Existencia y Construcción de Funciones Continuas y Diferenciables en Ninguna Parte

Marysol Navarro Burruel

May 21, 2008

Contents

Introducción

Cuando recién escuché de la existencia de una función continua en todos los puntos de un intervalo pero que no tiene derivada en punto alguno de ese mismo intervalo fue algo sorprendente para mi. Posteriormente, fue un ejemplo visto en el curso de análisis II y aun en ese momento se me dificultaba visualizarlo y estoy segura que no solo a mí me sorprendió, sino a muchos de mis compañeros, ya que esto deja a un lado nuestra intuición o sentido común, como muchas cosas más de matemáticas. Cuando un estudiante acaba de ingresar a la carrera, incluso en los primeros semestres creemos que todas las funciones continuas son diferenciables, o por lo menos que son diferenciables excepto en un número finito de puntos, como es el caso de la función valor absoluto, que no es diferenciable en el origen, y son de los primeros (por no decir el primer) contraejemplos para verificar que derivabilidad implica continuidad pero no a la inversa. Aunque parezca extraño, cuando uno empieza a estudiar cálculo y ve que todas las funciones derivables son continuas, a veces tiende a imaginar que el recíproco es cierto, es decir que todas las funciones continuas son derivables, pero mas adelante en la carrera verificamos que esto no es cierto.

Esta situación no solo es algo que nos ocurre a los estudiantes. A principios del siglo XIX, los matemáticos pensaban que una función continua en un intervalo era derivable en "casi todos" los puntos de ese intervalo. Aun más, en 1806, el científico André Marie Ampére intentó, sin éxito, demostrar esta conjetura.

Fue hasta 50 años más tarde que Karl Theodor Wilheim Weierstrass publicó el primer ejemplo de una función continua y diferenciable en ninguna parte. Aunque no fue el primero que construyó una de estas funciones. Probablemente el primer ejemplo de una función de esta clase fue dada por el matemático checo Bernard Bolzano. El manuscrito de Bolzano titulado "Functionenlehre" que contenía esta función fue escrito alrededor de 1830 y publicada 100 años después en Praga cuando otro matemático checo descubrió este manuscrito en la Biblioteca Nacional de Viena. Para una descripción completa de la historia de "Functionenlehre" ver [11].

El segundo y tercer ejemplos de funciones continuas y diferenciables en ningún punto fueron dados por Charles Cellérier en 1860 y Riemann en 1861. La función de Cellérier fue publicada en 1890 y la función de Riemann en 1986. Posteriormente, varios matemáticos dieron algunas construcciones de este tipo de funciones, muchas de las cuales son variantes de la función de Weierstrass, como el caso de la función de Van der Waerden. Desde entonces y hasta nuestros días, atraidos por la naturaleza no intuitiva de estas funciones, los matemáticos han ideado diversos procedimientos para construirlas o para demostrar su existencia.

Lo interesante de estas funciones no acaba aquí, pues algo mucho más sorprendente, es que este tipo de funciones son “más abundantes” que las funciones continuas y diferenciables en algún punto, desde el punto de vista topológico. Incluso puede resultarnos paradójico pensar que todas las funciones que vemos en Cálculo I y II están dentro del conjunto de las funciones continuas y diferenciables en algún punto, y son “muchas menos” que las continuas y no derivables en punto alguno. Se que esta afirmación puede sonar extraña, a mi me pareció así, pero está demostrado, y en mi tesis lo veremos.

Debido a todas las razones anteriores y muchas más, fue que me interesé en hacer esta tesis, y desde el momento en que mi asesora me lo propuso estuve dispuesta y entusiasmada en hacerla.

Uno de los objetivos en mi tesis, es que sirva como complemento a los cursos de análisis matemático I y II para los estudiantes de licenciatura, ya que es raro encontrar este tipo de ejemplos en los libros de matemáticas y mucho menos unificados. Mi meta es estudiar y comparar algunas construcciones clásicas y otras recientes de funciones que son continuas en todos los puntos de un intervalo pero que no tienen derivada en punto alguno de ese mismo intervalo. El tema de esta tesis encaja perfectamente en los objetivos generales mencionados ya que involucra centralmente un uso amplio de conceptos básicos de análisis matemático, como son los conceptos de límite, continuidad y continuidad uniforme de funciones, la convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones reales, derivabilidad de funciones reales, intercambio de procesos límite, espacios métricos y otros. Además, el tema es particularmente apropiado desde el punto de vista didáctico, ya que las funciones que se estudiarán en la tesis jugaron un significativo papel histórico durante el siglo XIX en la formulación y estudio rigurosos de los conceptos mencionados anteriormente.

Antes de iniciar con las construcciones de funciones continuas no diferenciables, necesitamos de algunas definiciones y teoremas, que serán usados en las demostraciones. Es por esto que el Capítulo I esta dedicado a los prerrequisitos.

Empezaremos con una una breve introducción a los espacios métricos, continuidad, convergencia y compacidad. Algunos de los resultados solo se enuncian con su respectiva referencia ya que son vistos en los cursos de análisis I y II. Dentro de esta sección incluimos un apartado relativo a la métrica de Hausdorff, definida en la familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico conexo y compacto. Para terminar esta sección vemos brevemente mapeos de contracción y el Teorema del punto fijo, ya que toda esta teoría será utilizada en la última construcción de una función continua en todas partes y diferenciable en ninguna, en el último capítulo.

Posterioremente veremos definiciones y resultados de sucesiones y series de funciones reales, siendo de gran importancia el Teorema M-Weierstrass, así como el hecho de que la convergencia uniforme preserva la continuidad. Estos resultados los uso en varias de las construcciones aquí presentadas para ver que la función en cuestión es continua.

Finalmente, en el Capítulo I vemos los siguientes dos resultados:

1. Intersección anidada de conjuntos compactos no vacíos es compacto y no vacío.

2. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si su gráfica es compacta.

Estos resultados serán usados en la construcción de la función de Marck Lynch, que veremos en el Capítulo III.

En el Capítulo II, ya con los prerrequisitos dados, muestro algunas construcciones, como la de Weierstrass, que es la primera función continua no diferenciable publicada y que está definida mediante la siguiente serie de funciones

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j \cos 15^j \pi x.$$

Enseguida estudiamos la función de Van der Waerden, de la cual presento dos demostraciones, una más general que la otra. En la primera vemos que la función construida no es derivable por ambos lados, y en la segunda demostración vemos que la función no es derivable por un lado. La función de **Van der Waerden** está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(x),$$

donde $a_0(x)$ es la distancia de x al entero mas cercano y $a_k(x) = 2^{-k} a_0(2^k x)$.

Una construcción más, es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la serie de funciones

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x),$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= |x|, \qquad\qquad -1 \leq x \leq 1 \\ \varphi(x+2) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Esta función es uno de los ejemplos mas comunes y es muy parecida a la función de Van der Waerden.

Todas estas construcciones son muy similares, ya que están definidas mediante una serie de funciones continuas, y su no diferenciabilidad se demuestra mediante una proposición enunciada y demostrada al inicio de este mismo Capítulo.

En el Capítulo III a diferencia de las funciones construidas en el capítulo anterior, construiremos dos funciones de las cuales no daremos una expresión analítica, otra diferencia es que nos será fácil imaginarnos sus gráficas. La primera es la función de Marck Lynch, la cual se construye a través de conjuntos compactos anidados y no vacíos, de tal manera que su intersección sea la gráfica de una función continua y no derivable en punto alguno. La continuidad se obtiene inmediatamente de la construcción y dos resultados ya mencionados. Posteriormente demostramos también su no diferenciabilidad.

Esta construcción es muy diferente a las anteriores, ya que no está dada mediante una serie y su construcción es mas geométrica, creo que en esto radica su belleza e importancia.

La segunda función constuída por H. Katsuura, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ se define como el límite uniforme de una sucesión de funciones lineales continuas por piezas $f_n : [0, 1] \to R$. Para construir la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ usamos mapeos de contracción w de la familia de subconjuntos cerrados de $X = [0, 1] \times [0, 1]$ en si mismo con respecto a la métrica de Hausdorff inducida por la métrica Euclideana. Lo que vemos es que la sucesión iterada $\{w^n(A)\}$ de conjuntos, donde A es un subconjunto cerrado y no vacío del cuadrado X, converge a la gráfica de f en la métrica de Hausdorff.

Si A es la diagonal de X, entonces veremos que $w^n(A)$ será la gráfica de f_n, y así nos podremos dar una idea intuitiva de la gráfica de f.

En esta construcción usamos conceptos de Topología, cuya teoría se encuentra en el Capítulo 1. Nuestro espacio de trabajo son todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico conexo y compacto X, llamado 2^X. El hecho de que 2^X es completo con la métrica de Hausdorff es de suma importancia en la construcción de la funcion continua no diferenciable. También es importante recordar que un mapeo de contracción en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo, ya que por construcción de nuestra función f veremos que este único punto fijo será la gráfica de f.

En el último Capítulo veremos que las funciones continuas en todas partes y diferenciables en ninguna parte son "más" que las funciones continuas y diferenciables en algún punto, desde el punto de vista topológico. Al inicio de este Capítulo, damos algunas definiciones y teoremas necesarios para esta demostración, como la definición de espacios normados y espacios de Banach, así como las definiciones de espacios de primera y segunda categoría, donde podemos observar que los espacios de primera categoría son "flacos" y los de segunda categoría son "gordos".

El resultado más importante utilizado para la demostración de nuestro teorema central, es el Teorema de Baire, el cual dice que todo espacio métrico completo es de segunda categoría, es decir está “gordito”.

Utilizando este resultado y el hecho de que el espacio métrico de las funciones continuas es completo, veremos que el conjunto formado por todas las funciones continuas que no tienen derivada en punto alguno es de segunda categoría y por lo tanto está gordito, y no puede ser vacío, pues el vacío es de primera categoría. De aquí que existen funciones continuas que no tienen derivada en punto alguno.

A grandes rasgos, en esto consiste mi tesis. Espero que cumpla el propósito para el cual fue escrita y que sea de su total agrado, como lo fue del mío.

Quiero aprovechar para agradecer muy especialmente al M.C. Eduardo Tellechea Armenta, por ayudarme en la construcción de las gráficas, pero sobre todo por su disposición, pues a pesar de nunca haberme dado clases, siempre estuvo dispuesto a atenderme de la mejor manera. Por último, también quiero agradecer a mi compañero y amigo Julio Brau Ávila, por el tiempo que invirtió al enseñarme a usar latex y ayudarme con las gráficas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Espacios Métricos

En esta sección recordaremos algunas definiciones y resultados básicos de espacios métricos.

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Diremos que una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica o distancia en X si para todo $x, y, z \in X$:*

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *que es la desigualdad del triangulo.*

A la pareja (X, d) se le llama espacio métrico y a los elementos de X los llamaremos puntos.

Ejemplo: Fácilmente se puede demostrar que el espacio

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\},$$

con la función

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

es un espacio métrico.

1.1.1 Continuidad y Convergencia

Definición 1.2. *(Continuidad)*
Sean (X,d_1), (Y,d_2) espacios métricos, sean $f : X \to Y$ y $x_0 \in X$. Diremos que f es continua en x_0 si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d_1(x,x_0) < \delta$ entonces $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Definición 1.3. *Sean (X,d_1), (Y,d_2) espacios métricos y $f : X \to Y$. Decimos que f es continua si f es continua en cada $x_0 \in X$.*

Proposición 1.4. *Sean (X,d_1), (Y,d_2) espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ y sea $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f\left(B_\delta(x_0)\right) \subset B_\varepsilon\left(f(x_0)\right)$.*

Demostración: ver [3], página 90.

Teorema 1.5. *Sea $f : X \to Y$ una función de un espacio métrico (X,d_x) en otro (Y,d_y). Entonces f es continua en X si, y sólo si, para cada conjunto abierto T de Y, la imagen inversa $f^{-1}(T)$ es abierta en X.*

Demostración: ver [1], página 99

Teorema 1.6. *Sean (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de X. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = d(x,A)$. Entonces f es una función continua.*

Demostración:
Lo que demostraremos es que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ para cada $x,y \in X$. En efecto, para cada $z \in A$ tenemos que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} d(x,A) &= \inf_{z\in A} d(x,z) \\ &\leq \inf_{z\in A} [d(x,y) + d(y,z)] \quad \text{para toda } y \in X \\ &= d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z) \quad \text{para toda } y \in X \\ &= d(x,y) + d(y,A). \end{aligned}$$

Del mismo modo obtenemos que

$$d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A).$$

Por tanto

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ cuando $d(x, y) < \varepsilon$. Por tanto f es continua.
■

Definición 1.7. *(Convergencia)*
Diremos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en el espacio métrico X converge al elemento $b \in X$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $d(x_n, b) < \varepsilon$. Lo cual denotamos por $x_n \to b$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

Proposición 1.8. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en el espacio métrico X, tal que toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene a su vez una subsucesión que converge a $x_0 \in X$. Entonces $x_n \to x_0$.*

Demostración: Supongamos que x_n no converge a x_0. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, con $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_k}, x_0) \geq \varepsilon \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}.$$

De aquí se sigue que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ no puede tener subsucesión alguna que converja a x_0, lo cual es una contradicción a la hipótesis. Por tanto $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
■

Proposición 1.9. *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos, $x_0 \in X$ y $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ una función. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \to x_0$ se cumple $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x_0$ y $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(x_0)$ entonces $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$. Ya que $x_n \to x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\delta(x_0)$ para toda $n \geq \mathbb{N}$, de aquí que $f(x_n) \in B_\varepsilon(f(x_0))$ para toda $n \geq \mathbb{N}$, por tanto $f(x_n) \to f(x)$.
($\Leftarrow$) Si f no es continua en x_0, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d_1(x_\delta, x_0) < \delta$ y $d_2(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Tomamos $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, así existe

$x_n \in X$ tal que $d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ y $d_2(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \to x_0$ pero $f(x_n)$ no converge a $f(x_0)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es continua en x_0. ■

Definición 1.10. *Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy en el espacio métrico (X, d) si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m, n \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definición 1.11. *Diremos que un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge en X.*

1.1.2 Compacidad

Definición 1.12. *Sean (X, d) un espacio métrico, y $\{U_\lambda : \lambda \in I\}$ una familia de abiertos de X. Decimos que $\{U_\lambda : \lambda \in I\}$ es una cubierta abierta del conjunto $K \subset X$ si $K \subset \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$. Si $J \subset I$ y $K \subset \bigcup_{\lambda \in J} U_\lambda$ diremos que $\{U_\lambda : \lambda \in J\}$ es una subcubierta de K y cuando J es finito decimos que la subcubierta es finita.*

Definición 1.13. *Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $K \subset X$ se dice compacto si para cada cubierta abierta de K podemos encontrar una subcubierta finita.*

Proposición 1.14. *Sea X un espacio métrico y sea K un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado.*

Demostración:

Veamos que $X \backslash K$ es abierto. Sea $x \in X \backslash K$; para cada $y \in K$ tenemos que $y \neq x$, así que podemos hallar bolas abiertas digamos $B(y)$ y $B^y(x)$ de centros y y x respectivamente, que no se intersectan, es decir, tal que $B(y) \cap B^y(x) = \emptyset$.

La familia de bolas abiertas $\{B(y) : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K y K es compacto, así existe una colección finita de puntos $y_1, y_2, ..., y_n \in K$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{n} B(y_i)$; además $B(y_i) \cap B^{y_i}(x) = \emptyset$.

Sea $O = \cap_{j=1}^{n} B^{y_j}(x)$. Veamos que $K \cap O = \emptyset$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
K \cap O &= K \cap \bigcap_{j=1}^{n} B^{y_j}(x) \\
&\subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(y_i) \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} B^{y_j}(x) \right) \\
&\subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(y_i) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B^{y_j}(x) \right) \\
&\subset \bigcup_{i=1}^{n} (B(y_i) \cap B^{y_i}(x)) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}
$$

Entonces $x \in O \subset X \backslash K$, de aquí que $X \backslash K$ es abierto.

Definición 1.15. *Sea (X, d) un espacio métrico y $E \subset X$. Decimos que E está acotado si $diamE < \infty$, donde*

$$diam(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}.$$

Proposición 1.16. *Todo subconjunto compacto está acotado.*

Demostración: Sea K un subconjunto compacto de X. La familia de bolas $\{B_1(x) : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K y por tanto existen $x_1, ..., x_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$. Además

$$\mathrm{diam}(K) \leq \mathrm{diam} \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i) \right) \leq \mathrm{diam}\{x_1, ..., x_n\} + 2,$$

ya que si $x, y \in \bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$ existen i, j tales que $x \in B_1(x_i)$ y $y \in B_1(x_j)$ entonces

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 1 + \mathrm{diam}\{x_1, ..., x_n\} + 1 = \mathrm{diam}\{x_1, ..., x_n\} + 2.$$

Por lo tanto K está acotado.

Proposición 1.17. *Sea X un espacio métrico compacto y $F \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces F es compacto.*

Demostración: Sea $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de F, es decir

$$F \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

Tenemos que $\mathcal{F} = \{G_\alpha : \alpha \in I\} \cup \{X \backslash F\}$ es una cubierta abierta de X, y como X es compacto existe una subcubierta finita $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ de X.
Sea $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}' \backslash \{X \backslash F\}$. Entonces

$$\mathcal{F}'' \subset \{G_\alpha : \alpha \in I\},$$

y es una cubierta finita de F. Por tanto F es compacto.
■

Teorema 1.18. *Sea $f : S \to T$ una función continua de un espacio métrico (S, d_s) en otro (T, d_t). Si X es un subconjunto compacto de S, entonces la imagen $f(X)$ es un subconjunto compacto de T. En particular, $f(X)$ es un conjunto cerrado y acotado de T.*

Demostración: ver [1], página 100.

Teorema 1.19. *Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función real de un espacio métrico S en el espacio $\mathbb{R}$. Supongamos que f es continua y que X es un subconjunto compacto de S. Entonces existen puntos p y q de X tales que*

$$f(p) = \inf f(X)$$
$$f(q) = \sup f(X).$$

Demostración: ver [1], página 101.

Teorema 1.20. *(Heine - Borel)*
Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Demostración: ver [3], página 115.

Teorema 1.21. *(Bolzano - Weierstrass)*
Si un subconjunto acotado S de $\mathbb{R}$ contiene un número infinito de puntos, entonces existe al menos un punto en $\mathbb{R}$ que es un punto de acumulación de S.

Demostración: Sea S un subconjunto acotado de R que contiene un número infinito de puntos. Supongamos que S no tiene puntos de acumulación. Entonces S es cerrado y como también S es acotado, por el Teorema (1.20) tenemos que S es compacto. Como S no tiene puntos de acumulación, dado cualquier x en S, existe una vecindad $B(x)$ de x tal que $S \cap B(x) = \{x\}$. Entonces la familia $\{B(x) : x \in S\}$ es una cubierta abierta de S, y como S es compacto, existen $x_1, x_2, ...x_n$ en S tal que $\{B(x_1), B(x_2), ..., B(x_n)\}$ cubre a S, es decir $S = \cup_{i=1}^{n} B(x_i)$. Pero por otro lado

$$S \cap [B(x_1) \cup ... \cup B(x_n)] = \{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

de donde $S = \{x_1, x_2, ...x_n\}$, lo cual es una contradicción, pues S tiene un número infinito de puntos. Por tanto S tiene al menos un punto de acumulación.

Teorema 1.22. *(De Rolle)*
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a, b), y supongamos también que f es continua en los puntos extremos a y b. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe por lo menos un punto interior c, en el que $f'(c) = 0$.

Demostración: Supongamos que f' no es cero en ningún punto de (a, b). Como f es continua en el compacto $[a, b]$, por el Teorema 1.19 tenemos que f alcanza su máximo y su mínimo. Le llamaremos M al máximo de f y m al mínimo.

Obsérvese que ninguno de dichos valores extremos puede ser alcanzado en un punto interior, pues f' se anularía y esto contradice nuestra hipótesis; por lo tanto la función los alcanza en los extremos del intervalo, como $f(a) = f(b)$, entonces $m = M$, y por lo tanto f es constante en $[a, b]$. Pero esto contradice el supuesto de que f' no es cero en ningún punto de (a, b).
Por lo tanto $f' = 0$ para algún c de (a, b). ■

Teorema 1.23. *(Valor Medio para Derivadas)*
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a, b) y supongamos además que f es continua en los extremos a y b. Entonces existe al menos un punto c de (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demostración: Consideremos la función φ definida en $[a, b]$ por

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La función φ satisface las hipótesis del Teorema de Rolle (1.22), ya que φ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Entonces, existe un punto c en (a,b) tal que

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Por lo tanto

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

■

Lema 1.24. *sea $\mathcal{A}=\{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos compactos. Si la intersección de toda subfamilia finita de A es no vacía entonces $\cap_{n=1}^{\infty}A_n\neq\emptyset$.*

Demostración: Supongamos que $\cap_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$. Entonces existe $r\in\mathbb{N}$ tal que ningún elemento de A_r pertenece a todo A_n, $n\in\mathbb{N}$. De aquí que $\mathcal{C}=\{A_n^c, n\in\mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de A_r, es decir

$$A_r\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c.$$

Dado que A_r es compacto existe una subcubierta finita de $\mathcal{C}$, digamos $\left\{A_{n_1}^c, A_{n_2}^c, ..., A_{n_k}^c\right\}$, tal que $A_r\subset A_{n_1}^c\cup A_{n_2}^c\cup ...\cup A_{n_k}^c$. Entonces $A_r^c\supset A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap ...\cap A_{n_k}$, y por tanto

$$A_r\cap A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap ...\cap A_{n_k}=\emptyset,$$

lo cual es una contradicción, ya que $\{A_r, A_{n_1}, A_{n_2}, ..., A_{n_k}\}$ es una subfamilia finita cuya intersección no debe ser vacía. Por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\neq\emptyset.$$

■

Teorema 1.25. *La intersección de una sucesión anidada de conjuntos compactos no vacíos es compacto y no vacío.*

Demostración: Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión anidada de conjuntos compactos no vacíos de X. Como cada A_n es compacto tenemos que A_n es cerrado para cada $n\in\mathbb{N}$ y como la intersección de conjuntos cerrados es siempre cerrado, tenemos que $\cap_{n=1}^{\infty}A_n$

es un subconjunto cerrado del conjunto compacto A_1 y por tanto es compacto. Solo falta mostrar que la intersección es no vacía.

Para ello demostraremos que la intersección de toda subfamilia finita de (A_n) es no vacía y por el lema anterior tendremos que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. En efecto: sea $\{A_{n_1}, A_{n_2}, ..., A_{n_k}\}$ una subfamilia finita de (A_n), donde $n_1 < n_2 < ... < n_k$, entonces

$$A_{n_1} \supset A_{n_2} \supset ... \supset A_{n_k},$$

luego tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i} = A_{n_1} \neq \emptyset,$$

y por el Lema 1.24 tenemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

■

Teorema 1.26. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si su gráfica es compacta en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua. Probaremos que

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x,y) : x \in [a,b], y = f(x)\}$$

es compacta.

Primero veamos que es cerrada. Sea $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Graf(f) tal que $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Tenemos que demostrar que $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graf}(f)$. Como $(x_n, y_n) \in \mathrm{Graf}(f)$ para toda n, entonces $y_n = f(x_n)$. Como $x_n \to x_0 \in [a,b]$ y f es continua entonces $f(x_n) \to f(x_0)$, pero también $f(x_n) = y_n \to y_0$, entonces como el límite de una sucesión es único tenemos que $f(x_0) = y_0$. Por tanto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graf}(f)$, de aquí que Graf($f$) es cerrada. Solo falta ver que es acotada, lo cual se tiene inmediatamente ya que al estar la función continua definida en un compacto tenemos que alcanza su máximo y su mínimo, de aquí que $f([a,b])$ es acotada; es decir $f([a,b]) \subset [-M, M]$ para algún $M \in \mathbb{R}$. Entonces como $\mathrm{Graf}(f) \subset [a,b] \times [-M, M]$ tenemos que la gráfica debe ser acotada.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que Graf(f) es compacto. Sea $(x_n) \in [a,b]$ tal que $x_n \to x_0$. Probaremos que $f(x_n) \to f(x_0)$.
Sea $z_k = x_{n_k}$, $k = 1, 2, ...$, una subsucesión de (x_n). Probaremos que $(f(z_k))_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge a $f(x_0)$. Como $(z_k, f(z_k)) \in \mathrm{Graf}(f)$, y la Graf($f$)

es compacta existe una subsucesión $(z_{n_k}, f(z_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ que converge a un elemento $(\overline{x}, f(\overline{x})) \in$Graf$(f)$. Es decir,

$$z_{n_k} \to \overline{x} \quad y \quad f(z_{n_k}) \to f(\overline{x}).$$

Como $x_n \to x_0$ se tiene que $\overline{x} = x_0$. Así que $f(z_{n_k}) \to f(x_0)$. Por la Proposición 1.8 se obtiene que

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Esto es, f es continua.
■

1.1.3 Métrica de Hausdorff

Definición 1.27. *Un Continuo es un espacio métrico conexo y compacto, con más de un punto.*

Los únicos ejemplos de continuos en $\mathbb{R}$ son los intervalos cerrados, es decir $[a, b]$ con $a < b$, y los conjuntos de un solo punto, $\{a\}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Denotemos con 2^X a la familia de subconjuntos de X no vacíos y cerrados, es decir,

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado en } X, A \neq \emptyset\}.$$

Dotaremos enseguida a 2^X con la llamada métrica de Hausdorff. Para ello primero definamos las nubes de la siguiente manera.

Definición 1.28. *Sea $\varepsilon > 0$, y A un elemento de 2^X, definimos la nube de radio ε y centro en A, de la siguiente manera,*

$$N(\varepsilon, A) := \{x \in X : \text{ existe } a \in A, \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}. \tag{1.1}$$

Proposición 1.29. $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a)$.

Demostración: Primero tomemos $x \in N(\varepsilon, A)$, por definición de nube, tenemos que existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Entonces $x \in B_\varepsilon(a)$, de aquí que

$$x \in \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

Ahora, sea $x \in \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $x \in B_\varepsilon(a)$, de aquí que $d(a, x) < \varepsilon$. Por tanto

$$x \in N(\varepsilon, A).$$

■

Obsérvese que si X es un continuo y si p es un punto de X tenemos que $N(\varepsilon, \{p\}) = B_\varepsilon(p)$, y también si $A \subseteq X$, entonces $N(\varepsilon, A)$ es un conjunto abierto.

Proposición 1.30. *Sea X un continuo, A, B y C elementos de 2^X, y ε, $\delta > 0$. Si $A \subseteq N(\varepsilon, C)$ y $C \subseteq N(\delta, B)$. Entonces $A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B)$.*

Demostración: Sea $a \in A$, veamos que $A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B)$. Como $a \in A \subseteq N(\varepsilon, C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < \varepsilon$, y como $C \subseteq N(\delta, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(b, c) < \delta$, de aquí que

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < \varepsilon + \delta.$$

Es decir, para $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon + \delta$. Por tanto $A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B)$.
■

Definición 1.31. *(Métrica de Hausdorff para 2^X).*
Sean $A, B \in 2^X$, donde X es un continuo. Definamos $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+$ de la siguiente manera:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$

Teorema 1.32. *Dados, $A, B, C \in 2^X$, se tiene que:*

1. *$H(A, B)$ está bien definido.*
2. *$H(A, B) \geq 0$.*
3. *$H(A, B) = H(B, A)$.*
4. *$H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.*

5. Se satisface la desigualdad del triángulo. $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$.

Es decir, H(A,B) es una métrica para 2^X, llamada la métrica de Hausdorff.

Demostración:
1) Primero veamos que $H(A,B)$ está bien definido:

Sea $A, B \in 2^X$. Como $A \neq \emptyset$, existe $a_0 \in A$, y como B es cerrado contenido en un compacto X, tenemos que B es compacto, y por tanto está acotado. Entonces existe $x_1 \in X$ y $\delta_1 > 0$ tal que $B \subseteq B_{\delta_1}(x_1)$. Sea $\varepsilon_1 = d(a_0, x_1) + \delta_1$, así para $b \in B$, tenemos que

$$d(b, a_0) \leq d(a_0, x_1) + d(x_1, b) < d(a_0, x_1) + \delta_1 = \varepsilon_1.$$

Por tanto $B \subseteq B_{\varepsilon_1}(a_0) \subseteq N(\varepsilon_1, A)$.

Análogamente, como $B \neq \emptyset$, existe $b_0 \in B$ y además A está acotado, entonces existe $x_2 \in X$ y $\delta_2 > 0$ tal que $A \subseteq B_{\delta_1}(x_1)$. Sea $\varepsilon_2 = d(x_1, b_0) + \delta_1$. Por tanto

$$A \subseteq B_{\varepsilon_2} \subseteq N(\varepsilon_2, B).$$

Sea $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Entonces $B \subseteq N(\varepsilon_1, A) \subseteq N(\varepsilon, A)$, y $A \subseteq N(\varepsilon_2, B) \subseteq N(\varepsilon, B)$. Por tanto $\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\} \neq \emptyset$, y como $\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$ está acotado inferiormente por el cero, entonces existe el ínfimo. De aquí que $H(A,B)$ está bien definido.

2) $H(A,B) \geq 0$, pues como $\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\} \subseteq [0, \infty)$, entonces $\inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\} \geq 0$.

3) Claramente $H(A,B) = H(B,A)$, pues A y B juegan papeles simétricos en la definición de H.

4) Veamos que $H(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $H(A,B) = 0$. Demostraremos que $A \subset B$ y que $B \subset A$.

Sea $b \in B$, como A es cerrado, tenemos que $A = \overline{A}$. Es suficiente probar que $b \in \overline{A}$, es decir, que dado $\delta > 0$, $B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset$.
Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\delta > 0 = H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$

Entonces existe $\varepsilon' \in \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$ tal que $\delta > \varepsilon'$. De aquí que, $A \subseteq N(\varepsilon', B) \subseteq N(\delta, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon', A) \subseteq N(\delta, A)$.
Por tanto $b \in N(\delta, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \delta$, es decir $a \in B_\delta(b)$. Por lo tanto

$$B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset.$$

De aquí que $b \in \overline{A} = A$. Por tanto $B \subseteq A$.

Análogamente probamos que $A \subseteq B$. Por lo tanto $A = B$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $A = B$. Como para todo $\varepsilon > 0$ siempre tenemos que $A \subset N(\varepsilon, A)$. Entonces

$$\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\} = \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, A)\} = (0, \infty).$$

Por tanto $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\} = 0$.

5) Probemos la desigualdad del triángulo.
Sean $A, B, C \in 2^X$.

$$\begin{aligned} H(A, C) + H(C, B) &= \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, C), C \subseteq N(\varepsilon, A)\} \\ &\quad + \inf\{\delta > 0 : C \subseteq N(\delta, B), B \subseteq N(\delta, C)\} \\ &= \inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, C), C \subseteq N(\varepsilon, A), C \subseteq N(\delta, B), B \subseteq N(\delta, C)\} \\ &\geq \inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B), B \subseteq N(\varepsilon + \delta, A)\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : A \subseteq N(\lambda, B), B \subseteq N(\lambda, A)\} \\ &= H(A, B), \end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene de la Proposición 1.30. Por tanto

$$H(A, C) + H(C, B) \geq H(A, B).$$

■

El siguiente lema nos da una caracterización alternativa de la métrica de Hausdorff.

Lema 1.33. *Para A, $B \in 2^X$ denotemos*

$$G(A, B) = \max \left\{\sup\{d(y, A) : y \in B\}, \sup\{d(x, B) : x \in A\}\right\}.$$

Entonces $G = H$, donde H es la métrica de Hausdorff.

Demostración:
Probaremos primero que $G \leq H$. Sea $r > 0$ tal que $N(r, A) \supset B$ y $N(r, B) \supset A$. Que $N(r, B) \supset A$ implica que para toda $x \in A$, $d(x, B) < r$ y por tanto

$$\sup\{d(x, B) : x \in A\} \leq r.$$

Similarmente obtenemos que

$$\sup\{d(y, A) : y \in B\} \leq r.$$

De aquí que

$$\max\{\sup\{d(y,A) : y \in B\}, \sup\{d(x,y) : x \in A\}\} < r.$$

Es decir $G \leq H$.

Para probar la desigualdad contraria probaremos que para $\varepsilon > 0$ arbitrario, $H \leq G+\varepsilon$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\overline{r} = G + \varepsilon$. Probaremos que $N(\overline{r}, A) \supset B$, como

$$\sup\{d(y,A) : y \in B\} \leq G,$$

tenemos que $d(y,A) \leq G$. Por lo tanto, existe $x \in A$ tal que $d(x,y) < \overline{r}$. Así se obtiene que $y \in N(\overline{r}, A)$. Similarmente se puede probar que $N(\overline{r}, B) \supset A$. Por lo tanto $G + \varepsilon = \overline{r} \geq H$. Consecuentemente $G \geq H$.
■

Teorema 1.34. *Sea X un continuo, A, B elementos de 2^X y $r > 0$. Entonces $H(A,B) \leq r$ si y sólo si $A \subseteq N(r,B)$ y $B \subseteq N(r,A)$.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $H(A,B) < r$. Sea ε_0 tal que $r > \varepsilon_0 > \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B), B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Entonces tenemos que

$$A \subset N(\varepsilon_0, B) \subset N(r,B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon_0, A) \subset N(r,A).$$

($\Leftarrow$) Si $A \subseteq N(r,B)$ y $B \subseteq N(r,A)$. Entonces

$$r \in \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(r,B), B \subseteq N(r,A)\},$$

y por la propiedad de ínfimo tenemos que

$$\inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon,B), B \subseteq N(\varepsilon,A)\} \leq r.$$

Por tanto $H(A,B) \leq r$.
■

Ya que tenemos definida la métrica de Hausdorff para 2^X, veamos ahora como es la convergencia en 2^X con respecto ella.

Definición 1.35. *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Definimos el límite inferior de (A_n) y el límite superior de (A_n) de la siguiente manera:*

1. $\liminf A_n = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset, \forall n \geq N\}$.

2. $\limsup A_n = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ *para una infinidad de* $n's\}$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran las definiciones anteriores.

Ejemplo 1: Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$. Definamos en 2^X la siguiente sucesión:

$$A_n = \begin{cases} [1,3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ [0,2] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

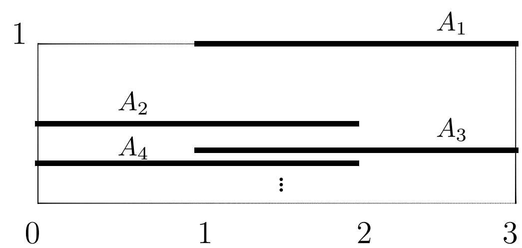


Figure 1.1:

Entonces

$$\liminf(A_n) = [1,2] \times \{0\},$$
$$\limsup(A_n) = [0,3] \times \{0\}.$$

Ejemplo 2: Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$. Definamos en 2^X la siguiente sucesión:

$$A_n = \begin{cases} [2,3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

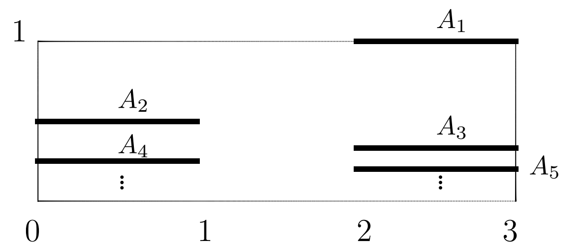


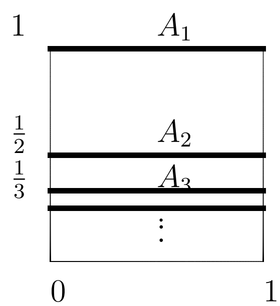
Figure 1.2:

Entonces

$$\liminf(A_n) = \emptyset,$$

$$\limsup(A_n) = \{[0,1] \times \{0\}\} \cup \{[2,3] \times \{0\}\}.$$

Ejemplo 3: Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq 1\}$ y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en 2^X definida por $A_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$.



Entonces

$$\liminf(A_n) = [0,1] \times \{0\},$$

$$\limsup(A_n) = [0,1] \times \{0\}.$$

Proposición 1.36. *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X, entonces:*

a) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

b) $\liminf A_n$ *y* $\limsup A_n$ *son conjuntos cerrados en X.*

c) $\limsup A_n \neq \emptyset$ *para toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X.*

Demostración:
a) Sean $x \in \liminf A_n$ y $\varepsilon > 0$. Por definición existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para toda } n \geq N.$$

De aquí que

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \text{para una infinidad de } n's,$$

y por lo tanto $x \in \limsup A_n$.

b) Para demostrar que $\limsup A_n$ es un conjunto cerrado es suficiente demostrar que $\overline{\limsup A_n} \subseteq \limsup A_n$.

Sea $x \in \overline{\limsup A_n}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\limsup A_n \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset.$$

De aquí que existe $y \in \limsup A_n \cap B_\varepsilon(x)$, y como $B_\varepsilon(x)$ es abierta y $y \in B_\varepsilon(x)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x).$$

Como $y \in \limsup A_n$ implica que $B_\delta(y) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. De aquí que

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de } n's.$$

Por lo tanto $x \in \limsup A_n$, es decir $\limsup A_n$ es un conjunto cerrado en X. Análogamente se obtiene que el $\liminf A_n$ es un conjunto cerrado en X.

c) Veamos que $\limsup A_n \neq \emptyset$ para toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X, como $A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, elegimos $a_n \in A_n$. Además como X es compacto, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_{n_k} \to x$, para algún $x \in X$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$ para toda $k \geq K$. De aquí que

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de } n's.$$

Por tanto $x \in \limsup A_n$, es decir, $\limsup A_n \neq \emptyset$.
■

Teorema 1.37. *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Entonces;*
a) *$x \in \liminf A_n$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \in A_n$ para toda n y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*
b) *$x \in \limsup A_n$ si y sólo si existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$, y existen puntos x_{n_k} tales que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \liminf(A_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos $x_n \in A_n$ de tal forma que
$$d(x_n, x) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\},$$
donde d es la métrica en X. Veamos que los $x_{n's}$ están bien definidos para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = d(x, y)$, la cual es una función continua y como A_n es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f alcanza su mínimo en A_n para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A_n$ tal que
$$f(x_n) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\}.$$
De aquí que cada x_n está bien definido.
Ahora probemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sea $\varepsilon > 0$, como $x \in \liminf A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para toda } n \geq N.$$
Por tanto, para cada $n \geq N$ existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$. Entonces
$$d(x_n, x) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\} \leq d(x, a_n) < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N.$$
De manera que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para toda $n \geq N$. Por tanto $x_n \to x$.

($\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X tal que $x_n \to x$, y $x_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N.$$
De aquí que $x_n \in B_\varepsilon(x)$ para toda $n \geq N$, y como por hipótesis $x_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que
$$x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A_n \text{ para toda } n \geq N.$$
Por tanto $x \in \liminf A_n$.

b) ($\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \limsup A_n$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$,
$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de } n's.$$
Tomemos $\varepsilon = 1$. Así tenemos que
$$B_1(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de } n's.$$
Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que
$$x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1},$$

entonces $d(x_{n_1}, x) < 1$, y $x_{n_1} \in A_{n_1}$.
Ahora para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tenemos que

$$B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de } n's.$$

Entonces podemos elegir $n_2 > n_1$ tal que

$$B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2} \neq \emptyset.$$

Sea $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2}$. Entonces

$$d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}, \text{ y } x_{n_2} \in A_{n_2}.$$

Continuando inductivamente, tenemos que existen naturales $n_1 < n_2 < ...$, y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tales que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}.$$

Por tanto $x_{n_k} \to x$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$, y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tal que $\lim x_{n_k} = x$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_k,x}) < \varepsilon \text{ para toda } k \geq K.$$

Esto implica que

$$x_{n_k} \in B_\varepsilon(x) \cap A_n \text{ para toda } k \geq K,$$

es decir $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$, y por lo tanto $x \in \limsup A_n$.
■

Teorema 1.38. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* 2^X. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *en* 2^X *con la métrica de Hausdorff si y sólo si* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $A \in 2^X$ y que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con la métrica de Hausdorff. Demostraremos que $\liminf A_n = \limsup A_n = A$.
Primero veamos que

$$A \subseteq \liminf A_n. \tag{1.2}$$

Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $A_n \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(A_n, A) < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N.$$

De aquí que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$. Entonces $a \in N(\varepsilon, A_n)$ para cada $n \geq N$, es decir, existe $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \varepsilon$. De manera que

$$x_n \in A_n \cap B_\varepsilon(a) \text{ para toda } n \geq N,$$

y por tanto $a \in \liminf A_n$.

Ahora demostraremos que

$$\limsup A_n \subseteq A, \tag{1.3}$$

y con esto y con (1.2) tendremos lo deseado. Supongamos que $\limsup A_n \not\subseteq A$, entonces existe $x \in \limsup A_n$ tal que $x \notin A$. Como $A \in 2^X$ tenemos que A es cerrado en X, entonces dado que $x \notin A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset.$$

Por otro lado, como $x \in \limsup A_n$, se satisface que

$$B_{\varepsilon/2}(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de } n's. \tag{1.4}$$

Dado que $A_n \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para toda } n \geq N.$$

De aquí que $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ para toda $n \geq N$.
Por (1.4) podemos elegir $M \geq N$ tal que

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_M \neq \emptyset.$$

Sea $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_M$. Entonces

$$d(z, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } z \in A_M \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A).$$

De aquí que existe $a \in A$ tal que $d(a, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto

$$d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es decir, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$, lo cual contradice la elección de ε, pues estamos suponiendo que $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto $\limsup A_n \subseteq A$.
Con (1.2) y con (1.3) concluimos que

$$\liminf A_n = \limsup A_n = A.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\liminf A_n = \limsup A_n$. Sea $A = \limsup A_n$, por la Proposición 1.36 tenemos que $A \neq \emptyset$ y es cerrado; es decir, $A \in 2^X$. Por demostrar que $\lim A_n = A$. Sea $\varepsilon > 0$, primero probemos que:
a) Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ par toda $n \geq M_1$.
En efecto, obsérvese que la familia de bolas abiertas $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta para A, y como A es cerrado no vacío contenido en el compacto X, tenemos que A es compacto. Entonces existe una colección finita, digamos $a_1, a_2, ..., a_m \in A$ tal que

$$A \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_1) \cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_2) \cup ... \cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_m).$$

Como también $A = \liminf A_n$, y $a_i \in A$ para toda $i = 1, 2, ..., m$, tenemos que para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para toda } n \geq N_i.$$

Sea $M_1 = \max\{N_1, N_2, ...N_m\}$. Entonces para $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y $n \geq M_1$ tendremos que

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n \neq \emptyset. \tag{1.5}$$

Afirmamos que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ para toda $n \geq M_1$. En efecto, sea $n \geq M_1$ y $a \in A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i)$. Entonces existe $i \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que

$$d(a, a_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.6}$$

además por (1.5) para $n \geq M_1$ tenemos que existe $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n$, es decir

$$d(x, a_i) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ con } x \in A_n. \tag{1.7}$$

De (1.6) y (1.7) tenemos que

$$d(a, x) \leq d(a, a_i) + d(a_i, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto

$$d(a, x) < \varepsilon \text{ para toda } n \geq M_1.$$

De aquí que $a \in N(\varepsilon, A_n)$ para toda $n \geq M_1$.

Ahora probemos que
b) Existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$ para toda $n \geq M_2$.

Supongamos que no es cierto, es decir que para toda $N \in \mathbb{N}$ existen $n's \geq N$ tal que $A_n \not\subseteq N(\varepsilon, A)$. Entonces para

$$N = 1 \text{ existe } n_1 \geq 1 \text{ tal que } A_{n_1} \not\subseteq N(\varepsilon, A).$$

Para

$$N = n_1 \text{ existe } n_2 > n_1 \text{ tal que } A_{n_2} \not\subseteq N(\varepsilon, A).$$

De manera inductiva, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$, tal que

$$A_{n_k} \not\subseteq N(\varepsilon, A) \text{ para toda } k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{n_k} \in A_{n_k} \backslash N(\varepsilon, A) \subset X$. Como X es compacto, existe $x_0 \in X$ y $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ una subsuseción de $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_{k_i}} \to x_0$.
Como $X \backslash N(\varepsilon, A)$ es un conjunto cerrado en X, y $x_{n_{k_i}} \in X \backslash N(\varepsilon, A)$ para toda $i \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{i \to \infty} x_{n_{k_i}} = x_0 \in X \backslash N(\varepsilon, A).$$

De aquí que $x_0 \notin A$.

Por otra parte, como $\lim_{i \to \infty} x_{n_{k_i}} = x_0$ y $\{A_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, por el Teorema 1.37 tenemos que

$$x_0 \in \limsup A_n = A,$$

lo cual es una contradicción, por tanto existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_n \subseteq N(\varepsilon, A) \text{ para toda } n \geq M_2.$$

Habiendo probado **a)** y **b)**, definimos

$$N = \max\{M_1, M_2\}.$$

Entonces, para $n \geq N$ tenemos que

$$A \subseteq N(\varepsilon, A_n) \text{ y } A_n \subseteq N(\varepsilon, A).$$

De aquí que

$$H(A, A_n) \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N.$$

Por tanto $\lim A_n = A \in 2^X$.
■

Teorema 1.39. *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en 2^X . Entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge con la métrica de Hausdorff a un elemento $A_0 \in 2^X$. Es decir el espacio métrico 2^X es completo.*

Demostración:
Por el Teorema 1.38 el único candidato para el $\lim_{n\to\infty} A_n$ es $A_0 = \limsup A_n$, el cual es no vacío y cerrado, es decir $\limsup A_n \in 2^X$.
Para ver que $\lim_{n\to\infty} A_n = A_0$, por el teorema anterior es suficiente ver que

$$\limsup A_n \subseteq \liminf A_n. \tag{1.8}$$

Sea $x \in \limsup A_n$, veamos que $x \in \liminf A_n$. Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en 2^X, dado $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para toda } n, m \geq N. \tag{1.9}$$

Como $x \in \limsup A_n$ tenemos que $B_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Tomemos $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M_0 \geq N$ y que satisfaga

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_{M_0} \neq \emptyset. \tag{1.10}$$

Así, dado $n \geq N$, por (1.9) tendremos que

$$H(A_{M_0}, A_n) < \frac{\varepsilon}{2};$$

de aquí que

$$A_{M_0} \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \text{ para toda } n \geq N. \tag{1.11}$$

Sea $y \in A_{M_0} \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, el cual existe por (1.10). Por (1.11) tenemos que si $n \geq N$, entonces existe $z \in A_n$ tal que

$$d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como además

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2},$$

se tiene entonces que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De aquí que $z \in B_{\varepsilon}(x)$ y como también $z \in A_n$, tenemos que si $n \geq N$,

$$B_{\varepsilon}(x) \cap A_n \neq \emptyset.$$

Por tanto $x \in \liminf A_n$. Es decir $\limsup A_n \subseteq \liminf A_n$ y como la otra contención siempre se cumple, tenemos que $\limsup A_n = \liminf A_n$. Entonces por el teorema anterior tenemos que la sucesión de Cauchy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en 2^X.
■

1.2 Mapeos de Contracción y Teorema del punto fijo

Sea $T : X \to X$ un mapeo de un espacio métrico (X, d) en sí mismo. Un punto p de X se dice un **punto fijo** de f si $f(p) = p$.

Definición 1.40. *Sea (X, d) un espacio métrico y $T : X \to X$. El mapeo T se denomina* **contracción** *de X si existe un número positivo $\lambda < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \textit{para todo } x, y \in X.$$

Puede observarse fácilmente de la definición que una contracción es uniformemente continua.

Teorema 1.41. *(del punto fijo) Sean (X, d) un espacio métrico completo, y T una contracción de X en sí mismo. Entonces T tiene un único punto fijo x. Es más, si x_0 es cualquier punto en X y se define recursivamente la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ por*

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, ...,$$

entonces $\lim x_n = x$.

Demostración: Primero veamos que T no puede tener más de un punto fijo. En efecto, sean x_1, x_2 dos puntos fijos de T. Entonces

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) \text{ donde } \lambda \in (0, 1).$$

De aquí que $d(x_1, x_2) = 0$. Por tanto $x_1 = x_2$.

A continuación veamos que T tiene un punto fijo. Para ello tomemos cualquier punto $x_0 \in X$ y definamos

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, ...$$

Entonces, para $k > 0$

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(T(x_{k-1}), T(x_k)) \leq \lambda d(x_{k-1}, x_k),$$

donde la primer igualdad se obtiene por definición de x_n y la segunda desigualdad del hecho que T es un mapeo de contracción. Pero a su vez

$$\lambda d(x_{k-1}, x_k) = \lambda d(T(x_{k-2}), T(x_{k-1})) \leq \lambda^2 d(x_{k-2}, x_{k-1}),$$

es decir,

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \lambda^2 d(x_{k-2}, x_{k-1}).$$

Al realizar repetidamente estos pasos podemos concluir que

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \lambda^i d(x_{k-i}, x_{k-i+1}) \text{ para } i = 1, 2, ...k. \tag{1.12}$$

En general, si $m > n \geq 1$, al utilizar repetidamente la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+(m-n-1)}, x_{n+(m-n-1)+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{m-n-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \lambda^i d(x_{n+j-i}, x_{n+j-i+1}), \;\; i = 1, ..., n+j, \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde la última desigualdad se debe a (1.12).
Tomando ahora $i = j + 1$ obtenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \lambda^{j+1} d(x_{n+1}, x_n).$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-n-1} \lambda^{j+1} d(x_{n+1}, x_n) &= d(x_{n-1}, x_n) \sum_{j=0}^{m-n-1} \lambda^{j+1} \\ &= d(x_{n-1}, x_n) \left[\frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} - 1 \right] \\ &= d(x_{n-1}, x_n) \left[\frac{1 - \lambda^{m-n} - 1 + \lambda}{1 - \lambda} \right] \\ &= d(x_{n-1}, x_n) \left[\frac{\lambda - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} \right] \\ &\leq d(x_{n-1}, x_n) \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde en la segunda igualdad utilizamos la identidad

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda^i = \frac{1 - \lambda^{r+1}}{1 - \lambda},$$

con $\lambda \in (0, 1)$, y la desigualdad se sigue de que $m > n \geq 1$.

Por tanto, de (1.13) y (1.14) tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_{n-1}, x_n) \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Aplicando (1.12) a $d(x_{n-1}, x_n)$, con $i = n-1$. Obtenemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \lambda^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lambda \in (0, 1)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1) = 0$$

De aquí que, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n \geq N.$$

Por tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo X. De modo que existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Entonces

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = x.$$

Donde la segunda igualdad se debe a la continuidad de T y la tercera por definición de x_n.
Por lo tanto x es un punto fijo de T.
■

1.3 Sucesiones y Series de Funciones Reales

Definición 1.42. *(Convergencia Puntual.)*

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones reales definidas en un conjunto* S. *Se dice que* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge puntualmente sobre* S *si para cada* $x \in S$, *la sucesión* $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *converge.*
Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge puntualmente sobre* S, *definimos la función* $f : S \to \mathbb{R}$ *por*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

A la función f *se le llama el límite puntual de* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *y se dice que* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge puntualmente a* f.

Definición 1.43. *(Convergencia Uniforme.)*

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas en un conjunto* S. *Se dice que* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente sobre* S *a una función* f *si, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para toda $n > N$ *y para toda* $x \in S$.

Definición 1.44. *Sea* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *una serie de funciones definidas en un conjunto* S. *Se dice que la serie converge si la sucesión* $\{s_n\}$ *es convergente, donde*

$$s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

es llamada la n-ésima suma parcial de la serie, para $n = 1, 2, ...$

Se dice que la serie es divergente si la sucesión de sumas parciales diverge.

Teorema 1.45. *(De Cauchy para Convergencia Uniforme)*

Una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente a una función* f *sobre* S*, si y sólo si, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

siempre que $n, m > N$ *y para toda* $x \in S$*.*

(En este caso, se dice que la sucesión (f_n) *satisface la propiedad de Cauchy).*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f. Así para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$$

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon/2,$$

para toda $x \in S$.
Así tenemos que para toda $x \in S$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

siempre que $n, m \geq N$, es decir, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface la propiedad de Cauchy.

($\Leftarrow$) Ahora, supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface la propiedad de Cauchy. Probaremos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f.
Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces para cada $x \in S$, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. De aquí que $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge, pues $\mathbb{R}$ es completo.

Sea

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Hasta aquí tenemos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f. Afirmamos que la convergencia de hecho es uniforme. En efecto, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2 \text{ para } \ n, m \geq N \text{ y } x \in S.$$

Fijando $n > N$ y tomando límite cuando $m \to \infty$ tenemos:

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon \quad \text{para} \quad x \in S.$$

De aquí que,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{para toda } x \in S \quad \text{y} \quad n > N.$$

Por lo tanto $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f. ■

Teorema 1.46. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en S y supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre S a f. Entonces f es continua.*

Demostración:

Sean $c \in S$ y $\epsilon > 0$. Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f, entonces existe N tal que $n \geq N$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3, \quad \text{para toda } x \in S. \tag{1.15}$$

Ya que $c \in S$ se tiene $|f_n(c) - f(c)| < \epsilon/3$, si $n \geq N$. En particular

$$|f_N(c) - f(c)| < \epsilon/3. \tag{1.16}$$

Como f_N es continua, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$, entonces

$$|f_N(x) - f_N(c)| < \epsilon/3. \tag{1.17}$$

Así que para toda $x \in S$ con $|x - c| < \delta$, por (1.15), (1.16) y (1.17) tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon$$

siempre que $|x - c| < \delta$, y $x \in S$, es decir f es continua en c. Como c es arbitrario, se obtiene que f es continua en S.

■

Corolario 1.47. *Sea* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones continuas, definidas en* S *y supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente a una función* f *en* S*. Entonces* f *es continua.*

Demostración

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ la sucesión de sumas parciales. Como (S_n) es una sucesión de funciones continuas y (S_n) converge uniformemente a f en S, entonces por el Teorema 1.46 se obtiene que f es continua.

■

Teorema 1.48. *(M-Test de Weierstrass)*

Supongamos que $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones definidas en* $S \subset \mathbb{R}$ *y* $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales no negativos tales que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \textit{para toda } x \in S \textit{ y para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente sobre* S*.*

Demostración: Probaremos que las sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ satisfacen la condición de Cauchy.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $m > n > N$ entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{m} M_k \right| = M_{m+1} + ... + M_n < \epsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S_m(x)| &= |f_{m+1}(x) + ... + f_n(x)| \\ &\leq |f_{m+1}(x)| + ... + |f_n(x)| \\ &\leq M_{m+1} + ... + M_n \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se tiene por hipótesis.

Es decir

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon \quad \text{para } n > m > N.$$

De aquí que $S_n(x)$ satisface la condición de Cauchy, y por el Teorema 1.45 tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sobre S. $\blacksquare$

CAPÍTULO 2

Construcciones con Series de Funciones.

2.1 Introducción

En este Capítulo veremos algunas construcciones de funciones continuas en todos los puntos de un intervalo y diferenciables en ningún punto del mismo. El primero es la función de Weierstrass, que es la primera función continua no diferenciable publicada, y que está definida mediante una serie de funciones trigonométricas de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j \cos 15^j \pi x.$$

Enseguida estudiaremos la función de Van der Waerden, de la cual presento dos demostraciones, una más general que la otra. En la primera veremos que la función construida no es derivable por ambos lados y en la segunda demostración veremos que la función no es derivable por un lado. La función de **Van der Waerden** está definida mediante una serie cuyos términos son funciones “tipo serrucho”

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(x),$$

donde $a_0(x)$ es la distancia de x al entero más cercano y $a_k(x) = 2^{-k} a_0(2^k x)$.

La tercera definición que presentaremos aquí, es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la serie de funciones

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x),$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= |x| \quad \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \quad \text{y} \\ \varphi(x+2) &= \varphi(x) \quad \text{si} \quad |x| > 1. \end{aligned}$$

Esta función es una variación de la función de Van der Waerden, que se encuentra en algunos libros de texto de análisis y artículos de divulgación.

La característica común de estas construcciones es que están definidas mediante una serie de funciones continuas, y su no diferenciabilidad se demuestra mediante la Proposición (2.1) enunciada y demostrada al inicio de este mismo capítulo.

Iniciamos esta sección probando el siguiente resultado técnico, que usaremos mas adelante.

Proposición 2.1. *Sea f derivable x, sean $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $u_n < v_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \to 0$ y $u_n \leq x \leq v_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = f'(x).$$

Demostración: Como $u_n \leq x \leq v_n$ y $v_n - u_n \to 0$, se deduce que

$$\frac{f(v_n) - f(x)}{v_n - x} \to f'(x), \tag{2.1}$$

$$\frac{f(x) - f(u_n)}{x - u_n} \to f'(x). \tag{2.2}$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} &= \frac{f(v_n) - f(u_n) + f(x) - f(x)}{v_n - u_n} \\
&= \frac{f(v_n) - f(x)}{v_n - u_n} + \frac{f(x) - f(u_n)}{v_n - u_n} \\
&= \frac{v_n - x}{v_n - x} \frac{f(v_n) - f(x)}{v_n - u_n} + \frac{x - u_n}{x - u_n} \frac{f(x) - f(u_n)}{v_n - u_n} \\
&= \frac{v_n - x}{v_n - u_n} \frac{f(v_n) - f(x)}{v_n - x} + \frac{x - u_n}{v_n - u_n} \frac{f(x) - f(u_n)}{x - u_n}.
\end{aligned}$$

Renombrando $\dfrac{f(v_n) - f(x)}{v_n - x}$ por a_n y $\dfrac{f(x) - f(u_n)}{x - u_n}$ por b_n en la ecuación anterior,

tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n} =& a_n\frac{v_n-x}{v_n-u_n}+b_n\frac{x-u_n}{v_n-u_n}\\
=&\frac{1}{2}a_n\frac{v_n-x}{v_n-u_n}+\frac{1}{2}a_n\frac{v_n-x}{v_n-u_n}+\frac{1}{2}b_n\frac{x-u_n}{v_n-u_n}+\frac{1}{2}b_n\frac{x-u_n}{v_n-u_n}\\
=&\frac{1}{2}a_n\frac{v_n-x}{v_n-u_n}+\frac{1}{2}a_n\frac{v_n-x+u_n-u_n}{v_n-u_n}+\frac{1}{2}b_n\frac{x-u_n}{v_n-u_n}\\
&+\frac{1}{2}b_n\frac{x-u_n+v_n-v_n}{v_n-u_n}\\
=&\frac{1}{2}a_n\frac{v_n-x}{v_n-u_n}+\frac{1}{2}a_n\frac{v_n-u_n}{v_n-u_n}-\frac{1}{2}a_n\frac{x-u_n}{v_n-u_n}+\frac{1}{2}b_n\frac{x-u_n}{v_n-u_n}\\
&+\frac{1}{2}b_n\frac{v_n-u_n}{v_n-u_n}-\frac{1}{2}b_n\frac{v_n-x}{v_n-u_n}\\
=&\frac{v_n-x}{v_n-u_n}\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n\right)+\frac{x-u_n}{v_n-u_n}\left(\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}a_n\right)+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n.
\end{aligned}
$$

Es decir

$$
\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n}=\frac{v_n-x}{v_n-u_n}\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n\right)+\frac{x-u_n}{v_n-u_n}\left(\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}a_n\right)+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n. \quad (2.3)
$$

Tomando límite cuando n$\to\infty$ tenemos

$$
\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n\right)\longrightarrow 0,
$$

pues, por (2.1) y (2.2) $a_n\to f'(x)$ y $b_n\to f'(x)$ y como $0\leq\dfrac{v_n-x}{v_n-u_n}\leq 1$,

y $0\leq\dfrac{x-u_n}{v_n-u_n}\leq 1$ se obtiene que:

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{v_n-x}{v_n-u_n}\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n\right)=0
$$
$$
\lim_{n\to\infty}\frac{x-u_n}{v_n-u_n}\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n\right)=0.
$$

Así, de (2.3) se sigue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\right)\\ &= \frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f'(x)\\ &= f'(x).\end{aligned}$$

Es decir

$$\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n} \longrightarrow f'(x).$$

■

2.2 Función de Weierstrass

La función de Weierstrass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se define de la siguiente manera:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}\cos 15^{j}\pi x. \tag{2.4}$$

Las gráficas de los primeros términos de la serie (2.4) que mostraremos en las figuras (2.3), (2.4) y (2.5), ilustran el comportamiento de estos términos: conforme "j crece" se reducen la amplitud y el período de la función, y esto último hace que la oscilación sea mas pronunciada.

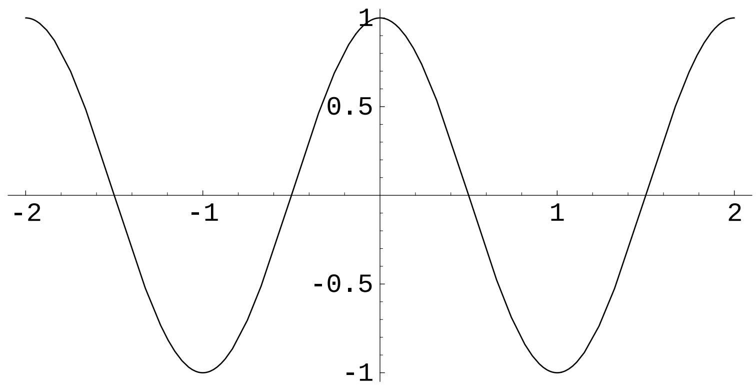


Figure 2.3: $f_0(x) = \cos(15^0 \pi x)$

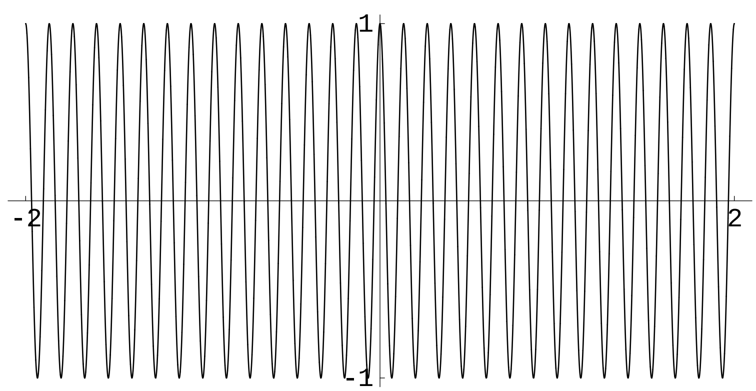


Figure 2.4: $f_1(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(15^1 \pi x)$

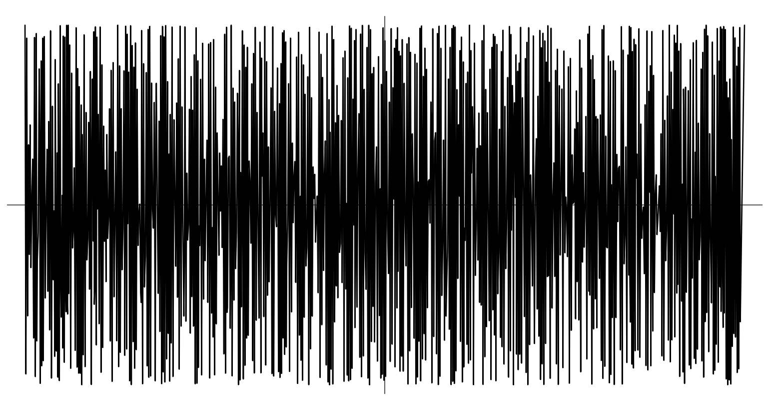


Figure 2.5: $f_2(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(15^2 \pi x)$

En las figuras (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9) mostramos las gráficas de algunos términos de la sucesión de sumas parciales de la serie (2.4). Estas gráficas dan solo una idea intuitiva del comportamiento de f y dejan clara la imposibilidad física de dar una representación gráfica mas fiel de su comportamiento.

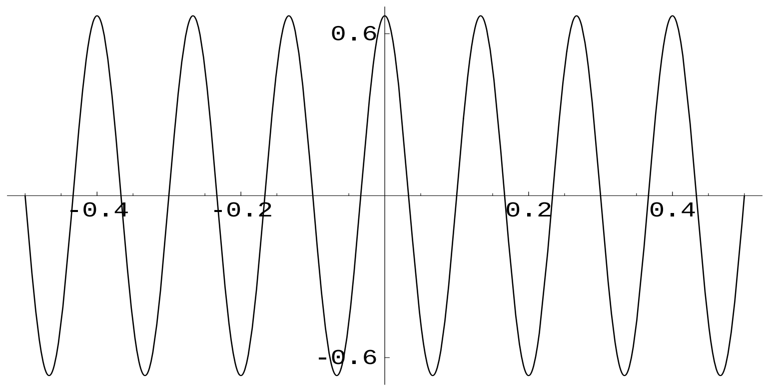


Figure 2.6: $f(x) = \sum_{j=0}^{1} \left(\frac{2}{3}\right)^j \cos 15^j \pi x$.

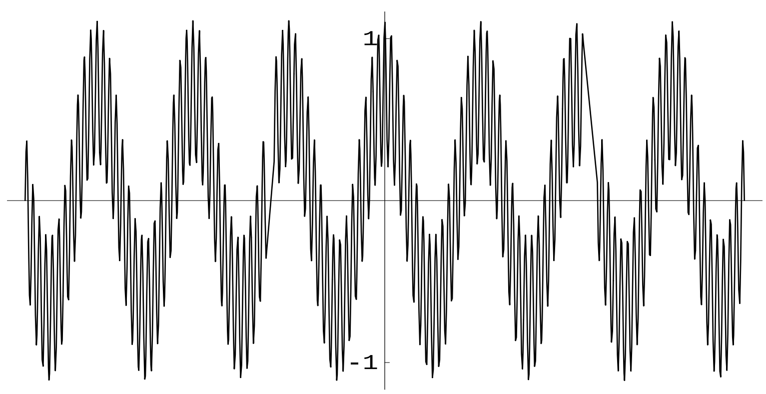


Figure 2.7: $f(x) = \sum_{j=0}^{2} \left(\frac{2}{3}\right)^j \cos 15^j \pi x$.

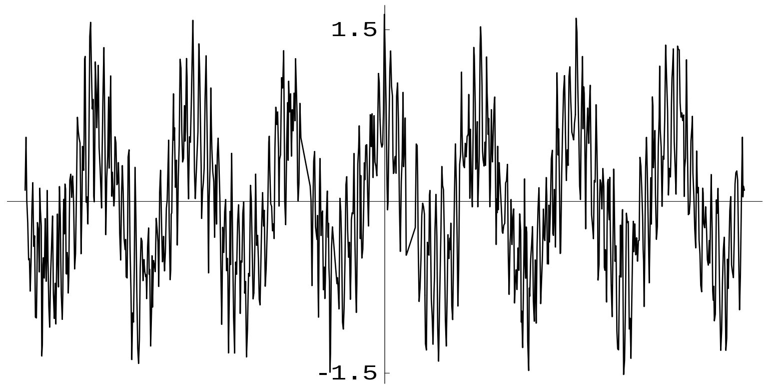


Figure 2.8: $f(x) = \sum_{j=0}^{7} \left(\frac{2}{3}\right)^j \cos 15^j \pi x$.

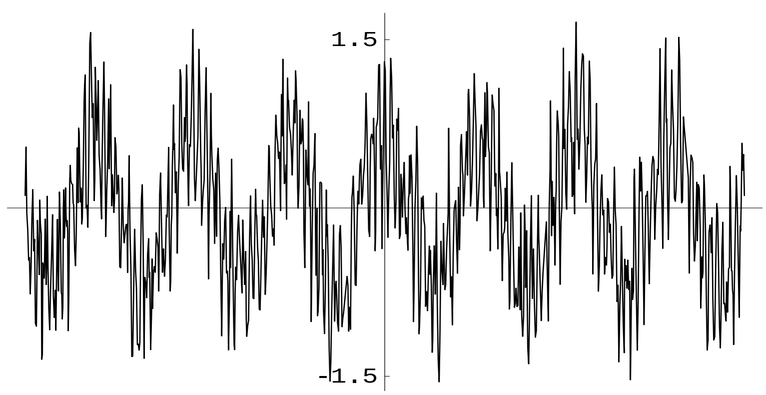


Figure 2.9: $f(x) = \sum_{j=0}^{15} \left(\frac{2}{3}\right)^j \cos 15^j \pi x$.

Teorema 2.2. *La función definida por (2.4) es continua.*

Demostración:
Primero veamos que la serie en (2.4) converge uniformemente. Esto se sigue del M-Test de Weierstrass ya que

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^j \cos 15^j \pi x\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^j \quad \text{para toda } \; j \in \mathbb{N} \text{ y } x \in \mathbb{R},$$

y como la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j$ converge, tenemos que la serie que define a f es uniformemente convergente.

Ahora, como los términos de la serie (2.4) son continuos, del Teorema 1.46, se sigue que f está bien definida y es continua.
■

Teorema 2.3. *La función definida por (2.4) es diferenciable en ninguna parte.*

Demostración:
Sea c cualquier punto fijo, y denotemos por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ cualesquiera dos sucesiones convergentes a c, con $x_n < c < y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por la Proposición 2.1, si $f'(c)$ existiera, entonces tendríamos que $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ convergería a $f'(c)$.

Así que si pudiéramos construir dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ tales que la sucesión $\left\{\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right\}$ no converje, probaríamos que f no es diferenciable en c. Esto es precisamente lo que haremos. Sean

$$x_n = \frac{k_n - 1}{15^n} \qquad \text{y} \qquad y_n = \frac{k_n + \frac{1}{2}}{15^n},$$

donde k_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, es el único entero que satisface la condición $k_n c - \frac{1}{2} \le 15^n c < k_n + \frac{1}{2}$, es decir $15^n - \frac{1}{2} < k_n \le 15^n c + \frac{1}{2}$, ver figura (2.10). Obviamente se tiene que $x_n < c < y_n$ y $y_n - x_n \to 0$.

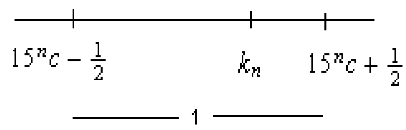


Figure 2.10:

De las definiciones de f, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^j \cos 15^j\pi(\frac{k_n+\frac{1}{2}}{15^n}) - \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^j \cos 15^j\pi(\frac{k_n-1}{15^n})}{\frac{k_n+\frac{1}{2}}{15^n}-\frac{k_n-1}{15^n}} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^j \cos 15^j\pi(\frac{k_n+\frac{1}{2}}{15^n}) - \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^j \cos 15^j\pi(\frac{k_n-1}{15^n})}{\frac{\frac{3}{2}}{15^n}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} 15^n \left[\cos 15^{j-n}\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right) - \cos 15^{j-n}\pi(k_n-1)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} 15^n \left[\cos 15^{j-n}\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right) - \cos 15^{j-n}\pi(k_n-1)\right] \\
&+ \sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} 15^n \left[\cos 15^{j-n}\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right) - \cos 15^{j-n}\pi(k_n-1)\right].
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Para facilitar cálculos, denotemos:

$$A = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} 15^n [\cos 15^{j-n}\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right) - \cos 15^{j-n}\pi(k_n-1)], \tag{2.6}$$

$$B = \sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} 15^n [\cos 15^{j-n}\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right) - \cos 15^{j-n}\pi(k_n-1)]. \tag{2.7}$$

Con esta nueva notación tenemos que

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = A + B.$$

En la suma (2.7) observemos que $\cos\pi\left[\frac{(2k_n+1)}{2}\right]15^{j-n}=0$, ya que $j\geq n$ y además $\cos\pi(k_n-1)15^{j-n}$ es igual a 1 o -1 dependiendo si k_n es impar o par, respectivamente. De aquí obtenemos:

$$B=\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1}15^n(-1)^{k_n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
B&=\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1}15^n(-1)^{k_n}\\
&=\frac{15^n(-1)^{k_n}}{1-\frac{2}{3}}-\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}15^n(-1)^{k_n}\\
&=3(15)^n(-1)^{k_n}-15^n(-1)^{k_n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}\\
&=3(15^n(-1)^{k_n})-15^n(-1)^{k_n}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]\\
&=3(15^n(-1)^{k_n})-15^n(-1)^{k_n}\left[3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\right]\\
&=15^n(-1)^{k_n}\frac{2^{n+1}}{3^n}\\
&=5^n3^n(-1)^{k_n}\frac{2^{n+1}}{3^n}\\
&=2(5)^n(2)^n(-1)^{k_n}\\
&=2(10)^n(-1)^{k_n},
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se obtiene utilizando la identidad $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}r^i=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Así

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=A+2(-1)^{k_n}10^n. \tag{2.8}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función $\cos(x)$ en el intervalo

$I = \left(\pi(k_n - 1)15^{j-n}, \pi\left[\frac{(2k_n+1)}{2}\right]15^{j-n}\right)$, tenemos que existe $\xi \in I$ tal que

$$\cos\left(\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right)15^{j-n}\right) - \cos\left(\pi(k_n-1)15^{j-n}\right) = \frac{-3\pi}{2}15^{j-n}\sin\xi, \tag{2.9}$$

ya que,

$$\begin{aligned}\left(\pi\left[\frac{(2k_n+1)}{2}\right]15^{j-n}\right) - \left(\pi(k_n-1)15^{j-n}\right) &= \pi 15^{j-n}\left[\frac{2k_n+1}{2} - k_n + 1\right]\\ &= \pi 15^{j-n}\left[\frac{2k_n+1-2k_n+2}{2}\right]\\ &= \frac{3\pi}{2}15^{j-n}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\left|\cos\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right)15^{j-n} - \cos\pi(k_n-1)15^{j-n}\right| \leq \frac{3\pi}{2}15^{j-n}. \tag{2.10}$$

Así de (2.8) y (2.10) tenemos que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} - 2(-1)^{k_n}10^n\right| = |A|\\ &= \left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1}15^n\left[\cos\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right)15^{j-n} - \cos\pi(k_n-1)15^{j-n}\right]\right|\\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1}15^n\left|\cos\pi\left(\frac{2k_n+1}{2}\right)15^{j-n} - \cos\pi(k_n-1)15^{j-n}\right|\\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1}15^n\frac{3\pi}{2}15^{j-n} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}15^j\pi = \pi\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2^j}{3^j}\right)5^j3^j\\ &= \pi\sum_{j=0}^{n-1}10^j = \pi\left[\frac{1-10^n}{1-10}\right] = -\frac{\pi}{9}[1-10^n] < \frac{\pi}{9}10^n\\ &< \frac{1}{2}10^n.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} - 2(-1)^{k_n}10^n\right| < \frac{1}{2}10^n.$$

Esto puede escribirse

$$\left(\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right)=2(-1)^{k_n}10^n+\frac{\lambda}{2}10^n,$$

donde $-1<\lambda<1$. Reagrupando términos en el lado derecho, tenemos

$$\left(\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right)=(-1)^{k_n}10^n\left[2+(-1)^{k_n}\frac{\lambda}{2}\right]. \tag{2.11}$$

Observemos que si la sucesión $\{k_n\}$ posee una subsucesión de enteros pares, entonces el lado derecho de (2.11) crece conforme n crece y la sucesión no está acotada. Si $\{k_n\}$ no contiene una subsucesión de enteros pares, entonces debe tener una subsucesión de enteros impares y tendríamos que la sucesión (2.11) decrece y no está acotada. Por tanto

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$

no converge. Por la Proposición 2.1 tenemos que f no es diferenciable en c, y como c es cualquier número real, hemos visto que f no es diferenciable en punto alguno.

■

2.3 Función tipo Van der Waerden I

Otra función que es continua en todas partes pero diferenciable en ninguna parte es la función de **Van der Waerden**, que está definida por

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_k(x). \tag{2.12}$$

donde $a_0(x)$ es la distancia de x al entero más cercano y $a_k(x)=2^{-k}a_0(2^kx)$.
En las figuras (2.11), (2.12) y (2.13) podemos observar el comportamiento de algunos términos de la serie (2.12).

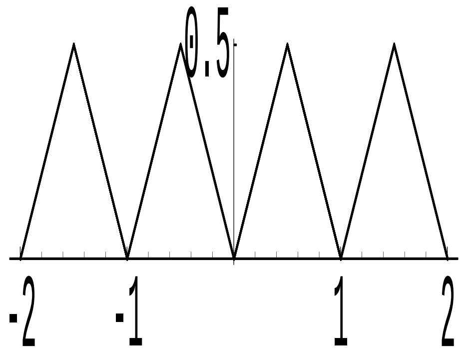


Figure 2.11: $a_0(x)$

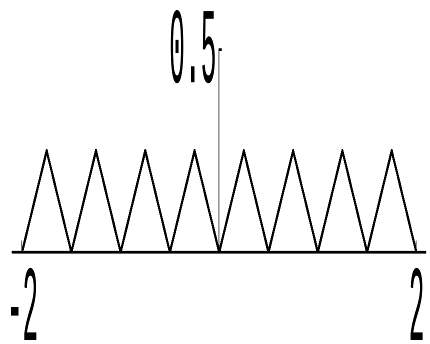


Figure 2.12: $a_1(x)$

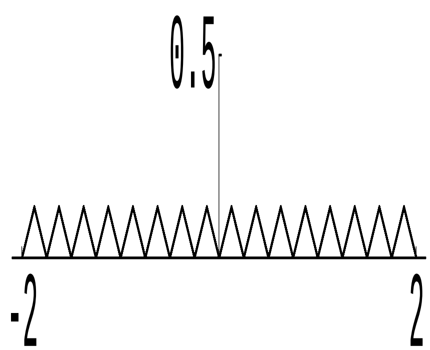


Figure 2.13: $a_2(x)$

Las gráficas de algunos términos de la sucesión de sumas parciales de la serie (2.12) se encuentran en las figuras (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18). Solamente podremos darnos una idea intuitiva de la gráfica de la función, pues es imposible dar una representación gráfica más fiel de su comportamiento.

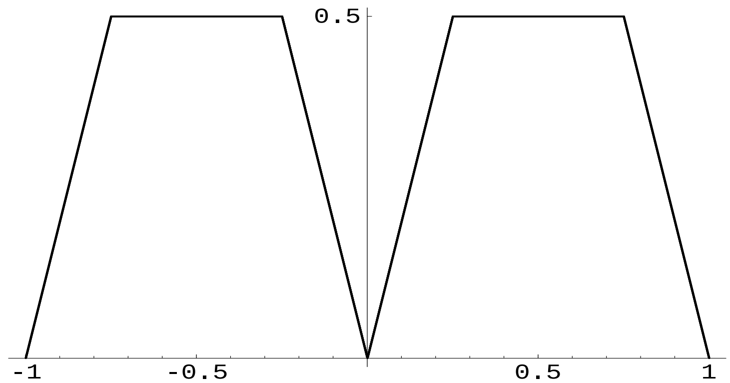


Figure 2.14: $f(x) = \sum_{n=0}^{1} a_k(x)$

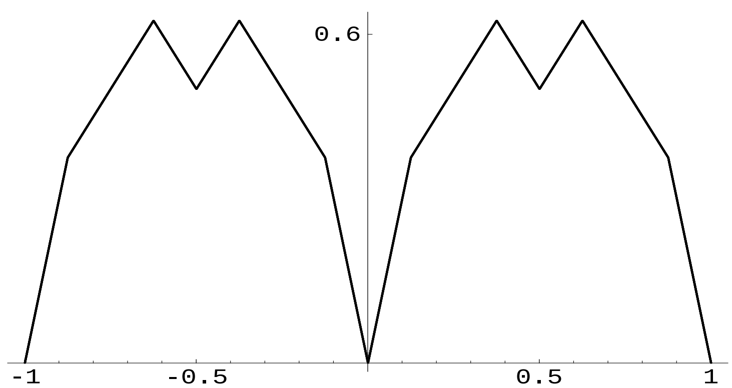


Figure 2.15: $f(x) = \sum_{n=0}^{2} a_k(x)$

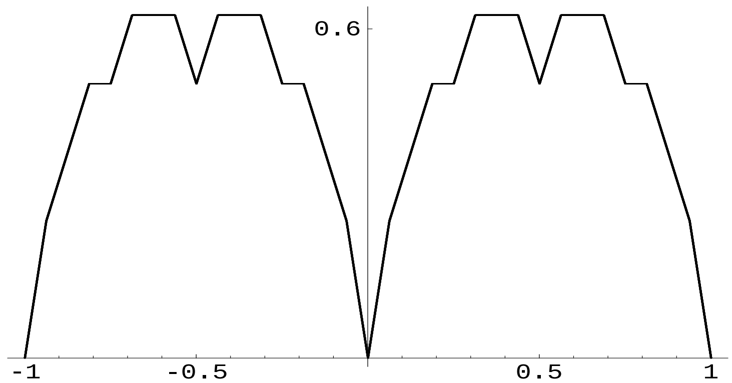


Figure 2.16: $f(x) = \sum_{n=0}^{3} a_k(x)$

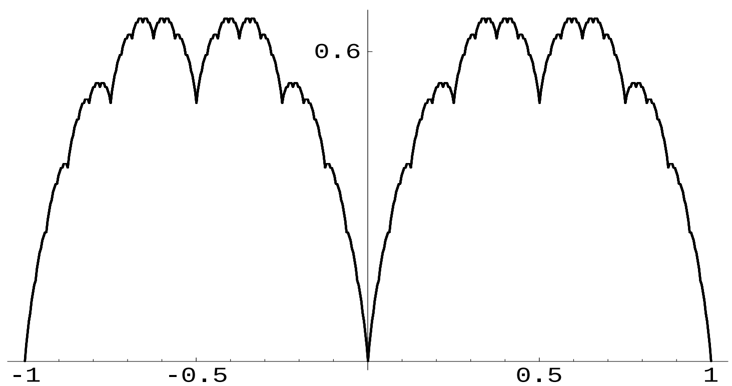


Figure 2.17: $f(x) = \sum_{n=0}^{7} a_k(x)$

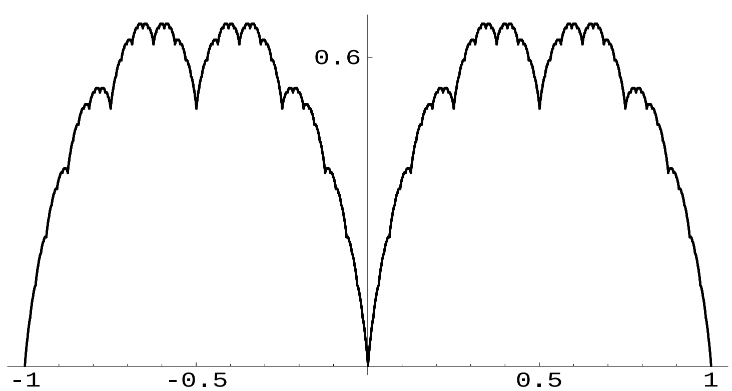


Figure 2.18: $f(x) = \sum_{n=0}^{15} a_k(x)$

Teorema 2.4. *La función definida por (2.12) es continua.*

Para la demostración de este teorema se utiliza el mismo método que en el Teorema 2.2. Primero veamos que la función $f(x)$ está bien definida, y aún más, veremos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(x)$ converge uniformemente. Para ello usaremos el Teorema M-Test de Weierstrass (ver Teorema 1.48).

Observemos que

$$|a_k(x)| = |2^{-k} a_0(2^k x)| \leq \left| 2^{-k} \left(\frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1}{2^{k+1}},$$

es decir, $|a_k(x)|$ está acotada para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$. Además la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$ converge, pues es una serie geométrica. Entonces por el Teorema 1.48 tenemos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(x)$ converge uniformemente.

Como $a_0(x)$ es continua, pues es la distancia de x al entero más cercano, tenemos que $a_k(x) = 2^{-k} a_0(2^k x)$ es continua para cada x, y como acabamos de ver que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(x)$ converge uniformemente, entonces por la Proposición 1.47 tenemos que $f(x)$ es continua.
■

Teorema 2.5. *La función definida por (2.12) es diferenciable en ninguna parte.*

Demostración:
Para mostrar esto trabajaremos con racionales diádicos, los cuales se definen de la siguiente manera: un racional diádico u de orden n es de la forma $u = i2^{-n}$ donde $i \in \mathbb{Z}$.

Ahora si evaluamos nuestra función en un racional diádico podemos observar que

$$\begin{aligned} f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} a_0(2^k u) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} a_0(i2^{k-n}). \end{aligned}$$

Como $2^k u$ es un entero para $k \geq n$, pues $2^k u = i 2^k 2^{-n} = i2^{k-n} \in \mathbb{Z}$ *si* $k - n \geq 0$. Entonces $a_0(2^k u) = 0$ para $k \geq n$. Por lo tanto

$$f(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(u).$$

Tomemos un par de racionales diádicos sucesivos de orden n, u_n y v_n, y $x \in \mathbb{R}$ fijo tal que $u_n \leq x < v_n$. Entonces $v_n - u_n = 2^{-n}$.

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(v_n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(v_n) - a_k(u_n)}{v_n - u_n}.$$

Como a_k es lineal en $[u_n, v_n]$ para $0 \leq k < n$ (decimos lineal en el sentido que es una linea recta en ese intervalo), el cociente en la suma anterior (que es la pendiente de la recta en el intervalo), es la derivada por la derecha $a_k^+(x)$. Pero como $a_k^+ = \pm 1$, entonces

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^+(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \pm 1. \tag{2.13}$$

Si $f(x)$ fuera diferenciable en x, por la Proposición 2.1 tendríamos que

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} \to f'(x). \tag{2.14}$$

Entonces, de (2.13) y (2.14), $\sum_{k=0}^{n-1} \pm 1 \to f'(x)$, es decir $\sum_{k=0}^{\infty} \pm 1 = f'(x)$. Lo cual es **Imposible**. Pues $\sum_{k=0}^{\infty} \pm 1$ no converge. Por lo tanto, la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(x),$$

donde $a_0(x)$ es la distancia de x al entero más cercano y $a_k(x) = 2^{-k} a_0(2^k x)$, es continua en todas partes y derivable en ninguna parte. ■

Teorema 2.6. *La función definida por (2.12) no es derivable por la derecha en punto alguno.*

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $f(x)$ es derivable por la derecha para algún $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Sea} \quad f'_+(x) = L.$$

Sean u_n , v_n racionales diádicos de orden n tales que $u_n = i2^{-n}$, $v_n = (i+1)2^{-n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde

$$(i-1)2^{-n} \leq x \leq i2^{-n}.$$

Definimos r_n y s_n tales que

$$f(u_n) - f(x) = (L + r_n)(u_n - x) \tag{2.15}$$
$$f(v_n) - f(x) = (L + s_n)(v_n - x). \tag{2.16}$$

Observemos que $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ pues de la ecuación (2.15) tenemos

$$\left(\frac{f(u_n) - f(x)}{u_n - x} - L \right) = r_n,$$

y por la definición de L, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(u_n) - f(x)}{u_n - x} - L \right) = 0.$$

De la misma manera nos damos cuenta que $s_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Entonces

$$\begin{aligned} f(v_n) - f(u_n) &= (f(v_n) - f(x)) - (f(u_n) - f(x)) \\ &= (L + s_n)(v_n - x) - (L + r_n)(u_n - x) \\ &= L(v_n - u_n) + s_n(v_n - x) - r_n(u_n - x) \\ &= 2^{-n}L + s_n(v_n - x) - r_n(u_n - x), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad la se obtiene de (2.15) y de (2.16) y la última igualdad del hecho que $v_n - u_n = (i+1)2^{-n} - i2^{-n} = 2^{-n}$.

Por lo tanto

$$f(v_n) - f(u_n) = 2^{-n}L + s_n(v_n - x) - r_n(u_n - x),$$

y multiplicando la ecuación anterior por 2^n tenemos:

$$2^n(f(v_n) - f(u_n)) = L + 2^n s_n(v_n - x) - 2^n r_n(u_n - x). \tag{2.17}$$

Pero como

$$0 < u_n - x < 2^{-n} \tag{2.18}$$
$$0 < v_n - x < 2^{1-n}. \tag{2.19}$$

Pues como $(i-1)2^{-n} \leq x \leq i2^{-n}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 < u_n - x &\leq u_n - (i-1)2^{-n} \\ &= i2^{-n} - (i-1)2^{-n} \\ &= 2^{-n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $0 < u_n - x \leq 2^{-n}$.

También

$$\begin{aligned} 0 < v_n - x &\leq v_n - (i-1)2^{-n} \\ &= (i+1)2^{-n} - (i-1)2^{-n} \\ &= 2^{-n} + 2^{-n} \\ &= 2^{1-n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $0 < v_n - x \leq 2^{1-n}$.

Entonces

$$\begin{aligned} |2^n(f(v_n) - f(u_n) - L)| &= |2^n s_n(v_n - x) - 2^n r_n(u_n - x)| \\ &\leq |2^n s_n(v_n - x)| + |2^n r_n(u_n - x)| \\ &= 2^n(v_n - x)|s_n| + 2^n(u_n - x)|r_n| \\ &\leq 2^n 2^{1-n}|s_n| + 2^n 2^{-n}|r_n| \\ &= 2|s_n| + |r_n|, \end{aligned}$$

donde la primer igualdad se debe a (2.17), y la última desigualdad por (2.18) y (2.19).

Por lo tanto $|2^n(f(v_n) - f(u_n) - L)| \leq |r_n| + 2|s_n|$.

Además, como $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(f(v_n) - f(u_n)) = L. \tag{2.20}$$

Pero por definición de nuestra función sabemos que

$$2^n(f(v_n) - f(u_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n(a_k(v_n) - a_k(u_n)). \tag{2.21}$$

Además

$$a_k(u_n) = a_k(v_n) = 0 \text{ para } \quad k - n \geq 0. \tag{2.22}$$

Esto es fácil de observar, ya que

$$a_k(u_n) = 2^{-k}a_0(2^k u_n) = 2^{-k}a_0(i2^k 2^{-n}) = 2^{-k}a_0(i2^{k-n}).$$

Obsérvese que $a_0(i2^{k-n}) = 0$, para $k-n \geq 0$, ya que si lo recordamos, la función $a_0(x)$ es la distacia de x al entero más cercano, y como $i2^{k-n} \in \mathbb{N}$ para $k \geq n$, entonces

$$a_k(u_n) = 0 \text{ para } \quad k \geq n.$$

Y de la misma manera obtenemos que $a_k(v_n) = 0$ para $k \geq n$.

Por (2.21) y por (2.22) tenemos que

$$2^n(f(v_n) - f(u_n)) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^n(a_k(v_n) - a_k(u_n)). \tag{2.23}$$

Observemos que $a_k(x) = 2^{-k}a_0(2^k x)$ es lineal en el intervalo $[u_n, v_n]$ para $1 \leq k < n$, en el sentido de que es una línea recta en este intervalo. Entonces la derivada por la derecha de esta función coincide con su pendiente, es decir

$$a_k^+(u_n) = \frac{a_k(v_n) - a_k(u_n)}{v_n - u_n} = \frac{a_k(v_n) - a_k(u_n)}{2^{-n}},$$

pues $v_n - u_n = (i+1)2^{-n} - i2^{-n} = 2^{-n}$. Por lo tanto $a_k^+(u_n) = 2^n(a_k(v_n) - a_k(u_n))$.

Pero $a_k^+(u_n) = \pm 1$. Entonces

$$2^n(f(v_n) - f(u_n)) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^n(a_k(v_n) - a_k(u_n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \pm 1.$$

Por otro lado (ver (2.20)) habíamos visto que $\lim_{n\to\infty} 2^n(f(v_n) - f(u_n)) = L$. Entonces

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \pm 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \pm 1,$$

donde $L = f'_+(x)$. Lo cual es **Imposible**, pues $\sum_{k=1}^{\infty} \pm 1$ no es una serie convergente.

Por lo tanto f no es derivable por la derecha en punto alguno. Aunque como ya vimos f es continua en todas partes.

También podemos hacer esta demostración para ver que la función de Van der Waerden no es derivable por la izquierda, y el argumento es análogo.
■

2.4 Función tipo Van der Waerden II

Veamos la construcción de otra función continua en todas partes pero diferenciable en ninguna parte.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = |x|, \qquad -1 \le x \le 1$$
$$\varphi(x+2) = \varphi(x).$$

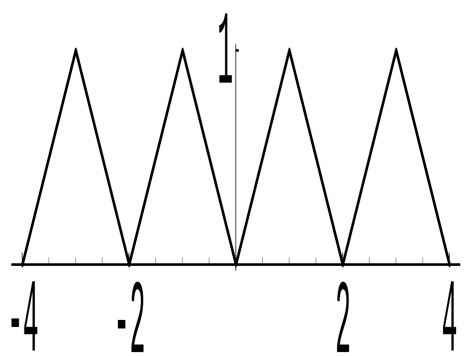


Figure 2.19: $\varphi(x)$

Nótese que $|\varphi(s) - \varphi(t)| \le |s - t|$, para $s, t \in \mathbb{R}$. En particular se obtiene que φ es continua, de hecho φ es uniformemente continua.

Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x). \tag{2.24}$$

Las gráficas de algunos términos de la serie son las de las figuras (2.20), (2.21) y (2.22).

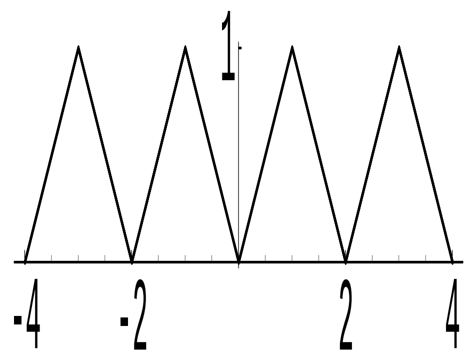


Figure 2.20: $f_1(x)$

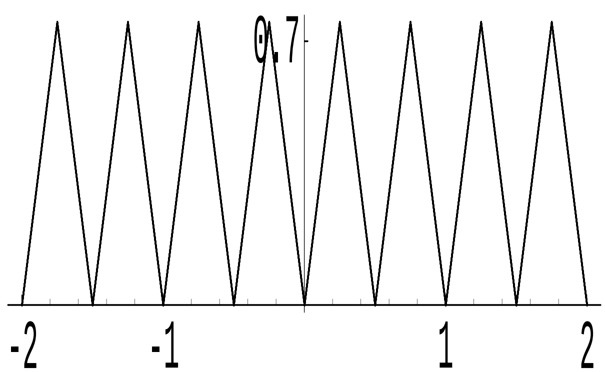


Figure 2.21: $f_2(x)$

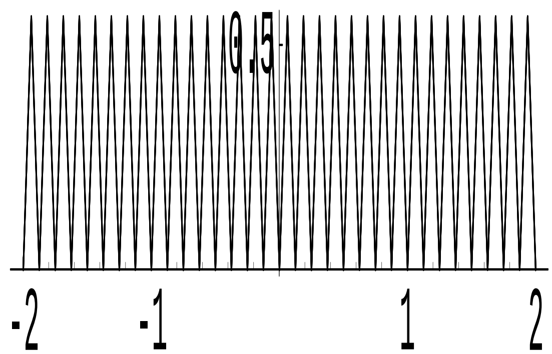


Figure 2.22: $f_3(x)$

Obsérvese que conforme n crece, la amplitud y la frecuencia de las gráfica de las $f_{n's}$ se reducen, y los "picos" se hacen más pronunciados y "tupidos".

En las figuras (2.23), (2.24) y (2.25) podemos observar algunos términos de la gráfica de la serie truncada. Solo para darnos una idea de la gráfica de la función.

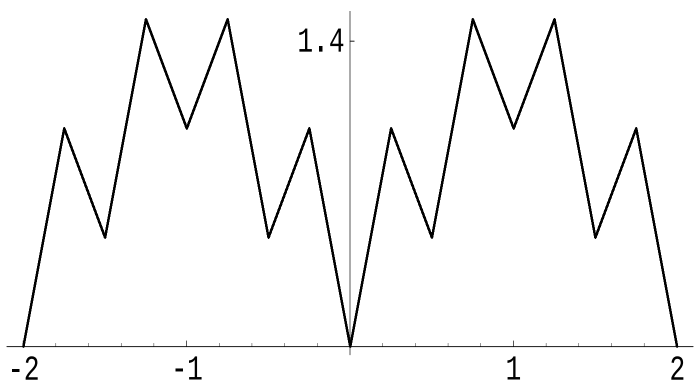


Figure 2.23: $f(x) = \sum_{n=0}^{1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$.

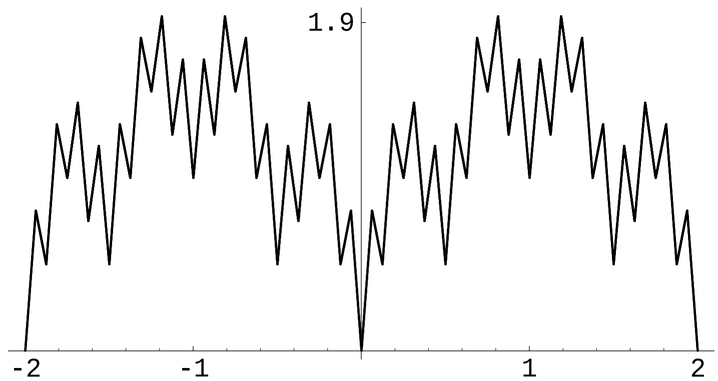


Figure 2.24: $f(x) = \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$.

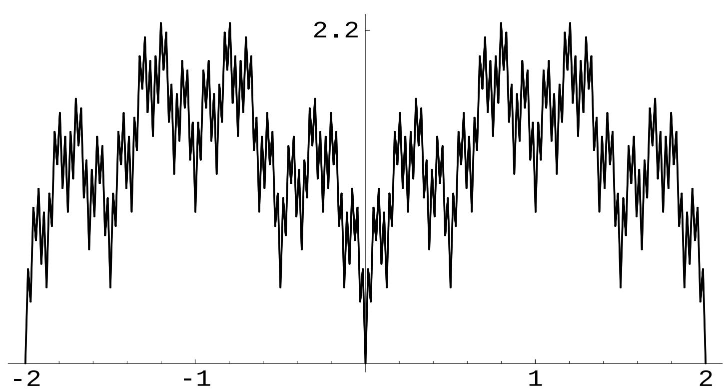


Figure 2.25: $f(x) = \sum_{n=0}^{15} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$.

Teorema 2.7. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en (2.24) es continua.*

Demostración: Observemos que

$$|f_n(x)| = \left|\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n x)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n < \infty$, por el Teorema M-Test Weierstrass tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\varphi(4^n x)$ converge uniformemente y como $f_n(x) = (\frac{3}{4})^n\varphi(4^n x)$ es continua en $\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

es continua.
■

Teorema 2.8. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en (2.24) es diferenciable en ninguna parte.*

Demostración: Lo que probaremos es que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y un δ_m que tiende a cero.

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \geq \frac{1}{2}(3^m + 1) \to \infty$$

cuando $m \to \infty$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y para $m \in \mathbb{Z}$, sea $\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$. El signo de δ_m se elige tal que no hay entero entre los números $4^m x$ y $4^m(x + \delta_m)$, esto se puede hacer porque $|4^m\delta_m| = \frac{1}{2}$.

De la definición de f tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}\right]\right| \\ &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right|.\end{aligned}$$

$$\text{Donde} \quad \gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}. \tag{2.25}$$

Cuando $n > m$ tenemos que $4^n\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{n-m}$ y de aquí que $4^n\delta_m$ es un entero par, así que

$$\varphi(4^n x + 4^n\delta_m) = \varphi(4^n x).$$

Por lo tanto, de (2.25) tenemos que

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n x) - \varphi(4^n x)}{\delta_m} = 0. \tag{2.26}$$

Cuando $0 \leq n \leq m$ se obtiene

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &= \left|\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}\right| \\ &\leq \frac{|4^n(x+\delta_m) - 4^n x|}{|\delta_m|} \\ &= 4^n. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Para $n = m \quad |\gamma_m| = 4^m$, para ver esto primero obsérvese la figura (2.26)

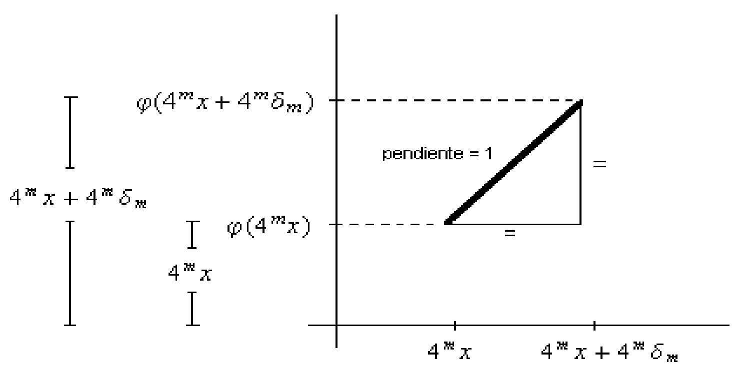


Figure 2.26:

Entonces

$$\frac{\varphi(4^m x + 4^m\delta_m) - \varphi(4^m x)}{4^m\delta_m + 4^m x - 4^m x} = \frac{\varphi(4^m x + 4^m\delta_m) - \varphi(4^m x)}{4^m\delta_m} = 1.$$

De aquí que

$$\varphi(4^m\delta_m + 4^m x) - \varphi(4^m x) = 4^m\delta_m. \tag{2.28}$$

Por tanto para $n = m$

$$|\gamma_m| = \left|\frac{\varphi(4^m x + 4^m\delta_m) - \varphi(4^m x)}{\delta_m}\right| = \frac{4^m\delta_m}{\delta_m} = 4^m, \tag{2.29}$$

donde la segunda igualdad se debe a (2.28). Así que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m |\gamma_m| - \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\
&= 3^m - \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n |\gamma_n| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^n \\
&= 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{1-3^m}{1-3} = 3^m - \frac{3^m - 1}{2} = \frac{3^m}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}[3^m + 1],
\end{aligned}$$

donde la primer igualdad es por (2.25), la segunda por (2.26), la tercera igualdad se debe a (2.29) y la última desigualdad por (2.27). Es decir

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \geq \frac{1}{2}[3^m + 1].$$

Entonces

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \geq \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}[3^m + 1] = \infty. \tag{2.30}$$

Por (2.30) y del hecho que cuando $m \to \infty$, se tiene $\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m} \to 0$, obtenemos que f no es derivable en x, y con esto hemos mostrado lo que queríamos.
■

CAPÍTULO 3

Construcciones Geométricas más Recientes

En en este Capítulo a diferencia de las funciones construidas en el capítulo anterior, construiremos dos funciones de las cuales no daremos una expresión analítica, otra diferencia es que nos será fácil imaginarnos sus gráficas. La primera es la función de Marck Lynch, la cual se construye a través de conjuntos compactos anidados y no vacíos, de tal manera que su intersección sea la gráfica de una función continua y no derivable en punto alguno. La continuidad se obtiene inmediatamente de la construcción y dos resultados mencionados en el Capítulo 1.

Esta construcción es muy diferente a las anteriores, ya que no está dada mediante una serie y su construcción es mas geométrica, creo que en esto radica su belleza e importancia.

La segunda función constuida por H. Katsuura, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se define como el límite uniforme de una sucesión de funciones lineales continuas por piezas $f_n : [0,1] \to R$. Para construir la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ usaremos mapeos de contracción w de la familia de subconjuntos cerrados de $X = [0,1] \times [0,1]$ en sí mismo con respecto a la métrica de Hausdorff inducida por la métrica Euclideana. Lo que veremos es que la sucesión iterada $\{w^n(A)\}$ de conjuntos, donde A es un subconjunto cerrado y no vacío del cuadrado X, convergerá a la gráfica de f en la métrica de Hausdorff.

Si A es la diagonal de X, entonces veremos que $w^n(A)$ será la gráfica de f_n, y así nos podremos dar una idea intuitiva de la gráfica de f.

En esta construcción usaremos conceptos de Topología, cuya teoría se encuentra en el Capítulo 1. Nuestro espacio de trabajo serán todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico conexo y compacto X, que es la familia denotada por 2^X. El hecho de que 2^X es completo con la métrica de Hausdorff es de suma importancia en la construcción de la funcion continua no diferenciable. También es importante recordar que un mapeo de contracción en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo, ya que por construcción de nuestra función f veremos que este único punto fijo será la gráfica de f.

3.1 Función de Marck Lynch

Antes de empezar a hacer esta construcción daré una idea general de como contruiremos esta nueva función continua no diferenciable. A diferencia de las funciones construidas en las secciones anteriores, la prueba de la continuidad de esta función no utiliza la teoría de series y sucesiones de funciones. Para esta prueba se usarán los resultados establecidos en el Teorema 1.25 y el Teorema 1.26.

1. Teorema 1.25: La intersección anidada de conjuntos compactos no vacíos es compacta y no vacía.

2. Teorema 1.26: Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si su gráfica es compacta.

Para encontrar esta función, primero construiremos una sucesión anidada de conjuntos compactos que deben cumplir ciertas propiedades, y por el Teorema (1.25) tendremos que la intersección de estos conjuntos será compacta, y por la manera en que los construiremos tendremos que esta intersección debe ser la gráfica de una función. Después utilizando el Teorema (1.26), tendremos que dicha función será continua, pues su gráfica (que es la intersección de los conjuntos compactos) es compacta.

Después demostraremos que esta función no es diferenciable y así obtendremos la función que queremos.

Como ya mencioné, necesitamos construir una sucesión de conjuntos anidados compactos, que es por donde empezaremos:

Sea $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función proyección a la primera coordenada, es decir $\pi(x, y) = x$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Sea $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Definimos $A[x] = \{y : (x, y) \in A\}$, llamada la x-sección de A. La sucesión anidada de conjuntos compactos $C_n \supset C_{n+1}$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ que queremos construir, deben cumplir las siguientes propiedades:

(1) $\pi(C_n) = [0, 1]$ para toda $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\mathrm{diam}(C_n[x]) \leq \frac{1}{n}$ para cada $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$;

(3) para cada $x \in [0, 1]$ existe $y \in [0, 1]$ con $0 < |x - y| \leq \frac{1}{n}$ tal que si $p \in C_n[x]$ y $q \in C_n[y]$, entonces

$$\frac{p - q}{x - y} > n.$$

Antes de proseguir construyendo esta sucesión, veamos que la cerradura de bandas de vecindades (nubes) de segmentos de linea recta satisface la propiedad (3), ya que esto será de gran importancia para construir la función deseada.

Sea n un entero positivo dado y $f(x) = mx + b$ con $m > n$. Afirmamos que para $\delta > 0$, existe una $\varepsilon-$vecindad $N(\varepsilon, f)$ de la gráfica de f tal que para cualquier

$x \in [0,1]$ existe $y \in [0,1]$ con $|x-y| = \delta$ y si $p \in \overline{N(\varepsilon, f)[x]}$ y $q \in \overline{N(\varepsilon, f)[y]}$, entonces

$$\frac{p-q}{x-y} > n. \tag{3.1}$$

Para demostrar esto, nos ayudaremos con el siguiente diagrama.

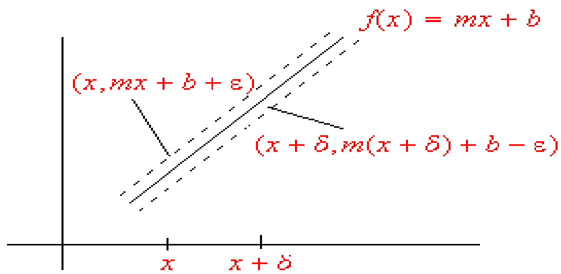


Figure 3.27:

Podemos escoger ε suficientemente pequeño tal que

$$\begin{aligned}\left|\frac{(m(x+\delta)+b-\varepsilon)-(mx+b+\varepsilon)}{(x+\delta)-x}\right| &= \left|\frac{m\delta - 2\varepsilon}{\delta}\right| \\ &= \left|m - \frac{2\varepsilon}{\delta}\right| \\ &\geq |m| - \left|\frac{2\varepsilon}{\delta}\right| \\ &> n.\end{aligned}$$

pues $m > n$. Entonces

$$\left|\frac{(m(x+\delta)+b-\varepsilon)-(mx+b+\varepsilon)}{(x+\delta)-x}\right| > n.$$

De aquí que si $p \in \overline{N(\varepsilon, f)[x]}$ y $q \in \overline{N(\varepsilon, f)[y]}$ tenemos que

$$\left|\frac{p-q}{x-(x+\delta)}\right| > n.$$

Tomando $y = x + \delta$ obtenemos lo deseado.

Hasta aquí hemos visto que la cerradura de bandas de vecindades de líneas rectas cumplen la propiedad 3. Ahora construiremos nuestra sucesión anidada de conjuntos compactos con las propiedades (1),(2) y (3).

Definiremos cada C_n como la cerradura de bandas de vecidades de arcos poligonales, pero lo haremos con mucho cuidado, de tal forma que cumplan las propiedades (1), (2) y (3) y que a la vez nos sirvan para que su intersección sea la gráfica de una función continua.

Para construir C_1, primero construiremos un arco poligonal P^1, donde cada uno de sus segmentos, digamos $P^1_1, P^1_2, ..., P^1_k$ tienen una pendiente en valor absoluto mayor que 1. Sea

$$0 < \delta_i < \min\left\{\frac{\text{long}(\pi(P^1_i))}{2}, 1\right\}.$$

Aplicamos la afirmación anterior a cada δ_i y a los segmentos P^1_i, $i = 1, ..., k$, definidos en $\pi(P^1_i)$ para obtener una ε_i-vecindad de cada P^1_i (esto lo podemos hacer, ya que cada $\delta_i < \frac{\text{long}\pi(P_i)}{2}$ y podemos siempre escogerla para cada $x \in \pi(P^1_i)$).

Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, ..., k\}$ y así tenemos que $\overline{N(\varepsilon, P^1)}$ es una vecidnad cerrada de P^1 que satisface la condición 3. Claramente, ε puede escogerse lo suficientemente pequeño, si es necesario, tal que $\text{diam}(C_1[x]) < 1$ para cada $x \in [0, 1]$ y $\pi(C_1) = [0, 1]$.

Ahora, para construir C_2, que satisfaga (1),(2) y (3), primero construímos un arco poligonal P^2 contenido en el interior de C_1, cuidando que cada uno de sus segmentos tenga pendiente mayor que 2 y procedemos de la misma manera que para C_1.

Una gráfica de C_1 y C_2 pueden ser las siguientes:

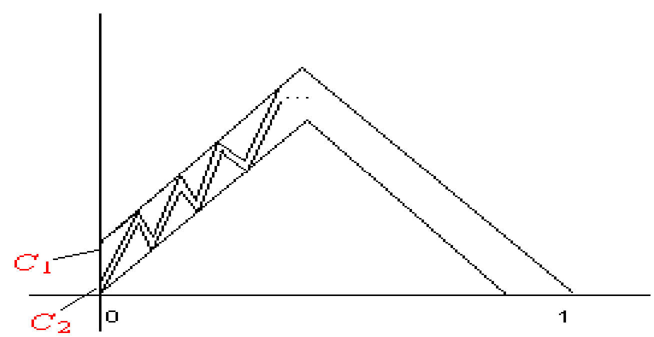


Figure 3.28:

En general, para construir C_n que satisfaga (1),(2) y (3), asumimos C_1 hasta C_{n-1} como han estado definiéndose. Sea P un arco poligonal contenido en el interior de C_{n-1}, cuyos segmentos $P_1, P_2, ..., P_k$ tienen una pendiente mayor que n. Para cada $i = 1, ..., k$, sea

$$0 < \delta_i < \min\left\{\frac{\text{long}\pi(P_i)}{2}, \frac{1}{n}\right\}.$$

Aplicamos la afirmación (3.1) de que la cerradura de bandas de vecindades de segmentos de línea recta satisface la propiedad (3), a los δ_i y a los segmentos P_i definidos en $\pi(P_i)$ para obtener la deseada ε-vecindad de P_i. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, ..., k\}$. Entonces tomamos $C_n = \overline{N(\varepsilon, P)}$, la cual es una vecindad cerrada de P que satisface la condición 3, y ε se puede tomar lo suficientemente pequeño para que $\overline{N(\varepsilon, P)} \subset C_{n-1}$.

Ahora que ya tenemos la sucesión anidada $\{C_n\}$, que satisfacen las propiedades deseadas, definiremos nuestra función continua no diferenciable.

Sea $C = \cap C_n$. Por la propiedad 2, tenemos que $\text{diam}(C[x]) = 0$ para cada $x \in [0,1]$, pues dado que $C = \cap C_n$ y la sucesión está anidada, tenemos que $\text{diam}C \leq \text{diam}C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$0 \leq \text{diam}(C[x]) \leq \text{diam}(C_n[x]) < \frac{1}{n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos que $\text{diam}(C[x]) = 0$. Entonces para cada $x_i \in [0,1]$ existe un único $z_i \in \mathbb{R}$ tal que $C[x_i] = \{z_i\}$. Definiendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x_i) = z_i, \tag{3.2}$$

y así tenemos que f es una función tal que su gráfica es C.

Teorema 3.1. *La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida en (3.2) es continua.*

Demostración: Como $C = \cap C_n$, donde cada C_n es compacto, por el Teorema 1.25, tenemos que C es compacto. Entonces, del Teorema 1.26, se sigue que f es continua, pues C=graf$f$ es compacto.
■

Teorema 3.2. *La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida en (3.2) es diferenciable en ninguna parte.*

Demostración: Sea $x \in [0,1]$, y $\delta > 0$. Escogemos n tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Por la propiedad 3, tenemos que existe $y \in [0,1]$ con $0 < |x-y| < \frac{1}{n}$, tal que si $p \in C_n[x]$ y $q \in C_n[y]$, entonces

$$\left|\frac{p-q}{x-y}\right| > n.$$

Como $f(x) \in C_n[x]$ y $f(y) \in C_n[y]$, tenemos que

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| > n.$$

Es decir, para $x \in [0,1]$ y $\delta > 0$, existe $y \in [0,1]$ tal que $0 < |x - y| < \frac{1}{n} < \delta$ y

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| > n.$$

Por tanto f no es diferenciable en x, y como x es arbitrario, tenemos que f no es diferenciable en punto alguno.
■

3.2 Función de Hidefumi Katsuura

3.2.1 Construcción de la función y demostración de su continuidad.

Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado cerrado unitario en el plano, con la métrica euclideana. Nótese que X es un continuo, ya que es compacto y conexo.

Sea $w_i : X \to X$, $i = 1,2,3$ mapeos de contracción (ver Definición 1.40) definidos por

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}\right) \\ w_2(x,y) &= \left(\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3}\right) \\ w_3(x,y) &= \left(\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3}\right). \end{aligned}$$

Fácilmente se puede ver que w_1, w_2, w_3 efectivamente son mapeos de contracción, ya que dados $x, y \in X$, $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$

$$\begin{aligned}
d(w_1(x), w_1(y)) &= d\left(\left(\frac{x_1}{3}, \frac{2x_2}{3}\right), \left(\frac{y_1}{3}, \frac{2y_2}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_1 - y_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x_2 - 2y_2}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2}{4} + (x_2 - y_2)^2} \\
&\leq \frac{2}{3}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
&= \frac{2}{3} d(x, y).
\end{aligned}$$

Por tanto w_1 es un mapeo de contracción y con punto fijo $(0, 0)$. De la misma manera se procede para observar que w_2 y w_3 también son mapeos de contracción con puntos fijos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $(1, 1)$ respectivamente.

En la figura (3.29) podemos ver que w_1 contrae X en $w_1(X)$, w_2 en $w_2(X)$, y w_3 contrae X en $w_3(X)$.

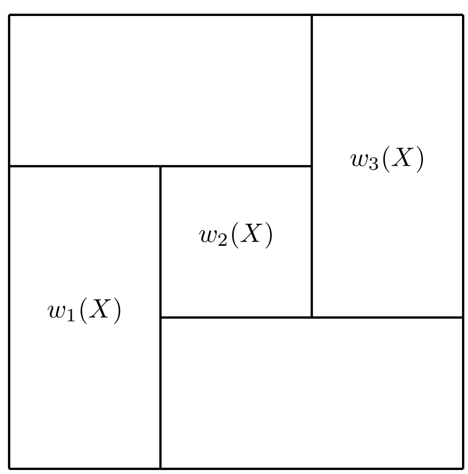


Figure 3.29: contracción de w

Sea 2^X la colección de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Definimos $w : 2^X \to 2^X$ por

$$w(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A). \tag{3.3}$$

Ahora para cada $A, B \in 2^X$, sea

$$H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : N(\varepsilon, A) \supset B, N(\varepsilon, B) \supset A\},$$

donde $N(\varepsilon, A)$ y $N(\varepsilon, B)$ son nubes de radio ε centradas en A y B respectivamente, es decir

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}.$$

Nótese que H es la métrica de Hausdorff inducida por la métrica euclideana.

Veamos en la siguiente proposición que w es un mapeo de contracción de 2^X bajo esta métrica H.

Proposición 3.3. *La función w definida en (3.3) es un mapeo de contracción con respecto a la métrica H.*

Demostración: Demostraremos que si $A, B \in 2^X$ entonces

$$H(w(A), w(B)) \leq \frac{2}{3} H(A, B).$$

Sean

$$u = H(A, B) = \inf\{r : N(r, A) \supset B \text{ y } N(r, B) \supset A\}. \tag{3.4}$$
$$v = H(w(A), w(B)) = \inf\{s : N(s, w(A)) \supset w(B) \text{ y } N(s, w(B)) \supset w(A)\}. \tag{3.5}$$

Con esta notación probaremos que

$$v \leq \frac{2}{3} u.$$

Por definición de u tenemos que para $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$u \leq r < u + \varepsilon \quad \text{y} \quad N(r, A) \supset B, N(r, B) \supset A.$$

De aquí que

$$\frac{2}{3} r < \frac{2}{3} u + \frac{2}{3} \varepsilon. \tag{3.6}$$

Probaremos que
1) $N\left(\frac{2}{3}r, w(A)\right) \supset w(B)$.
2) $N\left(\frac{2}{3}r, w(B)\right) \supset w(A)$.

De **1)**, **2)** y de (3.6) se tendrá que $v \leq \frac{2}{3}r < \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}\varepsilon$. Como ε es arbitrario, tendremos que

$$v \leq \frac{2}{3}u,$$

con lo cual probamos lo deseado.

Prueba de **1)**: Como $N(r, A) \supset B$ tenemos que

$$\begin{aligned} &w(N(r, A)) \supset w(B) \\ &w_i(N(r, A)) \supset w_i(B), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Además, observemos que

$$N\left(\frac{2}{3}r, w_i(A)\right) \supset w_i(N(r, A)), \tag{3.8}$$

ya que si $y_1 \in w_i(N(r, A))$, existe $x_1 \in N(r, A)$ tal que $w_i(x_1) = y_1$. Entonces existe $z_1 \in A$ tal que $d(x_1, z_1) < r$, de aquí y del hecho de que w_i es un mapeo de contracción para $i = 1, 2, 3$, tenemos que

$$d(w_i(x_1), w_i(z_1)) \leq \frac{2}{3}d(x_1, z_1) < \frac{2}{3}r.$$

Entonces $w_i(x_1) \in B_{\frac{2}{3}r}(w_i(z_1)) \in B_{\frac{2}{3}r}(w_i(A))$, es decir

$$y_1 \in B_{\frac{2}{3}r}(w_i(A)),$$

con lo cual probamos la afirmación (3.8). De (3.7) y de (3.8) se tiene

$$N\left(\frac{2}{3}r, w_i(A)\right) \supset w_i(B) \quad i = 1, 2, 3.$$

De aquí que

$$N\left(\frac{2}{3}r, w_1(A)\right) \cup N\left(\frac{2}{3}r, w_2(A)\right) \cup N\left(\frac{2}{3}r, w_3(A)\right) \supset w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B).$$

Entonces

$$N\left(\frac{2}{3}r, w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)\right) \supset w(B),$$

es decir

$$N\left(\frac{2}{3}r, w(A)\right) \supset w(B).$$

Con lo cual probamos **1)**. Similarmente se prueba **2)**.
■

Sea $D_0 = \{(x,x) \in X\}$ la diagonal en X. Definamos para cada $n = 1, 2, ...$

$$D_n = w(D_{n-1}).$$

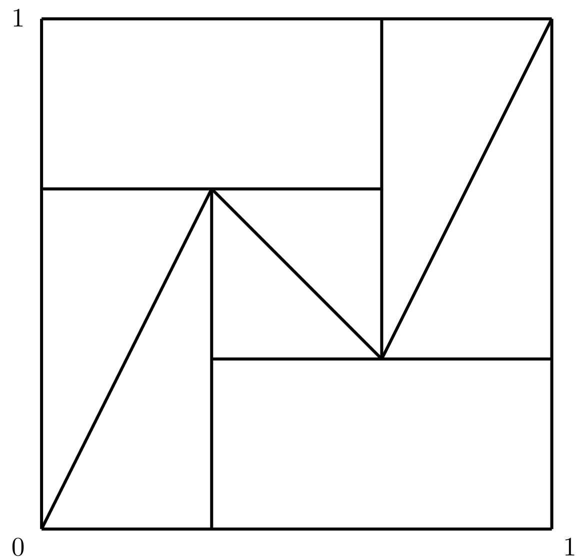


Figure 3.30: $w(X)$ y D_1

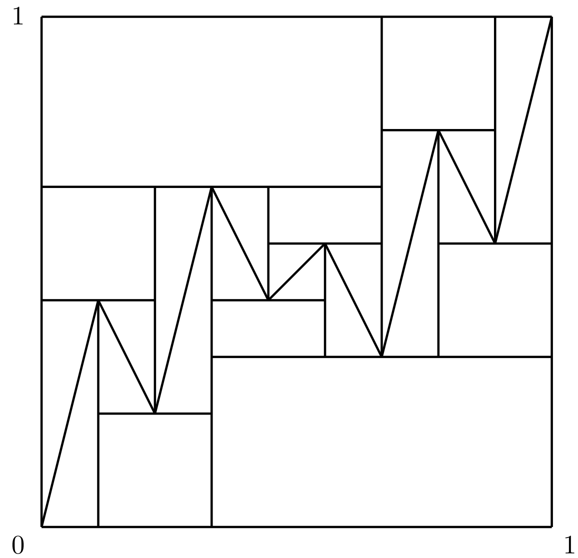


Figure 3.31: $w^2(X)$ y D_2

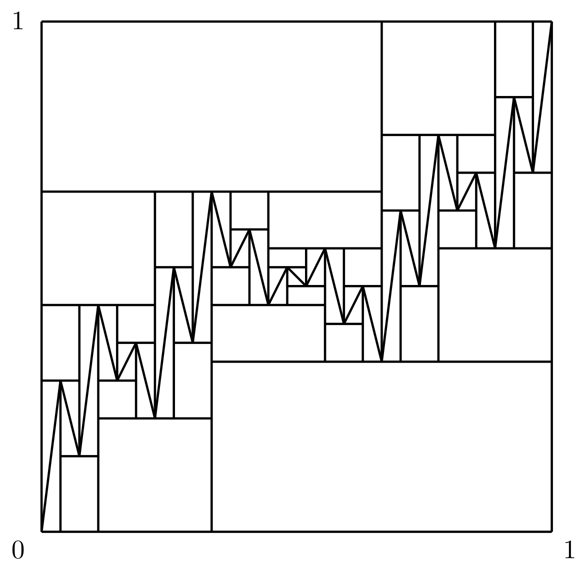


Figure 3.32: $w^3(X)$ y D_3

Afirmamos que D_n es la gráfica de una función continua, digamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$. En efecto, primero observemos que esta afirmación es cierta para D_0 y D_1.

$$f_0(u) = u,$$
$$f_1(u) = \begin{cases} 2u & \text{si } 0 < u \leq \frac{1}{3} \\ -u+1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3} \\ 2u-1 & \text{si } \frac{2}{3} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Para probar esta afirmación será necesario probar el siguiente Lema.

Lema 3.4. *Sea $g : [0,1] \to [0,1]$ una función continua tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Entonces si $E =$Graf(g) se tiene que $w(E)$ es la gráfica de una función continua.*

Demostración:
$$w(E) = w_1(E) \cup w_2(E) \cup w_3(E),$$
donde $E = \{(x, g(x)) : x \in [0,1]\}$.
Evidentemente se tiene que $w_1(E)$ es la gráfica de una función continua

$$h_1 : \left[0, \frac{1}{3}\right] \to \left[0, \frac{2}{3}\right], \quad h_1(z) = \frac{2}{3} g(3z).$$

De la misma manera podemos ver que $w_2(E)$ es la gráfica de una función continua

$$h_2 : \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \to \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad h_2(z) = \frac{1 + g(-3z+2)}{3},$$

y $w_3(E)$ es la gráfica de una función continua

$$h_3 : \left[\frac{2}{3}, 1\right] \to \left[\frac{1}{3}, 1\right], \quad h_3(z) = \frac{1 + 2g(3z-2)}{3}.$$

Para que $w(E)$ sea la gráfica de una función H debe cumplirse que

$$w_1(1, g(1)) = w_2(1, g(1)), \tag{3.9}$$
$$w_2(0, g(0)) = w_3(0, g(0)). \tag{3.10}$$

Además la función H es continua. Que (3.9) se cumpla significa que

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2g(1)}{3}\right) = \left(\frac{2-1}{3}, \frac{1+g(1)}{3}\right),$$

es decir, si

$$\frac{2g(1)}{3} = \frac{1+g(1)}{3},$$

es decir, $g(1) = 1$. Lo cual se tiene por hipótesis. (3.10) vale si $g(0) = 0$. Lo cual también se satisface por hipótesis. Por tanto $w(E)$ es la gráfica de una función continua.

$\blacksquare$

Ahora para probar la afirmación de que D_n es la gráfica de una función continua $f_n : [0,1] \to [0,1]$, usaremos repetidamente el lema anterior. Como D_0 es la gráfica de una función continua $f_0(x) = x$, por el Lema 3.4 se tiene que $D_1 = w(D_0)$ es la gráfica de una función continua f_1. Nuevamente por el lema se tiene que $D_2 = w(D_1)$ es la gráfica de una función continua f_2. Continuando así obtenemos que D_n es la gráfica de una función continua f_n.

Así tenemos una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones, donde D_n es la gráfica de f_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Lo que veremos ahora es que ésta sucesión es de Cauchy.
Notemos que si $m \geq n$ se satisface que $w^n(X) \supseteq D_m$. En efecto, dado que

$$\begin{aligned}
&D_0 \subseteq X \\
&D_1 = w(D_0) \subseteq w(X) \\
&D_2 = w(D_1) = w^2(D_0) \subseteq w^2(X) \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&D_n = w(D_{n-1}) = w^n(D_0) \subseteq w^n(X),
\end{aligned}$$

además $X \supseteq w(X) \supseteq w^2(X) \supseteq ... \supseteq w^n(X) \supseteq ... \supseteq w^m(X)$. Entonces

$$D_m = w^m(D_0) \subseteq w^m(X) \subseteq w^n(X).$$

Por tanto $D_m \subseteq w^n(X)$ siempre que $m \geq n$. También tenemos que $w^n(X)$ es la unión de 3^n rectángulos de alturas menor o igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Entonces si $m \geq n$ tenemos que

$$\sup\{|f_m(t) - f_n(t)| : t \in [0,1]\} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

De aquí que para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n \geq N$

$$\begin{aligned}|f_m(t) - f_n(t)| &\leq \sup\{|f_m(t) - f_n(t)| : t \in [0,1]\}\\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto implica que la sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy. Entonces existe una función $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f. \tag{3.11}$$

Teorema 3.5. *La función $f : [0,1] \to [0,1]$ definida en (3.11) es continua.*

Demostración: como cada f_n esta definida en el compacto [0,1] tenemos que la convergencia es uniforme, y como cada f_n es continua, por la Proposición 1.46 tenemos que f es continua.
■

Ahora solo nos falta ver que ésta función f es diferenciable en ninguna parte.

Como w es un mapeo de contraccción en 2^X, por el Teorema 1.41 tenemos que tiene un único punto fijo D en 2^X. Aún más, si A es un elemento arbitrario de 2^X, entonces la sucesión $\{w^n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a D con respecto a la métrica H (ver Teorema 1.41), y como $D_n = w^n(D_0)$ =Graff_n para cada $n \in \mathbb{N}$, y además $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ tenemos que

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \text{Graf} f.$$

De aquí que para n grande podemos darnos una idea de la gráfica de f.

3.2.2 Diferenciabilidad en ninguna parte de f

Para probar que f es diferenciable en ninguna parte necesitamos probar primero dos Lemas.

Sea T el conjunto de todos los racionales ternarios en el intervalo $(0,1)$, y para cada $n = 1, 2, ...$, sea T_n el conjunto de los racionales ternarios de n-dígitos.

Lema 3.6. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en T tales que, para cada $n = 1, 2, ...$,* *1.* x_n *y* y_n *están en* T_n*,*

2. $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$*, y*

3. $x_n = x_{n+1}$ *o* $y_n = y_{n+1}$*.*

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \right| = \infty.$$

Demostración:

Antes de comenzar la demostración notemos que si $x \in T_n$ entonces $f(x) = f_n(x)$. Para ello primero veamos cómo son los elementos de T_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que los elementos de T_1 los encontramos al partir el intervalo $[0,1]$ en tres partes, es decir $T_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Cada intervalo que quedó lo volvemos a partir en tres partes y así obtenemos los elementos de T_2, es decir al partir en 3^2 el intervalo $[0,1]$. En general los elementos de T_n los obtenemos al partir en tres partes cada intervalo de longitud $\frac{1}{3^{n-1}}$, es decir al partir en 3^n el intervalo de longitud $[0,1]$.

Sea $B = \{(0,0),(1,1)\}$. Sabemos que se satisface

$$B \subset D_0 \Rightarrow w^n(B) \subset w^n(D_0) = D_n. \tag{3.12}$$

$$B \subset D \Rightarrow w^n(B) \subset w^n(D) = D. \tag{3.13}$$

Afirmamos que dado $x \in T_n$, existe y (único) tal que

$$(x,y) \in w^n(B) \subset D_n.$$

En efecto, recordemos que

$$w_1(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}\right),$$

$$w_2(x,y) = \left(\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3}\right),$$

$$w_3(x,y) = \left(\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3}\right).$$

Entonces

$$w_1(B) = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$w_2(B) = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$w_3(B) = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (1,1)\right\}.$$

De aquí que

$$w(B)=\left\{(0,0),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(1,1)\right\}.$$

Sea $\pi_1 : [0,1] \to [0,1]$ la función proyección en la primer coordenada. Entonces

$$\pi_1(w(B))=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}=T_1$$

Por tanto para $x \in T_1 = \pi_1(w(B))$ existe un único y tal que $(x,y) \in w(B)$. Similarmente $\pi_1(w^n(B)) = T_n$. Entonces para $x \in T_n$ existe y tal que $(x,y) \in w^n(B)$, y como también por (3.12) $w^n(B) \subset D_n$ y D_n =Graf(f_n) tenemos que

$$y = f_n(x).$$

Por otro lado, dado que $w^n(B) \subset D$ por (3.13) y como D =Graf(f), se tiene que

$$y = f(x).$$

Por tanto, si $x \in T_n$. Entonces $f_n(x) = f(x)$. También observemos que las imagenes bajo f de los puntos que satisfacen las hipótesis tienen la forma de las figuras (3.33) y (3.34).

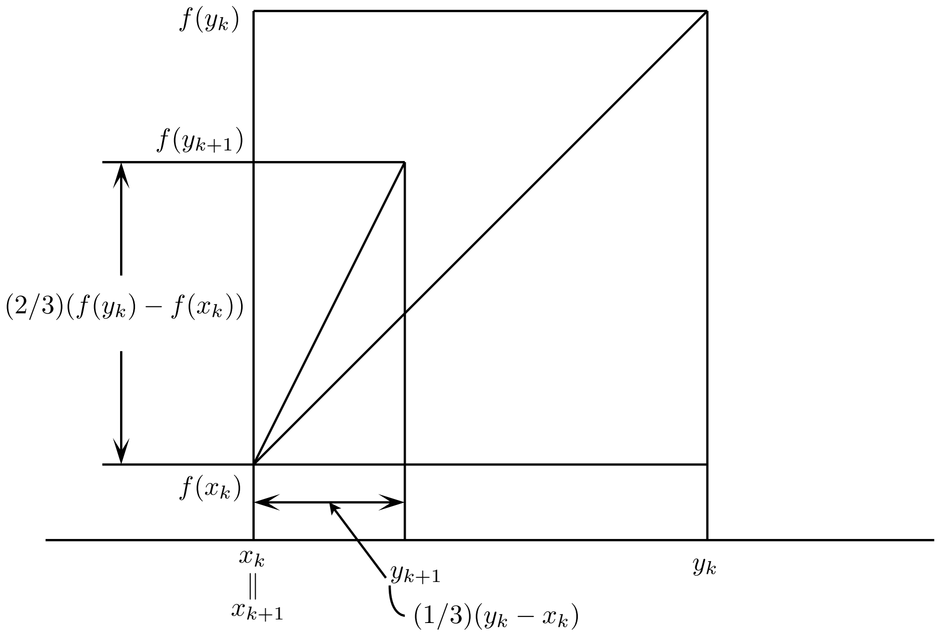


Figure 3.33: caso $x_k = x_{k+1}$

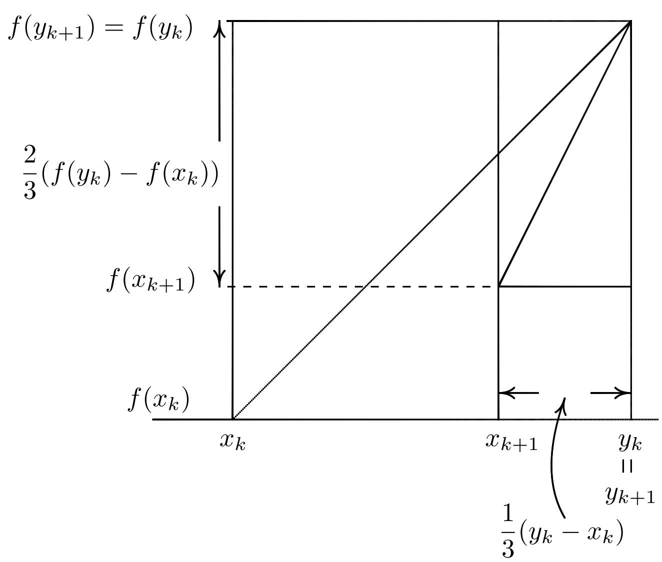


Figure 3.34: caso $y_k = y_{k+1}$

Afirmamos que

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| \geq 2^{n-1} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, ...$$

Para demostrar esto lo haremos por inducción, primero para $n = 1$ al observar la figura (3.35) obtenemos que

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| = \begin{cases} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 & \text{si } (x_1 = 0 \text{ y } y_1 = \frac{1}{3}) \text{ o } (x_1 = \frac{2}{3} \text{ y } y_1 = 1) \\ \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = -1 & \text{si } x_1 = \frac{1}{3} \text{ y } y_1 = \frac{2}{3}\ . \end{cases}$$

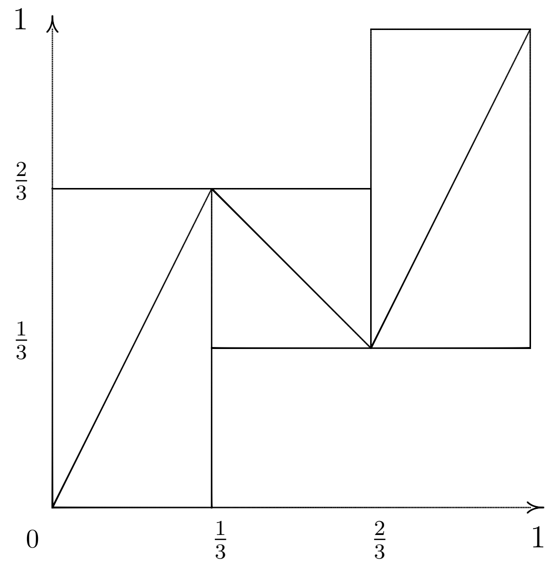


Figure 3.35: D_1=Graf f_1

Entonces si $n = 1$ se cumple la afirmación.

Ahora supongamos que para algún entero $k \geq 1$ la afirmación es verdadera, es decir que

$$\left|\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}\right| \geq 2^{k-1}. \tag{3.14}$$

Veamos que la afirmación se cumple para $k+1$. En efecto,

$$\left|\frac{f(y_{k+1})-f(x_{k+1})}{y_{k+1}-x_{k+1}}\right| = \frac{\frac{2}{3}|f(y_k)-f(x_k)|}{\frac{1}{3}|y_k-x_k|} \tag{3.15}$$

$$\geq 2\frac{2^{k-1}|y_k-x_k|}{|y_k-x_k|} \tag{3.16}$$

$$= 2^{(k+1)-1}, \tag{3.17}$$

donde la primer igualdad se obtiene de las figuras (3.33) y (3.34), y la desigualdad por hipótesis de inducción.

Por tanto

$$\left|\frac{f(y_{k+1})-f(x_{k+1})}{y_{k+1}-x_{k+1}}\right| \geq 2^{(k+1)-1}.$$

Lo cual prueba la afirmación. Por tanto, claramente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| = \infty.$$

■

Lema 3.7. *sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones en* T *tales que para cada* $n=1,2,...,$

1. x_n *y* y_n *están en* T_n*,*
2. $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ *y*
3. $x_n \neq x_{n+1}$ *y* $y_n \neq y_{n+1}$ *para un número infinito de* $n = 1,2,...$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$

no existe.

Demostración:
Antes de empezar la demostración, recordemos que si $x \in T_n$ entonces $f(x) = f_n(x)$. Además las imágenes de los puntos que satisfacen que $x_n, y_n \in T_n$, $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ y $x_n \neq x_{n+1}$, $y_n \neq y_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tiene la forma de la figura (3.36)

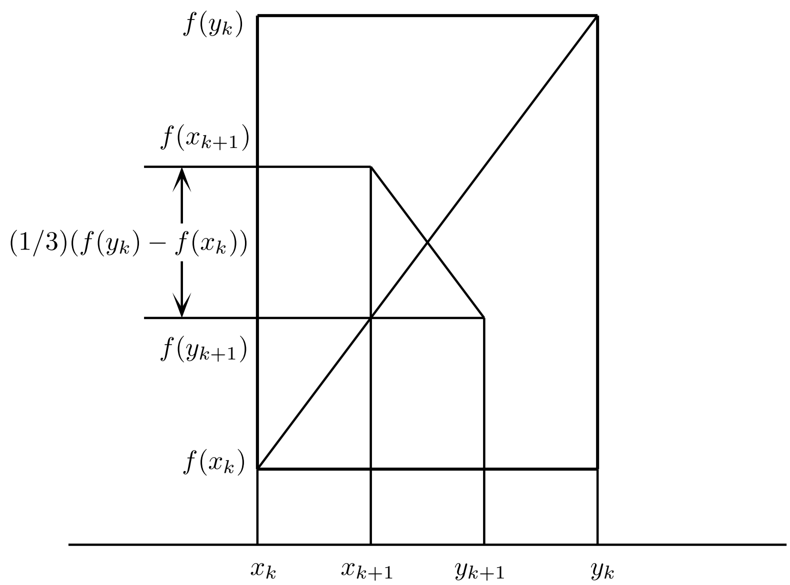


Figure 3.36: caso $x_k \neq x_{k+1}$ y $y_k \neq y_{k+1}$

Afirmamos que

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \right| \geq 1 \quad \text{para cada } n = 1, 2, 3, ... \tag{3.18}$$

Probaremos esta afirmación por inducción. Para $n = 1$ ya lo tenemos por el lema anterior. Ahora supongamos que la afirmación es cierta para un cierto $k \geq 1$. Es decir

$$\left| \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} \right| \geq 1.$$

Como por hipótesis del Lema $x_n \neq x_{n+1}$ y $y_n \neq y_{n+1}$ para un número infinito de $n = 1, 2, ...$, primero supongamos que $x_k = x_{k+1}$ o $y_k = y_{k+1}$. Entonces por el lema previo y por hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y_{k+1}) - f(x_{k+1})}{y_{k+1} - x_{k+1}} \right| &= \frac{\frac{2}{3}|f(y_k) - f(x_k)|}{\frac{1}{3}|y_k - x_k|} \\ &\geq \frac{\frac{2}{3}|y_k - x_k|}{\frac{1}{3}|y_k - x_k|} \\ &\geq 2 \cdot 1 \\ &> 1. \end{aligned}$$

En otro caso, si $x_k \neq x_{k+1}$ y $y_k \neq y_{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y_{k+1}) - f(x_{k+1})}{y_{k+1} - x_{k+1}}\right| &= \frac{\frac{1}{3}|f(y_k) - f(x_k)|}{\frac{1}{3}|y_k - x_k|} \\ &\geq \frac{\frac{1}{3}|y_k - x_k|}{\frac{1}{3}|y_k - x_k|} \\ &= 1,\end{aligned}$$

donde la primer igualdad se obtiene de la figura (3.36) y la desigualdad por hipótesis de inducción. Lo cual prueba la afirmación.

Por otro lado, si n es un entero tal que $x_n \neq x_{n+1}$ y $y_n \neq y_{n+1}$. Entonces de la figura (3.36)

$$\begin{aligned}\frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}} &= \frac{-\frac{1}{3}(f(y_n) - f(x_n))}{\frac{1}{3}(y_n - x_n)} \\ &= -\left(\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right),\end{aligned}$$

si el límite existiera tendría que ser cero. Pero por la afirmación (3.18) tenemos que esto es imposible. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

no existe.

■

Teorema 3.8. *La función $f : [0,1] \to [0,1]$, definida en (3.11), es diferenciable en ningún $x \in (0,1)$.*

Demostración:

Si $x \in T_n$ para cualquier entero n. Definimos $y_k = x + \frac{1}{3^{n+k}}$ para cualquier $k = 1, 2, ...$ Entonces $\lim_{k\to\infty} y_k = x$, y

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x}\right| = \infty,$$

por el Lema 3.6. Por tanto f no es diferenciable en x.

En otro caso, si $x \notin T_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que para cada $n = 1, 2, ...,$

1. x_n y y_n están en T_n.
2. $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$, y
3. $x_n < x < y_n$.

Entonces por los lemas 3.6 y 3.7, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

no existe. Por tanto por la Proposicón 2.1 tenemos que f no es diferenciable en x.
$\blacksquare$

CAPÍTULO 4

Existencia de Funciones Continuas y Diferenciables en Ninguna Parte.

De los capítulos anteriores sabemos que existen funciones continuas en todos los puntos de un intervalo pero derivables en ningún punto de este mismo intervalo, pues hemos visto algunos ejemplos. Lo que haremos en este capítulo es demostrar la existencia de este tipo de funciones, sin hacer una construcción de alguna de ellas.

Más aún, en contraste con nuestro sentido común, hay "muchas" de estas funciones, de hecho, desde el punto de vista topológico existen más funciones de este tipo que las continuas y diferenciables en algún punto.

Para poder mostrar esto, requerimos de algunas definiciones y teoremas, que es por donde empezaremos.

4.1 Requisitos Previos.

En el Capítulo 2, definimos lo que es un espacio métrico, y un espacio métrico completo, en esta sección, entre otras cosas, definiremos un espacio normado y un espacio de Banach.

Definición 4.1. *(Espacio normado)*

Sea X un espacio vectorial sobre el campo K, donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una norma en X es una función $\| \, \|: X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\|x\| \geq 0$ *para toda* $x \in X$.
2. *si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *para toda* $\lambda \in K$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para toda* $x, y \in X$.

La pareja $(X, \| \, \|)$ se llama espacio normado.

Observación: La norma $\| \, \|$ induce una métrica en X del modo siguiente:

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

d se llama la distancia inducida por la norma $\|\|$.

Obsérvese también que en un espacio normado $(X, \|\|)$ tenemos todos los resultados probados para espacios métricos.

Definición 4.2. *(Espacio de Banach)*
Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. Diremos que $(X, \| \|)$ es un espacio de Banach si (X, d) es un espacio métrico completo donde d es la distancia inducida por la norma, es decir $d(x, y) = \|x - y\|$.

Teorema 4.3. *El espacio $(C([a, b]), \| \|_\infty)$, donde*

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \;\; \textit{es} \;\; \textit{continua}\},$$

y

$$\| \|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

es un espacio de Banach.

Demostración:
Para ello demostremos que el espacio $C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : \text{f es continua}\}$, con la métrica

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

es completo. Primero observemos que $g_n \to g$ en $C([a, b]) \Leftrightarrow g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$. En efecto:

$g_n \to g$ en $C([a, b]) \Leftrightarrow$ para toda toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \; n \geq N$ se tiene $d_\infty(g_n, g) \leq \varepsilon$, esto es

$$\sup_{x \in [a,b]} |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para toda} \;\; n \geq N.$$

Entonces

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para toda} \;\; n \geq N \;\; \text{y para toda} \;\; x \in [a, b].$$

Lo cual confirma nuestra afirmación.

Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en el espacio $C([a, b])$. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m, n \geq N, \quad d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$. Entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{para toda } x \in [a,b]. \tag{4.1}$$

De aquí que para toda $x \in [a,b]$, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{R}$ es completo, existe $y_x \in \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) \to y_x$.
Defínase $f(x) = y_x$, con $x \in [a,b]$, demostraremos que $f \in C([a,b])$ y que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$. En efecto, en (4.1) fijemos $n \geq N$ y hagamos que $m \to \infty$. Entonces

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } x \in [a,b],$$

esto es,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } \; x \in [a,b], \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

De aquí que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$, y como cada f_n es continua, por la Proposición 1.46 tenemos que f es continua. Por lo tanto, $f_n \to f$ en $(C([a,b]))$.
■

Definición 4.4. *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es denso en X si $\bar{A}$=X.*

Definición 4.5. *Sea X un espacio métrico, un subconjunto $A \subset X$ se llama denso en ninguna parte (nunca denso) si $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$.*

Definición 4.6. *Sea X un espacio métrico, un subconjunto $F \subset X$ se llama de primera categoría (flaco o magro) si $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ donde cada F_n es nunca denso.*

Definición 4.7. *Diremos que un subconjunto de un espacio métrico es de segunda categoría si no es de primera categoría.*

Teorema 4.8. *(de Cantor)*
Sea X un espacio métrico completo y $E_n \subseteq X$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tales que $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset ...$, si cada E_n es cerrado, no vacío y si diam$E_n \to 0$, entonces hay exactamente un punto en la intersección de todos los $E_{n's}$.

Demostración: Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $E_1 \supset E_2 \supset ...$, si $m > n$ tenemos que $x_m \in E_n$ y $d(x_n, x_m) \leq \text{diam } E_n \to 0$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, y como X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

Veamos que esta x estén la intersección de todos los $E_{n's}$. Supongamos que $k \geq n$, entonces $x_k \in E_n$ y como cada E_n es cerrado tenemos que $x \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que $x_k \to x$.

Ahora veamos que este punto es único, lo cual es claro, ya que si existen $x, y \in X$ tales que $x, y \in E_n$ para todo $n \in N$, entonces $d(x, y) \leq \text{diam } E_n \to 0$, de aquí que $d(x, y) = 0$ y por tanto $x = y$. Por lo tanto existe un único punto en la intesección de todos los $E_{n's}$. ■

El siguiente Teorema es necesario para la demostración del Teorema de Baire.

Teorema 4.9. *En un espacio métrico completo, la intersección numerable de abiertos densos es densa.*

Demostración: Sea X un espacio métrico completo y $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos densos en X, demostraremos que $\cap_{n=1}^{\infty} O_n$ es denso en X.

Demostraremos que si A es abierto no vacío de X entonces $A \bigcap (\cap_{n=1}^{\infty} O_1) \neq \emptyset$. Como O_1 es denso en X, entonces $A \bigcap O_1 \neq \emptyset$ y además es abierto, así podemos hallar una bola abierta B_1 tal que $\overline{B_1} \subset A \bigcap O_1$ y $\text{diam}(\overline{B_1}) \leq 1$.

Del mismo modo, como O_2 es denso en X, tenemos que $B_1 \bigcap O_2 \neq \emptyset$ y también es abierto. Luego existe una bola abierta B_2 tal que $\overline{B_2} \subset B_1 \bigcap O_1$ y $\text{diam}(\overline{B_2}) \leq \frac{1}{2}$. Podemos observar que $B_1 \bigcap O_2 \subset A \bigcap O_1 \bigcap O_2$. Procedemos inductivamente y encontramos una sucesión de bolas abiertas $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $B_{n+1} \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $\text{diam}(B_n) \leq \frac{1}{n}$ y $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \bigcap O_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $\{\overline{B_n}\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de cerrados en un espacio métrico completo tal que $\text{diam}(\overline{B_n}) \leq \frac{1}{n} \to 0$ por el Teorema de Cantor (4.8) se sigue que existe $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$.

Veamos que $x \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) \bigcap A$. Obsérvese que

$$
\begin{aligned}
&\overline{B_1} \subset A \bigcap O_1 \\
&\overline{B_2} \subset B_1 \bigcap O_2 \subset A \bigcap O_1 \bigcap O_2 \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\overline{B_n} \subset B_{n+1} \bigcap O_n \subset A \bigcap [\bigcap_{k=1}^{n} O_k] \quad \text{para toda } \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[A \bigcap \left(\bigcap_{k=1}^{n} O_k \right) \right] = A \bigcap \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

Por lo tanto

$$x \in A \bigcap \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

■

Teorema 4.10. *(De Baire)*
Si X es un espacio métrico completo entonces X es de segunda categoría.

Demostración: Supongamos que X es de primera categoría, entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, con $(\overline{F_n})^{\circ} = \emptyset$ para toda $n \in N$.

Sea $O_n = X \backslash \overline{F_n}$ el cual es abierto para toda $n \in \mathbb{N}$, además

$$\overline{O_n} = \overline{X \backslash \overline{F_n}} = X \backslash (\overline{F_n})^{\circ} = X.$$

Así O_n es abierto y denso en X. Entonces, por el Teorema (4.9) tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es densa en X, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \neq \emptyset$; por otra parte

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \backslash \overline{F_n} \right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} \right)^{c} \subseteq X^c = \emptyset.$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es de segunda categoría. ■

Proposición 4.11. *Un conjunto cerrado con complemento denso es nunca denso.*

Demostración: Sea B un conjunto cerrado en X, tal que B^c es denso, por demostrar que $(\overline{B})^\circ = \emptyset$.

Supongamos que $\overline{B}^\circ \neq \emptyset$, entonces existen $x \in \overline{B}^\circ$ y $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \overline{B}$, de aquí que $B_r(x) \cap (\overline{B})^c = \emptyset$. Pero $B = \overline{B}$ pues B es cerrado. Por tanto $B_r(x) \cap B^c = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues B^c es denso en X.

Por tanto $(\overline{B})^\circ = \emptyset$, es decir B es nunca denso. ■

La siguiente Proposición será necesario para la prueba del resultado central de esta sección.

Proposición 4.12. *El conjunto*

$$\mathbb{P}[0,1] = \{f \in C[0,1] : f \ \textit{es lineal por pedazos}\}$$

es denso en $C[0,1]$.

Demostración: Sea $f \in C[0,1]$, como f es continua en un compacto tenemos que es uniformemente continua en $[0,1]$, así para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} \ \text{ para todo } \ x, y \in [0,1]. \tag{4.2}$$

Lo que haremos es construir una función $g \in \mathbb{P}[0,1]$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Sea $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ una colección finita de puntos con $x_i - x_{i-1} < \delta$ y le llamaremos I_i al conjunto de puntos que satisfacen que $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Obsérvese que para toda $x, y \in I_i$ tenemos $|x - y| < \delta$.

Sea $x \in [0,1]$, entonces tenemos que $x \in I_k$ para algún $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. De aquí que $|x - x_k| < \delta$.

Definamos

$$g_\varepsilon(x) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) - f(x_k).$$

Entonces, para toda $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
|f(x) - g_\varepsilon(x)| &= \left| f(x) - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) - f(x_k) \right| \\
&\leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \frac{|x - x_k|}{|x_{k+1} - x_k|} \\
&< |f(x) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a (4.2).
De aquí que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\|f - g_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$, donde $g_\varepsilon(x) \in \mathbb{P}[0,1]$. Es decir, $\mathbb{P}[0,1]$ es denso en $C[0,1]$.
■

4.2 Existencia de una función continua diferenciable en ninguna parte.

En el siguiente Teorema se muestra el resultado central de esta sección, y veremos que son "más" las funciones continuas y diferenciables en ninguna parte que las continuas y diferenciables en algún punto.

Teorema 4.13. *Existen funciones continuas y diferenciables en ninguna parte.*

Demostración:

Lo que mostraremos es que el conjunto

$$\{f \in C : f \text{ no tiene derivada finita en punto alguno}\},$$

es de segunda categoría y por lo tanto no puede ser vacío, pues el vacío es de primera categoría.
Sea

$$E_n = \left\{ f \in C : \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n, \text{ para algún } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ y } 0 < h < \frac{1}{n} \right\}.$$

Cualquier función continua que tiene derivada finita por la derecha en x pertenece a E_n. En efecto, supongamos que f tiene derivada finita por la derecha en x. Dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < h < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'_+(x) \right| < 1.$$

De aquí que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq \left|f'_{+}(x)\right| + 1. \tag{4.3}$$

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, $\left|f'_{+}(x)\right| + 1 < n$, $\frac{1}{n} < \delta$.
Entonces para $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, para $0 < h < \frac{1}{n} < \delta$, por (4.3) tenemos

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq \left|f'_{+}(x)\right| + 1 < n.$$

Entonces $f \in E_n$.

Por tanto

$$\cup E_n \supset \{f \in C : f \text{ tiene derivada finita por la derecha en algún punto}\}. \tag{4.4}$$

Si mostramos que cada E_n es nunca denso tendríamos que $\cup E_n$ sería de primera categoría, y por tanto todo subconjunto de él sería de primera categoría.

Para probar que E_n es nunca denso mostraremos que los $E_{n'}s$ son cerrados y tienen complemento denso en todas partes (ver Lema 4.11).
Primero veamos que es cerrado. Sea $f \in \overline{E_n}$. Entonces existe una sucesión $(f_k)_{k=0}^{\infty} \in E_n$ tal que $f_k \to f$ uniformemente sobre $[0,1]$.
Por la definición de E_n, para cada f_k existe $x_k \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ tal que

$$|f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| < nh \text{ para toda } h \in \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Así formamos la sucesión $(x_k)_{k=0}^{\infty} \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$. Entonces por el Teorema de Bolzano Weierstrass, $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $(x_{k_m})_{m=1}^{\infty}$ que converge a algún $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$.
Sea $(f_{k_m})_{m=1}^{\infty}$ la correspondiente a $(x_{k_m})_{m=1}^{\infty}$, así tenemos:

$$|f_{k_m}(x_{k_m}+h) - f_{k_m}(x_{k_m})| < nh \text{ para toda } h \in \left(0, \frac{1}{n}\right). \tag{4.5}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &\leq |f(x+h) - f(x_{k_m}+h)| + |f(x_{k_m}+h) - f_{k_m}(x_{k_m}+h)| \\
&\quad + |f_{k_m}(x_{k_m}+h) - f_{k_m}(x_{k_m})| + |f_{k_m}(x_{k_m}) - f(x_{k_m})| + |f(x_{k_m}) - f(x)| \\
&\leq |f(x+h) - f(x_{k_m}+h)| + \|f - f_{k_m}\|_{\infty} + nh + \|f_{k_m} - f\|_{\infty} + |f(x_{k_m}) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Haciendo m tender a infinito tenemos

$$|f(x+h) - f(x)| \leq nh \quad \text{para toda } 0 < h < \frac{1}{n}.$$

De aquí que $f \in E_n$ y por tanto E_n es cerrado.

Ahora veamos que E_n^c es denso. Para ello es suficiente probar que para cualquier $g \in \mathbb{P}[0,1]$ (ver Proposición (4.12)) y $\varepsilon > 0$ existe $\psi \in E_n^c$ tal que $\|g - \psi\|_\infty < \varepsilon$, donde

$$E_n^c = \left\{ \psi \in C : \left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \right| > n \text{ para toda } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ y para algún } h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\},$$

y

$$\mathbb{P}[0,1] = \{f \in C[0,1] : f \textit{ es lineal por pedazos}\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$, $g \in \mathbb{P}[0,1]$ y sea L la pendiente más grande de los "pedazos" de g. Elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\varepsilon > n + L$.

Sea $\phi(x) = dist(x, \mathbb{Z})$, que es la distancia de x al entero más cercano. Tomamos

$$\psi(x) = g(x) + \varepsilon\phi(mx).$$

Es fácil observar que $\psi(x)$ está en $C[0,1]$, y también

$$\begin{aligned} |\psi'_+(x)| &= \left|g'_+(x) + \varepsilon m \phi'_+(mx)\right| \\ &\geq |\varepsilon m \phi'_+(mx)| - |g'_+(x)| \\ &\geq m\varepsilon - L \\ &> n + L - L \\ &= n. \end{aligned}$$

Donde la tercer desigualdad se debe a que $\phi'_+(mx) = \pm 1$ y L es la pendiente más grande de los "pedazos" de g, y la cuarta desigualdad debido a que elegimos $m\varepsilon > n + L$.

Así que $|\psi'_+(x)| > n$. Entonces existe h suficientemente pequeña tal que

$$\left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \right| > n \quad \text{para toda } x \in [0,1).$$

Por tanto $\psi \in E_n^c$. Además

$$\begin{aligned} \|g - \psi\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - (g(x) + \varepsilon\phi(mx))| \\ &= \varepsilon \sup_{x \in [0,1]} |\phi(mx))| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto cada E_n es nunca denso. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es de primera categoría, y como $\{f \in C : f \text{ tiene derivada finita en algún punto}\}$ está contenido en $\{f \in C : f \text{ tiene derivada finita por la derecha en algún punto}\}$, y

$$\{f \in C : f \text{ tiene derivada finita por la derecha en algún punto}\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

tenemos que

$$D = \{f \in C : f \text{ tiene derivada finita en algún punto}\}$$

es de primera categoría, y por tanto

$$D^c = \{f \in C : f \text{ no tiene derivada finita en punto alguno}\},$$

es de segunda categoría, pues si suponemos que es de primera categoría tendríamos que $D \cup D^c = C$ sería de primera categoría, lo cual es imposible, pues por el Teorema de Categoría de Baire, ya que C es completo, sabemos que es de segunda categoría.

Por lo tanto D^c es de segunda categoría y no puede ser vacío, es decir, existe una función continua que no tiene derivada finita en punto alguno.
$\blacksquare$

Bibliography

[1] T.M Apóstol (1976)*Análisis Matemático*,segunda edición, Editorial Reverté.

[2] Claude W. Burril, John R. Knudsen (1969)*Real Variables*, Editorial Holt, Rinehart and Winston Inc.

[3] Norman B. Haaser, Joseph A. Sullivan (1978)*Análisis Real*, Editorial Trillas.

[4] Ralph P. Boas Jr. (1960)*A Primer of Real Functions*, Editorial The Mathematical Association of America

[5] P.Billingsley (1982)*Vander Waerden's continuous nowhere differentiable function*, Revista: American Mathematical Monthly. Número 89.

[6] F. S. Cater (1984)*Vander Waerden's nowhere differentiable function*, Revista: American Mathematical Monthly. Número 91.

[7] Walter Rudin (1953) *Principles of Mathematical Analysis*, Editorial Mc.Graw-Hill Book Company,inc.

[8] M. Lynch. A. (1992)*Continuous Nowhere Differentiable*, Revista: American Mathematical Monthly. Número 99.

[9] H. Katsuura (1991)*Continuous Nowhere Differentiable Functions - An application of Contraction Mappings*, Revista: American Mathematical Monthly. Número 5

[10] Robert G. Bartle(2004) *Introducción al Análisis Matemático de una Variable* , Editorial Limusa.

[11] M.Hyksŏvá *Bolzanoś inherietance research in Bohemia*, History of Math. 17 (2001),67-91.

[12] Alejandro Illanes Mejía (2004) *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas texto 28