

#3

BIBLIOTECA CIENCIAS  
EXACTAS Y NATURALES

QA304  
.B73

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
FACULTAD DE ALTOS ESTUDIOS



15/T917

## **Cálculo Diferencial e Integral Cuatérnico**

**T E S I S**

Que para obtener el título de  
**LICENCIADO EN MATEMATICAS**

p r e s e n t a

**AGUSTIN BRAU ROJAS**

QA304  
.B73

HERMOSILLO, SONORA, MEXICO

1979

# **UNIVERSIDAD DE SONORA**

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

## **Cálculo Diferencial e Integral Cuatérnico**



**BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES**

EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

**T E S I S**

Que para obtener el título de  
**LICENCIADO EN MATEMATICAS**

p r e s e n t a

**AGUSTIN BRAU ROJAS**

HERMOSILLO, SONORA, MEXICO

1979

Con inmenso amor a una bella  
mujer y talentosa Matemática:  
Mi compañera.

A mi hijo Agustín.

A mis padres,  
por su amor incondicional.



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

**BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES**

A mi tía Socorro,  
por su nobleza y generosidad.

A Don Clemente,  
por su ejemplo de amor paternal.

Al Profesor Enrique Valle Flores  
por su enorme labor en la forma-  
ción de matemáticos en Sonora.

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

CUATERNICO



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE NUESTROS  
HAY EN SU GRANDEZA

## INDICE

- 0. Introducción:
- I. Cuaternios Reales. -----  
Definición. Caracterización Algebraica y Topológica.  
Representación matricial
- II. Funciones Cuatérmicas Analíticas -----  
Funciones Cuatérmicas Derivables. Cálculo de Fueter.
- III. Curvas Cuatérmicas Elípticas. -----  
Estructuras  $Q$  - analíticas. Toro Cuatérmico. Redes  
Cuatérmicas.

## INTRODUCCION

El objetivo inicial de este trabajo era mostrar las posibilidades de un Cálculo Diferencial e Integral Cuatérnico. Dentro de esa idea demostramos un teorema que caracteriza las funciones cuatérnicas derivables; el resultado es esencialmente negativo ya que esta clase de funciones resulta sumamente restringida para desarrollar con ella - un cálculo diferencial e integral. Mediante un enfoque - distinto del concepto de regularidad, el matemático alemán Fueter y sus seguidores [5,6] eluden la dificultad presentada y crean un cálculo en el que se obtienen resultados análogos a los del cálculo complejo. En vez de seguir esta alternativa, que sólo comentamos brevemente en el Capítulo II, nos inclinamos por dar a este trabajo una orientación geométrica. Esto fue motivado por los estudios que actualmente se realizan para clasificar las estructuras - afines en variedades complejas (vease por ejemplo [12]), - ya que toda variedad con una  $\mathbb{Q}$  - estructura es una variedad compleja de dimensión 2 con una estructura afín. A pesar de todo lo anterior, por motivos extra académicos, la tesis conservó su título original.

Debo mencionar mi agradecimiento al Profesor Enrique Valle Flores que proporcionó el tema de esta tesis y a -

los doctores Zenaida Elvira Ramos y Xavier Gómez Mont por su paciente asesoría. Les he ofrecido a cambio de su invaluable ayuda esforzarme por finalizar este trabajo definitivamente inconcluso. Aprovecho también esta ocasión para agradecer al M. en C. Fernando Avila Murillo su ayuda e interés en mi preparación matemática.

## CAPITULO I

1. La estructura matemática de los cuaternios fue creada por el matemático irlandés William R. Hamilton en 1843. Motivado por su presentación de los números complejos como parejas de números reales, Hamilton se planteó el problema de extender su estructura -específicamente la multiplicación- a las ternas de números reales. Una magnífica y muy verosímil descripción de sus intentos infructuosos por resolver el problema y de como estos lo llevaron a descubrir lo que hoy conocemos que es la única álgebra asociativa con división de dimensión cuatro sobre los reales, nos la proporciona Van der Waerden en [4]

El descubrimiento de Hamilton es pues un resultado - de los intentos por ampliar el concepto de número [2] y - constituye uno de los antecedentes más importantes de la teoría de álgebras lineales.

2. Definición 1.2.1. Un espacio vectorial de dimensión finita  $A$  sobre un campo  $F$  se dice un álgebra lineal asociativa sobre  $F$  si en  $A$  se tiene además una multiplicación que es

i) asociativa:

$$a(bc) = (ab)c$$

para cualesquiera  $a, b, c \in F$  y

ii) bilineal:

$$a(rb + sc) = r(ab) + s(ac) \text{ y}$$

$$(ra + sb)c = r(ac) + s(bc)$$

para cualesquiera  $a, b, c \in A$  y  $r, s \in F$ .

Equivalentemente se puede definir un álgebra lineal asociativa sobre un campo  $F$  como un anillo asociativo  $A$  que es además un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $F$  y tal que para cualesquiera  $a, b \in A$  y  $r \in F$  se satisface que  $r(ab) = (ra)b = a(rb)$

Los siguientes tipos particulares de álgebras lineales son importantes.

Definiciones 1.2.2. Sea  $A$  un álgebra lineal asociativa.

i) Si para todo  $a \in A - \{0\}$  existe un inverso multiplicativo  $a^{-1}$ ,  $A$  se denomina álgebra con división.

ii) La norma de  $a \in A$ ,  $|a|$ , con respecto a la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  se define como

$$|a| = a_1^2 + \dots + a_n^2, \text{ donde } a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n.$$

$A$  es un álgebra normada si satisface

$$|ab| = |a| |b|$$

para todo  $a, b \in A$ .

Definición 1.2.3. Sea  $Q$  el espacio vectorial de dimensión cuatro sobre el campo real y  $i = e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $j = e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $k = e_3 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $l = e_4 = (0, 0, 0, 1)$

su base canónica. Definimos la multiplicación de dos vectores en  $Q$ ,  $p = \sum_{n=1}^4 x_n e_n$  y  $q = \sum_{n=1}^4 y_n e_n$  mediante la fórmula

$$(1) \quad pq = \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 (x_n y_m)(e_n e_m),$$

y la siguiente tabla de multiplicación de los elementos de la base

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
| • | 1 | i  | j  | k  |
| 1 | 1 | i  | j  | k  |
| i | i | -1 | k  | -j |
| j | j | -k | -1 | i  |
| k | k | j  | -i | -1 |



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

IMPRESA DE MIS HIJOS  
POR LA GRANDEZA

Teorema 1.2.1. El sistema  $(Q, +, \cdot)$  dado por la definición 1.2.3. es un álgebra con división sobre el campo real. Se le llama el álgebra de los cuaternios reales.

*Demostración.* Para probar que el espacio vectorial  $Q$  con la multiplicación así definida es un álgebra, basta con verificar que satisface la ley asociativa, ya que es claramente bilineal. No lo haremos mediante un cálculo directo con (1) y (2) sino utilizando otra formulación de  $Q$ .

El conjunto  $H_1 = \{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$  es una copia isomorfa del campo complejo mediante la correspondencia inducida por

$$1 = (1, 0, 0, 0) \mapsto (1, 0) \in \mathbb{C}, \quad i = (0, 1, 0, 0) \mapsto (0, 1) \in \mathbb{C}$$

además la identidad

$$x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k = (x_1 + x_2 i) + (x_3 + x_4 i) j$$

nos proporciona una representación única de  $q \in H$  de la forma  $q = w + zj$  con  $w, z \in Q$ , bajo la cual el producto de los cuaternios  $q_1 = w_1 + z_1 j$  y  $q_2 = w_2 + z_2 j$  queda expresado así:

$$q_1 q_2 = (\omega_1 \omega_2 - z_1 \bar{z}_2) + (\omega_1 z_2 + \bar{\omega}_2 z_1) j$$

donde  $\bar{z} = x - iy$  para  $z = x + iy$

La asociatividad se verifica entonces fácilmente:

$$\begin{aligned} (q_1 q_2) q_3 &= [(\omega_1 \omega_2 - z_1 \bar{z}_2) + (\omega_1 z_2 + \bar{\omega}_2 z_1) j] (\omega_3 + z_3 j) = \\ &= [(\omega_1 \omega_2 - z_1 \bar{z}_2) \omega_3 - (\omega_1 z_2 + \bar{\omega}_2 z_1) \bar{z}_3] + [(\omega_1 \omega_2 - z_1 \bar{z}_2) z_3 + \\ &+ (\omega_1 z_2 + \bar{\omega}_2 z_1) \bar{\omega}_3] j = [\omega_1 (\omega_2 \omega_3 - z_2 \bar{z}_3) - z_1 (\bar{\omega}_2 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 \omega_3)] + \\ &+ [\omega_1 (\omega_2 z_3 + \bar{\omega}_3 z_2) + z_1 (\bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3 - \bar{z}_2 z_3)] j = [\omega_1 (\omega_2 \omega_3 - z_2 \bar{z}_3) - \\ &- z_1 (\omega_2 z_3 + \bar{\omega}_3 z_2)] + [\omega_1 (\omega_2 z_3 + \bar{\omega}_3 z_2) + z_1 (\bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3 - \bar{z}_2 z_3)] j = \\ &= q_1 (q_2 q_3). \end{aligned}$$

Observemos que  $Q$  contiene isomorficamente el campo real:

$$\{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k : x_2 = x_3 = x_4 = 0\} \approx \mathbb{R}$$

y que este subsistema (que identificaremos con  $\mathbb{R}$  por brevedad de notación) es precisamente el centro de  $Q$ , o sea

$$\{q \in Q : qq' = q'q \text{ para todo } q' \in Q\} = \mathbb{R}$$

Si definimos

$$\bar{q} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k \quad y$$

$$|q|^2 = q\bar{q} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

para  $q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ , entonces  $|q| \neq 0$  si  $q \neq 0$  y por lo tanto el elemento

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \bar{q}$$

es el inverso multiplicativo de  $q \neq 0$ .  $\mathcal{Q}$  es por lo tanto un álgebra con división.

Fácilmente se puede verificar que

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$$

de donde

$$\begin{aligned} |q_1|^2 |q_2|^2 &= (q_1 \bar{q}_1)(q_2 \bar{q}_2) = q_2 (q_1 \bar{q}_1) \bar{q}_2 = (q_2 q_1)(\bar{q}_1 \bar{q}_2) = \\ &= (q_2 q_1)(\overline{q_1 q_2}) = |q_1 q_2|^2, \end{aligned}$$

por lo tanto  $\mathcal{Q}$  es un álgebra normada y el espacio vectorial normado subyacente es el euclidiano 4-dimensional.

Además las identidades

$$|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|, \quad |\bar{q}| = |q|$$

nos aseguran que la multiplicación y la función  $r(q) = q^{-1}$  son continuas con respecto a la topología inducida por la norma. Vale entonces el teorema siguiente:

Teorema 1.2.2.  $\mathcal{Q}$  es un anillo con división continuo, conexo y localmente compacto, extensión finita de  $\mathbb{R}$  de grado cuatro.

Para finalizar la sección, enunciaremos sin demostración dos teoremas que establecen la naturaleza singular de la estructura algebraica y topológica de los cuaternios.

Teorema 1.2.3. (Frobenius). Toda álgebra con división al-

gebraica sobre el campo real es isomorfa a uno de los siguientes anillos:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{Q}$ .

Teorema 1.2.4. (Pontriagin) Todo anillo topológico con división, conexo y localmente compacto es isomorfo a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{Q}$ .

### 3. Representación Matricial de $\mathbb{Q}$ .

Definición 1.3.1. Una representación de un álgebra  $A$  con matrices  $r \times r$  sobre un campo  $k$  es un homomorfismo de álgebras

$$\Phi: A \rightarrow M_r(k)$$

Si  $\Phi$  es inyectiva se dice que la representación es fiel.

Definición 1.3.2. Dos representaciones  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  de un álgebra  $A$  en  $M_r(k)$  se dicen equivalentes si existe  $M$  en  $M_r(k)$  no singular tal que

$$\Phi_2 = M^{-1} \Phi_1 M$$

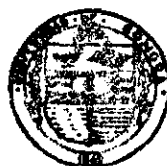
Proposición 1.3.1. La aplicación  $\Phi_1: \mathbb{Q} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  tal que

$$\Phi_1(\omega + zj) = \begin{pmatrix} \omega & -z \\ \bar{z} & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

es una representación fiel.

Demostración. Consideremos a  $\mathbb{Q}$  como un espacio vectorial complejo derecho. Para cada  $j$  definamos

$$T_j: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$



mediante

$$T_q(p) = qp,$$

$T_q$  es un endomorfismo de  $Q$  (considerado como espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ ). La correspondencia

$$q \xrightarrow{T} T_q$$

es un homomorfismo inyectivo entre el anillo  $Q$  y el anillo de los endomorfismos de  $Q$ , efectivamente:

$$T_{q_1+q_2}(p) = (q_1+q_2)p = q_1p + q_2p = T_{q_1}(p) + T_{q_2}(p),$$

$$T_{q_1q_2}(p) = (q_1q_2)p = q_1(q_2p) = (T_{q_1} \circ T_{q_2})(p) \quad \gamma$$

$$T_q = 0 \Rightarrow T_q(1) = q = 0, \text{ de donde } \text{Núcleo}(T) = (0).$$

Tomemos como base de  $Q$  a  $\{1, j\}$ ; si  $q = \omega + zj$  entonces

$$T_q(1) = \omega + zj = \omega + j\bar{z}$$

$$T_q(j) = (\omega + zj)j = -z + j\bar{\omega}$$

de donde la representación matricial de  $T_q$  está dada por

$$\begin{pmatrix} \omega & -z \\ \bar{z} & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

Es un hecho conocido que la aplicación que a cada endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita le asocia su matriz (con respecto a una base determinada) es un isomorfismo de álgebras, por lo tanto el teorema se sigue.

Si repetimos el procedimiento anterior con la base

$$\{1, -j\}$$

obtenemos la representación:

$$\omega + zj \mapsto \begin{pmatrix} \omega & z \\ -\bar{z} & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

que es  $\Phi_1 \circ f$ , donde  $f$  es el automorfismo de  $\mathbb{Q}$  dado por  $f(\omega + zj) = \omega - zj$ .

Las dos representaciones son equivalentes ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & z \\ -\bar{z} & \bar{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & -z \\ \bar{z} & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

Además de las representaciones tendremos oportunidad de utilizar los antihomomorfismos inyectivos. Si en el desarrollo de la demostración de la proposición 1.3.1. consideramos a  $\mathbb{Q}$  como un espacio vectorial complejo - izquierdo y establecemos la correspondencia

$$q \mapsto T_q$$

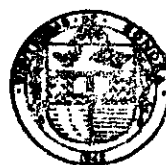
donde  $T_q: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  está definido mediante

$$T_q(p) = pq \quad \text{obtendremos análogamente la}$$

aplicación

$$\Phi_2(\omega + zj) = \begin{pmatrix} \omega & -\bar{z} \\ z & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

que es un antihomomorfismo inyectivo de  $\mathbb{Q}$  en  $M_2(\mathbb{C})$  ya que satisface:



$$\Phi_2(q_1) + \Phi_2(q_2) = \Phi_2(q_1 + q_2)$$

$$\Phi_2(q_2)\Phi_2(q_1) = \Phi_2(q_1q_2) \text{ y}$$

$$\text{Nucleo}(\Phi_2) = (0)$$

A partir de las representaciones (y antihomomorfismos) complejas obtenidas, podemos obtener representaciones - (y antihomomorfismos) reales vía alguna representación de con matrices  $2 \times 2$  reales, por ejemplo con

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

se obtienen

$$(4) \quad (\omega + zj) \xrightarrow{\Phi_1} \begin{pmatrix} \omega & -\bar{z} \\ z & \bar{\omega} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix}$$

que denotaremos con  $\Psi_1$ ,

$$(5) \quad (\omega + zj) \xrightarrow{\Phi_2} \begin{pmatrix} \omega & -\bar{z} \\ z & \bar{\omega} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

que denotaremos con  $\Psi_2$ ; en (4) y (5),  $w = a + bi$  y  $z = c + di$ .

En [7] se utiliza la representación real

$$a+bi+cj+dk \xrightarrow{\Psi_3} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

que se puede obtener también con el procedimiento utilizado en la proposición 1.3.1., ahora considerando a  $\mathbb{Q}$  como un espacio vectorial real. Esta representación es equivalente a la que nosotros utilizaremos:

$$\text{si } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ entonces}$$

$$S\Psi, S^{-1} = \Psi, \text{ y } \det S \neq 0.$$

## CAPITULO II

### FUNCIONES CUATERNICAS ANALITICAS

En este capítulo demostramos que las únicas funciones cuatérnicas derivables en una región son las  $Q$ -afines. Exponemos brevemente el concepto de analiticidad de Fueter, su relación con la integral cuatérnica y algunas propiedades de las funciones analíticas en este sentido.

- 2.1. En esta sección enunciamos dos teoremas elementales - acerca de funciones de dos variables complejas que utilizamos fundamentalmente en la siguiente sección, para su demostración remitimos a [8, Cap. II].

Sea  $D$  un conjunto abierto de  $\mathbb{C}^2$  y  $u: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u \in C^1(D)$ .

Si denotamos

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} - i \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial z_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} - i \frac{\partial u}{\partial x_4} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + i \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} + i \frac{\partial u}{\partial x_4} \right)$$

donde  $Z_1 = x_1 + i y_1$  y  $Z_2 = x_2 + i y_2$ , entonces podemos expresar  $du$  como una combinación lineal de las diferenciales  $dz_j$  y  $d\bar{z}_j$ :

$$(1) \quad du = \frac{\partial u}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial u}{\partial z_2} dz_2 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2.$$

Si además denotamos

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial u}{\partial z_2} dz_2, \quad \bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2,$$

entonces podemos escribir (1) en la forma

$$(2) \quad du = \partial u + \bar{\partial} u$$

Definición 2.1.1. Una función  $f \in C^1(D)$  se dice biholomorfa en  $D$  si  $\bar{\partial} u = 0$  (ecuaciones de Cauchy - Riemann).

Teorema 2.1.1. Si  $u$  es biholomorfa en el polidisco

$$D = \{z: |z_j| < r_j, j=1,2\} \quad \text{entonces}$$

$$(3) \quad u(z) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \left( \frac{\partial u(0)}{\partial z_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\partial u(0)}{\partial z_2} \right)^{\alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$$

con convergencia normal.

En el teorema anterior, por convergencia normal de la

serie  $\sum_{\alpha_1, \alpha_2} a_{\alpha_1, \alpha_2}(z_1, z_2)$  entendemos que la se-

rie  $\sum_{\alpha_1, \alpha_2} \sup_K |a_{\alpha_1, \alpha_2}(z_1, z_2)|$  converge para todo com-

pacto.

Esto implica que la serie en (3) converge y su límite no depende de reordenaciones.

Teorema 2.1.2. Si  $u$  es una función con valores complejos definida en el conjunto abierto  $D \subset \mathbb{C}^2$  y  $u$  es analítica en cada variable  $z_1, z_2$  para cada valor fijo arbitrario de la otra variable, entonces  $u$  es biholomorfa en  $D$ .



2.2. Definición 2.2.1. Sea  $F: D \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{Q}$ .  $F$  es  $\mathbb{Q}$ -analítica por la izquierda en  $D$  si el límite:

$$(4) \lim_{p \rightarrow 0} p^{-1} [F(\eta+p) - F(\eta)]$$

existe para todo  $\eta \in D$ .

Análogamente:

Definición 2.2.2. Sea  $F: D \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{Q}$ .  $F$  es  $\mathbb{Q}$ -analítica por la derecha en  $D$  si el límite

$$\lim_{p \rightarrow 0} [F(\eta+p) - F(\eta)] p^{-1}$$

existe para todo  $\eta \in D$ .

Teorema 2.2.1. Sea  $D$  una región de  $\mathbb{Q}$  y  $F$  una función  $\mathbb{Q}$ -analítica por la izquierda en  $D$ . Entonces existen constantes  $\eta_0$  y  $\eta_1$  tal que  $F$  está dada por

$$F(\eta) = \eta \eta_0 + \eta_1$$

para todo  $\eta \in D$ .

Demostración: Denotemos el límite (4) con  $F'(\eta)$ . Tenemos entonces que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |p| < \delta \Rightarrow |p^{-1} (F(\eta+p) - F(\eta)) - F'(\eta)| < \varepsilon$$

de donde

$$0 < |p| < \delta \Rightarrow |F(\eta+p) - F(\eta) - p F'(\eta)| < \varepsilon |p|$$

Como la transformación  $p \rightarrow p F'(\eta)$  es  $\mathbb{R}$ -lineal, entonces  $F$  es diferenciable y  $dF(\eta, p) = p F'(\eta)$ . Si  $\Psi_2$

antihomomorfismo definido en el capítulo ante-  
 se debe cumplir que la matriz jacobiana de  
 sea igual a  $\Psi_2(F'(z))$  o sea que se debe tener -

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(z) & D_2 f_1(z) & D_3 f_1(z) & D_4 f_1(z) \\ D_1 f_2(z) & D_2 f_2(z) & D_3 f_2(z) & D_4 f_2(z) \\ D_1 f_3(z) & D_2 f_3(z) & D_3 f_3(z) & D_4 f_3(z) \\ D_1 f_4(z) & D_2 f_4(z) & D_3 f_4(z) & D_4 f_4(z) \end{pmatrix}$$

donde  $F'(z) = a + bi + cj + dk$ ,  $F = F_1 + F_2 j$ ,  $F_1 = f_1 + f_2 i$

y  $F_2 = f_3 + f_4 i$ .

De la igualdad (5) se obtiene que las funciones  $f_i$ ,  
 $i=1,2,3,4$ , deben satisfacer las siguientes  
 ecuaciones (de Cauchy - Riemann generalizadas):

$$\begin{aligned} (6) \quad & D_1 f_1 = D_2 f_2 = D_3 f_3 = D_4 f_4 \\ & D_1 f_2 = -D_2 f_1 = -D_3 f_4 = D_4 f_3 \\ & D_1 f_3 = D_2 f_4 = -D_3 f_1 = -D_4 f_2 \\ & D_1 f_4 = -D_2 f_3 = D_3 f_2 = -D_4 f_1 \end{aligned}$$

Si consideramos a  $F_1$  y  $F_2$  como funciones de dos varia-  
 bles complejas ( $z = (w, z)$ ) podemos escribir las ecua-  
 ciones (6) en la forma resumida:

$$(7) \quad \frac{\partial F_1}{\partial w} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F_2}{\partial w} = \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \overline{\frac{\partial F_2}{\partial w}}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\overline{\frac{\partial F_1}{\partial w}}$$

Como  $F_1$  y  $F_2$  son diferenciables (son componentes de una función diferenciable) y satisfacen las ecuaciones (7), son entonces holomorfas en cada una de las variables  $w, z$  fijando la variable restante (teorema 2.3.1.).

El teorema 2.1.2. nos asegura que  $F_1$  y  $F_2$  son funciones biholomorfas y tienen por lo tanto (teorema 2.1.1.), un desarrollo en series de potencias:

$$F_1(w, z) = \sum_{n,m} a_{nm} (w - w_0)^n (z - z_0)^m \quad (9)$$

$$F_2(w, z) = \sum_{n,m} b_{nm} (w - w_0)^n (z - z_0)^m$$

o sea que para cada  $(w_0, z_0) \in D$  existe un polidisco  $\Delta \subset D$  con centro en  $(w_0, z_0)$  tal que (9) se satisface para todo  $(w, z) \in \Delta$ .

Por otra parte, de las ecuaciones (8) se obtiene

$$\sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} n a_{nm} (w - w_0)^{n-1} (z - z_0)^m = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} m \bar{b}_{nm} (\bar{w} - \bar{w}_0)^n (\bar{z} - \bar{z}_0)^m$$

$$\text{y} \quad \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} m a_{nm} (w - w_0)^n (z - z_0)^m = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} -n \bar{b}_{nm} (\bar{w} - \bar{w}_0)^{n-1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^m$$

lo que arroja

$$a_{10} = \bar{b}_{01} = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial w} \quad , \quad a_{01} = -\bar{b}_{10} = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial w}$$

o sea que para algunas  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$F_1(w, z) = a_{10}w + a_{01}z + c_1 \quad \text{y} \quad F_2(w, z) = -\bar{a}_{01}w + \bar{a}_{10}z + c_2$$

poniendo entonces  $\eta_1 = c_1 + c_2 j$  y  $\eta_0 = a_0 + b_0 j$   
con  $a_0 = a_{10}$  y  $b_0 = -\bar{a}_{10}$  se obtiene

$$F(\eta) = F(\omega + zj) = (a_0\omega - \bar{b}_0 z) + (b_0\omega + \bar{a}_0 z) = \eta_1 + \eta\eta_0 + \eta_1$$

para toda  $\eta \in \Delta$

Finalmente, como  $D$  es arco - conexo, podemos unir -  
cualquier par de puntos de  $D$  con una cadena de poli-  
discos en los que  $F$  es de la forma (10). Del hecho -  
de que dos funciones de la forma (10) que coinciden -  
en un abierto están determinadas por las mismas cons-  
tantes  $\eta_0, \eta_1$  se sigue que deben existir constantes  
 $\eta_0, \eta_1$  tal que

$$F(\eta) = \eta\eta_0 + \eta_1$$

para todo  $\eta \in D$ .

Análogamente se puede demostrar el teorema

Teorema 2.2.2. Sea  $D$  una región de  $\mathbb{Q}$  y  $F$  una fun-  
ción  $\mathbb{Q}$  - analítica por la derecha en  $D$ . Entonces -  
existen constantes  $\eta_0$  y  $\eta_1$  tal que  $F$  está dado por

$$F(\eta) = \eta_0\eta + \eta_1$$

para toda  $\eta \in D$ .

Es conveniente enfatizar que los términos "analítica  
por la izquierda" y "analítica por la derecha" no tie



nen relación alguna con las derivadas izquierda y derecha de Dini, estas últimas se refieren al orden de los reales y las primeras a la no-conmutatividad de la multiplicación en  $\mathbb{Q}$ .

### 2.3. Cálculo Diferencial de Fueter.

Como hemos visto en la sección anterior, la exigencia de la existencia del límite del cociente diferencial (4) - o (5) - restringe fuertemente la clase de funciones  $\mathbb{Q}$  - analíticas, Hamilton mismo había observado - ya que este límite no existe para algunas de las funciones cuatérnicas elementales, las polinómicas por ejemplo -; no se puede hacer entonces un cálculo diferencial análogo al complejo con esta noción de analiticidad. La definición de función regular de la escuela de Fueter no involucra el concepto de derivabilidad en el sentido ordinario. La estrecha conexión existente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral en los casos real y complejo es establecida, en cambio como punto de partida para el desarrollo del cálculo cuatérnico: las hipótesis del teorema de Morera - adecuadas a los cuaternios - son las condiciones que definen las funciones cuatérnicas regulares.

A manera de ilustración presentaremos algunos elementos del cálculo diferencial de Fueter. Para eludir el

uso de la integral cuatérnica - cuya definición y uso requieren técnicas fuera del alcance de este trabajo - daremos una motivación meramente formal de la definición de función regular cuatérnica. En [7] se demuestra que esta definición es equivalente a la obtenida a partir del Teorema de Morera.

Si análogamente a como se hace en la sección 1 definimos los operadores  $\partial$  y  $\bar{\partial}$  para funciones complejas de variable compleja mediante

$$\partial u = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \bar{\partial} u = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

entonces vale el siguiente teorema:

Teorema 2.3.1. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  una región y  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función diferenciable (considerada como una transformación del plano en el plano) en cada punto de  $\Omega$ . Entonces  $f \in H(\Omega)$  (es holomorfa en  $\Omega$ ) si y sólo si

$$(\bar{\partial} f)(z) = 0$$

para toda  $z \in \Omega$ .

En ese caso tenemos que

$$f'(z) = (\partial f)(z)$$

para toda  $z \in \Omega$ .

Para su demostración remitimos al lector a [9]

El teorema anterior sugiere que con los operadores diferenciales cuatérnicos

$$\bar{\square} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} i + \frac{\partial}{\partial x_3} j + \frac{\partial}{\partial x_4} k = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} j$$

$$\text{y } \square = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} i - \frac{\partial}{\partial x_3} j - \frac{\partial}{\partial x_4} k = \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} j$$

definamos:

Definición 2.3.1. Sea  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{Q}$ .

$F \in C^1(D)$  se dice regular por la izquierda en  $D$  si

$$(\bar{\square} F)(z) = 0$$

para toda  $z \in D$

En ese caso a la función  $\square F$  se le llama la derivada izquierda de  $F$ .

Simétricamente tenemos:

Definición 2.3.2. Sea  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{Q}$ .

$F \in C^1(D)$  se dice regular por la derecha en  $D$  si

$$(F \square)(z) = 0$$

para toda  $z \in D$ .

En ese caso a la función  $F \square$  se le llama la derivada derecha de  $F$ .

Las clases de funciones dadas por las definiciones 2.3.1. y 2.3.2. no son una extensión de las dadas por

2.2.1. y 2.2.2. respectivamente, ya que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}[(a\omega - \bar{b}z + c) + (b\omega + \bar{a}z + d)j] &= -(a, b) = -a - bj \\ [(a\omega - b\bar{z} + c) + (az + b\bar{\omega} + d)j]\bar{\partial} &= -(a, b) = -a - bj\end{aligned}$$

sin embargo si es notablemente más amplia. En [7] se propone un método para generar funciones cuatérnicas regulares a partir de funciones complejas analíticas. El siguiente conjunto nos proporciona ejemplos sencillos de funciones regulares por la izquierda

$$\left\{ F: Q \rightarrow Q : F(\omega, z) = (f_1(\omega) + g_1(z)) + (\overline{f_2(z)} + g_2(\omega))j \right.$$

donde  $f_1, f_2, g_1, g_2$  son funciones complejas - analíticas }

Un conjunto análogo se puede dar para el caso derecho.

Proposición 2.2.1. Si  $F = F_1 + F_2 j$  es regular por la izquierda (derecha) entonces sus componentes complejas  $F_1$  y  $F_2$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann izquierdas (derechas)

$$(II) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z}$$

$$\left( (12) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \omega} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \omega} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}} \right)$$

Proposición 2.3.2. Si  $\bar{\partial}F = F\bar{\partial} = 0$  entonces

Demostración. De (11) y (12) se obtiene



$$(13) \quad \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad y \quad \frac{\partial F_2}{\partial \bar{w}} - \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F_2}{\partial w} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{z}}$$

de donde

$$\begin{aligned} \square F &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial w} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{z}} \right) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial \bar{w}} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{z}} \right) j = \\ &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial w} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial \bar{w}} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{z}} \right) j = F \square \end{aligned}$$

La proposición anterior justifica la siguiente definición.

Definición 2.3.3. Si  $F$  es regular por la izquierda y regular por la derecha se dice que es regular. Al valor común de  $\square F$  y  $F \square$  se le llama la derivada de  $F$  y se denota con  $F'$ .

Ejemplos sencillos de funciones regulares están dados por las funciones de la forma

$$F(w + zj) = f(w) + g(\bar{z})j$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones complejas analíticas, para ellas

$$F'(w + zj) = f'(w) + g'(\bar{z})j$$

Proposición 2.3.3. Si  $F \in C^2$  es regular por la izquierda (derecha) entonces sus componentes reales

son armónicas.

Demostación. A partir de las ecuaciones (1)

$$\frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial z_2} \quad y \quad \frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z_2} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial z_2} \quad y$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z_2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial z_2} \quad y$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial F_1}{\partial z_2}$$

de donde

$$(14) \quad \Delta f_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_4^2} = 0, \quad i=1,2.$$

ya que las segundas parciales mixtas son iguales. Análogamente se prueba que  $\Delta f_i = 0$  para  $i=3,4$

Proposición 2.3.4. Si  $F \in C^2$  es regular por la izquierda (derecha entonces su derivada izquierda,  $\square F$ , también es regular por la izquierda (derecha).

Demostación: Como  $\square(\square F) = \sum_{i=1}^4 \Delta f_i = (F \bar{\square}) \square$

la afirmación se sigue inmediatamente de la proposición 2.3.3.

De la proposición anterior derivamos un importante teorema análogo a uno de variable compleja:

Proposición 2.3.5. Si  $F \in C^\infty$  es una función regular entonces  $F$  tiene derivada de todos los órdenes.

Presentamos por último un resultado análogo al teorema de Liouville:

Proposición 2.3.6. Las únicas funciones cuatérnicas - regulares por la izquierda (derecha) con norma acotada en todo  $Q$  son las constantes. -

Demostración: Se sigue de la proposición 2.3.3. y del principio del máximo para soluciones de la ecuación - de Laplace.



### CAPITULO III

#### CURVAS CUATERNICAS ELIPTICAS

De una manera análoga a como se hace con variable compleja, definimos en este capítulo las variedades cuatérnicas. Dotaremos a las superficies (reales de dimensión 4) con una estructura analítica mediante la clase de funciones  $Q$  - analíticas en el sentido de la definición II.1 y obtendremos las versiones cuatérnicas de algunos resultados establecidos para las superficies complejas - elípticas - Sería desde luego posible explorar este terreno utilizando la clase más amplia de funciones analíticas en el sentido de Fueter, pero en este trabajo no atacamos ese problema.

En el transcurso de este capítulo por una función  $Q$  - analítica entenderemos una función  $Q$  - analítica por la izquierda. Todas las definiciones y teoremas tienen su versión dual para funciones  $Q$  - analíticas por la derecha.

Exponemos inicialmente (sin demostración) algunos conceptos y resultados elementales de topología algebraica con el fin de establecer un teorema que utilizaremos básicamente en el desarrollo posterior.

#### 3.1. Teorema de existencia de levantamientos.

Definición 3.1.1. Una superficie es un espacio topológico hausdorff conexo  $M$  dotado de una familia de "cartas coordenadas"  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  tal que:

- i)  $\{U_\alpha\}$  es una cubierta abierta de  $M$ .
- ii) Cada  $\varphi_\alpha$  es un homeomorfismo de  $U_\alpha$  sobre un abierto  $V_\alpha$  de  $\mathbb{Q}$ .

Definiciones 3.1.2. Sean  $W^*$  y  $W$  dos superficies, y un mapeo  $f: W^* \rightarrow W$ . Decimos que la pareja  $(W^*, f)$  es una superficie cubriente de  $W$  si  $f$  es un homeomorfismo local, es decir, si todo punto en  $W^*$  tiene una vecindad  $V^*$  tal que  $f|_{V^*}$  es un homeomorfismo. Llamaremos a  $f$  la función proyección de  $W^*$  sobre  $W$ .

Un subconjunto abierto  $V$  de  $W$  es cubierto parejamente por  $(W^*, f)$  si toda componente de  $f^{-1}(V)$  está en correspondencia biyectiva (mediante  $f$ ) con  $V$ .

$(W^*, f)$  se dice completa si todo punto tiene una vecindad abierta cubierta parejamente.

Sea  $\gamma$  un arco sobre  $W$ , o sea, un mapeo continuo

$$\gamma: [a, b] \rightarrow W$$

Decimos que el arco

$$\gamma^*: [a, b] \rightarrow W^*$$

cubre a  $\gamma$ , o que  $\gamma$  puede levantarse a  $\gamma^*$ , si

$$f(\gamma^*(t)) = \gamma(t)$$

para toda  $t \in [a, b]$ .

Teorema 3.1.1. Si  $(W^*, f)$  es completa, todo arco  $\gamma$  puede levantarse a un único  $\gamma^*$  desde cualquier punto inicial  $p_0^*$  sobre  $p_0$ , el punto inicial de  $\gamma$ .

Definiciones 3.1.3. Sean

$$\sigma, \tau : [0, 1] \longrightarrow W$$

dos arcos sobre  $W$  con puntos extremos comunes, es decir, tal que  $\sigma(0) = \tau(0) = p_0$  y

$$\sigma(1) = \tau(1) = p_1.$$

Decimos que  $\sigma, \tau$  son homotópicos,  $\sigma \simeq \tau$  si existe un mapeo continuo

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow W$$

tal que

- i)  $F(s, 0) = \sigma(s)$  para toda  $s \in [0, 1]$
- ii)  $F(s, 1) = \tau(s)$  para toda  $s \in [0, 1]$
- iii)  $F(0, t) = p_0$  para toda  $t \in [0, 1]$
- iv)  $F(1, t) = p_1$  para toda  $t \in [0, 1]$

Fácilmente se ve que " $\simeq$ " es una relación de equivalencia, de donde podemos considerar las clases de homotopía  $[\sigma]$  de arcos de  $p_0$  a  $p_1$  homotópicos entre sí.

Si  $\sigma, \tau$  son arcos de  $p_0$  a  $p_1$  y de  $p_1$  a  $p_2$  respectivamente, definimos el arco  $\sigma\tau$  de  $p_0$  a  $p_2$  mediante



$$(\sigma\tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

El producto de las clases  $[\sigma]$  y  $[\tau]$  queda bien definido de la manera natural:  $[\sigma][\tau] = [\sigma\tau]$ , ya que

$$\sigma \simeq \sigma' \text{ y } \tau \simeq \tau' \Rightarrow \sigma\tau \simeq \sigma'\tau'.$$

Teorema 3.1.2. Sea

$$\pi_1(W, p_0) = \{[\sigma] : \sigma(0) = \sigma(1) = p_0\}$$

Con la multiplicación definida anteriormente  $\pi_1(W, p_0)$  es un grupo en el cual el elemento neutro es  $[i]$  donde  $i(t) = p_0$  para toda  $t$ , y el inverso de  $[\sigma]$  es  $[\sigma^{-1}]$  donde

$$\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t) \text{ para toda } t.$$

Lema 3.1.1. Para cualquier par de puntos  $p_0, p_1$  en  $W$  se tiene que  $\pi_1(W, p_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(W, p_1)$ .

Debido al lema anterior podemos considerar el grupo abstracto  $\pi_1(W)$  al que se llama el grupo fundamental de  $W$ .

Definición 3.1.4. Una superficie se llama simplemente conexa si su grupo fundamental es el grupo trivial.

Dadas dos superficies  $W_1$  y  $W_2$ , un mapeo continuo

$$f: W_1 \rightarrow W_2 \quad \text{tal que} \quad f(p_1) = f(p_2)$$

$$(p_1 \in W_1, p_2 \in W_2)$$

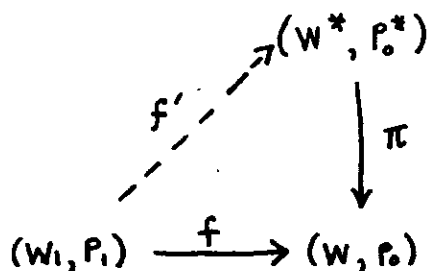
induce un homomorfismo

$$f_*: \pi_1(W_1, p_1) \rightarrow \pi_1(W_2, p_2)$$

definido mediante

$$f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]$$

Teorema 3.1.3. Considere la situación dada por el diagrama.



donde  $f$  es una función continua y  $\pi$  la función proyección de  $W^*$  sobre  $W$ . Entonces existe un levantamiento  $f'$  de  $f$  (una función continua  $f'$  tal que el diagrama conmuta) si y sólo si

$$f_*(\pi_1(W_1, p_1)) \subset \pi_*(\pi_1(W^*, p_o^*))$$

Corolario 3.1.1. Si  $W_1$  es simplemente conexo el levantamiento  $f'$  siempre existe.

3.2. Definición 3.2.1. Una curva cuaternica es un espacio topológico Hausdorff conexo  $M$  provisto de una familia de "cartas coordenadas"  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  con las siguientes propiedades:

- i)  $\{U_\alpha\}$  es una cubierta abierta de  $M$
- ii) Cada  $\varphi_\alpha$  es un homeomorfismo de  $U_\alpha$  sobre un abierto  $V_\alpha$  de  $\mathbb{Q}$ .

iii) Si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  entonces la función

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

definida mediante  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  es  $\mathbb{Q}$ -analítica.

Nos interesaremos por un tipo particular de curvas cuatérnicas:

Definición 3.2.2. Una curva cuatérnica elíptica es una curva cuatérnica topológicamente equivalente a

$$S_1 \times S_1 \times S_1 \times S_1, \text{ donde } S_1 = \{Z \in \mathbb{C} : \|Z\| = 1\}$$

(toro real 4 - dimensional).

Ejemplo: Sea  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]$  la red ( $\mathbb{Z}$ -módulo) generada por los cuaternios  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  linealmente independientes sobre los reales. Consideremos en  $\mathbb{Q}/\Lambda$  la topología cociente relativa a la función proyección (Homomorfismo natural):

$$\pi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\Lambda \ni \pi(\varphi) = [\varphi] = \varphi + \Lambda$$

El espacio topológico resultante es homeomorfo al toro real 4 - dimensional:

$$\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \frac{\varphi_1 \mathbb{R}}{\varphi_1 \mathbb{Z}} + \frac{\varphi_2 \mathbb{R}}{\varphi_2 \mathbb{Z}} + \frac{\varphi_3 \mathbb{R}}{\varphi_3 \mathbb{Z}} + \frac{\varphi_4 \mathbb{R}}{\varphi_4 \mathbb{Z}}$$

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 \longmapsto [\alpha_1 \varphi_1] + [\alpha_2 \varphi_2] + [\alpha_3 \varphi_3] + [\alpha_4 \varphi_4]$$

es un homomorfismo continuo, de donde

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{Q}/\Lambda \longrightarrow \frac{\varphi_1 \mathbb{R}}{\varphi_1 \mathbb{Z}} + \frac{\varphi_2 \mathbb{R}}{\varphi_2 \mathbb{Z}} + \frac{\varphi_3 \mathbb{R}}{\varphi_3 \mathbb{Z}} + \frac{\varphi_4 \mathbb{R}}{\varphi_4 \mathbb{Z}}$$

es un homeomorfismo.

Además  $\frac{\varphi_i \mathbb{R}}{\varphi_i \mathbb{Z}}$  es homeomorfo a  $S_1$  mediante  $f([\alpha \varphi_i]) = e^{i\alpha}$ .

Para todo  $q \in Q$  existe una vecindad  $V$  de  $q$  tal que si  $q_1, q_2 \in V$  y  $q_1 \neq q_2$  entonces  $[q_1] \neq [q_2]$ . Efectivamente, tomando

$$2\rho = \inf \left\{ \left| \sum_{s=1}^4 n_s q_s \right| : \sum |n_s| \neq 0 \right\} \neq 0$$

entonces la bola  $B(q, \rho)$  satisface la condición pedida ya que si  $q_1, q_2 \in B(q, \rho)$ ,  $q_1 \neq q_2$  y  $[q_1] = [q_2]$ , entonces

$$q_2 = q_1 + \sum n_s q_s$$

con  $\sum |n_s| \neq 0$  y por lo tanto

$$|q_1 - q_2| = \left| \sum n_s q_s \right| \leq \rho < 2\rho$$

que contradice nuestra elección de  $\rho$ .

En base a lo anterior, podemos tomar como cartas coordinadas a la familia

$$\{(U_q, \varphi_q) : q \in Q\}$$

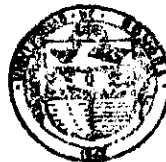
donde  $U_q = \pi(B(q, \rho))$  y  $\varphi_q = (\pi|_{U_q})^{-1}$ ; si  $U_{q_1} \cap U_{q_2} \neq \emptyset$

entonces claramente la función de transición estará dada por

$$\varphi_{q_2 q_1}(q) = \varphi_{q_2} \circ \varphi_{q_1}^{-1}(q_1).$$

y esta función es  $Q$ -analítica.

En el transcurso de la demostración anterior quedó tam-

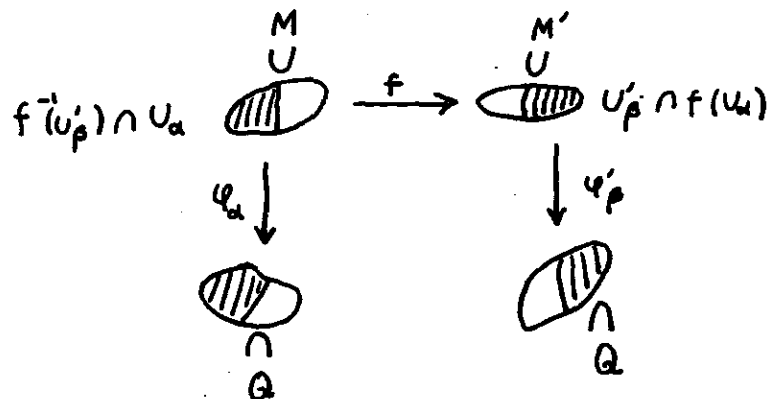


bien probado que  $\pi$  es homomorfismo local y por lo -  
tanto que  $Q$  es una superficie cubriente de  $\mathbb{Q}/\Lambda$

A la curva cuatérnica obtenida le llamaremos Toro Cua-  
térnico.

Aunque es obvio lo que debe entenderse por una función  
 $Q$  - analítica entre dos curvas cuatérnicas, lo escribi-  
mos en la siguiente:

Definición 3.2.3. Una función  $f: M \rightarrow M'$  es  $Q$  - analí-  
tica si para cualesquiera par de funciones coordenadas  
 $\varphi_\alpha$  y  $\varphi'_\beta$  para las que  $\varphi'_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  esté definida, es  
 $Q$  - analítica.



Clasificaremos ahora los toros cuatérnicos esencialmen-  
te diferentes en el sentido preciso de la definición -  
siguiente.

Definición 3.2.4. Dos curvas cuatérnicas  $M$  y  $M'$  se di-

cen  $Q$  - equivalentes si existe una función

$$f: M \rightarrow M'$$

$Q$  - analítica y biyectiva.

Definición 3.2.5. Dos redes cuatérnicas  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  son equivalentes si existe  $q_0 \in Q$  tal que  $\Lambda' = \Lambda \cdot q_0$ .

En las dos definiciones anteriores se han establecido relaciones de equivalencia en la familia de curvas cuatérnicas y en la familia de redes respectivamente.

El siguiente teorema establece una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos de clases de equivalencia inducidos:

Teorema 3.2.1. Los toros cuatérnicos  $\mathcal{Q}_{\Lambda'}$  y  $\mathcal{Q}_{\Lambda}$  son equivalentes si y sólo si las redes  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  lo son.

Demostración:

i) Supongamos que  $\Lambda' = \Lambda \cdot q_0$ , entonces la transformación lineal  $L(q) = q \cdot q_0$  es tal que  $L(\Lambda) = \Lambda'$  y podemos definir entonces  $f: \mathcal{Q}_{\Lambda} \rightarrow \mathcal{Q}_{\Lambda'}$  biunívoca mediante  $f([q]) = [L(q)]$  (se resulta además un homomorfismo de grupos). Claramente si  $f(U_\alpha) \cap U'_\beta \neq \emptyset$  entonces la función  $\varphi'_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  es  $Q$  - analítica donde está definida:

$$(\varphi'_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(q) = q q_0 + q'_2$$

para algún  $q'_2 \in \Lambda'$

ii) Supongamos ahora que existe  $f: \mathcal{Q}_{\Lambda} \rightarrow \mathcal{Q}_{\Lambda'}$  biyecti-

va y  $Q$  - analítica tal que (sin pérdida de generalidad)  $f(0) = 0$ .

Sabemos que existe  $F^*: Q \rightarrow Q$  continua tal que ...

$F^*(0) = 0$  y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{F^*} & Q \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ Q/\Lambda & \xrightarrow{f} & Q/\Lambda' \end{array}$$

ya que, haciendo  $F = f \circ \pi$ , los elementos del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & \nearrow F^* & \downarrow \pi' \\ Q & \xrightarrow{F} & Q/\Lambda' \end{array}$$

satisfacen las hipótesis del corolario 3.1.1.

Ahora veremos que  $F^*$  es localmente  $Q$  - analítica, es decir, que todo  $p \in Q$  tiene una vecindad  $V$  tal que

$$(F^*|_V)(q) = q p_0 + p_1$$

para algunos  $p_0, p_1 \in Q$ .

Efectivamente, tomemos una vecindad  $U$  de  $F^*(p)$  tal que

$\pi'|_U$  es un homeomorfismo y hagamos  $V = (F^*)^{-1}(U)$ ,

entonces

$$F^*|_V = \pi'^{-1} \circ F = \pi'^{-1} \circ f \circ \pi.$$



Probemos finalmente que los cuaternios  $P_0$  y  $P_1$  no dependen del punto  $P$ , o sea que  $F^*$  es  $Q$ -analítica en  $Q$ . Esto se sigue inmediatamente de las siguientes afirmaciones:

- i) Si dos transformaciones afines coinciden en un abierto entonces coinciden en todo  $Q$ .
- ii) Dados dos puntos  $P$  y  $P'$  existe una cadena de vecindades  $V_1, \dots, V_n$  de  $P$  a  $P'$  tales que

$$F^*|_{V_i}, i=1, \dots, n$$

es afín.

Finalmente, como  $F^*(0)=0$ ,  $F^*$  debe ser necesariamente de la forma

$$F^*(q) = q q_0$$

para algun  $q_0 \in Q$ , por lo tanto se debe tener que

$$\Lambda' = \Lambda \cdot q_0$$

3. El plan inicial de este trabajo contemplaba la demostración de un teorema de clasificación de las curvas cuaternicas elípticas pero surgieron dificultades que no se pudieron superar hasta el momento y se optó por diferir su presentación a un trabajo posterior. Enunciamos dicha proposición a nivel de conjetura:

Conjetura 3.3.1. Sea  $M$  una curva cuaternica elíptica. -

Existe entonces una red  $\Lambda = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ ,  $q_i, i=1, \dots, 4$

linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $M$  es equivalente a  $\mathbb{Q}/\Lambda$ . Es decir toda curva cuatérnica elíptica es un toro cuatérnico.

Para finalizar el capítulo daremos una primera aproximación al problema de determinar un dominio fundamental para redes cuatérnicas, es decir, a un teorema de moduli. Esta aproximación consiste en dar una expresión cuatérnica de la condición de que el volumen orientado de la base de la red

$$\Lambda = [q_1, q_2, q_3, q_4]$$

sea positivo, o sea

$$\det(q_1, q_2, q_3, q_4) > 0.$$

Proposición 3.3.1.

$$\begin{aligned} \det(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{1}{4} \operatorname{Re} & (q_1 q_2 q_3 \bar{q}_4 + q_1 q_2 \bar{q}_4 q_3 \\ & - q_2 q_1 q_3 \bar{q}_4 - q_2 q_1 \bar{q}_4 q_3 + q_3 q_4 q_1 \bar{q}_2 \\ & + q_3 q_4 \bar{q}_2 q_1 - q_4 q_3 q_1 \bar{q}_2 - q_4 q_3 \bar{q}_2 q_1). \end{aligned}$$

*Demostración.* Poniendo

$$q_i = a_i + a_2 i + a_3 j + a_4 k, \dots, q_4 = d_1 + d_2 i + d_3 j + d_4 k,$$

y desarrollando en menores de orden dos (Teorema de Laplace):

$$\det(q_1, q_2, q_3, q_4) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{q_1 \bar{q}_2 - \bar{q}_2 q_1}{2} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} k$$

$$\frac{q_3 \bar{q}_4 - \bar{q}_4 q_3}{2} = \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} k$$

$$\frac{q_1 \bar{q}_2 + \bar{q}_2 q_1}{2} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} k$$

$$y \quad \frac{q_3 \bar{q}_4 + \bar{q}_4 q_3}{2} = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} k$$

de donde  $\det(q_1, q_2, q_3, q_4) =$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{q_1 q_2 - q_2 q_1}{2} \cdot \frac{q_3 \bar{q}_4 + \bar{q}_4 q_3}{2} + \frac{q_3 q_4 - q_4 q_3}{2} \cdot \frac{q_1 \bar{q}_2 + \bar{q}_2 q_1}{2} \right]$$

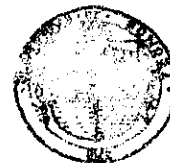
Todo cambio de base de la red  $\Lambda$  está dado por una matriz del grupo  $GL(4, \mathbb{Z})$ . El signo de la expresión

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{q_1 q_2 - q_2 q_1}{2} \cdot \frac{q_3 \bar{q}_4 + \bar{q}_4 q_3}{2} + \frac{q_3 q_4 - q_4 q_3}{2} \cdot \frac{q_1 \bar{q}_2 + \bar{q}_2 q_1}{2} \right]$$

es entonces invariante ante cambios de base dados por matrices del grupo  $SL(4, \mathbb{Z})$ , en particular para los cambios de base dados por

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que son los generadores de  $SL(4, \mathbb{Z})$ .



REFERENCIAS

1. B.L. Van der Waerden, How Hamilton discovered Quaternions, *Math. Magazine*, 47(1976) 227 - 34
2. E. Valle Flores, Conferencia sustentada el 29 de Mayo de 19 ante la Sociedad Matemática Sonorense.
3. B.L. Van der Waerden, *Algebra*, Vol. II, Ungar Pub. Co. Inc., New York 1970.
4. C. Curtis, *MAA Studies in Modern Algebra*, Vol. II, Math. Assoc. of America, 1963, pgs. 108 - II.
5. R. Fueter, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta \bar{\Delta} u = 0$  mit Vier reellen Variablen, *Comment. Math. Helv.*, 7(1935) 307 - 30.
6. H. Haefeli, Hyperkomplexe Differentiale, *comment. Math., Helv.* 20(1947) 382 - 420.
7. C.A. Deavours, the Quaternion Calculus, *American Mathematical Monthly*, (1973) 995 - 1008.
8. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Cap. II, North Holland Publishing Co., 1973.

9. Rudin., *Real and Complex Analysis*, pp. 250 - 2, McGraw Hill, (1974).
10. Ahlfors, Lars V., *Conformal Invariants; topics in Geometric Theory*, McGraw Hill, New York, 1973.
11. Greenberg, Marvin J., *Lectures on Algebraic Topology*. W.A. Benjamin, New York, 1967.
12. Vitter, A., *Affine Structures on Compact Complex Manifolds* *Inventiones Math.* 17, 221 - 224 (1972).