

BIBLIOTECA CIENCIAS  
EXACTAS Y NATURALES

QA405  
.G65



15/T1197

*EL SABER DE MIS HIJOS  
HARÁ MI GRANDEZA*

**UNIVERSIDAD DE SONORA**

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**ESTUDIOS ANALÍTICOS DE  
LA ECUACIÓN DE MATHIEU**

**T E S I S**

Que para obtener el título de:  
**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

P r e s e n t a

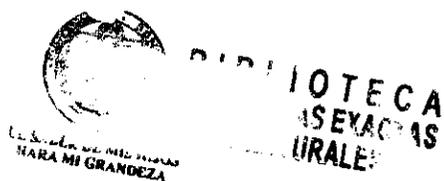
**JUAN CARLOS GONZÁLEZ AISPURO**

Directora de Tesis:

**DRA. INNA K. SHINGAREVA**

Hermosillo, Sonora, México

Febrero 2007



# Estudios Analíticos de la Ecuación de Mathieu

*Juan Carlos González Aispuro*

Este trabajo está dedicado a muchas personas, principalmente a  
*Doña Martha y Don Humberto,*  
mis padres, y a toda mi familia, también una dedicación especial  
y agradecimiento a mi directora de tesis y amiga, la  
*Dra. Inna Konstantinovna Shingareva,*  
gracias por su paciencia y por su tiempo a la hora de la  
realización de este trabajo.

También este trabajo está dedicado a mi hermano y mis amigos  
de toda la vida,  
*el Mayque, el Charly, el Jechu, Mario, el Rancho y el Mayoral*  
y por su puesto, a mis amigos matemáticos,  
*Rita, Jessica, Marysol, Enrique, Mishael (ambos), Eduardo,*  
*Miguel, Manuel, el Niño, Angelita, Salomón, Inés,*  
en fin a todos lo que tuve la oportunidad de conocer a lo largo de  
la carrera, a todos ellos gracias por brindarme su amistad.  
Tampoco puedo dejar de agradecer y dedicar este trabajo a uno  
de mis maestros favoritos al que considero un amigo, el  
*Dr. Martín Gildardo García Alvarado,*  
gracias por ser como es.

# Prefacio

Este trabajo trata sobre un estudio analítico de la ecuación de Mathieu. Se trabaja en esta ecuación en diferentes aspectos, llamense Teoría de Floquet aplicada a sistemas lineales y diversas propiedades de estos, las cuales serán de mucha ayuda para llegar a uno de los teoremas más importantes de esta teoría: el Teorema de Floquet–Lyapounov, Teoría de perturbaciones aplicada a la ecuación de Mathieu, y la aplicación de álgebra computacional con la cual se resolverán problemas que servirán para investigaciones futuras y aplicaciones de los conocimientos recién adquiridos.

El objetivo de este trabajo es dejar una idea de cómo es el comportamiento, las soluciones y las aplicaciones de la ecuación de Mathieu. También daremos una introducción al tema basto de las funciones de Mathieu para que el lector sepa de la importancia de estas funciones especiales tanto como soluciones de la ecuación y sus aplicaciones, ya que la ecuación de Mathieu tiene muchas aplicaciones en Física.

En el Capítulo 1 se da una reseña histórica de cómo se llega a la ecuación de Mathieu, mediante la Teoría lunar de Hill y el péndulo de longitud variable. También hablamos un poco de historia acerca de las funciones de Mathieu y temas históricos relacionados y por último damos una introducción de álgebra computacional utilizando el sistema *Maple*.

En el Capítulo 2 se estudian sistemas lineales, damos unas propiedades de estos sistemas y resolvemos algunos problemas relacionados. Demostramos unos de los teoremas más importantes de la Teoría de Floquet que es el Teorema de Floquet–Lyapounov y terminamos con una introducción a la Teoría

de perturbaciones, ya que se aplicará más adelante.

Para el Capítulo 3 vemos la Teoría de Floquet aplicada a sistemas lineales de una dimensión y sistemas multidimensionales. Hablaremos de resonancia paramétrica con el ejemplo del columpio y también daremos una referencia histórica de excitación paramétrica con *O Botafumeiro* en la edad media. Al igual que en el Capítulo 2 se resolverán algunos problemas para dejar en claro los conceptos.

En el Capítulo 4 estudiamos a grandes rasgos la ecuación de Mathieu, desde la ecuación de Hill, hasta sus soluciones, es decir, las funciones de Mathieu, pasando por casos como la ecuación de Mathieu amortiguada y un estudio de Teoría de perturbaciones para esta ecuación en particular. Con la ayuda de métodos de álgebra computacional y el sistema *Maple* obtenemos soluciones analíticas aproximadas de la ecuación de Mathieu amortiguada para casos especiales de parámetros. Aquí no está de más recordar que la ecuación de Mathieu es un caso particular de la ecuación de Hill y esta ecuación, a su vez, es un caso particular de la ecuación general de segundo orden con coeficientes periódicos.

Juan Carlos González Aispuro,

Febrero 2007

# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>5</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>9</b>
1.1 Introducción histórica . . . . .	9
1.1.1 Teoría lunar de Hill . . . . .	9
1.1.2 Problema del péndulo con longitud variable . . . . .	15
1.1.3 Funciones de Mathieu . . . . .	17
1.2 Álgebra computacional . . . . .	26
<b>2 Definiciones y teoremas</b>	<b>35</b>
2.1 Introducción. Sistemas lineales . . . . .	35
2.2 Propiedades generales . . . . .	37
2.3 Teorema de Floquet–Lyapunov . . . . .	49
2.4 Teoría de perturbaciones . . . . .	51
<b>3 Teoría de Floquet</b>	<b>55</b>
3.1 Introducción . . . . .	55
3.2 Resonancia paramétrica . . . . .	56
3.2.1 O Botafumeiro . . . . .	56
3.2.2 El columpio . . . . .	58

3.3	Sistemas lineales de dimensión uno . . . . .	60
3.4	Sistemas multidimensionales periódicos . . . . .	63
3.5	Eigenvalores reales e idénticos . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Ecuaciones de Hill y de Mathieu</b>	<b>73</b>
4.1	Ecuación de Hill . . . . .	73
4.2	La ecuación de Mathieu . . . . .	77
4.3	La ecuación de Mathieu amortiguada . . . . .	81
4.3.1	Fronteras de estabilidad . . . . .	82
4.3.2	Un ejemplo numérico . . . . .	83
4.4	Soluciones analíticas aproximadas . . . . .	87
4.4.1	El caso: $a_0 = 1, A_0 = 1, a_1 = \sqrt{1 - \mu^2}$ . . . . .	87
4.4.2	El caso: $a_0 = 1, B_0 = 1, a_1 = -\sqrt{1 - \mu^2}$ . . . . .	92
4.4.3	El caso: $a_0 = 0$ . . . . .	96
4.4.4	El caso: $a_0 = 4$ . . . . .	102
4.4.5	Método modificado: $a_0 = 4$ . . . . .	104
4.5	Funciones de Mathieu . . . . .	111
4.6	Propiedades generales . . . . .	113
	<b>Conclusiones</b>	<b>121</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>123</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción histórica

#### 1.1.1 Teoría lunar de Hill

Consideremos las ecuaciones de movimiento de dos planetas (con masa  $m_1$  y  $m_2$ ) y el Sol (con masa  $M$ ), moviéndose bajo las leyes de Newton e ignorando todos los otros efectos que influyen sobre ellos,

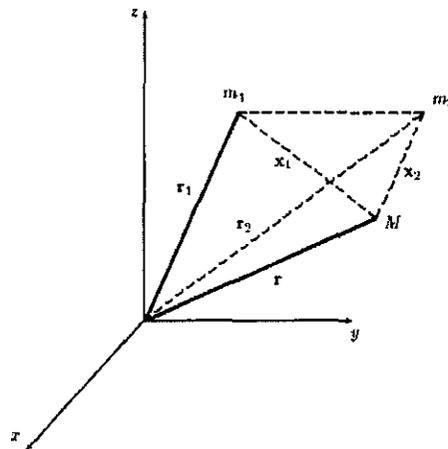


Figura 1.1 Esquema del problema de los tres cuerpos

donde  $r_1$  y  $r_2$  son los vectores de posición de los planetas y  $r$  el vector de posición del Sol. La fuerza sobre el Sol, tomando la constante de gravitación

igual a la unidad, es

$$\mathbf{F}_S = \frac{Mm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3} + \frac{Mm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^3}. \quad (1.1)$$

De esto se sigue, por la segunda ley de Newton, que la aceleración del Sol es

$$\mathbf{a}_S = \frac{m_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3} + \frac{m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^3}. \quad (1.2)$$

Si elegimos al Sol como nuestro centro de coordenadas, es decir, poniendo  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$  y  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}$ , llegamos a las ecuaciones de movimiento. La ecuación del primer planeta es

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_1 &= -\mathbf{a}_S - \frac{M\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|^3} - \frac{m_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \\ &= -\frac{(m_1 + M)\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|^3} - \frac{m_2\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|^3} - \frac{m_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .

De manera similar obtenemos la ecuación para el segundo planeta, la cual es

$$\ddot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{(m_2 + M)\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|^3} - \frac{m_1\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|^3} - \frac{m_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}. \quad (1.4)$$

Encontrar las soluciones de estas ecuaciones (1.3) y (1.4) es resolver el problema de los tres cuerpos, pero si no damos condiciones de masas y distancias el problema se vuelve imposible de resolver.

Ahora consideremos el sistema similar al anterior, pero en este caso la Tierra ejerce una fuerza mayor sobre Luna que la del Sol (ver la Figura 1.2), por tanto la ecuación de movimiento de la Luna respecto al Sol (por simplicidad consideraremos la primera coordenada) se convierte a la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{(M_{Tierra} + m_{Luna})x}{r^3} - \frac{m_{1Sol}x_1}{r_1^3} - \frac{m_{1Sol}(x - x_1)}{\Delta^3}, \quad (1.5)$$

donde  $r$  es la distancia de la Tierra a la Luna y  $r_1$  es la distancia de la Tierra al Sol.

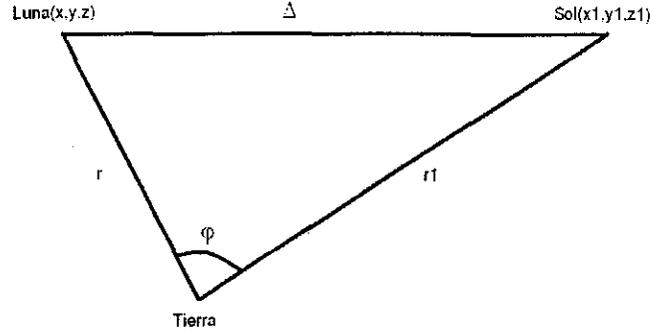


Figura 1.2 El esquema del sistema Tierra-Luna-Sol

Una de las causas de que la teoría lunar sea complicada es que el efecto del Sol en la órbita de la Luna no es despreciable.

Sea  $\varphi$  el ángulo entre  $r$  y  $r_1$ , entonces

$$rr_1 \cos \varphi = xx_1 + yy_1 + zz_1,$$

de donde se obtiene

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi.$$

Escribimos  $r = \alpha$  y como  $\alpha$  es una función del tiempo y es pequeña ( $\sim 1/400$ ), podemos hacer el siguiente desarrollo en potencias de  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r_1} (1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r_1} + \frac{\alpha \cos \varphi}{r_1} + \frac{\alpha^2}{r_1} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Definimos la siguiente función como

$$V = \frac{m(M + m)}{r} + \frac{m(m_1)}{\Delta} - \frac{m(m_1)}{r_1^3} rr_1 \cos \varphi.$$

De (1.6) y escribiendo  $\frac{m_1 r}{r_1^2} \cos \varphi$  como  $\frac{m_1 \alpha}{r} \cos \varphi$ , vemos que la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{1}{m} V = \frac{M+m}{r} + \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_1}{r_1} \alpha \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right] + \dots$$

Ya que  $\frac{m_1}{r_1}$  no depende de  $(x, y, z)$  y para nuestros fines, omitiremos este término de  $V$ , por esto el término de mayor perturbación es

$$\frac{m_1}{r_1} \alpha \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right]. \quad (1.7)$$

Comparando este término con el término principal  $\frac{M+m}{r}$  y utilizando la relación obtenida por la ecuación de Kepler,  $\mu = \text{Constante} \frac{m_s}{R_{ps}^3}$ , se tiene que el cociente es proporcional a

$$\frac{m_1}{M+m} \alpha^3 = \frac{m_1}{M+m} \frac{r^3}{r_1^3} \approx \frac{\mu_1^2}{\mu^2},$$

donde  $\mu_1$  es el movimiento medio (aproximado) del Sol (igual a uno por año), mientras que  $\mu$  es la de la Luna (igual a 12 y 13 por año). Entonces el término de mayor perturbación es de magnitud  $\frac{1}{12} \frac{1}{13}$ .

Hill en su trabajo fundamental razonó: supongamos, a primera aproximación, que podemos ignorar la excentricidad solar ( $e_1 = 0.017$ ) y la razón  $\alpha$  ( $\simeq 0.0025$ ). Estos efectos pueden ser introducidos como perturbaciones. Entonces la función de perturbación (1.7) es

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{r_1} \alpha^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right] &\simeq \frac{m_1 r^2}{a_1^3} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right], \\ &= \mu_1^2 r^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right], \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde  $a_1$  es el semieje mayor de la trayectoria del Sol.

Introduciendo las coordenadas  $X, Y, Z$ , donde  $Z = z$ , y  $X, Y$ , rotan en el plano  $xy$  con la velocidad angular  $\mu_1$ , reescribimos las ecuaciones de

movimiento en estas nuevas coordenadas. Tenemos

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos \mu_1 t & \text{sen } \mu_1 t \\ -\text{sen } \mu_1 t & \cos \mu_1 t \end{bmatrix},$$

con

$$\dot{A}(t) = \mu_1 \begin{bmatrix} -\text{sen } \mu_1 t & \cos \mu_1 t \\ -\cos \mu_1 t & -\text{sen } \mu_1 t \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \ddot{A}(t) = -\mu_1^2 A(t).$$

Y ya que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} &= \dot{A}(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A(t) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ &= \mu_1 \begin{bmatrix} Y \\ -X \end{bmatrix} + A(t) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A^{-1}(t) \begin{bmatrix} \dot{X} - \mu_1 Y \\ \dot{Y} + \mu_1 X \end{bmatrix},$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = -\mu_1^2 \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 2\dot{A}(t)A^{-1}(t) \begin{bmatrix} \dot{X} - \mu_1 Y \\ \dot{Y} + \mu_1 X \end{bmatrix} + A(t) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}.$$

Es evidente que

$$\dot{A}(t)A^{-1}(t) = \mu_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\mu_1 \frac{dY}{dt} - \mu_1^2 X &= -\frac{(M+m)X}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial X}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\mu_1 \frac{dX}{dt} - \mu_1^2 Y &= -\frac{(M+m)Y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Y}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= -\frac{(M+m)Z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde  $R \approx \mu_1 r^2 [-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi]$  es el término de mayor perturbación. Con la suposición de que la inclinación de la Luna es pequeña, se puede poner a primera aproximación  $r \cos \varphi = X$ , es decir,  $R \approx \mu_1 [-\frac{r^2}{2} + \frac{3}{2} X^2]$  con  $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$  y las primeras dos ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\mu_1 \frac{dY}{dt} - 3\mu_1^2 X + \frac{(M+m)X}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\mu_1 \frac{dX}{dt} + \frac{(M+m)Y}{r^3} &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

ya que

$$\frac{\partial R}{\partial X} = 2\mu_1^2 X, \quad \frac{\partial R}{\partial Y} = -\mu_1^2 Y, \quad \frac{\partial R}{\partial Z} = -\mu_1^2 Z.$$

Mediante el cambio de variables  $\tau = (\mu - \mu_1)t$ , las ecuaciones (1.10) se convierten en

$$\begin{aligned} X'' - 2\nu_1 Y' - 3\nu^2 X + \frac{kX}{r^3} &= 0, \\ Y'' - 2\nu X' + \frac{kY}{r^3} &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde  $\nu = \frac{\mu_1}{\mu - \mu_1} (\approx \frac{1}{12}$  en el caso de la Luna) y  $k = \frac{(M+m)}{(\mu - \mu_1)^2}$ , las cuales Hill procedió a determinar la solución periódica, guiado por el hecho de que la curva es un óvalo, haciendo

$$\begin{aligned} X(\tau) &= \sum A_n \cos[(2n+1)\omega\tau], \\ Y(\tau) &= \sum B_n \operatorname{sen}[(2n+1)\omega\tau], \end{aligned}$$

determinando los coeficientes  $A_n, B_n$ . Aquí  $\omega$  es el promedio sinódico de la Luna (el mes promedio).

Las aproximaciones de  $R$  por  $\mu_1 r^2 [-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi]$ , de  $X$  por  $r \cos \varphi$  y de  $r^2$  por  $X^2 + Y^2 + Z^2$ , se reflejan en una aproximación de las ecuaciones (1.11) por las ecuaciones (1.11) junto con la ecuación

$$Z'' + \nu^2 Z + \frac{kZ}{r^3} = 0.$$

La función  $Z \equiv 0$  es solución de esta última ecuación. Sin embargo se debe considerar el caso  $Z \approx 0$  y ver como se comporta  $Z$ , entonces las dos primeras ecuaciones de (1.9) son independientes de la tercera, y por tanto asumimos que  $X, Y$  son soluciones de (1.11). De aquí que  $X, Y$  son funciones periódicas de  $\tau$ , y consecuentemente de  $t$ . Por lo anterior la tercera ecuación de (1.9) puede ser escrita de la siguiente manera

$$\ddot{Z} + \Theta Z = 0, \quad (1.12)$$

donde  $\Theta = \nu^2 + \frac{k}{r^3}$  es una función periódica por la periodicidad de  $X, Y$ . Esta ecuación lleva el nombre de *Ecuación de Hill*.

El procedimiento que utilizó Hill para resolver esta ecuación fue poner la ecuación en series de Fourier

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{2ins} \right] Z = 0,$$

con otro cambio de variable, agrupar los términos correspondientes en potencias de la exponencial, lo cual le condujo un sistema infinito de ecuaciones lineales. El introdujo los "*determinantes infinitos*" para resolver la ecuación, lo que fue más tarde justificado por Poincaré.

### 1.1.2 Problema del péndulo con longitud variable

Consideremos ahora un péndulo de longitud variable  $A$  con una masa  $m$ , y un soporte se mueve verticalmente con un desplazamiento  $\xi(r)$ . Sus coordenadas cartesianas son las siguientes:

$$x = A \operatorname{sen} \theta, \quad (1.13)$$

$$y = \xi(t) + A \operatorname{cos}(\theta).$$

Ahora, con el fin de encontrar la ecuación de movimiento, derivaremos las ecuaciones (1.13) para obtener las energías cinética y potencial,

$$\dot{x} = A \cos(\theta), \quad (1.14)$$

$$\dot{y} = \dot{\xi} - A \sin(\theta).$$

Con (1.12) encontraremos la energía cinética, la cual se obtiene  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ , por tanto

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} [(\dot{\xi} - A \sin(\theta)\dot{\theta})^2 + A^2 \cos^2(\theta)\dot{\theta}^2] \\ &= \frac{m}{2} [\dot{\xi}^2 + A^2\dot{\theta}^2 - 2A\dot{\xi}\dot{\theta} \sin(\theta)]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ahora la energía potencial es

$$V = -mg(\xi + A \cos(\theta)). \quad (1.16)$$

Si sustituimos (1.15) y (1.16) en la ecuación de Lagrange, la cual es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

nos da

$$A\ddot{\theta} + (g - \ddot{\xi}) \sin(\theta) = 0.$$

Para amplitudes pequeñas, es decir, para  $\theta \approx 0$  podemos reescribir la ecuación anterior como

$$A\ddot{\theta} + (g - \ddot{\xi})\theta = 0.$$

A esta ecuación la podemos escribir en la forma estándar

$$\ddot{x} + (a + p(t))x = 0. \quad (1.17)$$

Cuando  $p(t)$  sea periódica, la ecuación (1.1) es la ecuación de Hill, pero si hacemos  $p(t) = -2q \cos 2t$  se tiene la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + (a - 2q \cos 2t)x = 0. \quad (1.18)$$

A la ecuación (1.18) se le llama la *ecuación de Mathieu*. Para que (1.17) sea una ecuación de Mathieu, es suficiente con que  $p(t)$  sea una función coseno.

### 1.1.3 Funciones de Mathieu

La mayoría de las funciones utilizadas en la física-matemática y las matemáticas aplicadas tuvieron origen como resultado de problemas prácticos de investigación. Las funciones de Mathieu fueron introducidas por É. Mathieu en 1868, [25], cuando determinaba los modos vibracionales de una membrana que se estira teniendo una frontera elíptica. La ecuación de onda en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0 \quad (1.19)$$

fue transformada para coordenadas elípticas (confocales), y entonces separada en dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Si  $q^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}k_1 h$ , donde  $h$  es la distancia semi-interfocal, y  $a$  una constante de separación arbitrario, la ecuación tiene la forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (a - 2q \cos 2t)x = 0 \quad (1.20)$$

y

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (a - 2q \cosh 2t)x = 0, \quad (1.21)$$

i.e.

$$\frac{d^2 x}{d(it)^2} + (a - 2q \cos 2ti)x = 0. \quad (1.22)$$

En el problema de Mathieu los parámetros  $a, q$  son reales.

Es evidente que la ecuación (1.21) fue resuelta reemplazando  $\pm it$  por  $t$ , y vice versa. Las ecuaciones (1.20) y (1.21) serán consideradas como *la ecuación*

de Mathieu y la ecuación de Mathieu modificada respectivamente, para  $q > 0$ . Para el problema de la membrana elíptica, las soluciones apropiadas a la ecuación (1.20) son llamadas *funciones de Mathieu*, periódicas en  $t$  y con período  $\pi$  o  $2\pi$ . Como una consecuencia de esta periodicidad,  $a$  tiene valores especiales llamados *números característicos*. Las soluciones de la ecuación (1.21) que corresponden a las mismas soluciones de la (1.20) para el mismo valor de  $a$ , se llaman *funciones de Mathieu modificadas* que se pueden derivar de las funciones de Mathieu utilizando argumentos imaginarios.

Siguiendo el trabajo de Mathieu, diez años pasarón antes de la siguiente publicación sobre el tema. En *Kugelfunktionen*, Heine (1878) definió las primeras soluciones de orden integral de la ecuación (1.20) por series de cosenos y senos, pero los coeficientes no fueron calculados. Estas series satisfacen las condiciones para ser series de Fourier, pero los coeficientes no se obtuvieron por integración ordinaria. Estas series fueron llamadas series de Fourier por muchos autores. Heine también dió una ecuación trascendente para los números característicos. Esta forma fue utilizada como una gran ventaja medio siglo después, por Goldstein y por Ince, para calcular los números característicos y las series. Heine también demostró que un conjunto de funciones periódicas de orden integral puede ser expandida en una serie de Bessel.

G. W. Hill en una memoria celebre, investigó el "Mean motion of the Lunar Perigee" utilizando una extensión o forma generalizada de la ecuación de Mathieu, es decir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [a - 2q\psi(2t)]x = 0, \quad (1.23)$$

donde en el caso de Hill  $-2q\psi(2t) = 2[\theta_2 \cos 2t + \theta_4 \cos 4t + \dots]$ ,  $a = \theta_0$ , siendo  $\theta$  un parámetro conocido. El trabajo hecho en 1877, fue publicado en

1886. El concepto de determinantes infinitos fue introducido en el análisis por primera vez, y el nombre de Hill fue asociado con una ecuación de la forma (1.23).

En 1883 G. Floquet publicó un trabajo general sobre ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, de los cuales las ecuaciones de Hill y de Mathieu son casos particulares. Lord Rayleigh estudió el experimento clásico de Melde con ayuda del análisis de Hill en 1887. El también trabajó con el problema de propagación de onda en medios estratificados y las oscilaciones de cuerdas teniendo una distribución de masas periódica.

En 1894 Tisserand mostró cómo la solución de la ecuación (1.23) puede ser obtenida en una expansión de Maclaurin. El también describió el método de Lindstedt resolviendo la ecuación (1.20) por medio de fracciones continuas, la convergencia fue investigada por H. Bruns. La teoría de funciones de Mathieu fue extendida por E. Särchinger en ese año.

La primera aparición de una fórmula asintótica para las funciones modificadas de Mathieu en 1898 fue dada por R. C. Maclaurin. Algunos años más tarde W. Marshall publicó un análisis diferente pero más detallado. Ninguno de estos autores obtuvo las constantes multiplicadoras, cuales son indispensables para el trabajo numérico.

Sin embargo, en 1922 Marshall obtuvo los multiplicadores para las series. D. Hilbert estudió los valores característicos y obtuvo una ecuación integral con núcleos discontinuos para las soluciones periódicas de la ecuación (1.20) en 1904. La teoría de las funciones de Mathieu fue estudiada en ciertos aspectos por S. Dannacher en 1906, mientras que W. H. Butts extendió el trabajo y calculó algunos valores tabulados en 1908.

En ese año B. Sieger publicó un importante artículo de la difracción de ondas electromagnéticas por un cilindro elíptico. Entre otros tópicos el tra-

bajó con ortogonalidad y desarrolló ecuaciones integrales por medio de las cuales produjo soluciones de Heine en series de funciones de Bessel. Utilizando una ecuación integral con un núcleo diferente, él derivó una solución de la ecuación (1.21) como una serie de productos de funciones de Bessel y discutió su convergencia.

Aparte del trabajo de Sieger, el tema atrajo poca atención en el período 1887–1912, debido posiblemente a pocas aplicaciones físicas y a las dificultades analíticas. Las funciones de Mathieu no fueron estudiadas en un camino directo como las funciones de Bessel y las funciones de Legendre.

Sin embargo, en 1912 E. T. Whittaker empezó el primer estudio sistemático del tema en un artículo, presentado en el Congreso Internacional de Matemáticas. Ahí él dió una ecuación integral para un conjunto de funciones periódicas de orden integral. Una ecuación similar para las funciones de Mathieu modificadas fue publicado por Sieger, y Whittaker no supo de ese trabajo. El siguiente año, Whittaker publicó un nuevo artículo donde presentó un nuevo método para encontrar la solución de la ecuación (1.20) cuando  $a$  no es un número característico para una función de orden integral.

Utilizando este método como base, A. W. Young, uno de los estudiantes de Whittaker, dió un método para encontrar soluciones generales y discutió el problema de la estabilidad, es decir, si la solución tiende a cero o a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$ . Fórmulas de recurrencia para las funciones de Mathieu no pueden deducirse del procedimiento directo mediante las funciones de tipo hipergeométrico, por ejemplo, las funciones de Bessel y las funciones de Legendre. Sin embargo, Whittaker, envolvió un nuevo método, y en 1928 lo aplicó para obtener relaciones de recurrencia para las funciones de Mathieu modificadas.

Desde 1915 hasta su temprana muerte, el gran contribuidor del tema

fue E. L. Ince, estudiante de Whittaker. Durante este período el publicó dieciocho artículos acerca de las funciones de Mathieu y temas afines. En su primer artículo el obtuvo la segunda solución no periódica para la ecuación (1.20) cuando  $a$  es un número característico para la primera solución cuando esta solución tiene período  $\pi$  y  $2\pi$ . Siguiendo este artículo, el estudió la ecuación de Hill de acuerdo a [40], y obtuvo una descripción que difiere de las fórmulas dadas por Hill. Muchos aspectos del tema, incluyendo números característicos, periodicidad, ceros, fueron abarcados. Ince introdujo el diagrama de estabilidad de funciones de orden integral en 1925. El punto culminante fue su gran aportación en el cálculo de los números característicos, los coeficientes en las series de senos y cosenos para las primeras soluciones de orden integral, ceros de estas funciones, puntos críticos y valores de las funciones. Las tablas ocupaban unas sesenta páginas y aparecieron en el año 1932.

Un estudio general de la ecuación de Mathieu fue hecho por J. Dougall en tres artículos publicados entre los años 1916 y 1926. También como una solución general, el obtuvo expansiones asintóticas para las funciones de Mathieu modificadas con  $t$  grande, y una integral de contorno, la cual bajo ciertas condiciones, degeneraba a una integral de función  $J$ -Bessel. Dougall no conoció el trabajo de Sieger, en 1908 Dougall derivó una solución en términos de productos de funciones de Bessel. El método de derivación fue diferente al que utilizó Sieger.

Hasta 1921, las únicas soluciones periódicas conocidas de la ecuación de Mathieu (1.20) tenían período  $\pi$  y  $2\pi$ . En ese año E. G. C. Poole generalizó la situación y mostró que con valores apropiados de  $a$  para una  $q$  asignada, la ecuación (1.20) puede admitir soluciones que tengan período  $2s\pi$ , donde  $s$  es un entero  $\geq 2$ . Estas soluciones *coexisten*, y su suma (con los multiplicadores

arbitrarios constantes) forma un sistema fundamental. Alrededor del mismo tiempo, Ince probó que dos soluciones de período  $\pi$  o  $2\pi$  no pueden coexistir (para los mismos  $a, q$ ). Si la primera solución tenía período  $\pi$  o  $2\pi$ , la segunda solución sería no periódica. Una prueba diferente de esta proposición fue dada pocos años después por Z. Markovic. El introdujo unas nuevas ecuaciones integrales del tipo Volterra en 1925.

La segunda solución de la ecuación (1.20), donde  $a$  es un número característico para una solución periódica (primera solución) de orden integral, fue estudiada por S. Dhar en 1921 utilizando un método diferente al de Ince. Las publicaciones de Dhar de 1921 a 1928 cubrieron varios aspectos de convergencia, y ecuaciones integrales para la segunda solución. Utilizando expansiones en las funciones de Mathieu, ordinarias y modificadas, el reprodujo la fórmula de Rayleigh para difracción de ondas electromagnéticas en un cilindro metálico largo de sección transversal elíptica.

En 1922, P. Humbert discutió una forma modificada de la ecuación de Mathieu, cuya solución él llamó *funciones de Mathieu de orden superior*. El mostró la relación entre estas funciones y los polinomios de Gegenbauer.

Frecuentemente ocurre que los ceros de las funciones, las cuales aparecen en aplicaciones prácticas, están en conexión con condiciones a la frontera. La solución de una membrana circular vibrante es expresada en funciones  $J$ -Bessel y en productos de función circular. Los ceros de las funciones de Bessel determinan las frecuencias angulares vibracionales de los círculos nodales, pero las funciones circulares definen las posiciones de los radios nodales. En el caso de una membrana elíptica, la solución es expresada en términos de productos de funciones de Mathieu ordinarias y modificadas. Los ceros de las funciones de Mathieu modificadas determinan las frecuencias angulares vibracionales y elipses nodales confocales, mientras que las

funciones de Mathieu modificadas definen un sistema de hipérbolas nodales confocales. Cuando la excentricidad de la elipse acotada tiende a cero, la elipse nodal tiende a círculos nodales, y la hipérbola nodal tiende a radios nodales. Analíticamente, aparte de los multiplicadores constantes, las funciones de Mathieu modificadas tienden a las funciones  $J$ -Bessel del mismo orden, y las funciones de Mathieu ordinarias tienden a funciones circulares.

En 1923 E. Hille publicó un trabajo extenso sobre ceros y temas relacionados a ellos. El también dió otra prueba de la naturaleza no periódica de la segunda solución de (1.20), cuando  $a$  es un número característico de la primera solución de período  $\pi$  o  $2\pi$ . Una tabla de ceros de ocho de estas funciones fue publicado por Ince en 1932. En ese tiempo no existían tablas de ceros de funciones modificadas de Mathieu, pero en esa publicación fueron dadas las fórmulas de cómo calcular los ceros más grandes.

En 1936 Erdélyi obtuvo una solución de la ecuación (1.21) por medio de la integral de Laplace. El derivó otra forma de expansión asintótica y dió relaciones del tipo  $x_1(te^{im\pi}) = e^{\mu m\pi} x_1(t)$ ,  $\mu = ni$ ,  $n$  un entero.

En este período 1932-1936, W. L. Barrow consideró analíticamente y experimentalmente los problemas sobre circuitos eléctricos con parámetros periódicamente variables.

En 1923 H. Jeffreys dió un análisis que permita aproximar las soluciones de (1.21). El también obtuvo fórmulas asintóticas. Los resultados fueron aplicados en una investigación de modos vibracionales de agua en un lago cuya superficie es elíptica, este problema fue de interés especial en hidrodinámica.

En 1927 S. Goldstein publicó los resultados de un extenso trabajo sobre funciones de Mathieu, e incluyó un conjunto de tablas para cinco de las funciones de orden integral. Siguiendo a Heine y Sieger, las funciones tabuladas son definidas como series de senos y cosenos, los coeficientes y números ca-

racterísticos fueron dados por un rango amplio de  $q$ . Una nueva y aceptable normalización de las funciones fue adoptada, esta normalización fue basada en sus propiedades ortogonales. La misma publicación contenía ecuaciones integrales, algunas expansiones para  $t$  y  $q$  grandes, una fórmula asintótica para los números característicos y fórmulas para ceros grandes en  $q$  de las funciones modificadas de Mathieu. Existe también una discusión general relacionada a la segunda solución y a una extensión de las expansiones de Heine en series de funciones de Bessel, el tipo  $I$ -Bessel siendo introducido. En artículo adicional, Goldstein extendió la investigación sobre el lago elíptico, y sus propias investigaciones sobre números característicos.

Un problema técnico fue estudiado por M. J. O. Strutt. Strutt resolvió una variedad de problemas técnicos que envuelve funciones de Mathieu, por ejemplo, difracción de ondas planas en un corte. En 1929, Strutt publicó un detallado estudio de exponentes característicos  $\mu$  en la ecuación de Hill, i.e., la ecuación (1.23).

La ecuación diferencial aproximada de Oseen es familiar en hidrodinámica. El cálculo de la vorticidad en un fluido viscoso que pasa cerca de un cilindro elíptico muy largo necesita el uso de funciones de Mathieu. Este tema fue estudiado por M. Ray en 1936 y por D. Meksyn en 1937. En 1938 T. Lewis publicó un trabajo general del problema de cilindros circulares y elípticos, y un plato plano en un fluido viscoso. El mostró que la solución dada por Meksyn requiere modificaciones para evitar circulación infinita del fluido.

En 1940 W. G. Bickley publicó nuevas soluciones de la ecuación (1.21) con  $q < 0$ , estas soluciones fueron expresadas como expansiones de funciones  $I$ -Bessel y  $K$ -Bessel ( $K$ -Bessel son funciones de Bessel modificadas). El también dió fórmulas integrales y asintóticas para estas soluciones. Du-

rante el mismo año J. G. Brainerd y C. N. Weygandt publicaron datos respecto a soluciones generales de la ecuación (1.20), cuando  $a$  no es un número característico para funciones de orden integral. Los datos se dieron hasta  $t = 0.3\pi$ , utilizando el método de solución de Maclaurin con términos tan grandes como  $x^{(21)}(0)$ .

La ocurrencia de funciones de Mathieu en aplicaciones prácticas puede dividirse en dos categorías importantes.

En la primera, existen problemas con condiciones en la frontera que surgen desde la solución de la ecuación de onda en dos dimensiones (1.19), cuando se expresan en coordenadas elípticas. Como se vió previamente, esto nos da un par de ecuaciones de Mathieu como las ecuaciones (1.20) y (1.21). La solución apropiada de la ecuación (1.20) es usualmente una función de Mathieu periódica de orden integral, mientras que la solución de la ecuación (1.21), en el caso de la membrana elíptica y el guía de onda, es obtenido haciendo el argumento de la solución imaginario.

En la segunda existen problemas de valor inicial, en los cuales solo una ecuación (1.20) es involucrada. Usualmente  $a$  no es un número característico para una función de orden integral teniendo período  $\pi$  y  $2\pi$ , y la solución es general. Pueden ser tres casos,

- (i) la solución tiene período  $2s\pi$ ,  $s$  es un entero  $\geq 2$ ,
- (ii) la solución es no periódica pero acotada cuando  $t \rightarrow +\infty$ ,
- (iii) la solución es no periódica pero no acotada cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

La mayoría de las aplicaciones pertenecen a la primera categoría e involucran a la ecuación de onda.

## 1.2 Álgebra computacional

Primero que nada, antes de pasar a las ecuaciones diferenciales, daremos unas funciones que serán de gran ayuda en este trabajo, y que no solo sirven para las ecuaciones diferenciales.

- En *Maple* se pueden hacer evaluaciones numéricas. El sistema *Maple* representa internamente a los números utilizando el *sistema decimal*. La *representación flotante decimal* se obtiene utilizando `evalf`; la *representación flotante decimal* (desde el hardware) utilizando la función `evalhf`.

Ejemplo:

Obtenga un valor aproximado de las expresiones  $(-5)^{\frac{1}{3}}$ ,  $(-5)^{122}$ ,  $\sqrt{122}$ .

```
evalf((5)^(1/3)); evalf((5)^(122)); evalf(sqrt(122));
```

- *Maple* realiza operaciones algebraicas estándar con expresiones matemáticas.
  1. `factor(expr)` factoriza la expresión `expr` dada.
  2. `expand(expr)` desarrolla la `expr`.
  3. `simplify(expr)` simplifica la `expr` utilizando reglas básicas de simplificación.
  4. `combine(expr,opc)` es una función que en algunos aspectos es contraria a la función `expand`.
  5. `convert(expr,forma)` cambia la forma de `expr` y tiene muchas versiones que se pueden escoger en el segundo argumento `forma`.

6. `normal(fr)` factoriza el numerador y el denominador de la función racional `fr` y elimina factores comunes del numerador y denominador.
7. `numer(fr)` extrae el numerador de la fracción `fr`.
8. `denom(fr)` extrae el denominador de la fracción `fr`.
9. `collect(expr, var)`, `coeff(expr, var)`, y `coeffs(expr, var)` se utilizan para agrupar términos y obtener coeficientes de la `expr`.
10. `map` se recomienda aplicar en manipulaciones con expresiones grandes.

Ejemplos:

- a. Factorize el polinomio  $12x^2 + 27xy - 84y^2$ .

```
factor(12*x^2+27*x*y-84*y^2);
```

- b. Desarrolle la expresión  $(x + y)^2(3x - y)^3$ .

```
expand((x+y)^2*(3*x-y)^3);
```

- c. Reduzca la suma de dos fracciones  $\frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{2}$  a una sola fracción.

```
simplify(2/x^2-x^2/2);
```

- d. Encuentre la descomposición en fracciones simples de la función

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)}$$

```
convert(1/((x-3)*(x-1)),parfrac,x);
```

- e. Convierta las expresiones  $\exp(x)\exp(y)$ ,  $x^p x^q$ ,  $\ln(x) + \ln(y)$ , en la forma más compacta.

```
assume(x>0);
```

```
combine([exp(x)*exp(y),x^p*x^q,ln(x)+ln(y)]);
```

f. Factorize los coeficientes de la expresión  $f = (x + y + 1)^3(x + 3y + 3)^2$ .

```
f:=(x+y+1)^3*(x+3*y+3)^2;
B:=collect(f, x); C:=map(factor, B);
```

Ahora pasemos a las ecuaciones diferenciales. En *Maple* existe un amplio conjunto de funciones para encontrar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, y las soluciones pueden encontrarse analíticamente, numéricamente o gráficamente.

1. A continuación daremos una serie de paquetes y funciones que utilizamos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias:

- Paquetes: plots, DEtools,
- Funciones: dsolve, odeplot, DEplot, phaseportrait.

Ejemplo:

```
with(plots); with(DEtools);
dsolve(EDO,y(x),opcs); dsolve({EDOs},{funcs});
dsolve({EDOs,ICs},{funcs},opcs);
dsolve({EDOs,CIs},{funcs},method=nombre_metodo,opcs);
dsolve({EDOs},numeric, {funcs},opcs);
Sol_Num:=dsolve({EDOs},numeric,{funcs},opcs);
odeplot(Sol_Num,{funcs},rango,opcs);
phaseportrait({EDOs},{funcs},rango,{CIs},opcs);
DEplot({EDOs},{funcs},t_rango,opcs)
```

donde EDO significa ecuaciones diferenciales ordinarias y CIs las condiciones iniciales.

2. *Formas explícitas e implícitas de soluciones exactas, visualización de soluciones*

```
Sol_Exp:=dsolve(diff(y(t),t)+t^2/y(t)=0,y(t));
Sol_Imp:=dsolve(diff(y(t),t)+t^2/y(t)=0,y(t),implicit);
with(plots): G:=subs({y(t)=y},lhs(Sol_Imp));
Gs:=seq(subs(_C1=i,G),i=-5..5);
contourplot({Gs},t=-5..5,y=-10..10,color=blue);
```

3. *Clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias, y proposición de métodos de solución* (puede consultar en *Maple* las funciones o paquetes utilizando un signo de interrogación al principio), por ejemplo separación de variables, ecuaciones homogéneas, ecuaciones exactas, ecuaciones lineales, solución en forma de series, entre otros.

```
with(DEtools):
EDO1:=diff(y(t),t)=y(t)*sin(t)-2/(1-y(t));
Sol_Exp:=dsolve(EDO1,y(t));
Sol_Exp:=dsolve(EDO1,y(t),implicit);
odeadvisor(EDO1);
Sol_sep:=separablesol(EDO1,y(t));
EDO2:=(t^2-y(t)*t)*diff(y(t),t)+y(t)^2=0;
odeadvisor(EDO2); Sol1:=dsolve(EDO2,y(t));
Sol2:=genhomosol(EDO2,y(t));
Sol_ser:=dsolve(EDO1,y(t),'series');
```

4. *Ecuaciones diferenciales de orden superior, soluciones exactas y numéricas, gráficas de soluciones.*

```
with(plots):
setoptions(axes=boxed,scaling=constrained,numpoints=200);
EDO:=diff(x(t),t$2)-diff(x(t),t)+(t-1)*x(t)=0;
CIs:=D(x)(0)=0,x(0)=1;
Sol_ex:=dsolve({EDO,CIs},x(t));
Sol_num:=dsolve({EDO,CIs},x(t),numeric);
G:=array(1..3);
G[1]:=odeplot(Sol_num,[t,x(t)],0..10,color=blue);
G[2]:=plot(rhs(Sol_ex),t=0..10,color=red);
G[3]:=odeplot(Sol_num,[x(t),diff(x(t),t)],0..10,
color=magenta): display(G);
```

5. *Ejemplo.* Resuelva el problema de valor inicial  $y' = -e^{yt} \cos(t^2)$ ,  $y(0) = p$ . Grafique las soluciones  $y(t)$  para varios valores del parámetro  $p$  en un intervalo  $[0, P]$ , donde  $P$  está dado. Grafique las soluciones para  $p = 0.1i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ),  $P = \pi$ .

```

with(plots):
GSol:=proc(CI)
local ec, ec_CI, lista, Sol_N, N_CI, i; global P;
ec:=D(y)(t)=-exp(y(t)*t)*cos(t^2);
lista:=NULL; N_CI:=nops(CI);
for i from 1 to N_CI do
ec_CI:=evalf(y(0)=CI[i]);
Sol_N:=dsolve({ec,ec_CI},y(t),type=numeric,range=0..P);
lista:=lista,odeplot(Sol_N,[t,y(t)],0..P, numpoints=100,
color=blue,thickness=2,axes=boxed):
od;
display([lista]);
end;
Lista:=[seq(0.1i*i,i=1..10)]; P:=evalf(Pi);
GSol(Lista);

```

El estado de un sistema dinámico se representa por dos variables  $(x, y) \in \mathbb{R}$  las cuales son consideradas como las coordenadas de un *espacio fase* bidimensional. El movimiento del sistema se representa por un vector  $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$  que satisface la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t),$$

o su equivalente

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t),$$

donde el vector de velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (X(x, y, t), Y(x, y, z))$  es una función suave. Un movimiento particular del sistema se obtiene iniciando en un punto dado  $(x_0, y_0)$  del espacio fase en un momento  $t_0$ . La mayoría de las condiciones iniciales determinan una solución única  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ . La solución  $\mathbf{r}(t)$  describe una curva continua en espacio fase, la cual se llama *curva de fase*, o *trayectoria*. El conjunto de todos los posibles movimientos se llama *flujo de fase* y la gráfica de curvas de fase se llama *retrato de fase* o *diagrama de fase*.

- *Ejemplo.* Construya un retrato de fase de un sistema dinámico de segundo orden

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\nu v + \epsilon u \left[ \delta_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sigma_1(u^2 + v^2) + \frac{1}{4}\sigma_2(u^2 + v^2)^2 \right], \\ \frac{du}{dt} &= -\nu u + \epsilon v \left[ -\delta_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sigma_1(u^2 + v^2) - \frac{1}{4}\sigma_2(u^2 + v^2)^2 \right],\end{aligned}$$

que describe el movimiento no lineal de la amplitud y de la fase de un fluido bajo la resonancia subarmónica.

Este sistema se ha obtenido en [31] por el método asintótico de Krylov-Bogolyubov y por métodos de álgebra computacional. El sistema depende de los parámetros:  $\nu$  (viscosidad del fluido),  $\epsilon$  (un parámetro pequeño),  $\sigma_1, \sigma_2$  (la segunda y la cuarta correcciones de la frecuencia no lineal),  $\delta$  (el parámetro de resonancia). Si escogemos estos parámetros en diferentes regiones donde existe la solución (es conocido que existen 6 regiones), obtenemos un retrato de fase:

```
with(plots): with(DEtools):
delta_1:=-1/2; sigma_1:=1; sigma_2:=1;
nu:=0.005; epsilon:=0.1;
Ec1:=D(v)(t)=-nu*v(t)+epsilon*u(t)*(delta_1+1/4-
sigma_1/2*(u(t)^2+v(t)^2)+sigma_2/4*(u(t)^2+v(t)^2)^2);
Ec2:=D(u)(t)=-nu*u(t)+epsilon*v(t)*(-delta_1+1/4+
sigma_1/2*(u(t)^2+v(t)^2)-sigma_2/4*(u(t)^2+v(t)^2)^2);
Ecs:=[Ec1,Ec2];
CI:=[[0,0,1.1033],[0,0,-1.1033],[0,1.1055,0],
[0,-1.1055,0],[0,0,1.613],[0,0,-1.613]];
var:=[v(t),u(t)];
opciones:=arrows=medium,dirgrid=[20,20],stepsize=0.1,
thickness=2,linecolour=blue,color=green;
phaseportrait(Ecs,var,t=48..400,CI,opciones);
```

- También se pueden calcular las funciones de Mathieu

$$ce_0(t, q), ce_1(t, q), \dots, \quad se_1(t, q), se_2(t, q), \dots$$

*Maple* puede calcular las funciones de Mathieu periódicas pares e impares, valores característicos, las funciones de Mathieu generales pares e impares, la solución de Floquet para la ecuación de Mathieu, la primera derivada de las funciones de Mathieu y la función de exponente característico.

**MathieuCE**( $n, q, x$ ): Función de Mathieu periódica par

**MathieuSE**( $n, q, x$ ): Función de Mathieu periódica impar

**MathieuC**( $a, q, x$ ): Función de Mathieu general par

**MathieuC**( $a, q, x$ ): Función de Mathieu general impar

**MathieuA**( $n, q$ ): El  $n$ -ésimo valor característico de **MathieuC** ( $n = 1, 2, \dots$ )

**MathieuB**( $n, q$ ): El  $n$ -ésimo valor característico de **MathieuS** ( $n = 0, 1, \dots$ )

**MathieuExponent**( $a, q$ ): La función de exponente característico.

**MathieuFloquet**: La solución de Floquet para la ecuación de Mathieu.

**MathieuFloquetPrime**( $a, q, x$ ): La primera derivada de **MathieuFloquet**.

**MathieuCEPrime**( $n, q, x$ ): La primera derivada de **MathieuCE**.

**MathieuSEPrime**( $n, q, x$ ): La primera derivada de **MathieuSE**.

**MathieuCPrime**( $a, q, x$ ): La primera derivada de **MathieuC**.

**MathieuSPrime**( $a, q, x$ ): La primera derivada de **MathieuS**.

Notese que las derivadas de orden superior se pueden escribir en términos de la función de Mathieu y la primera derivada.

En lo anterior se utilizaron los siguientes parámetros:  $n$  es el orden (un entero no negativo),  $a, q$  son parámetros de la ecuación de Mathieu,  $x$  es argumento.

Ejemplos:

**MathieuC**(1.23, 4.56, 7.89);

147.6289914

**MathieuFloquet**(0.1, 0.2, 0.3);

0.8965972662+0.1161779284 *I*

MathieuS(a,q,-x);

-MathieuS(a,q,x)

MathieuCE(n,0,x);

cos(*nx*)

MathieuExponent(a,0);

$\sqrt{a}$

diff(MathieuC(a,q,x),x);

MathieuCPrime(a,q,x)

diff(%,x);

$(2q \cos(2x) - a)\text{MathieuC}(a, q, x)$

.....

# Capítulo 2

## Definiciones y teoremas

### 2.1 Introducción. Sistemas lineales

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (2.1)$$

donde  $A(t)$  es una matriz real, no singular  $n \times n$  y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un vector  $n$ -dimensional. Los elementos de  $A(t)$  son funciones de variable independiente  $t$ , y nuestro interés principal será el caso de las funciones periódicas, sin embargo, empezaremos con una breve descripción de las propiedades de sistemas más generales.

Ecuaciones diferenciales lineales (2.1) aparecen naturalmente en el estudio de ecuaciones no lineales,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t),$$

donde  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (X_1(\mathbf{x}, t), X_2(\mathbf{x}, t), \dots, X_n(\mathbf{x}, t))$  es una función vectorial  $n$ -dimensional de  $\mathbf{x}$  y  $t$ .

Si  $\mathbf{X}$  no es función del tiempo, entonces una expansión alrededor de puntos fijos, definida por la ecuación  $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$ , normalmente da ecuaciones como (2.1) con matriz constante  $A$ , y el estudio de estas ecuaciones lineales da información importante acerca de la estabilidad de esos puntos fijos.

Alternativamente, si el sistema no lineal admite una solución periódica  $\xi(t)$ ,  $\xi(t+T) = \xi(t)$ , para toda  $t$  y alguna  $T$  mayor que cero, entonces una expansión de  $\xi(t)$  nos lleva a una ecuación (2.1) pero con la matriz  $A(t)$ ,  $T$ -periódica en tiempo. El estudio de estas ecuaciones lineales nos ayuda a entender la naturaleza de la órbita periódica original. Ya que las ecuaciones lineales son más fáciles de estudiar que las no lineales, estas técnicas son importantes.

Otros problemas importantes que da la ecuación (2.1) aparecen en la ecuación de Schödinger cuando el potencial es periódico en el espacio, como en un cristal, en cuyo caso la ecuación es

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + (E - V(\mathbf{x}))\psi = 0, \quad V(\mathbf{x} + L_k) = V(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x},$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector  $n$ -dimensional y  $L_k$  son vectores linealmente dependientes, o cuando el potencial es una función periódica del tiempo, cuando un átomo o molécula es inducido por un campo eléctrico periódico, tal como un láser, la ecuación tiene la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - V(\mathbf{x}, t)\psi, \quad V(\mathbf{x}, t+T) = V(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}.$$

Aquí  $\hbar$  es la constante de Plank reducida,  $\mu$  es la masa de una partícula,  $V$  es la energía potencial,  $E$  es constante,  $\nabla^2$  es Laplaciano, y  $\psi$  es la función de onda.

## 2.2 Propiedades generales

La ecuación

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (2.2)$$

donde  $A(t)$  es una matriz real, no singular  $n \times n$  y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un vector  $n$ -dimensional, es lineal, y esto pone restricciones rigurosas en el comportamiento de las soluciones.

Ahora mencionamos unas definiciones y propiedades importantes: las demostraciones pueden ser encontradas, por ejemplo, en Arnold (1973), Cesari (1963), Hartman (1964), Hirsch y Smale (1974) o Jordan y Smith (1999).

**Existencia:** si los elementos de  $A(t)$  son continuos por partes, con un número finito de puntos de discontinuidad e integrable en cada discontinuidad, la solución de la ecuación  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  existe y es única.

**Linealidad:** si  $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)\}$  son  $m$  soluciones de la ecuación (2.2), reales o complejas, entonces la suma

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{x}_k(t),$$

donde  $\alpha_k$  son constantes, reales o complejas, es también solución.

**Dependencia lineal:** si  $\{\mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t), \dots, \mathbf{z}_m(t)\}$  son cualesquiera  $m$  funciones vectoriales (reales o complejas), continuas en algún intervalo de  $t$ , ninguna idénticamente cero, y si existen constantes  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , no todos cero, tal que

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{z}_k(t) = 0,$$

entonces las funciones  $z_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , se dice que son *linealmente dependientes*. Si no, son *linealmente independientes*.

**Dependencia lineal de soluciones:** cualesquiera  $n + 1$  soluciones no triviales de  $n$  ecuaciones de la ecuación (2.2) son linealmente dependientes. Inversamente, existe un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.2). Más aun, si  $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)\}$  es un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes, cada solución de la ecuación (2.2) es una combinación lineal de estas soluciones.

**Convergencia de una sucesión, límite.** Una sucesión  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  en un espacio métrico  $X$  con la métrica  $d$  correspondiente, se dice que converge o es convergente si existe un  $t \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(t_n, t) = 0.$$

El valor  $t$  es llamado el límite de  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t,$$

o simplemente

$$t_n \rightarrow t.$$

Decimos que  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $t$  o tiene límite  $t$ . Si  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  no es convergente, se dice que es divergente.

**Completez, sucesión de Cauchy.** Una sucesión  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  en un espacio métrico  $X$  con la métrica  $d$  correspondiente, es sucesión de *Cauchy* (o sucesión fundamental), si para cada  $\epsilon > 0$  existe una  $N = N(\epsilon)$  tal que

$$d(t_m, t_n) < \epsilon \text{ para cada } m, n > N.$$

El espacio  $X$  se dice que es *completo* si cada sucesión de Cauchy converge en  $X$ , esto es, existe un límite que es un elemento de  $X$ .

**Espacio de Hilbert  $L^2([a, b])$ .** Sea  $\infty \leq a < b \leq \infty$ .  $L^2(a, b)$  es el espacio de funciones de medida de Lebesgue

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C},$$

las cuales son cuadrado-integrables,

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty,$$

con operaciones puntuales y producto interior

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Ahora veremos unas propiedades de completez y convergencia para sistemas de Sturm–Liouville de la forma

$$\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dx}{dt} \right) + (q(t) + \lambda w(t))x = 0.$$

**Producto interior.** Supongamos que  $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  es un conjunto de eigenfunciones ortonormales de Sturm–Liouville en el intervalo  $[a, b]$ . Se define *el producto interior* de las funciones con respecto a la función peso  $w(t)$  como

$$\langle x_n, x_m \rangle = \int_a^b w(t)x_n(t)x_m(t)dt,$$

entonces el cuadrado de la norma es

$$\|x_n\|^2 = \langle x_n, x_n \rangle = \int_a^b w(t)x_n^2(t)dt.$$

**Convergencia en  $L^2([a, b])$ .** Una serie de eigenfunciones ortonormales  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(t)$  se dice *convergente* a  $f(t)$  en  $L^2([a, b])$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - s_n(t)\| = 0, \quad (2.3)$$

donde  $s_n(t) = \sum_{r=1}^n a_r x_r(t)$  es la  $n$ -ésima suma parcial de la serie (2.3). Equivalente, la serie (2.3) nos queda de la siguiente manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{r=1}^n a_r x_r(t) \right|^2 w(t) dt = 0.$$

**Completez.** Un conjunto de eigenfunciones ortonormales de un sistema de Sturm–Liouville es *completo* si cualquier función arbitraria  $f \in L^2([a, b])$  se puede expandir únicamente en la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(t), \quad (2.4)$$

donde la serie converge a  $f(t)$  en  $L^2([a, b])$  y los coeficientes de  $a_n$  están dados por

$$a_n = \frac{\langle f(t), x_n(t) \rangle}{\langle x_n(t), x_n(t) \rangle} = \frac{1}{\|x_n\|^2} \langle f, x_n \rangle,$$

donde  $n = 1, 2, 3 \dots$

**Forma canónica de Jordan.** Toda matriz  $A \in M_{n \times n}$  es semejante a una matriz de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix},$$

donde  $J_0$  es una matriz diagonal con los valores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  en la diagonal,

y

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & & 0 \\ & \lambda_{q+i} & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_{q+i} \end{pmatrix},$$

Las  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, q + s$  son eigenvalores de  $A$ , no necesariamente distintas.

Si  $\lambda_j$  es una raíz simple, entonces la raíz aparece con  $J_0$ , y por lo tanto, si todas las raíces son distintas,  $A$  es semejante a una matriz diagonal

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Matriz fundamental:** si  $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)\}$  es un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes, la matriz

$$\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \cdots & \Phi_{nn} \end{pmatrix},$$

es llamada *la matriz fundamental*. Aquí la  $k$ -ésima columna es el vector  $\phi_k(t)$ .

Para cualquier sistema hay un número infinito de matrices fundamentales, cada una satisface la ecuación diferencial matricial

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi.$$

Diferentes conjuntos de soluciones linealmente independientes dan diferentes matrices fundamentales, pero ya que los componentes de un conjunto pueden ser expresados como combinación lineal de los componentes de cualquier otro conjunto, cualquiera dos matrices fundamentales  $\Phi_1(t)$  y  $\Phi_2(t)$  son relacionadas por  $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$ , donde  $C$  es una matriz constante no singular.

La matriz fundamental especial que satisface  $\Phi(0) = I$  algunas veces es llamada *matrizant* de la ecuación (2.2). Si la matriz  $A(t)$  es  $T$ -periódica, la *matriz de monodromía* es la matrizant en  $t = T$ , esto es  $\Phi(T)$ , donde  $\Phi(0) = I$ . Esta matriz juega un papel importante en la teoría de sistemas periódicos que sigue.

**Determinante de una matriz fundamental:** si  $X(t)$  es una matriz  $n \times n$  de las soluciones  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ , entonces también:

(i)  $\det(X(t)) \neq 0$ , para todo  $t$ , en tal caso los  $x_k(t)$  son linealmente independientes y  $X(t)$  es una matriz fundamental, o

(ii)  $\det(X(t)) = 0$ , para todo  $t$ , si y solo si, los  $x_k(t)$  son linealmente dependientes.

**El wronskiano** de un conjunto  $n$  soluciones linealmente independientes es definido como el determinante de la matriz fundamental

$$W(t) = \det(\Phi(t)),$$

y puede ser demostrado, ver Hartman (1964, Capítulo 4), que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = W(t) \operatorname{Tr}[A(t)], \quad \text{donde} \quad W(t) = W(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \operatorname{Tr}[A(s)] ds \right\}. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, si  $\operatorname{Tr}(A) = 0$ , entonces  $\det(\Phi(t)) = \text{constante}$ . Este resultado es debido a Liouville.

**Solución en términos de una matriz fundamental:** la solución de (2.2) con la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  puede ser expresada como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0),$$

donde  $\Phi(t)$  es cualquier matriz fundamental.

La matriz  $U(t_2, t_1) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)^{-1}$ , que depende de dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es llamada *la matriz de propagación* porque esta matriz propaga la solución de un tiempo  $t_1$  a un tiempo  $t_2$ , el cual puede preceder de  $t_1$ . Para los sistemas autónomos,  $U(t_2, t_1)$  depende solo de la diferencia  $t_2 - t_1$ . Ya que el sistema es lineal la matriz de propagación tiene la propiedad multiplicadora

$$U(t_3, t_1) = U(t_3, t_2)U(t_2, t_1).$$

Un ejemplo importante se describe en Feynman y Hibbs (1965, Capítulo 2).

En general no es posible encontrar soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$  en términos de funciones conocidas. Sin embargo cuando la matriz  $A$  es constante, la solución en cualquier caso particular puede ser expresada en términos de las funciones trigonométricas o hiperbólicas y productos de estas funciones y polinomios en  $t$ .

Consideramos el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ , donde  $A$  es una matriz constante real, no singular  $n \times n$ . Haciendo  $\mathbf{x} = \mathbf{r}e^{\lambda t}$ , donde  $\lambda$  es una constante y  $\mathbf{r}$  un vector constante, obtenemos la ecuación

$$A\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

El vector  $\mathbf{r}$  es no trivial si  $\lambda$  es un eigenvalor de  $A$ , esto es,  $\lambda$  satisface el polinomio de grado  $n$

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta ecuación tiene  $n$  soluciones  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , las cuales pueden ser no todos distintos, y pueden ser reales o, si son complejas, vendrán en pares conjugados (porque  $A$  es real). Para cualquier eigenvalor  $\lambda_p$  habrá un eigenvector  $\mathbf{r}_p$  correspondiente que satisface la ecuación  $A\mathbf{r}_p = \lambda_p\mathbf{r}_p$ .

Si la matriz  $A$  tiene  $n$  eigenvectores linealmente independientes  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\}$  que corresponden a los eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , los cuales son no todos distintos, la solución general de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{es} \quad \mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{r}_k e^{\lambda_k t},$$

donde las  $c_k$  son constantes.

Si un eigenvalor  $\lambda_p$  tiene la multiplicidad algebraica  $m \leq n$ , entonces el  $\det(A - \lambda I)$  tiene un factor  $(\lambda - \lambda_p)^m$ , existen  $m$  eigenvectores linealmente independientes asociados con el eigenvalor  $\lambda_p$ . En este caso existen  $m$  soluciones de la forma

$$\mathbf{p}_1(t)e^{\lambda_p t}, \mathbf{p}_2(t)e^{\lambda_p t}, \dots, \mathbf{p}_m(t)e^{\lambda_p t},$$

donde  $\mathbf{p}_k(t)$  son vectores polinomiales en  $t$  de grado  $m - 1$ , o menor.

Para sistemas de dos dimensiones,  $n = 2$ , las distintas combinaciones de los eigenvalores y los eigenvectores que ocurren dan diez diferentes tipos de solución. Si  $n \geq 3$  existen muchas posibilidades para una clasificación de combinaciones, y cada problema debe ser tratado individualmente. Sin embargo, si los eigenvalores de  $A$  satisfacen la condición  $\Re(\lambda_k) \leq 0$ , entonces las soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$  son acotadas. En adición, si todas las soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$  son acotadas, entonces todas las soluciones de

$$\frac{dx}{dt} = [A + C(t)]\mathbf{x} \quad \text{son acotadas para } t > t_0 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^x |C_{ij}(t)| ds \quad (2.7)$$

es acotada, ver Cesari (1963, Sección 3.3).

Ahora consideramos algunos problemas.

### Problema 2.2.1

Si  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ , haciendo el cambio de variables  $\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{y}$

1) muestre que una solución de la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t),$$

donde  $\mathbf{F}(t)$  es una función vectorial de  $t$ , es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \int \phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds.$$

2) Deduzca que la solución de la ecuación con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds.$$

### Demostración.

Derivando el cambio de variables, tenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\Phi}(t)\mathbf{y} + \Phi(t)\dot{\mathbf{y}}.$$

Por definición de matriz fundamental se tiene que

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Entonces, igualando la derivada del cambio de variables con la ecuación diferencial original, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t)\mathbf{y} + \Phi(t)\dot{\mathbf{y}} &= A(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t), \\ A(t)\Phi(t)\mathbf{y} + \Phi(t)\dot{\mathbf{y}} &= A(t)\Phi(t)\mathbf{y} + \mathbf{F}(t), \\ \Phi(t)\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}(t), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \Phi(t)^{-1}\mathbf{F}(t). \end{aligned}$$

Así, integrando en ambos lados de la última igualdad, tenemos

$$y(t) = \int \Phi^{-1}(t)(s)F(s)ds.$$

Sustituyendo este resultado en el cambio de variables antes mencionado nos queda

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)y \\ &= \Phi(t) \int \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds. \end{aligned}$$

Ahora resolveremos la segunda parte. Resolvemos el caso homogéneo de la ecuación diferencial original, es decir, resolver la siguiente ecuación,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Para resolverla procederemos de la misma forma, es decir, utilizaremos la derivada del cambio de variables y la igualaremos con la ecuación diferencial homogénea, lo cual nos da

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t)y + \Phi(t)\dot{y} &= A(t)x, \\ A(t)\Phi(t)y + \Phi(t)\dot{y} &= A(t)\Phi(t)y, \\ \Phi(t)\dot{y} &= 0, \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados de la última igualdad, tenemos

$$y(t) = c.$$

Sustituyendo este último resultado en el cambio de variables se tiene

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)c.$$

Ahora aplicando la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 &= \Phi(t_0)\mathbf{c}, \\ \mathbf{c} &= \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

Por tanto, la solución a la ecuación diferencial ordinaria homogénea con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0.$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial original, es decir, la suma de las soluciones homogénea y no homogénea, es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds. \quad \blacksquare$$

### Problema 2.2.2

1) Definiendo  $y = \dot{x}$ , convierte el sistema  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  en la forma de la ecuación (2.2) y muestre que el matrizant es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

2) Utilizando lo anterior y el resultado del problema previo, muestre que la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F(t), \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b$$

es

$$x(t) = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t F(s) \operatorname{sen} \omega(t-s) ds.$$

### Demostración.

Primero mostraremos que el matrizant es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Para esto resolvamos la ecuación diferencial ordinaria homogénea  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , la cual tiene como polinomio característico  $m^2 + \omega^2 = 0$ , y este a su vez tiene raíces complejas  $m_1 = \omega i$  y  $m_2 = -\omega i$ . Por tanto su solución es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

con derivada

$$\dot{x}(t) = -c_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + c_2 \omega \cos \omega t,$$

y reescribimos la solución en la forma matricial

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t \\ -c_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + c_2 \omega \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Ya que el matrizant debe de cumplir que  $\Phi(0) = I$ , entonces

$$x(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$x(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Del primero, se sigue que  $c_1 = 1$  y  $c_2 \omega = 0$ , por tanto

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t \end{pmatrix}.$$

Del segundo, se tiene que  $c_1 = 0$  y  $c_2 = \omega^{-1}$ , por tanto

$$x(t) = \begin{pmatrix} \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Ahora resolveremos la segunda parte del problema, para esto usaremos la siguiente parte del problema anterior:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds.$$

Sabemos que el matrizant es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

con la inversa

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ \omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Ahora realicemos el siguiente producto de matrices. Por el problema anterior se tiene que

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos \omega(t-s) & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega(t-s) \\ -\omega \operatorname{sen} \omega(t-s) & \cos \omega(t-s) \end{pmatrix}.$$

Ahora usando el problema anterior, tenemos

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos \omega(t-s) & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega(t-s) \\ -\omega \operatorname{sen} \omega(t-s) & \cos \omega(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F(s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \omega t + b \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t + \omega^{-1} \int_0^t F(s) \operatorname{sen} \omega(t-s) ds, \\ y(t) &= -a \omega \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t + \int_0^t \cos \omega(t-s) ds. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.3 Teorema de Floquet-Lyapunov

Antes de ver el teorema de Floquet-Lyapunov, debemos agregar una definición.

**Definición:** Si  $B$  es una matriz no singular, entonces existe una matriz  $A$ , llamada el logaritmo de  $B$ , tal que  $e^A = B$ .

**Teorema de Floquet–Lyapunov.**

Para la ecuación  $\dot{x} = A(t)x$ , donde los elementos de la matriz  $A(t)$ ,  $n \times n$ , son funciones de  $t$ ,  $T$ -periódicas y continuas por partes, con un número finito de discontinuidades en  $(-\infty, \infty)$  e integrables en cada discontinuidad, entonces una matriz fundamental puede expresarse en la forma

$$\Phi(t) = P(t)e^{Kt},$$

donde  $P(t)$  es una matriz  $n \times n$ , no singular,  $T$ -periódica para todo  $t$  y con elementos continuos, con derivadas continuas por partes e integrables. También  $K$  es una matriz constante  $n \times n$ .

**Demostración.**

Como  $A(t) = A(t+T)$  tenemos que

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T)$$

y además  $\det \Phi(t+T) \neq 0$ , es decir, es no singular, por ende,  $\Phi(t+T)$  es una matriz fundamental, y por tanto sus columnas son combinaciones lineales de  $\Phi(t)$ , entonces existe una matriz  $C$  (matriz de monodromía), no singular tal que

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C.$$

Como la matriz  $C$  es no singular, podemos escribirla de la siguiente manera

$$C = e^{TK}$$

para alguna matriz constante  $K = \frac{1}{T} \ln C$ . Definiendo  $P(t)$  como

$$P(t) = \Phi(t)e^{-tK},$$

probaremos que  $P(t)$  es periódica,

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \Phi(t)e^{-tK}, \\
 P(t+T) &= \Phi(t+T)e^{-(t+T)K} \\
 &= \Phi(t)Ce^{-tK}e^{-TK} \\
 &= \Phi(t)[Ce^{-TK}]e^{-tK} \\
 &= \Phi(t)[CC^{-1}]e^{-tK} \\
 &= \Phi(t)e^{-tK} \\
 &= P(t).
 \end{aligned}$$

Con esto se demuestra que  $P(t)$  es periódica, y como  $\Phi(t)$  y  $e^{-tK}$  son no singulares,  $P(t)$  es no singular. ■

## 2.4 Teoría de perturbaciones

Esta sección es una introducción a la teoría de perturbaciones. Aplicando la teoría de perturbaciones se obtienen soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones de varios tipos, que involucran un parámetro pequeño. Las ecuaciones pueden ser de cualquier clase, es decir, algebraicas, diferenciales, integrales, integro-diferenciales, funcionales, etc.

La teoría de perturbaciones es una colección de métodos para obtener soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones en las que se involucra un parámetro pequeño  $\epsilon$ . Las ecuaciones pueden ser, por ejemplo, algebraicas, diferenciales (EDO, EDP), integrales, integro-diferenciales, funcionales, etc. La teoría de perturbaciones se aplica en diferentes áreas del conocimiento. Por ejemplo, la mayoría de los métodos de la física moderna contienen aplicaciones de teoría de perturbaciones.

Si seguimos los métodos de la teoría de perturbaciones y aplicamos cambios de variables con ayuda de álgebra computacional, entonces lo que se pretende es reducir un problema difícil a uno más fácil de analizar.

Es muy frecuente que en las aplicaciones, cuando se estudia un modelo de un sistema físico, químico, biológico, etc., se tiene la siguiente ecuación (algebraica, diferencial, etc.), que involucra un parámetro pequeño  $\epsilon$  definido en un intervalo  $I = (0; \epsilon_0)$ :

$$F(x; \epsilon) = 0, \quad (2.8)$$

donde  $x$  es, por ejemplo, la variable real. Resolvemos la ecuación (2.8) y la solución es llamada *una solución perturbada*. Si conocemos *la solución no perturbada*, es decir, la solución de la ecuación

$$F(x; 0) = 0, \quad (2.9)$$

entonces el análisis asintótico nos lleva a construir la solución analítica aproximada para  $\epsilon > 0$  pequeño.

A continuación, presentamos las definiciones y el teorema fundamental de teoría de perturbaciones que son esenciales en la teoría de perturbaciones. Fijemos la variable  $x$  en la ecuación (2.8), digamos,  $x = x_0$  y hagamos  $F(x_0; \epsilon) = f(\epsilon)$ .

#### Definición 2.4.1

Una función  $g(\epsilon)$ ,  $\epsilon \in I$ , se llama *función de norma* si  $g(\epsilon)$  es positiva y monótona en el intervalo  $I$ .

El comportamiento de una función  $f(\epsilon)$  es comparado con una función de norma  $g(\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y para ello empleamos *los símbolos de Landau*, "O" y "o".

**Definición 2.4.2**

$f(\epsilon) = O(g(\epsilon))$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , si existen una vecindad de  $\epsilon_0$  y una constante  $k > 0$ , tales que  $|f(\epsilon)| \leq k |g(\epsilon)|$ . Por lo tanto,  $f = O(g)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  si  $f/g$  es acotada.

**Definición 2.4.3**

$f(\epsilon) = o(g(\epsilon))$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , si existen una vecindad de  $\epsilon_0$  y una función  $\delta(\epsilon) > 0$ , tales que  $\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \delta(\epsilon) = 0$  y  $|f(\epsilon)| \leq \delta(\epsilon) |g(\epsilon)|$ . Por lo tanto,  $f = o(g)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  si  $f/g \rightarrow 0$ .

**Definición 2.4.4**

Una sucesión  $g_n(\epsilon)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) de *funciones de norma* es una sucesión asintótica si  $g_{n+1}(\epsilon) = o(g_n(\epsilon))$ .

**Teorema 2.4.1** (Teorema fundamental de la teoría de perturbaciones).

Si

$$A_0 g_0(\epsilon) + A_1 g_1(\epsilon) + A_2 g_2(\epsilon) + \dots + A_n g_n(\epsilon) + O(g_{n+1}(\epsilon)) = 0,$$

donde  $g_n(\epsilon)$  es una sucesión asintótica y los coeficientes  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) son independientes de  $\epsilon$ , entonces

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0.$$

**Demostración.**

Definimos

$$P(x(\epsilon)) = A_0 g_0(\epsilon) + A_1 g_1(\epsilon) + \dots + A_n g_n(\epsilon) + O(g_{n+1}(\epsilon)) = 0.$$

Dividimos a la ecuación anterior por  $g_i(\epsilon)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) en ambos lados y calculando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  vemos que si  $P(x(\epsilon)) = 0$  entonces  $A_i = 0$ .

■

Esta fue una pequeña introducción a la teoría de perturbaciones en la cual vimos el teorema más importante de esta teoría y algunas definiciones. En este trabajo emplearemos la teoría de perturbaciones para la ecuación de Mathieu amortiguada.

## Capítulo 3

# Teoría de Floquet

### 3.1 Introducción

Ahora estudiaremos los sistemas lineales con coeficientes periódicos,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(t+T) = A(t) \text{ para toda } t, \quad (3.1)$$

donde  $A(t)$  es una matriz real, no singular,  $n \times n$ , con elementos que son funciones  $T$ -periódicas de  $t$ .

El matemático francés Floquet, primero desarrolló la teoría general de sistemas lineales periódicos y dió un estudio sistemático de tales sistemas. En general, las soluciones de sistemas lineales periódicos no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales, pero la linealidad y periodicidad de  $A(t)$  significa que el comportamiento de una solución para todos los tiempos puede ser deducida de la solución general en un intervalo finito de longitud  $T$ . Esta propiedad inusual significa que el comportamiento de las soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$  puede ser frecuentemente deducida de aproximaciones analíticas o de soluciones numéricas.

En el Capítulo 2, discutimos las propiedades importantes de las ecuaciones (3.1). Tales ecuaciones y sus equivalentes ecuaciones no lineales, también ocurren en la descripción de sistemas dinámicos con parámetros que varían

periódicamente con el tiempo. Por ejemplo, el péndulo vertical con un punto de soporte que se mueve periódicamente.

Para dar alguna idea de cual es el comportamiento de los sistemas lineales periódicos, empezaremos este capítulo con la descripción de dos sistemas. Ambos ejemplos son péndulos verticales y en cada caso la longitud se hará variar periódicamente. Con la elección correcta de este período se puede probar que la energía (esto es la amplitud del columpio) se puede crecer rápidamente. El método de suplemento de energía a un sistema donde los parámetros de este sistema son variados periódicamente es conocido como *excitación paramétrica*.

## 3.2 Resonancia paramétrica

### 3.2.1 O Botafumeiro

Uno de los ejemplos más viejos y registrados es la excitación paramétrica del gran incensario, *O Botafumeiro*, en la catedral de Santiago en Santiago de Compostela, una ciudad en Galicia, al noroeste de España. Esta catedral fue una capilla, famosa a través del cristianismo durante la edad media. Este incensario, con carbón, pesa alrededor de 57 kg y cuelga en el techo de la capilla gótica. El incensario oscila en una cuerda de alrededor de 21 m de largo con una amplitud máxima de alrededor de  $80^\circ$  y tiene un período de alrededor de 10 segundos. Cerca del fondo de la oscilación, el incensario es llevado a una velocidad de 85 km/hr en medio metro arriba del piso.

Producir y mantener tal movimiento no es trivial, pero el rito de excitación de *O Botafumeiro* parece ser de alrededor de 700 años, la catedral fue construida entre los años 1078 y 1211, en el sitio destruido por Almanzor, el comandante militar califato de Moorish de Cordova, en 997 D.C. El primer

uso registrado de este incensario es en una nota en Codex (en el margen) de siglo XIV, donada por Liber Sancti Jacobi a la catedral alrededor de 1150. Entonces sabemos que el rito de oscilación de *O Botafumeiro* empezó entre los años 1150 y 1325, esto es a menos de cuatro siglos de que el péndulo fuera estudiado científicamente.

El movimiento del incensario empieza moviendo de su posición vertical inicial para dejarlo oscilar como un péndulo, entonces un grupo de hombres tira cíclicamente de las cuerdas unidas hacia el extremo superior de la cuerda para el decrecimiento e incremento de su longitud mientras esta pasa por los puntos más bajos y altos en el movimiento. Por tanto podemos ver la similitud de la oscilación del incensario con el columpio. En el ejemplo del columpio reglas no formales se necesitan; un niño nunca formula el mecanismo de oscilación del columpio. Pero para *O Botafumeiro* necesito una fuerza de un grupo de trabajadores para obtener un movimiento con una amplitud de alrededor de  $80^\circ$ , aproximadamente 17 ciclos de oscilación son requeridos y el tiempo total tomado es de alrededor de 80 segundos. Existe alguna evidencia que en algún momento las reglas de oscilación llegaron a ser entendidas y transmitidas a otras catedrales, hay registros de las catedrales de Orense y Tuy (100 km SE y S de Santiago, respectivamente), pero no hay registros de que incensario largo dorado en el viejo St. Pietro en Roma se haya puesto en movimiento alguna vez.

El movimiento de *O Botafumeiro* se dice ser un espectáculo impresionante. Esto claramente impones un significativo esfuerzo en el soporte, con el resultado que algunos accidentes han ocurrido. Cuando *O Botafumeiro* oscila, la tensión más alta en la cuerda ocurre en la parte alta y baja de la oscilación, por tanto es aquí donde la cuerda tiende más a romperse. El registro de accidente sostiene este comentario, por ejemplo en 1622 la cuerda rompeó

y el incensario cayó desde el punto alto (cerca del techo) verticalmente con un trabajador. En 1499 las cadenas conectadas al incensario quebraron y el incensario cayó aplastando la puerta alrededor de 30 m del centro de la oscilación. Esto solo puede pasar solo si la amplitud del movimiento fue larga y la rotura ocurrió cerca del fondo de la oscilación.

La dinámica de *O Botafumeiro* es complicada; en particular la amplitud del movimiento es muy grande para hacer la aproximación lineal, la cuerda es pesada por tanto su masa necesita ser tomada en cuenta, y la resistencia del aire debe ser incluido. Sin embargo, este sistema se ha estudiado, Sanmartín (1984), y el movimiento teórico coincide con su movimiento actual.

### 3.2.2 El columpio

El primer ejemplo de resonancia paramétrica en el que estamos familiarizados es el de un niño jugando al columpio en un patio. Una observación cuidadosa del niño muestra que la amplitud del movimiento es aumentado por la flexión rítmica y el enderezamiento del cuerpo del niño con el efecto de que el centro de masa se levanta mientras que el columpio pasa por su punto más bajo y bajado cuando el columpio alcanza su punto más alto. Una idea de este movimiento se tiene tratando al columpio y al niño como un péndulo vertical con los cambios en el centro de masa que ocurren en los puntos más altos y más bajos. La ventaja de esta aproximación es que podemos entender el movimiento sin resolver alguna ecuación diferencial, aunque la conservación del momento angular y la energía son necesarias.

Durante cada cuarto de oscilación, cuando la longitud  $L$  del péndulo es constante, el columpio tiene comportamiento similar al péndulo vertical para el cual la energía se obtiene mediante la siguiente ecuación

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el columpio y la vertical hacia abajo. Supongamos que el sistema lo soltamos desde el reposo en un ángulo  $\theta = \alpha_1$  con longitud  $L_1$ , entonces la velocidad angular  $\dot{\theta} = \omega_1$  en el fondo, donde  $\theta = 0$ , se obtiene usando la ecuación de la energía

$$\frac{1}{2}L_1^2\omega_1^2 = gL_1(1 - \cos \alpha_1) \quad \text{o} \quad \omega_1^2 = \frac{4g}{L_1} \text{sen}^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right).$$

En el fondo la longitud cambia instantáneamente de  $L_1$  a  $L_2 > L_1$ , y ya que el cambio de velocidad es hacia el punto de soporte, el momento angular,  $mL^2\dot{\theta}$ , se conserva y después de cambiar la longitud del péndulo cambia la velocidad angular,  $\omega_2$ , que es mayor y dada por las ecuaciones

$$L_1^2\omega_1 = L_2^2\omega_2 \quad \text{o} \quad \omega_2 = \frac{L_1^2}{L_2^2}\omega_1 > \omega_1. \quad (3.2)$$

La amplitud  $\alpha_2$ , en el siguiente cuarto de oscilación puede relacionarse con  $\omega_2$  usando de nuevo la ecuación de energía

$$\frac{1}{2}L_2^2\omega_2^2 - gL_2 = -gL_2 \cos \alpha_2 \quad \text{o} \quad \omega_2^2 = \frac{4g}{L_2} \text{sen}^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right).$$

Pero ya que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se relacionan por la ecuación (3.2), podemos obtener la relación entre las amplitudes sucesivas y las longitudes  $L_1$  y  $L_2$ , la cual se da por la ecuación

$$L_1^3 \text{sen}^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = L_2^3 \text{sen}^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right). \quad (3.3)$$

Cuando el columpio alcanza su amplitud máxima,  $\theta = \alpha_2$ , su longitud regresa instantáneamente a  $L_1$ . De nuevo el momento angular se conserva, pero en este punto en el columpio, la velocidad angular es cero, por tanto, permanece sin cambiar. Así, el columpio empieza la siguiente mitad de ciclo con longitud  $L_1$  pero con la amplitud más larga  $\alpha_2$ .

Este procedimiento puede realizarse en cada columpio, por tanto después de pasar sobre su punto más bajo  $N$  veces tenemos, al fijar  $L_1 = L_2 + h$ ,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_{N+1}}{2}\right) = \left(1 + \frac{h}{L_2}\right)^{\frac{3N}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \simeq \exp\left(\frac{3Nh}{2L_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right).$$

Así la amplitud crece *exponencialmente* con  $N$ .

Después de un número finito de oscilaciones el lado derecho de esta ecuación se hace más grande que uno y la teoría es invalida: esto pasa cuando el sistema tiene suficiente energía para que el columpio puede rotar alrededor del soporte. En la práctica un columpio real no incrementa su amplitud tan rápidamente ya que los cambios en la longitud ocurren más gradualmente y no precisamente en un punto óptimo.

En el ejemplo anterior, el movimiento con amplitud grande se produce cambiando los parámetros del sistema con *una frecuencia doble* que la frecuencia natural del sistema. Esto es típico, pero la frecuencia no tiene que ser exactamente el doble que la frecuencia natural,  $\omega_0$ , el sistema puede ser excitada paramétricamente con una frecuencia cercana. Un problema importante es determinar el intervalo de la frecuencia alrededor de  $2\omega_0$ , en el cual ocurren resonancias. La excitación paramétrica puede también ocurrir cerca de las frecuencias  $2\omega_0/n$  para cualquier entero  $n$ .

### 3.3 Sistemas lineales de dimensión uno

Ahora consideraremos los sistemas lineales de primer orden, y cuales son de mucha utilidad para estudiar sistemas más complicados. El sistema homogéneo de primer orden más general tiene la forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \quad (3.4)$$

donde  $a(t)$  es una función  $T$ -periódica del tiempo,  $a(t+T) = a(t)$ , para todo  $t$ . Esta ecuación puede ser resuelta por integración directa,

$$x(t) = x(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right), \quad (3.5)$$

pero es de mucho mejor usar métodos de solución que pueden ser generalizados para sistemas de dimensión superior.

La linealidad de las ecuaciones y la periodicidad del coeficiente  $a(t)$  dan restricciones acerca del posible tipo de solución: si  $x(t)$  es una solución entonces la función  $y(t) = x(t+T)$  es también una solución, ya que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} x(t+T) = \frac{dx(t+T)}{d(t+T)} = a(t+T)x(t+T) = a(t)y(t).$$

Por tanto,  $x(t+T)$  y  $x(t)$  satisfacen la misma ecuación. Sin embargo, las soluciones no son la misma función, pero ya que la ecuación diferencial es de primer orden y lineal, existe solo una solución linealmente independiente, por lo tanto debemos tener

$$x(t+T) = cx(t), \quad (3.6)$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $t$ .

### Problema 3.3.1

Muestre que para cualquier entero  $n$ ,

$$x(t_0 + nT) = c^n x(t_0), \quad (3.7)$$

y utilice la ecuación (3.5) para deducir que

$$c = \exp \left( \int_0^T a(t) dt \right).$$

Que propiedad de  $a(t)$  es requerida para que  $x(t)$  sea periódica?

**Demostración.**

Para resolver la primera parte del problema procederemos con el método de inducción matemática sobre  $n$

$$\begin{aligned}
 x(t+T) &= cx(t) \\
 &\vdots \\
 x(t+(n-1)T) &= cx(t+(n-2)T) \\
 x(t+nT) &= cx(t+(n-1)T) \\
 \\ 
 x(t+nT) &= c^2x(t+(n-2)T) \\
 &= c^3x(t+(n-3)T) \\
 &= c^4x(t+(n-3)T) \\
 &\vdots \\
 &= c^n x(t)
 \end{aligned}$$

Ahora resolveremos la segunda parte, para esto resolvamos la ecuación diferencial original

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t)$$

utilizando el método de separación de variables,

$$\frac{dx}{x(t)} = a(t)dt,$$

integrando en ambos lados tenemos

$$\ln \left| \frac{x(t+T)}{x(t)} \right| = \int_t^{t+T} a(s)ds = \int_0^T a(t)dt.$$

Aplicando la función exponencial en ambos lados, tenemos

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = \exp \left( \int_0^T a(t)dt \right).$$

Entonces, por la ecuación (3.6) se tiene que  $c = x(t+T)/x(t)$ , por tanto

$$c = \exp \left( \int_0^T a(t) dt \right).$$

Finalmente resolvamos la tercera parte. Sabemos que para que  $x(t)$  sea periódica se tiene que cumplir que  $x(t+T) = x(t)$ , entonces en este caso  $c = 1$ , por tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \exp \left( \int_0^T a(t) dt \right) \\ \ln |1| &= \int_0^T a(t) dt \\ 0 &= \int_0^T a(t) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.4 Sistemas multidimensionales periódicos

La teoría general de sistemas lineales periódicos de  $n$  dimensiones es muy similar a la teoría de sistemas de una dimensión presentada en la sección anterior, pero es generalmente más difícil de aplicar ya que las soluciones de la ecuación de movimiento no puede ser normalmente expresada en términos de integrales.

Consideremos la ecuación lineal homogénea de orden  $n$

$$\frac{dy\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad A(t+T) = A(t) \quad \text{para todo } t, \quad (3.8)$$

donde  $A(t)$  es una matriz real,  $n \times n$ , cuyos elementos son funciones  $T$ -periódicas. Suponiendo que esta ecuación tiene  $n$  soluciones linealmente independientes  $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$ , podemos formar la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

que satisface la ecuación matricial

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi.$$

Los vectores  $y_k(t) = x_k(t+T)$  son también soluciones de la ecuación diferencial original, por lo que tenemos

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{d}{dt}x_k(t+T) = \frac{dx_k(t+T)}{d(t+T)} = A(t+T)x_k(t+T) = A(t)y_k.$$

Por tanto  $y_k(t)$  debe ser una combinación lineal de los  $x_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , esto es

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t)e_{jk}, \quad (3.9)$$

para algunas constantes  $e_{jk}$ . Estas nuevas soluciones pueden utilizarse para formar la matriz fundamental  $\Phi(t+T)$ , y de (3.9) tenemos

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)E,$$

donde  $E$  es una matriz con elementos  $e_{jk}$ . Ya que

$$\det(\Phi(t+T)) = \det(\Phi(t)) \det(E)$$

y  $\det(\Phi(t)) \neq 0$ ,  $E$  es no singular. En el caso especial  $\Phi(0) = I$  la matriz  $E$  es llamada *la matriz de monodromía* de la ecuación (3.8) y entonces  $E = \Phi(T)$ .

Los eigenvalores y eigenvectores de  $E$  son importantes. Si  $\lambda$  es un eigenvalor y  $\mathbf{a}$  el eigenvector asociado,  $E\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ , entonces la solución

$$z(t) = \Phi(t)\mathbf{a} \quad \text{tiene la propiedad} \quad z(t+T) = \lambda z(t), \quad \text{para todo } t.$$

Esto se sigue ya que

$$z(t+T) = \Phi(t+T)\mathbf{a} = \Phi(t)E\mathbf{a} = \lambda\Phi(t)\mathbf{a} = \lambda z(t), \quad \text{para todo } t.$$

Los eigenvalores de la matriz  $E$  son llamados *los multiplicadores característicos* o *números característicos* del sistema (3.8). Los eigenvalores de  $E$  son independientes de la elección de la matriz fundamental por tanto son una propiedad del sistema, no de cualquier solución particular. Esto se sigue que si las diferentes matrices fundamentales  $\Phi_1(t)$  y  $\Phi_2(t)$  dan lugar a las matrices  $E_1$  y  $E_2$ , entonces, ya que  $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$  (ver Sección de propiedades generales de sistemas lineales), para alguna constante  $C$ , tenemos

$$\Phi_2(t+T) = \Phi_1(t+T)C = \Phi_1(t)E_1C = \Phi_2(t)C^{-1}E_1C. \Rightarrow E_2 = C^{-1}E_1C.$$

Entonces  $E_1$  y  $E_2$  son similares y tienen los mismos eigenvalores.

Es conveniente escribir los eigenvalores en la forma

$$\lambda_k = e^{T\rho_k}, \quad \rho_k \in \mathbb{C},$$

donde  $\rho_k$  se hace único escogiendo su parte imaginaria si nos restringimos a que satisfacer  $-\pi < \Im(T\rho_k) \leq \pi$ , por tanto podemos escribir

$$\rho_k = \frac{1}{T} \ln(\lambda_k) \quad \text{o} \quad T\rho_k = \ln|\lambda_k| + i \arg(\lambda_k), \quad -\pi < \arg(\lambda_k) \leq \pi,$$

donde  $\ln z$  es la rama principal del logaritmo natural. Los  $\rho_k$  son llamados *los exponentes característicos*.

Si  $E$  tiene  $n$  eigenvalores distintos,  $\lambda_k$ , la ecuación (3.8) tiene  $n$  soluciones linealmente independientes, las cuales pueden ser escritas en la forma

$$z_k(t) = \mathbf{p}_k(t)e^{\rho_k t}, \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{p}_k(t)$  es una función vectorial periódica del tiempo. Esto se sigue ya que

$$\mathbf{p}_k(t+T) = z_k(t+T)e^{-\rho_k(t+T)} = z_k(t)e^{-\rho_k t} = \mathbf{p}_k(t), \quad \text{para todo } t.$$

Ahora verificamos la forma (3.10) de la solución. Sea  $C_1$  una matriz no singular tal que  $C_1^{-1}KC_1 = J$  tiene la forma canónica y hagamos

$$\Phi_1(t) = \Phi(t)C_1,$$

$$P_1(t) = P(t)C_1.$$

Entonces por el teorema de Floquet-Lyapunov,  $\Phi = P(t)e^{tK}$ , se tiene

$$\Phi_1(t) = P_1(t)e^{tJ}, \quad P_1(t+T) = P_1(t).$$

Una matriz fundamental es  $\Phi(t) = e^{tA}$ . Sea  $J$  la forma canónica de  $A$ , dada por la forma canónica de Jordan visto en el Capítulo 2, y supongamos que  $P$  es una matriz constante no singular tal que

$$AP = PJ.$$

Entonces

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1},$$

y ya que  $J$  tiene la forma canónica de Jordan, los eigenvalores de  $K$  son  $\rho_k$ , por lo tanto  $e^{tJ}$  tendrá la forma

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_0} & & & \\ & e^{tJ_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_s} \end{pmatrix},$$

donde

$$e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\rho_1} & & & \\ & e^{t\rho_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\rho_k} \end{pmatrix},$$

y

$$e^{tJ_i} = e^{t\rho_{k+i}} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ & & & \ddots & \\ & & & & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se ve que  $\lambda_i = e^{T\rho_k}$  y por lo tanto mientras  $\rho_k$  no está determinada de manera única, su parte real si lo está. De  $\Phi_1(t) = P_1(t)e^{tJ}$  se sigue que las columnas de  $\Phi_1(t)$ ,  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$ , las cuales forman un conjunto de  $k$  soluciones linealmente independientes de (3.8), son de la forma

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\rho_1} p_1(t), \\ z_2(t) &= e^{\rho_2} p_2(t), \\ &\vdots \\ z_k(t) &= e^{\rho_k} p_k(t), \end{aligned}$$

donde  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t)$  son las columnas periódicas de  $P_1(t)$ .

La ecuación (3.10) muestra que el comportamiento a largo plazo de la solución  $z_k$  es determinado solamente por la magnitud de  $\rho_k$ :

- Si  $|\rho_k| > 1$ ,  $z_k(t)$  es no acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ ;
- Si  $|\rho_k| < 1$ , entonces  $z_k(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ;
- Si  $|\rho_k| = 1$ , entonces  $z_k(t)$  oscila entre dos cotas finitas para todo  $t$ , sin embargo, estas no son necesariamente periódicas.

Una solución arbitraria será una combinación lineal de las  $z_k(t)$ , por tanto su comportamiento a largo plazo también dependerá de las condiciones iniciales. Pero si todas  $|\rho_k| > 1$ , entonces todas las soluciones serán no acotadas. Si todas  $|\rho_k| < 1$ , entonces todas las soluciones tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si todas  $|\rho_k| = 1$ , entonces todas las soluciones serán acotadas para toda  $t$ .

Ya que los valores de  $\rho_k$  son determinados por la matriz  $E = \Phi(T)^{-1}\Phi(t+T)$ , la cual depende solo de  $n$  soluciones linealmente independientes en el intervalo  $(t, t+T)$ , veremos que los sistemas lineales periódicos son especiales

por que el comportamiento a largo plazo de todas las soluciones depende solo de un número finito de soluciones en un intervalo finito.

La matriz  $E$  es importante y puede ser calculada usando el resultado  $\Phi(t+T) = \Phi(t)E$ . Integración numérica de  $t$  a  $t+T$  con la condición inicial  $\Phi(t) = I$  da  $E = \Phi(t+T)$ . Una traslación en el tiempo es equivalente a formar una nueva matriz fundamental, dando una matriz diferente  $E'$ , relativa a la original por una transformación similar. Por lo tanto fijamos el valor inicial de  $t$  a cero y calculamos la matriz de monodromía.

Esta parte de la teoría es resumida y hecha más precisa en el *teorema de Floquet-Lyapunov*.

Si matriz  $A(t)$  es real, entonces  $P(t)$  y  $K$  son reales y

$$P(t+T) = P(t)R$$

para alguna matriz real  $R$  que satisface  $R^2 = I$  y la cual conmuta con la matriz  $K$ , i.e.  $KR = RK$ . Si  $R = I$ , entonces  $P(t+T) = P(t)$ , pero por otro lado,  $P(t+2T) = P(t)$ .

#### Problema 3.4.1

Muestre que el matrizant  $\Phi(t)$  satisface  $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$ .

#### Demostración.

Sabemos que  $\Phi(t+T) = \Phi(t)E$ , donde  $E$  es la matriz con elementos  $e_{ij}$ . Ya que  $\Phi(t)$  es matrizant, cumple con  $\Phi(0) = I$ , entonces  $E = \Phi(T)$ , por tanto,  $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$ . ■

#### Problema 3.4.2

Si  $E$  tiene un eigenvalor  $\lambda$  que es una  $m$ -ésima raíz de la unidad,  $\lambda^m = 1$  ( $m$  es un entero positivo) con el eigenvector asociado  $\mathbf{a}$ , muestre que la solución  $\mathbf{z}(t) = \Phi(t)\mathbf{a}$  tiene período  $mT$ .

**Demostración.**

Empecemos con,  $\mathbf{z}(t) = \Phi(t)\mathbf{a}$ , de aquí tenemos

$$\mathbf{z}(t + mT) = \Phi(t + mT)\mathbf{a} = \Phi(t)E^m\mathbf{a} = \lambda^m\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t).$$

Por lo tanto,  $\mathbf{z}(t)$  es periódica y tiene periodo  $mT$ . ■

**Problema 3.4.3**

Utilice la ecuación (2.5) para mostrar que los multiplicadores característicos  $\lambda_k$  del sistema satisfacen la relación

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \exp\left(\int_0^T \text{Tr}(A(t))dt\right). \quad (3.11)$$

**Demostración.**

Recordemos lo que nos dice la ecuación (2.5),

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s))ds\right),$$

entonces aplicandola a nuestro problema nos queda, haciendo el cambio de intervalo,

$$\det(\Phi(T)) = \det(\Phi(0)) \exp\left(\int_0^T \text{Tr}(A(t))dt\right),$$

y ya que  $\Phi(0) = I$ , entonces  $\Phi(T) = E$ , por tanto

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k = \det(E) = \exp\left(\int_0^T \text{Tr}(A(t))dt\right). \quad \blacksquare$$

### 3.5 Eigenvalores reales e idénticos

Consideremos el sistema lineal de segundo orden con coeficientes  $T$ -periódicos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0, \quad a_k(t+T) = a_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (3.12)$$

el cual es equivalente a la ecuación matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad y = \frac{dx}{dt}, \quad (3.13)$$

Estamos interesados solo en el caso especial donde la matriz  $E$ , (3.9), tiene dos eigenvalores reales e idénticos, por tanto  $\text{Tr}(E)^2 = 4 \det(E)$ .

Si  $\lambda$  es este eigenvalor, entonces existe una solución para (3.12), que satisface

$$x_1(t+T) = \lambda x_1(t) \quad \text{para todo } t. \quad (3.14)$$

Sea  $x_2(t)$  cualquier solución de (3.12) la cual es linealmente independiente de  $x_1(t)$ . Ya que  $x_2(t+T)$  es también una solución de (3.12), existen constantes  $c_1$  y  $c_2$  tal que

$$x_2(t+T) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t). \quad (3.15)$$

El valor de  $c_2$  se encuentra evaluando el Wronskiano de las dos soluciones,

$$W(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t).$$

Si sustituimos las ecuaciones (3.14) y (3.15) en la expresión equivalente para  $W(t+T)$  obtenemos

$$W(t+T) = \lambda c_2 W(t).$$

Pero, la ecuación (2.5) nos da

$$W(t+T) = W(t) \exp \left( \int_0^T \text{Tr}(A) dt \right) = W(t) \exp \left( - \int_0^T a_1(t) dt \right),$$

y por tanto

$$\lambda c_2 = \exp \left( - \int_0^T a_1(t) dt \right). \quad (3.16)$$

Ahora construimos la matriz  $E$  usando las dos soluciones linealmente independientes con las condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = 1, \quad \dot{\xi}_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = 0, \quad \dot{\xi}_2(0) = 1,$$

por tanto

$$E = \begin{pmatrix} \xi_1(T) & \xi_2(T) \\ \dot{\xi}_1(T) & \dot{\xi}_2(T) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

y el multiplicador,  $\lambda$ , satisface la ecuación

$$\lambda^2 - (\xi_1(T) + \dot{\xi}_2(T))\lambda + \exp \left( - \int_0^T a_1(t) dt \right) = 0. \quad (3.18)$$

Pero nosotros habíamos supuesto que los eigenvalores son idénticos, por tanto esta ecuación tiene una raíz doble, y por tanto

$$\lambda^2 = \exp \left( - \int_0^T a_1(t) dt \right),$$

y entonces  $c_2 = \lambda$ . Así la ecuación (3.15) se convierte

$$x_2(t+T) = c_1 x_1(t) + \lambda x_2(t),$$

y existen dos casos a considerar.

#### Caso 1.

Si  $c_1 = 0$  tenemos  $x_2(t+T) = \lambda x_2(t)$ .

1° Si  $\lambda = 1$ , ( $\det(E) = 1$  y  $\text{Tr}(E) = 2$ ), ambas soluciones linealmente independientes son  $T$ -periódicas.

2° Si  $\lambda = -1$ , ( $\det(E) = 1$  y  $\text{Tr}(E) = -2$ ), ambas soluciones linealmente independientes son  $2T$ -periódicas.

Esta situación ocurre solo si la matriz  $E$  tiene dos eigenvectores linealmente independientes, esto es si

$$\dot{\xi}_1(T) = \xi_2(T) = 0 \quad \text{y} \quad \xi_1(T) = \dot{\xi}_2(T).$$

### Caso 2.

Si  $c_1 \neq 0$  definimos las siguientes dos funciones,

$$p_1(t) = e^{-\rho t} x_1(t), \quad \lambda = e^{\rho T},$$

$$p_2(t) = e^{-\rho t} x_2(t) - \frac{c_1 t}{T\lambda} p_1(t).$$

Vemos que  $p_1(t)$  es  $T$ -periódica. Ahora probaremos que  $p_2(t)$  es también  $T$ -periódica:

$$\begin{aligned} p_2(t+T) &= e^{-\rho(t+T)}(c_1 x_1(t) + \lambda x_2(t)) - \frac{c_1}{T\lambda}(t+T)p_1(t) \\ &= e^{-\rho t} x_2(t) - \frac{c_1 t}{T\lambda} p_1(t) = p_2(t). \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$x_2(t) = e^{\rho t} \left\{ p_2(t) + \frac{c_1 t}{T\lambda} p_1(t) \right\}. \quad (3.19)$$

Vemos que la amplitud de  $x_2(t)$  crece linealmente con  $t$ . Esta situación ocurre si la matriz  $E$  tiene solo un eigenvector.

Si  $\det(E) = 1$ , la raíz doble de la ecuación (2.6) es 1 y  $-1$ , entonces, en ambos casos, el período de las soluciones periódicas es  $T$  si  $\lambda = 1$ , ( $\text{Tr}(E) = 2$ ), y es  $2T$  si  $\lambda = -1$ , ( $\text{Tr}(E) = -2$ ).

## Capítulo 4

# Ecuaciones de Hill y de Mathieu

### 4.1 Ecuación de Hill

La ecuación de Hill puede ser escrita en la siguiente forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [a + p(t)]x = 0, \quad (4.1)$$

donde  $a$  es una constante y  $p(t)$  una función de período  $T$ . Un caso especial de esta ecuación es si tomamos  $p(t) = 2q \cos(2t)$  y  $T = \pi$ , esta ecuación es la ecuación de Mathieu, la cual se verá en la siguiente sección y es el tema principal de este trabajo. Definiendo  $y = \dot{x}$  podemos escribir la ecuación de Hill en la forma matricial estándar

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = A(t)\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - p(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Ya que  $\text{Tr}(A) = 0$ , la ecuación  $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)ds)\right)$  muestra que el  $\det(\Phi) = \text{constante}$  y por tanto  $\det(E) = 1$  y el producto de los eigenvalores es igual a uno. Los eigenvalores de  $E$  son dados por

$$\lambda^2 - \text{Tr}(E)\lambda + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = \text{Tr}(E) \pm \sqrt{\text{Tr}(E)^2 - 4}. \quad (4.3)$$

Por tanto el comportamiento a largo plazo de las soluciones es determinado principalmente por el único número real  $\text{Tr}(E)$ .

Consideremos dos soluciones independientes de (4.1) que satisfacen las condiciones iniciales

$$\eta_1(0) = 1, \quad \dot{\eta}_1(0) = 0 \quad \eta_2(0) = 0 \quad \dot{\eta}_2(0) = 1, \quad (4.4)$$

por tanto  $\Phi(0) = I$  y

$$\text{Tr}(E) = \eta_1(T) + \dot{\eta}_2(T). \quad (4.5)$$

Existen cinco casos diferentes según los valores de  $\text{Tr}(E)$ .

- (1)  $\text{Tr}(E) > 2$ . Los eigenvalores son positivos, diferentes, no iguales a  $+1$  y satisfacen  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ . Los exponentes característicos son  $\pm\rho$ , donde

$$T\rho = \ln\lambda_2 > 0$$

y dos soluciones linealmente independientes son

$$\xi_1(t) = e^{-\rho t} p_1(t), \quad \xi_2(t) = e^{\rho t} p_2(t), \quad (4.6)$$

donde  $p_k(t)$  son funciones periódicas con período  $T$ .

- (2)  $\text{Tr}(E) = 2$ . Los eigenvalores son idénticos e iguales a  $+1$ , por tanto  $\rho = 0$ . Ahora el comportamiento de las soluciones depende del número de eigenvectores de  $E$  independientes:

- (2a) la matriz  $E$  tiene dos eigenvectores linealmente independientes: existen dos soluciones con período  $T$  y como en (4.6),

$$\xi_1(t) = p_1(t), \quad \xi_2(t) = p_2(t),$$

donde  $p_k(t)$  son funciones  $T$ -periódicas.

(2b) la matriz  $E$  tiene un eigenvector linealmente independiente: las dos soluciones independientes de (4.1) son

$$\xi_1(t) = p_1(t), \quad \xi_2(t) = tp_1(t) + p_2(t), \quad (4.7)$$

donde  $p_k(t)$  son funciones  $T$ -periódicas. La primera solución es acotada. La amplitud de la segunda solución crece linealmente con  $t$ , por tanto existen una solución estable y una solución inestable. Un ejemplo de este comportamiento es mostrado en las Figuras 4.5 y 4.6.

(3)  $|\text{Tr}(E)| < 2$ . Los eigenvalores de  $E$  son complejos y pueden escribirse en la forma  $\lambda = e^{\pm i\theta}$ ,  $0 < \theta < \pi$ , con exponentes característicos  $T\rho = \pm i \cos^{-1}(\text{Tr}(E)/2)$ . Ahora las dos soluciones independientes son

$$\xi_1(t) = e^{i\rho t} p_1(t), \quad \xi_2(t) = e^{-i\rho t} p_2(t), \quad (4.8)$$

donde  $p_k(t)$  son funciones  $T$ -periódicas. En este caso todas las soluciones son acotadas para todo tiempo  $t$ .

(4)  $\text{Tr}(E) = -2$ . Los eigenvalores son idénticos e iguales a  $-1$ . De nuevo el comportamiento de las soluciones depende de el número de eigenvectores independientes de  $E$ :

(4a) la matriz  $E$  tiene dos eigenvectores linealmente independientes: existen dos soluciones con período  $2T$  ya que  $T\rho = i\pi$ , y las dos soluciones independientes son

$$\xi_1(t) = p_1(t), \quad \xi_2(t) = p_2(t),$$

y además se cumplen las condiciones de periodicidad

$$\xi_1(t+T) = -\xi_1(t), \quad \xi_2(t+T) = -\xi_2(t).$$

- (4b) la matriz  $E$  tiene solo un eigenvector linealmente independiente: las dos soluciones independientes de (4.1) son

$$\xi_1(t) = p_1(t), \quad \xi_2(t) = tp_1(t) + p_2(t), \quad (4.9)$$

donde  $p_k(t)$  son dos funciones de  $2T$ -periódicas. La primera solución es acotada. La amplitud de la segunda solución crece linealmente con  $t$ , por tanto existe una solución estable y una solución inestable. Un ejemplo de este comportamiento se muestra en las Figuras 4.3 y 4.4.

- (5)  $\text{Tr}(E) < -2$ . Los eigenvalores son reales, negativos, diferentes y no iguales a  $-1$  y satisfacen  $\lambda_2 < -1 < \lambda_1 < 0$ . Los exponentes característicos son

$$T\rho = \pm \ln(-\lambda_2) + i\pi,$$

y las dos soluciones linealmente independientes son

$$\xi_1(t) = e^{-\rho t} p_1(t), \quad \xi_2(t) = e^{\rho t} p_2(t), \quad (4.10)$$

con  $\xi_1(t)$  decreciente y  $\xi_2(t)$  creciente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Esta clasificación de estabilidad nos da la impresión de que existe una fuerte distinción entre soluciones estables e inestables. Esto es verdad, pero solo para tiempos largos, o formalmente  $t \rightarrow \infty$ . Si observamos una solución en un tiempo finito, la distinción no es tan clara, ya que las soluciones son generalmente funciones diferenciables, suaves, continuas que dependen de los parámetros del sistema. Por ejemplo, si  $\text{Tr}(E) = -2$ , la amplitud de una solución crece linealmente con  $t$ : si  $\text{Tr}(E) = -2 + \epsilon^2$ , la amplitud de esta solución también inicialmente crecerá con  $t$  y puede (si  $\epsilon$  es suficientemente

pequeña) alcanzar un valor relativamente grande antes de decrecer. En general, el tiempo en el cual es clara la distinción entre inestabilidad y estabilidad de las soluciones es creciente cuando  $\epsilon$  decrece.

## 4.2 La ecuación de Mathieu

Para ilustrar el comportamiento dicho anteriormente en la sección de la ecuación de Hill, consideremos la ecuación de Mathieu,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a - 2q \cos 2t)x = 0, \quad (4.11)$$

donde fijamos el parámetro  $q$ , por ejemplo  $q = 2$  e investigando como las soluciones dependen de parámetro  $a$  calculando  $\text{Tr}(E)$ .

La teoría de Sturm–Liouville muestra que para  $0 \leq t < 2\pi$  existen soluciones  $\pi$  y  $2\pi$  periódicas en valores discretos de  $a$ , los cuales dependen de  $q$ . Estos valores son clasificadas de acuerdo a la convención  $a_0(q) < b_1(q) < a_1(q) < \dots$ ,  $q \neq 0$ , con  $a_k$  siendo asociado con las soluciones pares y  $b_k$  las soluciones impares. Aquí consideraremos las soluciones para otros valores de  $a$ .

La figura 4.1 muestra la gráfica de  $\text{Tr}(E)$  para  $-2 < a < 12$ , la cual fue calculada utilizando *Maple* para integrar la ecuación con condiciones iniciales (4.4) de  $t = 0$  a  $t = \pi$ , el período de  $A(t)$ .

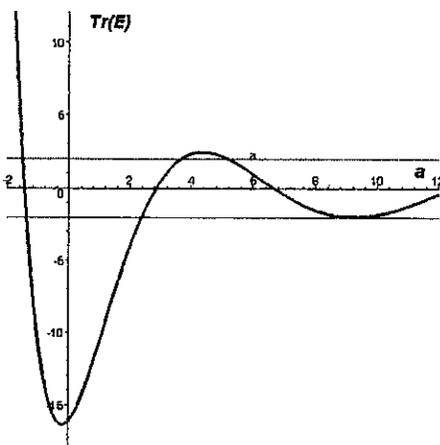


Figura 4.1 Gráfica de  $\text{Tr}(E)$  para la ecuación (4.11) con  $q = 2$

La forma general de  $\text{Tr}(E)$  mostrada en esta figura es típica en este tipo de problema: observamos la inclinación fuerte del gradiente de  $\text{Tr}(E)$  para  $a < 0$ . Para  $a$  grande la curva es casi tangente a las líneas  $\text{Tr}(E) = \pm 2$ .

Los puntos donde  $\text{Tr}(E) = 2$  dan los eigenvalores  $a_0(q)$ ,  $\{b_{2k}(q), a_{2k}(q)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , correspondientes a las funciones de Mathieu de período  $\pi$  (ver Capítulo 3),  $x = ce_0(t, q)$ ,  $\{se_{2k}(t, q), ce_{2k}(t, q)\}$ .

Los puntos donde  $\text{Tr}(E) = -2$  dan los eigenvalores  $\{b_{2k+1}(q), a_{2k+1}(q)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , correspondientes a las funciones de Mathieu de período  $2\pi$   $\{se_{2k+1}(t, q), ce_{2k+1}(t, q)\}$ .

Notemos cuando  $a \approx 9.2$  la gráfica de  $\text{Tr}(E)$  parece ser tangencial a la línea  $-2$ . La figura también muestra que si parámetro  $a$  está en el intervalo  $b_r(q) \leq a \leq a_r(q)$ , las soluciones son inestables, en otro caso las soluciones son estables. Estas características son resumidas en las gráficas de  $a_r(q)$  y  $b_r(q)$  y mostradas en la siguiente figura:

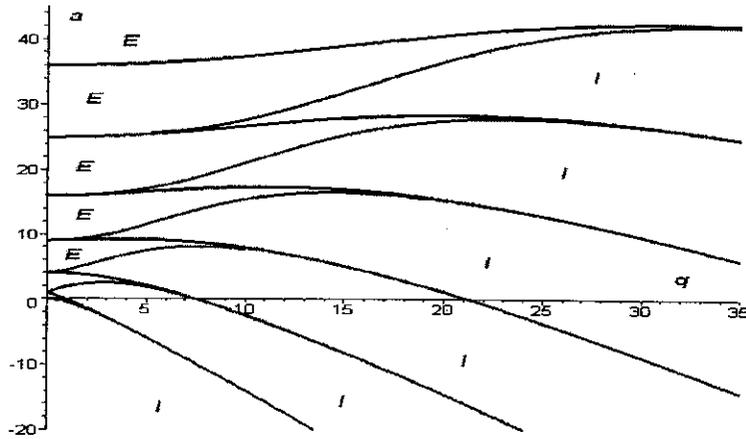


Figura 4.2. Regiones de estabilidad en el plano  $(q, a)$

Las siguientes dos figuras muestran las dos soluciones independientes para  $a = a_1(2) = 2.379199881$ , donde  $\text{Tr}(E) = -2$ . La Figura 4.3 es la solución de período  $2\pi$  con las condiciones iniciales  $\xi(0) = 1, \dot{\xi}(0) = 0$ . La Figura 4.4 es la solución con las condiciones iniciales  $\xi(0) = 0, \dot{\xi}(0) = 1$ , cuya amplitud crece linealmente con  $t$ .

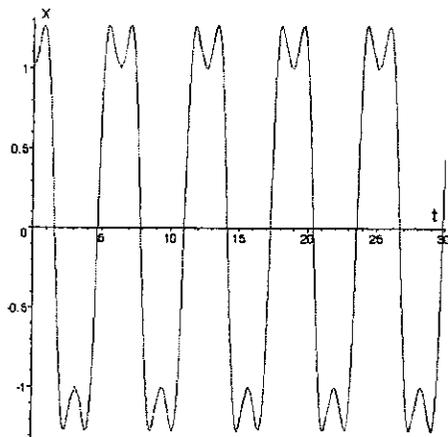


Figura 4.3 Solución  $2\pi$  periódica para  $a = a_1(2) = 2.379199881$  correspondiente a  $se_1(t, q)$

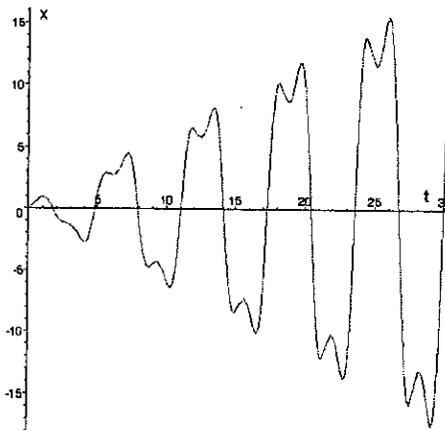


Figura 4.4 Solución no periódica para  $a = 2.379199881$

Las siguientes dos figuras muestran las dos soluciones independientes en  $a = b_2(q) = 3.672232706$ , donde  $\text{Tr}(E) = 2$ . La Figura 4.5 es la solución de período  $\pi$  con las condiciones iniciales  $\xi(0) = 0, \dot{\xi}(0) = 1$ . La Figura 4.6 es la solución con las condiciones iniciales  $\xi(0) = 1, \dot{\xi}(0) = 0$ , cuya amplitud crece con  $t$ .

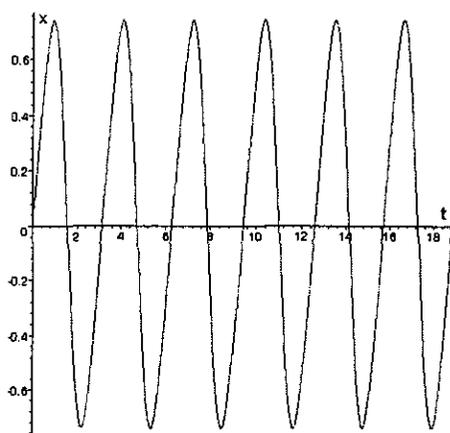


Figura 4.5 Solución  $\pi$ -periódica para  $a = 3.672232706$  correspondiente a  $se_2(t, q)$

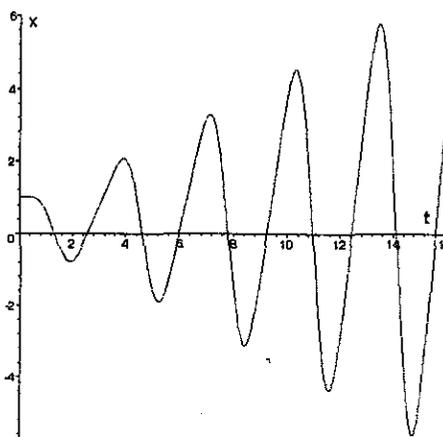


Figura 4.6 Solución no periódica para  $a = 3.672232706$

El cálculo de  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2$ , y la realización de las gráficas de las figuras anteriores fueron hechas con *Maple*; es por eso que a continuación, y como se hará muy seguido en este trabajo, se presentan las funciones que se pueden hacer en *Maple* para su realización.

```
with(LinearAlgebra):
eq1:=diff(x(t),t$2)+(a-2*q*cos(2*t))*x(t)=0:
xS:=rhs(dsolve(eq1,x(t))): xSd:=diff(xS,t):
x1:=subs(t=0,xS): x2:=subs(t=0,xSd):
caso1:=solve({x1=1,x2=0}): caso2:=solve({x1=0,x2=1}):
phi1:=subs(caso1,xS): phi2:=subs(caso2,xS):
Phi:=<<phi1,phi2>| <diff(phi1,t),diff(phi2,t)>>:
PhiPi:=subs(t=Pi,Phi): E:=unapply(Trace(PhiPi),q,a):
a0:=fsolve(evalf(E(2,a)=2),a=-2..-1);
a1:=fsolve(evalf(E(2,a)=-2),a=2..3);
a2:=fsolve(evalf(E(2,a)=2),a=5..6);
b1:=fsolve(evalf(E(2,a)=-2),a=-1.5..-1);
```

```

b2:=fsolve(evalf(E(2,a)=2),a=3..4);
i1:=0: i2:=1: eq1:={diff(x(t),t$2)+(a-2*q*cos(2*t))*x(t)=0}:
ICs:={x(0)=i1,D(x)(0)=i2}:
xSol:=unapply(rhs(dsolve(eq1 union ICs, x(t))),a,q,t):
plot(xSol(b2,2,t),t=0..6*Pi,numpoints=200):
plot([E(2,a),2,-2],a=-2..12, -18..12,color=[blue,red,red],
      thickness=[3,1,1],numpoints=200):
for q from 0 by 2 to 20 do
  fsolve(evalf(E(q,a)=2),a=-10..30) end do:
for q from 0 by 2 to 20 do
  fsolve(evalf(E(q,a)=-2),a=-10..30) end do:
q:='q': i1:=1: i2:=0:
eq1:={diff(x(t),t$2)+(a-2*q*cos(2*t))*x(t)=0}:
ICs:={x(0)=i1,D(x)(0)=i2}:
xS1:=unapply(rhs(dsolve(eq1 union ICs,x(t))),a,q,t):
plot(xS1(a1,2,t),t=0..30,numpoints=200):
plot(xSol(a1,2,t),t=0..30,numpoints=200):
plot(xS1(b2,2,t),t=0..16,numpoints=200):

```

$$a0 := -1.513956885$$

$$a1 := 2.379199881$$

$$a2 := 5.172665133$$

$$b1 := -1.390676501$$

$$b2 := 3.672232706$$

### 4.3 La ecuación de Mathieu amortiguada

Ahora consideraremos brevemente los efectos de agregar un término amortiguado lineal pequeño a la ecuación de Mathieu, la cual se convierte

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu \frac{dx}{dt} + (a - 2q \cos 2t)x = 0, \quad \nu \geq 0. \quad (4.12)$$

Supongamos que  $\nu$  es pequeña. Cuando  $\nu = 0$ , se presenta el caso anterior. Para  $q$  pequeñas vemos de la Figura 4.2 que las regiones de inestabilidad parten de los puntos  $a = n^2$  en el eje de las  $a$ . El término amortiguado,  $\nu \dot{x}$ , reduce energía del sistema, por tanto el término amortiguado compite con el

término que conduce resonancia. Entonces, esperamos que la presencia de amortiguamiento haga que las áreas asociadas con el movimiento inestable disminuyan.

La ecuación de Mathieu amortiguada tiene la forma canónica

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad y = \frac{dx}{dy}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2q \cos(2t) - a & -\nu \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Así, usando la ecuación (2.5), vemos que el determinante de la matriz de monodromía,  $E$ , es  $\det(E) = e^{-\nu\pi}$  (ya que  $T = \pi$ ). Fijando  $\text{Tr}(E) = 2\theta$ , los eigenvalores de  $E$ , los multiplicadores característicos, son las soluciones de

$$\lambda^2 - 2\theta\lambda + e^{-\nu\pi} = 0 \quad \implies \lambda_{\pm} = \theta \pm \sqrt{\theta^2 - e^{-\nu\pi}}.$$

La condición de estabilidad es  $|\lambda_{\pm}| \leq 1$ , y ya que  $\lambda_+\lambda_- = e^{-\nu\pi} < 1$  vemos que es posible que ambos multiplicadores ser reales y que las soluciones ser estables.

### 4.3.1 Fronteras de estabilidad

Si  $\theta > 0$  entonces  $0 < \lambda_- < \lambda_+$ , por tanto la frontera de estabilidad está dada por la condición  $\lambda_+ = 1$ , esto es,

$$\theta = \frac{1}{2}(1 + e^{-\nu\pi}).$$

Si  $\theta < 0$  entonces  $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ , por tanto la frontera de estabilidad está dada por la condición  $\lambda_- = -1$ , esto es,

$$\theta = -\frac{1}{2}(1 + e^{-\nu\pi}).$$

De esto se sigue que la condición de estabilidad es

$$|\text{Tr}(E)| < 1 + e^{-\nu\pi}.$$

Si  $\text{Tr}(E) = 1 + e^{-\nu\pi}$  entonces  $\lambda_+ = 1$ , y  $\lambda_- = e^{-\nu\pi}$  y la teoría general nos muestra que dos soluciones independientes de (4.12) son

$$p_+(t), \quad \text{y} \quad p_-(t)e^{-\nu t},$$

donde  $p_{\pm}(t)$  son funciones  $\pi$ -periódicas de  $t$ . Ejemplos de tales soluciones se muestran en las Figuras 4.8 y 4.9.

Si  $\text{Tr}(E) = -(1 + e^{-\nu\pi})$  entonces  $\lambda_- = -1$  y  $\lambda_+ = -e^{-\nu\pi}$  y dos soluciones independientes de (4.12) son

$$q_-(t), \quad \text{y} \quad q_+(t)e^{-\nu t},$$

donde  $q_{\pm}(t)$  son funciones  $2\pi$ -periódicas de  $t$ . Ejemplos de tales soluciones se muestran en las Figuras 4.10 y 4.11.

### 4.3.2 Un ejemplo numérico

El efecto de amortiguamiento es visto graficando  $\text{Tr}(E)$  como función de  $a$ , para  $q$  y  $\nu$  fijos. Para  $q = 1$  y  $\nu = 0.2$  tal gráfica es mostrada a continuación.

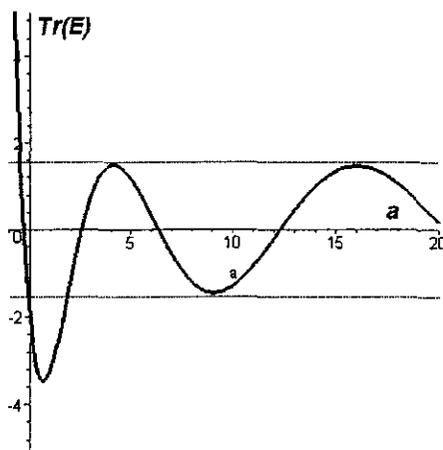


Figura 4.7 Gráfica de  $\text{Tr}(E)$  para  $q = 1$  y  $\nu = 0.2$

En este problema las fronteras entre las regiones estables e inestables son  $|\text{Tr}(E)| = 1.533$  y un buen estudio de la región cercana al  $\max(|\text{Tr}(E)|)$  muestra que existen solo tres intersecciones:

$$a = -0.451679, \quad -0.883037, \quad 1.837843.$$

Así, para  $q = 1$  y  $\nu = 0.2$  las únicas regiones inestables son:

$$a < -0.452 \quad \text{y} \quad -0.0883 < a < 1.838.$$

Si conocemos los valores de  $a$  en los cuales  $\text{Tr}(E) = 1 + e^{-\nu\pi}$ , nos permite calcular las dos soluciones  $p_+(t)$  y  $e^{-\nu\pi}p_-(t)$  usando los eigenvalores de  $E$  para definir las condiciones iniciales. Para el caso mostrado en la Figura 4.7, con  $a = -0.4517$  donde  $\text{Tr}(E) = 1 + e^{-\nu\pi}$ , tenemos

$$E = \begin{pmatrix} 0.6601 & 0.0404 \\ 1.067 & 0.8734 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0.1178 \\ 0.9930 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \begin{pmatrix} -0.3037 \\ 0.9528 \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_+ = 1$  y  $\lambda_- = 0.5335$ . Por tanto las condiciones iniciales

$$(x(0), \dot{x}(0))^T = \mathbf{e}_+, \quad (x(0), \dot{x}(0))^T = \mathbf{e}_-$$

nos dan una función  $\pi$ -periódica  $p_+(t)$  y una función exponencialmente decreciente  $e^{-\nu t}p_-(t)$ . A continuación se muestra las gráficas de estas dos funciones.

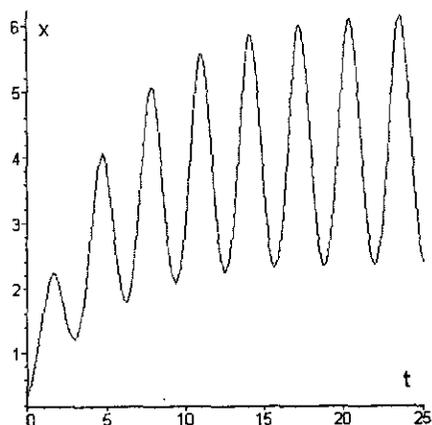


Figura 4.8 Gráfica de una solución  $\pi$ -periódica  $p_+(t)$  para  $a = -0.4516794757$

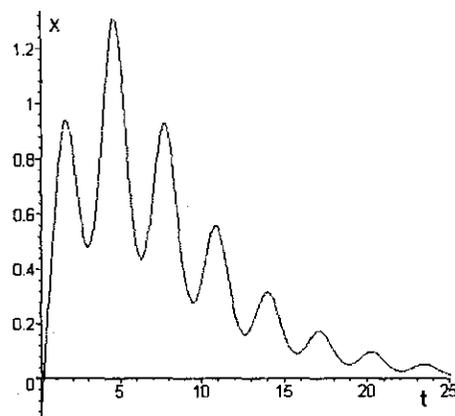


Figura 4.9 Gráfica de una solución decreciente  $e^{-\nu t}p_-(t)$  para  $a = -0.4516794757$

En la frontera  $\text{Tr}(E) = -(1 + e^{\nu\pi})$ , una solución es  $a = 1.8378$  y aquí tenemos

$$E = \begin{pmatrix} -0.6568 & -0.0385 \\ -1.0992 & -0.8767 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0.1115 \\ 0.9938 \end{pmatrix}, \quad e_+ = \begin{pmatrix} 0.2980 \\ -0.9546 \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_- = -1$  y  $\lambda_+ = -0.5335$ . Las gráficas de estas dos soluciones son mostradas en las siguientes dos figuras.

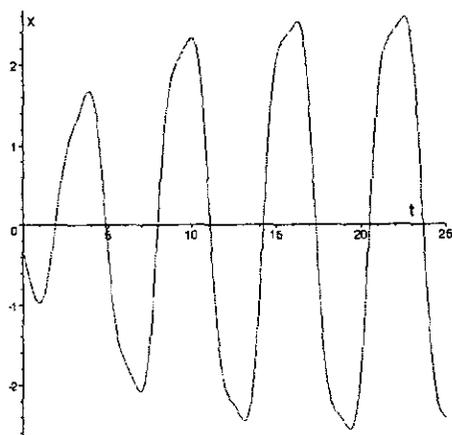


Figura 4.10 Gráfica de una solución  $2\pi$ -periódica  $q_-(t)$  para  $a = 1.837843088$

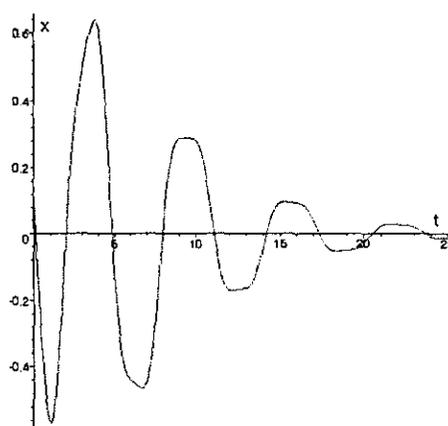


Figura 4.11 Gráfica de una solución decreciente  $e^{-\nu t}q_+(t)$  para  $a = 1.837843088$

Los resultados se pueden obtener utilizando el sistema *Maple*, como se muestra mediante el código presente a continuación.

```

with(LinearAlgebra): with(plots):
eq1:=diff(x(t),t$2)+a*x(t)-2*x(t)*q*cos(2*t)+nu*diff(x(t),t):
xS:=rhs(dsolve(eq1,x(t))): xSd:=diff(xS,t):
x1:=subs(t=0,xS): x2:=subs(t=0,xSd):
caso1:=solve({x1=1,x2=0},{_C1,_C2}):
caso2:=solve({x1=0,x2=1},{_C1,_C2}):
phi1:=subs(caso1,xS): phi2:=subs(caso2,xS):
Phi:=<<phi1,phi2>|<diff(phi1,t),diff(phi2,t)>>:
PhiPi:=subs(t=Pi,Phi):
E:=unapply(Trace(PhiPi),q,a,nu):
c0:=evalf(subs(nu=0.2,1+exp(-nu*Pi))):
a0:=fsolve(evalf(E(1,a,0.2)=c0),a=-1..0):
a1:=fsolve(evalf(E(1,a,0.2)=-c0),a=-0.5..0):
a2:=fsolve(evalf(E(1,a,0.2)=-c0),a=1..2):
E1:=evalf(subs(a=a0,q=1,nu=0.2,PhiPi)):
E2:=evalf(subs(a=a2,q=1,nu=0.2,PhiPi)):
plot([E(1,a,0.2),c0,-c0],a=-1..20,-5..5,
      color=[blue,red,red],thickness=[3,1,1]):
(v1,e1):=Eigenvectors(E1): simplify(v1): I1:=simplify(e1):
(v2,e2):=Eigenvectors(E2): simplify(v2): I2:=simplify(e2):
ICs1:={x(0)=I1[1,1],D(x)(0)=I1[2,1]}:
xSol:=unapply(rhs(dsolve({eq1} union ICs1,x(t))),a,q,nu,t):
plot(xSol(a0,1,0.2,t),t=0..25):
ICs2:={x(0)=I1[1,2],D(x)(0)=I1[2,2]}:
xSol2:=unapply(exp(-nu*t)*rhs(dsolve({eq1} union ICs2,x(t))),
               a,q,nu,t):
plot(xSol2(a0,1,0.2,t),t=0..25):
ICs3:={x(0)=I2[1,1],D(x)(0)=I2[2,1]}:
xSol3:=unapply(rhs(dsolve({eq1} union ICs3,x(t))),a,q,nu,t):
plot(xSol3(a2,1,0.2,t),t=0..25):
ICs4:={x(0)=I2[1,2],D(x)(0)=I2[2,2]}:
xSol4:=unapply(exp(-nu*t)*rhs(dsolve({eq1} union ICs4,x(t))),
               a,q,nu,t):
plot(xSol4(a2,1,0.2,t),t=0..25):
G1:=plot(E(2,a,0),a=-2..10,color=blue):
G2:=plot(E(2,a,0.1),a=-2..10,color=green):
G3:=plot(E(2,a,0.2),a=-2..10,color=red):
G4:=plot(E(2,a,0.3),a=-2..10,color=magenta):
G5:=plot(E(2,a,0.4),a=-2..10,color=orange):
display({G1,G2,G3,G4,G5}):

```

Las gráficas que resultan de las funciones ya fueron mostradas en las Figuras 4.7–4.11.

## 4.4 Soluciones analíticas aproximadas

En ésta sección consideramos la construcción de soluciones analíticas aproximadas periódicas de la ecuación de Mathieu amortiguada mediante la teoría de perturbaciones.

Encontrar las expansiones usando la teoría de perturbaciones para soluciones periódicas en la presencia de amortiguamiento es más complicado que cuando no hay amortiguamiento, excepto si  $a \approx 0$  o  $a \approx 1$ .

### 4.4.1 El caso: $a_0 = 1$ , $A_0 = 1$ , $a_1 = \sqrt{1 - \mu^2}$

Sabemos que el análisis necesario para obtener soluciones por medio de la teoría de perturbaciones es algebraicamente laborioso, por tanto en esta sección describimos los primeros términos de las expansiones para casos particulares.

Los cálculos completos se pueden hacer usando métodos de álgebra computacional (por ejemplo, con los sistemas *Maple*, *Mathematica*, *Derive*, *Reduce*, *MuPAD*, *Maxima*, entre otros). Particularmente, utilizamos el sistema *Maple*.

Si suponemos que  $\nu$  y  $q$  son pequeñas e inicialmente fijamos

$$\nu = \mu q$$

para derivar una expansión respecto al parámetro  $q$ .

La ecuación es conveniente escribirla en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(q)x = q \left( 2x \cos 2t - \mu \frac{dx}{dt} \right), \quad \nu = \mu q.$$

Ahora escribiremos  $x(t)$  y  $a(q)$  como una serie de potencias en  $q$ ,

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)q + x_2(t)q^2 + \dots,$$

$$a(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots,$$

para obtener el conjunto infinito de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + a_0x_0 &= 0, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + a_0x_1 &= -a_1x_0 + 2x_0 \cos 2t - \mu \frac{dx_0}{dt}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + a_0x_2 &= -a_2x_0 - a_1x_1 + 2x_1 \cos 2t - \mu \frac{dx_1}{dt}, \\ &\vdots \\ \frac{d^2x_n}{dt^2} + a_0x_n &= -\sum_{k=1}^n a_k x_{n-k} + 2x_{n-1} \cos 2t - \mu \frac{dx_{n-1}}{dt}. \end{aligned}$$

Este método puede usarse si  $a_0 = 0$  o  $a_0 = 1$  pero falla si  $a_0 \geq 2$  (ver discusiones más adelante). En este análisis de teoría de perturbaciones consideraremos el caso  $n = 1$ , y por tanto encontraremos una aproximación para  $q_-(t)$ , la solución  $2\pi$ -periódica.

La solución de la ecuación para  $x_0(t)$  es

$$x_0(t) = A_0 \cos t + B_0 \sin t,$$

donde  $A_0(t), B_0(t)$  son constantes que es necesario determinar. Sustituyendo la ecuación anterior en el lado derecho de la ecuación para  $x_1$  tenemos, después de algunas simplificaciones,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 &= [A_0(1 - a_1) - \mu B_0] \cos t + [B_0(1 + a_1) - \mu A_0] \sin t \\ &\quad + A_0 \cos 3t + B_0 \sin 3t. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Esta ecuación tiene soluciones periódicas solo si los coeficientes de  $\cos t$  y  $\sin t$  son cero:

$$A_0(1 - a_1) - \mu B_0 = 0, \quad B_0(1 + a_1) - \mu A_0 = 0. \quad (4.15)$$

En el límite no amortiguado, es el caso  $\mu = 0$ , las ecuaciones (4.15) tienen dos soluciones:

$$(i) \quad a_1 = -1, \quad A_0 = 0 \longrightarrow x = B_0 \operatorname{sen} t \quad \text{nos llevan a } se_1(q, t),$$

$$(ii) \quad a_1 = 1, \quad B_0 = 0 \longrightarrow x = A_0 \operatorname{cos} t \quad \text{nos llevan a } ce_1(q, t),$$

donde  $A_0$  y  $B_0$  son elegidos para satisfacer condiciones apropiadas de normalización.

Si  $\mu > 0$  las ecuaciones homogéneas (4.15) tienen una única solución solo si el determinante de los coeficientes es cero, esto es si

$$a_1^2 = 1 - \mu^2, \tag{4.16}$$

que nos lleva a dos soluciones

$$(i) \quad a_1 = -\sqrt{1 - \mu^2}, \quad A_0 = \mu B_0 / (1 + \sqrt{1 - \mu^2}),$$

$$(ii) \quad a_1 = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad B_0 = \mu A_0 / (1 + \sqrt{1 - \mu^2}).$$

Ya que  $a_0 = 1$  la ecuación (4.16) nos da, en términos de la variable original  $\nu = \mu q$ , las siguientes expresiones:

$$a = 1 \pm \sqrt{q^2 - \nu^2} \quad \text{o} \quad q^2 - (a - 1)^2 = \nu^2, \tag{4.17}$$

las cuales son la ecuación de una hipérbola en el plano  $(q, a)$ , esto es mostrado en la Figura 4.12, la cual también muestra la región donde son inestables las soluciones. Las asíntotas de esta hipérbola,  $a = 1 \pm q$ , son las fronteras entre las regiones estables e inestables en el límite no amortiguado,  $\nu = 0$ ,

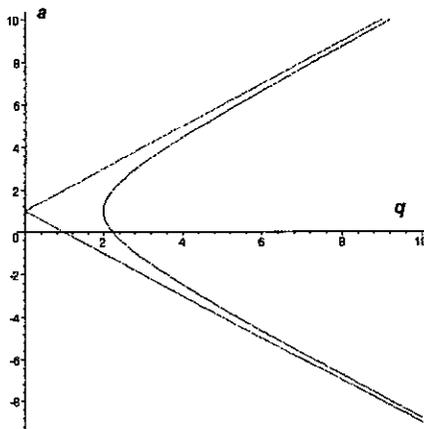


Figura 4.12 Una rama de la hipérbola  $(a - 1)^2 = q^2 - \nu^2$

```
with(plots): nu := 2:
implicitplot([a=1+q, a=1-q, (a-1)^2=q^2-nu^2],
             q=0..10, a=-10..10, color=[red,red,blue],
             numpoints=3000);
```

Este análisis muestra que si  $0 \leq q < \nu$  y  $a \approx 1$  todas las soluciones son estables, así para  $q$  pequeñas, las soluciones que son inestables cuando  $\nu = 0$  llegan a ser estables cuando  $\nu > 0$ .

Ahora regresamos a la derivación de la expansión del problema. Las únicas soluciones son obtenidas fijando el coeficiente del  $\cos t$  o del  $\sin t$ . La solución que reduce a  $se_1(t, q)$  cuando  $\nu = 0$  se obtiene dejando fijos  $a_1 = -\sqrt{1 - \mu^2}$ ,  $B_0 = 1$  y garantizándose que no existe el término  $\sin t$  en  $x_k(t)$ ,  $k \geq 1$ . Similarmente, la solución que reduce a  $ce_1(t, q)$  cuando  $\nu = 0$  se obtiene dejando fijo  $a_1 = \sqrt{1 - \mu^2}$ ,  $A_0 = 1$  y garantizándose que no existe el término de  $\cos t$  en  $x_k(t)$ ,  $k \geq 1$ .

En el siguiente problema encontraremos la segunda solución fijando  $A_0 = 1$  y  $a_1 = \sqrt{1 - \mu^2}$ . La ecuación (4.14) para  $x_1(t)$  ahora se convierte en

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \cos 3t + B_0 \sin 3t, \quad B_0 = \frac{\mu}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}},$$

teniendo como solución

$$x_1(t) = -\frac{1}{8} \cos 3t - \frac{B_0}{8} \operatorname{sen} 3t + B_1 \operatorname{sen} t$$

para alguna constante  $B_1$ . Si sustituimos esta solución en la ecuación para  $x_2(t)$ , igualando los coeficientes de  $\cos t$  y  $\operatorname{sen} t$  a cero obtenemos las ecuaciones para  $a_2$  y  $B_1$ , cuyas soluciones son

$$B_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{8}.$$

Ahora la ecuación para  $x_2(t)$  se convierte

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = \frac{1}{8}(a_1 + 3\mu B_0) \cos 3t + \frac{1}{8}(a_1 B_0 - 3\mu) \operatorname{sen} 3t - \frac{1}{8}(\cos 5t - B_0 \operatorname{sen} 5t).$$

La solución de esta ecuación es

$$x_2(t) = B_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{64}(a_1 + 3\mu B_0) \cos 3t - \frac{1}{64}(a_1 B_0 - 3\mu) \operatorname{sen} 3t \\ + \frac{1}{192}(\cos 5t + B_0 \operatorname{sen} 5t).$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación para  $x_3$  y factorizando los coeficientes de  $\cos t$  y  $\operatorname{sen} t$  obtenemos las ecuaciones para  $B_2$  y  $a_3$  dando las soluciones

$$B_2 = \frac{3\mu}{64\sqrt{1-\mu^2}(1+\sqrt{1-\mu^2})}, \quad a_3 = -\frac{1+2\mu^2}{64\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Por tanto, para  $O(q^3)$  tenemos

$$a(q) = 1 + q\sqrt{1-\mu^2} - \frac{q^2}{8} - q^3 \frac{1+2\mu^2}{64\sqrt{1-\mu^2}} + O(q^4), \quad (4.18)$$

y para  $O(q)$  se tiene

$$x(t) = \cos t + \frac{\mu \operatorname{sen} t}{1+\sqrt{1-\mu^2}} - \frac{q}{8} \left( \cos 3t + \frac{\mu \operatorname{sen} 3t}{1+\sqrt{1-\mu^2}} \right) + O(q^2). \quad (4.19)$$

En el caso  $\mu = 0$ , estas series reducen a las series para  $a_1(q)$  y  $ce_1(t, q)$ . Para los valores presentados en la Figura 4.10,  $q = 1$ ,  $\mu = \nu = 0.2$ , la primera serie nos da  $a(q) = 1.8376$  que coincide con el valor exacto de 1.8378, y la solución por medio de la teoría de perturbaciones es (para el  $O(q^2)$ ) con la condición inicial,  $x(0) = 1$ , es

$$x(t) = \cos t + 0.1010205144 \operatorname{sen} t - 0.01262756430 \operatorname{sen} 3t - 0.125 \cos 3t + \dots$$

Graficando la solución exacta y la aproximada se ve que son casi indistinguibles.

#### 4.4.2 El caso: $a_0 = 1$ , $B_0 = 1$ , $a_1 = -\sqrt{1 - \mu^2}$

Ahora encontramos la solución analítica aproximada para el otro caso.

##### Problema 4.4.1

Muestre que la otra solución para  $a_0 = 1$ , esto es,

$$B_0 = 1, \quad a_1 = -\sqrt{1 - \mu^2}, \quad A_0 = \frac{\mu}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}$$

es

$$a = 1 - q\sqrt{1 - \mu^2} - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{64} \frac{1 + 2\mu^2}{\sqrt{1 - \mu^2}} + O(q^4),$$

$$x(t) = \operatorname{sen} t + \frac{\mu \cos t}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} - \frac{q}{8} \left( \operatorname{sen} 3t + \frac{\mu \cos 3t}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \right) + O(q^2).$$

Para el caso  $q = 1, \nu = 0.2$ , muestre que la primera serie da el valor  $a \approx -0.08757$  e incluyendo el término de segundo orden en la serie para  $x(t)$  da la serie

$$x(t) = \operatorname{sen} t + 0.1010205144 \cos t$$

$$-0.1087436218 \operatorname{sen} 3t + 0.02045600984 \cos 3t$$

$$+0.005208333333 \operatorname{sen} 5t + .0005261485125 \cos 5t + \dots$$

Usando el valor de  $a$  y la solución aproximada anteriores para definir las condiciones iniciales, haga una comparación gráfica con la solución exacta.

### Solución.

Para resolver este problema daremos una serie de funciones en *Maple*, las cuales (algunas) vendrán con su respuesta. Las funciones son las siguientes:

```
with(LinearAlgebra): a0:=1: nu:=mu*q;
eq1:=Diff(x,t$2)+a*x-q*(2*x*cos(2*t)-mu*(Diff(x,t)));
setsub1:={x=sum('x||i*q^i','i'=0..3),a=sum('a||i*q^i','i'=0..3),
          Diff(x,t$2)=sum('Diff(x||i,t$2)*q^i','i'=0..3),
          Diff(x,t)=sum('Diff(x||i,t)*q^i','i'=0..3)}:
setsub2:={x0=x0(t),x1=x1(t),x2=x2(t),x3=x3(t)}:
setsub3:={x0(t)=x0,x1(t)=x1,x2(t)=x2,x3(t)=x3}:
list1:=convert({sin(n*t)$n=1..9} union {cos(n*t)$n=1..9},list);
eq2:=collect(expand(subs(setsub1,eq1)),q);
C01:=coeff(eq2,q,0);          C11:=combine(coeff(eq2,q,1));
C21:=combine(coeff(eq2,q,2)); C31:=combine(coeff(eq2,q,3));
Eq11:=rhs(dsolve(subs(setsub2,C01),x0(t)));
Eq12:=sort(subs({_C1=B0,_C2=A0},Eq11));
Eq21:=combine(subs({Diff(x0,t)=diff(Eq12,t),x0=Eq12},C11)):
Eq22:=collect(Eq21, list1);
sys1:=[coeff(Eq22,cos(t))=0,coeff(Eq22,sin(t))=0]:
caso1:=solve(subs(mu=0,sys1),{B0,a1}):
caso2:=solve(subs(mu=0,sys1),{A0,a1}):
{x=subs(caso1,Eq12),x=subs(caso2,Eq12)}:
(A,B):=GenerateMatrix(sys1,{A0,B0}):
SolA:=solve(Determinant(A)=0,a1):
SolA[2]: sys11:=evala(subs(a1=SolA[2],sys1)):
SolA[1]: sys12:=evala(subs(a1=SolA[1],sys1)):
d1:=solve(op(1,sys11),{A0}):  d2:=solve(op(2,sys12),{B0}):
d11:=subs(B0=1,a1=SolA[1],d1); d21:=subs(A0=1,a1=SolA[2],d2);
setsub4:= ai=SolA[2], B0=1, d11;
Eq23:=subs(setsub4,Eq22);
Eq24:=map(normal,collect(Eq23,list1));
Eq25:=subs(1+sqrt(1-mu^2)=mu/A0,Eq24);
Eq26:=rhs(dsolve(subs(setsub2,Eq25),x1(t)));
Eq27:=subs({_C2=0,_C1=A1},Eq26);
Eq28:=combine(subs({Diff(x1,t)=diff(Eq27,t),
                  x1=Eq27,x0=Eq12},C21));
Eq29:=collect(Eq28,list1);
```

```

sys2:=[coeff(Eq29,cos(t))=0,coeff(Eq29,sin(t))=0];
sys21:=subs(B0=1,solve(sys2,{A1,a2}));
Eq30:=subs(sys21,Eq27);
Eq31:=subs(sys21,B0=1,Eq29);
Eq32:=collect(Eq31,list1);
Eq33:=rhs(combine(dsolve(subs(setsub2,Eq32),x2(t))));
Eq34:=collect(Eq33,list1);
Eq35:=subs({_C2=0,_C1=A2},Eq34);
Eq36:=combine(subs({Diff(x2,t)=diff(Eq35,t),x2=Eq35,
x1=Eq27,x0=Eq12},C31));
Eq37:=collect(Eq36,list1);
sys3:=[coeff(Eq37,cos(t))=0,coeff(Eq37,sin(t))=0];
sys31:=solve(sys3,{a3,A2});
sys32:=normal(subs(sys21,setsub4,sys31));
X:=sum('x || i*q^i' , 'i'=0..2);
A:=sum('a || i*q^i' , 'i'=0..3);
A1:=subs(a0=1,a1=SolA[2],sys21,sys32,A);
A2:=subs(setsub4,A1);
A3:=sort(evalf(subs(q=1,mu=0.2,A2)));
X1:=subs(x0=Eq12,x1=Eq27,x2=Eq35,X);
X2:=unapply(subs(setsub4,sys21,sys32,X1),q,mu,t);
evalf(X2(1,0.2,t)); evalf(X2(1,0.2,0));
XXS:=rhs(dsolve(subs(x=x(t),eq1),x(t)));
XXSD:=diff(XXS,t);XX1:=subs(t=0,XXS);XX2:=subs(t=0,XXSD);
caso1:=solve({XX1=1,XX2=0}); caso2:=solve({XX1=0,XX2=1});
Phi1:=subs(caso1,XXS); Phi2:=subs(caso2,XXS);
Phi:=< <Phi1,Phi2>|<diff(Phi1,t),diff(Phi2,t)>>;
PhiPi:=subs(t=Pi,Phi);
E:=unapply(Trace(PhiPi),q,a,mu);
a01:=fsolve(evalf(E(1,a,0.2)=-1.533),a=-0.5..0);
ICs:={x(0)=0,D(x)(0)=1};
XSOL:=unapply(rhs(dsolve({subs(x=x(t),eq1)} union ICs,x(t))),
a,q,mu,t); XSOL(a,q,mu,t);
evalf(XSOL(a01,1,0.2,t)); evalf(XSOL(a01,1,0.2,0));
plot(XSOL(a01,1,0.2,t),t=0..10,color=blue,thickness=2);
plot(X2(1,0.2,t),t=0..10,color=red,thickness=1);
plot([XSOL(a01,1,0.2,t),X2(1,0.2,t)],t=0..10,
color=[blue,red],thickness=[2,1])

```

$$A1 := 1 - \sqrt{1 - \mu^2} q - \frac{q^2}{8} - \frac{(2\sqrt{1 - \mu^2} \mu^2 + 2\mu^2 + \sqrt{1 - \mu^2} + 1) q^3}{64(-1 - \sqrt{1 - \mu^2} + \mu^2)}$$

$$A3 := -0.08757292235$$

$$X2 := (q, \mu, t) \rightarrow \sin(t) + \frac{\cos(t)\mu}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} + \left(-\frac{1}{8} \sin(3t) - \frac{1}{8} \frac{\mu \cos(3t)}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}\right) q +$$

$$\left(\frac{1}{64} \sqrt{1 - \mu^2} + \frac{3}{64} \frac{\mu^2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}\right) \sin(3t) + \frac{1}{192} \sin(5t)$$

$$+ \left(\frac{1}{64} \frac{\sqrt{1 - \mu^2} \mu}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} - \frac{3}{64} \mu\right) \cos(3t) + \frac{1}{192} \frac{\mu \cos(5t)}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} q^2$$

$$\sin(t) + 0.1010205144 \cos(t) - 0.1087436218 \sin(3t) - 0.02045600984 \cos(3t)$$

$$+ 0.005208333333 \sin(5t) + 0.0005261485125 \cos(5t)$$

$$0.08109065307$$

$$a01 := -0.08838481685$$

Las siguientes gráficas corresponden a la solución exacta y aproximada.

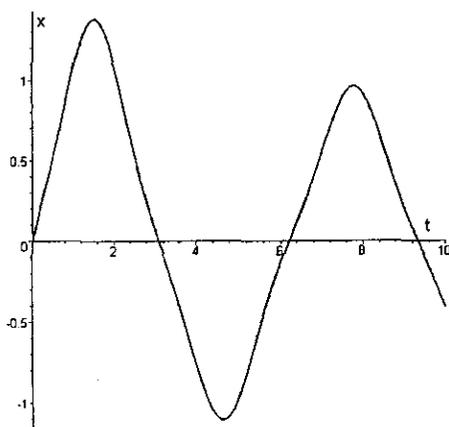


Figura 4.13 Solución exacta

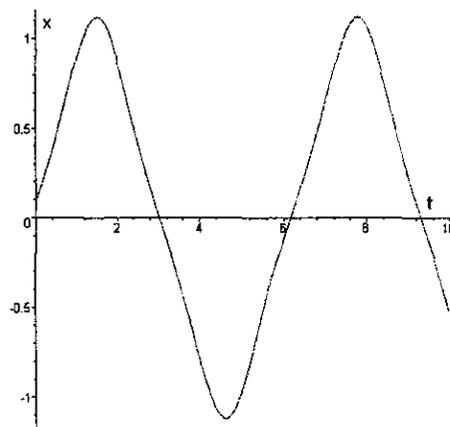


Figura 4.14 Solución aproximada

La siguiente figura es las dos gráficas anteriores juntas.

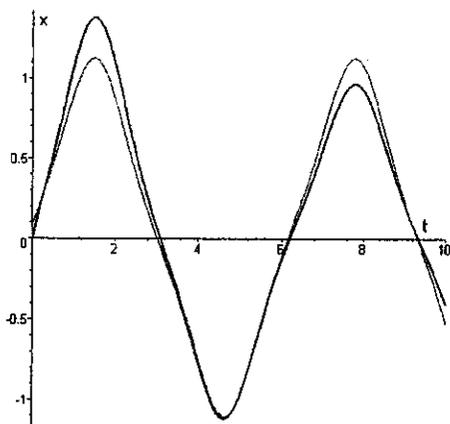


Figura 4.15 Gráfica comparativa entre la solución aproximada y la exacta

#### 4.4.3 El caso: $a_0 = 0$

Ahora encontramos la solución analítica aproximada para el caso  $a_0 = 0$ .

##### Problema 4.4.2

Si  $a_0 = 0$ , muestre que

$$a_0(q, \mu) = -\frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{8} \left( \frac{7}{16} + \mu^2 \right) - \frac{q^6}{32} \left( \frac{29}{72} + \frac{111}{64} \mu^2 + \mu^4 \right) \\ + \frac{q^8}{128} \left( \frac{68687}{147456} + \frac{7685}{2592} \mu^2 + \frac{1023}{256} \mu^4 + \mu^6 \right) + O(q^{10}),$$

donde  $\nu = \mu q$ , y que la solución asociada es

$$x(t) = 1 - \frac{q}{2} \cos 2t + \frac{q^2}{32} (\cos 4t + 8\mu \sin 2t) \\ + \frac{q^3}{8} \left[ \left( \frac{7}{16} + \mu^2 \right) \cos 2t - \frac{1}{144} \cos 6t - \frac{3\mu}{16} \sin 4t \right] + O(q^4).$$

Muestre también que para  $q = 1, \nu = 0.2$ , la expansión de orden 8 da el valor aproximado  $a_0 = -0.4517$ . Notemos que el valor exacto de  $a$  es  $-0.4516794757$ .

## Solución.

Tal como en el problema anterior, daremos unas funciones en *Maple* para la solución de este problema. Los funciones son:

```
with(LinearAlgebra): a0:=0: nu := mu*q:
eq1 := Diff(x,t$2)+a*x-q*(2*x*cos(2*t)-mu*(Diff(x,t))):
setsub1 := {x = sum('x || i*q^i', 'i'=0..8),
            a = sum('a || i*q^i', 'i'=0..8),
            Diff(x,t$2)=sum('Diff(x || i, t$2)*q^i', 'i'=0..8),
            Diff(x,t)=sum('Diff(x || i, t)*q^i', 'i'=0..8)}:
setsub2 := {'x || i= x || i(t)' $ 'i'=0..8};
setsub3 := {'x || i(t) = x || i' $ 'i'=0..8};
setsub4 := {_C1=0, _C2=0};
setsub5 := {'V || i = v || i' $ 'i' = 2..16};
list1 := convert({sin(n*t)$n=1..20} union {cos(n*t)$n=1..20},list);
eq2:= collect(expand(subs(setsub1, eq1)),q):
for i from 0 to 9 do C || i || 1 := combine(coeff(eq2,q,i)); od;
Eq11 := rhs(dsolve(subs(setsub2, C01), x0(t)));
Eq12 := sort(subs({_C1=0, _C2=1}, Eq11));
Eq21 := combine(subs({Diff(x0,t)=diff(Eq12,t), x0=Eq12}, C11));
Eq22 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq21), x1(t)));
Eq23 := sort(subs(setsub4, a1=0, Eq22));
Eq24 := combine(subs({Diff(x1,t)=diff(Eq23,t),
                    x1=Eq23, x0=Eq12, a1=0}, C21));
Eq25 := collect(Eq24, list1);
Eq26 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq25), x2(t)));
Eq27 := collect(Eq26, list1);
aa2 := a2 = solve(select(has, Eq27, a2), a2);
Eq28 := factor(subs(setsub4, aa2, Eq27));
Eq29 := combine(subs({Diff(x2,t)=diff(Eq28,t),x2=Eq28,
                    x1=Eq23, x0=Eq12, a1=0, aa2}, C31));
Eq30 := collect(Eq29, list1);
Eq31 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq30), x3(t)));
Eq32 := collect(collect(Eq31, list1), t);
Eq33 := collect(subs({_C2=0, a3=0}, Eq32), list1);
CC1 := _C1 = solve(select(has, Eq33, _C1), _C1);
Eq34 := subs(CC1, Eq33);
Eq35 := combine(subs({Diff(x3,t)=diff(Eq34,t),x3=Eq34, x2=Eq28,
                    x1=Eq23, x0=Eq12, a1=0, aa2, a3=0}, C41));
Eq36 := collect(Eq35, list1);
Eq37 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq36), x4(t)));
Eq38 := collect(collect(Eq37, list1), t);
```

```

aa4 := a4 = solve(select(has, Eq38, a4), a4);
Eq39 := collect(subs(setsub4, aa4, Eq38), list1);
Eq40 := combine(subs({Diff(x4,t)=diff(Eq39,t),x4=Eq39,x3=Eq34,
    x2=Eq28,x1=Eq23, x0=Eq12, a1=0, aa2, a3=0, aa4}, C51));
Eq41 := collect(Eq40, list1);
Eq42 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq41), x5(t)));
Eq43 := collect(collect(Eq42, list1), t);
CC1 := _C1 = solve(select(has, Eq43, _C1), _C1);
Eq44 := collect(factor(subs({CC1, _C2=0, a5=0}, Eq43)), list1);
Eq45 := combine(subs({Diff(x5,t)=diff(Eq44,t),x5=Eq44, x4=Eq39,
    x3=Eq34, x2=Eq28,x1=Eq23, x0=Eq12,
    a1=0, aa2, a3=0, aa4, a5=0}, C61));
Eq46 := collect(Eq45, list1);
Eq47 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq46), x6(t)));
Eq48 := collect(collect(Eq47, list1), t);
aa6 := a6 = solve(select(has, Eq48, a6), a6);
Eq49 := collect(subs(setsub4, aa6, Eq48), list1);
Eq50 := combine(subs({Diff(x6,t)=diff(Eq49,t), x6=Eq49, x5=Eq44,
    x4=Eq39, x3=Eq34, x2=Eq28, x1=Eq23, x0=Eq12,
    a1=0, aa2, a3=0, aa4, a5=0, aa6}, C71));
Eq51 := map(factor, collect(Eq50, list1));
for i from 2 by 4 to 14 do v || i :=coeff(Eq51,cos(i*t)); od;
for i from 4 by 4 to 12 do v || i :=coeff(Eq51,sin(i*t)); od;
Eq52 :=V2*cos(2*t)+ V4*sin(4*t)+V6*cos(6*t)+V8*sin(8*t)
    +V10*cos(10*t)+V12*sin(12*t)+V14*cos(14*t)
    +remove(has, Eq51, [cos, sin]);
Eq53 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq52), x7(t)));
Eq54 := collect(factor(subs(setsub4, a7=0, Eq53)), list1);
Eq55 := subs(setsub5, Eq54);
Eq56 := combine(subs({Diff(x7,t)=diff(Eq55,t), x7=Eq55, x6=Eq49,
    x5=Eq44, x4=Eq39, x3=Eq34, x2=Eq28, x1=Eq23, x0=Eq12,
    a1=0, aa2, a3=0, aa4, a5=0, aa6, a7=0}, C81));
Eq57 := collect(Eq56, list1);
for i from 2 by 4 to 14 do v || i := coeff(Eq56, sin(i*t)); od;
for i from 4 by 4 to 16 do v || i := coeff(Eq56, cos(i*t)); od;
Eq58 := V2*sin(2*t)+ V4*cos(4*t)+V6*sin(6*t)+V8*cos(8*t)
    +V10*sin(10*t)+V12*cos(12*t)+V14*sin(14*t) + V16*cos(16*t)
    +remove(has, Eq57, [cos, sin]);
Eq59 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq58), x8(t)));
aa8 := a8 = solve(select(has, Eq59, a8), a8);
Eq60 := subs(setsub5, Eq59);
Eq61 := collect(factor(subs(setsub4, aa8, Eq60)), list1);
X := sum('x || i*q^i', 'i'=0..8);

```

```

A := sum('a || i*q^i', 'i'=0..8);
Sa1:= subs(aa8,aa6,aa4,aa2,a0=0,a1=0,a3=0,a5=0,a7=0, A);
Sx1:= subs(x0=Eq12,x1=Eq23,x2=Eq28,x3=Eq34,x4=Eq39,x5=Eq44,x6=Eq49,
          x7=Eq55,x8=Eq61, X);
Sa2 := unapply(Sa1, q, mu); Sa2(q, mu); Sa2(1, 0.2);
XApr:=unapply(Sx1,q, mu, t); evalf(XApr(1,0.2,t));
Z0 := evalf(XApr(1,0.2,0));
XXS:=rhs(dsolve(subs(x=x(t),eq1),x(t))): XXSD:=diff(XXS,t):
XX1:=subs(t=0,XXS): XX2:=subs(t=0,XXSD):
caso1:=solve({XX1=1,XX2=0}): caso2:=solve({XX1=0,XX2=1}):
Phi1:=subs(caso1,XXS): Phi2:=subs(caso2,XXS):
Phi:=< <Phi1,Phi2>|<diff(Phi1,t),diff(Phi2,t)>>:
PhiPi:=subs(t=Pi,Phi): E:=unapply(Trace(PhiPi),q,a,mu):
C0 := evalf(subs(mu=0.2, q=1, 1+exp(-nu*Pi)));
AExt := fsolve(evalf(E(1, a, 0.2) = C0), a = -1 .. 0);
ICs:={x(0)=0.6, D(x)(0)= 0};
XExt:=unapply(rhs(dsolve({subs(x=x(t),eq1)}
union ICs,x(t))),a,q,mu,t): XExt(a,q,mu,t):
evalf(XExt(AExt, 1, 0.2, t)); evalf(XExt(AExt, 1, 0.2, 0));
plot(XExt(AExt, 1, 0.2, t),t=0..10,color=blue,thickness=2);
plot(XApr(1, 0.2, t), t=0..10,color=red,thickness=1);
plot([XExt(AExt, 1, 0.2, t), XApr(1, 0.2, t)], t=0..10,
color=[blue,red],thickness=[2,1]);

```

$$\begin{aligned}
Sx2 := (q, \mu, t) \rightarrow & 1 - \frac{1}{2} \cos(2t)q + \left(\frac{1}{4} \mu \sin(2t) + \frac{1}{32} \cos(4t)\right)q^2 \\
& + \left(-\frac{3}{128} \mu \sin(4t) - \frac{3}{32} \mu t - \frac{1}{1152} \cos(6t) + \frac{7}{128} \cos(2t) + \frac{1}{8} \mu^2 \cos(2t)\right)q^3 \\
& + \left(-\frac{1}{16} \sin(2t) \mu^3 - \frac{27}{512} \mu \sin(2t) + \frac{11}{13824} \mu \sin(6t) - \frac{5}{1152} \cos(4t)\right. \\
& - \frac{7}{512} \mu^2 \cos(4t) + \frac{1}{73728} \cos(8t))q^4 + \left(-\frac{25}{1769472} \mu \sin(8t) + \frac{35}{6912} \mu \sin(4t)\right. \\
& + \frac{4505}{221184} \mu t + \frac{15}{2048} \mu^3 \sin(4t) + \frac{15}{512} \mu^3 t + \frac{13}{98304} \cos(6t) - \frac{29}{2304} \cos(2t) \\
& + \frac{85}{165888} \mu^2 \cos(6t) - \frac{111}{2048} \mu^2 \cos(2t) - \frac{1}{7372800} \cos(10t) - \frac{1}{32} \cos(2t) \mu^4)q^5 \\
& + \left(\frac{335}{8192} \sin(2t) \mu^3 + \frac{1663}{110592} \mu \sin(2t) + \frac{1}{64} \sin(2t) \mu^5 - \frac{409}{2359296} \mu \sin(6t)\right. \\
& - \frac{575}{1990656} \sin(6t) \mu^3 + \frac{439}{82944} \mu^2 \cos(4t) + \frac{4817}{4718592} \cos(4t) + \frac{31}{8192} \cos(4t) \mu^4 \\
& - \frac{1}{460800} \cos(8t) - \frac{415}{42467328} \mu^2 \cos(8t) + \frac{137}{884736000} \mu \sin(10t) \\
& + \frac{1}{1061683200} \cos(12t))q^6 + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{32} \mu^6 + \frac{1023}{8192} \mu^4 + \frac{7685}{82944} \mu^2 + \frac{68687}{4718592}\right) \cos(2t)\right. \\
& + \frac{1}{36} \left(-\frac{14841}{13107200} - \frac{3661}{663552} \mu^4 - \frac{10519}{1572864} \mu^2\right) \cos(6t) \\
& + \frac{1}{100} \left(\frac{95}{42467328} + \frac{12019}{1061683200} \mu^2\right) \cos(10t) - \frac{49}{42467328000} \mu \sin(12t) \\
& - \frac{1}{208089907200} \cos(14t))q^7 + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{32} \mu^6 + \frac{1023}{8192} \mu^4 + \frac{7685}{82944} \mu^2 + \frac{68687}{4718592}\right) \sin(2t)\right. \\
& + \frac{1}{36} \left(-\frac{14841}{13107200} - \frac{3661}{663552} \mu^4 - \frac{10519}{1572864} \mu^2\right) \sin(6t) \\
& + \frac{1}{100} \left(\frac{95}{42467328} + \frac{12019}{1061683200} \mu^2\right) \sin(10t) - \frac{49}{42467328000} \mu \cos(12t) \\
& - \frac{1}{208089907200} \sin(14t))q^8 \\
Sa1 := a = & -\frac{q^2}{2} + \left(\frac{\mu^2}{8} + \frac{7}{128}\right)q^4 + \left(-\frac{29}{2304} - \frac{1}{32} \mu^4 - \frac{111}{2048} \mu^2\right)q^6 \\
& + \left(\frac{68687}{18874368} + \frac{7685}{331776} \mu^2 + \frac{1023}{32768} \mu^4 + \frac{1}{128} \mu^6\right)q^8 \\
Sa2 := (q, \mu) \rightarrow & -\frac{1}{2} q^2 + \left(\frac{1}{8} \mu^2 + \frac{7}{128}\right)q^4 + \left(-\frac{29}{2304} - \frac{1}{32} \mu^4 - \frac{111}{2048} \mu^2\right)q^6 \\
& + \left(\frac{68687}{18874368} + \frac{7685}{331776} \mu^2 + \frac{1023}{32768} \mu^4 + \frac{1}{128} \mu^6\right)q^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{q^2}{2} + \left(\frac{\mu^2}{8} + \frac{7}{128}\right)q^4 + \left(-\frac{29}{2304} - \frac{1}{32}\mu^4 - \frac{111}{2048}\mu^2\right)q^6 \\
& + \left(\frac{68687}{18874368} + \frac{7685}{331776}\mu^2 + \frac{1023}{32768}\mu^4 + \frac{1}{128}\mu^6\right)q^8 \\
& -0.4505011262
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1. & -0.01444209346 t - 0.4505011262 \cos(2. t) + 0.04690887237 \sin(2. t) \\
& - 0.003616174769 \sin(4. t) + 0.00008303308265 \sin(6. t) \\
& - 0.2825701678 \cdot 10^{-5} \sin(8. t) + 0.02760146639 \cos(4. t) \\
& - 0.0007544452412 \cos(6. t) + 0.00001100234044 \cos(8. t) \\
& - 0.1087352612 \cdot 10^{-6} \cos(10. t) + 0.7111349223 \cdot 10^{-9} \cos(12. t) \\
& - 0.4805615099 \cdot 10^{-11} \cos(14. t) - 0.2307656371 \cdot 10^{-9} \sin(12. t) \\
& - 0.4805615099 \cdot 10^{-11} \sin(14. t) + 0.5786810981 \cdot 10^{-7} \sin(10. t) \\
& a01 := -0.4516357651
\end{aligned}$$

A continuación se presenta las gráficas que corresponden a la solución exacta y aproximada, respectivamente.

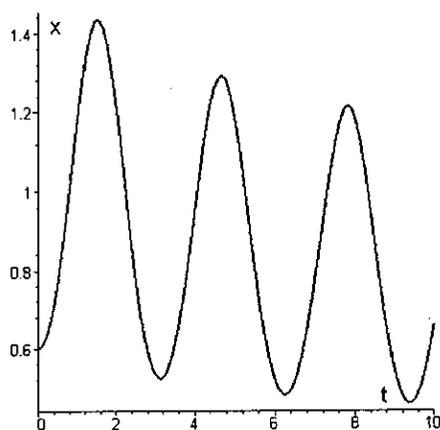


Figura 4.16 Solución exacta

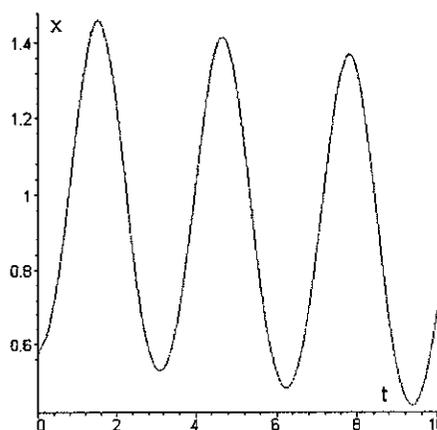


Figura 4.17 Solución aproximada

Como en el problema anterior, se presenta la gráfica donde están las dos gráficas anteriores juntas.

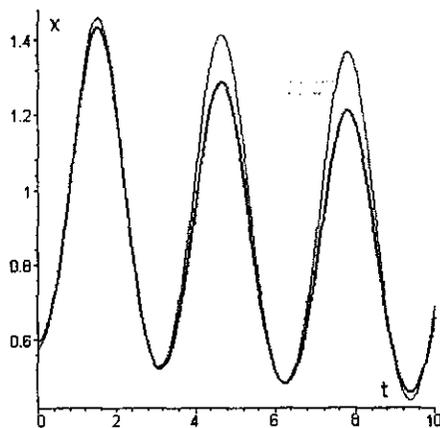


Figura 4.18 Gráfica comparativa entre la solución aproximada y la exacta

#### 4.4.4 El caso: $a_0 = 4$

Ahora encontramos la solución analítica aproximada para el caso  $a_0 = 4$ .

##### Problema 4.4.3

Aplique el método de perturbaciones descrito anteriormente con  $a_0 = 4$  para mostrar que si  $x_1(t)$  sea periódica, nos da la ecuación  $a_1^2 + a\mu^2 = 0$ . Deduzca que este método de perturbaciones es inválido. Muestre más generalmente, que un similar resultado se obtiene si  $a_0 = n^2, n \geq 2$ .

##### Demostración.

Ya que  $a_0 = 4$ , por el método de perturbaciones descrito anteriormente se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + 4x_0 = 0$$

con la solución

$$x_0(t) = A_0 \cos 2t + B_0 \sin 2t$$

y con la derivada

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = -2A_0 \operatorname{sen} 2t + 2B_0 \operatorname{cos} 2t.$$

La sustituimos en la siguiente ecuación del método, como lo hicimos anteriormente, y nos da como resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + 4x_1 &= -a_1(A_0 \operatorname{cos} 2t + B_0 \operatorname{sen} 2t) + 2(A_0 \operatorname{cos} 2t + B_0 \operatorname{sen} 2t) \operatorname{cos} 2t \\ &\quad - \mu(-2A_0 \operatorname{cos} 2t + 2B_0 \operatorname{sen} 2t). \end{aligned}$$

Mediante algunas simplificaciones llegamos a que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + 4x_1 &= -(2\mu B_0 + a_1 A_0) \operatorname{cos} 2t + (2\mu A_0 - a_1 B_0) \operatorname{sen} 2t \\ &\quad - A_0 \operatorname{cos} 4t + B_0 \operatorname{sen} 4t + A_0, \end{aligned}$$

y como  $x_1(t)$  es una función periódica, entonces tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 A_0 + 2\mu B_0 = 0, \\ 2\mu A_0 - a_1 B_0 = 0. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema anterior. Las ecuaciones son consistentes solo si el determinante del sistema es cero, es decir,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 2\mu \\ 2\mu & -a_1 \end{pmatrix} = -(a_1^2 + 4\mu^2) = 0,$$

cuya única solución es  $a_1 = 0$  y  $\mu = 0$ , por tanto el método no funciona.

Ahora lo haremos en general, es decir, para  $a_0 = n^2$ , con  $n \geq 2$ . Para esto haremos exactamente lo mismo, matemáticamente hablando, se tiene primero la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$$

con la solución

$$x_0(t) = A_0 \operatorname{cos} nt + B_0 \operatorname{sen} nt$$

y con la derivada

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = -nA_0 \operatorname{sen} nt + nB_0 \operatorname{cos} nt.$$

La sustituimos en la siguiente ecuación del método de perturbaciones, como lo hicimos en el caso anterior, y nos da como resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 4x_1 &= -a_1(A_0 \operatorname{cos} nt + B_0 \operatorname{sen} nt) + 2(A_0 \operatorname{cos} nt + B_0 \operatorname{sen} nt) \operatorname{cos} 2t \\ &\quad -\mu(-2A_0 \operatorname{cos} nt + 2B_0 \operatorname{sen} nt), \end{aligned}$$

igual que en el caso anterior, hacemos unas simplificaciones para llegar a que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 4x_1 &= -(n\mu B_0 + a_1 A_0) \operatorname{cos} nt + (n\mu A_0 - a_1 B_0) \operatorname{sen} nt \\ &\quad -B_0 \operatorname{sen}(2t + nt) + A_0 \operatorname{cos}(-2t + nt) + A_0 \operatorname{cos}(2t + nt) \\ &\quad +B_0 \operatorname{sen}(-2t + nt), \end{aligned}$$

y como el problema dice, si  $x_1(t)$  es una función periódica, entonces

$$\begin{cases} a_1 A_0 + n\mu B_0 = 0, \\ n\mu A_0 - a_1 B_0 = 0. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema anterior, y vemos que

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & n\mu \\ n\mu & -a_1 \end{pmatrix} = -(a_1^2 + n^2 \mu^2) = 0,$$

cuya única solución es  $a_1 = 0$  y  $\mu = 0$ , por tanto mostramos que el método es inválido para  $n \geq 2$ . ■

#### 4.4.5 Método modificado: $a_0 = 4$

Ahora encontramos la solución analítica aproximada para el caso  $a_0 = 4$  modificando el método anterior.

Este último problema muestra que una aplicación de teoría de perturbaciones falla cuando  $n \geq 2$ , y el remedio es fijar  $\mu = \nu q^n$  cuando  $a_0 = n^2$ .

Por ejemplo, consideremos el caso  $n = 2$ , y buscamos una solución que reduce a  $ce_2(t, q)$  cuando  $\mu \rightarrow 0$ . Empezaremos con la solución general para  $x_0(t)$ :

$$a_0 = 4, \quad x_0(t) = A_0 \cos 2t + B_0 \operatorname{sen} 2t,$$

donde  $A_0$  y  $B_0$  son constantes que deben ser determinadas. Buscamos soluciones para  $x_k(t)$ ,  $k \geq 1$ , que no contengan un término  $\cos 2t$ . Si sustituimos  $x_0(t)$  en la ecuación para  $x_1(t)$  encontraremos que la ecuación tiene una solución periódica solo si  $a_1 = 0$  y entonces

$$x_1(t) = \frac{A_0}{4} - \frac{A_0}{12} \cos 4t + B_1 \operatorname{sen} 2t - \frac{B_0}{12} \operatorname{sen} 4t.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación para  $x_2(t)$  y fijando los coeficientes de  $\cos 2t$  y  $\operatorname{sen} 2t$  a cero obtenemos las siguiente ecuaciones:

$$A_0 \left( a_2 - \frac{5}{12} \right) + 2\mu B_0 = 0, \quad \left( a_2 - \frac{1}{12} \right) B_0 - 2\mu A_0 = 0 \quad (4.20)$$

para  $a_2$  y  $B_0$ . Si  $\mu = 0$  las únicas soluciones no triviales son  $a_2 = 5/12$ ,  $A_0 = 1$ ,  $B_0 = 0$  y  $a_2 = -1/12$ ,  $A_0 = 0$ ,  $B_0 = 1$ , nos llevan a  $ce_2(t, q)$  y  $se_2(t, q)$ , respectivamente. Si  $\mu > 0$  podemos eliminar  $A_0$  y  $B_0$  para dar una ecuación relacionando  $a_2$  con  $\mu$ . Si recordamos que  $a = 4 + a_2 q^2$  y  $\nu = \mu q^2$ , obtenemos la siguiente ecuación para  $a(q)$ :

$$4\nu^2 + \left( a - 4 - \frac{5q^2}{12} \right) \left( a - 4 + \frac{q^2}{12} \right) = 0, \quad (4.21)$$

la cual es equivalente a la ecuación (4.17). Cuando  $\nu = 0$  esta ecuación se reduce a las dos curvas

$$a = 4 - \frac{q^2}{12}, \quad a = 4 + \frac{5q^2}{12}, \quad (4.22)$$

correspondiendo a  $b_2(q)$  y  $a_2(q)$ , respectivamente. Cuando  $\nu > 0$  la ecuación nos da la curva dibujada en la siguiente Figura 4.19, la cual también muestra

las asíntotas definidas en (4.22).

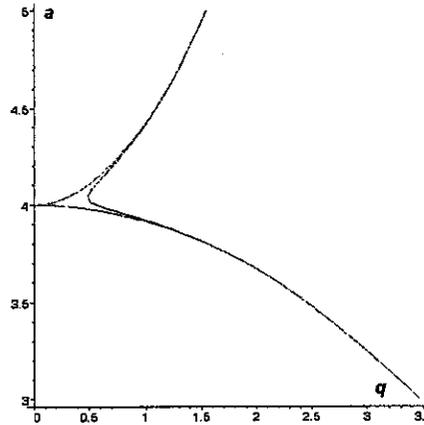


Figura 4.19 La frontera entre soluciones estable e inestable,  $\nu = 0.03$ ,  $a(q) \approx 4$

```
with(plots): nu := 0.03:
implicitplot([a=4-q^2/12, a=4+5*q^2/12,
4*nu^2+(a-4-5*q^2/12)*(a-4+q^2/12)],
q=0..5,a=3..5,color=[red,red,blue],
numpoints=4000);
```

El punto de la gráfica de la ecuación 4.21 más cercano al eje  $a$  se obtiene haciendo  $dq/da = 0$ , lo que resulta en  $q = \sqrt{8\nu}$ . Para  $\nu$  pequeñas la curva está más lejos del eje  $a$  que el punto equivalente cuando  $a_0 = 1$  (ver la Figura 4.19).

Las ecuaciones (4.20) tienen las dos soluciones

$$B_0 = \frac{2\mu A_0}{a_2 + \frac{1}{12}}, \quad a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\sqrt{1 - 64\mu^2}, \quad (\text{ce}_2(t, q) \text{ cuando } \mu = 0),$$

$$A_0 = \frac{2\mu B_0}{a_2 + \frac{5}{12}}, \quad a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\sqrt{1 - 64\mu^2}, \quad (\text{se}_2(t, q) \text{ cuando } \mu = 0),$$

las cuales son reales si  $0 \leq \mu \leq \frac{1}{8}$ . De aquí en adelante escogemos la primera de estas soluciones y fijamos  $A_0 = 1$ .

Por medio de teoría de perturbaciones, la solución para  $x_2(t)$  es

$$x_2(t) = \frac{1}{384}(\cos 6t + B_0 \operatorname{sen} 6t) + B_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{B_1}{12} \operatorname{sen} 4t,$$

donde  $B_1$  y  $B_2$  son contantes desconocidas. Si sustituimos  $x_2(t)$  en la ecuación para  $x_3(t)$  e igualando los coeficientes de  $\cos 2t$  y  $\operatorname{sen} 2t$  a cero obtenemos

$$B_1 = a_3 = 0.$$

Una solución periódica para  $x_3(t)$  se puede encontrar si sustituimos en la ecuación para  $x_4(t)$ , y obtenemos las siguientes dos ecuaciones lineales:

$$a_4 + 2\mu B_2 = -\frac{\mu B_2}{36} - \frac{19a_2}{144},$$

$$a_4 B_0 + 2 \left( a_2 + \frac{1}{12} \right) B_2 = \frac{\mu}{36} - \frac{B_0}{4608} - \frac{B_0 a_2}{144}.$$

Estas ecuaciones pueden resolverse y continuar el proceso. La serie obtenida para  $a(q)$  es

$$a = 4 + \frac{q^2}{12}(2 + 3\sqrt{1 - 64\mu^2}) - q^4 \left( \frac{763}{13824} + \frac{128}{9}\mu^4 + \dots \right) + O(q^6).$$

Notemos que el coeficiente de  $q^4$  ha sido expandido en potencias de  $\mu$  para simplificar la representación y para mostrar que cuando  $\mu = 0$ ,  $a(q)$  se vuelve a encontrar. Los primeros tres términos de las solución son

$$\begin{aligned} x(t) = & \cos 2t + \frac{8\mu}{C} \operatorname{sen} 2t + q \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos 4t}{12} - \operatorname{sen} 2t \right) \\ & + q^2 \left( \frac{\cos 6t}{384} + \frac{\mu}{48C} \operatorname{sen} 6t + \frac{(17C - 576\mu^2) \operatorname{sen} 2t}{36[(1 - 32\mu^2)C - 32\mu^2]} \right) + \dots, \end{aligned}$$

donde  $C = 1 + \sqrt{1 - 64\mu^2}$ .

Tal como en los problemas anteriores, daremos funciones en *Maple* para la solución de este problema del método modificado. Las funciones son:

```

with(LinearAlgebra): a0:=4: nu := mu*q^2:
eq1 := Diff(x,t$2)+a*x-q*(2*x*cos(2*t)-mu*q*(Diff(x,t))):
setsub1 := {x = sum('x || i*q^i', 'i'=0..4),
            a = sum('a || i*q^i', 'i'=0..4),
            Diff(x,t$2)=sum('Diff(x || i, t$2)*q^i', 'i'=0..4),
            Diff(x,t)=sum('Diff(x || i, t)*q^i', 'i'=0..4)}:
setsub2 := {x0=x0(t),x1=x1(t),x2=x2(t), x3=x3(t), x4=x4(t)}:
setsub3 := {x0(t)=x0,x1(t)=x1,x2(t)=x2, x3(t)=x3, x4(t)=x4}:
list1:=convert({sin(n*t)$n=1..9} union {cos(n*t)$n=1..9},list);
eq2:= collect(expand(subs(setsub1, eq1)),q):
C01 := combine(coeff(eq2, q, 0)); C11 := combine(coeff(eq2, q, 1));
C21 := combine(coeff(eq2, q, 2)); C31 := combine(coeff(eq2, q, 3));
C41 := combine(coeff(eq2, q, 4));
Eq11 := rhs(dsolve(subs(setsub2, C01), x0(t)));
Eq12 := sort(subs({_C1=B0, _C2=A0}, Eq11));
Eq21 := combine(subs({Diff(x0,t)=diff(Eq12,t), x0=Eq12}, C11));
Eq22 := collect(Eq21, list1);
Eq23 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq22), x1(t)));
Eq24 := collect(combine(Eq23), list1);
Eq25 := subs(a1=0, mu=0, _C1=0, _C2=B1, Eq24);
Eq27 := combine(subs({Diff(x1,t)=diff(Eq25,t),
                    Diff(x0,t)=diff(Eq12,t),x1=Eq25,x0=Eq12,a1=0},C21));
Eq28 := collect(Eq27, list1);
sys1 := [coeff(Eq28, cos(2*t)) = 0, coeff(Eq28, sin(2*t)) = 0];
(A,B):= GenerateMatrix(sys1, {A0, B0});
SolA := solve(Determinant(A)=0, a2);
setsub6 := SolA[1], B0=expand(solve(op(2,sys1), B0)), A0=1;
setsub7 := SolA[2], A0=expand(solve(op(1,sys1), A0)), B0=1;
AA0 := A0=solve(B0=2*mu*A0/(a2+1/12), A0);
setsub4 := a2=SolA[1], A0=1, AA0;
setsub5 := A0=1, AA0;
Eq29 := subs(setsub5, Eq28);
Eq30 := map(normal, collect(Eq29, list1));
Eq31 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq30), x2(t)));
Eq32 := collect(combine(Eq31), list1);
Eq33 := subs(a1=0, _C1=0, _C2=B2, Eq32);
Eq34 := subs(coeff(Eq33,cos(2*t))=0,coeff(Eq33,sin(2*t))=B2,Eq33);
Eq35 := combine(subs({Diff(x1,t)=diff(Eq25,t),x2=Eq34,x1=Eq25,
                    x0=Eq12, a1=0}, C31));
Eq36 := collect(Eq35, list1);
sys2 := [coeff(Eq36, cos(2*t)) = 0, coeff(Eq36, sin(2*t)) = 0];
sys21:= solve(sys2, {a3, B1});
Eq37 := subs(sys21, Eq34);

```

```

Eq38 := combine(subs(Diff(x1,t)=diff(Eq25,t), x2=Eq37,
    x1=Eq25, x0=Eq12, a1=0, sys21, C31));
Eq39 := collect(Eq38, list1);
Eq40 := rhs(dsolve(subs(setsub2, Eq39), x3(t)));
Eq41 := collect(combine(subs(_C1=0, _C2=B2, Eq40)), list1);
Eq42 := combine(subs(Diff(x2,t)=diff(Eq37,t), x3=Eq41,
    x2=Eq37, x1=Eq25, x0=Eq12, a1=0, sys21, A0=1, C41));
Eq43 := collect(Eq42, list1);
sys3 := [coeff(Eq43, cos(2*t)) = 0, coeff(Eq43, sin(2*t)) = 0];
sys31 := solve(sys3, {a4, B2});
sys32 := subs(B0=2*mu*A0/(a2+1/12), a2=SolA[1], A0=1, sys31);
sys33 := normal(sys32);
Eq44 := subs(sys33, A0=1, a2=SolA[1], Eq41);
aa4 := a4= series(rhs(op(2, sys33)), mu = 0, 8);
A := sum('a || i*q^i', 'i'=0..4);
A1 := convert(subs(a0=4, a1=0, a2=SolA[1], a3=0, aa4, A), polynom);
X := sum('x || i*q^i', 'i'=0..3);
X1 := subs(x0=Eq12, x1=Eq25, x2=Eq37, x3=Eq44, X);
X2 := subs(B0=2*mu*A0/(a2+1/12), A0=1, B1=0, op(1, sys33), X1);
X3 := subs(sys33, a2=SolA[1], a3=0, aa4, X2);
X4 := unapply(X3, q, mu, t);
X4(1, 0.1, t);
Z0 := X4(1, 0.1, 0);
A2 := sort(evalf(subs(q=1, mu=0.1, A1)));
C0 := evalf(subs(mu=0.1, q=1, 1+exp(-nu*Pi)));
XXS := rhs(dsolve(subs(x=x(t), eq1), x(t)));
XXSD := diff(XXS, t);
XX1 := subs(t = 0, XXS);
XX2 := subs(t = 0, XXSD);
caso1 := solve({XX1 = 1, XX2 = 0});
caso2 := solve({XX1 = 0, XX2 = 1});
Phi1 := subs(caso1, XXS);
Phi2 := subs(caso2, XXS);
Phi := <<Phi1, Phi2> | <diff(Phi1, t), diff(Phi2, t)>>;
PhiPi:= subs(t=Pi, Phi);
E := unapply(Trace(PhiPi), q, a, mu);
a01 := fsolve(evalf(E(1, a, 0.1) = C0), a = 4 .. 5);
ICs := {x(0) = 1.5, D(x)(0) = 0};
XSOL := unapply(rhs(dsolve({subs(x=x(t), eq1)} union
    ICs, x(t))), a, q, mu, t);
XSOL(a,q,mu,t);
evalf(XSOL(a01, 1, .1, t)); evalf(XSOL(a01, 1, .1, 0));
plot(XSOL(a01,1,0.1,t), t=0..10, color=blue, thickness=2);

```

```
plot(X4(1, 0.1, t), t=0..10, color=red, thickness=1);  
plot([XSOL(a01,1,0.1,t), X4(1, 0.1, t)], t=0..10,  
      color=[blue, red], thickness=[2, 1]);
```

A continuación se presenta las gráficas que corresponden a la solución exacta y aproximada, respectivamente.

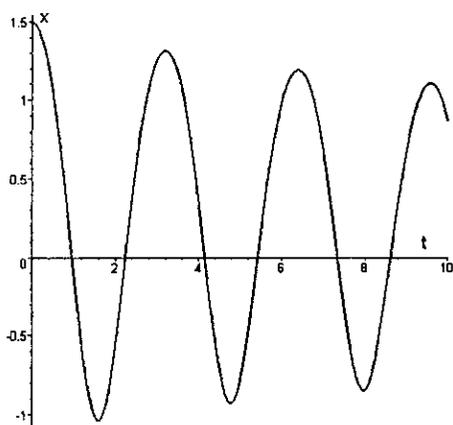


Figura 4.20 Solución exacta

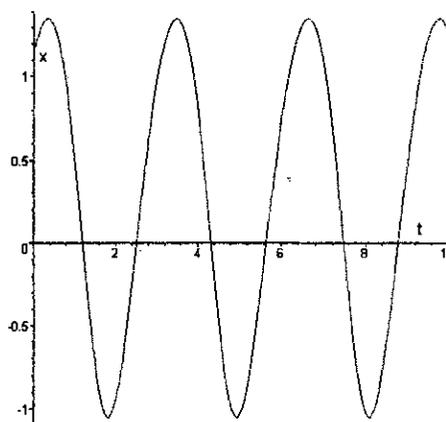


Figura 4.21 Solución aproximada

Como en el problema anterior, se presenta la gráfica donde están las dos gráficas anteriores juntas.

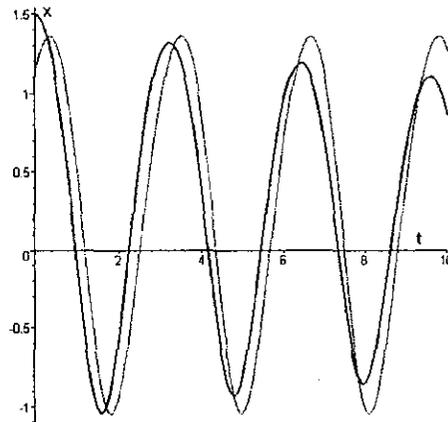


Figura 4.22 Gráfica comparativa entre la solución aproximada y la exacta

## 4.5 Funciones de Mathieu

Las funciones de Mathieu son las soluciones  $\pi$ - y  $2\pi$ -periódicas de la ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a - 2q \cos 2t)x = 0, \quad (4.23)$$

donde  $a$  y  $q$  son constantes. Este es un sistema de Sturm–Liouville con condiciones a la frontera periódicas y las soluciones existen solo para valores particulares del eigenvalor  $a$ , el cual depende de  $q$ . En este trabajo consideraremos solo soluciones periódicas. La gran diferencia entre la ecuación de Mathieu y otras ecuaciones que definen funciones especiales es que el coeficiente de  $x$  es una función periódica de la variable independiente. Por tanto este es el caso más simple de la ecuación más general

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a + p(t))x = 0, \quad (4.24)$$

donde  $p(t)$  es una función periódica de  $t$ . Esta ecuación es llamada la ecuación de Hill, en honor al astrónomo americano quien derivó este tipo de ecuación en su investigación de la estabilidad del movimiento lunar.

Las soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu fueron discutidas primero por Mathieu en el contexto de las vibraciones de una membrana elíptica (ver Capítulo 1). Entonces la ecuación surge de la separación de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

en las coordenadas elípticas  $(\xi, \eta)$  definidas por

$$x = h \cosh \xi \cos \eta, \quad y = h \sinh \xi \sin \eta,$$

donde  $(+h, 0)$  y  $(-h, 0)$  son coordenadas de los focos de la elipse, ver por ejemplo Whittaker y Watson (1965, Capítulo 12).

Sin embargo, la ecuación de Mathieu y sus generalizaciones son más importantes que esta sola aplicación a una membrana elíptica. El movimiento de un electrón en un arreglo periódico de átomos es importante en el estudio de conducción eléctrica y dan lugar a ecuaciones del tipo de la ecuación de Hill. Algunas moléculas más grandes contienen partes que pueden rotar relativamente a las otras partes, este tipo de movimiento se describe mediante ecuaciones del tipo de Mathieu, para más ejemplos de este tipo ver los libros de Townes y Schawlow (1975, Capítulo 12). El estudio de la estabilidad de las órbitas periódicas de sistemas no lineales también producen ecuaciones de la forma (4.24).

Si comparamos con otras funciones especiales, el comportamiento de las funciones de Mathieu y sus eigenvalores es muy relativamente extenso y consecuentemente más difícil de comprender.

La siguiente sección nos dará un resumen conciso de las propiedades básicas de las funciones de Mathieu.

## 4.6 Propiedades generales de funciones de Mathieu

El comportamiento de las funciones de Mathieu es complicado, particularmente cuando tenemos que entender que  $t$  y  $q$  dependen de todas las eigenfunciones. Así, antes de entrar en detalles, daremos una breve descripción, la cual introduce alguna notación. Más detalles pueden encontrarse en Abramowitz y Stegun (1965, Capítulo 20) y Gradshteyn y Ryzhik (1965).

La variable  $q$  es un parámetro que necesitamos para obtener el comportamiento de ambos eigenvalores y ambas eigenfunciones como una función en  $q$ . En el caso especial  $q = 0$  existen soluciones periódicas solo si  $a = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y estas soluciones son

$$\begin{aligned} 1, \quad \cos t, \quad \cos 2t, \quad \dots & \quad (\text{soluciones pares}) & \quad (4.25) \\ \text{sen } t, \quad \text{sen } 2t, \quad \dots & \quad (\text{soluciones impares}) \end{aligned}$$

Las funciones de Mathieu correspondiente a valores de  $q$ , cuando  $q \rightarrow 0$  se denotan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ce_0(t, q), \quad ce_1(t, q), \quad ce_2(t, q), \quad \dots & \quad (\text{soluciones pares}) & \quad (4.26) \\ se_1(t, q), \quad se_2(t, q), \quad \dots & \quad (\text{soluciones impares}) \end{aligned}$$

Si  $q \neq 0$  cada una de estas eigenfunciones tiene un eigenvalor distinto. Para cada eigenvalor existe a lo más una solución de período  $\pi$  o  $2\pi$ , y cada par  $\{ce_n(t, q), se_n(t, q)\}$  tiene  $n$  ceros en el intervalo  $\pi < t \leq \pi$ . Estas soluciones pueden ser únicas de varias maneras. Por ejemplo, una de estas maneras es eligiendo el coeficiente de  $\cos nt$  en  $ce_n(t, q)$  y el coeficiente de  $\text{sen } nt$  en  $se_n(t, q)$  iguales a uno, como en Whittaker y Watson (1965, Capítulo 19), el otro camino es fijar la constante de normalización  $h_n$ , ecuación (4.28),

como en Abramowitz y Stegun (1965, ecuación 20.5.3), con el signo de las funciones determinadas haciendo el signo de  $\cos nt$  y  $\sin nt$  positivos. En todos los resultados presentados a continuación se usaremos la convención  $h_n = \pi$ .

El eigenvalor asociado con las soluciones pares,  $ce_k(t, q)$ , se denotan por  $a_k(q)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , y el eigenvalor asociado con las soluciones impares,  $se_k(t, q)$ , como  $b_k(q)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . La paridad y el período de estas funciones es resumida en la siguiente tabla:

Función	periodo	paridad alrededor de $t = 0$	paridad alrededor de $t = \pi/2$	eigenvalores
$ce_{2r}(t, q)$	$\pi$	par	par	$a_{2r}(q)$ $r = 0, 1, \dots$
$ce_{2r+1}(t, q)$	$2\pi$		impar	$a_{2r+1}(q)$ $r = 0, 1, \dots$
$se_{2r}(t, q)$	$\pi$	impar	impar	$b_{2r}(q)$ $r = 1, 2, \dots$
$se_{2r-1}(t, q)$	$2\pi$		par	$b_{2r-1}(q)$ $r = 1, 2, \dots$

*Las propiedades básicas de las funciones de Mathieu:*

- 1) La ecuación de Mathieu es un sistema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dy}{dt} \right) + (q(t) + \lambda w(t))y = 0, \quad (4.27)$$

con  $p(z) = 1$ ,  $q(t) = -2q \cos 2t$ ,  $w(t) = 1$ ,  $\lambda = a$  y con condiciones a la frontera periódicos.

- 2) Considerando el espacio  $L^2$ , el conjunto de eigenfunciones  $\{ce_r(t, q)\}$ ,  $\{se_r(t, q)\}$  es completo en el intervalo  $-\pi \leq t \leq \pi$ . Adicionalmente, cada uno de los conjuntos  $\{ce_r(t, q)\}$  y  $\{se_r(t, q)\}$  es completo en  $0 \leq t \leq \pi$  y cada uno de los conjuntos  $\{ce_{2r}(t, q)\}$ ,  $\{ce_{2r+1}(t, q)\}$ ,  $\{se_{2r}(t, q)\}$  y  $\{se_{2r+1}(t, q)\}$  es completo en el intervalo  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

3) Las funciones de Mathieu son ortogonales:

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(t, q) ce_n(t, q) dt = h_n \delta_{nm}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} se_m(t, q) se_n(t, q) dt = h_n \delta_{nm},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(t, q) se_n(t, q) dt = 0. \quad (4.28)$$

Nosotros utilizamos la convención de que la constante de normalización  $h_k = \pi$ .

4) Los eigenvalores son ordenados de la siguiente manera:

$$a_0(q) < b_1(q) < a_1(q) < b_2(q) < a_2(q) < \dots \quad (q \neq 0),$$

5) Es conveniente dividir los eigenvalores en tres tipos: existen eigenvalores con valores mucho menores que  $2q$ , eigenvalores cuyos valores son mucho más grandes que  $2q$  y eigenvalores que están alrededor de  $2q$ .

Para eigenvalores grandes, para los cuales  $a - 2q \cos 2t$  es siempre positivo, tenemos  $a_r(q) \rightarrow b_r(q) \rightarrow r^2$  cuando  $q \rightarrow 0$ . Para  $q$  fija y  $r$  grande, la diferencia entre  $a_r$  y  $b_r$ , es exponencialmente pequeña,

$$a_r(q) - b_r(q) = O\left(\frac{q^r}{r^{r-1}}\right) \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty. \quad (4.29)$$

Estos eigenvalores grandes  $r$  se puede aproximar por la siguiente serie

$$a_r(q) \simeq b_r(q) \sim r^2 + \frac{q^2}{2r^2} + \dots$$

Si  $q \gg 1$ ,  $a \ll q$ , por tanto  $a - 2q \cos 2t$  cambia signo,  $b_{r+1}(q)$  y  $a_r(q)$  están cerca.

Para  $|q|$  pequeñas, los eigenvalores pueden expandirse como serie de potencias en  $q$ , la cual se puede encontrar utilizando teoría de perturbaciones.

Pero una clara visión de la relación entre los  $a_r(q)$  y los  $b_r(q)$ , es visto en la siguiente figura, en la cual los primeros doce eigenvalores son mostrados para  $0 < q < 35$ . El orden de las curvas en esta figura se puede comprender si notamos que  $a_0 = -q^2/2 + O(q^4)$ , para  $r \geq 1$ ,  $a_r(0) = b_r(0) = r^2$  y para  $q > 0$ ,  $a_r(q) > b_r(q)$ , y para  $q \gg 1$ ,  $a_r(q) \simeq b_{r+1}(q)$ .

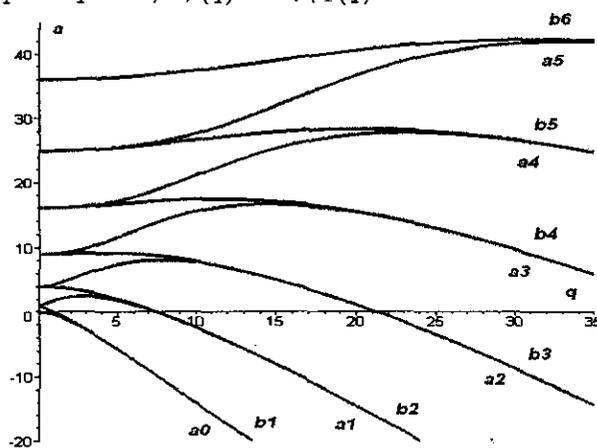


Figura 4.23 Eigenvalores como una función de  $q$

La figura 4.20 muestra el cambio en la relación entre eigenvalores de las funciones de Mathieu pares,  $a_r(q)$ , y las funciones impares,  $b_r(q)$ , cuando  $q$  crece.

Si  $q < 0$  el cambio de variable  $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$  cambia el signo de  $\cos 2t$  en la ecuación de Mathieu, y se puede mostrar que la siguiente relación se cumple:

$$a_{2r}(-q) = a_{2r}(q), \quad b_{2r}(-q) = b_{2r}(q), \quad a_{2r+1}(-q) = b_{2r+1}(q),$$

y

$$\begin{aligned} ce_{2r}(t, -q) &= (-1)^r ce_{2r}(\pi/2 - t, q), \\ ce_{2r+1}(t, -q) &= (-1)^r se_{2r+1}(\pi/2 - t, q), \\ se_{2r+1}(t, -q) &= (-1)^r ce_{2r+1}(\pi/2 - t, q), \\ se_{2r}(t, -q) &= (-1)^{r-1} se_{2r}(\pi/2 - t, q). \end{aligned}$$

De aquí en adelante supondremos que  $q \geq 0$ .

Ahora consideremos el comportamiento de las eigenfunciones. En las siguientes gráficas se muestran algunas funciones de Mathieu cuando  $q$  tiene un valor relativamente grande, es decir  $q = 20$ . Todas estas figuras fueron calculadas utilizando el sistema *Maple*.

Para  $q=20$ , el eigenvalor más pequeño es  $a_0 = -31.313390$  y el siguiente más grande es  $b_1 = -31.313386$ .

En las Figuras 4.24 y 4.25 son mostradas la eigenfunción  $\pi$ -periódica par  $ce_0(t, 20)$  y la eigenfunción  $2\pi$ -periódica impar  $se_1(t, 20)$ . Obsérvese que ambas funciones tiene extremos locales en  $t = \pm\frac{\pi}{2}$  y son relativamente pequeñas en otra parte.

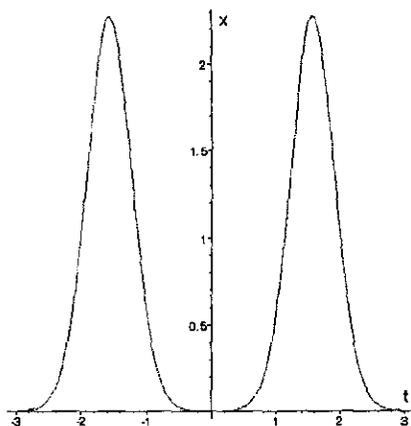


Figura 4.24 Gráfica de  $ce_0(t, 20)$ ,  
 $a_0 = -31.31 \ll 2q$

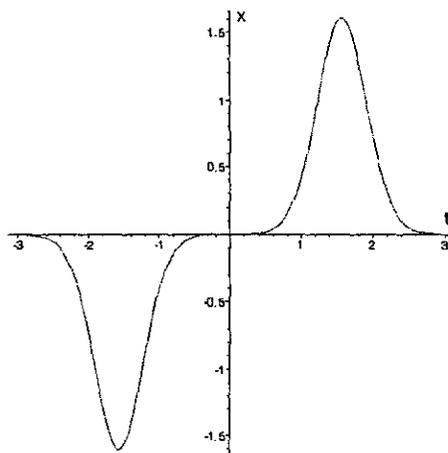


Figura 4.25 Gráfica de  $se_1(t, 20)$ ,  
 $a_1 = -31.31 \ll 2q$

Los siguientes dos eigenvalores son  $a_1 = -14.4913$  y  $b_2 = -14.4911$ .

La función  $\pi$ -periódica par  $ce_1(t, 20)$  es mostrado en la Figura 4.26.

En la Figura 4.27,  $ce_2(t, 20)$  y  $se_3(t, 20)$ , con eigenvalores  $a_2 = 1.1543$  y  $b_2 = 1.1607$ , son mostrados.

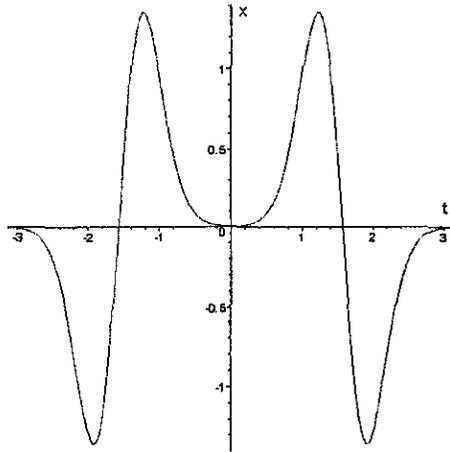


Figura 4.26 Gráfica de  $ce_1(t, 20)$ ,  
 $a_1 = -14.49 \ll 2q$

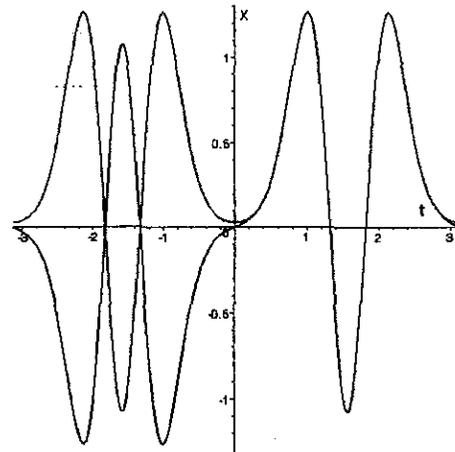


Figura 4.27 Gráfica de  $ce_2(t, 20)$ ,  
 $(a_2 = 1.154), se_3(t, 20),$   
 $(b_2 = 1.161)$

Para los siguientes tres ejemplos, mostraremos las eigenfunciones para los cuales  $a \simeq 2q = 40$ , que es,  $ce_5(t, 20)$ ,  $se_6(t, 20)$  y  $ce_6(t, 20)$ . En estos casos, particularmente  $ce_5(t, 20)$  y  $ce_6(t, 20)$ , la magnitud de las eigenfunciones es más pica en  $t = 0$  y  $\pm\pi$ , en contraste con el comportamiento en la figura 4.24. El comportamiento de esas funciones oscilan más:

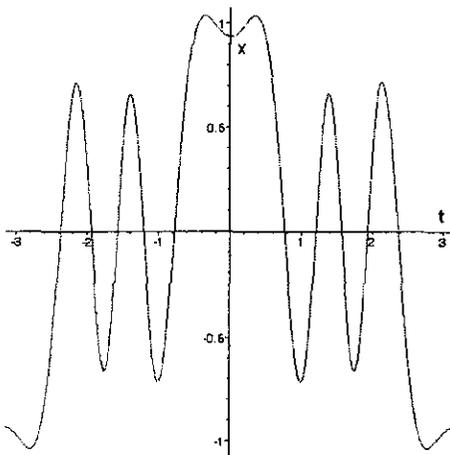


Figura 4.28 Gráfica de  $ce_5(t, 20)$ ,  
 $a_5 = 36.64$

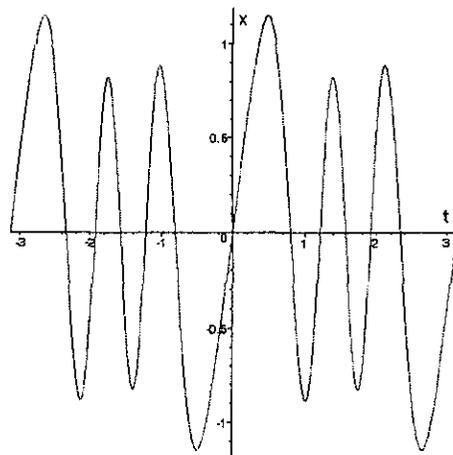


Figura 4.29 Gráfica de  $se_6(t, 20)$ ,  
 $b_6 = 40.59$

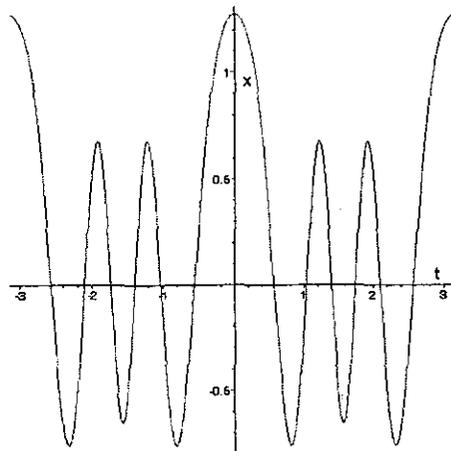


Figura 4.30 Gráfica de  $ce_6(t, 20)$ ,  $a_6 = 44.069$

Las eigenfunciones con eigenvalores  $a > 2q$  oscilan uniformemente. Sin embargo existe un cambio en la relación entre las funciones pares e impares, si  $a \gg 2q$ ,  $b_r(q) \simeq a_r(q)$ , mientras que si  $a \ll 2q$ ,  $a_{r+1} \simeq b_r(q)$ . La Figura 4.31 representa  $se_8(t, 20)$  y la Figura 4.32 muestra  $ce_8(t, 20)$ .

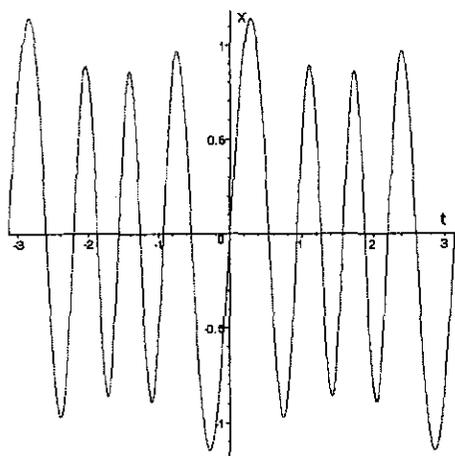


Figura 4.31 Gráfica de  $se_8(t, 20)$ ,  $b_8 = 67.25$

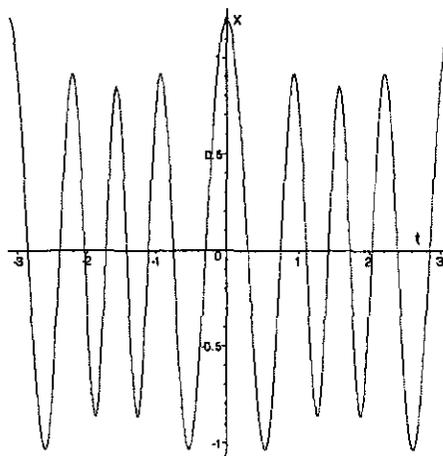


Figura 4.32 Gráfica de  $ce_8(t, 20)$ ,  $a_8 = 67.35$



## Conclusiones

Desde un principio, el objetivo principal fue la ecuación de Mathieu y lo que conlleva de ella, razón por lo cual pasamos por muchos tópicos que eran preponderantes para el estudio de la ecuación. Cada capítulo nos deja una enseñanza en particular, por ejemplo citemos el capítulo uno, nosotros sabemos que para llegar a un objetivo se deben de cruzar por varias estaciones, es por eso que ese capítulo nos ayudo a comprender como se llevo a descubrir la ecuación de Mathieu y de que tipo de ecuación es. También notamos que la ecuación de Mathieu no se pueden resolver en funciones elementales es por eso que Mathieu resolvió la ecuación con unas nuevas funciones especiales que conocemos como funciones de Mathieu, las cuales tienen una amplia teoría por si solas, pero tomamos solo propiedades básicas que a la postre nos serían de gran ayuda.

A lo largo de este trabajo utilizamos un sistema de álgebra computacional que fue de gran ayuda en el cálculo y solución de algunos problemas, el programa *Maple*. En algunas secciones el trabajo operacional era bastante laborioso y en algunas veces difícil de realizar, de manera que *Maple* fue un gran apoyo en la solución de estos problemas. Esto nos deja un gran conocimiento de este sistema para las soluciones de ecuaciones diferenciales, la realización de gráficas que nos ilustraron el comportamiento de estas soluciones, por ejemplo, en el cuarto capítulo mostramos figuras como la

eigenfunción  $\pi$ -periódica por  $ce_0(t, 20)$  y la eigenfunción  $2\pi$ -periódica impar  $se_1(t, 20)$  por decir un ejemplo, y lo hicimos con los conocimientos previos de *Maple* acerca de las funciones de Mathieu.

Uno de los capítulos más fructífero fue el último, ya que en este capítulo vimos a grandes rasgos todo lo que tiene que ver respecto a la ecuación de Mathieu.

Uno de los objetivos de este trabajo era saber el comportamiento de la ecuación de Mathieu y sus soluciones analíticas aproximadas, lo cual se llevo a cabo en las secciones *La ecuación de Mathieu* y *Funciones de Mathieu*, ya que en ellos resolvimos problemas que tenían que ver con Teoría de perturbaciones, ya que este es un método de aproximaciones analíticas y lo hicimos para la ecuación de Mathieu pero con un término amortiguador lineal pequeño, llegamos a soluciones, las comparamos con soluciones exactas, graficamos ambas y las comparamos, con esto notamos que el método que utilizamos era muy bueno debido a la gran similitud de ambas. Recordemos que con ella también trabajamos analíticamente y aplicamos los conocimientos del capítulo tercero, *Teoría de Floquet*.

Creo que en este trabajo se lograron las metas que nos propusimos desde el principio, se abarco gran parte del tema y aplicaciones de este, se vio con alegría el resultado de todos los problemas que servirán para investigaciones futuras y aplicaciones de los conocimientos recién adquiridos, ya que en verdad algunos problemas fueron muy complicados de realizar, logramos todo lo que nos propusimos y llegando a un final plenamente satisfactorio.

# Bibliografía

- [1] ABRAMOWITZ, M. AND STEGUN, I. A. Handbook of Mathematical Functions. *Dover, New-York* (1965).
- [2] ARNOLD, V. I. Ordinary Differential Equations. *MIT Press* (1973).
- [3] BARROW, GREEN, J. Poincaré and the Three Body Problem. *American Mathematical Society* (1996).
- [4] BARROW, W. L. Frecuency modulation. *Proccedings Institute Radio Engineers (America)*, 20, 1626 (1932).
- [5] BICKLEY, W. G. A class of hyperbolic Mathieu functions. *Philosophical Magazine*, 30, 312 (1940).
- [6] BRAINERD, J.G. AND WEYGANDT, C. N. Solutions of Mathieu's equations. *Philosophical Magazine*, 30, 458 (1940).
- [7] BUTTS, W. H. Elliptic cylinder function of class K. *Inaugural Dissetation, Zürich* (1908).
- [8] CESARI, L. Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. *Academy Press* (1963).
- [9] DHAR, S.C. Mathieu Functions. *Calcutta University Press* (1928).

- [10] DOUGALL, J. Solution of Mathieu's equations. *Proceedings Edinburgh Mathematical Society*, 34, 4 (1916).
- [11] FEYNMAN, R. P. AND HIBBS, A. R. Quantum Mechanics and Path Integrals. *McGraw-Hill* (1965).
- [12] GOLDSTEIN, S. Mathieu's functions. *Transactions Cambridge Philosophical Society*, 23, 303 (1927).
- [13] GRADSHTEYN, I. S. AND RYZHIK I. M. Tables of Integrals. Series and Products. *Academy Press* (1965).
- [14] HARTMAN, P. Ordinary Differential Equations. *John Wiley* (1964).
- [15] HILLE, E. Zeros of the Mathieu functions. *Proceedings London Mathematical Society*, 23, 185 (1923).
- [16] HIRSCH, M. W. AND SMALE, S. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. *Academy Press* (1974).
- [17] INCE, E.L. General solution of Hill's equations. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, 75, 436 (1915).
- [18] INCE, E.L. Mathieu functions of stable type. *Philosophical Magazine*, 6, 547 (1928).
- [19] JEFFREYS, H. Certain solutions of Mathieu's equations. *Proceedings London Mathematical Society*, 23, 449 (1924).
- [20] JEFFREYS, H. The modified Mathieu equation. *Proceedings London Mathematical Society*, 23, 455 (1924)..

- [21] JORDAN, D. W. AND SMITH, P. Nonlinear Ordinary Differential Equations, 3rd ed. *Clarendon Press, Oxford Applied and Engineering Mathematics* (1999).
- [22] KREYSZIG, E. AND NORMINGTON, E. J. Maple Computer Manual for Advanced Engineering Mathematics. *Wiley, New-York* (1994).
- [23] MAEDER, ROMAN E. Programming in Mathematica, 3rd ed. *Addison-Wesley* (1996).
- [24] MARSHALL, W. Asymptotic representation of elliptic cylinder functions. *Inaugural Dissertation, Zürich* (1909).
- [25] MATHIEU, É. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *Jour. de Math. pures et appliquées (Jour. de Liouville)*, 13, 137 (1869).
- [26] NAYFEH, A. Perturbation Methods. *Wiley & Sons Inc., New York* (1973).
- [27] RAMÍREZ, V., BARRERA, D., POSADAS, M. Y GONZÁLEZ, P. Cálculo numérico con Mathematica. *Ariel Ciencia* (2001).
- [28] RAYLEIGH, LORD. Complete Scientific Papers, Vol. 2, 88, 1883; Vol. 3, 1, 1887 *Dover reprint* (1964).
- [29] RICHARDS, D. Advanced Mathematical Methods With Maple. *Cambridge University Press* (2002)
- [30] ROSS, C.C. Differential Equations: An Introduction with Mathematica. *Springer-Verlag, New York* (1995).

- [31] SHINGAREVA, I. Investigation of Standing Surface Waves in a Fluid of Finite Depth by Computer Algebra Methods. PhD thesis, *Institute for Problems in Mechanics*, RAS, Moscow, 1995.
- [32] SÁNCHEZ GIL, J. I., SHINGAREVA, I. K., GARCÍA ALVARADO, M. G. Introducción a la Teoría de Perturbaciones Usando Álgebra Computacional. *Mosaicos Matemáticos, Departamento de Matemáticas, Guzmán Partida, M. y Hugues Galindo, E. (Ed.), Universidad de Sonora, Hermosillo, México, pp. 149-155 (2004)*
- [33] SHINGAREVA, I., LIZÁRRAGA CELAYA, C., AND OCHOA RUIZ, A. D. Maple y Ondas Estacionarias. Problemas y Soluciones. *Editorial Unison (Universidad de Sonora), Hermosillo, México (2006)*
- [34] SMALE, S. The Mathematical Intelligencer. *20(2), 7-15 (2004)*.
- [35] TOWNES, C. H. AND SCHAWLOW, A. L. Microwave Spectroscopy. *Dover (1975)*.
- [36] VVEDENSKY, D. D. Partial Differential Equations with Mathematica. *Addison-Wesley (1993)*.
- [37] WATSON, G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. *Cambridge University Press (1966)*.
- [38] WESTER, M.J. Computer Algebra Systems: a Practical Guide. *John Wiley, Chichester, UK (1999)*.
- [39] WICKAM-JONES, T. Mathematica Graphics: Techniques and Applications. *Springer-Verlag, New York (1994)*.
- [40] WHITTAKER, E. T. General solution of Mathieu's equation. *Proceedings Edinburgh Mathematica Society, 32, 75 (1914)*.

- [41] WHITTAKER, E. T. A Treaties on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. *Cambridge University Press* (1964).
- [42] WOLFRAM, S. A New Kind of Science. *Wolfram Media Inc.* (2002).
- [43] WOLFRAM, STEPHEN The Mathematica Book, 5th ed. *Wolfram Media Inc.* (2003).
- [44] YOUNG, A.W. Quasi-periodic solutions of Mathieu's equation. *Proceedings Edinburgh Mathematical Society*, 32, 81 (1914).
- [45] ZIMMERMAN, ROBERT L. AND OLNESS, FREDERICK. Mathematica for Physicists. *Addison-Wesley* (1995).