UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Sistemas Controlables con un Valor Propio Complejo y su Conjugado

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jorge Antonio López Renteria

Director de Tesis: Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Hermosillo, Sonora, México, 11 de Diciembre del 2006

	Dr. Fernando Verduzco González
	Dr. Martín Eduardo Frías Armenta
SINODALES	Dr. Dr. Rodrigo González González
	MC. Horacio Leyva Castellanos

UNIVERSIDAD DE SONORA

Acta de Examen Profesional

EL SABER DE MIS HIJOS HARÁ MI GRANDEZA

Acta No. 132
Foja 131
Libro 01
Exp. No. 200202137

En la ciudad de Hermosillo , Sonora, México, siendo las 11:00 horas del día 11 de diciembre del 200 6 , se reunieron en:
el Auditorio del Departamento de Matemáticas
de la Universidad de Sonora, los señores:

DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ
DR. MARTIN EDUARDO FRIAS ARMENTA, DR. RODRIGO GONZALEZ GONZALEZ
M.C. HORACIO LEYVA CASTELLANOS

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para efectuar el Examen Profesional a:

JORGE ANTONIO LOPEZ RENTERIA

de la carrera: LICENCIADO EN MATEMATICAS

quien después de haber presentado su tesis intitulada "Sistemas Controlables con Valor Propio Complejo y su Conjugado" la que -- previamente le fue aprobada por el Jurado.

Los sinodales replicaron a 1 sustentante y después de debatir entre sí reservada y libremente, lo declararon:

APROBADO POR UNANIMIDAD

Acto contínuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente, firmando los que intervinieron.

Jorge Antonio López Rentería
Firma del sustentante

PRESIDENTE

SECRETARIO

VOCAL
M. Eduardo Frías A.

La Suscrita, Jefe
del Departamento de: Matemáticas
de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden a los sinodales que intervinieron en el examen que contiene la presente acta.

Hermosillo , Sonora, a 11 de diciembre del 200 6 .

DRA. M. GUADALUPE AVILA GODOY
Jefe del Departamento

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

El Suscrito, Vicerrector
de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora, hace constar que: La Dra. M. Guadalupe Avila Godoy
es a la fecha de expedición de este documento, Jefe del Departamento arriba citado y suya la firma que aparece al calce del mismo.

Hermosillo, Sonora, a 11 de diciembre del 200 6 .

DR. HERIBERTO GRIJALVA MONTEVERDE
VICERRECTOR

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
UNIDAD REGIONAL
CENTRO
VICERRECTORIA

Agradecimientos

Deseo agradecer al Departamento de Matemáticas, su administración y su planta docente por el apoyo que se me brindo en el transcurso de mi carrera por momentos de satisfacción y difíciles que surgieron en el transcurso de ésta. Deseo tambien agradecer a los jefes de Departamento que lo liderearon en el transcurso de mis estudios.

Aprovecho para mostrar mis agradecimientos especialmente a mi director de tesis, Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, quien fué pilar fundamental en la realización del presente trabajo, así como a Dr. Rodrigo González González, Dr. Fernando Verduzco González, M.C. Horacio Leyva Castellanos, el cual fué el comité revisor de mi tesis, por el tiempo brindado para la corrección y comentarios.

En lo personal, quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional, mi madre que en las buenas y en las malas, siempre ha estado conmigo. Mis tíos que, apoyando al beneficio familiar alcancé mucho de ellos, en especial a Rodolfo Renteria Lerma y su esposa Lourdes Jimenéz Lozano por su gran apoyo, tanto económico como en lo moral, siempre me llevaron de la mano hasta terminar con mi carrera, mis hermanos que han sabido entender lo difícil que es estar fuera de casa sin compartir momentos familiares importantes, a mis abuelos que durante mucho tiempo estuvieron compartiendo grandes logros conmigo y el señor José Guillermo Renteria Zatarain quien a logrado formar para mi una figura paterna, con su amor incondicional. Al Profesor Rigoberto Radamés Sanchez García, quien me introdujo al fantástico mundo de las matemáticas e influyó directamente a que yo estudiara esta hermosa carrera.

También quiero mostrar mis agradecimientos a mis compañeros de clases, quienes han campartido grandes experiencias en el transcurso de nuestro recorrido por la vida y carrera.

Por último, y no menos importante, mis grandes agradecimientos a mi esposa María De Los Ángeles Mata González por su gran apoyo amoroso y momentos agradables que hemos logrado juntos, así como su influencia para lograr terminar mis estudios a pesar de las adversidades que han surgido para lograrlo. A todos aquellos quienes por descuido, no han sido incluidos y estuvieron brindandome su apoyo, les pido disculpas al igual que mis agradecimientos por todo lo que lograron en mi.

Índice general

Introducción **13**

1. Vectores y Espacios Vectoriales **15**
1.1. La norma de un vector y ortogonalidad 17
1.2. Números complejos 18
1.3. Espacios Vectoriales 21
1.4. Bases 23
1.5. Dimensión de un espacio vectorial 24

2. Matrices y Transformaciones Lineales **27**
2.1. El espacio de las matrices 27
2.2. Operaciones con matrices 28
2.3. Ecuaciones lineales 30
2.4. Transformaciones lineales 32
2.5. Bases, matrices y transformaciones lineales 36
2.6. Valores propios, vectores propios y formas de Jordan 38

3. Sistemas de control **41**
3.1. Ecuaciones diferenciales Ordinarias 41
3.2. Controlabilidad 42
3.3. Una caracterización de sistemas de control 45

Introducción

Los sistemas de control automático son aquellos a los cuales se les puede trasladar un estado en otro de manera contínua, mediante algún control, es decir, que se puede controlar los estados del sistema. Tales sistemas nacieron junto con la civilización y se han ido desarrollando a través del tiempo junto con ella. Hoy en día, los termostatos de refrigeraciones, el sistema del inhodoro, controladores de dirección, temperatura, reguladores, etcétera, son ejemplos de sistemas de control automático que usamos cotidianamente en nuestra vida y otros no tan cotidianos (aún) como lo son la evolución del movimiento robótico y los controladores de estos.

Es posible controlar los sistemas de eventos mediante algunas técnicas que se han ido desarrollando durante mucho tiempo, analizando el modelo matemático que los simula y así dar caracterizaciones de estos sistemas a controlar.

El presente trabajo tiene como objetivo determinar un caso especial de sistemas controlables que determinan eventos cuya expresión general es de la forma $\dot{x} = Ax + bu$. Para esto, se hace referencia a ciertos temas del álgebra lineal y variable compleja.

En el capitulo 1, se definen los objetos vectoriales, así como las operaciones entre ellos y algunas propiedades, para después, pasar a la idea de un número complejo, junto con ciertos resultados que se verán en el texto, pues parte del análisis de esta caracterización está enfoncada en este sentido. Se muestra el concepto de espacio vectorial, cómo se genera un espacio vectorial mediante bases y la dimensión de un espacio vectorial de acuerdo a la base.

Para el Segundo capítulo, se introducen nuevos objetos, llamados matrices, en el cual se hace referencia a sus operaciones, algunas propiedades y una forma de aplicarlas a la ecuaciones lineales. Se introduce un tema especial, que son las transformaciones lineales, ya que las afirmaciones más fuertes de las hipótesis del análisis de este trabajo, se demuestran haciendo uso de transformaciones lineales. Éstas estructuran todo lo que se sabe hasta ahora, por lo que es la base en la cual se está sujeto para hacer el desarrollo necesario concerniente al resultado principal; definimos lo que es una transformación lineal T y la relación que tienen con el espacio de matrices y las bases de un espacio vectorial; se da referencia sobre cómo se comporta una matriz B asociada a una transformación lineal T cuando se hace el cambio de coordenadas con respecto a bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$.

En el capítulo 3, el cual es un tema de investigación original, se hace referencia a las características de las matrices del sistema de control. La matríz de estado A tiene como valor propio un número complejo y su conjugado y es diagonal por submatrices dadas en bloques de Jordan. Las condiciones que se establecen para controlar al sistema con estas características, caen sobre la matríz

B y se hace un análisis del espacio de renglones columna de ésta. Para esto, se tuvo que hacer referencia de algunos lemas que se utilizarán directamente. Estos lemas surgieron a medida que se fue desarrollando el trabajo.

Capítulo

1 *Vectores y Espacios Vectoriales*

Empezaremos definiendo un punto en un espacio de n dimensiones. Primero, para representar un punto sobre la recta real, dado $x \in \mathbb{R}$, sabemos que posición tiene x con respecto a los demás y cómo se representa. Para representar un punto en el plano, un elemento del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una pareja (x, y) con $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$. Podemos introducir otro número para formar una terna (x, y, z) y representar un punto en el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el cual denotamos como $\mathbb{R}^3$, que es un punto en el espacio. Se puede emplear otra notación para estos número, esto es, hacemos (b_1, b_2, b_3) en lugar de (x, y, z). Así podríamos ir introduciendo más números para representar puntos en espacios de cuatro dimensiones ($\mathbb{R}^4$), por ejemplo (b_1, b_2, b_3, b_4). De esta manera, podemos ir agregando números y definir un **punto en el espacio de n dimensiones** (que es un punto en el producto cartesiano de $\mathbb{R}$, n veces), como la **n-upla** de números $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, si n es un entero positivo. Denotaremos con $\mathbf{b}$ dicha n-upla. Daremos el nombre de **vector** de $\mathbb{R}$ a una n-upla. Teniendo claro de lo que son los puntos de n dimensiones, definiremos para $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ son vectores de n dimensiones, la suma como

$$\mathbf{b} + \mathbf{v} = (b_1, ..., b_n) + (v_1, ..., v_n) = (b_1 + v_1, ..., b_n + v_n)$$

y si c es un número entonces

$$c\mathbf{b} = c(b_1, ..., b_n) = (cb_1, ..., cb_n).$$

Nótese que se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $(\mathbf{b} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{b} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

ii) $\mathbf{b} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{b}$.

iii) $c(\mathbf{b} + \mathbf{v}) = c\mathbf{b} + c\mathbf{v}$, para todo número c.

iv) Si c_1, c_2 son números, entonces $(c_1 + c_2)\mathbf{b} = c_1\mathbf{b} + c_2\mathbf{b}$ y $(c_1c_2)\mathbf{b} = c_1(c_2\mathbf{b})$.

v) Si se supone que $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ es el vector de cuyas coordenadas son todas 0, entonces $\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{b}$.

vi) $\mathbf{1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}$, y si se denota por $-\mathbf{b}$ a la n-upla $(-\mathbf{1}) \cdot \mathbf{b}$, entonces

$$\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

En lugar de escribir $\mathbf{b} + (-\mathbf{b})$ simplemente lo ponemos $\mathbf{b} - \mathbf{b}$.

Ahora, si $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ son dos vectores en $\mathbb{R}^n$, definiremos el producto de estos como

$$b_1v_1 + \cdots + b_nv_n.$$

Este producto es un número real y es llamado **producto escalar** ó **producto interior**. Además, satisface las siguientes propiedades:

PE 1. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$.

PE 2. Si $\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son puntos, entonces

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{b}.$$

PE 3. Si c es un número, entonces

$$(c\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \quad y \quad \mathbf{b}(c \cdot \mathbf{v}) = c(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}).$$

PE 4. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ es el vector nulo, entonces $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ =0, y si no lo es, se tiene que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ >0.

Cualquier espacio en el que se pueda definir un producto interior y satisfaga estas propiedades se llama **espacio con producto interior**.

La demostración de estas propiedades es muy sencilla pues, respecto de la primera propiedad, tenemos

$$b_1v_1 + \cdots + b_nv_n = v_1b_1 + \cdots + v_{nb_n}$$

puesto que para cualesquiera dos números, se tiene que $bv = vb$.

Para probar PE 2, sea $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)$. Luego

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= b_1(v_1 + w_1) + \cdots + b_n(v_n + w_n) \\
&= b_1v_1 + b_1w_1 + \cdots + b_nv_n + b_nw_n \\
&= b_1v_1 + \cdots + b_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_nw_n \\
&= \mathbf{bv} + \mathbf{bw}.
\end{aligned}$$

En la propiedad PE 3, desarrollaremos ambas partes

$$\begin{aligned}
(c\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} &= (cb_1, ..., cb_n) \cdot (v_1, ..., v_2) \\
&= (cb_1)v_1 + \cdots + (cb_n)v_n \\
&= c(b_1v_1) + \cdots + c(b_nv_n) = c(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})
\end{aligned}$$

Por último, para probar PE 4, nótese que si una coordenada b_i de $b \neq 0$ entonces $b_i^2 \neq 0$, además $b_i^2 > 0$ en el producto

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = b_1^2 + \cdots + b_n^2 > 0.$$

§ 1.1. La norma de un vector y ortogonalidad

Una vez que ya se tienen definidas las operaciones entre dos elementos de $\mathbb{R}^n$, toca ver la geometría de estos, y sus propiedades consecuentes.

Definimos la **longitud** ó **norma** de un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y se denota por $||\mathbf{b}||$ al número

$$||\mathbf{b}|| = \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Además se satisfacen las siguientes propiedades:
Para todo $\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$

(i) $||\mathbf{b}|| \geq 0$, $||\mathbf{b}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (no negatividad)

(ii) $||c\mathbf{b}|| = |c|\,||\mathbf{b}||$

(iii) $||\mathbf{b} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{b} + \mathbf{w}|| + ||\mathbf{w} + \mathbf{v}||$ (desigualdad del triángulo)

Si en un espacio se puede definir una norma, tal que se cumplan las propiedades anteriores, se le llama **espacio normado**.

Sean $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$. Se define la **distancia** entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$ como

$$||\mathbf{b} - \mathbf{v}|| = \sqrt{(\mathbf{b} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{v})}$$

Dada esta definición, se cumplen, para todos $\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$ las siguientes propiedades:

(i) $||\mathbf{b} - \mathbf{v}|| \geq 0, \;\; ||\mathbf{b} - \mathbf{v}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{v}$.

(ii) $||\mathbf{b} - \mathbf{v}|| = ||\mathbf{v} - \mathbf{b}||$.

(iii) $||\mathbf{b} - \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{b} - \mathbf{w}|| + ||\mathbf{w} - \mathbf{v}||$.

A un espacio, al que se le pueda definir una distancia ó métrica con las propiedades anteriores, se le llama **espacio métrico.**

Con esto podemos concluir que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico, normado.

Ahora nos encontramos en posición de justificar la noción de **ortogonalidad** ó **perpendicularidad** entre dos vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$, lo cual lo veremos en el siguiente resultado:

Proposición 1.1.1. *Sean* $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores, entonces* $\mathbf{b}$,$\mathbf{v}$ *son ortogonales si y solo si* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Demostración. Dados $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores, entonces la condición

$$||\mathbf{b} + \mathbf{v}|| = ||\mathbf{b} - \mathbf{v}||$$

nos muestra que **b** y **v** deben formar un paralelogramo. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad tenemos

$$(\mathbf{b}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{v}) = (\mathbf{b}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{v})$$

que al desarrollarla, por la propiedad PE 2 se tiene

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{2b}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{2b}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

de donde podemos observar que

$$||\mathbf{b}+\mathbf{v}|| = ||\mathbf{b}-\mathbf{v}||$$

se cumple si y solo si

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = 0. \qquad \blacksquare$$

Denotaremos la ortogonalidad entre **b** y **v** como $\mathbf{b}\perp\mathbf{v}$.

---

§ 1.2. Números complejos

Vamos a definir los números complejos, como el conjunto de parejas (b_1, b_2) de $\mathbb{R}^2$ junto con las reglas usuales de la adición de vectores y la multiplicación escalar por un número real, de tal manera que

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$c(a, b) = (ca, cb)$$

Para la multiplicación de números complejos, hagamos

$$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

Al sistema de números complejos denotaremos con $\mathbb{C}$.

Nótese que, a diferencia de $\mathbb{R}^2$, el producto entre dos números complejos es cerrado bajo la multiplicación, es decir, obtenemos nuevamente un número complejo, mientras que el producto entre dos puntos o dos parejas de $\mathbb{R}^2$, es un número real.

De hoy en adelante, para referirnos a un número complejo haremos (α, β) en lugar de (b_1, b_2), pues esa notación la tendremos para señalar puntos en $\mathbb{R}^2$.

Vamos a identificar a los números reales α con puntos en el eje x; entonces α y $(\alpha, 0)$ representan al mismo punto en $\mathbb{R}^2$. El eje y será llamado el eje imaginario y el punto $(0, 1)$ será denotado por i. Así, por definición

$$(\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$$

pues el lado derecho de la ecuación representa a $(\alpha, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = (\alpha, \beta)$.

Usando $\beta = (\beta, 0)$ y la definición anterior de multiplicación de complejos, se obtiene $i\beta = (0,1)(\beta,0) = (0 \cdot \beta - 1 \cdot, \beta \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, \beta) = \beta(0,1) = \beta i$ y así también podemos escribir $z = (\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$, donde el símbolo z se usa generalmente para indicar un número complejo y se denota como $z \in \mathbb{C}$.

Nótese que $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$, de esta manera tenemos la propiedad que queremos:

$$i^2 = -1.$$

Si recordamos esta ecuación, entonces la regla para la multiplicación de números complejos será también fácil de recordar

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) &= \alpha_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\beta_1\alpha_2 + i^2\beta_1\beta_2 \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2).\end{aligned}$$

Nuestro siguiente paso será expresar un número complejo en otras coordenadas llamadas **coordenadas polares**. Para hacer esto, recordemos que la longitud del vector (a, b) se define como $\sqrt{a^2 + b^2}$, para un número complejo, vamos a utilizar la misma definición, la cual generalmente se le conoce como módulo, norma ó valor absoluto de z y se denotará como $r = |z|$; así, si $z = (\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$, entonces $r = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Supóngase que este número complejo z, visto como vector, forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje real, donde $0 \leq \theta < 2\pi$ (como se muestra en la figura 1).

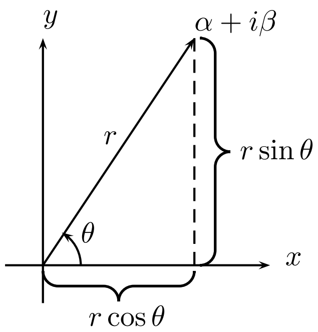

figura 1

Así, $tan\theta = \beta/\alpha$ y, puesto que $\alpha = rcos\theta$ y $\beta = rsen\theta$ tenemos entonces que $z = \alpha + i\beta = rcos\theta + i(rsen\theta) = r(cos\theta + isen\theta)$.

Esta manera de escribir un número complejo se llama *representación en coordenadas polares*. El ángulo θ es llamado el *argumento* del número complejo y se denota por $\theta = arg(z)$.

El uso de la representación polar, simplifica la tarea de hacer el producto de dos números complejos al definir $(cos\theta + isen\theta) = e^{i\theta}$, lo cual tiene sentido pues, en el caso real, el desarrollo de la exponencial en su serie de Taylor es

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots) + i(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots) \\ &= sen\theta + icos\theta. \end{aligned}$$

Así

$$z = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$$

y la multiplicación para $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ y $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$ es

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

1.2.1. La fórmula de D'Moivre

La fórmula que derivamos para la multiplicación de números complejos, usando la representación en coordenadas polares, la podemos utilizar para obtener una fórmula que nos permita calcular la potencia n-ésima de cualquier número complejo.

Proposición 1.2.2 (Fórmula de D´Moivre). *Si $z = r(cos\theta + isen\theta)$ y n es un entero positivo, entonces*

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Demostración. La haremos por inducción sobre n.
Para $k = 2$, dado que $z = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} z^2 &= re^{i\theta} \cdot re^{i\theta} \\ &= r^2 e^{i2\theta} \\ &= r^2(cos(2\theta) + isen(2\theta)) \end{aligned}$$

Para $k = 3$, al multiplicar nuevamente por z tenemos

$$\begin{aligned} z^3 &= z \cdot z^2 \\ &= re^{i\theta} \cdot r^2 e^{i2\theta} \\ &= r^3 e^{i3\theta} \\ &= r^3(cos(3\theta) + isen(3\theta)) \end{aligned}$$

Supóngase que se cumple para $k = n$, es decir, $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$, veamos que se cumple para $k = n + 1$

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z \cdot z^n \\ &= re^{i\theta} \cdot r^n e^{in\theta} \\ &= r^{(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \\ &= r^{n+1}(cos(n+1)\theta + isen(n+1)\theta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.2. Conjugación compleja

Un concepto muy importante en el desarrollo del tema principal es el de conjugación, pues, los valores propios de la matriz de estado del sistema de control del teorema principal, son conjugados. Definiremos el conjugado de $z = \alpha + i\beta$, como el número complejo $\alpha - i\beta$ y la denotaremos como $\overline{z}$. Se puede ver claramente que $z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$ y además se tiene que $Re(z) = Re(\overline{z})$ y $Im(z) = -Im(\overline{z})$, entre algunas otras propiedades.

§ 1.3. Espacios Vectoriales

Ya que se tienen los objetos de interés y algunas de sus propiedades, la pregunta más común es qué estructura tiene cada uno de ellos (hablando de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}$). En forma más general, si tenemos un conjunto no vacío K, un elemento c de K lo denotaremos como $c \in K$ y se lee c perctenece ó está en K. Por otro lado, si un conjunto S no vacío es tal que, todo elemento s de S está en K, diremos que S es un subconjunto de K ó está contenido en K y se denota como $S \subset K$. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, podemos hablar de operaciones entre elementos del conjunto K. La manera más natural de pensar la operación, es que siempre obtengamos otro elemento del mismo conjunto, es decir, Si c_1 y c_1 son elementos de K, entonces $c_1 + c_1$, que es la suma de elementos, es también un elemento de K (llamada la cerradura bajo la suma), ó $c_1 \cdot c_2$, llamado el producto, también es elemento de K (cerradura bajo el producto). Si se cumplen ambas cerraduras y además se tienen las siguientes condiciones

(i) Si $c \in K$, entonces $-c$ es un elemento de K. Si además $c \neq 0$, entonces c^{-1} también es un elemento de K.

(ii) Los elementos 0 y 1 son elementos de K.

Se dice que K tiene estructura de campo o simplemente K es un campo. A un elemento c de cualquier campo K le llamaremos **números**, si es que la referencia a K queda clara con el contexto, o bien se llamarán **escalares**.

Nótese que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ satisfacen las propiedades de campo, por las operaciones y propiedades definidas anteriormente.

Un **espacio vectorial** V sobre un campo K es un conjunto de objetos que se pueden sumar y que se pueden multiplicar por elementos del K, de tal manera que la suma de dos elementos de V es, de nuevo, un elemento de V y, además, se satisfacen las siguientes propiedades:

EV 1. Dados los elementos $\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de V, se tiene que

$$(\mathbf{b}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{b}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

EV 2. Existe un elemento de V, denotado por $\mathbf{0}$, tal que

$$\mathbf{0}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$$

para todos los elementos $\mathbf{b}$ de V.

EV 3. Dado un elemento $\mathbf{b}$ de V, el elemento **-b** en V es tal que

$$\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=\mathbf{0}.$$

EV 4. Para todos lo elementos **b, v** de V se tiene que

$$\mathbf{b}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{b}.$$

EV 5. Si c es un número, entonces $c(\mathbf{b}+\mathbf{v})=\mathbf{cb}+\mathbf{cv}$

EV 6. Si c_1 y c_2 son números, entonces $(c_1+c_2)\mathbf{b}=c_1\mathbf{b}+c_2\mathbf{b}$

EV 7. Si c_1 y c_2 son números, entonces $(c_1c_2)\mathbf{b}=c_1(c_2\mathbf{b})$

EV 8. Para todos los elementos $\mathbf{b}$ de V, se tiene que $1\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}$ (en donde 1 es el número uno).

En EV 3, para dos vectores **b, v**, en lugar de escribir $\mathbf{b}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$, escribiremos $\mathbf{b}-\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Para denotar al número cero, se usa el símbolo 0, y con $\mathbf{0}$ denotaremos el elemento de cualquier espacio vectorial V que satisfaga EV 2; también se llamará cero, aunque no hay posibilidad alguna de confusión. Nótese que el elemento $\mathbf{0}$ está determinado de forma única por EV 2. Además, para cualquier elemento $\mathbf{b}$ de V se tiene que

$$\mathbf{0b}=\mathbf{0}.$$

La prueba es muy sencilla, a saber:

$$\mathbf{0b}+\mathbf{b}=\mathbf{0b}+\mathbf{1b}=(\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{b}=\mathbf{1b}=\mathbf{b}$$

sumando $-\mathbf{b}$ a ambos lados tenemos $\mathbf{0b}=\mathbf{0}$.

$\mathbb{R}^n$ con las operaciones y propiedades definidas, tiene estructura de espacio vectorial, el cual, claramente tiene a $\mathbb{R}$ como campo.

§ 1.4. Bases

Ahora, debemos tomar en cuenta que un espacio vectorial V tiene que haberse generado de alguna forma y, siendo así, naturalmente esperamos que los objetos que lo generan tienen que ser internos a V, veremos que condiciones cumplen para generar a V, y posteriormente ver cuales son las propiedades de estos y su gran importancia en el desarrollo de la teoría que se encuentra en análisis. Para verificar lo antes dicho, comenzaremos por condicionar y seleccionar los elementos de un espacio vectorial.

Si V es un espacio vectorial sobre un campo K y $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ son elementos de V, diremos que $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ son **linealmente dependientes** sobre K si existen elementos $c_1, ..., c_n$ en K no todos iguales a 0, tales que

$$c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Si no existen tales números, entonces se dice que $\mathbf{b}_1, ...\mathbf{b_n}$ son **linealmente independientes**. En otras palabras, los vectores $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ son linealmente independientes si y solo si para $c_1, ...c_n$ números de K tales que

$$c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

entonces $c_i = 0$, para todo $i = 1, ..., n$.

Ejemplo 1. Sea $V = \mathbb{R}^n$ y considérense los vectores

$$E_1 = (1, ..., 0)$$

$$\vdots$$

$$E_n = (0, ..., 1)$$

entonces $E_1, ..., E_n$ son linealmente independientes. En efecto, sean $c_1, ..., c_n$ números tales que

$$c_1E_1 + \cdots + c_nE_n = \mathbf{0}$$

Pero

$$c_1E_1 + \cdots + c_nE_n = (c_1, ..., c_n) = (0, ..., 0)$$

esto es $c_i = 0$, para toda $i = 1, ..., n$.

Proposición 1.4.1. *Considérese un espacio vectorial arbitrario V. Si $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ son elementos linealmente independientes de V, sean $c_1, ..., c_n$ y $b_1, ..., b_n$ números. Supóngase que tenemos*

$$c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_n\mathbf{b}_n$$

En otras palabras, si las dos combinaciones lineales de $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$ son iguales, entonces $c_i = d_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. En efecto, restando el miembro derecho de la igualdad al miembro izquierdo de la misma tenemos que

$$c_1\mathbf{b}_1 - d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n - d_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

También se puede escribir esta relación en la forma

$$(c_1 - d_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

por definición $c_i - d_i = 0$ para toda $i = 1, ..., n$, es decir $c_i = d_i$, lo que demuestra nuestro enunciado. ■

Si $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ son elementos de V que generan a V y además son linealmente independientes, entonces $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ se conoce como una **base** de V. Diremos además que los elementos $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ **constituyen** o **forman** una base de V.

Los vectores $E_1, ..., E_n$ que se mencionan en el ejemplo 1 forman una base de $\mathbb{R}^n$ y se le conoce como la **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Sea V un espacio vectorial y sea $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ una base de V. Los elementos de V se pueden representar por n-uplas relativas a esta base, es decir, si un elemento de $\mathbf{b}$ de V se expresa como una combinación lineal

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

de los elementos de la base, entonces se dice que $(c_1, ..., c_n)$ son las **coordenadas** de $\mathbf{b}$ con respecto a la base y que c_i es la i-ésima coordenada.

Las coordenadas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ son simplemente las coordenadas del mismo vector que se definieron en el capítulo 1. Se dice que la n-upla $C = (c_1, ..., c_n)$ es el **vector de coordenadas** de $\mathbf{b}$ con respecto a la base $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$.

§ 1.5. Dimensión de un espacio vectorial

El principal resultado de ésta sección es que cualesquiera dos bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos. Para probar esta afirmación se requiere un resultado previo.

Teorema 1.5.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Sea $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}\}$ una base de V sobre K. Sean $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$ elementos de V y supóngase que $n > m$. Entonces $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$ son linealmente dependientes.*

Demostración. Supóngase que $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$ son linealmente independientes. Puesto que $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}\}$ es una base, existen elementos $c_1, c_2, ...c_n \in K$ tales que

$$\mathbf{v_1} = c_1\mathbf{b_1} + c_2\mathbf{b_2} + \cdots + c_m\mathbf{b_m}$$

por hipótesis, sabemos que $\mathbf{v_1} \neq 0$ y, por tanto, algún $c_i \neq 0$. Después renumerar $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}$ si es necesario, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $c_1 \neq 0$. Entonces se puede despejar $\mathbf{b_1}$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{b_1} &= \mathbf{v_1} - c_2\mathbf{b_2} - \cdots - c_m\mathbf{b_m} \\ \mathbf{b_1} &= c_1^{-1}\mathbf{v_1} - c_1^{-1}c_2\mathbf{b_2} - \cdots - c_1^{-1}c_m\mathbf{b_m}. \end{aligned}$$

El subespacio generado por $\mathbf{v_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}$ contiene a $\mathbf{b_1}$ y, por tanto, debe contener a todos los elementos de V, ya que $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}$ generan a V. La idea consiste ahora en continuar el proceso paso a paso y en reemplazar sucesivamente a $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ...$ por $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ...$ hasta que se agoten todos los elementos $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}$ y así $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_m}$ genera a V. supóngase ahora, por inducción, que existe un elemento r con $1 \leq r < m$ que, después de una renumeración adecuada de $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}$, los elementos $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_r}, \mathbf{b_{r+1}}, ..., \mathbf{b_m}$ generan a V. Existen elementos $a_1, ...a_r, c_{r+1}, ..., c_m$ en K tales que

$$\mathbf{v_{r+1}} = a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_r\mathbf{v_r} + c_{r+1}\mathbf{b_{r+1}} + \cdots + c_m\mathbf{b_m}$$

No puede suceder que $c_j = 0$ para $j = r+1, ..., m$, ya que si así fuera tendríamos una dependencia lineal entre $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_{r+1}}$, pues sólo se tendría

$$0 \neq \mathbf{v_{r+1}} = a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_r\mathbf{v_r}$$

es decir

$$0 = a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_r\mathbf{v_r} - \mathbf{v_{r+1}}$$

y aún si $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$ entonces

$$-\mathbf{v_{r+1}} = 0$$

lo que estaría en contradicción con nuestra suposición. Luego de renumerar, si es necesario $\mathbf{b_{r+1}}, ..., \mathbf{b_m}$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $c_{r+1} \neq 0$. Entonces se obtiene

$$c_{r+1}\mathbf{b_{r+1}} = \mathbf{v_{r+1}} - a_1\mathbf{v_1} - \cdots - a_r\mathbf{v_r} - c_{r+2}\mathbf{b_{r+2}} - \cdots - c_m\mathbf{b_m}$$

Al dividir entre c_{r+1} concluimos que $\mathbf{b_{r+1}}$ está en el subespacio generado por

$$\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_{r+1}}, \mathbf{b_{r+2}}, ..., \mathbf{b_m}.$$

Así, por inducción tenemos que $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_{r+1}}, \mathbf{b_{r+2}}, ..., \mathbf{b_m}$ generan a V. Por tanto se ha probado por inducción que $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_m}$ generan a V. Si $n > m$, entonces existen elementos $d_1, ..., d_m \in K$ tales que

$$\mathbf{v_n} = d_1\mathbf{v_1} + \cdots + d_m\mathbf{v_m}$$

Lo cual prueba que $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}$ son linealmente dependientes. ■

Teorema 1.5.2. *Sea V un espacio vectorial y supóngase que $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_m}\}$ y $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ son bases de V. Entonces $m = n$.*

Demostración. Se aplica el teorema 1.5.1 a las dos bases, el cual nos indica que las alternativas $n > m$ y $m > n$ son imposibles pues, implicarían dependencia lineal, por tanto, $m = n$. ■

Si un espacio vectorial V tiene una base con n elementos, entonces diremos que n es la **dimensión** de V. Si V consta solamente del $\mathbf{0}$, entonces V no tiene base alguna y se dice que V tiene dimensión 0.

Teorema 1.5.3. *Sea V un espacio vectorial y sea $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ un conjunto máximo de elementos de V linealmente independiente, entonces $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ es una base de V.*

Demostración. Debemos demostrar que $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$ generan a V, es decir, que todo elemento de V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$. Sea $\mathbf{v} \in V$. Por hipótesis, los elementos $\mathbf{v}, \mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$ de V deben de ser linealmente dependientes y, por tanto, existen $c_0, c_1, ..., c_n$ en K no todos iguales a 0, tales que

$$c_0\mathbf{v} + c_1\mathbf{b_1} + \cdots + c_n\mathbf{b_n} = \mathbf{0}.$$

no se puede tener que $c_0 = 0$, pues esto implicaría dependencia lineal entre $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$. Por consiguiente, se puede despejar v en función de $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$ a saber

$$v = -\frac{c_1}{c_0}\mathbf{b_1} - \cdots - \frac{c_n}{c_0}\mathbf{b_n}$$

esto prueba que v es una combinación lineal de $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$ y, por tanto, $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ es una base de V. ■

De hoy en adelante, los campos sobre los que trabajaremos serán $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ y haremos referencia cuando estemos haciendo uso de uno, el otro ó ambos.

Capítulo 2

Matrices y Transformaciones Lineales

§ 2.1. El espacio de las matrices

En estas sección estudiaremos otra clase de objetos, las **matrices**. con otra estructura y operaciones algebráicas, mas sin embargo, estas formas operacionales, estan ligadas a las de vectores, pues las matriciales se definirán a partir de la suma, producto de vectores por un escalar y del producto interior entre vectores.

Sean $n, m \geq 1$ enteros, definimos una **matríz** en $\mathbb{R}$ como un arreglo de números en $\mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Se puede abreviar la notación para esta matríz expresándola como (b_{ij}), donde $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$. Se dice que esta es una matríz de m por n, o bien, que es una matríz de $m \times n$. La matríz tiene m **renglones** y n **columnas**. La componente b_{ij} es la componente ij de la matríz.

Si la matríz anterior se denota por B, entonces el renglón i se denota por B_i, y se define por

$$B_i = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in}).$$

La columna j se denota por B^j y se define como

$$B^j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

Sea $B = (b_{ij})$ una matríz de $m \times n$. La matríz $C = (c_{ij})$ de $n \times m$ tal que $c_{ji} = b_{ij}$ se conoce como la **transpuesta** de B y se denota por B^t.

Se considera que la transpuesta de una matríz equivale a intercambiar renglones por columnas y viceversa. Si B es la matríz

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces la matríz transpuesta de B es

$$B^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $B = (b_{ij})$, con $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$ es una matríz y, si $m = n$, se dice que B es una **matríz cuadrada**. Si se tiene que $b_{ij} = 0$ para todo i y j, decimos que B es una **matríz nula** y tiene el aspecto que se muestra en seguida:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Se representa con $\mathbf{0}$.

Si $B = (b_{ij})$ es una matríz cuadrada. Se dice que $b_{11}, ..., b_{nn}$ son las componentes de su **diagonal.** Si todas sus componentes son cero, excepto las de su diagonal, es decir, $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$, diremos que B es una **matríz diagonal**. Si B tiene todas sus componentes igual a cero y las componentes de su diagonal iguales a 1, entonces B es la **matríz uno** ó **matríz identidad**, y se denota con $\mathbf{I_n}$ o bien con I si no hay necesidad de especificar la n. Así entonces

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

§ 2.2. Operaciones con matrices

Ahora que tenemos bien definidos nuestros objetos matriciales, nuestro siguiente paso es ver que es lo que podemos hacer con ellos, es decir, que operaciones podemos definirles y que propiedades se cumplen dadas estas operaciones.

En el caso de la suma, las matrices deben de ser del mismo tamaño, es decir, mismo número de renglones e igual número de columnas. Para la multiplicación, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de columnas de la segunda.

Estas operaciones están dadas para $m, n \geq 1$ enteros fijos, y $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de $m \times n$. Se define la matríz $A + B$ como aquella cuya componente en el renglón i y la columna j es $a_i + b_j$, es decir, la suma de dos matrices del mismo tamaño se realiza componente a componente. Si tanto A como B son matrices de $1 \times n$, esto es n-uplas, entonces la suma de A y B coincide con la suma de n-uplas definidas en el capítulo 1.

Para el producto entre matrices; si $A = (a_{ik})$ y $B = (b_{kj})$ son matrices de $m \times r$ y $r \times n$ respectivamente, definimos la matríz $A \cdot B$ como, la matríz cuya componente en el renglón i y la columna j es $\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$, es decir, la compomente ij de $A \cdot B$ es el producto interior entre el renglón i de A con la columna j de B.

Si c es un número y $B = (b_{ij})$ una matríz, entonces la matríz cB es la matríz cuya componente es cb_{ij} y se escribe $cB = (cb_{ij})$; Así entonces, multiplicamos cada componente de B por c.

Proposición 2.2.1. *Sean A, B, C matrices. Supóngase que A y B se pueden multiplicar entre sí, que A y C también se pueden multiplicar entre sí y que B y C se pueden sumar. Entonces, A y $B + C$ se pueden multiplicar entre sí y tenemos que*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

y si c es un número, entonces

$$A(cB) = c(AB)$$

Demostración. Sea A_i el i-ésimo renglón de A y sean B^k y C^k las k-ésimas columnas de B y C respectivamente. Entonces $B^k + C^k$ es la k-ésima columna de $B + C$. Por definición, la componente ik de AB es $A_i \cdot B^k$, la componente ik de AC es $A_i \cdot C^k$, y las componentes ik de $A(B + C)$ es $A_i \cdot (B^k + C^k)$, ya que

$$A_i \cdot (B^k + C^k) = A_i \cdot B^k + A_i \cdot C^k$$

se deduce entonces la primera afirmación. Para la segunda afirmación, obsérvese la columna k de cB^k, puesto que

$$A_i \cdot cB^k = c(A_i \cdot B^k)$$

se infiere la segunda afirmación. ■

Proposición 2.2.2. *Sean A, B y C matrices tales que A y B se puedan multiplicar entre sí y tales que B y C se puedan multiplicar entre sí. Entonces A y BC se pueden multiplicar entre sí; lo mismo que las matrices AB y C, por tanto se tiene*

$$(AB)C = A(BC).$$

Demostración. Sean $A = (a_{ij})$ una matríz de $m \times n$, $B = (b_{jk})$ matríz de $n \times r$ y $C = (c_{kl})$ matríz de $r \times s$. El producto AB es una matríz de $m \times r$ cuya componente ik es

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Por definición, la componente il de $(AB)C$ es igual a

$$\sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right] c_{kl} = \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right]$$

Por otro lado, el producto BC es una matríz de $n \times s$, cuya jl-ésima componente es

$$\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl}$$

y de nuevo, por definición, la componente il de $A(BC)$ es

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl} \right] &= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si B es una matríz cuadrada de $n \times n$, diremos que B es **invertible** ó **no singular** si existe una matríz A de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I.$$

Tal matríz A está determinada en forma única por B, ya que si C es tal que $BC = CB = I$, entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

§ 2.3. Ecuaciones lineales

Veremos ahora una aplicación de los teoremas sobre dimensión para la solución de ecuaciones lineales.

Sea $B = (b_{ij})$ una matríz de $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ y sean $c_1, ..., c_m$ números en $\mathbb{R}$. Las ecuaciones como

$$\begin{array}{ccc} b_{11}x_1 & \cdots & b_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}x_1 & \cdots & b_{mn}x_n = c_m \end{array} \qquad (1)$$

se conocen como **sistema de ecuaciones lineales**.

El número n se conoce como el número de incógnitas y m se conoce como el número de ecuaciones. A la matríz (b_{ij}) se le conoce como **matríz de coeficientes.**

Si hacemos

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Entonces se puede escribir (1) en la forma

$$x_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

en forma abreviada, en términos de los vectores columna de B

$$x_1B^1 + \cdots + x_nB^n = C.$$

El sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} b_{11}x_1 & \cdots & b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}x_1 & \cdots & b_{mn}x_n = 0 \end{array} \qquad (2)$$

se llamará **sistema homogéneo asociado con** (1), el cual se puede expresar como

$$x_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = 0$$

ó, en términos de los vectores de la matríz (b_{ij})

$$x_1B^1 + \cdots + x_nB^n = 0.$$

El sistema (2) siempre tiene solución, a saber, la solución obtenida al hacer todos los $x_j = 0$. Esta solución se conoce como la solución **trivial**. Una solución $(x_1, ..., x_n)$ tal que algún $x_i \neq 0$, se conoce como solución **no trivial**. Por consiguiente, una solución no trivial $X = (x_1, ..., x_n)$, no es otra cosa que una n-upla $X \neq 0$ que da una relación de dependencia lineal entre las columnas $B^1, ..., B^n$. Esta manera de expresar el sistema ofrece, por tanto una buena interpretación y permite aplicar el teorema 1.5.1.

Proposisión 2.3.1. *Sea*

$$\begin{matrix} b_{11}x_1 & \cdots & b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}x_1 & \cdots & b_{mn}x_n = 0 \end{matrix}$$

un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas, con coeficientes en $\mathbb{R}$. Supóngase que $n > m$. Entonces el sistema tiene una solución no trivial en $\mathbb{R}$.

Demostración. Por el teorema 1.5.1, se tiene que los vectores $B^1, ..., B^n$ deben ser linealmente dependientes, por tanto, la combinación lineal

$$x_1B^1 + \cdots + x_nB^n = 0$$

con algún $x_j \neq 0$. ■

Proposición 2.3.1. *Supóngase que en el sistema* (1) *se tiene que $m = n$ y supóngase además que los vectores $B^1, ..., B^n$ son linealmente independientes. Entonces el sistema (1) tiene una solución en $\mathbb{R}$ y esta solución es única.*

Demostración. Como los vectores $B^1, ..., B^n$ son linealmente independientes forman una base para K^n. Por tanto, cualquier vector A tiene una expresión única como una combinación lineal

$$A = x_1B^1 + \cdots + x_nB^n$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$ y, por consiguiente, $X = (x_1, ..., x_n)$ es la solución única del sistema. ■

§ 2.4. Transformaciones lineales

Primero daremos una noción general de funciones, que son las transformaciones, y entre las cuales, las lineales son las más importantes. Para S y S' conjuntos, Una **Transformación** de S en S' es una asociación que adjunta a todo elemento de S con un elemento de S'. Para decir que T es una transformación de S en S' lo denotamos como $T : S \to S'$. Emplearemos para las transformaciones, parte de la terminología que se ha empleado para las funciones. Por ejemplo, si $T : S \to S'$ es una transformación y u es un elemento de S, entonces denotamos por $T(u)$ al elemento de S' asociado a u por T. Se dice que $T(u)$ es el valor de T en u, o también se dice que es la **imagen** de u bajo T. El conjunto de todos los elementos $T(u)$, cuando u varía sobre todo S, se conoce como la **imagen** de

S bajo T y se denota $T(S)$. Si U, V, W son conjuntos, $T : U \to V$ y $T' : V \to W$ transformaciones, entonces se puede formar la transformación compuesta de U en W como

$$(T' \circ T)(t) = T'(T(t))$$

para toda $t \in U$, y se denota por $T' \circ T$.

Como ya se ha dicho, entre las transformaciones, las lineales son las más importantes para el desarrollo que deseamos, por lo que solo nos centraremos es éstas.

Sean V y V' espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Una **transformación lineal** $T : V \to V'$ es una trasformación tal que, para cualesquiera elementos $u, v \in V$, se tiene

$$T(u + v) = T(u) + T(v).$$

y si $c \in \mathbb{R}$, $v \in V$, se tiene

$$T(cv) = cT(v).$$

La transformación que asocia cualquier elemento de $v \in V$ este mismo elemento es, obviamente, una transformación lineal que se conoce con el nombre de **identidad**, se denota con id o simplemente con I. Así, $id(v) = v$.

Como ya se había mencionado en un principio, en el hecho de que se pueden componer transformaciones arbitrarias, se puede decir algo adicional para las transformaciones lineales, que son un caso particular.

Proposición 2.4.1. *Sean U, V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Sean*

$$T : U \to V \quad y \quad T' : V \to W$$

transformaciones lineales. Entonces, La transformación compuesta $T' \circ T$ es también una transformación lineal.

Demostración. Sean $u, v \in U$. Como T es lineal, tenemos que

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

por tanto

$$(T' \circ T)(u + v) = T'(T(u + v)) = T'(T(u) + T(v)).$$

como T' es lineal, se obtiene

$$T'(T(u) + T(v)) = T'(T(u)) + T'(T(v))$$

por consiguiente

$$(T' \circ T)(u + v) = (T' \circ T)(u) + (T' \circ T)(v)$$

Ahora, sea c un número. Entonces

$$\begin{aligned}(T' \circ T)(cu) &= T'(T(cu)) \\ &= T'(cT(u)) \quad (\textit{por ser } T \textit{ lineal}) \\ &= cT'(T(u)) \quad (\textit{por ser } T' \textit{ lineal})\end{aligned}$$

Esto prueba que $T' \circ T$ es una transformación lineal. ■

Si L es una transformación lineal tal que $L \circ T = T \circ L = id$, entonces a L se le conoce como transformación **inversa** de T y se denota como T^{-1}.

2.4.1. Transformación lineal asociada a una matríz

Considérese la matríz de $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Se puede asociar a B con una transformación

$$T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

haciendo

$$T_B(X) = BX$$

Para cada vector columna X de $\mathbb{R}^n$.

Así, T_B se define mediante la asociación $X \mapsto BX$, en donde el producto es el producto de matrices. Que T_B es una transformación lineal se deduce simplemente de un caso especial de la proposición 2.2.1, a saber, de la proposición referente a las propiedades de la multiplicación de matrices. En realidad, tenemos que

$$B(X + Y) = BX + BY \quad y \quad B(cX) = cBX$$

para todos los vectores $X, Y \in \mathbb{R}^n$ y para todo $c \in \mathbb{R}$. Se dice que T_B es la transformación asociada con la matríz B.

Proposición 2.4.2. *Si A y B son matrices de $m \times n$ y si $T_A = T_B$, entonces $A = B$, es decir, si las matrices A y B dan origen a la misma transformación lineal, entonces $A = B$.*

Demostración. Por definición, tenemos que $A_i \cdot X = B_i \cdot X$ para todo i, si A_i es el renglón i de A y B_i es el renglón i de B. por tanto, $(A_i - B_i) = 0$ para todo i y todo X. Por lo que $A_i - B_i = 0$, entonces $A_i = B_i$ para todo i. De donde $A = B$. ■

2.4.2. Matríz asociada a una transformación lineal

Ya sabemos que a una matríz le podemos asociar una transformación lineal, lo mas lógico es preguntarse qué pasa con el recíproco, es decir, si a una transformación lineal le podemos asociar una matríz; el siguiente resultado nos responde la cuestión anterior.

Teorema 2.4.1. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Sean $E_1, ..., E_n$ los vectores columna unitarios en $\mathbb{R}^n$ y sean $e_1, ..., e_n$ los vectores columna unitarios en $\mathbb{R}^m$. Entonces existe una matríz A tal que $T = T_A$, es decir, existe una matríz de $m \times n$ tal que para todo $X \in \mathbb{R}^n$ se tiene*

$$T(X) = A \cdot X.$$

Demostración. Sabemos que cualquier vector $X \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar como una combinación lineal

$$X = x_1 E_1 + \cdots + x_n E_n$$

donde x_j es la componente j de X. Considérense los vectores $E_1, ..., E_n$ como vectores columna. Por linealidad se tiene que

$$T(X) = x_1 T(E_1) + \cdots + x_n T(E_n)$$

se puede escribir cada una de los $T(E_j) \in \mathbb{R}^m$ en términos de $e_1, ..., e_m$. Es decir, existen números a_{ij} tales que

$$\begin{aligned} T(E_1) = a_{11}e_1 \quad &+ \quad \cdots + a_{m1}e_m \\ &\vdots \\ T(E_n) = a_{1n}e_1 \quad &+ \quad \cdots + a_{mn}e_m \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} T(X) \quad &= \quad x_1(a_{11}e_1 + \cdots + a_{m1}e_m) + \cdots + x_n(a_{1n}e_1 + \cdots + a_{mn}e_m) \\ &= \quad (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)e_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)e_m. \end{aligned}$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

en consecuencia, si hacemos $A = (a_{ij})$, entonces se ve que

$$T(A) = A \cdot X. \quad \blacksquare$$

Así, designamos a A como la **matríz asociada a una transformación lineal T.** Por el teorema tenemos que está determinada en forma única.

Nótese que las operaciones con matrices corresponden a las operaciones con las transformaciones lineales asociadas (el caso general de las transformaciones lineales, que son los operadores lineales, hacer referencia a una matríz A, es igual a hablar sobre el operador lineal A) como se mostrará a continuación.

Proposición 2.4.3. *Si A y B son matrices de $m \times n$ y c un número, entonces*

$$T_{A+B} = T_A + T_B \quad y \quad T_{cA} = cT_A.$$

Análogamente, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ son transformaciones lineales y si A y B son las matrices asociadas a T y T' respectivamente entonces, para cualquier vector X en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$(T' \circ T)(X) = (BA)X.$$

Demostración. Para la primera parte, claramente

$$T_{A+B} = (A+B)X = AX + BX = T_A + T_B \quad y \quad TcA = (cA)X = c(AX) = cT_A$$

y para la segunda parte

$$(T' \circ T)(X) = T'(T(X)) = B(AX) = (BA)X.$$

por tanto BA es la matríz asociada con la transformación lineal compuesta $T' \circ T$. ■

§ 2.5. Bases, matrices y transformaciones lineales

En las secciones anteriores se consideró la relación entre las matrices y las transformaciones lineales. A continuación, veremos algunos resultados que nos ayudarán a demostrar nuestro teorema de caracterización de sistemas controlables, que analizaremos en el siguiente capítulo.

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Sean $\mathscr{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathscr{B}' = \{w_1, ..., w_m\}$ bases de V y W respectivamente. Si $v \in V$, entonces se puede expresar v en forma única como una combinación lineal

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

con $x_i \in \mathbb{R}$. Entonces existe una aplicación que nos relaciona a V con $\mathbb{R}^n$ determinada por

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Análogamente, para W existe una aplicación que nos relaciona a W con $\mathbb{R}^m$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces, por lo anterior podemos interpretar a T como una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, y así asociar una matríz con T que depende de la elección de las bases. Se denota tal matríz con

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(T).$$

Esta matríz es la única matríz A que tiene la siguiente propiedad:

Proposición 2.5.1. *Si X es el vector (columna) de coordenadas de un elemento v de un espacio vectorial V, relativa a la base $\mathscr{B}$, entonces AX es el vector (columna) de coordenadas de $T(v)$ relativa a la base $\mathscr{B}'$.*

Demostración. Si $A = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(T)$, y si X es el vector de coordenadas de v con respecto a $\mathscr{B}$, entonces por definición

$$T(v) = (A_1 \cdot X)w_1 + \cdots + (A_m \cdot X)w_m.$$

Esta matríz está determinada por el efecto de T sobre los elementos de la base, de la siguiente manera. Sea

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned} \qquad (*)$$

Entonces, A resulta ser la transpuesta de la matríz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

claramente se tiene

$$T(v) = T(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1T(v_1) + \cdots + x_nT(v_n).$$

usando la expresión $(*)$ para $T(v_1), ..., T(v_n)$, se tiene que

$$T(v) = x_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m).$$

y después de agrupar los coeficientes de $w_1, ..., w_m$ se obtiene de nuevo esta expresión en la forma

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m = (A_1X)w_1 + \cdots + (A_mX)w_m. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.5.1. *Sean V, W, U espacios vectoriales. Sean $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ bases de V, W, U respectivamente. Sean*

$$T : V \to W \quad y \quad T' : W \to U$$

transformaciones lineales. Entonces

$$M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}(T')M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(T) = M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}}(T' \circ T)$$

Demostración. Sea A la matríz asociada con T relativa a las bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ y sea B la matríz asociada con T' relativa a las bases $\mathscr{B}', \mathscr{B}''$. Sea $v \in V$ y sea X su vector (columna) de coordenadas relativo a $\mathscr{B}$. Entonces, el vector de coordenadas de $T(v)$ relativo a $\mathscr{B}'$ es AX. Por definición, el vector de coordenadas de $T'(T(v))$ relativo a $\mathscr{B}'$ es $B(AX) = (BA)X$. Pero $T'(T(v)) = (T' \circ T)(v)$, por tanto, el vector de coordenadas de $(T' \circ T)(v)$ relativo a la base $\mathscr{B}''$ es $(BA)X$. Por definición, esto significa que BA es la matríz asociada con $T' \circ T$. ■

Corolario 2.5.2. *Sea V un espacio vectorial y sean $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ bases de V. Entonces*

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(id)M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}(id) = I = M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}(id)M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(id).$$

En particular $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(id)$ es invertible.

Demostración. En el teorema 2.5.1 considérese $V = W = U$ y $T' = T = id$. ■

Teorema 2.5.2. *Sea $F : V \to V$ una transformación lineal y sean $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ bases de V. Entonces existe una matríz invertible N, tal que*

$$M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'}(T) = N^{-1}M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(T)N.$$

De hecho, se puede considerar $N = M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}(id)$.

Demostración. Aplicando el teorema 2.5.1. paso a paso, encontramos que

$$M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'}(T) = M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(id)M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(T)M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}(id).$$

El corolario anterior implica que está aprobada nuestra afirmación. ■

En vista de la importancia que tiene la aplicación $M \mapsto N^{-1}MN$, se le da un nombre especial.

Dos matrices M, M' se llaman semejantes (sobre $\mathbb{R}$) si existe una matríz invertible N en K, tal que $M' = N^{-1}MN$.

---

§ 2.6. Valores propios, vectores propios y formas de Jordan

Si V es un espacio vectorial y

$$A : V \to V$$

es un operador de V (es decir, una transformación de V en sí mismo). Se dice que un elemento $\mathbf{b} \in V$ se llama **vector propio** de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Si $\mathbf{v} \neq 0$, entonces λ está determinado de manera única, debido a que $\lambda_1 \mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v}$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2$. En este caso, se dice que λ es un **valor propio** de A correspondiente al vector propio $\mathbf{v}$.

Ahora, abordaremos un tipo de matrices diagonales por bloques de submatrices. Si una matríz de $n \times n$ con sus n vectores linealmente independientes, se puede expresar de una forma especialmente sencilla mediante una transformación de semejanza. Para analizar este caso, comenzaremos definiendo las matrices de **Jordan**.

Sea

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

una matríz de $k \times k$. Para una escalar dado $\lambda \in \mathbb{R}$, se define la matríz de **bloques de Jordan** como sigue

$$D(\lambda) = \lambda I + N_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

la cual tiene todos sus valores propios reales iguales a λ.

Para el caso complejo, la matríz de bloques de Jordan se define como

$$D(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Donde sus valores propios complejos son $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Definimos la **matríz de Jordan** como

$$J = \begin{pmatrix} D_1(\lambda_1) & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & D_2(\lambda_2) & \cdots 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & D_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

donde cada $D_j(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, r$, es una matríz de bloques de Jordan.

Y en el caso de la matríz de bloques de Jordan con valores propios complejos, la matríz de Jordan tiene la forma

$$J = \begin{pmatrix} D_1(\alpha_1, \beta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(\alpha_2, \beta_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_r(\alpha_r, \beta_r) \end{pmatrix}$$

Entonces una matríz de Jordan es una matríz que tiene en la diagonal matrices de bloques de Jordan y ceros en otra parte.

El siguiente resultado nos asegura que podemos expresar una matriz cuadrada en forma de Jordan, aunque no se demostrará, pues se puede hacer una analogía con el teorema 2.5.2.

Teorema 2.6.1. *Sea B una matríz de $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ ó sobre $\mathbb{C}$. Entonces existe una matríz P sobre $\mathbb{C}$ invertible de $n \times n$ tal que*

$$P^{-1}BP = J.$$

Donde J es una matríz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de B. Más aún, La matríz de Jordan J es única excepto por el orden en el que aparecen los bloques de Jordan.

Capítulo

3 Sistemas de control

§ 3.1. Ecuaciones diferenciales Ordinarias

Actualmente, las ecuaciones diferenciales se han convertido en una herramienta poderosa para la investigación de los fenómenos naturales. La mecánica, la astronomía y la tecnología han sido causa de numerosos progresos en esta área. A continuación, definiremos las ecuaciones diferenciales y daremos una clasificación éstas.

Se llama **ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.)** a una ecuación que liga la variable independiente x, a una función $y = y(x)$ (que depende sólo de esa variable independiente) y sus respectivas derivadas $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Es decir, una expresión de la forma:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

A la función $y = y(x)$ la llamaremos **función incógnita**.

Diremos que el **orden** de una ecuación diferencial es el número de mayor derivación en la función icógnita. Diremos que el **grado** de una ecuación diferencial es el mayor exponente que tenga la derivada de mayor orden.

Solo estudiaremos las ecuaciones diferenciales de **primer orden**, es decir, ecuaciones de la forma

$$F(x, y, y') = 0 \qquad o \qquad F(x, y, \dot{y}) = 0 \qquad (forma\ implicita)$$

Si se puede despejar y', se tendrá una ecuación de la forma

$$y' = f(x, y) \qquad o \qquad \dot{y} = f(x, y) \qquad (forma\ explicita)$$

por lo tanto, las E.D.O. en forma explícita siempre serán de grado 1.

Un **sistema de ecuaciones diferenciales** de primer orden es de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n
\end{aligned}$$

y escrita en forma matricial

$$\dot{X} = AX + B$$

donde $\dot{X} = AX$ es la parte homogénea del sistema.

---

§ 3.2. Controlabilidad

Considerese el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, A y B matrices constantes con entradas reales y de tamaño adecuado.

Definición . *Diremos que el estado x_1 del sistema (1) es* ***controlable*** *en $t = t_0$, si toda condición inicial x_0 puede ser transferida a x_1 en un intervalo de tiempo finito, para algún control $u(t, x_0)$. Si todos los estados de un sistema son controlables, diremos que el sistema es* ***completamente controlable****, o simplemente* ***controlable****.*

Veamos como deducir una expresión matemática que nos garantice cuándo un sistema es controlable. Sin pérdida de generalidad supongamos que el estado final $x_1 = 0$ y que el tiempo inicial $t_0 = 0$. Analizaremos el caso de un control u escalar (m=1). El caso general es similar.

Consideremos el sistema de control (1) con $x \in \mathbb{R}$, $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y u un escalar.

La solución del sistema (1) es

$$x(t) = e^{Ax}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}bu(s)ds$$

Ahora bien, si el sistema es controlable y como hemos supuesto que x_1, obtenemos entonces que

$$x(t_1) = x_1 = 0 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}bu(s)ds$$

lo que equivale a

$$0 = e^{At_1}\left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-As}bu(s)ds\right)$$

o bien

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As}bu(s)ds \qquad (2)$$

Ahora bien, sabemos que la exponencial de una matriz cuadrada puede expresarse como una suma finita de potencias de ella misma, es decir

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k$$

Luego, (2) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} x_0 &= -\int_0^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(s) A^k b u(s) ds \right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k b \int_0^{t_1} \alpha_k(s) u(s) ds \end{aligned}$$

Definiendo

$$\beta_k = \int_0^{t_1} \alpha_k(s) u(s) ds$$

finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k b \beta_k \\ &= -\left(b\beta_0 + Ab\beta_1 + A^2 b\beta_2 + \cdots + A^{n-1} b\beta_{n-1} \right) \\ &= -\begin{pmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^{n-1} b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si el sistema (1) es completamente controlable, entonces para cualquier estado inicial x_0, la ecuación deberá satisfacerse. Esto se puede garantizar si la matriz

$$C = (b\, Ab\, A^2 b \, \cdots \, A^{n-1} b)_{n \times n}$$

es de rango n, o lo que es lo mismo, que los vectores b, Ab, $\ldots$, $A^{n-1}b$ sean linealmente independientes. La matriz C es llamada la matriz de controlabilidad. En general, si el control $u \in \mathbb{R}^m$, se obtiene la matriz de controlabilidad

$$C = (B\, AB\, A^2 B \, \cdots \, A^{n-1} B)_{n \times nm}.$$

Esto nos lleva al siguiente resultado, el cual nos caracteriza los sistemas completamente controlables.

Proposición*[1] *3.2.1. *Considere el sistema de control (1) con* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *y* $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. *Entonces el sistema es completamente controlable si y solo si la matriz*

$$C = (B\, AB\, A^2 B \, \cdots \, A^{n-1} B)_{n \times nm}$$

tiene rango n.

Dependiendo de las dimensiones de las matrices A y B, el cálculo de la dimensión de la matriz

[1] La parte inversa de esta afirmación se puede encontrar en el libro "Linear Multivariable Control: A Geometric Approach", de W. Murray Wonham, tercerra edicion. Editado por A. V. Balakrishnan, en el capítulo 1, sección 1.2.

C puede ser complicado, aún usando algún paquete computacional. Una forma alterna para determinar si el rango de la matriz C es n es verificar si

$$det(CC^T) \neq 0.$$

El número máximo $q \leq n-1$ para el cual la matriz de controlabilidad

$$C = (B\,AB\,A^2B\,\cdots\,A^{n-1}B)_{n\times nm}$$

tiene rango n, se llama índice de controlabilidad.

Ejemplo. Considérese el siguiente sistema de control

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Para este sistema tenemos que la matriz de controlabilidad es

$$C = \begin{pmatrix} b & Ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

lo cuál es, evidentemente de rango dos. Luego, el sistema es completamente controlable con índice 1.

Definición 3.2.2. *Considerese el sistema lineal*

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Cuando el parámetro de control u esté restringido a tomar valores en en cono $U = \mathbb{R}^m_+$, diremos que el control es positivo (**CCP**).

El siguiente resultado, debido a Brammer, nos da una caracterización de los sistemas **CCP**.

Teorema 3.2.1. *El sistema (1) es* ***CCP*** *si y solo si*

(a) La matriz de controlabilidad $C = (BAB \cdots A^{n-1}B)$ tiene rango n.

(b) No existe vector propio real v de A^T que satisfaga que el producto escalar

$$v^t \cdot Bu \leq 0$$

Para todo $u \in \mathbb{R}^m_+$.
(a) y (b) serán llamadas primera y segunda condiciones de Brammer, respectivamente.

Para hacer mas evidente este Teorema, daremos un ejemplo clásico en teoría de sistemas de control, el llamado 2-integrador:

Considérese el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $b_2 \neq 0$. El sistema es controlable pero no CCP.

En efecto, para probar que el sistema es controlable, nos fijamos en la matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} b_1 & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda b_1 + b_2 \\ b_2 & \lambda b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

la cual tiene rango 2, por tanto el sistema es controlable. Por otra parte, la matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

tiene un valor propio λ con multiplicidad dos, con vectores propios

$$(A^t - \lambda I)\mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

de aquí que $v_1 = 0$ y v_2 es arbitrario, por tanto, los vectores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, la segunda condición de Brammer nos pide que no exista vector propio real v de A^T tal que

$$v^t \cdot Bu \leq 0$$

para todo $u \in \mathbb{R}_+$. Así,

$$v^t \cdot Bu =< \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u >= 0 + v_2 b_2 u$$

Si $b_2 > 0$, se toma $v_2 \leq 0$, si $b_2 < 0$, tomamos $v_2 \geq 0$; en cualquiera de los dos casos no se satisface la segunda condición de Brammer, por tanto, el sistema no es **CCP.**

§ 3.3. Una caracterización de sistemas de control

El sistema controlable de estudio cuyas matrices A y B son de la forma que se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Sean*

$$A_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, B_{2n\times m} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{2n1} & b_{2n2} & \cdots & b_{2nm} \end{pmatrix}.$$

El sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ es ***controlable*** *y* ***CCP*** *si y solo si $< B_{\overline{\mathbb{C}}} >= \mathbb{C}^n$.* Más aún, el número de controles necesarios y suficientes para el sistema son n.

Nuestro estudio se enfocará sólo a la primera condición de Brammer, pues la segunda implica la no existencia de vectores propios reales y, el sistema en cuestión arroja vectores propios complejos. Para demostrar este teorema, necesitaremos de algunos resultados previos.

Definición 3.3.1. *Sea*

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix}$$

un vector sobre $\mathbb{R}$ con un número par de entradas. La complejificación de **b** *la definiremos como*

$$\mathbf{b}_{\overline{\mathbb{C}}} = \begin{pmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{pmatrix}$$

La complejificación para una matriz de la forma

$$A_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

la definiremos como

$$A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}^{n\times n}} = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

Lema 3.3.1. *Sean*

$$z = \alpha + i\beta, \quad y \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^k = \begin{pmatrix} Re(z^k) & Im(z^k) \\ -Im(z^k) & Re(z^k) \end{pmatrix}$$

Demostración. Primero, dado que $z = r(cos\theta + isen\theta)$, con $|z| = r$ y $\theta = tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$, por la fórmula de D'Moivre se obtiene que

$$z^k = r^k(cos(k\theta) + isen(k\theta))$$

Además, podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha/r & \beta/r \\ -\beta/r & \alpha/r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vamos a probar por inducción sobre k, la conclusión del lema. Para $n = 2$ se tiene

$$A^2 = r^2\begin{pmatrix} cos^2\theta - sen^2\theta & 2cos\theta sen\theta \\ -2cos\theta sen\theta & cos^2\theta - sen^2\theta \end{pmatrix}$$

Atendiendo a las identidades

$$sen\theta_1 cos\theta_2 \pm cos\theta_1 sen\theta_2 = sen(\theta_1 \pm \theta_2) \tag{3.1}$$

$$cos\theta_1 cos\theta_2 \mp sen\theta_1 sen\theta_2 = cos(\theta_1 \pm \theta_2) \tag{3.2}$$

cuando $\theta_1 = \theta_2$, se concluye que

$$A^2 = r^2\begin{pmatrix} cos(2\theta) & sen(2\theta) \\ -sen(2\theta) & cos(2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(z^2) & Im(z^2) \\ -Im(z^2) & Re(z^2) \end{pmatrix}.$$

Para $n = 3$ se tiene

$$\begin{aligned} A^3 = A^2 \cdot A &= r^2\begin{pmatrix} cos(2\theta) & sen(2\theta) \\ -sen(2\theta) & cos(2\theta) \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \\ &= r^3\begin{pmatrix} cos(2\theta)cos\theta - sen(2\theta)sen\theta & cos(2\theta)sen\theta + sen(2\theta)cos\theta \\ -(cos(2\theta)sen\theta + sen(2\theta)cos\theta) & cos(2\theta)cos\theta - sen(2\theta)sen\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por las identidades (3.1) y (3.2) se obtiene

$$A^3 = r^3\begin{pmatrix} cos(3\theta) & sen(3\theta) \\ -sen(3\theta) & cos(3\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(z^3) & Im(z^3) \\ -Im(z^3) & Re(z^3) \end{pmatrix}.$$

Ahora, suponemos que se cumple para $n = k$, es decir

$$A^k = \begin{pmatrix} r^k cos(k\theta) & r^k sen(k\theta) \\ -r^k sen(k\theta) & r^k cos(k\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(z^k) & Im(z^k) \\ -Im(z^k) & Re(z^k) \end{pmatrix}$$

probaremos que se cumple para $n = k + 1$. A saber,

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^k \cdot A &= r^k\begin{pmatrix} cos(k\theta) & sen(k\theta) \\ -sen(k\theta) & cos(k\theta) \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= r^{k+1}\begin{pmatrix} cos(k\theta)cos\theta - sen(k\theta)sen\theta & cos(k\theta)sen\theta + sen(k\theta)cos\theta \\ -(cos(k\theta)sen\theta + sen(k\theta)cos\theta) & cos(k\theta)cos\theta - sen(k\theta)sen\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de nuevo, por las identidades (3.1) y (3.2) se concluye que

$$A^{k+1} = r^{k+1} \begin{pmatrix} cos[(k+1)\theta] & sen[(k+1)\theta] \\ -sen[(k+1)\theta] & cos[(k+1)\theta] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(z^{k+1}) & Im(z^{k+1}) \\ -Im(z^{k+1}) & Re(z^{k+1}) \end{pmatrix}$$

lo cual prueba el lema. ■

Lema 3.3.2 *Sean*

$$A_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix}$$

Con $\beta \neq 0$ y $\mathbf{b} \neq 0$. Entonces $\mathbf{b}, A\mathbf{b}$, son linealmente independientes mientras que $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^k\mathbf{b}$ no lo son para $k \geq 2$.

Demostración.

Veamos una combinación lineal $c_1\mathbf{b} + c_2 A\mathbf{b} = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= c_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix} \\
&= c_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 \\ -\beta b_1 + \alpha b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} \\ -\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n} \end{pmatrix} \\
&= c_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} \\ \alpha b_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta b_2 \\ -\beta b_1 \\ \vdots \\ \beta b_{2n} \\ -\beta b_{2n-1} \end{pmatrix} \right) \\
&= c_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix} + c_2\alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix} + c_2\beta \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ \vdots \\ b_{2n} \\ -b_{2n-1} \end{pmatrix} \\
&= (c_1 + c_2\alpha) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix} + c_2\beta \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ \vdots \\ b_{2n} \\ -b_{2n-1} \end{pmatrix} \\
&= (c_1 + c_2\alpha)\mathbf{b} + c_2\beta\mathbf{b}' = 0
\end{aligned}$$

observemos que $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ son ortogonales, luego, son linealmente independientes, por tanto, para que ésta ecuación sea cero, $c_1 + c_2\alpha = 0$ y $c_2\beta = 0$, pero $\beta \neq 0$, entonces $c_2 = 0$, así $c_1 = 0$.

Falta probar que $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^k\mathbf{b}$ no son linealmente independientes para $k \geq 2$. Se tiene por el lema 3.3.1 que

$$A^k = \begin{pmatrix} Re(z^k) & Im(z^k) & \cdots & 0 & 0 \\ -Im(z^k) & Re(z^k) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Re(z^k) & Im(z^k) \\ 0 & 0 & \cdots & -Im(z^k) & Re(z^k) \end{pmatrix}$$

con $z = \alpha + i\beta$, por tanto

$$\begin{aligned}
A^k\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} Re(z^k)b_1 + Im(z^k)b_2 \\ -Im(z^k)b_1 + Re(z^k)b_2 \\ \vdots \\ Re(z^k)b_{2n-1} + Im(z^k)b_{2n} \\ -Im(z^k)b_{2n-1} + Re(z^k)b_{2n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Re(z^k)b_1 \\ Re(z^k)b_2 \\ \vdots \\ Re(z^k)b_{2n-1} \\ Re(z^k)b_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Im(z^k)b_2 \\ -Im(z^k)b_1 \\ \vdots \\ Im(z^k)b_{2n} \\ -Im(z^k)b_{2n-1} \end{pmatrix} \\
&= Re(z^k)\mathbf{b} + Im(z^k)\mathbf{b}'.
\end{aligned}$$

Por otro lado, al poner en combinación lineal $\mathbf{b}$ y $A\mathbf{b}$ se obtiene

$$c_1\mathbf{b} + c_2A\mathbf{b} = c_1\mathbf{b} + c_2(\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{b}') = c_1\mathbf{b} + c_2\alpha\mathbf{b} + c_2\beta\mathbf{b}' = (c_1 + c_2\alpha)\mathbf{b} + c_2\mathbf{b}'$$

si $c_2 = Im(z^k)$ y $c_1 = Re(z^k) - Im(z^k)\alpha$ concluimos que $A^k\mathbf{b}$ se puede poner en combinación lineal de $\mathbf{b}$, $A\mathbf{b}$, por tanto $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^k\mathbf{b}$ no son linealmente independientes para $k \geq 2$. ■

En pocas palabras, este lema nos indica que el índice de controlabilidad del sistema de control principal es $q = 1$.

Lema 3.3.3. *Sean*

$$A_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix},$$

entonces $[A\mathbf{b}]_{\overline{\mathbb{C}}} = A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}}\mathbf{b}_{\overline{\mathbb{C}}}$.

Demostración.

$$[A\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 \\ -\beta b_1 + \alpha b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} \\ -\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n} \end{pmatrix}$$

entonces

$$[A\mathbf{b}]_{\overline{\mathbb{C}}} = \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 + i(-\beta b_1 + \alpha b_2) \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} + i(-\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n}) \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\mathbf{b}_{\overline{\mathbb{C}}} = \begin{pmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{pmatrix}$$

y la multiplicación

$$\begin{aligned} A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}} \mathbf{b}_{\overline{\mathbb{C}}} &= \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha b_1 + i\alpha b_2 - i\beta b_1 + \beta b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + i\alpha b_{2n} - i\beta b_{2n-1} + \beta b_{2n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 + i(-\beta b_1 + \alpha b_2) \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} + i(-\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n}) \end{pmatrix} = [A\mathbf{b}]_{\overline{\mathbb{C}}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nótese que $[B\,AB] = [B\,\beta B']$ (es decir, el espacio generado por $B\,AB$ es igual al espacio generado por $B\,\beta B'$), pues si elegimos un elemento $\mathbf{b} \in B$ y $A\mathbf{b} \in AB$ y los expresamos como combinación lineal, se tiene

$$c_1\mathbf{b} + c_2A\mathbf{b} = c_1\mathbf{b} + c_2(\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{b}') = (c_1 + c_2\alpha)\mathbf{b} + c_2\beta\mathbf{b}'$$

la cual, la parte derecha es una combinación lineal de elementos de $[B\,B']$ (es decir $\mathbf{b} \in B$ y $\mathbf{b}' \in \beta B'$).

Lema 3.3.4. *Sea A una matriz de tamaño $2n \times 2n$, como en el lema anterior y B una matriz de tamaño $2n \times m$ tal que Rango$[B\,AB] = 2n$. Entonces existen n vectores $\mathbf{b}_{j_1}, ..., \mathbf{b}_{j_n}$, tales que $\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}'_{j_1} ..., \mathbf{b}_{j_n}, \mathbf{b}'_{j_n}$ son linealmente independientes, donde*

$$\mathbf{b}_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)\,k} \\ b_{(2n)\,k} \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{b}'_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{2k} \\ -b_{1k} \\ \vdots \\ b_{(2n)\,k} \\ -b_{(2n-1)\,k} \end{pmatrix}.$$

Para $j_k = 1, \ldots, n$.

Demostración. Podemos elegir $\mathbf{b}_1$ de $C = [B\,AB]$ y su correspondiente $\mathbf{b}'_1$ también en C, éstos son linealmente independientes, pues $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}'_1$. Ahora elegimos un $\mathbf{b}_2$ tal que sea linealmente independiente con $\mathbf{b}'_1$ y $\mathbf{b}_1$. Tomamos $\mathbf{b}'_2$ correspondiente a $\mathbf{b}_2$ y formamos la matriz

$$\widetilde{C} = [\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}'_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}'_2] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{12} & b_{22} \\ b_{21} & -b_{11} & b_{22} & -b_{12} \\ b_{31} & b_{41} & b_{32} & b_{42} \\ b_{41} & -b_{31} & b_{42} & -b_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(2n-1)1} & b_{(2n)1} & b_{(2n-1)2} & b_{(2n)2} \\ b_{(2n)1} & -b_{(2n-1)1} & b_{(2n)2} & -b_{(2n-1)2} \end{pmatrix}$$

Por definición, $\widetilde{C}$ tiene asociada una transformación lineal T, con respecto a una base $\mathscr{B}$. Además, existe una base $\mathscr{B}'$ tal que al hacer el cambio de coordenadas, la matriz nos queda de la forma

$$\widetilde{C}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = [\widetilde{\mathbf{b}}_1\, \widetilde{\mathbf{b}'}_1\, \widetilde{\mathbf{b}}_2\, \widetilde{\mathbf{b}'}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b'_{12} & b'_{22} \\ 0 & 1 & b'_{22} & -b'_{12} \\ 0 & 0 & b'_{32} & b'_{42} \\ 0 & 0 & b'_{42} & -b'_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b'_{(2n-1)2} & b'_{(2n)2} \\ 0 & 0 & b'_{(2n)2} & -b'_{(2n-1)2} \end{pmatrix}$$

$\widetilde{\mathbf{b}}_1$ y $\widetilde{\mathbf{b}'}_1$ de esta forma, pues $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}'_1$ son ortogonales, lo mismo con $\widetilde{\mathbf{b}}_2$ y $\widetilde{\mathbf{b}'}_2$. Así al poner $\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}'}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2$ y $\widetilde{\mathbf{b}'}_2$ en combinación lineal tenemos

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} b'_{12} \\ b'_{22} \\ b'_{32} \\ b'_{42} \\ \vdots \\ b'_{(2n-1)\,2} \\ b'_{(2n)\,2} \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} b'_{22} \\ -b'_{12} \\ b'_{42} \\ -b'_{32} \\ \vdots \\ b'_{(2n)\,2} \\ -b'_{(2n-1)\,2} \end{pmatrix} = 0.$$

Teniendo que resolver el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 b'_{12} + c_4 b'_{22} &= 0 \\ c_2 + c_3 b'_{22} - c_4 b'_{12} &= 0 \\ c_3 b'_{32} + c_4 b'_{42} &= 0 \\ c_3 b'_{42} - c_4 b'_{32} &= 0 \\ &\vdots \\ c_3 b'_{(2n-1)\,2} + c_4 b'_{(2n)\,2} &= 0 \\ c_3 b'_{(2n)\,2} - c_4 b'_{(2n-1)\,2} &= 0 \end{aligned}$$

La independencia lineal queda invariante mediante el cambio de base, tenemos que $\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}'}_1$ y $\widetilde{\mathbf{b}}_2$ son linealmente independientes. Entonces, algún $b'_{i\,2} \neq 0$ con $i = 3, ..., 2n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $b'_{32} \neq 0$. De la cuarta ecuación tenemos

$$c_4 = c_3 \frac{b'_{42}}{b'_{32}}.$$

Sustituyéndola en la tercera ecuación tenemos

$$c_3\left(b'_{32}+\frac{b'_{42}}{b'_{32}}\right)=0.$$

Entonces $c_3=0$ pues $b'_{32}\neq 0$. Así, $c_4=0$ y $c_1=c_2=0$. Así $\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}'}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2$ y $\widetilde{\mathbf{b}'}_2$ son linealmente independientes, por tanto $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}'_2$ son linealmente independientes.

De nuevo, podemos elegir un $\mathbf{b_3}$ de tal forma que sea linealmente independiente con $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}'_2$, tomamos su ortogonal $\mathbf{b'_3}$ y formamos la matriz

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= [\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}'_1\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{b}'_2\,\mathbf{b}_3\,\mathbf{b}'_3]\\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{12} & b_{22} & b_{13} & b_{23}\\ b_{21} & -b_{11} & b_{22} & -b_{12} & b_{23} & -b_{13}\\ b_{31} & b_{41} & b_{32} & b_{42} & b_{33} & b_{43}\\ b_{41} & -b_{31} & b_{42} & -b_{32} & b_{43} & -b_{33}\\ b_{51} & b_{61} & b_{52} & b_{62} & b_{53} & b_{63}\\ b_{61} & -b_{51} & b_{62} & -b_{52} & b_{63} & -b_{53}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{(2n-1)1} & b_{(2n)1} & b_{(2n-1)2} & b_{(2n)2} & b_{(2n-1)3} & b_{(2n)3}\\ b_{(2n)1} & -b_{(2n-1)1} & b_{(2n)2} & -b_{(2n-1)2} & b_{(2n)3} & b_{(2n-1)3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

De nuevo, $\widetilde{C}$ tiene asociada una transformación lineal T (no necesariamente la misma) con respecto a una base $\mathscr{B}$. Así, existe una base $\mathscr{B}'$ tal que al hacer el cambio de coordenadas, la matriz nos queda

$$\widetilde{C}=[\widetilde{\mathbf{b}}_1\,\widetilde{\mathbf{b}'}_1\,\widetilde{\mathbf{b}}_2\,\widetilde{\mathbf{b}'}_2\,\widetilde{\mathbf{b}}_3\,\widetilde{\mathbf{b}'}_3]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b'_{13} & b'_{23}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & b'_{23} & -b'_{13}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & b'_{33} & b'_{43}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_{43} & -b'_{33}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{53} & b'_{63}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{63} & -b'_{53}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{(2n-1)3} & b'_{(2n)3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{(2n)3} & b'_{(2n-1)3} \end{pmatrix}$$

Y al poner cada una de los vectores como combinación lineal

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+c_5\begin{pmatrix}b'_{13}\\b'_{23}\\b'_{33}\\b'_{43}\\b'_{53}\\b'_{63}\\\vdots\\b'_{(2n-1)\,3}\\b'_{(2n)\,3}\end{pmatrix}+c_6\begin{pmatrix}b'_{23}\\-b'_{13}\\b'_{43}\\-b'_{33}\\b'_{63}\\-b'_{53}\\\vdots\\b'_{(2n)\,3}\\-b'_{(2n-1)\,3}\end{pmatrix}=0.$$

Entonces, el sistema a resolver es

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_5 b'_{13} + c_6 b'_{23} &= 0 \\
c_2 + c_5 b'_{23} - c_6 b'_{13} &= 0 \\
c_3 + c_5 b'_{33} + c_6 b'_{43} &= 0 \\
c_4 + c_5 b'_{43} - c_4 b'_{33} &= 0 \\
c_5 b'_{53} + c_6 b'_{63} &= 0 \\
c_5 b'_{63} - c_6 b'_{53} &= 0 \\
&\vdots \\
c_5 b'_{(2n-1)\,3} + c_6 b'_{(2n)\,3} &= 0 \\
c_5 b'_{(2n)\,3} - c_6 b'_{(2n-1)\,3} &= 0.
\end{aligned}
$$

Como la independencia lineal permanece invariante mediante el cambio de coordenadas, tenemos que $\widetilde{\mathbf{b}}_3$ es linealmente independiente con $\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}'}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2$ y $\widetilde{\mathbf{b}'}_2$, entonces algún $b'_{i\,3} \neq 0$, para $i \geq 5$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $b'_{5\,3} \neq 0$. Así, de la sexta ecuación tenemos

$$c_6 = c_5 \frac{b'_{63}}{b'_{53}}$$

y sustituyéndola en la tercera ecuación nos queda

$$c_5 \left(b'_{53} + \tfrac{(b'_{63})^2}{b'_{53}} \right) = 0$$

entonces $c_5 = 0$ pues $b'_{53} \neq 0$. Así, $c_6 = 0$ y $c_4 = c_3 = c_2 = c_1 = 0$. Así, $\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}'}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2, \widetilde{\mathbf{b}'}_2, \widetilde{\mathbf{b}}_3$ y $\widetilde{\mathbf{b}'}_3$ son linealmente independientes, por tanto $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}_3$ y $\mathbf{b}'_3$ son linealmente independientes.

Procediendo con ésta elección inductivamente, suponemos que $\mathbf{b_1}, \mathbf{b'_1}, ..., \mathbf{b_{n-1}}, \mathbf{b'_{n-1}}$ son linealmente independientes, con ésta construcción. Sea $\mathbf{b_n}$ linealmente independiente con $\mathbf{b_1}, \mathbf{b'_1}, ..., \mathbf{b_{n-1}}, \mathbf{b'_{n-1}}$. Entonces, sea $\mathbf{b'_n}$ el correspondiente ortogonal a $\mathbf{b_n}$ y formamos la matriz

$$
\begin{aligned}
\widetilde{C} &= [\mathbf{b_1}\, \mathbf{b'_1}\, \cdots\, \mathbf{b_n}\, \mathbf{b'_n}] \\
&= \begin{pmatrix}
b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1(n-1)} & b_{2(n-1)} & b_{1n} & b_{2n} \\
b_{21} & -b_{11} & \cdots & b_{2(n-1)} & -b_{1(n-1)} & b_{2n} & -b_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{(2n-3)\,1} & b_{(2n-2)\,1} & \cdots & b_{(2n-3)\,(n-1)} & b_{(2n-2)\,(n-1)} & b_{(2n-3)\,n} & b_{(2n-2)\,n} \\
b_{(2n-2)\,1} & -b_{(2n-3)\,1} & \cdots & b_{(2n-2)\,(n-1)} & -b_{(2n-3)\,(n-1)} & b_{(2n-2)\,n} & -b_{(2n-3)\,n} \\
b_{(2n-1)\,1} & b_{(2n)\,1} & \cdots & b_{(2n-1)\,(n-1)} & b_{(2n)\,(n-1)} & b_{(2n-1)\,n} & b_{(2n)\,n} \\
b_{(2n)\,1} & -b_{(2n-1)\,1} & \cdots & b_{(2n)\,(n-1)} & -b_{(2n-1)\,(n-1)} & b_{(2n)\,n} & -b_{(2n-1)\,n}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Como se hizo anteriormente, ésta matriz tiene asociada una transformación lineal T con respecto a una base $\mathscr{B}$. Así, existe una base $\mathscr{B}'$, para el cual el cambio de coordenadas nos deja la matriz de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\widetilde{C}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} &= [\widetilde{\mathbf{b}}_1\,\widetilde{\mathbf{b}'}_1\,\cdots\,\widetilde{\mathbf{b}}_n\,\widetilde{\mathbf{b}'}_n] \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{1n} & b'_{2n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b'_{2n} & -b'_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b'_{(2n-3)\,n} & b'_{(2n-2)\,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b'_{(2n-2)\,n} & -b'_{(2n-3)\,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{(2n-1)\,n} & b'_{(2n)\,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{(2n)\,n} & -b'_{(2n-1)\,n}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Al poner los vectores como combinación lineal

$$
c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+c_{n-3}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_{n-2}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_{n-1}\begin{pmatrix}b'_{1n}\\b'_{2n}\\\vdots\\b'_{(2n-3)\,n}\\b'_{(2n-2)\,n}\\b'_{(2n-1)\,n}\\b'_{(2n)\,n}\end{pmatrix}+c_n\begin{pmatrix}b'_{2n}\\-b'_{1n}\\\vdots\\b'_{(2n-2)\,n}\\-b'_{(2n-3)\,n}\\b'_{(2n)\,n}\\-b'_{(2n-1)\,n}\end{pmatrix}=0
$$

Por tanto, el sistema que tenemos que resolver es

$$
\begin{aligned}
c_1+c_{n-1}b'_{1n}+c_nb'_{2n} &= 0\\
c_2+c_{n-1}b'_{2n}-c_nb'_{1n} &= 0\\
&\vdots\\
c_{n-3}+c_{n-1}b'_{(2n-3)\,n}+c_nb'_{(2n-2)\,n} &= 0\\
c_{n-2}+c_{n-1}b'_{(2n-2)\,n}-c_nb'_{(2n-3)\,n} &= 0\\
c_{n-1}b'_{(2n-1)\,n}+c_nb'_{(2n)\,n} &= 0\\
c_{n-1}b'_{(2n)\,n}-c_nb'_{(2n-1)\,n} &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo dicho anteriormente, el cambio de coordenadas conserva independencia lineal, por tanto $\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}'}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}_n$ y $\widetilde{\mathbf{b}'}_n$ son linealmente independientes. por tanto, $b'_{(2n-1)\,n} \neq 0$ ó bien $b'_{(2n)\,n} \neq 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $b'_{(2n-1)\,n} \neq 0$. De la $2n$-ésima ecuación tenemos

$$
c_n = c_{n-1}\frac{b'_{(2n)\,n}}{b'_{(2n-1)\,n}}
$$

y sustituyéndola en la $(2n-1)$-ésima ecuación tenemos

$$
c_{n-1}\left(b'_{(2n-1)\,n}+\frac{(b'_{(2n)\,n})^2}{b'_{(2n-1)\,n}}\right)=0.
$$

Así, $c_{n-1}=0$ pues $b'_{(2n-1)\,n}\neq 0$. Entonces $c_n=0$, y así $c_1=\cdots=c_{n-2}=0$.

Por tanto los $2n$ vectores linealmente independientes para que $Rango(C) = 2n$ son $\mathbf{b}_1, \mathbf{b'}_1, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{b'}_n$. ■

Estos resultados son suficientes para la demostración del teorema principal.

Teorema 3.3.1. *Sean*

$$A_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, B_{2n\times m} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{2n1} & b_{2n2} & \cdots & b_{2nm} \end{pmatrix}$$

El sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ es ***controlable*** *y* ***CCP*** *si y solo si*
$< B_{\overline{\mathbb{C}}} >= \mathbb{C}^n$. Más aún, el número de controles necesarios y suficientes para el sistema son n.

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$Rango_{\mathbb{R}}(C = [BAB \cdots A^k B]) = 2n \Longleftrightarrow Rango_{\mathbb{C}}(B_{\overline{\mathbb{C}}}) = n$$

es decir

$$< B_{\overline{\mathbb{C}}} >= \mathbb{C}^n.$$

Haremos primero la implicación ($\Leftarrow$), supongamos que $Rango_{\mathbb{C}}(B_{\overline{\mathbb{C}}}) = n$

Sean $\mathbf{b}_{1\overline{\mathbb{C}}}, \mathbf{b}_{2\overline{\mathbb{C}}}, ..., \mathbf{b}_{n\overline{\mathbb{C}}}$ los n vectores complejificados linealmente independientes, enseguida tomamos los vectores cuya complejificación es la de estos y formamos el conjunto

$$\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, A\mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n, A\mathbf{b}_n$$

Ahora, para ver que son $\mathbb{R}$ linealmente independientes, fijemonos una combinación lineal

$$c_{11}\mathbf{b}_1 + c_{12}A\mathbf{b}_1 + c_{21}\mathbf{b}_2 + c_{22}A\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbf{b}_n + c_{n2}A\mathbf{b}_n = 0$$

Al complejificar, por el lema 3.3.3 tenemos que

$$\begin{aligned} c_{11}\mathbf{b}_{1\overline{\mathbb{C}}} &+ c_{12}[A\mathbf{b}_1]_{\overline{\mathbb{C}}} + c_{21}\mathbf{b}_{2\overline{\mathbb{C}}} + c_{22}[A\mathbf{b}_2]_{\overline{\mathbb{C}}} + \cdots + c_{n1}\mathbf{b}_{n\overline{\mathbb{C}}} + c_{n2}[A\mathbf{b}_n]_{\overline{\mathbb{C}}} = \\ = c_{11}\mathbf{b}_{1\overline{\mathbb{C}}} &+ c_{12}A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}}\mathbf{b}_{1\overline{\mathbb{C}}} + c_{21}\mathbf{b}_{2\overline{\mathbb{C}}} + c_{22}A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}}\mathbf{b}_{2\overline{\mathbb{C}}} + \cdots + c_{n1}\mathbf{b}_{n\overline{\mathbb{C}}} + c_{n2}A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}}\mathbf{b}_{n\overline{\mathbb{C}}} = 0 \end{aligned}$$

dado que

$$A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}} = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha - i\beta \end{pmatrix} = (\alpha - i\beta)I_{n\times n}$$

y $\mathbf{b}_{j\overline{\mathbb{C}}}$, $j = 1, \ldots n$, es un vector de n entradas, entonces se tiene que

$$A_{\underset{\mathbb{C}}{\square}}\mathbf{b}_{j\overline{\mathbb{C}}} = (\alpha - i\beta)\mathbf{b}_{j\overline{\mathbb{C}}}$$

factorizando nos queda

$$[c_{11} + c_{12}(\alpha - i\beta)]\mathbf{b}_{1\mathbb{C}} + \cdots + [c_{n1} + c_{n2}(\alpha - i\beta)]\mathbf{b}_{n\mathbb{C}} = 0$$

como los vectores $\mathbf{b}_{j\overline{\mathbb{C}}}$, $j = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}$, se tiene que $c_{j1} + c_{j2}(\alpha - i\beta) = 0$, por otro lado tenemos que $c_{j1}, c_{j2} \in \mathbb{R}$ y $\beta \neq 0$, entonces $c_{j1} + c_{j2}(\alpha - i\beta) = 0$ si $c_{j1} = -c_{j2}(\alpha - i\beta)$, es decir, con $c_{j2} \in \mathbb{C}$, por tanto, $c_{j2} = 0$ en $\mathbb{R}$. Así, se concluye que $\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, A\mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n, A\mathbf{b}_n$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Ahora, para la implicación $(\Rightarrow)$, suponemos que la matriz de controlabilidad

$$C = [B \; AB \; \cdots A^{2n-1}B]$$

tiene rango $2n$. Tenemos, por el lema 3.3.4 que, los $2n$ vectores linealmente independientes son $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_1'}, \ldots, \mathbf{b_n}, \mathbf{b_n'}$, de los cuales tomaremos $\mathbf{b_1}, \cdots, \mathbf{b_n}$, donde

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1\,k} \\ b_{2\,k} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)\,k} \\ b_{(2n)\,k} \end{pmatrix}$$

Para $k = 1, \ldots, n$. Y, al complejificar

$$\mathbf{b}_{\overline{\mathbb{C}}\,k} = \begin{pmatrix} b_{1k} + ib_{2k} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)\,k} + ib_{(2n)\,k} \end{pmatrix}$$

Sean $z_1, \ldots, z_n$ números en $\mathbb{C}$ y ponemos como combinación lineal los vectores complejificados

$$z_1 \begin{pmatrix} b_{11} + ib_{21} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)\,1} + ib_{(2n)\,1} \end{pmatrix} + \cdots + z_n \begin{pmatrix} b_{1n} + ib_{2n} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)\,n} + ib_{(2n)\,n} \end{pmatrix} = 0$$

entonces, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{array}{rcl} z_1(b_{11} + ib_{21}) + & \cdots & + z_n(b_{1n} + ib_{2n}) = 0 \\ & \vdots & \\ z_1(b_{(2n-1)\,1} + ib_{(2n)\,1}) + & \cdots & + z_n(b_{(2n-1)\,n} + ib_{(2n)\,n}) = 0 \end{array}$$

Si $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, ..., n$, el sistema queda

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_1 + i\beta_1)(b_{11} + ib_{21}) + & \cdots & + (\alpha_n + i\beta_n)(b_{1n} + ib_{2n}) = 0 \\ & \vdots & \\ (\alpha_1 + i\beta_1)(b_{(2n-1)\,1} + ib_{(2n)\,1}) + & \cdots & + (\alpha_n + i\beta_n)(b_{(2n-1)\,n} + ib_{(2n)\,n}) = 0 \end{array}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$ y $k = 1, \ldots, n$ hacemos la multiplicación de los números complejos

$$(\alpha_k + i\beta_k)(b_{(2j-1)\,k} + ib_{(2j)\,k}) = (\alpha_k b_{(2j-1)k} - \beta_k b_{(2j)k}) + i(\alpha_k b_{(2j)k} + \beta_k b_{(2j-1)k})$$

así, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(\alpha_1 b_{11} - \beta_1 b_{21}) + i(\alpha_1 b_{21} + \beta_1 b_{11}) + \quad \cdots \quad &+ (\alpha_n b_{1n} - \beta_n b_{2n}) + i(\alpha_n b_{2n} + \beta_n b_{1n}) = 0 \\ &\vdots \\ (\alpha_1 b_{(2n-1)1} - \beta_1 b_{(2n)1}) + i(\alpha_1 b_{(2n)1} + \beta_1 b_{(2n-1)1}) + \quad \cdots \quad &+ (\alpha_n b_{(2n-1)n} - \beta_n b_{(2n)n}) + i(\alpha_n b_{(2n)n} + \beta_n b_{(2n-1)n}) = 0\end{aligned}$$

Pero tenemos que si $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = 0$, entonces $Re(z) = 0$ y $Im(z) = 0$. Así, separamos la parte real y la parte compleja del sistema para obtener

$$\begin{aligned}\alpha_1 b_{11} - \beta_1 b_{21} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{1n} - \beta_n b_{2n} = 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 b_{(2n-1)1} - \beta_1 b_{(2n)1} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{(2n-1)n} - \beta_n b_{(2n)n} = 0 \\ \alpha_1 b_{21} + \beta_1 b_{11} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{2n} + \beta_n b_{1n} = 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 b_{(2n)1} + \beta_1 b_{(2n-1)1} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{(2n)n} + \beta_n b_{(2n-1)n} = 0\end{aligned}$$

donde las primeras n ecuaciones son la parte real del sistema y las n restantes son la parte imaginaria del mismo. Ahora, acomodamos los renglones del sistema para obtener

$$\begin{aligned}\alpha_1 b_{11} - \beta_1 b_{21} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{1n} - \beta_n b_{2n} = 0 \\ \alpha_1 b_{21} + \beta_1 b_{11} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{2n} + \beta_n b_{1n} = 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 b_{(2n-1)1} - \beta_1 b_{(2n)1} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{(2n-1)n} - \beta_n b_{(2n)n} = 0 \\ \alpha_1 b_{(2n)1} + \beta_1 b_{(2n-1)1} + \quad \cdots \quad &+ \alpha_n b_{(2n)n} + \beta_n b_{(2n-1)n} = 0\end{aligned}$$

y esto es

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)\,1} \\ b_{(2n)\,1} \end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix} b_{21} \\ -b_{11} \\ \vdots \\ b_{(2n)\,1} \\ -b_{(2n-1)\,1} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)\,n} \\ b_{(2n)\,n} \end{pmatrix} - \beta_n \begin{pmatrix} b_{2n} \\ -b_{1n} \\ \vdots \\ b_{(2n)\,n} \\ -b_{(2n-1)\,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \mathbf{b_1} - \beta_1 \mathbf{b_1'} + \cdots + \alpha_n \mathbf{b_n} - \beta_n \mathbf{b_n'} = 0.$$

Dado que $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_1'}, \ldots, \mathbf{b_n}, \mathbf{b_n'}$ son linealmente independientes, se obtiene que $\alpha_k = \beta_k = 0$ para $k = 1, \ldots, n$, esto es $z_k = \alpha_k + i\beta_k = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Por tanto $\mathbf{b_{\overline{\mathbb{C}}k}}$, $k = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes, luego $< B_{\overline{\mathbb{C}}} >= \mathbb{C}^n$. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] R.F. Brammer. “Controlability in linear autonomous systems with positive controllers”. SIAM J. Control, Vol. 10, No. 2, pp. 339-353. mayo 1972.

[2] Martín E. Frías A., Fernando Verduzco G., Horacio Leyva C. F. Armando Carrillo N. “On positive controllables systems ”(en español). Proc AMCA. México D.F. 2004.

[3] Martín E. Frías A., Fernando Verduzco G., Horacio Leyva C. F. Armando Carrillo N. “On Controllability of linear systems with positive control”. Proc 16vo congreso mundial IFAC Republica Checa. 2005.

[4] Martín E. Frías A., Fernando Verduzco G., Horacio Leyva C. F. Armando Carrillo N. “A negative Crieterion for controllability”, en proceso para su publicación a revista arbitrada.

[5] Lang, Serge. “Álgebral Lineal”, Versión en Español. Yale University. Fondo educativo interamericano.

[6] Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman. “Análisis básico de análisis complejo”, primera edición en español. 1996. Editorial trillas.

[7] W. R. Derrick, S. I. Grossman. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones”, versión en español. University of Montana. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

[8] W. Murray Wonham. “Linear Multivariable Control: A geometric approach”. Springer-Verlag. 1985.

[9] F. Verduzco G. “Tópicos de Control Lineal”. Notas de clase. Universidad de Sonora. 2000.