

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Teoría de Renovación y Procesos de Renovación Markovianos



Presenta:

ISRAEL TARAZÓN ACUÑA

Director: Dr. Oscar Vega Amaya

Índice General

Introducción	vii
1 TEORÍA DE RENOVACIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Ecuación de Renovación	6
1.3 Un Teorema Límite	9
1.4 Lema de Wald	11
1.5 El Teorema Elemental de Renovación	12
1.6 Distribución de la Edad y del Exceso de Vida	18
1.7 Procesos de Renovación con Retardo	21
1.8 Procesos de Renovación con Ganancia	26
2 CADENAS DE MARKOV	33
2.1 Introducción	33
2.2 Función de Transición y Distribución Inicial	34
2.3 Tiempo para la Primera Visita	37
2.4 Clasificación de Estados	39
2.5 Cadenas Irreducibles	46
2.6 Distribuciones Estacionarias	48
2.7 Clasificación de las Cadenas de Markov	50
2.8 Existencia y Unicidad de las Distribuciones Estacionarias	55
2.9 Convergencia a la Distribución Estacionaria	57
2.10 Ecuación de Poisson	59
2.11 Martingalas	63
3 PROCESOS DE RENOVACIÓN MARKOVIANOS.	67
3.1 Introducción	67
3.2 Procesos Regulares	70
3.3 Ecuación de Poisson Semi-Markoviana	75

Agradecimientos.

Agradezco a mi director de tesis Dr. Oscar Vega Amaya por todas sus atenciones y sus buenos consejos, también agradezco al comité revisor de tesis, al Dr. F. Luque Vázquez, Dr. Agustín Brau Rojas por sus valiosas observaciones y sugerencias, y quiero agradecer especialmente al Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa por su invaluable ayuda a lo largo de toda la licenciatura y realización del trabajo de tesis.

A todos ellos Gracias.

También agradezco el apoyo del Conacyt bajo el proyecto 28309-E.

A todos y cada uno de mis familiares y amigos que me apoyaron durante mis estudios, les agradezco todas sus atenciones para conmigo, y comparto con ustedes este trabajo.

En especial a mis padres.¹

¹ Todos los hombres mueren, pero no todos viven en realidad.

Introducción

Los procesos estocásticos han tenido mucho auge en la época moderna, dada la gran cantidad de aplicaciones, en fenómenos de crecimiento, mecanismos de evolución genética, sistemas de ingeniería, estructuras económicas y en muchos otros campos.

Los procesos de conteo, como los procesos de Poisson y las cadenas de Markov, son ejemplos importantes de procesos estocásticos. Los primeros registran el número de repeticiones de algún evento de interés, con la característica de que los tiempos de ocurrencia entre dos eventos consecutivos son variables aleatorias (v.a) independientes e idénticamente distribuidas con una distribución común exponencial. La característica principal de las Cadenas de Markov es la propiedad de pérdida de memoria, que es que el pasado no influye en la evolución futura del sistema.

Una generalización a estos procesos, son los *procesos de renovación*, los cuales son procesos de conteo pero su función de distribución es arbitraria.

El objetivo del trabajo es estudiar los Procesos de Renovación Markovianos, los cuales mezclan la estructura probabilística de la teoría de Renovación y las Cadenas de Markov. Pondremos especial atención en el estudio de los costos promedio esperados.

El trabajo se estructura de la siguiente manera. En el Capítulo 1 estudiaremos La teoría de Renovación, donde trataremos la función de renovación, los procesos de retraso y los procesos de renovación con ganancia entre otros, el segundo capítulo, lo dedicaremos al estudio de las principales propiedades de las llamadas Cadenas de Markov.

En el tercer capítulo estudiaremos los Procesos de Renovación Markovianos y nuestro objetivo es el de estudiar los costos promedio por etapas a largo plazo y los costos promedio esperados.

Capítulo 1

TEORÍA DE RENOVACIÓN

1.1 Introducción

La teoría de renovación estudia una clase de procesos estocásticos conocidos como procesos de conteo, es decir, procesos que registran el número de repeticiones de cierto evento, con la característica de que los tiempos de ocurrencia entre dos eventos consecutivos son variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.

Denotemos por X_n al tiempo transcurrido entre la n -ésima y la $(n-1)$ -ésima ocurrencia del evento y supongamos que estas variables son no negativas, independientes e idénticamente distribuidas. Entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

es el *tiempo de espera* para la ocurrencia del n -ésimo evento. Por otra parte, la variable

$$N(t) = \sup \{n : S_n \leq t\} \quad \forall t > 0, \quad (1.2)$$

representa el número de repeticiones del evento en el intervalo $[0, t]$. Nos referiremos al proceso definido en (1.1) como el *proceso de renovación* y al proceso (1.2) como el *proceso de conteo*.

En particular, observe que si la distribución de las variables X_n , $n \in \mathbb{N}$, tiene distribución exponencial con parámetro λ , entonces $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson, es decir,

$$\Pr [N(t) = k] = \frac{1}{k!} \exp(-\lambda t) \quad \forall k \geq 0.$$

Denotaremos por F a la función de distribución común de las variables $\{X_n\}$, esto es,

$$F(x) = \Pr[X_n \leq x] \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y por μ al valor esperado, es decir,

$$\mu := EX_n = \int_0^\infty x dF(x).$$

En todos los desarrollos subsecuentes supondremos que

$$F(0) = \Pr[X_n = 0] = 0, \quad (1.3)$$

para evitar renovaciones instantáneas o procesos de renovación triviales.

Dado que las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots$ son independientes e idénticamente distribuidas con esperanza μ , entonces se cumple Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\Pr \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \mu \right] = 1.$$

Teorema 1 *Con probabilidad uno, en cada intervalo acotado de tiempo solamente ocurren un número finito de eventos, es decir,*

$$\Pr[N(t) < \infty] = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. La Ley Fuerte de los Grandes Números implica que

$$\Pr \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \right] = 1,$$

lo cual a su vez implica que con probabilidad uno el evento $\{S_n \leq t\}$ sólo puede ocurrir para un número finito de valores de n . Entonces

$$N(t) = \sup \{n : S_n \leq t\} < \infty$$

con probabilidad uno, para cada $t \geq 0$. ■

Ahora demostraremos dos importantes relaciones que utilizaremos en el futuro.

Denotaremos por $F_n(\cdot)$ la función de distribución de las v.a S_n

Proposición 2 Para cada $t \geq 0$ se cumple que:

$$(a) N(t) \geq n \iff S_n \leq t.$$

$$(b) P[N(t) = n] = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

Demostración. La parte (a) de la proposición es consecuencia inmediata de las definiciones de los procesos $\{N(t) : t \geq 0\}$ y $\{S_n\}$. Para demostrar la parte (b) observe que

$$[N(t) \geq n] = [N(t) = n] \cup [N(t) \geq n + 1]$$

de manera que

$$P[N(t) \geq n] = P[N(t) = n] + P[N(t) \geq n + 1].$$

Entonces

$$P[N(t) = n] = P[N(t) \geq n] - P[N(t) \geq n + 1]$$

$$= P[S_n \leq t] - P[S_{n+1} \leq t]$$

$$= F_n(t) - F_{n+1}(t). \blacksquare$$

La *función de renovación* se define como

$$m(t) := EN(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 3 Para cada $t \geq 0$ se cumple que

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Demostración. Sea $t \geq 0$ fijo y definamos $A_n := 1$ si la n -ésima renovación ocurrió en el intervalo $[0, t]$ y $A_n := 0$ en caso contrario. Ahora observe que $\Pr[A_n = 1] = \Pr[S_n \leq t] = F_n(t)$ y también que

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ahora, combinando lo anterior con el Teorema de Convergencia Monótona se obtiene

$$\begin{aligned}
 m(t) &= EN(t) = E \sum_1^{\infty} A_n \\
 &= \sum_1^{\infty} EA_n = \sum_1^{\infty} P[A_n = 1] \\
 &= \sum_1^{\infty} P[S_n \leq t] = \sum_1^{\infty} F_n(t). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que la función de renovación es finita.

Proposición 4 *Para cada t se cumple que*

$$m(t) < \infty.$$

Demostración. Note que por la condición (1.3) existe un $\alpha > 0$ tal que $p := \Pr[X_n \geq \alpha] > 0$. Ahora definamos las variables

$$\bar{X}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n < \alpha \\ \alpha & \text{si } X_n \geq \alpha \end{cases}$$

y el proceso de conteo

$$\bar{N}(t) = \sup \{n : \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \dots + \bar{X}_n \leq t\} \quad \forall t \geq 0.$$

Observe que $\bar{X}_n \leq X_n$, para todo n que pertenezca a los naturales, lo cual implica que

$$\bar{N}(t) \geq N(t) \quad \forall t \geq 0,$$

entonces

$$E(\bar{N}(t)) \geq E(N(t)) = m(t). \quad (1.4)$$

Por otra parte, note que para cada n se cumple que

$$\Pr [\bar{N}(n\alpha) = k] = C_n^k [1-p]^{k-n} p^{n+1} \quad \forall k \geq n.$$

En consecuencia,

$$E\bar{N}(n\alpha) = \frac{n+1}{p} < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo cual combinando con (1.4) implica que $m(t) < \infty$ para toda $t \geq 0$. ■

En la siguiente proposición, proporcionaremos otras propiedades de la función de renovación.

Proposición 5 *Para cada $t \geq 0$, $m(t)$ tiene las siguientes propiedades.*

- (a) $0 \leq m(t) < \infty$
- (b) $m(t)$ es no-decreciente.
- (c) $m(t)$ es continua por la derecha.

Demostración. La parte (a) es una consecuencia inmediata de la definición y la proposición 4. Para mostrar la parte (b) tomemos $t, s \in [0, \infty)$ y observe que $N(t) \leq N(s)$ si $t \leq s$. Entonces

$$m(t) = E[N(t)] \leq E[N(s)] = m(s).$$

(c) Sea $T > 0$, y notemos que

$$F_n(t) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} F_n(t) = M_n := F_n(T) \quad \forall t \in [0, T], n \in \mathbb{N}$$

Ahora, por el inciso (a), tenemos que

$$m(T) = \sum_1^\infty M_n < \infty$$

Por el Criterio de Weierstrass tenemos que la serie de funciones

$$m(\cdot) = \sum_1^\infty F_n(\cdot)$$

converge uniformemente en $[0, T]$. Por lo tanto, $m(t)$ es continua por la derecha en $[0, T]$ puesto que cada $F_n(\cdot)$ lo es. ■

En el teorema anterior mostramos que $m(t)$ está determinada por F ; el recíproco también se cumple, es decir, cada función de distribución está determinada por su función de renovación.

Proposición 6 *Existe una correspondencia uno a uno entre la distribución $F(\cdot)$ y la función de renovación $m(\cdot)$.*

1.2 Ecuación de Renovación

Supongamos que la primera renovación ocurrió en el tiempo $s \geq 0$, es decir, $X_1 = s$. Observe que

$$E[N(t)|X_1 = s] = \begin{cases} 0 & \text{si } s > t \\ 1 + m(t-s) & \text{si } s \leq t \end{cases}.$$

En otras palabras, si $s \leq t$, entonces a partir del instante s , el proceso reinicia y el número esperado de renovaciones en el intervalo $[0, t]$, es igual a uno más el número esperado de renovaciones en el tiempo $t-s$. En caso contrario, el número esperado de renovaciones en el intervalo $[0, t]$ es cero. De esto, tenemos que

$$m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|X_1 = s] dF(s) = \int_0^t E[N(t)|X_1 = s] dF(s),$$

lo cual nos lleva a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^t [1 + m(t-x)] dF(x) \\ &= \int_0^t dF(x) + \int_0^t m(t-x) dF(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x).$$

Esto es, la función de renovación satisface un caso particular de una ecuación integral, conocida como ecuación de renovación. Sea $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, donde h es acotada en intervalos finitos y F una función de distribución. Una función $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la *ecuación de renovación* si satisface

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x) \quad \forall t \geq 0. \quad (1.5)$$

Una herramienta útil para encontrar soluciones de las ecuaciones de renovación es la transformada de Laplace, la cual se introduce a continuación.

Sea Z una variable aleatoria no negativa con función de distribución H . La *transformada de Laplace* de la variable aleatoria Z (o de su función de distribución H) se define como

$$\tilde{H}(s) := E \exp(-sZ) = \int_0^\infty \exp(-sz)dH(z) \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Con relación a nuestro trabajo, dos propiedades de la transformada de Laplace son relevantes: (a) caracteriza a las distribuciones; (b) transforma la convolución de distribuciones en el producto ordinario.

Proposición 7 Sean F y G distribuciones sobre $\mathbb{R}_+$ y $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ sus transformadas de Laplace.

(a) Si $\tilde{F} = \tilde{G}$, entonces $F = G$;

(b) $\widetilde{F * G} = \tilde{F}\tilde{G}$, donde $F * G$ denota la convolución de las distribuciones F y G , es decir,

$$F * G(x) := \int_0^x F(x-t)dG(t), x \in \mathbb{R}_+.$$

Observe que si H es una función de distribución que admite una función de densidad, es decir, existe una función h tal que

$$H(x) := \int_0^x h(z)dz,$$

entonces

$$\tilde{H}(s) = \int_0^\infty \exp(-sz)h(z)dz,$$

la cual puede pensarse como la transformada de Laplace de la función de densidad h . Apoyándonos en lo anterior, introducimos la transformada de Laplace para funciones arbitrarias.

La *transformada de Laplace* para una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\tilde{h}(s) := \int_0^{\infty} \exp(-sz)h(z)dz$$

siempre y cuando la integral esté bien definida.

Ahora introducimos la convolución de una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ y una función de distribución G en $\mathbb{R}_+$ de la siguiente manera:

$$h * G(t) := \int_0^t h(t-x)dG(x) \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Observe que la ecuación de renovación (1.5) se puede escribir de manera siguiente:

$$g(t) = h(t) + g * F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proposición 8 Sea $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ y F una función de distribución en $\mathbb{R}_+$. Si g satisface la ecuación de renovación

$$g = h + g * F \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.6)$$

entonces

$$g = h + h * m$$

donde m es la función de renovación correspondiente a la distribución F .

Demostración. Apliquemos la transformada de Laplace a las funciones en ambos lados de la ecuación (1.6), lo cual da como resultado que

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{g}(s)\tilde{F}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \quad (1.7)$$

Luego, tenemos

$$\tilde{g}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{1 - \tilde{F}(s)} \quad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

Además

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s) \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)} \quad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

Por otra parte, note que aplicando la transformada de Laplace a la función de renovación m , satisface la siguiente ecuación, donde las siguientes igualdades se siguen de que $\exp(-sx) < 1$, y que las v.a. son i.i.d.

$$m(s) = \sum_1^{\infty} F_n(s)$$

$$\tilde{m}(s) = \sum_1^{\infty} \tilde{F}_n(s)$$

$$= \sum_1^{\infty} [\tilde{F}(s)]^n$$

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)} \quad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

Note que con esto se demuestra la proposición 6.

Entonces,

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{m}(s),$$

lo cual implica que

$$g = h + h * m. \blacksquare$$

1.3 Un Teorema Límite

Recuerde que μ es el tiempo medio de renovación, esto es, $\mu = \int_0^{\infty} x dF(x)$. Entonces, podemos pensar en $1/\mu$ como la tasa con la que ocurren las renovaciones. Esta interpretación está justificada por el siguiente resultado.

Teorema 9 *Con probabilidad 1 se cumple que*

- (a) $N(t) \neq 0 \quad \forall t.$
- (b) $P[N(t) \leq n \quad \forall t \geq 0] = 0$
- (c) $\frac{N(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu},$ cuando $t \rightarrow \infty.$

Demostración. (a) Sea $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$

$$P[N(t) = 0 \ \forall t \geq 0] = \cap_{k=1}^{\infty} P[N(t_k) = 0]$$

$$= \cap_{k=1}^{\infty} P[X_1 \geq t_k]$$

$$= P[X_1 = \infty] = 0,$$

Si $t \cong \infty$, entonces $N(t) \neq 0$.

Para probar (b) observe que

$$P[N(t) \leq n \ \forall t \geq 0] = P[N(t_k) \leq n \ \forall k \in \mathbb{N}]$$

$$= P\{\cap_{k=1}^{\infty} [N(t_k) \leq n]\}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} P[N(t_k) \leq n]$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} P[S_{n+1} > t_k]$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} [1 - F_{s_{n+1}}(t_k)] = 0.$$

Para probar (c) note que

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1} \quad \forall t \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}, \quad (1.8)$$

entonces, por la Ley Fuerte de los Grandes Numeros

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \rightarrow \mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ con probabilidad 1.} \quad (1.9)$$

Por el mismo argumento, tenemos que

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \rightarrow \mu \cdot 1, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Combinando este resultado con (1.8) y (1.9) se obtiene el resultado. ■

El teorema anterior nos permite conjeturar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) = \frac{1}{\mu}.$$

Este resultado es cierto, como lo mostraremos en la sección 1.5, y se le conoce como *Teorema Elemental de Renovación*. La demostración requiere un resultado preliminar conocido como *Lema de Wald*, el cual se presenta en la siguiente sección.

1.4 Lema de Wald

Una variable aleatoria N que toma valores en los enteros no-negativos es un *tiempo de paro* con respecto a $\{X_n\}$ si la ocurrencia (o no ocurrencia) del evento $[N = n]$ puede determinarse observando las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Por ejemplo, suponga que $\{X_n\}$ son v.a independientes tales que

$$P[X_n = 0] = P[X_n = 1] = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

Entonces, la variable

$$N = \min \{n : X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = 10\} \quad (1.11)$$

es un tiempo de paro con respecto $\{X_n\}$.

Teorema 10 (Lema de Wald). Si $X_1, X_2, X_3, \dots$ son variables independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita y N es un tiempo de paro con respecto a esta sucesión de variables tal que $EN < \infty$, entonces

$$E \sum_1^N X_i = EN \cdot EX.$$

Demostración. Para simplificar la demostración supondremos que las variables $X_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, son no-negativas. Ahora definamos

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } N \geq n \\ 0 & \text{si } N < n \end{cases}$$

y observe que

$$\sum_1^N X_n = \sum_1^{\infty} X_n Y_n$$

Del Teorema de Convergencia Monótona se deduce que

$$E \sum_1^N X_n = E \sum_1^\infty X_n Y_n = \sum_1^\infty E(X_n Y_n). \quad (1.12)$$

Por otra parte, tenemos que Y_n está completamente determinada por el evento $\{N \leq n-1\}$, lo cual implica que sólo depende de las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$ y no de las variables $X_n, X_{n+1}, \dots$. En consecuencia, Y_n es independiente de X_n , lo cual implica que

$$\begin{aligned} E \sum_1^N X_n &= \sum_1^\infty E(X_n Y_n) = \sum_1^\infty EX_n EY_n \\ &= EX \sum_1^\infty EY_n = EX \sum_1^\infty P[N \geq n] \\ &= EX \cdot EN. \blacksquare \end{aligned}$$

Consideremos las variables introducidas en (1.10) y (1.11). El Lema de Wald implica que

$$E \sum_{k=1}^N X_k = \frac{1}{2} EN.$$

1.5 El Teorema Elemental de Renovación

Como mencionamos con anterioridad, el Lema de Wald será de mucha utilidad para demostrar el Teorema Elemental de Renovación.

Proposición 11 Si $\mu < \infty$, entonces

$$E[S_{N(t)+1}] = \mu(m(t) + 1) \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Primero note que $N(t) + 1$ es un tiempo de paro con respecto a las variables $\{X_n\}$. En efecto observe que

$$N(t) + 1 = n \iff N(t) = n - 1$$

$$\iff X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{n-1} \leq t < X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

con lo cual se demuestra la afirmación. Entonces, por el Lema de Wald, tenemos que

$$\begin{aligned} E[S_{N(t)+1}] &= E \sum_{k=1}^{N(t)+1} X_k \\ &= EX \cdot E[N(t) + 1] = \mu[m(t) + 1] \quad \forall t \geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación demostraremos el Teorema Elemental de Renovación.

Teorema 12 (*Teorema Elemental de Renovación*)

$$\frac{m(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Demostración. Supongamos primero que $\mu < \infty$. Ahora observe que $S_{N(t)+1} \geq t$, lo cual implica que

$$E[S_{N(t)+1}] \geq t.$$

Por la proposición anterior, tenemos que

$$\mu(m(t) + 1) \geq t,$$

lo cual implica que

$$\frac{m(t)}{t} + \frac{1}{t} \geq \frac{1}{\mu} \quad \forall t > 0.$$

Entonces,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{m(t)}{t} + \frac{1}{t} \right] \geq \frac{1}{\mu}.$$

Para demostrar la otra desigualdad fijemos una constante $M > 0$ y definamos las variables

$$\bar{X}_n := \begin{cases} X_n & \text{si } X_n \leq M \\ M & \text{si } X_n > M. \end{cases}$$

Ahora definamos el siguiente proceso de renovación

$$\bar{S}_n := \sum_{k=1}^n \bar{X}_k \quad n \in \mathbb{N},$$

y el proceso de conteo correspondiente:

$$\bar{N}(t) = \sup \{n : \bar{S}_n \leq t\} \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces, tenemos que

$$\bar{S}_{\bar{N}(t)+1} \leq t + M \quad \forall t \geq 0,$$

puesto que $\bar{S}_{\bar{N}(t)} \leq t$ y la siguiente renovación es acotada por M . El corolario anterior implica que

$$\mu_M (\bar{m}(t) + 1) \leq t + M \quad \forall t \geq 0,$$

donde $\mu_M = E\bar{X}_n$. De la última desigualdad se obtiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \bar{m}(t) \leq \frac{1}{\mu_M} \quad (1.13)$$

Por otro lado, tenemos que $\bar{S}_n \leq S_n$, $n \in \mathbb{N}$, lo cual, a su vez implica que $\bar{N}(t) \geq N(t)$, $t \geq 0$. Entonces

$$\bar{m}(t) \geq m(t) \quad \forall t \geq 0.$$

De esto último se deduce que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}.$$

Finalmente observe que $\lim_{M \rightarrow \infty} \mu_M = \mu$, lo cual implica que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Combinando esta desigualdad y (1.13) se concluye que

$$\frac{m(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Si $\mu = \infty$, tendremos que $\mu_M \rightarrow \infty$ cuando $M \rightarrow \infty$ y el resultado se obtiene usando los mismos argumentos. ■

Además del Teorema Elemental de Renovación, existen otros resultados sobre el comportamiento asintótico de la función de renovación: el *Teorema Principal de Renovación*. Este resultado se presentará en la parte restante de esta sección sin demostración, pues éstas requieren el desarrollo de aspectos técnicos que caen fuera del foco de interés del presente trabajo. Para la formulación de estos resultados son necesarios algunos conceptos que introducimos a continuación.

A una variable aleatoria no-negativa X o a su función de distribución se le llama *periódica* si existe un número real $d \geq 0$ tal que

$$\sum_1^{\infty} P[X = nd] = 1.$$

Si X es periódica, el *período* de X se define como

$$\max \left\{ d \geq 0 : \sum_1^{\infty} P[X = nd] = 1 \right\}.$$

Para enunciar el segundo resultado mencionado anteriormente requerimos el concepto de funciones directamente Riemann integrable. Sea $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y defina

$$M_n(a) := \sup\{h(x) : x \in [(n-1)a, na]\},$$

$$I_n(a) := \inf\{h(x) : x \in [(n-1)a, na]\}.$$

La función h es *directamente Riemann integrable* si las series

$$\sum_1^{\infty} |M_n(a)| \quad \text{y} \quad \sum_1^{\infty} |I_n(a)|$$

son convergentes para cada a , y además se cumple que

$$\lim_{a \rightarrow 0} a \sum_1^{\infty} M_n(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} a \sum_1^{\infty} I_n(a).$$

El siguiente conjunto de condiciones son suficientes para garantizar que una función h sea directamente Riemann integrable:

(a) $h(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$.

(b) $h(t)$ es no creciente.

(c) $\int_0^{\infty} h(t) dt < \infty$.

Con este concepto a la mano, estamos listos para enunciar el siguiente resultado.

Teorema 13 (TEOREMA PRINCIPAL DE RENOVACIÓN) Si F no es periódica y h es directamente Riemann integrable, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dm(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} h(t) dt.$$

El siguiente ejemplo muestra el uso e importancia del Teorema Principal de Renovación.

Ejemplo 14 Un proceso de renovación alternante.

Consideremos un sistema que puede estar encendido o apagado. Si está encendido permanecerá así por un tiempo X_1 ; entonces se apagará y permanecerá apagado por un tiempo Y_1 , luego se encenderá y durará encendido un tiempo X_2 , y así sucesivamente. Supongamos que los tiempos $\{X_n\}$ son independientes e idénticamente distribuidos con distribución común F , mientras que las variables $\{Y_n\}$ también son independientes e idénticamente distribuidas pero con función de distribución común G . También supongamos que las sucesiones $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ son independientes. Sea $H = F * G$ y

$$P(t) := P\{\text{El sistema está encendido en el tiempo } t\}$$

Proposición 15 Si $E(X + Y) < \infty$ y H no es periódica, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{EX}{EX + EY}. \quad (1.14)$$

Demostración. Primero note que

$$P(t) = \int_0^\infty P\{\text{encendido en el tiempo } t | X_1 + Y_1 = x\} dH(x).$$

Puesto que en el tiempo $X_1 + Y_1$, el proceso se reinicia tenemos que

$$P\{\text{encendido en } t | X_1 + Y_1 = x\} = \begin{cases} P(t - x) & \text{si } x \leq t \\ P\{X_1 > t | X_1 + Y_1 = x\} & \text{si } x > t \end{cases}$$

Entonces

$$P(t) = \int_0^t P(t - x) dH(x) + \int_t^\infty P\{X_1 > t | X_1 + Y_1 = x\} dH(x),$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_t^\infty P\{X_1 > t | X_1 + Y_1 = x\} dH(x) &= \int_0^\infty P\{X_1 > t | X_1 + Y_1 = x\} dH(x) \\ &= P[X_1 > t] = 1 - F(t). \end{aligned}$$

Esto es,

$$P(t) = 1 - F(t) + \int_0^t P(t - x) dH(x).$$

Por la Proposición 8, se tiene

$$P(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t - x)] dm_H(x),$$

donde

$$m_H(x) = \sum_1^\infty H_n(x)$$

es la función de renovación correspondiente a la distribución H .

Tomando $h(t) = 1 - F(t)$ en el Teorema Principal de Renovación, se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-x)] dm_H(x) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [1 - F(t-x)] dm_H(x) \\ &= \frac{1}{\mu_H} \int_0^\infty [1 - F(t)] dt,\end{aligned}$$

donde $\mu_H := \int_0^\infty x dH(x) = EX_1 + EY_1$.

Por otra parte, observe que

$$\int_0^\infty [1 - F(t)] dt = \int_0^\infty P\{X_1 \geq t\} dt.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{EX}{EX + EY}. \blacksquare$$

Observe que

$$Q(t) = P\{\text{El sistema está apagado en el tiempo } t\} = 1 - P(t).$$

Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \frac{EY}{EX + EY}.$$

Notemos que no importa donde inicie el sistema, eso no hace la diferencia en el límite.

1.6 Distribución de la Edad y del Exceso de Vida

Sea $Y(t)$ el tiempo transcurrido desde el instante t hasta la siguiente renovación y $Z(t)$ es el tiempo transcurrido desde la renovación más reciente hasta el instante t . Más brevemente,

$$Y(t) = S_{N(t)+1} - t$$

$$Z(t) = t - S_{N(t)}.$$

Al primer proceso se le conoce como *proceso residual*, mientras que al segundo se le conoce como *proceso de edad* (o *envejecimiento*).

En esta sección determinaremos las distribuciones de $Y(t)$ y $Z(t)$. Para hacer esto, primero observe

$$Y(t) > x \Leftrightarrow \text{no hay renovación en } [t, t+x]. \quad (1.15)$$

Teorema 16 La distribución de $Y(t)$ esta dada por

$$P[Y(t) \leq x] = F(t+x) - \int_0^t [1 - F(t+x-y)] d\mu(y) \quad \forall x \geq 0.$$

Si F no es periódica, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[Y(t) \leq x] = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy \quad \forall x \geq 0.$$

Demostración. Sea $P(t) = P[Y(t) > x], t \geq 0$; condicionando sobre X_1 , tenemos que

$$P(t) = \int_0^\infty P[Y(t) > x | X_1 = s] dF(s) \quad \forall t > 0.$$

Por otra parte,

$$P[Y(t) > x | X_1 = s] = \begin{cases} P(t-s) & \text{si } s \leq t \\ 0 & \text{si } t < s \leq t+x \\ 1 & \text{si } s > t+x, \end{cases}$$

donde la primera igualdad se sigue del hecho de que después de X_1 el proceso se reinicia. La segunda es cero puesto que una renovación ocurre entre t y $t+x$ y por (1.15). La última se sigue de que $s > t+x$ y s es el tiempo para la primera renovación, lo cual implica que no han ocurrido renovaciones en el intervalo de tiempo $[t, t+x]$. Entonces

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^t P(t-s) dF(s) + \int_{t+x}^\infty dF(s) \\ &= 1 - F(t+x) + \int_0^t P(t-s) dF(s). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ahora usando que,

$$1 - P(t) = P\{Y(t) \leq x\}$$

y aplicando la Proposición 8 a 1.16 obtendremos

$$P(t) = 1 - F(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-s)] dm(s),$$

lo cual demuestra el primer resultado. Luego simplificaremos términos y aplicamos el Teorema Principal de Renovación.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[1 - F(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-s)] dm(s) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [1 - F(t+x-s)] dm(s) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty [1 - F(t+x)] dt \\ &= \frac{1}{\mu} \int_x^\infty [1 - F(y)] dy. \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t) \leq x\} = 1 - \frac{1}{\mu} \int_x^\infty [1 - F(y)] dy = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy. \quad (1.17)$$

Lo cual demuestra la segunda afirmación.

Corolario 17 *La distribución de $Z(t)$ está dada por*

$$P\{Z(t) \leq x\} = \begin{cases} F(t) - \int_0^{t-x} [1 - F(t-y)] dm(y) & \text{si } x < t \\ 1 & x \geq t \end{cases}$$

Si F no es periódica, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{Z(t) \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] d(y).$$

Demostración. Este resultado se sigue directamente del teorema anterior observando que

$$Z(t) > x \Leftrightarrow \text{no hay renovación en } [t-x, x]$$

$$\Leftrightarrow Y(t-x) > x.$$

Entonces,

$$P[Z(t) > x] = P[Y(t-x) > x],$$

lo cual implica que

$$P[Z(t) \leq x] = \begin{cases} F(t) - \int_0^{t-x} [1 - F(t-y)] dm(y) & \text{si } x < t \\ 1 & x \geq t \end{cases}$$

Si F es no periódica, argumento similares muestran que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[Z(t) \leq x] = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] d(y). \blacksquare$$

1.7 Procesos de Renovación con Retardo

Sea $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes y no-negativas, donde X_1 tiene distribución G y $X_n, n \geq 2$, tiene distribución F . Al proceso de renovación correspondiente

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad n \in \mathbb{N}$$

se le llama *proceso de renovación con retardo*. El proceso de conteo asociado lo denotamos como

$$N_D(t) = \sup \{n : S_n \leq t\} \quad t \geq 0,$$

y la función de renovación correspondiente como

$$m_D(t) = EN_D(t) \quad t \geq 0.$$

Note que si $G = F$, tenemos un proceso de renovación ordinario. De hecho, usando argumentos similares a los de las secciones anteriores, puede

verificarse que se conservan las propiedades de los procesos de renovación ordinarios. En particular tenemos que

$$\begin{aligned} P\{N_D(t) = n\} &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} \\ &= G * F_{n-1}(t) - G * F_n(t). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} m_D(t) &= \sum_1^{\infty} P[N_D(t) > n] \\ &= \sum_1^{\infty} P\{S_n \leq t\}. \end{aligned}$$

Es decir

$$m_D(t) = \sum_1^{\infty} G * F_{n-1}(t). \quad (1.18)$$

Entonces, aplicando la transformada de Laplace, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{m}_D(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}(s) \tilde{F}_{n-1}(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}(s) [\tilde{F}(s)]^{n-1} \\ &= \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por otra parte, condicionando sobre X_1 , se obtiene

$$\begin{aligned} m_D(t) &= \int_0^\infty E[N_D(t)|X_1 = x] dG(x) \\ &= \int_0^t [1 + m(t-x)] dG(x) \\ &= G(t) + \int_0^t m(t-x) dG(x), \end{aligned}$$

donde m es la función de renovación del proceso de renovación (ordinario) correspondiente a la distribución F .

A continuación enunciamos algunas propiedades de los procesos de renovación con retardo.

(i) Con probabilidad 1 se cumple que

$$\frac{N_D(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}, \text{ si } t \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

(ii)

$$\frac{M_D(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.21)$$

cuando $\mu < \infty$.

La función de distribución

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy \quad x \geq 0. \quad (1.22)$$

se le llama *distribución de equilibrio* correspondiente a la distribución F , pues proporciona información sobre la longitud de los tiempos entre renovaciones para t suficientemente grande, es decir, cuando el sistema ha estado funcionando por mucho tiempo. Para precisar esta interpretación consideremos el proceso de renovación con retardo para el cual $G = F_e$, al que se le conoce como *proceso de renovación en equilibrio*. La justificación de esta interpretación se proporciona en el siguiente teorema, cuya demostración requiere de identificar la transformada de Laplace de F_e .

Observe que

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_e(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_e(x) \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-sx} [1 - F(x)] dx \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx - \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \\
&= \frac{1}{\mu s} - \frac{\tilde{F}(s)}{\mu s};
\end{aligned}$$

es decir

$$\tilde{F}_e(s) = \frac{1 - \tilde{F}(s)}{\mu s}. \quad (1.23)$$

Recuerde que $Y(t)$ denota el exceso de vida para el tiempo t de un proceso de renovación.

Teorema 18 *Para un proceso de renovación en equilibrio se cumple que*

(i)

$$m_D(t) = \frac{t}{\mu} \quad \forall t \geq 0.$$

(ii)

$$P\{Y_D(t) \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Para mostrar la propiedad en (i), combinemos las ecuaciones en (1.19) y (1.23), para obtener

$$\tilde{m}_D(s) = \frac{1 - \tilde{F}(s)}{\mu s [1 - \tilde{F}(s)]} = \frac{1}{\mu s};$$

por otra parte, puede verificarse directamente que la transformada de Laplace de la función $h(t) = \frac{t}{\mu}, t \geq 0$, es $\tilde{h}(s) = \frac{1}{\mu s}$. Por lo tanto,

$$m(t) = \frac{t}{\mu} \quad \forall t > 0.$$

(ii) Para un proceso de renovación de retardo, sabemos que

$$P\{Y_D(t) > x, N_D(t) = 0\} = 1 - G(t + x); \quad (1.24)$$

para $n \geq 1$ se tiene

$$P\{Y_D(t) > x, N_D(t) = n\} = \int_0^\infty P\{Y_D(t) > x, N_D(t) = n | S_n = y\} dG * F_{n-1}(y),$$

de manera que

$$P\{Y_D(t) > x, N_D(t) = n\} = \int_0^t [1 - F(t + x - y)] dG * F_{n-1}(y). \quad (1.25)$$

De (1.24) y (1.25) obtenemos

$$\begin{aligned} P\{Y_D(t) > x\} &= \sum_0^\infty P\{Y_D(t) > x, N_D(t) = n\} \\ &= 1 - G(t + x) + \sum_0^\infty \int_0^t [1 - F(t + x - y)] dG * F_{n-1}(y) \\ &= 1 - G(t + x) + \int_0^t [1 - F(t + x - y)] \sum_0^\infty dG * F_{n-1}(y). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} G * F_{n-1}(t) &= P[S_n \leq t] \\ &= P[N_D(t) \geq n], \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned}\sum_0^{\infty} G * F_{n-1}(t) &= \sum_0^{\infty} P[N_D(t) \geq n] \\ &= EN_D(t) = m_D(t).\end{aligned}$$

Entonces la igualdad (1.26), se transforma en

$$P\{Y_D(t) > x\} = 1 - G(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-y)] dm_D(y).$$

Ahora, tomando en cuenta que $G = F_e$ y usando el inciso (i), se obtiene

$$\begin{aligned}P\{Y_D(t) > x\} &= 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{t+x} [1 - F(y)] dy + \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(t+x-y)] dy \\ &= 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy.\end{aligned}$$

Es decir

$$P\{Y_D(t) \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy$$

con lo cual demuestra el resultado.

1.8 Procesos de Renovación con Ganancia

Consideremos un proceso de renovación

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

donde la variable $X_k, k \in \mathbb{N}$, representa el tiempo de vida útil del k -ésimo dispositivo y supongamos que asociada a esta variable existe una ganancia o costo de operación del sistema que denotamos por $Y_k, k \in \mathbb{N}$, donde $Y_k = f(X_k)$. Entonces, la variable

$$Y(t) := \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n \quad t \geq 0,$$

representa la ganancia (costo) de operación hasta el tiempo t .

En el siguiente resultado se obtiene la ganancia esperado por unidad de tiempo bajo la hipótesis de que la sucesión $\{(X_n, Y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ esta formada por parejas independientes e idénticamente distribuidas.

Teorema 19 Si $E|Y_n|$ y EX_n son finitos, entonces con probabilidad 1 se cumple que

(i)

$$\frac{1}{t}Y(t) \rightarrow \frac{EY}{EX}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

(ii)

$$\frac{1}{t}EY(t) \rightarrow \frac{EY}{EX}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Demostración. Para demostrar (i), primero note que

$$\frac{1}{t}Y(t) = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t},$$

puesto que $N(t) \rightarrow \infty$, por la Ley Fuerte de Grandes Números, se tiene que

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{N(t)} \rightarrow EY.$$

Por otra parte, también tenemos que

$$\frac{1}{t}N(t) \rightarrow \frac{1}{EX},$$

lo cual combinado con el límite anterior demuestra el resultado deseado.

(ii) Para probar el resultado primero notemos que $N(t) + 1$ es un tiempo de paro de las variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Puesto que $N(t) + 1$ es un tiempo de paro con respecto a la sucesión $\{X_1, X_2, \dots\}$, también lo es para la sucesión $\{Y_n\}$, luego utilizamos el Lema de Wald obtendremos las igualdades

$$\begin{aligned}
EY(t) &= E \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n = E \sum_{n=1}^{N(t)+1} Y_n - E[Y_{N(t)+1}] \\
&= E[N(t) + 1] EY - E[Y_{N(t)+1}] \\
&= [m(t) + 1] EY - E[Y_{N(t)+1}]
\end{aligned}$$

$$\frac{EY(t)}{t} = \frac{[m(t) + 1] EY}{t} - \frac{E[Y_{N(t)+1}]}{t}.$$

Por el Teorema de Renovación Elemental se tiene que $\frac{1}{t}m(t) \rightarrow \frac{1}{\mu}$. Entonces, para demostrar el resultado deseado solamente falta verificar que

$$\frac{1}{t} E[Y_{N(t)+1}] \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Para verificar lo anterior, definamos

$$g(t) = E[Y_{N(t)+1}];$$

luego, condicionando sobre X_1 , se tiene que

$$g(t) = \int_0^\infty E[Y_{N(t)+1} | X_1 = x] dF(x).$$

Por otro lado, observe que $E[Y_{N(t)+1} | X_1 = x] = \begin{cases} g(t-x) & \text{si } x < t \\ E[Y_1 | X_1 = x] & \text{si } x \geq t \end{cases}$

La primera igualdad se cumple para $x < t$ dadas las propiedades de los procesos de renovación es equivalente a calcularla en un ciclo u otro. La segunda, para $x \geq t$, es claro el porque, dado que x representa la duración del primer ciclo (ó arribo, renovación etc.), con esto, obtendremos una ecuación de renovación

$$g(t) = \int_0^t g(t-x) dF(x) + h(t),$$

donde

$$h(t) = \int_t^\infty E[Y_1 | X_1 = x] dF(x).$$

Recuerde que por hipótesis tenemos

$$E|Y_1| = \int_0^\infty E[|Y_1| \mid X_1 = x] dF(x) < \infty,$$

de donde se sigue que

$$h(t) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ y} \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

$$h(t) \leq E|Y_1|, \text{ para toda } t.$$

Por la Ecuación de Renovación obtendremos

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x) dm(x).$$

Y por (1.27) podemos seleccionar T para que $|h(t)| < \epsilon$ siempre y cuando $t \geq T$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(t)}{t} \right| &\leq \left| \frac{h(t)}{t} \right| + \frac{\int_0^{t-T} |h(t-x)| dm(x)}{t} + \frac{\int_{t-T}^t |h(t-x)| dm(x)}{t} \\ &\leq \frac{\epsilon}{t} + \epsilon \frac{m(t-T)}{t} + E|Y_1| \frac{m(t) - m(t-T)}{t}. \end{aligned}$$

Dado que $m(t) < \infty$ para todo t , y por el Teorema de Renovación Elemental tenemos

$$\frac{\epsilon}{t} + \epsilon \frac{m(t-T)}{t} + E|Y_1| \frac{m(t) - m(t-T)}{t} \rightarrow \frac{\epsilon}{EX}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

por lo tanto,

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Ahora trataremos algunos ejemplos de procesos de renovación con ganancia.

Ejemplo 20 Sea una estación de tren, en la cual, los trenes parten de manera aleatoria, ya que los trenes partirán solo cuando haya T clientes en la estación, denotaremos por X_i , el tiempo de partida del i -ésimo tren, además

se sabe que los clientes arriban en promedio cada μ unidades de tiempo, ahora, por cada k clientes en la estación, se le cobrará una cantidad de kc pesos por unidad de tiempo, sea Y_i , que denote, el costo incurrido entre X_{i-1} y X_i . ¿Cual es el costo promedio incurrido por la estación en un largo plazo?

Si tenemos que X_i , denota el tiempo de partida del i -ésimo tren y Y_i , denota, el costo incurrido entre X_{i-1} y X_i , entonces (X_i, Y_i) $i = 1, 2, \dots$, forman un proceso de renovación con ganancia, así por el teorema de renovación con ganancia el costo promedio es

$$\frac{EY_1}{EX_1}$$

Sea τ_i el tiempo entre el i -ésimo y el $(i+1)$ -ésimo cliente que arriba. Esto es

$$EY_1 = cE[\tau_1 + 2\tau_2 + \dots + (T-1)\tau_{T-1}]$$

$$= \sum_{i=1}^{T-1} ck_i\mu$$

$$= \frac{cT(T-1)\mu}{2}$$

Ahora, note que $EX_1 = T\mu$, es decir que el costo promedio en un largo plazo es

$$\begin{aligned} \frac{EY_1}{EX_1} &= \frac{\frac{cT(T-1)\mu}{2}}{T\mu} \\ &= \frac{c(T-1)}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 21 Tiempo de Reemplazo

Una cadena de dispositivos o sistemas, se requiere mantener funcionando permanentemente, y siempre que un dispositivo falle ó que cumpla con su periodo de vida útil predeterminado (lo denotaremos por T), se reemplazará con otro nuevo, asumiremos que los tiempos de vida de cada dispositivo son

v.a.i.i.d representadas por $\{X_n\}$ y función de distribución común $F(x)$, denotaremos por Y la longitud de tiempo para el reemplazo de cada dispositivo, donde $Y = \min \{X, T\}$.

Ahora, siempre que haya un reemplazamiento preventivo, es decir, que un dispositivo cumpla su vida útil, se le cobrará un costo fijo de $C_p > 0$ y un costo de $C_f > C_p$ si el dispositivo falló se reemplazará por uno nuevo de la misma especie, por lo cual se preguntan ¿Cual es el costo que se debe esperar por unidad de tiempo para mantener la línea de dispositivos funcionando por un largo periodo de tiempo?

El proceso estocástico que modela este tipo de ejemplos son los procesos de Renovación con Ganancia, donde las épocas de renovación son épocas paralos cuales los nuevos dispositivos comiencen a funcionar.

Como la longitud de un ciclo, es distribuido como el mínimo de (T, X) , por lo cual, nos arrojará el siguiente resultado.

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq T \\ T & \text{si } X > T \end{cases}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} F_X(t) & \text{si } t \leq T \\ 1 & \text{si } t > T \end{cases}$$

De manera que

$$\begin{aligned} E(\text{longitud de un ciclo}) &= \int_0^\infty [1 - F_Y(t)] dt = \int_0^T [1 - F_X(t)] dt + \int_T^\infty [1 - 1] dt \\ &= \int_0^T [1 - F(x)] dx. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} E(\text{costo incurrido durante un ciclo}) &= C_f \Pr[X_i \leq T] + C_p \Pr[X_i > T] \\ &= C_f F(T) + C_p [1 - F(T)]. \end{aligned}$$

Entonces por el teorema de Renovación con Ganancia, en un largo plazo, el costo promedio por unidad de tiempo es

$$\frac{C_f F(T) + C_p [1 - F(T)]}{\int_0^T [1 - F(x)] dx}, \text{ con probabilidad 1.}$$

Capítulo 2

CADENAS DE MARKOV

2.1 Introducción

Muchos sistemas tienen la propiedad de que dado el estado presente, los estados pasados no tienen influencia en la evolución futura del sistema. A esta propiedad de “pérdida de memoria” se le conoce como *propiedad de Markov* y a los sistemas que tienen dicha propiedad se les llama *cadenas de Markov* o *procesos de Markov* dependiendo de que la evolución del sistema se observe en tiempo discreto o en tiempo continuo. En este trabajo estudiaremos cadenas de Markov con espacio de estados finito o numerable.

Sea S un conjunto finito o numerable y $\{X_n\}$ una sucesión de variables que toman valores en S . A la sucesión $\{X_n\}$ se le llama *cadena de Markov* si satisface la propiedad

$$\Pr[X_{n+1} = y | X_n = x] = \Pr[X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x]$$

para cualquier elección de elementos $x_0, \dots, x_{n-1}, x$ y y del conjunto S y para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. Al conjunto S se le llama *espacio de estados* y a sus elementos *estados del sistema*. Si $X_n = x$ se dice que el estado de la cadena en el tiempo n es x .

A la función

$$P^{n,n+1}(x, y) := \Pr[X_{n+1} = y | X_n = x] \quad x, y \in S, n \in \mathbb{N}_0,$$

se le llama *función de probabilidades de transición en la n -ésima etapa*. Si esta función no depende de n , se dice que la cadena es *homogénea* o *estacionaria*, en cuyo caso la denotaremos como

$$P(x, y) := \Pr[X_{n+1} = y | X_n = x] \quad x, y \in S, n \in \mathbb{N}_0,$$

y nos referiremos a ella simplemente como (la función de) *probabilidades de transición*.

En los desarrollos de las siguientes secciones siempre consideraremos cadenas de Markov homogéneas.

2.2 Función de Transición y Distribución Inicial

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados S y probabilidades de transición

$$P(x, y) = \Pr[X_{n+1} = y | X_n = x] \quad x, y \in S.$$

Naturalmente, las probabilidades de transición satisfacen las siguientes propiedades:

- (a) $P(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in S$;
- (b) $\sum_y P(x, y) = 1$ para todo $x \in S$.

A la distribución de probabilidades

$$\pi_0(x) := \Pr[X_0 = x] \quad x \in S,$$

se le llama *distribución inicial* de la cadena y satisface las propiedades:

- (a) $\pi_0(x) \geq 0$ para todo $x \in S$,
- (b) $\sum_x \pi_0(x) = 1$.

La distribución conjunta de las variables $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ puede expresarse en términos de la función de transición y la distribución inicial. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \Pr(X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= \Pr(X_0 = x_0) \Pr(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \\ &= \pi_0(x_0) P(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Argumentando de forma similar y usando inducción se puede mostrar que

$$\Pr(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n)$$

para todo $x_0, x_1, \dots, x_n \in S$ y $n \in \mathbb{N}$.

La función

$$P^n(x, y) := P[X_n = y | X_0 = x] \quad \forall x, y \in S, n \in \mathbb{N},$$

proporciona las probabilidades de que el sistema visite el estado y en n etapas dado que inició en el estado x ; naturalmente, se le llama *función de transición en n pasos o etapas*. Para facilitar la notación definimos

$$P^0(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

La matriz formada por las probabilidades de transición en n pasos la denotaremos como P^n , esto es,

$$P^n = [P^n(x, y)].$$

Las probabilidades de transición en n pasos también se pueden expresar utilizando exclusivamente las probabilidades de transición en un paso, como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} P^n(x, y) &= P(X_{m+n} = y | X_m = x) \\ &= P(X_{m+1} \in S, \dots, X_{m+n-1} \in S, X_{m+n} = y | X_0 \in S, \dots, X_{m-1} \in S, X_m = x) \\ &= \sum_{y_1} \dots \sum_{y_{n-1}} P(x, y_1) \dots P(y_{n-1}, y). \end{aligned}$$

A la ecuación que se presenta en el siguiente teorema se le llama *ecuación de Chapman-Kolmogorov*.

Teorema 22 Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con probabilidad de transición $P(\cdot, \cdot)$, entonces

$$P^{n+m}(x, y) = \sum_z P^n(x, z) P^m(z, y) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, x, y \in S. \quad (2.1)$$

Demostración. Observemos primero que

$$[X_{n+m} = y] = \bigcup_z [X_{n+m} = y, X_n = z].$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 P^{n+m}(x, y) &= P[X_{n+m} = y | X_0 = x] \\
 &= P \left[\bigcup_z [X_{n+m} = y, X_n = z] | X_0 = x \right] \\
 &= \sum_z P[X_{n+m} = y, X_n = z | X_0 = x].
 \end{aligned}$$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}
 P[X_{n+m} = y, X_n = z | X_0 = x] &= \frac{P[X_{n+m} = y, X_n = z, X_0 = x]}{P[X_0 = x]} \\
 &= P[X_n = z | X_0 = x] P[X_{m+n} = y | X_0 = x, X_n = z] \\
 &= P^n(x, z) P^m(z, y).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P^{n+m}(x, y) = \sum_z P^n(x, z) P^m(z, y) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, x, y \in S. \blacksquare$$

Observación: (a) La ecuación de Chapman-Kolmogorov, también podemos expresarla como

$$P^n(x, y) = \sum_z P^m(x, z) P^{n-m}(z, y) \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq m \leq n, x, y \in S.$$

En forma matricial se expresa de la siguiente forma:

$$P^{n+m} = P^n P^m \quad \forall m, n \in \mathbb{N};$$

$$P^n = P^m P^{n-m} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq m \leq n.$$

(b) Note que si tomamos $m = 1$ en la ecuación de Chapman-Kolmogorov, entonces

$$P^n = P P^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Iterando esta relación obtendremos

$$P^n = PP^{n-1} = \dots = \underbrace{P \dots P}_{n \text{ veces}}$$

Esto es la matriz de transición en n pasos se puede calcular como la n -ésima potencia de la matriz P .

Defina

$$\pi_n(x) := P[X_n = x] \quad x \in S.$$

Note que π_0 es la distribución inicial de la cadena de Markov, es decir, $\pi_0(x) = P[X_0 = x]$, $x \in S$. Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned} P[X_n = y, X_0 = x] &= P[X_0 = x] P^n(x, y) \\ &= \pi_0(x) P^n(x, y). \end{aligned}$$

También observe que el evento $[X_n = y] = \bigcup_x [X_n = y, X_0 = x]$, de manera que

$$\begin{aligned} P(X_n = y) &= \sum_x P(X_0 = x, X_n = y) \\ &= \sum_x P(X_0 = x) P(X_n = y | X_0 = x). \end{aligned}$$

Esto es

$$\pi_n(y) = P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x) P^n(x, y) \quad \forall y \in S. \quad (2.2)$$

En forma matricial, tenemos que

$$\pi_n = \pi_{n-1} P = \dots = \pi_0 P^n.$$

2.3 Tiempo para la Primera Visita

Sea A un subconjunto del espacio de estados S . El *tiempo para la primera visita o transición al conjunto A* , se define como

$$T_A = \begin{cases} \min \{n > 0 : X_n \in A\} & \text{si } X_n \in A, \text{ para algún } n. \\ \infty & \text{si } X_n \notin A \text{ para todo } n \end{cases}$$

En particular si $A = \{a\}$, denotaremos como T_a el tiempo para la primera visita a $A = \{a\}$, esto es, $T_a = \min \{n > 0 : X_n = a\}$.

Una importante ecuación que involucra los tiempos para la primera visita se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 23 Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con función de transición $P(x, y)$, entonces

$$P^n(x, y) = \sum_{m=1}^n P_x [T_y = m] P^{n-m}(y, y), \quad m \geq 1.$$

Demostración. Observe primeramente que

$$[X_n = y] = \bigcup_{m=1}^{\infty} [X_n = y, T_y = m]$$

Ahora note que

$$[X_n = y, T_y = k] = \emptyset \quad \forall k \geq n+1;$$

luego,

$$[X_n = y] = \bigcup_{m=1}^n [X_n = y, T_y = m].$$

Además, los eventos $[X_n = y, T_y = m], m = 1, \dots, n$, son ajenos. En-

tonces,

$$\begin{aligned}
 P^n(x, y) &= P[X_n = y | X_0 = x] \\
 &= P\left[\bigcup_{m=1}^n [X_n = y, T_y = m] | X_0 = x\right] \\
 &= \sum_{m=1}^n P[X_n = y, T_y = m | X_0 = x] \\
 &= \sum_{m=1}^n \frac{P[X_n = y, T_y = m, X_0 = x]}{P[X_0 = x]} \\
 &= \sum_{m=1}^n \frac{P[T_y = m, X_0 = x] P[X_n = y | T_y = m, X_0 = x]}{P[X_0 = x]} \\
 &= \sum_{m=1}^n P[T_y = m | X_0 = x] P[X_n = y | T_y = m, X_0 = x] \\
 &= \sum_{m=1}^n P_x[T_y = m] P[X_n = y | X_0 = x, X_1 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y] \\
 &= \sum_{m=1}^n P_x[T_y = m] P^{n-m}(y, y), \quad n \geq 1. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Observe que $P_x[T_y = 1] = P(x, y)$ y $P_x[T_y = 2] = \sum_{z \neq y} P(x, z)P(z, y)$; además, $P_x[T_y = n+1] = \sum_{z \neq y} P(x, z)P_z[T_y = n]$.

2.4 Clasificación de Estados

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados S y probabilidad de transición P . Definamos

$$\rho_{xy} := P_x(T_y < \infty) \quad x, y \in S.$$

Note que ρ_{xy} es la probabilidad de que la cadena visite el estado y en un tiempo finito dado que $X_0 = x$. En particular, ρ_{yy} denota la probabilidad de que la cadena retorne a y en un tiempo finito.

Definición 24 A un estado $y \in S$ se le llama recurrente si $\rho_{yy} = 1$ y transitorio si $\rho_{yy} < 1$.

Si y es un estado recurrente y la cadena inició en y , entonces con probabilidad uno retornará al mismo estado; luego, por la propiedad de Markov, el proceso reinicia cada vez que la cadena retorna a y , lo que nos hace conjeturar que el número de visitas al estado y es infinito. En cambio, si el estado y es transitorio y la cadena empezó en el estado y , tiene probabilidad positiva $1 - \rho_{yy}$ de nunca retornar a dicho estado.

Definición 25 A un estado $y \in S$ se le llama absorbente si $P(y, y) = 1$; equivalentemente, si $P(y, a) = 0$, para $y \neq a$.

Observe que si y es un estado absorbente, entonces $P_y(T_y = 1) = P(y, y) = 1$ y $\rho_{yy} = 1$; por lo tanto, un estado absorbente es necesariamente recurrente.

Definamos

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_y \{X_n\},$$

donde

$$1_y \{z\} = \begin{cases} 1 & \text{si } z = y \\ 0 & \text{si } z \neq y \end{cases}$$

Observe que el evento $[N(y) \geq 1]$ es equivalente al evento $[T_y < \infty]$, de ahí que

$$P_x[N(y) \geq 1] = P_x[T_y < \infty] = \rho_{xy}.$$

Proposición 26 Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov, entonces

$$P_x[N(y) = m] = \begin{cases} \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} (1 - \rho_{yy}) & \text{si } m \geq 1 \\ 1 - \rho_{xy} & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Demostración. Para $m = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} P_x [N(y) = 0] &= 1 - P_x [N(y) > 0] \\ &= 1 - P_x [N(y) \geq 1] \\ &= 1 - \rho_{xy}. \end{aligned}$$

Ahora

$$P_x [N(y) = m] = P_x [N(y) \geq m] - P_x [N(y) \geq m + 1]$$

Observe que para calcular $P_x [N(y) = m]$ basta calcular $P_x [N(y) \geq m]$ para toda $m \geq 1$.

Supongamos que $m = 2$ y note que

$$\begin{aligned} &P [X_1 \neq y, X_2 \neq y, \dots, X_m = y, X_{m+1} \neq y, \dots, X_{m+n} = y | X_0 = x] \\ &= \frac{P [X_0 = x, X_1 \neq y, X_2 \neq y, \dots, X_m = y, X_{m+1} \neq y, \dots, X_{m+n} = y]}{P [X_0 = x]} \\ &= \frac{P [X_0 = x] P [X_1 \neq y, X_2 \neq y, \dots, X_m = y | X_0 = x]}{P [X_0 = x_0]} \\ &\times P [X_{m+1} \neq y, \dots, X_{m+n} = y | X_0 = x, X_1 \neq y, \dots, X_m = y] \\ &= P_x [T_y = m] P_y [T_y = n]. \end{aligned}$$

Esta expresión representa la probabilidad de que la cadena visite por primera vez y en el tiempo m y n unidades después visite nuevamente y dado que la

cadena empezó en el estado x . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 P_x [N(y) \geq 2] &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_x [T_y = m] P_y [T_y = n] \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} P_x [T_y = m] \sum_{n=1}^{\infty} P_y [T_y = n] \\
 &= P_x [T_y < \infty] P_y [T_y < \infty] \\
 &= \rho_{xy} \rho_{yy}.
 \end{aligned}$$

En general, tomando en cuenta que

$$P_x [T_y = n_1] P_y [T_y = n_2] \cdots P_y [T_y = n_m]$$

es la probabilidad de que la primera visita a y sea en el tiempo n_1 , la segunda en el tiempo n_2 , etc., obtenemos

$$\begin{aligned}
 P_x [N(y) \geq m] &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} P_x [T_y = n_1] P_y [T_y = n_2] \cdots P_y [T_y = n_m] \\
 &= \sum_{n_1=1}^{\infty} P_x [T_y = n_1] \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} P_y [T_y = n_m] \\
 &= P_x [T_y < \infty] P_y [T_y < \infty] \cdots P [T_y < \infty] \\
 &= \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1}.
 \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 P_x [N(y) = m] &= P_x [N(y) \geq m] - P_x [N(y) \geq m+1] \\
 &= \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} - \rho_{xy} \rho_{yy}^m \\
 &= \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} (1 - \rho_{yy}). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} E_x [N(y)] &= E_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_y \{X_n\} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_x 1_y \{X_n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y). \end{aligned}$$

Definamos ahora

$$G(x, y) := E_x [N(y)] \quad x, y \in S.$$

Teorema 27 (i) Si y es un estado transitorio, entonces

$$P_x [N(y) < \infty] = 1,$$

$$G(x, y) = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}} < \infty \quad \forall x \in S.$$

(ii) Si y es un estado recurrente, entonces

$$P_x [N(y) < \infty] = P_x [T_y < \infty] = \rho_{xy} \quad \forall x \in S,$$

$$G(y, y) = \infty, \text{ dado que } P_y [N(y) = \infty] = 1,$$

Además, si $\rho_{xy} = 0$, entonces $G(x, y) = 0$; si $\rho_{xy} > 0$, entonces $G(x, y) = \infty$.

Demostración. (i) Supongamos que y es transitorio; por definición tenemos que $\rho_{yy} < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} P_x [N(y) = \infty] &= \lim_{m \rightarrow \infty} P_x [N(y) \geq m] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

De ahí que

$$P_x [N(y) < \infty] = 1 - P_x [N(y) = \infty] = 1.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= E_x [N(y)] = \sum_{m=1}^{\infty} m P \{N(y) = m\} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} m \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} (1 - \rho_{yy}) \\
 &= \rho_{xy} (1 - \rho_{yy}) \sum_{m=1}^{\infty} m \rho_{yy}^{m-1} \\
 &= \rho_{xy} (1 - \rho_{yy}) \frac{1}{(1 - \rho_{yy})^2} \\
 &= \frac{\rho_{xy}}{(1 - \rho_{yy})} < \infty \quad x \in S.
 \end{aligned}$$

(ii) Supongamos que y es recurrente; por definición tenemos que $\rho_{yy} = 1$ y

$$\begin{aligned}
 P_x [N(y) = \infty] &= \lim_{m \rightarrow \infty} P_x [N(y) \geq m] \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{xy} \\
 &= \rho_{xy}.
 \end{aligned}$$

En particular

$$P_y [N(y) = \infty] = \rho_{yy} = 1.$$

Entonces

$$E_y [N(y)] = \infty = G(y, y).$$

Ahora supongamos que $\rho_{xy} = 0$; tomando en cuenta que los eventos $[N(y) \geq 1] = [T_y < \infty]$, tenemos

$$P_x [N(y) \geq 1] = P_x [T_y < \infty] = \rho_{xy} = 0.$$

De manera que

$$P_x [T_y = m] = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

2.4. CLASIFICACIÓN DE ESTADOS

Lo cual implica que

$$P^n(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_x[T_y = m] P^{n-m}(y, y) = 0.$$

Por lo tanto $G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) = 0$. Pero si $\rho_{xy} > 0$, entonces $P_x[N(y)] = \rho_{xy} > 0$ y por lo tanto

$$G(x, y) = E_x[N(y)] = \infty. \blacksquare$$

Observación 28 (a) Si y es transitorio, sin importar el estado inicial de la cadena, la cadena lo visitará un número finito de veces y el número esperado de visitas también es finito.

(b) Si y es recurrente y la cadena empieza en y , entonces ésta regresará a y un número infinito de veces. Si la cadena empieza en $x \neq y$ puede suceder que nunca llegue a y , pero si lo hace una vez, lo hará un número infinito de veces.

(c) Si y es transitorio, tenemos que

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) < \infty \quad x \in S,$$

de donde se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = 0.$$

Definición 29 A la cadena de Markov se le llama transitoria si todos sus estados son transitorios, y recurrente si todos sus estados son recurrentes.

Observación 30 Una cadena de Markov con un número finito de estados debe de tener al menos un estado recurrente. En consecuencia, una cadena de Markov con espacio de estados finito, no puede ser transitoria. Para mostrar esta afirmación, suponga que $\#S < \infty$, y que todos los estados son transitorios

$$0 = \sum_{y \in S} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in S} P^n(x, y) = 1.$$

lo cual es una contradicción; por lo tanto, no todos los estados son transitorios.

2.5 Cadenas Irreducibles

Sean x, y dos estados de una cadena de Markov. Diremos que x alcanza a un estado y si $\rho_{xy} > 0$, lo cual denotamos como $x \rightarrow y$. Diremos que x y y son estados comunicantes o que se comunican si $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow x$, lo cual denotamos como $x \leftrightarrow y$.

Observación 31 (a) Los estados x, y se comunican si y solo si existen $n, m \geq 0$ tal que $P^n(x, y) > 0$ y $P^m(y, x) > 0$.

(b) La relación " $\leftrightarrow$ " es una relación de equivalencia, es decir que cumple con las siguientes propiedades:

Reflexividad: $x \rightarrow x$.

Simetría: Si $x \leftrightarrow y$ entonces $y \rightarrow x$.

Transitividad: Si $x \leftrightarrow z$ y $z \leftrightarrow y$, entonces $x \leftrightarrow y$.

(c) De la observación anterior, el espacio de estados S se puede partir o descomponer en clases de equivalencia, es decir, existen subconjuntos $C_1, C_2, \dots$ de S , tales que $C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$, y $\bigcup C_i = S$. Además, dos estados están en la misma clase de equivalencia si y sólo si $x \leftrightarrow y$. A cada uno de estos subconjuntos se les llama clase comunicante.

(d) Si y es un estado absorbente, entonces $\{y\}$ es una clase comunicante.

Definición 32 Un conjunto $C \subset S$ es cerrado si ningún estado de C alcanza a ningún estado fuera de C , es decir,

$$P_x[T_y < \infty] = \rho_{xy} = 0 \quad x \in C, y \notin C.$$

Observe que un conjunto cerrado no necesariamente es una clase de equivalencia y una clase de equivalencia no necesariamente es un conjunto cerrado.

Definición 33 Un conjunto cerrado C es llamado irreducible si $x \leftrightarrow y$ para todo $x, y \in C$, es decir, si C es una clase comunicante cerrada.

Teorema 34 Sea x un estado recurrente y suponga que $x \rightarrow y$, entonces y es recurrente y $\rho_{xy} = \rho_{yx} = 1$.

Demostración. Como $x \rightarrow y$ entonces existe n tal que $P_x(T_y = n) > 0$. Sea n_0 el mínimo de estos índices, es decir,

$$n_0 = \min \{n \geq 1 : P_x(T_y = n) > 0\}$$

Para mostrar que $\rho_{yx} = 1$, supongamos que $\rho_{yx} < 1$.

Entonces la cadena de Markov empieza en y , tiene probabilidad positiva $1 - \rho_{yx}$ de no alcanzara a x . Ahora como x en n_0 alcanz a y y y tiene probabilidad positiva de no acanzar a x , con lo cual contradice la hipótesis de que x es recurrente, por lo tanto $\rho_{yx} = 1$, ahora para demostrar que y es recurrente, dado que $\rho_{yx} = 1$, existe n_1 tal que $P^{n_1}(y, x) > 0$, entonces

$$\begin{aligned} P^{n_1+n+n_0}(y, y) &= P_y(X_{n_1+n+n_0} = y) \\ &\geq P_y(X_{n_1} = x, X_n = x, X_{n_0} = y) \\ &= P^{n_1}(y, x)P^n(x, x)P^{n_0}(x, y); \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} G(y, y) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{n_1+n+n_0}(y, y) \\ &\geq P^{n_1}(y, x)P^{n_0}(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, x) \\ &= P^{n_1}(y, x)P^{n_0}(x, y)G(x, x) = \infty. \end{aligned}$$

con lo cual se demuestra que y es recurrente, ahora para mostrar que $\rho_{xy} = 1$, es de forma equivalente a como se mostró que $\rho_{yx} = 1$, con lo cual completa la demostración.

Observación 35 (1) Del Teorema 34 tenemos que si $x \rightarrow y$ y y es transitorio, entonces x es transitorio o si $x \rightarrow y$ y $\rho_{xy} \neq \rho_{yx}$, entonces x es transitorio.

(2) Si C es un conjunto cerrado e irreducible, entonces cada estado en C es recurrente o bien cada estado en C es transitorio.

Corolario 36 Sea C una clase comunicante cerrada irreducible de estados recurrentes. Entonces

$$\rho_{xy} = 1, P_x[N(y) = \infty] = 1, G(x, y) = \infty, \quad \forall x, y \in C.$$

Recuerde que un estado y es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, y) = G(y, y) = \infty.$$

Teorema 37 Si $x \leftrightarrow y$, y es recurrente, entonces x es recurrente.

Este resultado es una consecuencia directa del Teorema 34.

Definición 38 Una cadena de Markov es irreducible, si el espacio de estados es un conjunto irreducible, es decir, si la cadena consta de una sola clase comunicante.

Observación 39 (a) En una cadena de Markov irreducible todos los estados se comunican; entonces, la cadena es transitoria o recurrente.

(b) En particular, si la cadena de Markov es recurrente e irreducible, todos los estados se visitan un número infinito de veces con probabilidad 1.

(c) Si S es un conjunto finito, entonces existe al menos un estado recurrente; en consecuencia, cualquier conjunto cerrado finito contiene al menos un estado recurrente. Por otra parte, si además S es irreducible, entonces todos los estados son recurrentes.

2.6 Distribuciones Estacionarias

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados S y función de probabilidades de transición $P(\cdot, \cdot)$.

Definición 40 Diremos que una distribución $\pi(\cdot)$ sobre S es una distribución estacionaria si

$$\sum_{x \in S} \pi(x) P(x, y) = \pi(y) \quad \forall y \in S.$$

Observe que si π es una distribución estacionaria, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} \pi(x) P^2(x, y) &= \sum_x \pi(x) \sum_{z \in S} P(x, z) P(z, y) \\ &= \sum_{z \in S} \left[\sum_{x \in S} \pi(x) P(x, z) \right] P(z, y) \\ &= \sum_{z \in S} \pi(z) P(z, y) = \pi(y). \end{aligned}$$

En general, usando el hecho de que

$$P^{n+1}(x, y) = \sum_z P^n(x, z) P(z, y),$$

se prueba que

$$\sum_{x \in S} \pi(x) P^n(x, y) = \pi(y) \quad \forall y \in S.$$

Además si π es una distribución estacionaria y coincide con la distribución inicial, esto es, $\pi = \pi_0$, entonces

$$\sum_{x \in S} \pi_0(x) P^n(x, y) = \pi_0(y), \quad y \in S.$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} P[X_n = y] &= \sum_{x \in S} \pi_0(x) P^n(x, y) \\ &= \pi_0(y) = \pi(y). \end{aligned}$$

Es decir, la distribución de X_n es independiente de n .

Ahora consideremos el recíproco; supongamos que la distribución de las variables X_n son independientes de n , es decir,

$$\pi_0(y) = P[X_0 = y] = P[X_1 = y] = \sum_{x \in S} \pi_0(x) P(x, y).$$

Obviamente, π_0 es una distribución estacionaria. En resumen, la distribución de las variables X_n son independientes de n si y sólo si dicha distribución es una distribución estacionaria.

Supongamos ahora que existe una distribución estacionaria π que satisface la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y) \quad y \in S. \quad (2.3)$$

Combinando la igualdad

$$P[X_n = y] = \sum_{x \in S} \pi_0(x) P^n(x, y) \quad y \in S,$$

con el Teorema de Convergencia Acotada se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = y] = \sum_{x \in S} \pi_0(x) \pi(y)$$

$$= \pi(y) \sum_{x \in S} \pi_0(x)$$

$$= \pi(y).$$

La distribución de X_n se aproxima arbitrariamente a la distribución estacionaria π , siempre que se cumpla (2.3).

2.7 Clasificación de las Cadenas de Markov

Definamos las variables

$$N_n(y) := \sum_{m=1}^n 1_y(X_m) \quad x, y \in S, n \in \mathbb{N},$$

y

$$G_n(x, y) = E_x[N_n(y)] = \sum_{m=1}^n P^m(x, y) \quad x, y \in S.$$

Observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x, y) = G(x, y) \quad \forall x \in S,$$

Supongamos que y es transitorio; entonces,

$$P_x[N(y) < \infty] = 1$$

$$G(x, y) = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}} < \infty \quad \forall x \in S.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = 0 \text{ con probabilidad uno}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = 0 \quad \forall x \in S.$$

Ahora analicemos el caso cuando y es recurrente. Definamos

$$M_y := \begin{cases} E_y[T_y] & \text{si } E_y[T_y] < \infty \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $T_y = \min \{n : X_n = y\}$. Observe que si $E_y[T_y] < \infty$, entonces M_y denota el tiempo medio de recurrencia a y . Sea

$$1_{\{T_y < \infty\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } T_y < \infty \\ 0 & \text{si } T_y = \infty \end{cases}$$

Teorema 41 Si y es un estado recurrente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1_{\{T_y < \infty\}}}{M_y} \text{ con probabilidad uno} \quad (2.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{\rho_{xy}}{M_y} \quad \forall x \in S.$$

Demostración. Supongamos que $X_0 = y$ y definamos $\tau_0 = 0$,

$$\tau_k = \min \{n > \tau_{k-1} : X_n = y\}, \quad k \geq 1.$$

Note que τ_k , $k \geq 1$ es el número de transiciones para el k -ésimo retorno a y . Ahora considere las variables

$$\beta_1 = \tau_1,$$

$\beta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, para $k \geq 2$, y observe que las v.a $\{\beta_k\}$ son i.i.d, por la propiedad Fuerte de Markov. Ahora, definamos

$$S_n(y) = \sum_{k=1}^n \beta_k,$$

donde $S_n(y)$ es un proceso de renovación y

$$N_n(y) := \sup \{k : S_k \leq n\},$$

es el proceso de conteo asociado. También tenemos que

$$M_y = E_y(\beta_k), \quad K \geq 1.$$

Por el Teorema 9 (capítulo 1),

$$\frac{N_n(y)}{n} \rightarrow \frac{1}{M_y},$$

con probabilidad 1 lo cual demuestra la primera afirmación.

Ahora, si el proceso inicia en un estado $x \neq y$, y x alcanza a y las variables $S_n(y)$ definen un proceso de renovación con retardo. Entonces, por (1.20) tenemos que

$$\frac{N_n(y)}{n} \rightarrow \frac{1}{M_y},$$

lo cual demuestra la primera afirmación del teorema.

La segunda afirmación se sigue del Teorema Elemental de Renovación y de la ecuación (1.21) correspondiente a procesos de renovación con retardo.

Observación 42 (a) *Ambas expresiones del teorema anterior, nos dicen que una vez que la cadena de Markov llega a y , ésta regresa a y en promedio cada M_y unidades de tiempo.*

(b) *Si C es un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{1}{M_y} \quad \forall x, y \in C,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{M_y} \quad y \in C,$$

puesto que $P_x[N(y) = \infty] = 1$ y $\rho_{xy} = P_x[T_y < \infty] = 1$, $\forall x \in C$. y $G(x, y) = \infty$.

Observe que si $M_y = \infty$, el lado derecho de las expresiones anteriores es cero, lo cual exhibe un comportamiento similar al de un estado es transitorio.

Definición 43 Diremos que un estado recurrente y es recurrente nulo si $M_y = \infty$ y recurrente positivo si $M_y < \infty$.

Observación 44 (a) *Del teorema anterior, si y es recurrente nulo, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = 0.$$

Si y es recurrente positivo, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(y, y)}{n} = \frac{\rho_{yy}}{M_y} = \frac{1}{M_y}.$$

(b) *La diferencia esencial entre estados recurrentes nulos y recurrentes positivos reside en el tiempo requerido para los retornos.*

(c) Supongamos que la cadena empieza en un estado recurrente y ; por el teorema anterior, si y es recurrente nulo, entonces con probabilidad 1, la proporción de veces que la cadena de Markov visita al estado y durante las primeras n unidades de tiempo se aproxima a cero cuando $n \rightarrow \infty$; por otro lado, si y es recurrente positivo, entonces con probabilidad 1

$$\frac{G_n(x, y)}{n} \rightarrow \frac{\rho_{xy}}{M_y}.$$

Teorema 45 Si x es un estado recurrente positivo y $x \rightarrow y$, entonces y es recurrente positivo.

Demostración. En el Teorema 34 se mostró que si $x \rightarrow y$, y x es recurrente, entonces y es recurrente y $\rho_{xy} = \rho_{yx} = 1$; por lo tanto, existen enteros positivos n_1, n_2 tales que

$$P^{n_1}(y, x) > 0 \text{ y } P^{n_2}(x, y) > 0.$$

Ahora, usando Ecuación de Chapman-Kolmogorov, se obtiene

$$P^{(n_1+m+n_2)}(y, y) \geq P^{n_1}(y, x) P^m(x, x) P^{n_2}(x, y),$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^{(n_1+m+n_2)}(y, y) \geq P^{n_1}(y, x) P^{n_2}(x, y) \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, x).$$

Por otro lado

$$G_{n_1+n+n_2}(y, y) - G_{n_1+n_2}(y, y) = \sum_{m=1}^n P^{(n_1+m+n_2)}(y, y).$$

Combinando las últimas dos relaciones se obtiene

$$\frac{G_{n_1+n+n_2}(y, y) - G_{n_1+n_2}(y, y)}{n} \geq P^{n_1}(y, x) P^{n_2}(x, y) \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, x).$$

Luego, tomando límite, se tiene

$$\frac{G_{n_1+n+n_2}(y, y)}{n} \rightarrow \frac{1}{M_y} \text{ y } \frac{G_{n_1+n_2}(y, y)}{n} \rightarrow 0.$$

Dado que y es recurrente,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, x) = \frac{G_n(x, x)}{n} \rightarrow \frac{1}{M_x}.$$

Además, puesto que x también es recurrente, note que

$$\frac{1}{M_y} \geq \frac{P^{n_1}(y, x)P^{n_2}(x, y)}{M_x} > 0.$$

Finalmente, como x es recurrente positivo tenemos que $M_x < \infty$, lo cual implica que $M_y < \infty$; por lo tanto y es recurrente positivo. ■

Observe que si x recurrente, y es recurrente nulo y $x \rightarrow y$, entonces x es recurrente nulo. Combinando este hecho y el Teorema 34 concluimos que si C es un conjunto cerrado e irreducible, entonces cada estado en C es transitorio ó recurrente nulo ó recurrente positivo.

Definición 46 *A una cadena de Markov se le llama recurrente nula si todos sus estados son recurrentes nulos, y se le llama recurrente positiva si todos sus estados son recurrentes positivos.*

Dada la observación anterior mostraremos que una cadena de Markov irreducible es transitoria o recurrente nula o recurrente positiva.

Lema 47 *Si C es un conjunto cerrado y finito, entonces C tiene al menos un estado recurrente positivo.*

Demostración. Como C es cerrado

$$\sum_{y \in C} P^m(x, y) = 1 \quad \forall x \in C;$$

sumando sobre $m = 1, 2, \dots, n$ y dividiendo entre n , encontraremos que

$$\sum_{y \in C} \frac{G_n(x, y)}{n} = 1 \quad \forall x \in C.$$

Ahora supongamos que C también es finito y que cada estado en C es transitorio o recurrente nulo. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = 0,$$

de donde se obtiene que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in C} \frac{G_n(x, y)}{n} = \sum_{y \in C} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \sum_{y \in C} 0 = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe al menos un estado recurrente positivo. ■

Observe que una cadena de Markov irreducible y cerrada y además con un número finito de estados, necesariamente es recurrente positiva.

2.8 Existencia y Unicidad de las Distribuciones Estacionarias

En los desarrollos de la presente sección utilizaremos los siguientes resultados.

1. Si π es una distribución estacionaria y m un entero positivo, entonces

$$\sum_z \pi(z) P^m(z, x) = \pi(x) \quad \forall x \in S.$$

2. Sumando sobre $m = 1, 2, \dots, n$ y multiplicando por $\frac{1}{n}$ en la igualdad anterior, se obtiene que

$$\sum_z \pi(z) \frac{G_n(z, x)}{n} = \pi(x) \quad \forall x \in S.$$

Teorema 48 Si π una distribución estacionaria y x es un estado transitorio o recurrente nulo, entonces

$$\pi(x) = 0.$$

Demostración. Sea x un estado transitorio o recurrente nulo, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(z, x)}{n} = 0 \quad \forall z \in S.$$

Luego, por la propiedad (2) y el Teorema de Convergencia Acotada

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_z \pi(z) \frac{G_n(z, x)}{n} = \sum_z \pi(z) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(z, x)}{n} = 0.$$

Por lo tanto $\pi(x) = 0$. ■

Observación 49 De este Teorema tenemos que una cadena de Markov sin estados recurrentes positivos, no tiene distribución estacionaria, ya que en este caso $\pi(x) = 0$ para todo x en S .

Teorema 50 Una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva tiene una única distribución estacionaria π ; de hecho,

$$\pi(x) = \frac{1}{M_x} \quad \forall x \in S.$$

La demostración de este resultado puede consultarse en la referencia [1, Teorema 5, página 64]. Una consecuencia inmediata es la siguiente.

Corolario 51 *Una cadena de Markov irreducible es recurrente positiva si y solo si tiene una única distribución estacionaria.*

Demostración. Como la cadena es irreducible y recurrente positiva, por el teorema anterior, admite una distribución estacionaria. Por otra parte, si existe una distribución estacionaria implica que existe por lo menos un estado recurrente positivo y como la cadena es irreducible, todos los estados son recurrentes positivos. ■

Corolario 52 *Una cadena de Markov irreducible con un número finito de estados tiene una única distribución estacionaria.*

Demostración. Como la cadena tiene un número finito de estados, por lo menos tiene un estado recurrente positivo, y como la cadena es irreducible, todos los estados son recurrentes positivos y una cadena recurrente positiva tiene una única distribución estacionaria. ■

Corolario 53 *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov irreducible recurrente positiva y su distribución estacionaria π . Entonces con probabilidad 1*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x)}{n} = \pi(x) \quad \forall x \in S.$$

Demostración. Este resultado es una consecuencia de (2.4) y el teorema 50. ■

Sea π una distribución estacionaria y sea C un subconjunto de S . Diremos que π está concentrada en C si

$$\pi(x) = 0 \quad \forall x \notin C.$$

Teorema 54 *Sea C un conjunto cerrado e irreducible formado por estados recurrentes positivos. Entonces la cadena de Markov tiene una única distribución estacionaria concentrada en C . De hecho, esta distribución está dada como*

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{M_x} & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Demostración. Por el teorema anterior, $\pi(x) = 1/M_x$ para todo $x \in C$; como los elementos de C todos son los recurrentes positivos, entonces cualquier estado fuera de C es transitorio o recurrente nulo y en ambos casos sabemos que su distribución es $\pi(x) = 0$, $x \notin C$.

Conclusión 55 Sea R_p el conjunto de los estados recurrentes positivos de una cadena de Markov.

- (i) Si R_p es vacío, entonces la cadena no tiene distribución estacionaria.
- (ii) Si R_p es un conjunto irreducible y no vacío, entonces la cadena tiene una única distribución estacionaria.
- (iii) Si R_p es un conjunto no vacío pero no irreducible, es decir no comunicante, entonces la cadena tiene una infinidad de distribuciones estacionarias.

2.9 Convergencia a la Distribución Estacionaria

Definición 56 Sea $x \in S$ un estado de una cadena de Markov tal que $P^n(x, x) > 0$, para algún $n \geq 1$. El periodo de x se define como

$$d(x) = m.c.d \{n \geq 1 : P^n(x, x) > 0\}.$$

Note que $1 \leq d(x) \leq \min \{n \geq 1 : P^n(x, x) > 0\}$. Por otra parte, si $P(x, x) > 0$, entonces $d(x) = 1$.

Lema 57 Si x, y son estados tales que $x \leftrightarrow y$, entonces

$$d(x) = d(y).$$

Demostración. Puesto que $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow x$ existen enteros no-negativos n_1, n_2 tales que

$$P^{n_1}(x, y) > 0 \text{ y } P^{n_2}(y, x) > 0.$$

De la ecuación de Charmann-Kolmogorov obtenemos que

$$P^{n_1+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^{n_2}(y, x) > 0;$$

entonces $d(x)$ es divisor de $n_1 + n_2$. Si $P^n(y, y) > 0$, entonces

$$P^{n_1+n+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^n(y, y)P^{n_2}(y, x) > 0,$$

de donde se sigue que $d(x)$ también es divisor de $n_1 + n + n_2$; en consecuencia, $d(x)$ también es divisor de n . Esto es, $d(x)$ es divisor de todos los números en

el conjunto $\{n \geq 1 : P^n(y, y) > 0\}$. Sea $d(y)$ el divisor más grande; entonces $d(x) \leq d(y)$. Argumentos similares muestran que $d(y) \leq d(x)$. Por lo tanto, $d(x) = d(y)$. ■

Observe que de este lema se sigue que todos los estados de una cadena irreducible tienen el mismo periodo.

Definición 58 Decimos que una cadena de Markov es periódica con periodo d , si $d(x) = d > 1$ para toda $x \in S$, y aperiódica si $d = 1$ para todo $x \in S$.

Teorema 59 Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva con distribución estacionaria π . Si la cadena es aperiódica, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y), \quad x, y \in S.$$

Si la cadena es periódica con periodo d , entonces para cada par de estados $x, y \in S$ existe un entero r , $0 \leq r \leq d$, tal que $P^n(x, y) = 0$, a menos que $n = md + r$ para algún entero no negativo m . Además,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^{md+r}(x, y) = d\pi(y), \quad x, y \in S.$$

La demostración puede consultarse en la referencia [1]

Teorema 60 Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov homogénea con espacio de estados S finito, irreducible y aperiódica. Entonces existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta \in (0, 1)$ y una distribución π sobre S tales que

$$|P(x, y) - \pi(y)| \leq \alpha\beta^n \quad \forall x, y \in S, n \in \mathbb{N},$$

En particular, $P^n(x, y) \rightarrow \pi(y)$ para todo $x, y \in S$. Además π es una distribución estacionaria.

La demostración puede consultarse en Tijms ([2], Teorema 2.3.1, página 107).

Para presentar una consecuencia importante del teorema anterior, requerimos introducir la siguiente notación: Sea $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ y $\nu(\cdot)$ una distribución sobre S , definimos

$$\nu(u) := \sum_{y \in S} \nu(y)u(y).$$

siempre que la serie esté bien definida. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$P^n u(x) = \sum P^n(x, y) u(y).$$

Note que

$$E_x u(x_n) = P^n u(x).$$

Teorema 61 Sea $C : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria. Si la cadena es finita irreducible y aperiódica, entonces

$$|E_x C(x_n) - \pi(C)| \leq M\beta^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde π es la distribución estacionaria y M es una constante positiva. En particular, tenemos

$$\pi(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_x C(x_n) \quad \forall x \in S$$

Demostración. Sea $\#S$ la cardinalidad de S y $k = \max_x |C(x)|$; note que

$$\begin{aligned} |E_x C(x_n) - \pi(C)| &= \left| \sum_{y \in S} P^n(x, y) C(y) - \sum_{y \in S} \pi(y) C(y) \right| \\ &= \left| \sum_{y \in S} [P^n(x, y) - \pi(y)] C(y) \right| \\ &\leq k \sum_{y \in S} |P^n(x, y) - \pi(y)| \\ &\leq k \sum_{y \in S} \alpha \beta^n \leq k(\#S) \beta^n. \end{aligned}$$

Entonces $E_x C(x_n) = P^n_{xy} C(x) \rightarrow \pi(C)$. ■

2.10 Ecuación de Poisson

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov homogénea con probabilidades de transición $P(x, y)$, $x, y \in S$. Suponga que la cadena modela un sistema cuya operación genera costos $C(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, donde C es una función sobre el

espacio de estados. El costo de operación esperado en las primeras n etapas dado el estado inicial $x_0 = x$ es

$$S_n(x) := E_x \sum_{k=0}^{n-1} C(x_k) \quad x \in S, n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que el operador del sistema está interesado en estudiar el comportamiento de los *costos promedio por etapa* a largo plazos, esto es,

$$J(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(x) \quad x \in S. \quad (2.5)$$

El análisis de (2.5) tiene una fuerte relación con la existencia de soluciones a una ecuación funcional conocida como *Ecuación de Poisson*. Un par (h, e) formado por función $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ y una constante e es una solución de la *Ecuación de Poisson* para la función $C : S \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$h(x) = C(x) - e + Ph(x) \quad \forall x \in S. \quad (2.6)$$

El siguiente resultado muestra la relación entre (2.5) y (2.6).

Teorema 62 Sea $C : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y suponga que (h, e) es una solución de la ecuación de Poisson asociada a C . Entonces,

$$h(x) = E_x S_n(x) - ne + E_x h(x_n) \quad \forall x \in S, n \in \mathbb{N}.$$

Si además se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E_x h(x_n) = 0 \quad \forall x \in S,$$

entonces

$$J(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(x) = e \quad \forall x \in S.$$

Demostración. La primera igualdad se obtiene por iteración de la Ecuación de Poisson, mientras que la segunda, se obtiene al dividir por n y tomar límite cuando n tiende a infinito. ■

Observe que si (h, e) es una solución de la Ecuación de Poisson, entonces $(h + k, e)$ también es solución. Bajo ciertas condiciones, el recíproco de esta afirmación también se cumple. De forma más precisa, si (h_1, e) y (h_2, e) son soluciones de la Ecuación de Poisson con respecto a una función C , entonces

las funciones difieren por una constante aditiva, es decir, $h_1 - h_2 = k$. Para la demostración de este recíproco, introducimos el concepto de función armónica y presentamos un resultado sobre este tipo de funciones.

Diremos que $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función armónica* si

$$h(x) = Ph(x) \quad \forall x \in S. \quad (2.7)$$

Si en lugar de la condición anterior se cumple que

$$h(x) \geq Ph(x) \quad \forall x \in S,$$

a la función se le llama *super-armónica*.

Teorema 63 *Suponga que la cadena $\{x_n\}$ es irreducible, recurrente positiva y aperiódica, y sea π su distribución estacionaria. Si h es una función armónica acotada, entonces h es constante.*

Demostración. Iterando la ecuación (2.7) se obtiene

$$h(x) = P^n h(x) = \sum_{y \in S} P^n(x, y) h(y) \quad \forall x \in S, n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Por otra parte, note que por el Teorema 61, tenemos que

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n h(x) = \pi(h) \quad \forall x \in S.$$

Por lo tanto, h es constante. ■

Teorema 64 *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados finito, irreducible y aperiódica. Si h es una función super-armónica, entonces h es constante.*

Demostración. De nuevo, por iteración tenemos que

$$h \geq Ph \geq P^2 h \geq \dots \geq P^n h \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$h(x) \geq \pi(h) \geq h^* \quad \forall x \in S,$$

donde $h^* := \min_{x \in S} h(x)$; ahora note que tomando el mínimo en la desigualdad anterior nos deja

$$\min_{x \in S} h(x) = \pi(h) = h^*,$$

lo cual implica que

$$\sum \pi(y) [h(y) - h^*] = 0.$$

Puesto que la cadena es recurrente positiva e irreducible, tenemos que $\pi(y) > 0$ para todo $y \in S$. Por lo tanto,

$$h(y) = h^* \quad \forall y \in S. \blacksquare$$

Teorema 65 *Suponga que la cadena $\{X_n\}$ es irreducible, recurrente positiva y aperiódica, y sea π su distribución estacionaria. Sean (h_1, e) y (h_2, e) soluciones a la Ecuación de Poisson asociada a la función de costo $C : S \rightarrow \mathbb{R}$. Si $h_1 - h_2$ es una función acotada, entonces existe una constante k tal que $h_1 - h_2 = k$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos

$$h_1(x) = C(x) - e + Ph_1(x) \quad \forall x \in S,$$

$$h_2(x) = C(x) - e + Ph_2(x) \quad \forall x \in S.$$

Combinando estas ecuaciones, tenemos que la función $H := h_1 - h_2$ es armónica. Por el teorema anterior, tenemos que H es constante, lo cual demuestra el teorema. $\blacksquare$

En el siguiente teorema se prueba la existencia de soluciones a la ecuaciones de Poisson bajo las hipótesis del Teorema 60.

Teorema 66 *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados finito, irreducible y aperiódica. Para cada función C en S existe una solución a la ecuación de Poisson correspondiente.*

Demostración. Sea C una función arbitraria. Por el Teorema 61, existen constantes M y $\beta \in (0, 1)$ tales que

$$|E_x C(x_k) - \pi(C)| \leq M\beta^k \quad \forall x \in S, k \in \mathbb{N}.$$

Esto garantiza que la función

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} E_x [C(x_k) - \pi(C)] \quad x \in S,$$

estád bien definida; de hecho, $|h(x)| \leq M/(1 - \beta)$ para todo $x \in S$.

Denote por π a la distribución estacionaria y note que

$$\begin{aligned}
 h(x) &= E_x [C(x_0) - \pi(C)] + \sum_{k=1}^{\infty} E_x [C(x_k) - \pi(C)] \\
 &= C(x) - \pi(C) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E_x [C(x_k) - \pi(C)] \\
 &= C(x) - \pi(C) + \lim_{n \rightarrow \infty} P \sum_{k=0}^{n-1} P^k [C(x) - \pi(C)] \\
 &= C(x) - \pi(C) + P \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} P^k [C(x) - \pi(C)] \\
 &= C(x) - \pi(C) + Ph(x).
 \end{aligned}$$

Es decir, el par $(h, \pi(C))$ satisface la Ecuación de Poisson. ■

2.11 Martingalas

Sean $\{X_n\}$ y $\{M_n\}$ dos procesos estocásticos. Diremos que $\{M_n\}$ es una *martingala* con respecto a la sucesión $\{X_n\}$ si para todo $n \geq 0$,

$$E|M_n| < \infty \quad \text{y} \quad E[M_{n+1}|X_n, \dots, X_0] = M_n.$$

Ahora consideremos un tiempo de paro N y una martingala, en ambos casos, con respecto al proceso $\{X_n\}$. Es fácil verificar que la variable aleatoria

$$N \wedge n := \min\{N, n\}$$

también es un tiempo de paro con respecto a $\{X_n\}$. Al proceso definido como

$$M'_n := M_{N \wedge n} \quad n \in \mathbb{N}$$

se le conoce como *proceso de paro*.

Teorema 67 Sean $\{M_n\}$ una martingala y N un tiempo de paro con respecto a $\{X_n\}$. Entonces, el proceso de paro $\{M'_n\}$ es también una martingala con respecto a $\{X_n\}$.

La demostración puede consultarse en Ross ([3]), Proposición 7.2.1, página 229.

Teorema 68 (Teorema de Paro Opcional) Sea N un tiempo de paro y $\{M_n\}$ una martingala con respecto a $\{X_n\}$. Entonces

$$EM_N = EM_1,$$

si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a) $|M_{N \wedge n}| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) N es finito con probabilidad uno.
- (c) $EN < \infty$ y $E[|M_{n+1} - M_n| | X_1, \dots, X_n] \leq K' \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero observe que por el teorema anterior tenemos que $\{M_{N \wedge n}\}$ es una martingala; de esto se desprende que $E[M_{N \wedge n}] = E[M_1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la condición (c) implica que $|M_N| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuación note que

$$\begin{aligned} |EM_1 - EM_N| &= |EM_{N \wedge n} - EM_N| \\ &\leq |E[M_{N \wedge n} - EM_N] I_{[N > n]}| + |E[M_{N \wedge n} - EM_N] I_{[N \leq n]}| \\ &\leq 2 \max(K, K') P[N > n]. \end{aligned}$$

De la condición (b) se sigue que $P[N > n] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $|EM_1 - EM_N| = 0$, lo cual demuestra el resultado deseado. ■

Teorema 69 Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov homogénea con probabilidad de transición $P(x, y), x, y \in S$, y $C : S \rightarrow \mathbb{R}$. Si la pareja (h, e) es una solución acotada de la ecuación de Poisson correspondiente a C , es decir,

$$h(x) = C(x) - e + Ph(x) \quad \forall x \in S,$$

entonces, el proceso

$$M_n := \sum_{k=0}^{n-1} C(X_k) + h(X_n) - ne - h(x) \quad n \in \mathbb{N}$$

es una martingala con respecto a $\{X_n\}$. Además, si C es acotada y τ es un tiempo de paro finito con probabilidad uno, entonces

$$E_x \sum_{k=0}^{\tau-1} C(X_k) = eE_x \tau - E_x h(X_\tau) + h(x).$$

Demostración. Primero observe que

$$M_{n+1} - M_n = C(X_n) - e + h(X_{n+1}) - h(X_n).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_x [M_{n+1} - M_n | X_0, \dots, X_n] &= E_x [C(X_n) - e + h(X_{n+1}) - h(X_n) | X_0, \dots, X_n] \\ &= C(X_n) - e + E_x [h(X_{n+1}) | X_0, \dots, X_n] - h(X_n) \\ &= C(X_n) - e + E_x [h(X_{n+1}) | X_n] - h(X_n) \\ &= C(X_n) - e + \sum_x P(X_n, y) h(y) - h(X_n) \\ &= C(X_n) - e + Ph(X_n) - h(X_n) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E [M_{n+1} | X_0, \dots, X_n] = M_n.$$

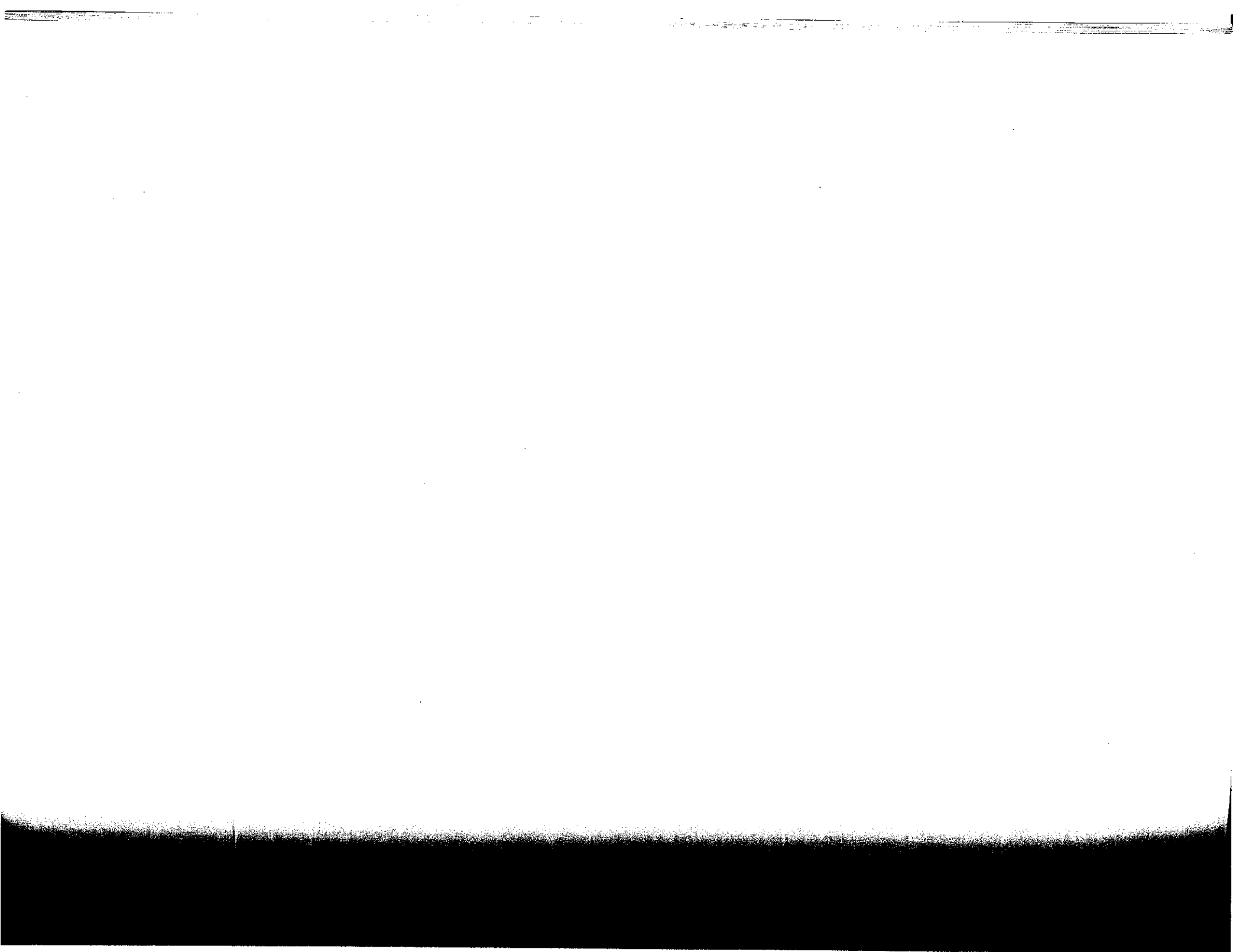
Para demostrar la segunda afirmación note que si C y h son funciones acotadas, entonces la martingala $\{M_n\}$ satisface las condiciones del Teorema de Paro Opcional. Entonces, si τ es un tiempo de paro finito con probabilidad uno, tenemos que

$$E_x M_\tau = E_x M_1 = h(x),$$

lo cual implica que

$$E_x \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} C(x_k) - e\tau + h(X_\tau) \right] = h(x),$$

lo cual a su vez demuestra el resultado. ■



Capítulo 3

PROCESOS DE RENOVACIÓN MARKOVIANOS

3.1 Introducción

Los resultados de la Sección 3.1. que trata sobre la regularidad de los procesos semi-markovianos se tomaron de [6]. La Sección 3.3 está basada en el trabajo [5].

Los procesos de renovación markovianos (PRMs) modelan sistemas que combinan la estructuras probabilísticas de una cadena de Markov y de un proceso de renovación, es decir, sistemas que realizan transiciones de acuerdo a una cadena de Markov pero los tiempos en los que dichas transiciones ocurren son aleatorios y su distribución puede depender del estado del sistema. Más específicamente, consideremos un sistema que en el tiempo inicial $T_0 := 0$ se encuentra en un estado inicial $X_0 = x_0$ donde permanece por un tiempo aleatorio T_1 ; en este instante el sistema se mueve hacia un nuevo estado $X_1 = x_1$ donde permanece hasta el tiempo aleatorio T_2 , y así sucesivamente.

Al proceso $\{(X_n, T_n)\}$ se le llama *proceso de renovación markoviano* (MRP) si cumple que

$$\begin{aligned} \Pr[X_{n+1} = x, T_{n+1} - T_n \leq t | X_0 = x_0, T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n, X_n = y] \\ = \Pr[X_{n+1} = x, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = y], \end{aligned}$$

para cualesquier elección de estados $x, x_1, \dots, x_{n-1}, y$, y reales no-negativos $t_1, t_2, \dots, t_n$ y todo natural $n \in \mathbb{N}$.

En todo lo que resta de este trabajo consideraremos un proceso de renovación markoviano $\{(X_n, T_n)\}$ con espacios de estados numerable S y supondremos que dicho proceso es homogéneo, esto es,

$$\begin{aligned} Q(y, t|x) &:= \Pr[X_{n+1} = y, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = x] \\ &= \Pr[X_{k+1} = y, T_{k+1} - T_k \leq t | X_k = x] \end{aligned}$$

para todo $x, y \in S$ y $n, k \in \mathbb{N}_0$. A la función de probabilidades $Q(\cdot, \cdot | \cdot)$ usualmente se le llama *kernel semi-markoviano*.

De la definición del kernel semi-markoviano se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

- $Q(x, t|y) \geq 0$ para todo $x, y \in S$ y $t \in \mathbb{R}_+$
- $\sum_{x \in S} Q(x, t|y) \leq 1$ para todo $y \in S$ y $t \in \mathbb{R}_+$.
- El kernel semi-markoviano $Q(x, t|y)$ es no-decreciente en la variable t , para todo $x, y \in S$. En consecuencia, la función

$$P(x|y) := \lim_{t \rightarrow \infty} Q(x, t|y)$$

está bien definida.

- Note además que

$$P(x|y) = \Pr[X_{n+1} = x | X_n = y] \quad \forall x, y \in S, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, el proceso de estados $\{X_n\}$ es una cadena de Markov con probabilidad de transición $P(\cdot | \cdot)$.

Otra forma de registrar la evolución del sistema es a través del proceso

$$Z(t) := X_n \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

A este proceso se le llama *proceso semi-markoviano*, mientras que a $\{X_n\}$ se le llama la *cadena inmersa* en el proceso semi-markoviano.

Es importante notar que, a priori, no se puede garantizar que el proceso semi-markoviano $\{Z(t) : t \geq 0\}$ está definido sobre todo el semi eje de los reales positivos. Esto se debe a la posibilidad de que la sucesión $\{T_n\}$ formada por los tiempos de transición o saltos del sistema sea acotada, esto es, que en ciertos intervalos de tiempo ocurran una infinidad de transiciones. El siguiente ejemplo muestra este fenómeno.

Ejemplo: Supongamos que

$$P_{ii+1} = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$F_{ii+1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq (1/2)^i \\ 0 & \text{si } t < (1/2)^i \end{cases}$$

Entonces, el proceso pasa de i para $i + 1$ en una cantidad de tiempo $(1/2)^i$, por lo tanto

$$\Pr\{N(2) = \infty | J_0 = i\} = 1, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

Para analizar con detalle esta situación y excluir la posibilidad de que ocurran, se introducen dos procesos asociados: el proceso de los tiempos de permanencia y un proceso de conteo que registra el número de transiciones que ocurren en determinados intervalos de tiempo.

Sea $\delta_n, n \in \mathbb{N}$, al tiempo transcurrido entre la $(n-1)$ -ésima y la n -ésima transición, es decir,

$$\delta_n := T_n - T_{n-1} \quad n \in \mathbb{N},$$

y defina

$$H(t|y) := \sum_{x \in S} Q(x, t|y) \quad y \in S, t \in \mathbb{R}_+.$$

Observe que

$$H(t|y) = \Pr[\delta_{n+1} \leq t | X_n = y] \quad \forall y \in S, t \in \mathbb{R}_+.$$

En otras palabras, $H(\cdot|y)$ es la distribución del *tiempo de permanencia* del sistema en el estado $y \in S$.

A continuación se introduce el siguiente proceso: para cada real $t \geq 0$, se define

$$N(t) := \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Note que $N(t)$ registra el número de transiciones en el intervalo de tiempo $(0, t]$. Para los procesos de renovación markovianos, de forma análoga a lo que ocurre en la teoría clásica de renovación, también tenemos que

$$T_n \leq t \iff N(t) \geq n.$$

De esta relación se deduce que la sucesión $\{T_n\}$ está acotada, digamos que por t_0 , si y sólo si $N(t_0) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en otras palabras, $T_n \leq t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ si y sólo si $N(t_0) = \infty$.

La siguiente sección está dedicada completamente a proporcionar condiciones que garanticen que la variable $N(t)$ es finita con probabilidad uno para cada $t \geq 0$.

3.2 Procesos Regulares

Definición 70 Diremos que un estado $x \in S$ es regular si

$$\Pr[N(t) < \infty | X_0 = x] = 1 \quad \forall t < \infty,$$

o equivalentemente, si

$$\Pr[T_n \rightarrow \infty | X_0 = x] = 1.$$

Diremos que el proceso de renovación markoviano es regular si todos los estados son regulares.

Un camino natural para obtener la propiedad de regularidad es evitar que el proceso renovación markoviano experimente demasiadas transiciones en intervalos cortos de tiempo, y la condición más usada para este efecto es la Condición de Ross ([3]), la cual se introduce a continuación.

Condición 71 (CR) Existen constantes α y β tal que

$$1 - H(\alpha/i) > \beta \quad \forall x \in S.$$

Para demostrar que CR garantiza la propiedad de regularidad requerimos algunos resultados preliminares sobre la estructura probabilística de los PRMs, los cuales se discuten a continuación.

Primero observe que si $P(x|y) > 0$, entonces existe una función $F(t|x, y) \geq 0$ tal que

$$Q(x, t|y) = F(t|x, y)P(x|y) \quad \forall t \geq 0,$$

puesto que

$$Q(x, t|y) \leq P(x|y) \quad \forall t \geq 0.$$

Por otra parte, si $P(x|y) = 0$, necesariamente $Q(x, t|y) = 0$ para todo $t \geq 0$, de manera que la ecuación anterior tiene una infinidad de soluciones. En este caso, definamos $F(t|y, x) := 0$ para todo $t \geq 0$.

Proposición 72 Sean x, y estados arbitrarios del PRM. Entonces,

$$F(t|y, x) = \Pr[\delta_{n+1} \leq t | X_n = y, X_{n+1} = x] \quad \forall t \geq 0, n \in \mathbb{N}_0.$$

Además,

$$H(t|y) = \sum_{x \in S} F(t|y, x)P(x|y) \quad \forall t \geq 0, y \in S.$$

Demostración. La primera parte de la proposición se obtiene directamente usando la definición de probabilidad condicional. La demostración de la segunda parte también se obtiene fácilmente de las definiciones. ■

Teorema 73 Para cada $n \in \mathbb{N}$, las variables $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ son condicionalmente independientes dadas las variables $X_0, X_1, \dots, X_n$. De hecho se cumple que

$$\Pr\{\delta_1 \leq t_1, \dots, \delta_n \leq t_n | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$$

$$= F(t_1|x_0, x_1) F(t_2|x_1, x_2) \cdots F(t_n|x_{n-1}, x_n)$$

para cualquier elección de reales no negativos $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Demostración. Realizaremos la demostración sólo para el caso $n = 2$, puesto que exhibe el esquema para la demostración en el caso general. Usando las definiciones y las propiedades de la probabilidad condicional se pueden verificar la siguiente secuencia de igualdades:

$$\begin{aligned}
 & \Pr \{ \delta_1 \leq t_1, \delta_2 \leq t_2 | X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \} \\
 &= \frac{\Pr \{ \delta_1 \leq t_1, \delta_2 \leq t_2, X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \}}{\Pr \{ X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \}} \\
 &= \frac{\Pr \{ \delta_2 \leq t_2 | \delta_1 \leq t_1, X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \}}{\Pr \{ X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \}} \\
 &\quad \times \Pr \{ \delta_1 \leq t_1, X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \} \\
 &= F(t_2 | x_1, x_2) \Pr \{ \delta_1 \leq t_1 | X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \} \\
 &= F(t_2 | x_1, x_2) F(t_1 | x_0, x_1). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Note que si el espacio de estados S consta de solo un estado x , entonces $P(x|x) = 1$. Luego entonces, las variables $\{\delta_n\}$ son independientes e idénticamente distribuidas.

Corolario 74 Si S consta de un solo estado, entonces $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un proceso de renovación.

También usaremos algunas propiedades de la función que se introduce a continuación: para cada estado $x \in S$ definimos

$$\Delta(x) = \int_0^\infty \exp(-s) H(ds|x).$$

Lema 75 La función $\Delta(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\Delta(x) > 0 \forall x \in S$;
- (b) $\Delta(x) = 1 \iff H(0|x) = 1$;
- (c) Si se satisface CR, entonces

$$\gamma := \sup_{x \in S} \Delta(x) < 1.$$

Demostración. La demostración de las dos primeras propiedades son directas. Para demostrar la tercera, observe que por el Teorema de Integración por Partes ([4] pag. 247) se obtiene que

$$\int_0^t \exp(-s)H(ds|x) - \int_0^t H(s|x) \exp(-s)ds = \exp(-t)H(t|x) - H(0|x).$$

Tomando límite cuando t tiende a infinito en la igualdad anterior, obtenemos

$$\Delta(x) = \int_0^\infty \exp(-s)H(ds|x) = \int_0^\infty H(s|x) \exp(-s)ds - H(0|x);$$

luego, puesto que $H(0|x) \geq 0$, tenemos

$$\Delta(x) \leq \int_0^\infty H(s|x) \exp(-s)ds.$$

Entonces, usando CR, resulta que

$$\begin{aligned} \Delta(x) &\leq \int_0^\alpha H(s|x) \exp(-s)ds + \int_\alpha^\infty H(s|x) \exp(-s)ds \\ &\leq (1-\beta) \int_0^\alpha \exp(-s)ds + \int_\alpha^\infty \exp(-s)ds \\ &\leq (1-\beta)[1 - \exp(-\alpha) + \exp(-\alpha)] \\ &= (1-\beta) - (1-\beta)\exp(-\alpha) + \exp(-\alpha) \\ &= (1-\beta) + \beta \exp(-\alpha) = 1 - \beta[1 - \exp(-\alpha)] < 1. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\Delta(x) \leq 1 - \beta[1 - \exp(-\alpha)] < 1. \blacksquare$$

Lema 76 $\Delta(X_0)\Delta(X_1)\cdots\Delta(X_n) \rightarrow 0 \iff T_n \rightarrow \infty$.

Demostración. Por el Teorema 73, las variables $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ son condicionalmente independientes dados los estados $X_1, X_2, \dots, X_n$, para cada

$n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} E[\exp(-T_n)|X_0, \dots, X_n] &= E[\exp(-(\delta_1 + \dots + \delta_n))|X_0, \dots, X_n] \\ &= E[\exp(-\delta_1)|X_0, \dots, X_n] \cdots E[\exp(-\delta_n)|X_0, \dots, X_n] \\ &= \Delta(X_0)\Delta(X_1)\dots\Delta(X_n). \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que

$$\Delta(X_0)\Delta(X_1)\dots\Delta(X_n) \rightarrow 0 \iff T_n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Con los resultados anteriores ya estamos en condiciones de demostrar que CR implica la regularidad de los procesos de renovación markovianos.

Teorema 77 *Si se satisface CR, entonces el proceso de renovación markoviano es regular.*

Demostración. Del Lemma 75(c) tenemos que

$$\Delta(X_0)\Delta(X_1)\dots\Delta(X_n) \leq \gamma^n \rightarrow 0,$$

puesto que $\gamma < 1$. Entonces,

$$\Pr[\Delta(X_0)\Delta(X_1)\dots\Delta(X_n) \rightarrow 0] = 1,$$

lo cual, por el Lemma 76, implica que

$$\Pr[T_n \rightarrow \infty|X_0 = x] = 1 \quad \forall x \in S.$$

Por lo tanto, el PRM es regular. $\blacksquare$

Otra caso en la que se obtiene la regularidad de los PRMs es cuando la cadena inmersa es recurrente o visita un estado recurrente con probabilidad uno para cada estado inicial.

Sea

$$S^* := \{x \in S : x \text{ es recurrente y } H(0|x) < 1\}.$$

Teorema 78 *Suponga que el conjunto $S^* \neq \emptyset$ y que para cada estado inicial $X_0 = x \in S$, la cadena inmersa $\{X_n\}$ visita con probabilidad uno a un estado recurrente del conjunto S^* . Entonces, el PRM es regular.*

Demostración. Suponga que la cadena alcanza al estado recurrente $y \in S^*$ dado que $X_0 = x \in S$. Definamos

$$\lambda_0 := 1 \quad \text{y} \quad \lambda_k := \inf \{n > \lambda_{k-1} : X_n = y\}$$

Puesto que la cadena es recurrente tenemos que $\Pr[\lambda_k < \infty] = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definamos ahora

$$V_n(y) := \sum_{k=0}^{n-1} I_{\{y\}} \{X_k\}$$

y observe que V_n es el número de visitas al estado y en las primeras n transiciones. De nuevo por la recurrencia de estado y , tenemos que

$$\Pr[\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \infty | X_0 = x] = 1.$$

Por otra parte, puesto que $\Delta(\cdot) \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta(X_0)\Delta(X_1)\dots\Delta(X_n) &\leq \Delta(X_{\lambda_0})\Delta(X_{\lambda_{k1}})\dots\Delta(X_{\lambda_{V_n}}) \\ &\leq [\Delta(y)]^{V_{n+1}}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\Pr[\Delta(X_0)\Delta(X_1)\dots\Delta(X_n) \rightarrow 0 | X_0 = x] = 1,$$

puesto que $\Delta(y) < 1$. Entonces, el estado x es regular. ■

3.3 Ecuación de Poisson Semi-Markoviana

Sea $C : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función fija y para cada $x \in S$ definamos las funciones

$$J_n(x) := E_x \sum_{k=0}^{n-1} C(x_k)$$

$$\Phi_t(x) := E_x \sum_{k=0}^{N(t)} C(x_k).$$

Note que si la función C representa costos por operar el sistema, entonces $J(x)$ representa el costo hasta la n -ésima transición dado que el sistema inició en el estado $X_0 = x \in S$; mientras que la función $\Phi_t(x)$ representa el costo hasta el tiempo t . El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento a largo plazo de estas funciones. Específicamente, estudiaremos los "costos promedio esperados" definidos como

$$J(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n(x)}{E_x T_n} \quad x \in S, \quad (3.1)$$

$$\Phi(x) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Phi_t(x) \quad x \in S. \quad (3.2)$$

El análisis de las funcionales (3.1) y (3.2) se realizará a través de la Ecuación de Poisson, como en el caso markoviano, solo que en este caso dicha ecuación toma una forma ligeramente diferente.

A la función

$$\mu(x) := E_x[\delta_k | X_{k-1} = x] = \int_0^\infty t H(dt|x) \quad x \in S$$

se le conoce como la función de los *tiempos medios de permanencia*.

Observación 79 *Observe que*

$$E_x T_n = E_x \sum_{k=0}^{n-1} \mu(x_k) \quad \forall x \in S, n \in \mathbb{N}.$$

Para verificar la igualdad anterior, note que

$$\begin{aligned} E_x[T_n | X_0, X_1, \dots, X_n] &= \sum_{k=1}^n E_x[\delta_k | X_0, X_1, \dots, X_n] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu(X_k) \quad \forall x \in S, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entonces, tomando esperanza en ambos lados de la igualdad, se obtiene el resultado deseado.

Además, note que

$$\begin{aligned}
E_x T_{N(t)+1} &= E_x \sum_{n=1}^{\infty} E_x [T_n | X_0, X_1, \dots, X_n, N(t) = n-1] \mathbf{I}_{[N(t)=n-1]} \\
&= E_x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu(X_k) \right) \mathbf{I}_{[N(t)=n-1]} \\
&= E_x \sum_{k=0}^{N(t)} \mu(X_k).
\end{aligned}$$

El par (h, ρ) , formado por una función $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ y una constante ρ , es una solución para la *Ecuación de Poisson para el caso Semi-Markoviano* (EPSM) correspondiente a la función C , si satisface

$$h(x) = C(x) - \rho \mu(x) + Ph(x) \quad \forall x \in S.$$

Proposición 80 Sea (h, ρ) una solución de la *Ecuación de Poisson para el caso Semi-Markoviano* (EPSM). Si $h(\cdot)$ es una función acotada y el PRM es regular, entonces

$$J(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n(x)}{E_x T_n} = \rho.$$

Demostración. Por una lado, iterando la EPSM se obtiene

$$h(x) = E_x \sum_{k=0}^{n-1} C(x_k) - \rho E_x \sum_{k=0}^{n-1} \mu(x_k) + P^n h(x) \quad \forall x \in S. \quad (3.3)$$

Por el otro lado, note que

$$E_x T_n = E_x \sum_{k=0}^{n-1} \mu(x_k) \rightarrow \infty.$$

puesto que $T_n \rightarrow \infty$ con probabilidad uno para cada estado inicial $x \in S$.

Ahora dividamos ambos lados de la ecuación (3.3) por $E_x T_n$ y tomemos límite cuando $n \rightarrow \infty$. Por la propiedad 79 y el acotamiento de la función, se obtiene que

$$J(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n(x)}{E_x T_n} = \rho. \blacksquare$$

Para analizar el comportamiento de la funcional $\Phi(\cdot)$, introducimos el proceso

$$M_n := \sum_{k=0}^{n-1} [C(x_k) - \rho\mu(x_k)] + h(x_n) \quad n \in \mathbb{N},$$

donde (h, ρ) es una solución de la EP correspondiente a la función C .

Lema 81 *Si las funciones $C, h, \mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas, entonces $\{M_n\}$ es una martingala con respecto al proceso $\{X_n\}$.*

Demostración. Este resultado se prueba con los mismos argumentos que se usaron en la demostración del Teorema 69. ■

Definamos

$$\hat{N}(t) := N(t) + 1 \quad t \geq 0.$$

Lema 82 (a) *El proceso $\{\hat{N}(t), t \geq 0\}$ es un tiempo de paro con respecto al PRM $\{(X_n, T_n)\}$.*

(b) *Si se satisface CR, entonces*

$$E_x \hat{N}(t) \leq 1 + \frac{t + \alpha}{\alpha\beta}.$$

La demostración puede consultarla en ([5]).

Teorema 83 *Suponga que las funciones $C, \mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas y que existen soluciones acotadas $(\tilde{h}, \tilde{\rho})$ y (h_μ, ρ_μ) de las ecuaciones de Poisson correspondientes, es decir, se satisfacen la ecuaciones*

$$\tilde{h}(x) = C(x) - \tilde{\rho} + P\tilde{h}(x) \quad \forall x \in S,$$

$$h_\mu(x) = \mu(x) - \rho_\mu + Ph_\mu(x) \quad \forall x \in S$$

Si se satisface CR, entonces se satisface la Ecuación de Wald para el PRM:

$$E_x \sum_{k=0}^{N(t)} C(x_k) = \tilde{\rho} E_x [N(t) + 1] + \tilde{h}(x) - E_x \tilde{h}(X_{N(t)+1}) \quad \forall x \in S, t \geq 0. \quad (3.4)$$

De forma similar, tenemos que

$$E_x \sum_{k=0}^{N(t)} \mu(x_k) = \rho_\mu E_x [N(t) + 1] + h_\mu(x) - E_x h_\mu(X_{N(t)+1}) \quad \forall x \in S, t \geq 0. \quad (3.5)$$

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 69, capítulo 2.

Teorema 84 *Suponga que se satisfacen las condiciones del Teorema 83. Entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_x [N(t) + 1] = \frac{1}{\rho_\mu} \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_x \sum_{k=0}^{N(t)} \mu(x_k) = 1.$$

Además,

$$\Phi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_x \sum_{k=0}^{N(t)} C(x_k) = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\mu} \quad \forall x \in S.$$

Demostración. Para comenzar, note que

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1} \quad \forall t > 0.$$

De la Observación 79 y la ecuación (3.5), se deduce que

$$1 \leq \frac{1}{t} E_x T_{N(t)+1} = \frac{1}{t} E_x \sum_{k=0}^{N(t)} \mu(x_k) \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{t} \rho_\mu E_x [N(t) + 1] + \frac{1}{t} h_\mu(x) - \frac{1}{t} E_x h_\mu(X_{N(t)+1}) \quad \forall x \in S, t > 0.$$

Ahora, puesto que la función $h_\mu(\cdot)$ es acotada, tomando límite cuando t tiende a infinito se obtiene

$$\frac{1}{\rho_\mu} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_x N(t).$$

A continuación observe que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}E_x T_{N(t)+1} &= \frac{1}{t}E_x T_{N(t)} + \frac{1}{t}E_x \mu(X_{N(t)+1}) \\ &\leq 1 + \frac{1}{t}E_x \mu(X_{N(t)}).\end{aligned}$$

Combinando esto último con (3.6), obtendremos que

$$\frac{1}{t}\rho_\mu E_x[N(t)+1] + \frac{1}{t}h_\mu(x) - \frac{1}{t}E_x h_\mu(X_{N(t)+1}) \leq 1 + \frac{1}{t}E_x \mu(X_{N(t)}). \quad (3.7)$$

Tomando límite nuevamente y usando el acotamiento de las funciones $h_\mu(\cdot)$ y $\mu(\cdot)$, se tiene

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}E_x[N(t)] \leq \frac{1}{\rho_\mu},$$

con lo cual se demuestra la primera afirmación del teorema.

La segunda afirmación del teorema se sigue inmediatamente de la ecuación (3.5) y la primera afirmación, mientras que la tercera se obtiene combinando las dos primeras afirmaciones y la ecuación (3.4). ■

Teorema 85 *Suponga que el espacio de estados S es finito y que la cadena inmersa $\{X_n\}$ es irreducible y aperiódica. Entonces,*

$$J(x) = \Phi(x) = \frac{\pi(C)}{\pi(\mu)} \quad \forall x \in S,$$

donde π es la distribución estacionaria de $\{X_n\}$.

Demostración. Por el Teorema 66 del Capítulo 2, existen soluciones a las ecuaciones de Poisson y lo correspondientes a las funciones $C(\cdot)$ y $\mu(\cdot)$ con las constantes

$$\rho_\mu = \pi(\mu) \quad \text{y} \quad \tilde{\rho} = \pi(C),$$

donde $\pi(\cdot)$ es la distribución estacionaria de la cadena inmersa.

La afirmación de este teorema es una consecuencia directa del Teorema 84. ■

Bibliografía

- [1] Hoel, Port, Stone (1972) *Introduction to Stochastic Processes*. Houghton Mifflin.
- [2] Henk C. Tijms (1994) *Stochastic Models An Algorithmic Approach*. John Wiley and Sons.
- [3] Sheldon M. Ross (1983) *Stochastic Processes*. Wiley.
- [4] Robert G. Bartle (1982) *Introducción al Análisis Matemático*. Limusa, S.A.
- [5] F. Luque-Vásquez, O. Vega-Amaya (2004), *Time and ratio expected average cost optimality for semi-Markov control processes on Borel spaces*, Communication in Statistics: Theory and Methods, Vol 33 (3), 715-734, 2004.
- [6] O. Vega-Amaya (2002), *A note on regularity of semi-markov processes whit Borel state space*, Reporte de Investigación Número 18, Departamento de matemáticas, Universidad de Sonora.
- [7] A.A. Yushkevich (1981), *On Semi-Markov controlled models with on average reward criterion, theory of Probability and it's applications*, XXVI, 769-803.