}, q, r, u, y\}$$

$$N[o] = \{a, c, d, e, g, h, o, q, s, t, v\}$$

$$N[p] = \{a, b, c, e, f, g, i, p, q, r, s\}$$

$$N[q] = \{d, m, \tilde{n}, o, q, p\}$$

$$N[r] = \{c, d, ll, m, n, \tilde{n}, p, r\}$$

$$N[s] = \{b, l, o, p, s\}$$

$$N[t] = \{a, b, k, l, o, t\}$$

$$N[u] = \{a, c, d, k, ll, m, n, \tilde{n}, u\}$$

$$N[v] = \{a, b, c, k, l, ll, n, v\}$$

$$N[w] = \{b, f, i, j, l, w\}$$

$$N[x] = \{a, b, e, f, i, k, l, x\}$$

$$N[y] = \{a, c, d, e, g, h, ll, m, y\}$$

$$N[z] = \{a, b, c, e, f, g, k, l, ll, z\}$$

En esta ocasión no fue posible aplicar el criterio de desmantelamiento, ya que la gráfica de comparabilidad de este orden parial y la primera gráfica de clanes de la gráfica de comparabilidad no tiene vértices dominados.

Para calcular los clanes de $k(G)$ se utilizó un programa que esta diseñado en GAP, por el Dr. Miguel Angel Pizaña [10], el cual calcula los clanes de una gráfica y va verificando que vértices están dominados y una vez que encuentra vértices dominados los elimina y calcula los clanes de la nueva gráfica y así sucesivamente.

Con el programa obtuvimos que $k(G)$ tiene 120 clanes y $k^2(G)$ tiene 10514 clanes y hasta ahí llego la capacidad de la computadora para calcular los clanes, por ello no se pudo determinar el k -comportamiento de la gráfica de comparabilidad de este orden parcial 6.11.

Este proceso se realizó con otros diagramas similares al diagrama "P1" de Rutkowski [11], aumentando el número de vértices, (ver figuras 6.11, 6.13 y 6.14). Se deseaba encontrar una familia importante de gráficas de comparabilidad de órdenes parciales finitos que ejemplificaran el Teorema del punto fijo [6], lo cual no fue con las técnicas que utilizamos, los teoremas de desmantelamientos [2, 3] y el programa de computadoras para calcular los clanes [10].

Determinar el k -comportamiento de una gráfica es un problema difícil, aun utilizando un programa de computadoras. Cabe mencionar que el Dr. Pizaña en su tesis doctoral deja como problema abierto el determinar si es computable el k -comportamiento, también se pregunta si es computable la k -nulidad.

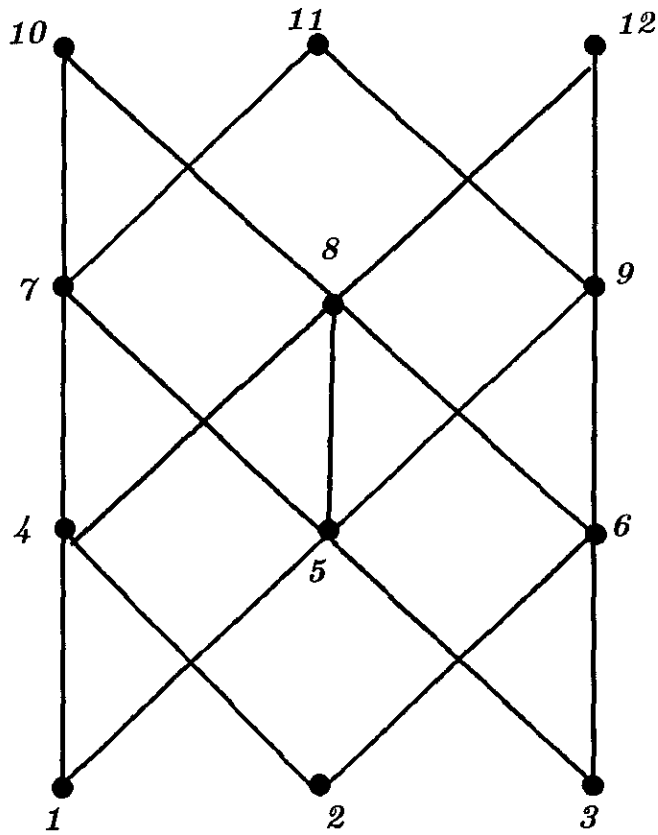


Figura 6.11: Diagrama con 12 vértices

Podemos concluir que sobre el tema del k - comportamiento, hay mucho por investigar, así como con el tema de clanes, el cual es uno de los conceptos más interesantes en Teoría de Gráficas, porque al parecer simplifica la gráfica, sin embargo, en ocasiones al calcular su gráfica iteradas de clanes es complicado predecir que va pasar.

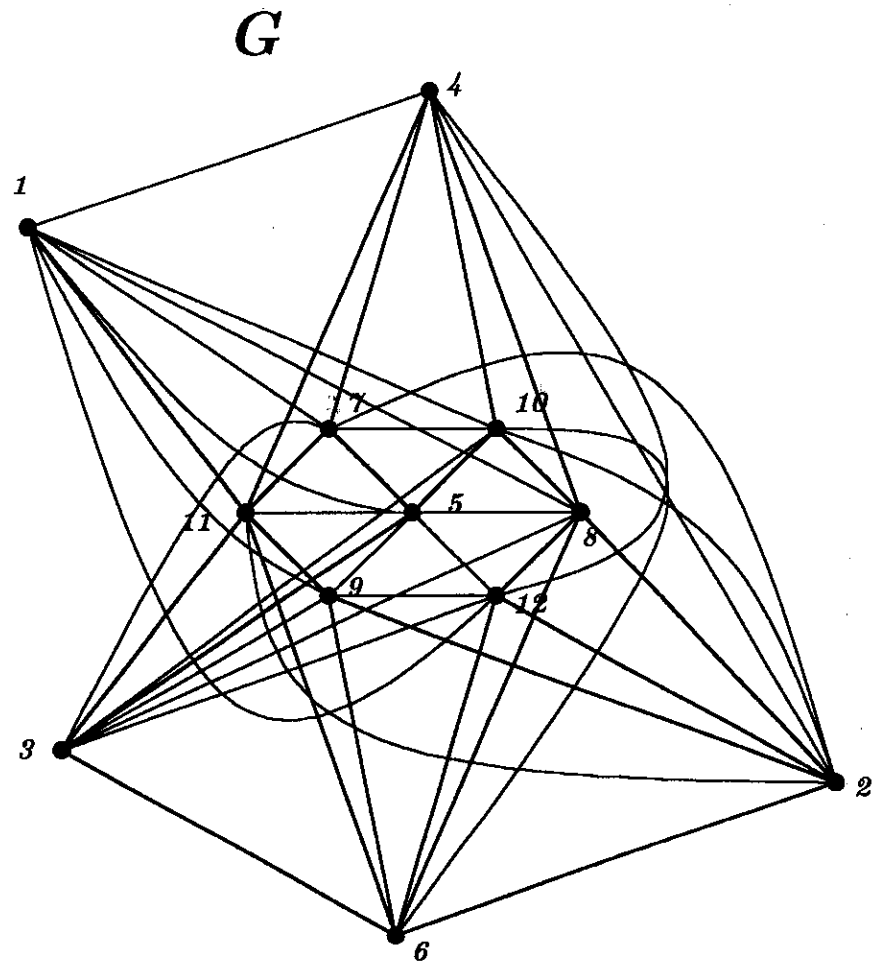


Figura 6.12: Gráfica de comparabilidad del orden parcial dado por el diagrama de 12 vértices

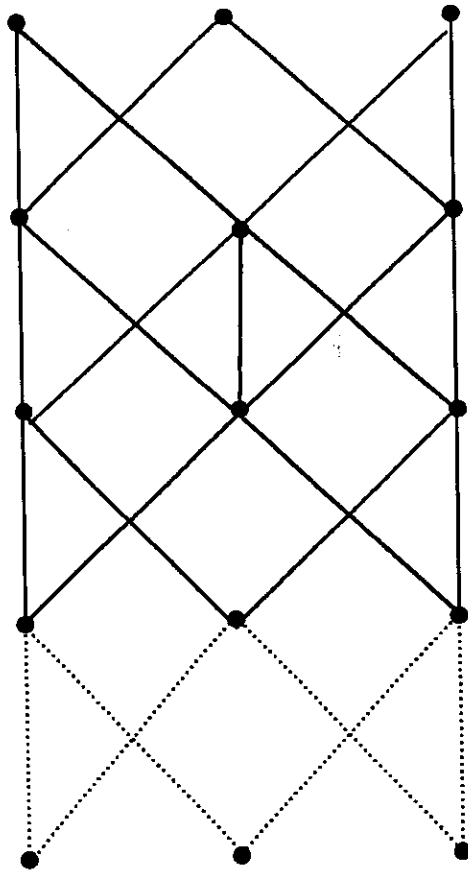


Figura 6.13: Diagrama P1, aumentado a $n - \text{vértices}$

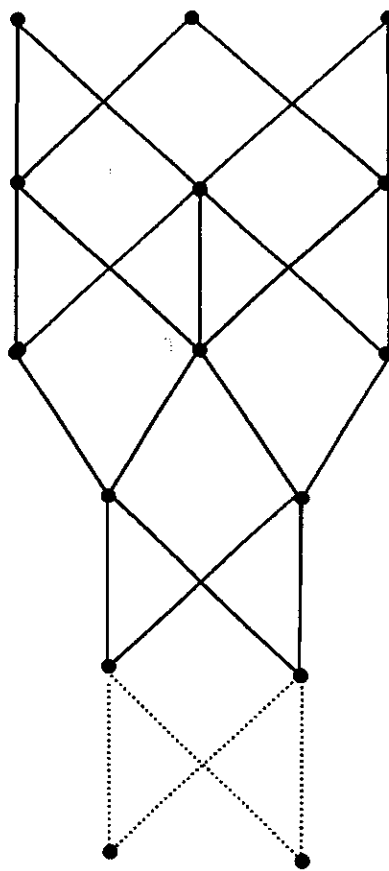


Figura 6.14:

Bibliografía

- [1] F.Escalante. Über iterierte *Clique – Graphen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **39** (1973) 59-68
- [2] M.E. Frías-Armenta. Tesis Doctoral: *Gráficas Iteradas de Clanes*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (2000).
- [3] M.E. Frías-Armenta, V. Neumann-Lara, M.A. Pizaña. *Dismantlings and iterated clique graphs*. Submitted.
- [4] R.C. Hamelink. *A partial characterization of clique graphs*. J. Combinatorial Theory **5** (1968) 192-197.
- [5] F. Harary. *Graph theory*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Melon Park, Calif.-London, 1969.
- [6] S. Hazan, V. Neumann-Lara. *Fixed points of posets and clique graphs*. Order **13** (1996) 219-225.
- [7] S.T. Hedetniemi and P.J. Slater. *Line Graphs of Triangleless Graphs and Iteradas Clique Graphs*. Springer Lecture. Notes in Mathematics 303 (1972) 159-147
- [8] V. Neumann-Lara. *On Clique-divergent graphs*. Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Paris 260 (1978), 313-315.
- [9] V. Neumann-Lara. *Clique divergent in graphs*. In Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978), pages 563-569. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [10] M.A. Pizaña. Tesis Doctoral: *Gráficas Iteradas de Clanes*. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Universidad Autónoma Metropolitana. México (2002).

- [11] A. Rutkowski. *The Fixed points property for small sets*. Kluwer Academic Publishers. Printed in The Netherlands. Orden 6. 1-14, (1989)
- [12] Ralph P. Grimald. *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison-Wesley Publishing Co. 1994.
- [13] R. Johnsonbaugh. *Matemáticas Discretas*. Cuarta Edición. Printice Hall. México 1999.
- [14] Seymour Lipschutz. *Teoría de Conjuntos y temas afines*. Serie Schaum. McGraw-Hill. 1970