

Análisis Paramétrico de la Bifurcación de Hopf en Sistemas Tipo Lorenz

David Baca Carrasco

Departamento de Matemáticas

Universidad de Sonora

Agradecimientos

Primeramente, quiero dar gracias a Dios por haberme dado la vida, haberme guiado y por haber permitido realizarme como persona.

Quiero agradecer al Departamento de Matemáticas, a los directivos y a todo el personal docente, por haberme apoyado durante mi estancia en esta institución, por haber invertido su valioso tiempo en mí, por enseñarme sus conocimientos y tenerme la paciencia suficiente para que yo los aprendiese, por su apoyo muchas gracias.

Quiero extender mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, Dr. Fernando Verdusco Gonzalez, por haber confiado en mí para la realización de este trabajo, así como por las horas de trabajo que dedicó en mí (que fueron muchas...), sin sus conocimientos no hubiese podido realizar este trabajo. Agradezco también al comité revisor de mi tesis, por sus correcciones y críticas constructivas hacia mi trabajo, que sin duda, influyeron en gran manera, tanto en mis conocimientos como en la escritura del trabajo.

En forma personal, quiero agradecer a toda mi familia, por su apoyo incondicional, por sus inmensas muestras de cariño hacia un servidor, que sin merecerlas, siempre estuvieron ahí, alentándome y dándome fuerzas para salir adelante. En forma muy especial, agradezco infinitamente a mis padres, Sr. Eudor Baca Rodríguez y Sra. Eva Angelina Carrasco Rodríguez, mil gracias, este trabajo está dedicado a ustedes, por darme la vida, por enseñarme a luchar por lo que quiero, por enseñarme los valores morales que me hicieron un hombre de bien y que me guiaron por la vida, por enseñarme a trabajar, por enseñarme a amar, gracias por depositar en mí su confianza, espero no haberles desepsionado. Agradezco a todos y cada uno de mis nueve hermanos, todos fueron indispensables para que yo concluyera este proyecto, todos estuvieron conmigo, de uno u otro modo, todos aportaron para mi formación, mil gracias a todos. En forma particular, le quiero dar las gracias a mi hermana, Sra. Gloria Baca Carrasco y a su esposo, Sr. Javier Valenzuela Molina, por que, sin tener ellos obligación me aceptaron y me cuidaron en su hogar como uno más de sus hijos, me enseñaron muchos de los valores que ahora se ven reflejados en la culminación de este trabajo, muchas gracias por darme la fortuna de tener cuatro padres.

Quiero agradecer también, al Sr. Isaac Chagoya Rinza, director de la escuela preparatoria “Lic. Benito Juárez”, por su gran labor en esta institución, por habernos inculcado la disciplina del trabajo, por sus valiosos consejos, que sin duda, me han servido en gran manera, gracias a usted y a todo el personal docente que en esa época colaboraron en nuestra formación.

Agradezco en gran manera, a la casa de estudiantes “Centro Cultural Universitario, Padre Miguel Angel Montaña”, por haberme albergado en sus instalaciones durante todo el periodo que duró mi estancia en la Licenciatura en Matemáticas. Gracias a los miembros del patronato, al Sr. Luis Carlos Monge y al Sr. Josedel(chedel) por apoyarnos y darnos tantos momentos de felicidad en ese que siempre será nuestro hogar. No cabe duda que sin su ayuda no hubiese terminado mi carrera.

Por último, y desde luego no menos importante, mis mayores agradecimientos a todos y cada uno de mis amigos y compañeros de clase, con los que tuve la fortuna de pasar momentos inolvidables, gracias por que estuvieron conmigo en todos y cada uno de los momentos de mi trayectoria escolar y personal, gracias por brindarme su apoyo incondicional en los momentos más difíciles de mi vida, así como compartir conmigo los momentos de felicidad, por brindarme sus conocimientos cuando así se los solicité, gracias por su amistad, por su apoyo y por los momentos que juntos pasamos, buenos, malos, pero siempre unidos para vencerlos y/o disfrutarlos. En forma particular, agradezco a mi compañero y amigo Manuel Fco. Oejo Montaña, por su apoyo en la construcción de las gráficas presentes en este trabajo.

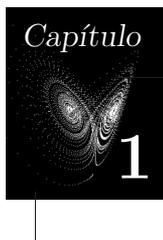
A todos aquellos quienes por descuido no han sido incluidos y que estuvieron apoyándome en mi trayectoria escolar y personal, les pido disculpas y les extiendo mis agradecimientos por lo que lograron de un servidor.

D. B. C.
Hermosillo, Son. Junio de 2007.

Índice General

1	Introducción	7
1.1	Sistemas tipo Lorenz	8
2	Preliminares Matemáticos	11
2.1	Teorema de la Variedad Central	11
2.2	Teorema de la Bifurcación de Hopf	12
2.2.1	Velocidad de Cruce de los Valores Propios a través del Eje Imaginario	15
2.3	Colocación de Raíces en el Eje Imaginario	17
2.4	Ecuación General de Segundo Grado en dos Variables	18
3	El Sistema de Lü	19
3.1	Caso I: $a = \mu$, y (b, c) Parámetros de Control	19
3.1.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	19
3.2	Caso II: $b = \mu$, y (a, c) Parámetros de Control	31
3.2.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	31
3.3	Caso III: $c = \mu$, y (a, b) Parámetros de Control	40
3.3.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	40
3.4	Resultado Principal	48
4	El Sistema de Lorenz	49
4.1	Caso I: $a = \mu$, y (b, c) Parámetros de Control	49
4.1.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	50
4.2	Caso II: $b = \mu$, y (a, c) Parámetros de Control	61
4.2.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	61
4.3	Caso III: $c = \mu$, y (a, b) Parámetros de Control	69
4.3.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	69
4.4	Resultado Principal	77
5	El Sistema de Chen	79
5.1	Caso I: $a = \mu$, y (b, c) Parámetros de Control	79
5.1.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	80

5.2	Caso II: $b = \mu$, y (a, c) Parámetros de Control	87
5.2.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	87
5.3	Caso III: $c = \mu$, y (a, b) Parámetros de Control	95
5.3.1	Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos	95
5.4	Resultado Principal	102



Introducción

El caos es un fenómeno no-lineal muy interesante, el cual ha sido estudiado intensivamente durante las últimas tres décadas. Se le encontró como utilidad, o tiene un gran potencial, en muchas disciplinas tales como en prevención de colapsos de sistemas de potencia, aplicaciones de ingeniería biomédica en el estudio del cerebro y del corazón humano, por mencionar algunos casos. El control del caos, en un sentido más amplio, puede ser dividido en dos categorías: una relacionada con la supresión de la dinámica del comportamiento caótico cuando este no sea deseado, y la otra generar o reafirmar el caos cuando este es benéfico. A esta última se le conoce como caotificación o anticontrol del caos. La caotificación es teóricamente muy atractiva y técnicamente es muy provocativa, ya que involucra la generación de algunos resultados muy complicados, aún en comportamientos dinámicos bien organizados, los cuales son usualmente asociados con bifurcaciones. Para un sistema dado, el cual puede ser lineal o no-lineal y originalmente puede ser no-caótico e inclusive estable, el objetivo es crear caos usando un regulador simple e implementable.

Grandes esfuerzos han sido realizados para alcanzar este objetivo durante varios años, no sólo mediante simulaciones de computación, sino que también por desarrollos completos y rigurosos de teorías matemáticas. En el esfuerzo de caotificación, generar caos discreto intencionalmente ha sido un gran suceso. Al mismo tiempo, la generación de caos en sistemas de tiempo continuo fue desarrollado en un periodo más breve. En efecto, un controlador simple de estado lineal parcial fue diseñado, de tal forma que fuera capaz de dirigir al sistema de Lorenz, actualmente no en la región caótica, para ser caótica, el cual ha conducido al descubrimiento de un nuevo sistema caótico, llamado el sistema de Chen. Se ha verificado que el sistema de Chen y el sistema de Lorenz tienen una estructura similar (a los sistemas autónomos tridimensionales con sólo dos términos cuadráticos) pero, topológicamente, no equivalentes (no hay un homeomorfismo que pueda mandar uno al otro). Aún más interesante, se ha encontrado que los sistemas de Chen y de Lorenz son clasificados como dos clases opuestas de sistemas caóticos mediante una condición crucial dada por Vaneecek y Chelikovský [1996]. En su parte lineal $A = [a_{ij}]$, el sistema de Lorenz satisface $a_{12}a_{21} > 0$, mientras que el sistema de Chen satisface $a_{12}a_{21} < 0$. Recientemente, J. Lü encontró un sistema que satisface la condición $a_{12}a_{21} = 0$, el cual representa la transición entre el sistema de Chen y el de Lorenz.

Algo notable sobre estos tres sistemas es que satisfacen algunas propiedades en común:

1. Tienen la misma simetría, disipatividad, estabilidad de equilibrios, bifurcaciones similares y estructuras topológicas, etc. En efecto, éstos pertenecen a la familia generalizada de Lorenz.
2. Tienen una estructura compuesta.
3. El familiar oscilador de Duffing puede ser controlado junto con el sistema de Lorenz y el sistema de Chen.

Tenemos que precisar, que el nuevo atractor caótico debido a Lü encuentra una transición entre el sistema de Lorenz y el sistema de Chen. Una pregunta interesante que ha surgido alrededor de estos tres sistemas en cuestión es, que si ¿existe un sistema caótico tal que unifique los tres sistemas caóticos antes mencionados, y pueda realizarse una transición continua de uno al otro?

1.1 Sistemas tipo Lorenz

En 1963, E. Lorenz estableció un modelo matemático mediante el cual pretendía modelar el comportamiento del clima, manipulando este sistema de ecuaciones. El resultado no fue bueno para lo que él pretendía hacer, debido a que los parámetros que él introdujo a su sistema no eran suficientes para abarcar todos los parámetros que intervienen en el clima. El sistema no le sirvió a Lorenz para sus fines, pero trabajando con él, aportó grandes avances a la matemática, debido a que fué el primero en encontrar un comportamiento caótico en la dinámica de este sistema autónomo tridimensional.

EL sistema de Lorenz está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

donde $a, b, c > 0$ son parámetros reales positivos.

Con los estudios hechos del sistema de Lorenz, se clasificó toda una familia de sistemas, a los que se les llamó sistemas tipo Lorenz.

Definición 1.1. Diremos que el siguiente sistema en \mathbb{R}^3 ,

$$\dot{x} = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \\ \lambda_3 \end{array} \right) x + \left(\begin{array}{c} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{array} \right) \quad (1.1)$$

con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ y } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ con valores propios } \lambda_1 \text{ y } \lambda_2$$

tales que

$$\lambda_2 < -\lambda_1 < \lambda_3 < 0$$

es un sistema tipo Lorenz

En 1996, Vanecek y Chelikovský, clasificaron una familia generalizada de sistemas tipo Lorenz por una condición en su parte lineal $A = [a_{ij}]$. Entonces todo sistema que cumpla con (1.1) y además con

$$\tau = a_{12}a_{21} > 0$$

está dentro de ésta familia de sistemas generalizados tipo Lorenz. El sistema de Lorenz cumple con ésta condición.

En 1999, G. Chen encontró otro atractor caótico en un simple sistema autónomo tridimensional, el cual no es topológicamente equivalente al sistema de Lorenz. Tampoco pertenece a la familia generalizada de sistemas tipo Lorenz, puesto que el sistema de Chen cumple con

$$a_{12}a_{21} < 0$$

El sistema de Chen pertenece a otra familia canónica de sistemas caóticos y está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned}$$

Una vez que se encontraron estos sistemas (Lorenz y Chen), los cuales se pueden considerar como dual uno del otro, se planteó una pregunta muy interesante, la cual decía que si sería posible encontrar un sistema caótico entre el sistemas de Chen y el sistema Lorenz, que cumpliera con la condición

$$a_{12}a_{21} = 0$$

Fué en el año 2002, J. Lü encontró un nuevo atractor caótico, generado por el siguiente sistema tridimensional autónomo.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned}$$

el cual cumple con la condición

$$a_{12}a_{21} = 0.$$

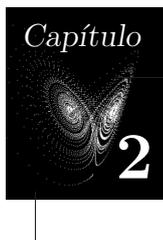
En los siguientes tres capítulos haremos un análisis paramétrico de la bifurcación de Hopf en cada uno de los sistemas anteriormente presentados, con el propósito de establecer diferencias cualitativas entre los sistemas en términos de la bifurcación de Hopf.

El trabajo que se realiza en esta tesis no está enfocado al estudio de los atractores caóticos que presentan estos tres sistemas, que es por lo que se conocen más, en este trabajo se hace un análisis paramétrico de la bifurcación de Hopf que presentan estos tres sistemas, y va enfocado a buscar la relación que existe entre ellos, pero ahora en términos de esta bifurcación.

En el trabajo que a continuación se presenta, se hace un análisis de la bifurcación de Hopf, buscando la posibilidad de manipular el valor de los parámetros de control para determinar la estabilidad de las órbitas periódicas que aparecen o desaparecen, según sea el caso.

Cada uno de los tres sistemas a tratar, cuenta con tres parámetros. Lo que se hace en este trabajo, y en forma similar en cada uno de los tres sistemas, es lo siguiente: iremos cambiando la función de los parámetros en cada uno de los casos, es decir, consideraremos a uno de los parámetros del sistema como parámetro de bifurcación, y a los otros dos restantes los consideraremos como parámetros de control, lo haremos de tal forma que, a cada uno de los parámetros de los sistemas le corresponda ser parámetro de bifurcación y también, en otro análisis, le corresponda ser parámetro de control; de esta manera, haremos un análisis de todos los casos posibles en los que se pueda presentar la bifurcación de Hopf. La idea es hacer una clasificación, en el espacio de los parámetros de control, de los tres tipos de bifurcación de Hopf que pueden ocurrir: subcrítica, supercrítica y degenerada.

El trabajo está organizado de la siguiente forma, en el capítulo 2 se presentan los resultados matemáticos que se habrán de utilizar durante el desarrollo de este trabajo, tales como el Teorema de la Variedad Central, el Teorema de la Bifurcación de Hopf, así como una fórmula para calcular la velocidad de cruce de los valores propios a través del eje imaginario. En los siguientes tres capítulos, se hace el desarrollo del estudio de los tres sistemas en cuestión, iniciando con el sistema de Lü, seguido por el sistema de Lorenz y finalizando con el estudio del sistema de Chen. Finalmente se presentan, como conclusión, los resultados obtenidos en este trabajo.



Preliminares Matemáticos

Durante el desarrollo de este trabajo se utilizarán algunos conceptos y resultados, los cuales se presentan a continuación.

Definición 2.1. *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (2.1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

El punto (x_0, μ_0) se dice punto de equilibrio no-hiperbólico de (2.1) si:

A) $f(x_0, \mu_0) = 0$

B) $D_x(f(x_0, \mu_0))$ posee al menos un valor propio con parte real igual a cero

2.1 Teorema de la Variedad Central

Considere el sistema

$$\dot{\xi} = F(\xi) \quad (2.2)$$

con $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $F \in \mathcal{C}^r$, tal que

$$F(0) = 0 \text{ y } DF(0) \sim \begin{pmatrix} A_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & B_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

donde A sólo posee valores propios con parte real cero y B sólo posee valores propios con parte real negativa. El símbolo “ \sim ” denota similitud entre matrices.

Existe un cambio de coordenadas que nos permite descomponerlo en dos bloques de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Definición 2.2. . Una variedad invariante se llama variedad central de (2.3), si puede ser representada de la forma:

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

Para δ suficientemente pequeño.

Teorema 2.1. Considere el sistema (2.3)

(i) Existe una variedad invariante llamada, variedad central, alrededor de $\xi = 0$,

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} | y = h(x)\}$$

(ii) La dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x))$$

(iii) La función $h : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ puede ser aproximada utilizando la ecuación

$$Dh(x)(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) \equiv 0$$

2.2 Teorema de la Bifurcación de Hopf

La bifurcación de Hopf, es un tipo de bifurcación que presentan algunos sistemas, de tal manera que al variar el valor del parámetro de bifurcación del sistema, este sufre un cambio en la estabilidad del punto crítico en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica, la cual tienen una determinada estabilidad, dicha estabilidad es proporcionada por el signo del primer coeficiente de Lyapunov.

De esta manera, este trabajo está enfocado en analizar lo que ocurre alrededor de este tipo de bifurcación.

Teorema 2.2. (Hopf). Considere el sistema parametrizado

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe (x_0, μ_0) tal que

$$(H1) \quad f(x_0, \mu_0) = 0$$

(H2) $D_x f(x_0, \mu_0)$ posee un único par de valores propios en el eje imaginario y el resto están fuera de él

(H3) $\frac{d}{d\mu} (\text{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$
Donde $\lambda(\mu)$ es un valor propio de $D_x f(x_0, \mu)$.

Entonces, existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

La dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2.\end{aligned}$$

Si $l_1 \neq 0$ entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenspacio generado por $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$. Si $l_1 < 0$ las órbitas periódicas son estables (caso supercrítico), mientras que si $l_1 > 0$ son inestables (caso subcrítico).

El coeficiente l_1 se define como el primer coeficiente de Lyapunov. Existe una fórmula para calcular el primer coeficiente de Lyapunov, la cual está dada para sistemas en el plano.

Considere el siguiente sistema en el plano:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\omega_0 z_2 + F_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= \omega_0 z_1 + F_2(z_1, z_2)\end{aligned}$$

El primer coeficiente de Lyapunov está dado por la fórmula

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0 R_2), \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned}R_1 &= (F_{1z_1 z_2}(F_{1z_1 z_1} + F_{1z_2 z_2}) - F_{2z_1 z_2}(F_{2z_1 z_1} + F_{2z_2 z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1 z_1} F_{2z_1 z_1} + F_{1z_2 z_2} F_{2z_2 z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1 z_1 z_1} + F_{1z_1 z_2 z_2} + F_{2z_2 z_1 z_1} + F_{2z_2 z_2 z_2})|_{z_0}.\end{aligned}$$

La bifurcación de Hopf supercrítica, se presenta cuando $l_1 < 0$. Se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica atractora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de μ_0 .

La figura 2.1, muestra el diagrama de bifurcación para este caso.

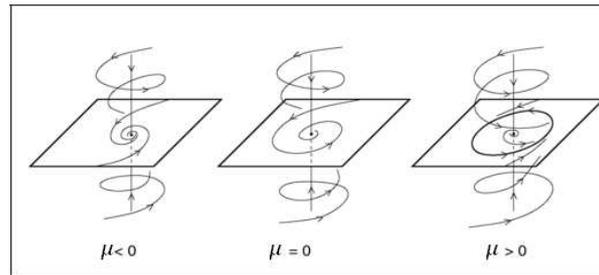


Figura 2.1: Bifurcación de Hopf supercrítica. Un punto de equilibrio estable se hace inestable, dando origen a una órbita periódica atractora

La bifurcación de Hopf subcrítica, se presenta cuando $l_1 > 0$. Se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica repulsora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de μ_0 .

La figura 2.2, muestra el diagrama de bifurcación para este caso.

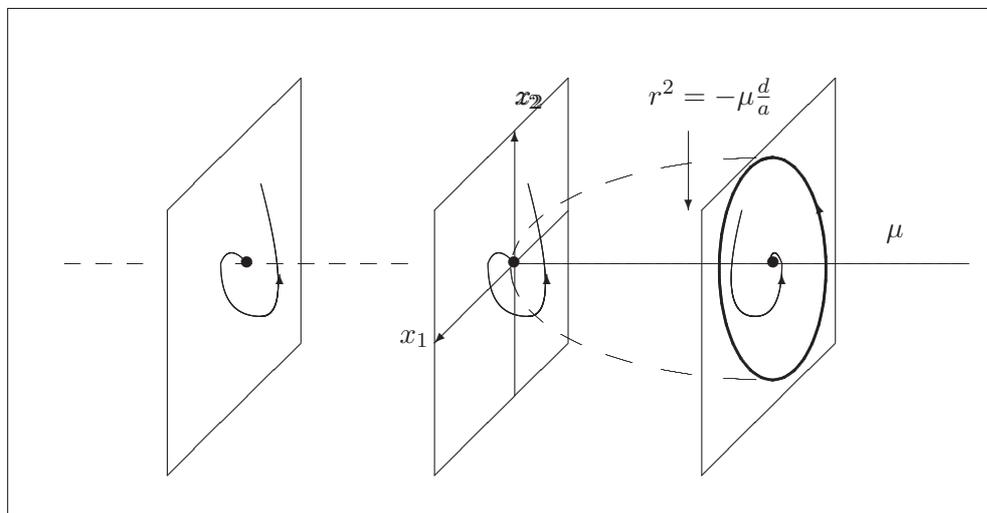


Figura 2.2: Bifurcación de Hopf Subcrítica: Un equilibrio estable y una órbita periódica inestable se funden en un punto de equilibrio inestable.

Otro tipo de bifurcación de Hopf que se presenta es la bifurcación de Hopf degenerada, la cual se presenta cuando $l_1 = 0$. Se caracteriza por la presencia de un centro de órbitas periódicas, justo cuando el parámetro de bifurcación es igual a μ_0 .

2.2.1 Velocidad de Cruce de los Valores Propios a través del Eje Imaginario

Para garantizar que ocurra la bifurcación de Hopf, además de tener un valor del parámetro que coloque dos valores propios en eje imaginario, también se debe verificar si dichos valores propios atraviesan a éste, es decir, si la velocidad de cruce, dada por

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{d}{d\mu} [\operatorname{Re}(\lambda(\mu))] |_{\mu=\mu_0}$$

es diferente de cero.

El desarrollo que a continuación se presenta es con el que determinamos la velocidad de cruce para cualquier sistema en \mathbb{R}^3 , la cual estará dada en términos de la derivada del campo.

Considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

Supongamos que existen x_0 y μ_0 tal que

$$f(x_0, \mu_0) = 0,$$

y supongamos también que

$$Df(x_0, \mu_0) \sim \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_0 < 0$ y $\omega_0 > 0$. Supongamos que para $\mu \approx \mu_0$ se tiene que

$$\lambda_1 = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$$

$$\lambda_2 = \alpha(\mu) - i\beta(\mu)$$

con

$$\alpha(\mu_0) = 0$$

y

$$\beta(\mu_0) = \omega_0$$

No perdamos de vista que deseamos calcular $\alpha'(\mu_0)$, que es la velocidad de cruce de los valores propios $\lambda_{1,2}$ por el eje imaginario.

Observemos que para $\mu \approx \mu_0$ el polinomio característico asociado a la matriz jacobiana

$$A = Df(x_0, \mu) \sim \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\beta(\mu) & 0 \\ \beta(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^*(\mu) \end{pmatrix} = J_\mu$$

está dado por

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - J_\mu) \\ &= \lambda^3 + L_1(\mu)\lambda^2 + L_2(\mu)\lambda + L_3(\mu) \end{aligned}$$

ya que matrices similares poseen el mismo polinomio característico, donde

$$L_1(\mu) = -(2\alpha(\mu) + \lambda^*(\mu)) \quad (2.5)$$

$$L_2(\mu) = 2\alpha(\mu)\lambda^*(\mu) + \alpha^2(\mu) + \beta^2(\mu) \quad (2.6)$$

$$L_3(\mu) = -\lambda^*(\mu)(\alpha^2(\mu) + \beta^2(\mu)). \quad (2.7)$$

Como podemos observar, tenemos un sistema de tres ecuaciones, resolviéndolo para α tenemos, de (2.7) que

$$\alpha^2(\mu) + \beta^2(\mu) = -\frac{L_3(\mu)}{\lambda^*(\mu)}$$

sustituyendo la ecuación anterior en (2.6), tenemos

$$L_2(\mu) = 2\alpha(\mu)\lambda^*(\mu) - \frac{L_3(\mu)}{\lambda^*(\mu)}. \quad (2.8)$$

Despejamos $\lambda^*(\mu)$ de (2.5) y sustituyendola en (2.8) tenemos

$$\lambda^*(\mu) = -2\alpha(\mu) - L_1(\mu)$$

entonces

$$L_2(\mu) = -2\alpha(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu)) + \frac{L_3(\mu)}{2\alpha(\mu) + L_1(\mu)}$$

lo cual implica que

$$L_2(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu)) = -2\alpha(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu))^2 + L_3(\mu)$$

de aquí se sigue que

$$2\alpha(\mu) [(2\alpha(\mu) + L_1(\mu))^2 + L_2(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu))] - L_3(\mu) = 0.$$

Desarrollando la expresión anterior tenemos

$$2\alpha(\mu)(4\alpha^2(\mu) + 4\alpha(\mu)L_1(\mu) + L_1^2(\mu)) + L_2(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu)) - L_3(\mu) = 0$$

entonces

$$8\alpha^3(\mu) + 8\alpha^2(\mu)L_1(\mu) + (2L_1^2(\mu) + 2L_2(\mu))\alpha(\mu) + L_1(\mu)L_2(\mu) - L_3(\mu) = 0$$

derivando implícitamente la expresión anterior tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 24\alpha^2(\mu)\alpha'(\mu) + 8 [L_1(\mu)(2\alpha(\mu))\alpha'(\mu) + \alpha^2(\mu)L_1'(\mu)] \\ &\quad + 2 [(L_1^2(\mu) + L_2(\mu))\alpha'(\mu) + \alpha(\mu)(2L_1(\mu)L_1'(\mu) + L_2'(\mu))] \\ &\quad + L_1(\mu)L_2'(\mu) + L_1'(\mu)L_2(\mu) - L_3'(\mu) \end{aligned}$$

Ahora, si $\mu = \mu_0$, entonces

$$2(L_1^2(\mu_0) + L_2(\mu_0))\alpha'(\mu_0) = L_3'(\mu_0) - L_1'(\mu_0)L_2(\mu_0) - L_1(\mu_0)L_2'(\mu_0)$$

y por último despejando $\alpha'(\mu_0)$ tenemos

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - L_1'(\mu_0)L_2(\mu_0) - L_1(\mu_0)L_2'(\mu_0)}{2(L_1^2(\mu_0) + L_2(\mu_0))}$$

pero, $L_1(\mu_0) = -\lambda_0$ y $L_2(\mu_0) = \omega_0^2$, entonces

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)} \quad (2.9)$$

siendo esta última ecuación la velocidad de cruce de los valores propios a través del eje imaginario.

2.3 Colocación de Raíces en el Eje Imaginario

Considere la ecuación cúbica

$$\lambda^3 + L_1(\mu)\lambda^2 + L_2(\mu)\lambda + L_3(\mu) = 0,$$

donde se observa que los coeficientes dependen del parámetro real μ . Deseamos encontrar valores del parámetro μ para que la ecuación cúbica posea un par de raíces imaginarias y una real negativa.

Sea $\lambda = i\omega_0$ una solución imaginaria, entonces la ecuación cúbica es equivalente a

$$\begin{aligned} (i\omega_0)^3 + L_1(\mu)(i\omega_0)^2 + L_2(\mu)(i\omega_0) + L_3(\mu) &= 0 \\ -i\omega_0^3 - L_1(\mu)\omega_0^2 + iL_2(\mu)\omega_0 + L_3(\mu) &= 0 \\ \omega_0(L_2(\mu) - \omega_0^2) + (L_3(\mu) - L_1(\mu)\omega_0^2) &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} L_2(\mu) - \omega_0^2 &= 0 \\ L_3(\mu) - L_1(\mu)\omega_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$L_2(\mu) = \omega_0^2 = \frac{L_3(\mu)}{L_1(\mu)}.$$

Tenemos entonces que la ecuación cúbica posee un par de raíces imaginarias, si existe μ tal que

$$L_3(\mu) = L_1(\mu)L_2(\mu) \quad \text{y} \quad L_2(\mu) > 0. \quad (2.10)$$

Sea $\mu = \mu_0$ tal que se satisface (2.10), y sean $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ y $\lambda_3 = \lambda_0$ las raíces de la cúbica. Es claro que

$$\omega_0 = \sqrt{L_2(\mu_0)}, \quad (2.11)$$

además, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}(\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)(\lambda - \lambda_0) &= 0 \\ \lambda^3 + (\dots)\lambda^2 + (\dots)\lambda + (-\lambda_0\omega_0^2) &= 0,\end{aligned}$$

por lo que

$$\lambda_0 = -\frac{L_3(\mu_0)}{L_2(\mu_0)} \quad (2.12)$$

2.4 Ecuación General de Segundo Grado en dos Variables

Si consideramos la ecuación general de segundo grado en las variables x y y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (2.13)$$

ésta determina en el plano xy cualquiera de las siguientes curvas de segundo orden: una elipse, una hipérbola, una parábola o un par de rectas (caso degenerado). Las curvas de segundo orden están caracterizadas por las siguientes tres cantidades invariantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad \rho = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad S = A + C. \quad (2.14)$$

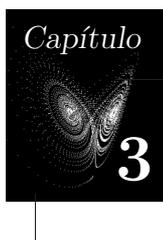
La tabla 2.1 resume la caracterización de las curvas de segundo orden en el plano (Bronshtein y Semendiaev, 1977).

$\rho > 0$	$\Delta \cdot S < 0$	elipse
$\rho > 0$	$\Delta \cdot S > 0$	elipse imaginaria ¹
$\rho > 0$	$\Delta = 0$	un par de rectas imaginarias ¹
$\rho < 0$	$\Delta \neq 0$	hipérbola
$\rho < 0$	$\Delta = 0$	dos rectas concurrentes
$\rho = 0^2$	$\Delta \neq 0$	parábola
$\rho = 0^2$	$\Delta = 0$	un par de rectas

Table 2.1: Curvas de segundo orden en el plano.

¹Diremos que una curva es *imaginaria* si la ecuación que la describe no tiene solución en los reales.

²Suponemos que ninguno de los coeficientes A , B y C es igual a cero.



El Sistema de Lü

El sistema de Lü está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

Como podemos observar, el sistema (3.1) presenta tres parámetros, (a, b, c) , que para nuestro análisis los usaremos de la siguiente manera: consideraremos a uno de ellos como parámetro de bifurcación y a los otros dos como parámetros de control, estaremos rotando las funciones de cada uno hasta completar el análisis para que cada uno sea parámetro de bifurcación.

3.1 Caso I: $a = \mu$, y (b, c) Parámetros de Control

Iniciamos nuestro análisis considerando como parámetro de bifurcación al parámetro a y quedan como parámetros de control los parámetros (b, c) .

Sea $a = \mu$, entonces el sistema (3.1) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\mu x_1 + \mu x_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2\end{aligned}$$

con b, c parámetros positivos y μ parámetro de bifurcación.

3.1.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

Cálculo de los puntos de equilibrio

Buscaremos ahora todos los puntos de equilibrio que posee el sistema, con la finalidad de buscar aquellos que sean no-hiperbólicos, esto lo logramos igualando el campo a cero como sigue:

$$\begin{aligned} -\mu x_1 + \mu x_2 &= 0 \\ cx_2 - x_1 x_3 &= 0 \\ -bx_3 + x_1 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior, tenemos que los puntos de equilibrio del sistema (3.1) son

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c) \\ P_3 &= (-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c) \end{aligned}$$

Cálculo de los valores propios

Teniendo ya los puntos de equilibrio, buscaremos cuál de ellos es un punto de equilibrio no-hiperbólico, ya que necesito esto para que pueda ocurrir la bifurcación de Hopf. Buscaremos los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio en cuestión; no olvidemos que buscamos un valor para el parámetro de bifurcación que me genere un par de valores propios en el eje imaginario y otro fuera de él. De esta manera, la matriz jacobiana del sistema (3.1) es la siguiente

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ -x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix}$$

y evaluando la matriz jacobiana, primero en el punto de equilibrio P_1 se tiene

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

como podemos observar, la matriz jacobiana evaluada en P_1 es una matriz triangular, por lo que los valores propios aparecen en la diagonal principal, entonces los valores propios asociados al punto de equilibrio P_1 son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= c \\ \lambda_3 &= -b \end{aligned}$$

Observando los resultados de este análisis, podemos concluir que en el punto de equilibrio P_1 , no ocurre una bifurcación de Hopf.

Analicemos ahora lo que pasa en el punto de equilibrio P_2 . Para ello evaluamos la matriz jacobiana en este punto de equilibrio:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}$$

sus valores propios los determinamos resolviendo su polinomio característico que es:

$$\lambda^3 + L_1(\mu)\lambda^2 + L_2(\mu)\lambda + L_3(\mu) = 0 \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} L_1(\mu) &= \mu + b - c \\ L_2(\mu) &= \mu b \\ L_3(\mu) &= 2\mu cb \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en (3.2) tenemos

$$\lambda^3 + (b - c + \mu)\lambda^2 + b\mu\lambda + 2bc\mu = 0 \quad (3.3)$$

Ahora, lo que deseamos es investigar si ocurre una bifurcación de Hopf; para ello, necesitamos encontrar valores de μ que hagan que la matriz jacobiana tenga un par de valores propios en el eje imaginario y otro en el eje real. Esto lo podemos garantizar si encontramos los valores de μ que satisfagan las condiciones (2.10), es decir,

$$L_3(\mu) = L_1(\mu)L_2(\mu) \quad (3.4)$$

y también que cumpla con $L_2(\mu) > 0$. Entonces, sustituyendo los valores que ya tenemos de $L_1(\mu)$, $L_2(\mu)$, $L_3(\mu)$ en (3.4) se tiene

$$2bc\mu = (\mu - c + b)(b\mu)$$

y resolviendo la ecuación anterior para μ obtenemos dos valores,

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \mu &= 3c - b \end{aligned}$$

Estos dos valores de μ satisfacen (2.10), ahora veremos si cumplen con la segunda condición ($L_2(\mu) > 0$).

Sustituyendo $\mu = 0$ en

$$L_2(\mu) = \mu b$$

se tiene que

$$L_2(0) = 0$$

entonces podemos concluir que este valor de μ no sirve para nuestros fines. Haciendo el análisis para $\mu_0 = 3c - b$; se tiene

$$L_2(\mu_0) = b(3c - b)$$

por lo que

$$L_2(\mu_0) > 0.$$

Si encontramos valores para b y c que cumplan con la restricción

$$3c > b \tag{3.5}$$

habremos logrado encontrar un valor para μ tal que $L_2(\mu_0) > 0$ y que, además, con estos valores para los parámetros se cumple también que $\mu_0 > 0$. Como podemos observar, si tomamos valores de b y c que cumplan con (3.5) (ver fig. 3.1) lograremos colocar esos dos valores propios en el eje imaginario y el otro en el eje real.

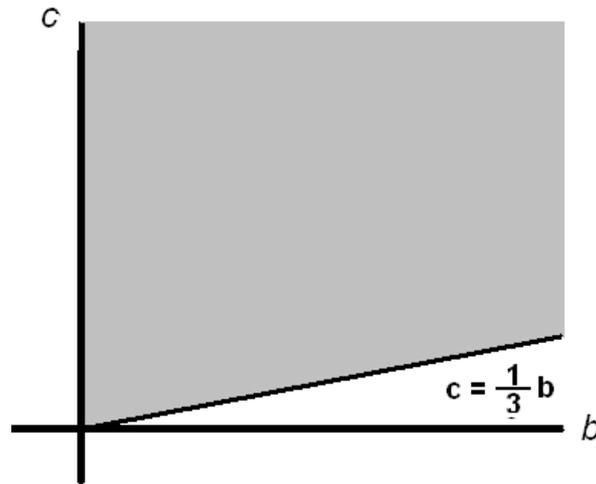


Figura 3.1: $c > \frac{1}{3}b$

Utilizando las fórmulas (2.11) y (2.12) tenemos que los valores propios son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{(3c - b)b} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{(3c - b)b} \\ \lambda_0 &= -2c \end{aligned}$$

Velocidad de cruce de los valores propios

Por otro lado, otra condición necesaria para que ocurra la bifurcación de Hopf es que los valores propios complejos crucen a través del eje imaginario; es decir, si variamos el valor de μ al rededor de μ_0 , entonces los valores propios complejos serían:

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$$

entonces diremos que los valores propios $\lambda_{1,2}$ cruzan através del eje imaginario si

$$\left[\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right]_{\mu=\mu_0} \neq 0$$

Para obtener $\alpha'(\mu_0)$ utilizaremos la ecuación (2.9), la cual es

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

Para nuestro caso,

$$\begin{aligned} L_1'(\mu_0) &= 1 \\ L_2'(\mu_0) &= b \\ L_3'(\mu_0) &= 2bc \end{aligned}$$

entonces

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{b(b - 3c)}{2(4c^2 + 3bc - b^2)}$$

Observamos que si $c = \frac{1}{3}b$, entonces, $\alpha'(\mu_0) = 0$, pero como necesitamos que se cumpla (3.5), entonces, esta restricción no permite que $\alpha'(\mu_0) = 0$. Además, en la región de factibilidad la velocidad de cruce es negativa, debido también a (3.5). Entonces, tomando valores para b y c dentro de la región de factibilidad, podemos asegurar que tenemos una bifurcación del tipo Hopf. Esto nos motiva para continuar con el análisis para buscar cómo se comporta la dinámica del sistema cuando se presenta esta bifurcación. Haciendo un análisis semejante al anterior pero para el punto de equilibrio P_3 , se observan exactamente los mismos resultados que en el punto P_2 , por lo que podemos decir que en P_3 también ocurre una bifurcación de Hopf.

Cálculo de la variedad central

Continuaremos con el análisis del punto P_2 . Para ello, analizaremos la variedad central, ésta nos dará la posibilidad de conocer el primer coeficiente de Lyapunov, el cual nos determinará la estabilidad de la órbita periódica que aparecerá o desaparecerá, según sea el caso. Para continuar, trasladaremos el punto de equilibrio P_2 al origen; esto lo logramos haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \sqrt{bc} \\ y_2 &= x_2 - \sqrt{bc} \\ y_3 &= x_3 - c \end{aligned}$$

Con este cambio de variables, el sistema en las nuevas variables nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (b - 3c)(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 &= c(\sqrt{bc} + y_2) - (\sqrt{bc} + y_1)(c + y_3) \\ \dot{y}_3 &= (\sqrt{bc} + y_1)(\sqrt{bc} + y_2) - b(c + y_3) \end{aligned}$$

Ahora, el punto de equilibrio es el origen y los valores propios son los mismos ya que sólo hicimos una traslación. La matriz jacobiana evaluada en el origen es:

$$A(0) = \begin{pmatrix} b - 3c & -b + 3c & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}.$$

Continuamos ahora con el cálculo de los vectores propios asociados a cada valor propio, esto para encontrar una matriz P que me permita expresar la matriz del sistema en su forma de Jordan y así facilitar los cálculos de la variedad central. Los vectores propios son soluciones del sistema

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (3.6)$$

con

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_i = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}$$

resolviendo (3.6) se tiene que

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{bc}\mu \\ \sqrt{bc}(\mu + \lambda) \\ \lambda(c - \mu - \lambda) \end{pmatrix}.$$

Entonces, para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{bc}(3c - b) \\ \sqrt{bc}(3c - b) \\ w_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{bc}w_0 \\ w_0(b - 2c) \end{pmatrix},$$

con $w_0 = \sqrt{b(3c - b)}$. Para $\lambda = \lambda_0$ tenemos que

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{bc}(3c - b) \\ \sqrt{bc}(c - b) \\ -2bc \end{pmatrix}.$$

Con los vectores propios construimos la matriz P , la cual está dada por

$$P = (Im(v_1), Re(v_1), v_2). \quad (3.7)$$

Sustituyendo v_1 y v_2 en (3.7) se tiene que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{bc}(3c - b) & \sqrt{bc}(3c - b) \\ \sqrt{bc}w_0 & \sqrt{bc}(3c - b) & \sqrt{bc}(c - b) \\ w_0(b - 2c) & w_0^2 & -2bc \end{pmatrix}.$$

También necesitamos la matriz inversa de P , la cual es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2b^2c+6bc^2-b\omega_0^2+c\omega_0^2}{\sqrt{bc}(b-3c)\omega_0(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{2bc+\omega_0^2}{\sqrt{bc}(4c^2+\omega_0^2)} & -\frac{2c}{4c^2\omega_0+\omega_0^2} \\ \frac{b^2-5bc+2c^2}{\sqrt{bc}(b-c)(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{-b+2c}{\sqrt{bc}(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{1}{4c^2+\omega_0^2} \\ -\frac{b^2-5bc+6c^2+\omega_0^2}{\sqrt{bc}(b-3c)(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{b-2c}{\sqrt{bc}(4c^2+\omega_0^2)} & -\frac{1}{4c^2+\omega_0^2} \end{pmatrix}.$$

Teniendo ya la matriz P y la matriz P^{-1} proseguimos a calcular la matriz en forma de Jordan, la cual está dada por el producto de

$$J = P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(3c-b)} & 0 \\ \sqrt{b(3c-b)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{pmatrix}.$$

A continuación, vamos a ortogonalizar la variedad central y la variedad estable, el cambio de variables que nos permite hacer esta ortogonalización nos lo da la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= -\sqrt{bc}(b-3c)(w+z_2) \\ y_2 &= \sqrt{bc}(\sqrt{b(3c-b)}z_1 - b(w+z_2) + c(w+3z_2)) \\ y_3 &= -2\sqrt{b(3c-b)}cz_1 - b^2z_2 + b(-2cw + \sqrt{b(3c-b)}z_1 + 3cz_2). \end{aligned}$$

Con este cambio de variable, el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(3c-b)} & 0 \\ \sqrt{b(3c-b)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
f_{11}(z_1, z_2, w) &= \frac{1}{b^2 - 3bc - 4c^2} \left(\left((w + z_2) \left(b^4 z_1 + 2\sqrt{b(3c-b)}c^3(w + 3z_2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + b^2c(2\sqrt{b(3c-b)}w + 29cz_1 - 8\sqrt{b(3c-b)}z_2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + b^3(-10cz_1 + \sqrt{b(3c-b)}z_2) + bc^2(-12\sqrt{b(3c-b)}w \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 24cz_1 + 13\sqrt{b(3c-b)}z_2) \right) \right) \right) \\
f_{22}(z_1, z_2, w) &= -\frac{1}{b^2 - 3bc - 4c^2} \left((b - 3c)(w + z_2) \left(-4\sqrt{b(3c-b)}c^2 z_1 + b^3 z_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b^2(3cw - \sqrt{b(3c-b)}z_1 - 4cz_2) + bc(-5cw + 3\sqrt{b(3c-b)}z_1 + 3cz_2) \right) \right) \\
f_{33}(z_1, z_2, w) &= \frac{1}{b^2 - 3bc - 4c^2} \left((b - 3c)(w + z_2) (c^2 z_1 + b^3 z_2 \right. \\
&\quad \left. + b^2(3cw - \sqrt{b(3c-b)}z_1 - 4cz_2) + bc(-5cw + 3\sqrt{b(3c-b)}z_1 + 3cz_2) \right)
\end{aligned}$$

Proseguimos ahora con el cálculo de la variedad central, la cual se define de la siguiente manera

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_2^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2.$$

Derivando con la regla de la cadena tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2. \quad (3.8)$$

Sabiendo que

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\sqrt{b(3c-b)}z_2 + f_{11}(z_1, z_2, w) \\
\dot{z}_2 &= \sqrt{b(3c-b)}z_1 + f_{22}(z_1, z_2, w) \\
\dot{w} &= -2cw + f_{33}(z_1, z_2, w)
\end{aligned}$$

y haciendo énfasis en que sólo nos interesan los términos lineales y cuadráticos en la expresión de la variedad central, sustituímos los valores anteriores en (3.8) y obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= (a_2\sqrt{b(3c-b)} + 2a_1c)z_1^2 + (-2a_1\sqrt{b(3c-b)} + 2a_3\sqrt{b(3c-b)} + 2a_2c \\
&\quad + \frac{b^3\sqrt{b(3c-b)}}{b^2 - 3bc - 4c^2} - \frac{6b^2\sqrt{b(3c-b)}c}{b^2 - 3bc - 4c^2} + \frac{13b\sqrt{b(3c-b)}c^2}{b^2 - 3bc - 4c^2} \\
&\quad - \frac{12\sqrt{b(3c-b)}c^3}{b^2 - 3bc - 4c^2})z_1 z_2 + (-a_2\sqrt{b(3c-b)} + 2a_3c - \frac{b^4}{b^2 - 3bc - 4c^2} \\
&\quad + \frac{7b^3c}{b^2 - 3bc - 4c^2} - \frac{15b^2c^2}{b^2 - 3bc - 4c^2} + \frac{9bc^3}{b^2 - 3bc - 4c^2})z_2^2.
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación anterior para a_1, a_2, a_3 obtenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b(b-3c)^2(b-2c)^2}{4c(b^3-7b^2c+11bc^2+4c^3)} \\ a_2 &= -\frac{(b(3c-b))^{3/2}(b-2c)^2}{2b(b^3-7b^2c+11bc^2+4c^3)} \\ a_3 &= \frac{b(b-3c)^2(b^3-5b^2c+4bc^2-2c^3)}{4c(b^4-6b^3c+4b^2c^2+15bc^3+4c^4)}. \end{aligned}$$

Con estos valores, tenemos que la expresión de la variedad central es

$$\begin{aligned} h(z_1, z_2) &= \left(\frac{b(b-3c)^2(b-2c)^2}{4c(b^3-7b^2c+11bc^2+4c^3)} \right) z_1^2 - \left(\frac{(b(3c-b))^{3/2}(b-2c)^2}{2b(b^3-7b^2c+11bc^2+4c^3)} \right) z_1 z_2 \\ &+ \left(\frac{b(b-3c)^2(b^3-5b^2c+4bc^2-2c^3)}{4c(b^4-6b^3c+4b^2c^2+15bc^3+4c^4)} \right) z_2^2. \end{aligned}$$

Una vez teniendo la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0 R_2) \quad (3.9)$$

con

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{b(3c-b)} \\ R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1(z_1, z_2) &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2(z_1, z_2) &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)). \end{aligned}$$

Haciendo las operaciones y sustituciones correspondientes tenemos que el primer coeficiente de Lyapunov es

$$l_1 = -\frac{3b^2(b-3c)^3(c-2b)(2c-b)}{8(b-4c)(b+c)\left(b - \frac{(3+\sqrt{13})c}{2}\right)\left(b - \frac{(3-\sqrt{13})c}{2}\right)}$$

El signo del primer coeficiente de Lyapunov, depende de los valores de b y c . Si $l_1 > 0$ entonces tenemos la presencia de una órbita periódica repulsora y si $l_1 < 0$ entonces tenemos una órbita periódica atractora; por otro lado, nos interesa saber si $l_1 = 0$, porque en este caso tenemos una bifurcación de Hopf degenerada. Resolvemos $l_1 = 0$ para b y c , entonces tenemos

$$\begin{aligned} c &= 2b \\ c &= \frac{1}{2}b \\ c &= \frac{1}{3}b \end{aligned}$$

Por otro lado, nos interesa conocer qué pasa con la dinámica del sistema, pero tomando valores para (b, c) , que estén fuera de estas curvas. Primero analizaremos el denominador de la expresión del primer coeficiente de Lyapunov, con la finalidad de ver donde se hace cero éste. Si observamos la factorización del denominador, nos damos cuenta de que los puntos donde este se hace cero están fuera de la región de factibilidad, sin embargo debemos hacer un análisis para conocer el signo de éste, dicho análisis nos dice que $(b-4c) < 0$, $(b+c) > 0$, $(b - \frac{(3+\sqrt{13})c}{2}) < 0$ y $(b - \frac{(3-\sqrt{13})c}{2}) > 0$, por lo que concluimos que el denominador del primer coeficiente de Lyapunov es positivo. Ahora, como ya sabemos donde se hace cero el numerador, debemos de analizar como se comporta el signo del mismo para valores de los parámetros que estén fuera de las rectas donde se hace cero. Observemos que la factorización del numerador es:

$$-3b^2(b-3c)^3(c-2b)(2c-b).$$

Los dos primeros factores son positivo, por lo que el signo del numerador dependerá del signo del tercero y cuarto factor. Partiendo de esto, analizaremos tres casos;

- caso 1 Si $c > 2b$ entonces $2c > 4b > b$ por lo que $2c - b > 0$, por lo que concluimos que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.
- caso 2 Si $\frac{1}{2}b < c < 2b$ entonces, de la primera desigualdad tenemos que $2(\frac{1}{2}b < c) \implies b < 2c \implies 2c - b > 0$. Por otro lado, la segunda desigualdad nos dice que $c - 2b < 0$, por lo que se concluye que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es negativo.
- caso 3 Si $\frac{1}{3}b < c < \frac{1}{2}b$, entonces, de la segunda desigualdad tenemos, $c < \frac{1}{2}b \implies 2c < b \implies 2c - b < 0$, por otro lado, de la misma desigualdad, tenemos que $c < \frac{1}{2}b < 2b \implies c < 2b \implies c - 2b < 0$, por lo que se concluye que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.

Podemos resumir los casos dentro de la región de factibilidad, de la siguiente forma:

Si (b, c) están entre el eje horizontal y la curva $c = \frac{1}{3}b$, entonces $l_1 < 0$

si (b, c) están entre la curva $c = \frac{1}{3}b$ y la curva $c = \frac{1}{2}b$, entonces $l_1 > 0$

si (a, c) están entre la curva $c = \frac{1}{2}b$ y la curva $c = 2b$, entonces $l_1 < 0$

si (a, c) están entre la curva $c = 2b$ y el eje vertical, entonces $l_1 > 0$

La figura 3.2 muestra las regiones donde ocurren cada uno de los casos mencionados anteriormente.

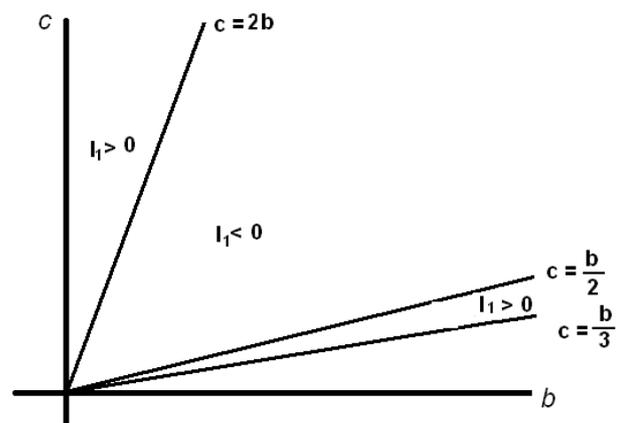


Figura 3.2: Signos del Primer Coeficiente de Lyapunov.

En la figura 3.3 se muestra el comportamiento del sistema cuando ocurre la bifurcación de Hopf, tomando valores para los parámetros dentro de la región de factibilidad y donde el primer coeficiente de Lyapunov es cero ($l_1 = 0$), por lo que se presenta una órbita periódica atractora.

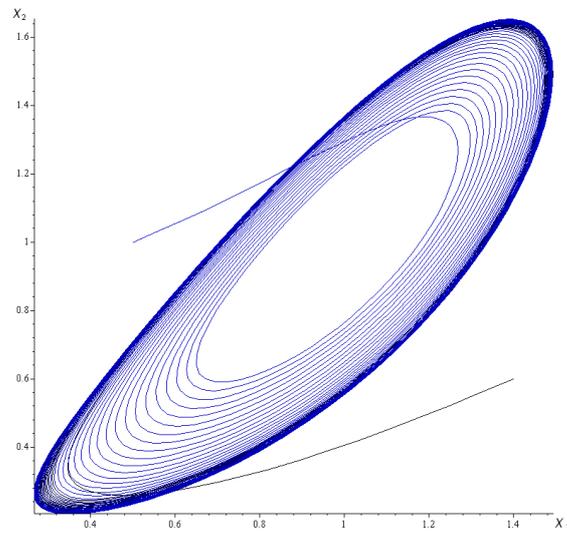


Figura 3.3: Bifurcación de Hopf con $b = c = 1$ y $\mu = 1.9$

A continuación (ver figura 3.4), se presenta la dinámica del sistema cuando se presenta una bifurcación de Hopf degenerada. El comportamiento es un tipo centro de órbitas periódicas.

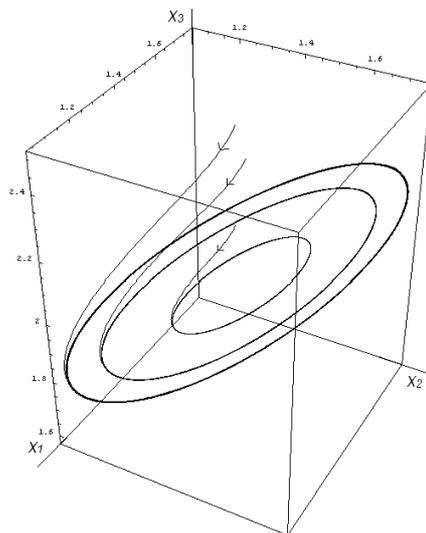


Figura 3.4: Bifurcación de Hopf Degenerada. $b = 1$, $c = 2$ y $\mu = 5$

3.2 Caso II: $b = \mu$, y (a, c) Parámetros de Control

Ahora analizaremos el segundo caso, cuyo procedimiento es similar al caso anterior. El sistema (3.1) se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_3 + x_1x_2\end{aligned}$$

3.2.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

Los puntos de equilibrio de este sistema son los siguientes

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{c\mu}, \sqrt{c\mu}, c) \\ P_3 &= (-\sqrt{c\mu}, -\sqrt{c\mu}, c)\end{aligned}$$

La matriz jacobiana para este sistema es

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\mu \end{pmatrix}$$

y evaluando la matriz jacobiana, primero en el punto de equilibrio P_1 se tiene

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

y como observamos, al igual que en el caso anterior, en este punto de equilibrio no ocurre la bifurcación de Hopf. Analicemos lo que pasa en P_2 . Evaluando la matriz jacobiana en este punto tenemos

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{c\mu} \\ \sqrt{c\mu} & \sqrt{c\mu} & -\mu \end{pmatrix}.$$

Buscando valores para μ que satisfagan las condiciones (2.10), encontramos los siguientes

$$\begin{aligned}\mu &= 0 \\ \mu &= 3c - a\end{aligned}$$

Recordemos que necesitamos que $\mu > 0$, por lo que consideraremos que $3c > a$, lo cual, nos genera una región en el plano de los parámetros de control (ver la figura 3.5).

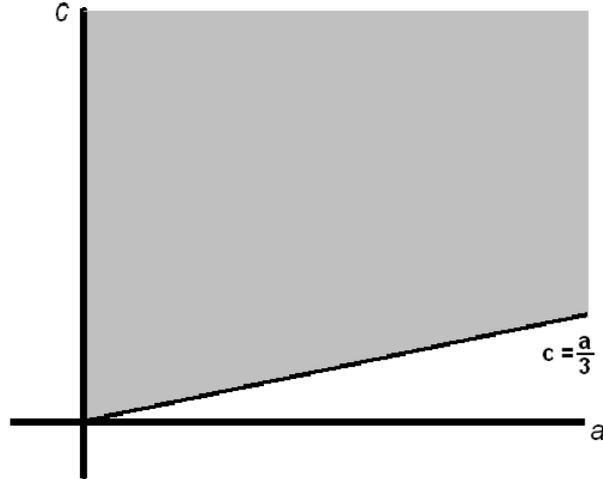


Figura 3.5: $c > \frac{1}{3}a$

Ahora, si tomamos $\mu = 0$, así como en el caso anterior, no generamos los valores propios en el eje imaginario, (de hecho, todos son reales), por lo que, analizaremos lo que pasa cuando $\mu = 3c - a$. En este caso

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -(3c - a) & (3c - a) & 0 \\ -c & c & -\sqrt{c\mu} \\ \sqrt{c\mu} & \sqrt{c\mu} & -c\mu \end{pmatrix}$$

y usando las fórmulas (2.11) y (2.12), sus valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{(3c - a)a} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{(3c - a)a} \\ \lambda_0 &= -2c \end{aligned}$$

Como podemos observar, ya tenemos un par de valores propios en el eje imaginario y otro fuera de él, ahora analizaremos si la velocidad de cruce es diferente de cero. Utilizando la expresión (2.9)

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

Para este caso,

$$\begin{aligned} L_1'(\mu_0) &= 1 \\ L_2'(\mu_0) &= a \\ L_3'(\mu_0) &= 2ac. \end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{a(a - 3c)}{2(4c^2 + 3ac - a^2)}.$$

Observamos entonces que, como $3c > a$

$$a(a - 3c) \neq 0$$

, y

$$2(4c^2 + 3ac - a^2) \neq 0$$

, y por lo tanto,

$$\alpha'(\mu_0) \neq 0$$

y en la región de factibilidad, la velocidad de cruce es negativa, debido a que $3c > a$. Entonces, tomando valores para a y c dentro de la región de factibilidad podemos asegurar que tenemos una bifurcación del tipo Hopf. Analizaremos el comportamiento de la dinámica del sistema en este punto de equilibrio. También en este caso, en el punto de equilibrio P_3 se observan exactamente los mismos resultados que en el punto P_2 por lo que podemos decir que en P_3 también ocurre una bifurcación de Hopf.

Cálculo de la variedad central

Continuaremos con el análisis del punto P_2 para ello, analizaremos la variedad central, esta nos dará la posibilidad de conocer el primer coeficiente de Liapunov, y a su vez, éste nos dará la estabilidad de la órbita periódica que aparecerá o desaparecerá, según sea el caso. Para continuar, trasladaremos el punto de equilibrio P_2 al origen, esto lo logramos haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \sqrt{c\mu} \\ y_2 &= x_2 - \sqrt{c\mu} \\ y_3 &= x_3 - c. \end{aligned}$$

Con este cambio de variables el nuevo sistema nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(\sqrt{c(3c - a)} + y_2) - a(\sqrt{c(3c - a)} + y_1) \\ \dot{y}_2 &= c(\sqrt{c(3c - a)} + y_2) - (\sqrt{c(3c - a)} + y_1)(c + y_3) \\ \dot{y}_3 &= (\sqrt{c(3c - a)} + y_1)(\sqrt{c(3c - a)} + y_2) - (3c - a)(c + y_3) \end{aligned}$$

Ahora el punto de equilibrio es el origen. Los valores propios son los mismos ya que sólo hicimos una traslación. La matriz jacobiana evaluada en el origen es:

$$A(0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{c(3c-a)} \\ \sqrt{c(3c-a)} & \sqrt{c(3c-a)} & a-3c \end{pmatrix}$$

y sus vectores propios asociados a los valores propios son:

para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{c(3c-a)} \\ a\sqrt{c(3c-a)} \\ w_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ w_0\sqrt{c(3c-a)} \\ w_0(c-a) \end{pmatrix}$$

con $\omega_0 = \sqrt{a(3c-a)}$,
para $\lambda = \lambda_0$ tenemos que

$$v_2 = \begin{pmatrix} a\sqrt{c(3c-a)} \\ (a-2c)\sqrt{c(3c-a)} \\ 2c(a-3c) \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz que debe llevarse el sistema a la forma de Jordan es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a\sqrt{c(3c-a)} & a\sqrt{c(3c-a)} \\ \omega_0\sqrt{c(3c-a)} & a\sqrt{c(3c-a)} & (a-2c)\sqrt{c(3c-a)} \\ \omega_0(c-a) & \omega_0^2 & 2c(a-3c) \end{pmatrix}$$

y su inversa es la siguiente

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2a^2c+2c\omega_0^2-a(6c^2+\omega_0^2)}{a\sqrt{c(3c-a)}(4c^2\omega_0+\omega_0^3)} & \frac{-2ac+6c^2+\omega_0^2}{\sqrt{c(3c-a)}(4c^2\omega_0+\omega_0^3)} & \frac{-2c}{4c^2\omega_0+\omega_0^3} \\ \frac{-a^2+ac+4c^2}{a\sqrt{c(3c-a)}(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{a-c}{\sqrt{c(3c-a)}(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{1}{4c^2+\omega_0^2} \\ \frac{a^2-ac+\omega_0^2}{a\sqrt{c(3c-a)}(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{c-a}{\sqrt{c(3c-a)}(4c^2+\omega_0^2)} & \frac{-1}{4c^2+\omega_0^2} \end{pmatrix}$$

Teniendo ya la matriz P y la matriz P^{-1} proseguimos a calcular la matriz en forma de Jordan, la cual está dada por el producto de

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{a(3c-a)} & 0 \\ \sqrt{a(3c-a)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{pmatrix}$$

Con el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} y_1 &= a\sqrt{c(3c-a)}(w+z_2) \\ y_2 &= \sqrt{c(3c-a)}(-2cw + \sqrt{a(3c-a)}z_1 + a(w+z_2)) \\ y_3 &= c(-6cw + \sqrt{a(3c-a)}z_1) - a^2z_2 + a(2cw - \sqrt{a(3c-a)}z_1 + 3cz_2). \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{a(3c-a)} & 0 \\ \sqrt{a(3c-a)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{11}(z_1, z_2, w) &= \frac{1}{a^2 - 3ac - 4c^2} \left((w + z_2) \left(-16\sqrt{a(3c-a)}c^3w \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a^2c \left(2\sqrt{a(3c-a)}w - 7cz_1 + \sqrt{a(3c-a)}z_2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a^3 \left(2cz_1 + \sqrt{a(3c-a)}z_2 \right) + 4ac^2 \left(3cz_1 + 2\sqrt{a(3c-a)}z_2 \right) \right) \right) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) &= -\frac{1}{a^2 - 3ac - 4c^2} \left(a(w + z_2) \left(4c^2 \left(-3cw + \sqrt{a(3c-a)}z_1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a^3z_2 + a^2 \left(-3cw + \sqrt{a(3c-a)}z_1 - 5cz_2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ac \left(13cw - 3\sqrt{a(3c-a)}z_1 + 6cz_2 \right) \right) \right) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) &= \frac{1}{a^2 - 3ac - 4c^2} \left(a(w + z_2) \left(4c^2 \left(-3cw + \sqrt{a(3c-a)}z_1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a^3z_2 + a^2 \left(-3cw + \sqrt{a(3c-a)}z_1 - 5cz_2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ac \left(13cw - 3\sqrt{a(3c-a)}z_1 + 6cz_2 \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Haciendo un análisis semejante al que hicimos en el caso anterior, calcularemos la expresión de la variedad central, la cual está dada por la expresión

$$w = h(z_1, z_2) = a_1z_2^2 + a_2z_1z_2 + a_3z_2^2.$$

Derivando, tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2. \quad (3.10)$$

Sabiendo ya que

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\sqrt{a(3c-a)}z_2 + f_{11}(z_1, z_2, w) \\ \dot{z}_2 &= \sqrt{a(3c-a)}z_1 + f_{22}(z_1, z_2, w) \\ \dot{w} &= -2cw + f_{33}(z_1, z_2, w) \end{aligned}$$

y haciendo los cálculos correspondientes, tenemos que la variedad central, en este caso, es

$$h(z_1, z_2) = \left(\frac{a^2(a-3c)(a-c)^2}{4c(a+c)(a^2-3ac-c^2)} \right) z_1^2 + \left(\frac{a\sqrt{a(3c-a)}(a-c)^2}{2(a+c)(a^2-3ac-c^2)} \right) z_1 z_2 + \left(\frac{a^2(a^4-7a^3c+13a^2c^2+5ac^3-24c^4)}{4c(-a^2+3ac+c^2)(-a^2+3ac+4c^2)} \right) z_2^2.$$

Ahora, ya con la expresión de la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por la expresión

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0R_2) \quad (3.11)$$

con

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{a(3c-a)} \\ R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2 &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)). \end{aligned}$$

Haciendo las operaciones y sustituciones correspondientes tenemos que el primer coeficiente de Lyapunov es

$$l_1 = \frac{3a^3(a-3c)^2(a-c)(2a-5c)}{8(a-4c)(a+c)(c + (\frac{3+\sqrt{13}}{2})a)(c + (\frac{3-\sqrt{13}}{2})a)}$$

Teniendo ya el primer coeficiente de Lyapunov, trataremos de manipular los parámetros de control para conocer la estabilidad de las órbitas periódicas. Primeramente veremos si $l_1 = 0$ para algún valor de los parámetros de control. Tenemos entonces que $l_1 = 0$ si tomamos valores para (a, c) que estén sobre las siguientes tres curvas.

$$c = a \quad (3.12)$$

$$c = \frac{2}{5}a \quad (3.13)$$

$$c = \frac{1}{3}a \quad (3.14)$$

Por otro lado, nos interesa conocer qué pasa con la dinámica del sistema, pero tomando valores para (a, c) , que estén fuera de estas curvas. Primero analizaremos el denominador de la expresión del primer coeficiente de Lyapunov, con la finalidad de ver donde se hace cero éste. Si observamos la factorización del denominador, nos damos cuenta

de que los puntos donde éste se hace cero están fuera de la región de factibilidad; sin embargo, debemos hacer un análisis para conocer el signo de éste, dicho análisis nos dice que $(a - 4c) < 0$, $(a + c) > 0$, $(c - \frac{(3+\sqrt{13})a}{2}) < 0$ y $(c - \frac{(3-\sqrt{13})a}{2}) > 0$, por lo que concluimos que el denominador del primer coeficiente de Lyapunov es positivo. Ahora, como ya sabemos donde se hace cero el numerador, debemos de analizar como se comporta el signo del mismo para valores de los parámetros que estén fuera de las rectas donde se hace cero, observemos que la factorización del numerador es:

$$3a^3(a - 3c)^2(a - c)(2a - 5c)$$

como podemos observar, al multiplicar los dos primeros factores nos dan positivo, por lo que el signo del numerador dependerán del signo del tercero y cuarto factor, partiendo de esto, analizaremos tres casos;

- caso 1 Si $c > a$ entonces $a - c < 0$ por lo que $2c - a > 0$, por otro lado, $5c > 5a > 2a \implies 5c > 2a \implies 2a - 5c < 0$ por lo que concluimos que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.
- caso 2 Si $\frac{2}{5}a < c < a$ entonces, de la primera desigualdad tenemos que $2a < 5c \implies 2a - 5c < 0$, por otro lado, la segunda desigualdad nos dice que $a - c > 0$, por lo que se concluye que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es negativo.
- caso 3 Si $\frac{1}{3}a < c < \frac{2}{5}a$, entonces, de la segunda desigualdad tenemos, $2a - 5c > 0$, y de la misma desigualdad tenemos que $c < \frac{2}{5}a < a \implies a - c > 0$, por lo que se concluye que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.

De esta manera hemos cubierto todos los casos dentro de la región de factibilidad, y los podemos resumir de la siguiente forma:

Si (a, c) están entre la curva (3.14) y la curva (3.13), entonces $l_1 > 0$

Si (a, c) están entre la curva (3.13) y la curva (3.12), entonces $l_1 < 0$

Si (a, c) están entre la curva (3.12) y el eje vertical, entonces $l_1 > 0$

La figura 3.6 muestra las regiones de factibilidad y la estabilidad de las órbitas dentro de ellas.

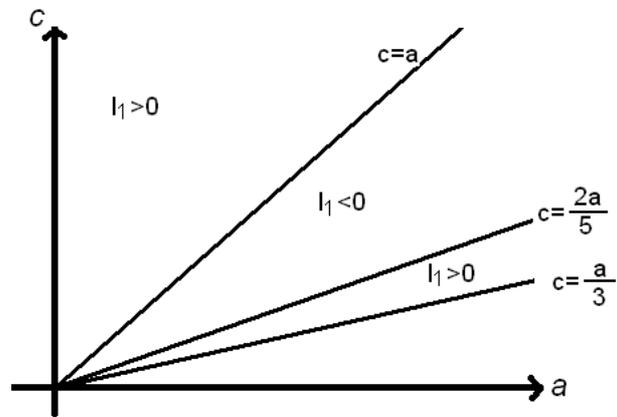


Figura 3.6: Signos del Primer Coeficiente de Lyapunov

En las figuras 3.7 y 3.8, se muestra el comportamiento del sistema cuando ocurren la bifurcación de Hopf supercrítica y la bifurcación de Hopf degenerada respectivamente.

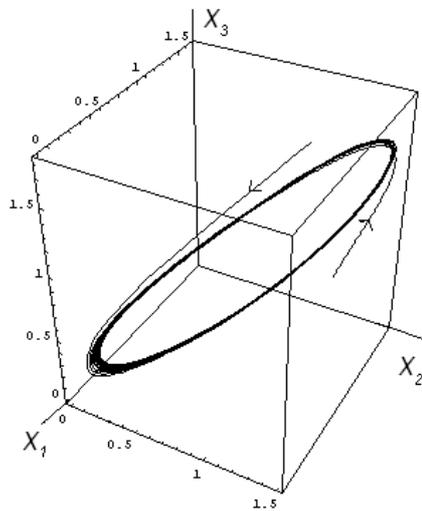


Figura 3.7: Bifurcación de Hopf Supercrítica. Con $a = 2$, $c = 1$ y $\mu = 0.9$

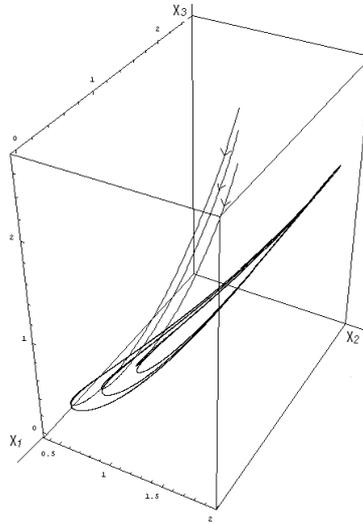


Figura 3.8: Bifurcación de Hopf Degenerada. Con $a = c = 1$ y $\mu = 2$

3.3 Caso III: $c = \mu$, y (a, b) Parámetros de Control

Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + ax_2 \quad (3.15)$$

$$\dot{x}_2 = \mu x_2 - x_1 x_3 \quad (3.16)$$

$$\dot{x}_3 = -bx_3 + x_1 x_2 \quad (3.17)$$

3.3.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

Los puntos de equilibrio de (3.15) son:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{b\mu}, \sqrt{b\mu}, \mu) \\ P_3 &= (-\sqrt{b\mu}, -\sqrt{b\mu}, \mu) \end{aligned}$$

La matriz jacobiana para este sistema es

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -x_3 & \mu & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix}.$$

Evaluando la matriz jacobiana en el punto de equilibrio P_1 se tiene

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Observemos que, al igual que en el caso anterior, en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf. Ahora, la matriz jacobiana evaluada en P_2 es:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -\mu & \mu & -\sqrt{b\mu} \\ \sqrt{b\mu} & \sqrt{b\mu} & -b \end{pmatrix}.$$

El valor de μ que satisface las condiciones (2.10) es:

$$\mu = \frac{a+b}{3}.$$

En este caso, no tenemos ninguna restricción sobre los parámetros de control puesto que para este valor de μ , $L_2(\mu) = ab$. Entonces, la matriz jacobiana evaluada en P_2 y con $\mu = \frac{a+b}{3}$ es

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -\frac{1}{3}(a+b) & \frac{1}{3}(a+b) & -\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} & -b \end{pmatrix}.$$

Usando las fórmulas (2.11) y (2.12), sus valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{ab} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{ab} \\ \lambda_0 &= -\frac{2}{3}(a+b) \end{aligned}$$

Obsérvese que ya tenemos un par de valores propios en el eje imaginario y otro fuera de él. Analicemos ahora si la velocidad de cruce es diferente de cero. Utilizando la fórmula (2.9), la cual es

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

Donde

$$\begin{aligned} L_1'(\mu_0) &= -1 \\ L_2'(\mu_0) &= 0 \\ L_3'(\mu_0) &= 2ab \end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{3ab}{2(\frac{4}{9}(a+b)^2 + ab)}$$

obsérvese que la velocidad de cruce de los valores propios será diferente de cero y positiva dentro de la región de factibilidad. Entonces, tomando valores adecuados para a y b podemos asegurar que tenemos una bifurcación del tipo Hopf. Analizaremos el comportamiento de la dinámica del sistema en este punto de equilibrio. Haciendo un análisis semejante al anterior pero para el punto de equilibrio P_3 se observan exactamente los mismos resultados que en el punto P_2 , por lo que podemos decir que en P_3 también ocurre una bifurcación de Hopf.

Análogamente a los dos casos anteriores, analizaremos la dinámica del sistema en P_2 . para calcular la expresión de la variedad central, trasladaremos al origen nuestro punto de equilibrio mediante el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \sqrt{b\mu} \\ y_2 &= x_2 - \sqrt{b\mu} \\ y_3 &= x_3 - \mu \end{aligned}$$

En términos de las (y_1, y_2, y_3) , el sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -a \left(\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} + y_1 \right) + a \left(\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} + y_2 \right) \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{3}(a+b) \left(\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} + y_2 \right) - \left(\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} + y_1 \right) \left(\frac{a+b}{3} + y_3 \right) \\ \dot{y}_3 &= \left(\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} + y_1 \right) \left(\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} + y_2 \right) - b \left(\frac{a+b}{3} + y_3 \right)\end{aligned}$$

Ahora, el punto de equilibrio es el origen, los valores propios son los mismos (ya que sólo hicimos una traslación). La matriz jacobiana evaluada en el origen es:

$$A(0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -\frac{1}{3}(a+b) & \frac{1}{3}(a+b) & -\frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{3}} & -b \end{pmatrix}.$$

Los vectores propios asociados a los valores propios son:

para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}a\sqrt{b(a+b)}}{4a^2+5ab+b^2} \\ \frac{\sqrt{3b(a+b)}}{4a+b} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{(2a-b)\sqrt{3a(a+b)}}{4a^2+5ab+b^2} \\ \frac{2\sqrt{3a(a+b)}}{4a+b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y para $\lambda = \lambda_0$ se tiene

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{b(a+b)}} \\ \frac{2b-a}{2\sqrt{3b(a+b)}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz que necesitamos para llevar el sistema a la forma de Jordan, la cual está dada en términos de los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{(2a-b)\sqrt{3a(a+b)}}{4a^2+5ab+b^2} & \frac{3\sqrt{3}a\sqrt{b(a+b)}}{4a^2+5ab+b^2} & -\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{b(a+b)}} \\ \frac{2\sqrt{3a(a+b)}}{4a+b} & \frac{\sqrt{3b(a+b)}}{4a+b} & \frac{2b-a}{2\sqrt{3b(a+b)}} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de P es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a+b}(-4a^2+ab-4b^2)}{\sqrt{3a}(4a^2+17ab+4b^2)} & \frac{\sqrt{3a}(4a^2+11ab+7b^2)}{\sqrt{a+b}(4a+b)(a+4b)} & -\frac{9\sqrt{ab^3}}{(4a+b)(a+4b)} \\ \frac{4\sqrt{3b}\sqrt{(a+b)^3}}{(4a+b)(a+4b)} & -\frac{2\sqrt{3b}\sqrt{a+b}(2a-b)}{(4a+b)(a+4b)} & \frac{4a^2+11ab-2b^2}{(4a+b)(a+4b)} \\ -\frac{4\sqrt{3b}\sqrt{(a+b)^3}}{(4a+b)(a+4b)} & \frac{2\sqrt{3b}\sqrt{a+b}(2a-b)}{(4a+b)(a+4b)} & \frac{6b(a+b)}{(4a+b)(a+4b)} \end{pmatrix}$$

Teniendo ya la matriz P y la matriz P^{-1} proseguimos a calcular la matriz en forma de Jordan, la cual es

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{ab} & 0 \\ \sqrt{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}(a+b) \end{pmatrix}$$

A continuación, ortogonalizaremos la variedad central y la variedad estable, utilizando el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{\sqrt{3a}(4\sqrt{a^3}w) - 4a\sqrt{b}z_1 + 2\sqrt{b^3}z_1 + \sqrt{ab}(w - 6z_2)}{2\sqrt{b(a+b)}(4a+b)} \\ y_2 &= \frac{-4a^2w + 12\sqrt{a^3b}z_1 + 12\sqrt{ab^3}z_1 + 2b^2(w + 3z_2) + ab(7w + 6z_2)}{2\sqrt{3b}\sqrt{a+b}(4a+b)} \\ y_3 &= w + z_2 \end{aligned}$$

Con este cambio de variables, el sistema queda

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{ab} & 0 \\ \sqrt{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{11}(z_1, z_2, w) &= \left(3a(2a\sqrt{b^7}z_1(77w - 76z_2) + 128\sqrt{a^9}w(w + z_2) - 128a^4\sqrt{b}z_1(w + z_2) \right. \\ &\quad - 64a^3\sqrt{b^3}z_1(2w + 5z_2) + 8\sqrt{b^9}z_1(5w + 8z_2) - 24a^2\sqrt{b^5}z_1(2w + 17z_2) \\ &\quad + 4\sqrt{ab^4}(5w^2 + 18z_1^2 - 22wz_2 - 48z_2^2 + 16\sqrt{a^7}b(23w^2 + 14wz_2 - 12z_2^2) \\ &\quad + 24\sqrt{a^5b^2}(20w^2 - wz_2 - 6(z_1^2 + 4z_2^2)) + \sqrt{a^3b^3}(179w^2 - 370wz_2 \\ &\quad \left. - 72(z_1^2 + 8z_2^2))) \right) / \left(4\sqrt{b}(4a+b)^3(a^2 + 5ab + 4b^2) \right) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) &= \left(64a^6w^2 - 256\sqrt{a^{11}b}wz_1 - 16\sqrt{a^7b^5}z_1(7w - 93z_2) \right. \\ &\quad + 4\sqrt{a^3b^9}z_1(4w - 69z_2) + 16\sqrt{ab^{11}}z_1(2w + 3z_2) + 32\sqrt{a^9b^3}z_1(-13w \\ &\quad + 24z_2) + 2\sqrt{a^5b^7}z_1(-227w + 198z_2) - 16a^5b(19w^2 - 12z_1^2 + 36wz_2 \\ &\quad + 2a^2b^4(46w^2 - 156z_1^2 - 45wz_2 + 54z_2^2) + 4a^4b^2(-185w^2 + 156z_1^2 \\ &\quad - 72wz_2 + 180z_2^2) + a^3b^3(-53w^2 + 72z_1^2 + 756wz_2 + 972z_2^2) \\ &\quad \left. + 8ab^5(2w^2 - 9wz_2 + 6(z_1^2 - 3z_2^2))) \right) / \left(4b(4a+b)^3(a^2 + 5ab + 4b^2) \right) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) &= \left(3(-64\sqrt{a^7b}z_1(2w + z_2) - 8\sqrt{ab^7}z_1(w + 2z_2) + 16a^4w(5w + 4z_2) \right. \\ &\quad + 24\sqrt{a^5b^3}z_1(w + 6z_2) + 6\sqrt{a^3b^5}z_1(-3w + 14z_2) - 24a^3b(w^2 - 2z_1^2 \\ &\quad \left. + 6wz_2 + 4z_2^2) + 4ab^3(w^2 - 4wz_2 + 6(z_1^2 - 2z_2^2))) \right) / \left(2(4a+b)^3(a+4b) \right) \end{aligned}$$

Continuamos con el cálculo de la expresión de la variedad central, la cual se define como:

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_2^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_1^2.$$

Derivando, tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2 \quad (3.18)$$

Sabiendo ya que

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\sqrt{ab}z_2 + f_{11}(z_1, z_2, w) \\ \dot{z}_2 &= \sqrt{ab}z_1 + f_{22}(z_1, z_2, w) \\ \dot{w} &= -\frac{2}{3}(a+b)w + f_{33}(z_1, z_2, w) \end{aligned}$$

tenemos que la variedad central es

$$\begin{aligned} h(z_1, z_2) &= \left(\frac{81a^2b(2a-b)^3}{2(4a+b)^3(a^4+16a^3b+60a^2b^2+49ab^3+4b^4)} \right) z_1^2 \\ &+ \left(\frac{9\sqrt{ab}(16a^4-128a^3b-30a^2b^2+37ab^3+4b^4)}{(4a+b)^3(a^3+15a^2b+45ab^2+4b^3)} \right) z_1 z_2 \\ &+ \left(-\frac{27ab(32a^4+38a^3b-132a^2b^2+49ab^3+4b^4)}{2(4a+b)^3(a^4+16a^3b+60a^2b^2+49ab^3+4b^4)} \right) z_2^2. \end{aligned}$$

Ahora, ya con la expresión de la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual se define como

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0 R_2). \quad (3.19)$$

Donde

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{ab} \\ R_1 &= (F_{1z_1 z_2}(F_{1z_1 z_1} + F_{1z_2 z_2}) - F_{2z_1 z_2}(F_{2z_1 z_1} + F_{2z_2 z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1 z_1} F_{2z_1 z_1} + F_{1z_2 z_2} F_{2z_2 z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1 z_1 z_1} + F_{1z_1 z_2 z_2} + F_{2z_2 z_1 z_1} + F_{2z_2 z_2 z_2})|_{z_0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1(z_1, z_2) &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2(z_1, z_2) &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

Haciendo las operaciones y sustituciones correspondientes se tiene que el primer coeficiente de Lyapunov es

$$l_1 = \frac{243a^2b(a-5b)(2a-b)}{8(a+b)(4a+b)^2(a+4b)(b - (\frac{-11+\sqrt{117}}{2})a)(b - (\frac{-11-\sqrt{117}}{2})a)}.$$

Teniendo ya el primer coeficiente de Lyapunov, manipularemos los parámetros de control para conocer la estabilidad de la órbita periódica. Primeramente veremos si $l_1 = 0$ para algún valor de los parámetros de control. Haciendo el análisis correspondiente, se tiene que $l_1 = 0$ si tomamos valores para (a, b) que estén sobre las siguientes dos curvas.

$$\begin{aligned} b &= 2a \\ b &= \frac{1}{5}a \end{aligned}$$

Por otro lado, nos interesa conocer qué pasa con la dinámica del sistema, pero tomando valores para (a, b) , que estén fuera de de estas curvas. Primero analizaremos el denominador de la expresión del primer coeficiente de Lyapunov, con la finalidad de ver donde se hace cero, si observamos la factorización del denominador, nos damos cuenta de que los puntos donde este se hace cero están fuera de la región de factibilidad, sin embargo, debemos hacer un análisis para conocer el signo del mismo, dicho análisis nos dice que $(a+b) > 0$, $(4a+b)^2 > 0$, $(a+4b) > 0$, $(b - \frac{(-11+\sqrt{117})a}{2}) > 0$ y $(b - \frac{(-11-\sqrt{117})a}{2}) > 0$, por lo que concluimos que el denominador del primer coeficiente de Lyapunov es positivo. Ahora, como ya sabemos donde se hace cero el numerador, debemos de analizar como se comporta el signo del mismo para valores de los parámetros que estén fuera de las rectas donde se hace cero, La factorización del numerador es:

$$243a^2b(a-5b)(2a-b).$$

Observemos que el primer factor es positivo, por lo que el signo del numerador dependerán del signo del segundo y tercer factor, partiendo de esto, analizaremos tres casos;

- caso 1 Si $b - 2a > 0 \implies b > 2a \implies 2a - b < 0$, ahora, como $b > 2a$ entonces $b > 2a > a \implies b > a \implies 5b > a \implies a - 5b < 0$ por lo que concluimos que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.
- caso 2 Si $\frac{1}{5}a < b < 2a$ entonces, de la primera desigualdad tenemos que $a - 5b < 0$, por otro lado, la segunda desigualdad nos dice que $2a - b > 0$, por lo que se concluye que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es negativo.
- caso 3 Si $0 < b < \frac{1}{5}a$, entonces, de la segunda desigualdad tenemos, $5b < a \implies a - 5b > 0$, y de la misma desigualdad tenemos que $b < \frac{1}{5}a < a \implies b < a \implies b < 2a \implies 2a - b > 0$, por lo que se concluye que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.

Todos los casos dentro de la región de factibilidad (ver figura 3.9), los podemos resumir de la siguiente forma:

si (a, b) están, entre el eje horizontal y la curva $b = \frac{1}{5}a$, entonces $l_1 > 0$

si (a, b) están, entre la curva $b = \frac{1}{5}a$ y la curva $b = 2a$, entonces $l_1 < 0$

si (a, b) están, entre la curva $b = 2a$ y el eje vertical, entonces $l_1 > 0$.

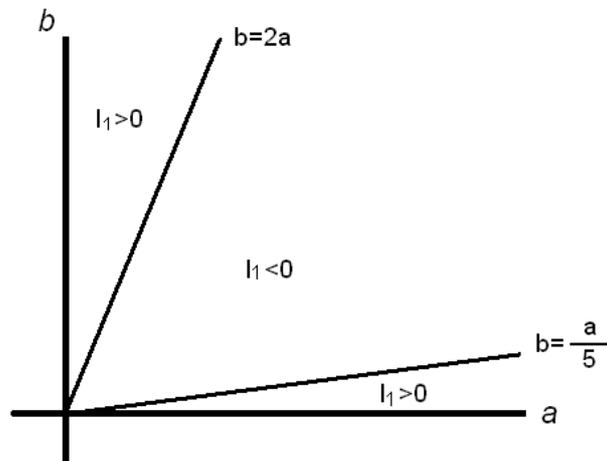


Figura 3.9: Signos del Primer Coeficiente de Lyapunov

En la figura 3.10 se muestra el comportamiento del sistema cuando ocurre la bifurcación de Hopf, tomando valores para los parámetros dentro de la región de factibilidad y donde el primer coeficiente de Lyapunov es negativo ($l_1 < 0$), por lo que se presenta una órbita periódica atractora.

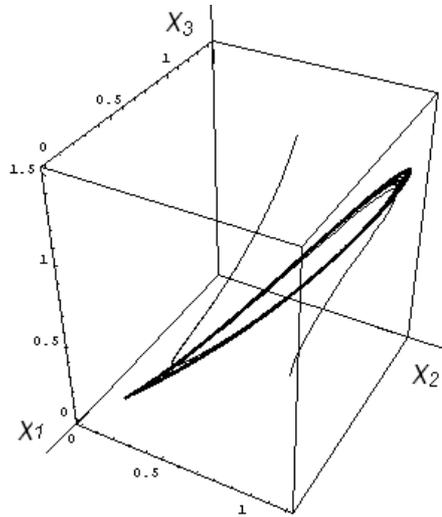


Figura 3.10: Bifurcación de Hopf con $a = b = 1$ y $\mu = 0.7$

En la siguiente gráfica (ver figura 3.11), se muestra el comportamiento del sistema cuando ocurre la bifurcación de Hopf degenerada, es decir, cuando el primer coeficiente de Lyapunov es igual a cero ($l_1 = 0$). La simulación presenta un comportamiento tipo centro.

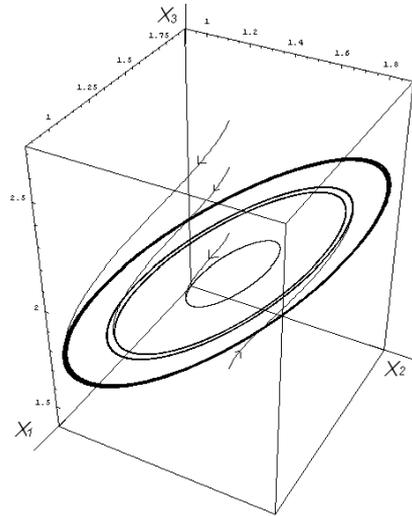


Figura 3.11: Bifurcación de Hopf Degenerada, con $a = 5$, $b = 1$ y $\mu = 2$.

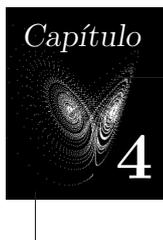
3.4 Resultado Principal

Resumimos los resultados obtenidos en esta capítulo en el siguiente

Teorema 3.1. *Considere el sistema de Lü*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2,\end{aligned}$$

Si se considera cualquiera de los parámetros del sistema como parámetro de bifurcación, y el resto como parámetros de control, es posible encontrar puntos en el plano de los parámetros de control en los cuales el sistema sufre la bifurcación de Hopf subcrítica, supercrítica y degenerada.



El Sistema de Lorenz

Este sistema fué encontrado por E. Lorenz en el año 1963, el objetivo que Lorenz tenía, era el de, mediante este sistema, poder predecir el clima. Los resultados no fueron óptimos para éstos fines, sin embargo, su estudio aportó mucha información a la matemática, ya que fue el primer sistema tridimensional autónomo en el cual se encontró un atractor caótico, conocido como “La Mariposa de Lorenz”. En la familia generalizada de sistemas tipo Lorenz, propuesta por Vanecek y Chelikovský, el sistema de Lorenz cumple con

$$a_{12}a_{21} > 0.$$

El sistema de Lorenz está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

Sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_2 - ax_1 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

Donde $a, b, c > 0$.

Al igual que en el caso de el sistema de Lü, haremos un análisis de la bifurcación de Hopf en este sistema, con el objetivo de buscar una posible diferencia que nos permita caracterizarlos, así como en términos de sus atractores caóticos, pero ahora en términos de la bifurcación de Hopf.

4.1 Caso I: $a = \mu$, y (b, c) Parámetros de Control

Bajo estas condiciones, el sistema de Lorenz queda:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_2 - \mu x_1 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para éste sistema son:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{b(c-1)}, \sqrt{b(c-1)}, c-1) \\ P_3 &= (-\sqrt{b(c-1)}, -\sqrt{b(c-1)}, c-1) \end{aligned}$$

4.1.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

La matriz jacobiana asociada a éste sistema es:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ c - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix}$$

Análisis en el Punto de equilibrio $P_1 = (0, 0, 0)$

Iniciamos nuestro análisis en el origen. La matriz jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Usando (2.11) y (2.12), los valores propios son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(-1 - \mu + \sqrt{1 - 2\mu + 4c\mu + \mu^2}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(-1 - \mu - \sqrt{1 - 2\mu + 4c\mu + \mu^2}) \\ \lambda_0 &= -b \end{aligned}$$

Para colocar los valores propios en el eje imaginario necesitamos que $-1 - \mu = 0$, lo cual implica que $\mu = -1$, pero como estamos considerando que todos los parámetros son positivos, entonces concluimos que en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf.

Análisis en el Punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{b(c-1)}, \sqrt{b(c-1)}, c-1)$

Analizaremos ahora lo que pasa en el P_2 ; durante el desarrollo del problema estaremos considerando todas las restricciones que deben cumplir los parámetros del sistema con la finalidad de que lo que estamos haciendo tenga sentido. La primera restricción es para asegurar que el punto de equilibrio no sea complejo.

Entonces, para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, necesitamos que

$$b(c-1) \geq 0$$

para nuestros fines, pediremos que

$$b(c - 1) > 0$$

Lo anterior se cumple cuando

$$c > 1$$

La figura 4.1 muestra la región del plano donde $P_2 \in \mathbb{R}^3$.

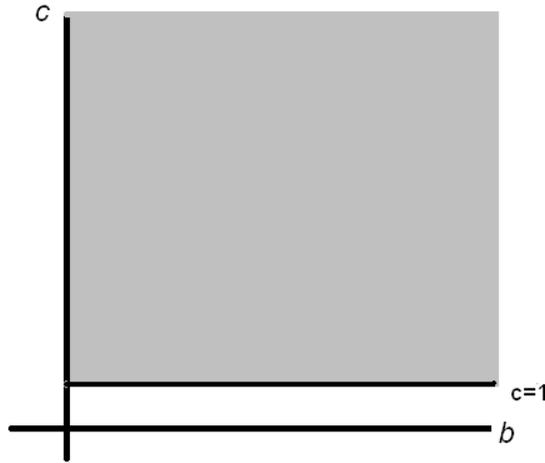


Figura 4.1: Valor de los Parámetros para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$

Ahora, la matriz jacobiana evaluada en P_2 es:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(c-1)} \\ \sqrt{b(c-1)} & \sqrt{b(c-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Buscamos valores para μ que satisfagan las condiciones (2.10), haciendo los cálculos correspondientes, se tiene que los valores de μ que cumplen con las condiciones anteriores son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}(c - b - 3 + \sqrt{9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2}) \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(c - b - 3 - \sqrt{9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2}) \end{aligned}$$

por otro lado, necesitamos que estos valores de $\mu > 0$, entonces, primero buscaremos los valores para los parámetros de control, tales que

$$9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2 \geq 0 \quad (4.1)$$

utilizando la tabla 2.14, nos damos cuenta que $9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2 = 0$ representa una hipérbola, la cual se muestra en la figura 4.2. La solución de (4.1) son los puntos que están dentro de la región sombreada de la figura 4.3.

Una vez ubicados los puntos en donde $9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2 \geq 0$, necesito analizar para que valores de los parámetros $\mu_1 > 0$, es decir,

$$\frac{1}{2}(c - b - 3 + \sqrt{9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2}) > 0.$$

El análisis se hará en dos casos:

Caso 1 .- Si $c - b - 3 \geq 0$, es decir,

$$c \geq b + 3. \quad (4.2)$$

La solución para que $\mu > 0$ son aquellos puntos que estén en la intersección de (4.1) y (4.2), la figura 4.4 muestra la región de factibilidad.

Caso 2 .- Si $c - b - 3 \leq 0$, entonces $\sqrt{9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2} \leq b - c + 3 \implies 9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2 \leq b^2 + c^2 + 9 - 2bc + 6b - 6c \implies -4c - 4bc > 0$. En este caso no hay valores positivos de los parámetros que cumplan con esta desigualdad.

Concluimos entonces que $\mu_1 > 0$ siempre que tomemos valores para los parámetros de control que estén en la intersección de (4.1) y (4.2); la figura (4.4) muestra dicha intersección.

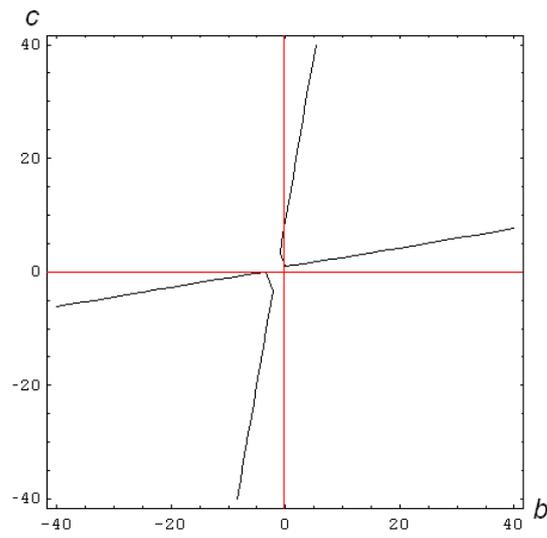


Figura 4.2: Gráfica de $9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2 = 0$

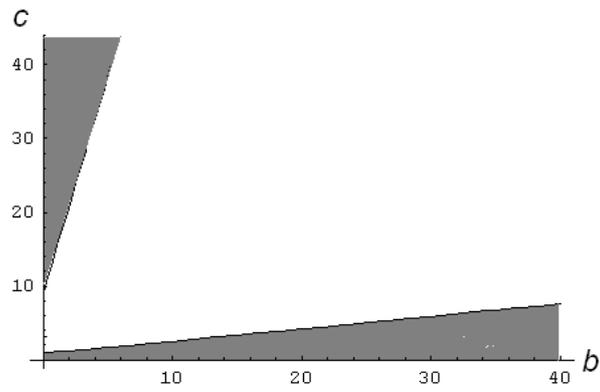
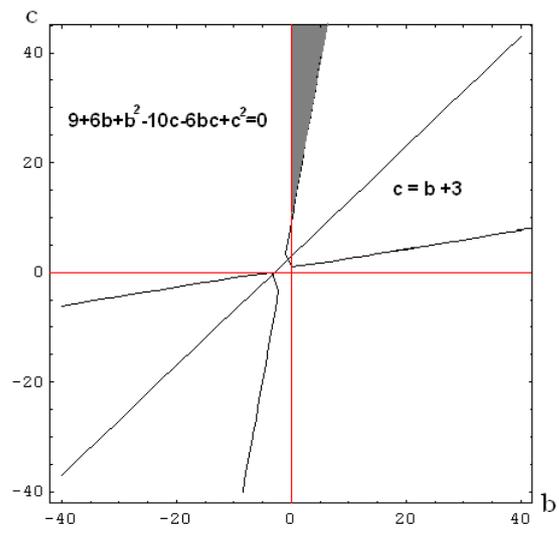


Figura 4.3: Región donde $9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2 > 0$

Figura 4.4: Región donde $\mu_1 > 0$

Cabe mencionar que el valor de $\mu = \mu_2$, también cumple con las condiciones (2.10), sin embargo, haremos el análisis sólo para $\mu = \mu_1$.

Utilizando (2.11) y (2.12), los valores propios de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio P_2 son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i\sqrt{b(c + \mu)} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{b(c + \mu)} \\ \lambda_0 &= -(1 + b + \mu)\end{aligned}$$

Haciendo $\mu = \mu_1$, los valores propios son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i\sqrt{\frac{1}{2}b(3c - b - 3 + \sqrt{9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2})} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{\frac{1}{2}b(3c - b - 3 + \sqrt{9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2})} \\ \lambda_0 &= \frac{1}{2}(1 - b - c - \sqrt{9 + 6b + b^2 - 10c - 6bc + c^2})\end{aligned}$$

La velocidad de cruce de los valores propios, dada por (2.9), la cual es

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

con

$$\begin{aligned}L_1(\mu) &= \mu + b + 1 \\ L_2(\mu) &= b\mu bc \\ L_3(\mu) &= 2bc\mu - 2b\mu\end{aligned}$$

está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\alpha'(\mu_0) &= \left(-b\sqrt{9 + b^2 - 6b(c - 1) - 10c + c^2} \right) / \\ &\left((c - 1)(c - 5 + \sqrt{9 + b^2 - 6b(c - 1) - 10c + c^2}) \right. \\ &\left. + b(c - 1 + s\sqrt{9 + b^2 - 6b(c - 1) - 10c + c^2}) \right)\end{aligned}$$

Haciendo un análisis de la expresión de la velocidad de cruce, concluimos, primero que la velocidad de cruce es diferente de cero, y segundo que siempre va a ser negativa dentro de la región de factibilidad. Por lo que en el punto de equilibrio P_2 , sí ocurre una bifurcación de Hopf.

Cálculo de la Variedad Central

Continuamos con el cálculo de la variedad central, para ello, trasladaremos el punto de equilibrio P_2 al origen con el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - \sqrt{b(c-1)} \\y_2 &= x_2 - \sqrt{b(c-1)} \\y_3 &= x_3 - (c-1)\end{aligned}$$

Con este cambio de variables, el sistema de Lorenz queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\frac{1}{2}(c-b-3 + \sqrt{9+b^2-6b(c-1)-10c+c^2})(y_1-y_2) \\ \dot{y}_2 &= y_1-y_2 - \sqrt{b(c-1)}y_3 - y_1y_2 \\ \dot{y}_3 &= \sqrt{b(c-1)}y_2 + y_1(\sqrt{b(c-1)}+y_2) - by_3\end{aligned}$$

Ahora, el punto de equilibrio es el origen, los valores propios son los mismos (ya que sólo hicimos una traslación). Los vectores propios asociados a los valores propios son: para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mu\sqrt{b(c-1)} \\ \mu\sqrt{b(c-1)} \\ b(c+\mu) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{b(c-1)}\sqrt{b(c-\mu)} \\ -(\mu+1)\sqrt{b(c-\mu)} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = \lambda_0$ se tiene que

$$v_2 = \begin{pmatrix} \mu\sqrt{b(c-1)} \\ -(b+1)\sqrt{b(c-1)} \\ -b(b+\mu+1) \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz que necesitamos para llevar el sistema a la forma de Jordan es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mu\sqrt{b(c-1)} & \mu\sqrt{b(c-1)} \\ \sqrt{b(c-1)}\sqrt{b(c+\mu)} & \mu\sqrt{b(c-1)} & -(b+1)\sqrt{b(c-1)} \\ -(\mu+1)\sqrt{b(c+\mu)} & b(c+\mu) & -b(b+\mu+1) \end{pmatrix}$$

Teniendo la matriz P , calculamos su inversa, puesto que la necesitamos también para llevar el sistema a la forma de Jordan, debido a que la matriz inversa de la matriz P es muy extensa, se omite su expresión. Desarrollando la expresión

$$J = P^{-1}AP$$

tenemos que la matriz del sistema en forma de Jordan queda de la siguiente manera

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(c+\mu)} & 0 \\ \sqrt{b(c+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+b+\mu) \end{pmatrix}$$

Acontinuación, ortogonalizaremos la variedad central y la variedad estable, el cambio de variables que necesitamos nos lo da la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}$$

Definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{b(c-1)} \left(-3 - b + c + \sqrt{9 + b^2 - 6b(c-1) - 10c + c^2} \right) (w + z_2) \\ y_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{b(c-1)} (-2(b+1)w \\ &\quad + \sqrt{2}\sqrt{b(-3-b+3c) + \sqrt{9 + b^2 - 6b(c-1) - 10c + c^2}} \\ &\quad + (-3 - b + c + \sqrt{9 + b^2 - 6b(c-1) - 10c + c^2})z_2) \\ y_3 &= -\frac{1}{2}b \left(-1 + b + c + \sqrt{9 + b^2 - 6b(c-1) - 10c + c^2} \right) w \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + b - c - \sqrt{9 + b^2 - 6b(c-1) - 10c + c^2}) \right. \\ &\quad \left. \left(\sqrt{b(-3-b+3c) + \sqrt{9 + b^2 - 6b(c-1) - 10c + c^2}} \right) z_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}b \left(3 + b - 3c - \sqrt{9 + b^2 - 6b(c-1) - 10c + c^2} \right) z_2 \end{aligned}$$

En las nuevas variables (z_1, z_2, w) , el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(c+\mu)} & 0 \\ \sqrt{b(c+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+b+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}.$$

Donde la f_{11} , f_{22} y f_{33} , representan a la parte no lineal del sistema en la forma de Jordan, y debido a lo extenso de estas expresiones, se omite la forma explícita de las mismas.

Calcularemos la expresión de la variedad central, la cual está dada por la expresión

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_2^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_1^2$$

derivando tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

Sustituyendo (4.1.1), se obtiene la expresión de la variedad central. Para su cálculo nos apoyamos en el programa MATHEMATICA.

Ahora, conociendo la expresión de la variedad central, calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por la expresión

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0R_2) \quad (4.3)$$

con

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{b(c + \mu)} \\ R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2 &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

Se omite la expresión del primer coeficiente de Lyapunov debido a lo extensa que es, sin embargo, haciendo los cálculos correspondientes, utilizando el programa MATHEMATICA, se puede concluir que el primer coeficiente de Lyapunov es diferente de cero y siempre positivo en la región de factibilidad, por lo que concluimos que al ocurrir la bifurcación de Hopf, se presenta una órbita periódica repulsora. El análisis que nos lleva a los resultados presentados fue gráfico. En las siguientes figuras (figuras 4.5 y 4.6) se presenta la gráfica del primer coeficiente de Lyapunov vista de dos ángulos diferentes, en ellas se puede apreciar que en la región de factibilidad este es positivo.

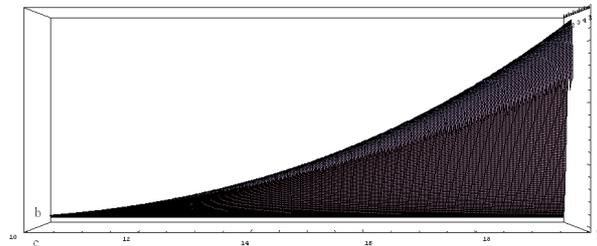


Figura 4.5: Primer Coeficiente de Lyapunov Dentro de la Región de Factibilidad

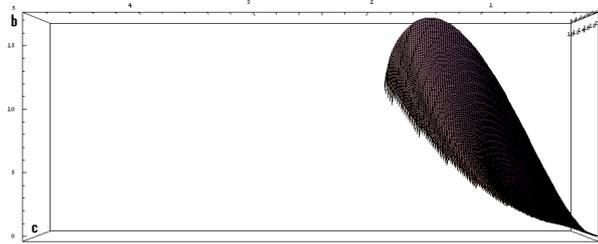
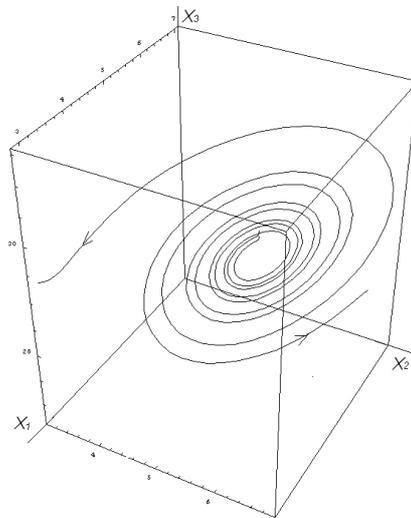


Figura 4.6: Primer Coeficiente de Lyapunov Dentro de la Región de Facibilidad

Con esta información sabemos que el sistema presenta una órbita periódica repulsora, por ser repulsora no la podemos ver, sin embargo, como sabemos que la velocidad de cruce es negativa, esperamos que para valores del parámetro menores que el parámetro de bifurcación, el punto de equilibrio es repulsor, y para valores del parámetro mayores que el parámetro de bifurcación, el punto de equilibrio es atractor, las figuras 4.7 y 4.8 corroboran el cambio de estabilidad del punto de equilibrio al pasar por el parámetro de bifurcación.

Figura 4.7: Punto de Equilibrio Inestable, $b = 1$, $c = 30$, $\mu = 22.5$

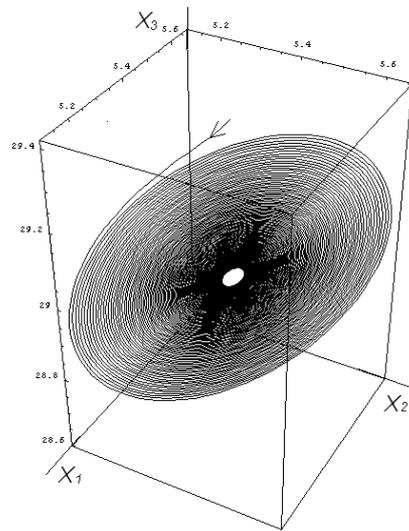


Figura 4.8: Punto de Equilibrio Estable, $b = 1$, $c = 30$, $\mu = 25$

4.2 Caso II: $b = \mu$, y (a, c) Parámetros de Control

Bajo estas condiciones, el sistema de Lorenz queda:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_2 - ax_1 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \mu x_3\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para éste sistema son:

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{\mu(c-1)}, \sqrt{\mu(c-1)}, c-1) \\ P_3 &= (-\sqrt{\mu(c-1)}, -\sqrt{\mu(c-1)}, c-1)\end{aligned}$$

4.2.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

La matriz jacobiana asociada a éste sistema es:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\mu \end{pmatrix}$$

Análisis en el Punto de equilibrio $P_1 = (0, 0, 0)$.

La matriz jacobiana evaluada en el origen es:

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

y sus valores propios debido a (2.11) y (2.12)son los siguientes

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(-1 - a + \sqrt{1 - 2a + a^2 + 4ac}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(-1 - a - \sqrt{1 - 2a + a^2 + 4ac}) \\ \lambda_0 &= -\mu\end{aligned}$$

Para colocar los valores propios en el eje imaginario necesitamos que $-1 - a = 0$, lo cual logramos haciendo $a = -1$, pero como estamos considerando que todos los parámetros son positivos, entonces concluimos que en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf.

Análisis en el Punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{\mu(c-1)}, \sqrt{\mu(c-1)}, c-1)$

Siguiendo con nuestro análisis, veamos ahora qué ocurre en P_2 . Primeramente veremos qué condiciones deben de cumplir los parámetros de control para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$. Obsérvese que, para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, necesitamos que $c-1 > 0$, lo cual implica que:

$$c-1 > 0 \implies c > 1$$

La figura 4.9 muestra la región del plano de los parámetros de control donde $P_2 \in \mathbb{R}^3$.

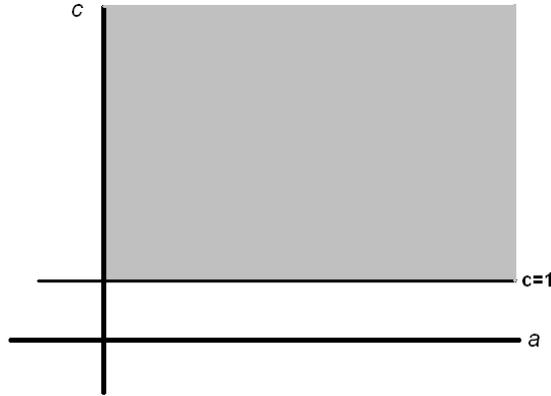


Figura 4.9: Región Donde $P_2 \in \mathbb{R}^3$

La jacobiana evaluada en P_2 , queda:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\mu(c-1)} \\ \sqrt{\mu(c-1)} & \sqrt{\mu(c-1)} & -\mu \end{pmatrix}$$

Los valores de μ que cumplen con las condiciones (2.10), son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{-3a - a^2 - c + ac}{a + c}, \\ \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Necesitamos que estos valores de $\mu > 0$, entonces, como $\mu_2 = 0$ la podemos descartar, quedándonos sólo con $\mu_1 = \frac{-3a - a^2 - c + ac}{a + c}$. Entonces,

$$\frac{-3a - a^2 - c + ac}{a + c} > 0 \implies -3a - a^2 - c + ac > 0 \implies c(a-1) > a^2 + 3a \implies c > \frac{a^2 + 3a}{a-1}.$$

Como se consideró que $c > 1$, entonces

$$\mu_1 > 0 \text{ siempre que } c > \frac{a^2 + 3a}{a - 1}$$

para todo valor de $a \in R^+$, diferente de 1. La figura 4.11 muestra las regiones de factibilidad.

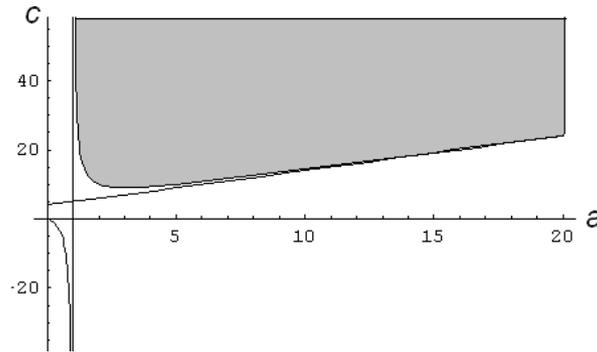


Figura 4.10: Región donde $\mu_1 > 0$

Para $\mu_0 = \mu_1$, los valores propios, debido a (2.11) y (2.12), de la matriz jacobiana son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{ac - a^2 - 3a - c} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{ac - a^2 - 3a - c} \\ \lambda_0 &= -\frac{2a(c-1)}{a+c} \end{aligned}$$

La velocidad de cruce dada por (2.9), que es

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

donde

$$\begin{aligned} L_1(\mu) &= \mu + a + 1 \\ L_2(\mu) &= (a + c)\mu \\ L_3(\mu) &= (2ac - 2a)\mu \end{aligned}$$

está dada por la expresión

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{a^2 - a(-3 + c) + c}{2 \left(ac - a^2 - 3a - c + \frac{4a^2(c-1)^2}{(a+c)^2} \right)}$$

Haciendo un análisis, se observa que la velocidad de cruce es diferente de cero y siempre negativa.

Cálculo de la Variedad Central

Continuaremos con el cálculo de la variedad central, para ello, trasladaremos el punto de equilibrio P_2 al origen con el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - \sqrt{\mu_1(c-1)} \\y_2 &= x_2 - \sqrt{\mu_1(c-1)} \\y_3 &= x_3 - (c-1)\end{aligned}$$

con este cambio de variables, el sistema de Lorenz queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a(y_1 + y_2) \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 - \sqrt{-\frac{(c-1)(3a+a^2+c-ac)}{a+c}} y_3 - y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 &= \sqrt{-\frac{(c-1)(3a+a^2+c-ac)}{a+c}} y_2 + \frac{(3a+a^2+c-ac)}{a+c} y_3 \\ &\quad + y_1 \left(\sqrt{-\frac{(c-1)(3a+a^2+c-ac)}{a+c}} + y_2 \right)\end{aligned}$$

Como sólo hicimos una traslación, el punto de equilibrio es el origen y los valores propios son los mismos. Los vectores propios asociados a los valores propios son: para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\mu(c-1)} \\ a\sqrt{\mu(c-1)} \\ w_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ w_0\sqrt{\mu(c-1)} \\ -w_0(a+1) \end{pmatrix}$$

y para $\lambda = \lambda_0$ tenemos que

$$v_2 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\mu(c-1)} \\ (a+\lambda_0)\sqrt{\mu(c-1)} \\ -\lambda_0 - \lambda(a+1) \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz que necesitamos para llevar el sistema a la forma de Jordan, la cual está dada en términos de los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a\sqrt{\mu(c-1)} & a\sqrt{\mu(c-1)} \\ w_0\sqrt{\mu(c-1)} & a\sqrt{\mu(c-1)} & (a+\lambda_0)\sqrt{\mu(c-1)} \\ -w_0(a+1) & w_0^2 & -\lambda_0^2 - \lambda(a+1) \end{pmatrix}$$

Realizando los cálculos en el MATHEMATICA se tiene que la matriz del sistema en forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(c+\mu)} & 0 \\ \sqrt{b(c+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+b+\mu) \end{pmatrix}$$

Acontinuación, ortogonalizaremos la variedad central y la variedad estable, el cambio de variables que necesitamos nos lo da la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= a \sqrt{\frac{(c-1)(-3a-a^2-c+ac)}{a+c}} (w+z_2) \\ y_2 &= \sqrt{\frac{(c-1)(-3a-a^2-c+ac)}{a+c}} \left(\frac{a(a-c+2)w}{a+c} + \sqrt{-3a-a^2-c+ac} z_1 + a z_2 \right) \\ y_3 &= \frac{2a(c-1)(a^2-a(c-3)+c)w}{(a+c)^2} - (a+1) \sqrt{(-3a-a^2-c+ac)} z_1 \\ &\quad - (a^2-a(c-3)+c) \end{aligned}$$

con este cambio de variable, el sistema en las nuevas variables (z_1, z_2, w) es:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{ac-a^2-3a-c} & 0 \\ \sqrt{ac-a^2-3a-c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2a(c-1)}{a+c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}.$$

Donde la f_{11} , f_{22} y f_{33} , representan a la parte no lineal del sistema en la forma de Jordan; y debido a lo extenso de estas expresiones, se omite la forma explícita de éstas. Calcularemos la expresión de la variedad central, la cual está dada por la expresión

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_2^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2.$$

Derivando, tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2.$$

Sustituyendo (4.2.1) en esta expresión, obtenemos la expresión de la variedad central, apoyándonos en el programa MATHEMATICA.

Con la expresión de la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por la expresión

$$l_1 = \frac{1}{16w_0} (R_1 + w_0 R_2) \quad (4.4)$$

con

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{ac-a^2-3a-c} \\ R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2 &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene la expresión del primer coeficiente de Lyapunov, la cual es:

$$\begin{aligned} l_1 &= (a^2(a+1)(a^2 - a(c-3) + c)^2(6a^4 + c^3(c+5) \\ &\quad + a^2c(c+35) + 3a^3(3c+5) + ac(c^2 + 21c + 2))) / (8(a^8 - 2a(c-5)c^5 \\ &\quad + c^6 + 2a^7(c+3) + a^6(4 + 30c - 6c^2) + a^5(-15 + 67c + 13c^2 - 9c^3) \\ &\quad + a^2c^3(c^2 - 17c^2 + 4ac - 5) + a^3c^2(7c^3 - 57c^2 + 131c - 25) \\ &\quad + a^4(8c^4 - 69c^3 + 178c^2 - 31c + 4))) \end{aligned}$$

Debido a lo complejo de la expresión del primer coeficiente de Lyapunov, el análisis que se realizó para conocer el signo de éste, dentro de la región factible, fue gráfico, apoyándonos en el programa MATHEMATICA, se concluye que el signo del primer coeficiente de Lyapunov dentro de la región factible (ver figura 4.11), es positivo y no se hace cero dentro de ésta, por lo que se espera que se presente una órbita periódica repulsora. La figura 4.11 muestra los puntos donde el primer coeficiente de Lyapunov se hace cero, así como la región de factibilidad.

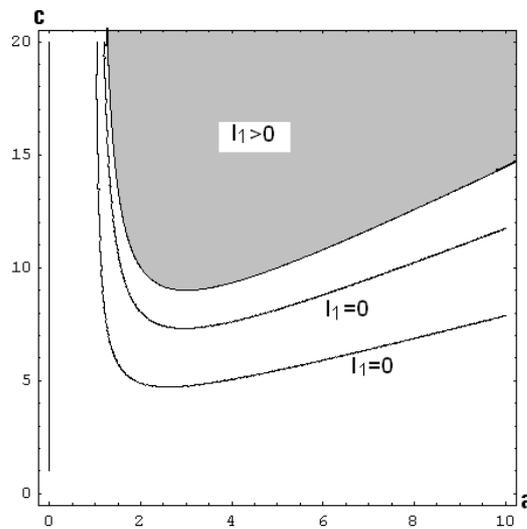


Figura 4.11: Curvas de Nivel Cero del Primer Coeficiente de Lyapunov, y Signo del Mismo Dentro de la Región Factible.

Debido a que la velocidad de cruce es negativa dentro de la región factible, la órbita periódica que debe aparecer para valores del parámetro menores que el valor del parámetro de bifurcación μ_0 , debe ser repulsora. Ahora, como la órbita periódica es repulsora no la podemos ver, pero se comprueban los resultados expuestos, presentando en las figuras 4.12 y 4.13, la simulación del sistema cuando se da el cambio de estabilidad del punto de equilibrio al variar el valor del parámetro de bifurcación, lo cual nos muestra que sí ocurre la bifurcación de Hopf.

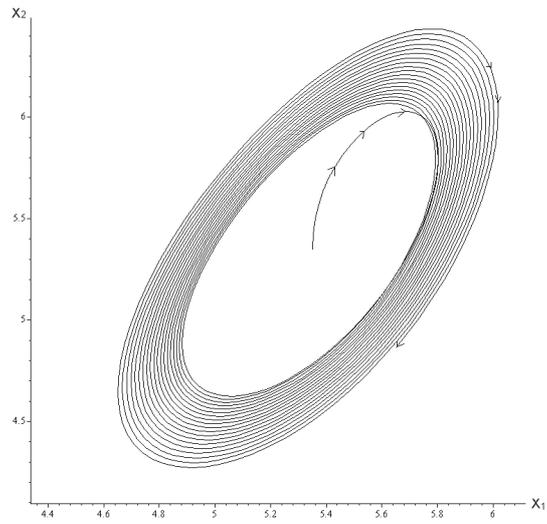


Figura 4.12: Punto de Equilibrio Inestable, $a = 5$, $c = 20$, $\mu = 1.5$

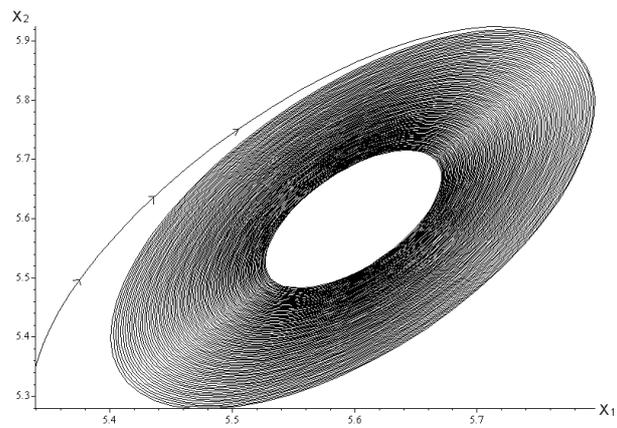


Figura 4.13: Punto de Equilibrio Estable, $b = 5$, $c = 20$, $\mu = 1.65$

4.3 Caso III: $c = \mu$, y (a, b) Parámetros de Control

Bajo estas condiciones, el sistema de Lorenz queda de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1 = ax_2 - ax_1 \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_2 = \mu x_1 - x_1 x_3 - x_2 \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3 \quad (4.7)$$

Haciendo los mismos cálculos que en el caso anterior, encontramos que los puntos de equilibrio para éste sistema son:

$$P_1 = (0, 0, 0)$$

$$P_2 = (\sqrt{b(\mu - 1)}, \sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1)$$

$$P_3 = (-\sqrt{b(\mu - 1)}, -\sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1)$$

4.3.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

No perdamos de vista que nos interesa analizar los puntos de equilibrio en los cuales, la matriz jacobiana del sistema presenta un par de valores propios con parte real cero y otro valor propio real.

La matriz jacobiana asociada a sistema (4.5) es:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ \mu - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix}$$

Análisis en el Punto de equilibrio $P_1 = (0, 0, 0)$.

Iniciamos nuestro análisis en el origen. La matriz jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

y sus valores propios, usando a (2.11) y (2.12), son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - a + \sqrt{1 - 2a + a^2 + 4a\mu}),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - a - \sqrt{1 - 2a + a^2 + 4a\mu}),$$

$$\lambda_0 = -b.$$

Como podemos observar, lo primero que debemos de hacer para conseguir colocar los valores propios en el eje imaginario es que $-1 - a = 0$. Es decir, $a = -1$, pero como estamos considerando que todos los parámetros son positivos, entonces concluimos que en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf.

Análisis en el Punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{b(\mu - 1)}, \sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1)$

Veamos ahora qué ocurre en P_2 . Primeramente, veremos qué condiciones deben cumplir los parámetros de control para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$. Como se puede observar, para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, necesitamos que $\mu - 1 > 0$.

La jacobiana evaluada en éste punto de equilibrio es:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{-\sqrt{b(\mu - 1)}} \\ \sqrt{b(\mu - 1)} & \sqrt{b(\mu - 1)} & -b \end{pmatrix}$$

No perdamos de vista que buscamos valores para μ que satisfagan las condiciones (2.10), haciendo los cálculos correspondientes, encontramos los siguientes valores de μ que cumplen con las condiciones (2.10) son:

$$\mu_0 = \frac{3a + a^2 + ab}{a - b - 1}.$$

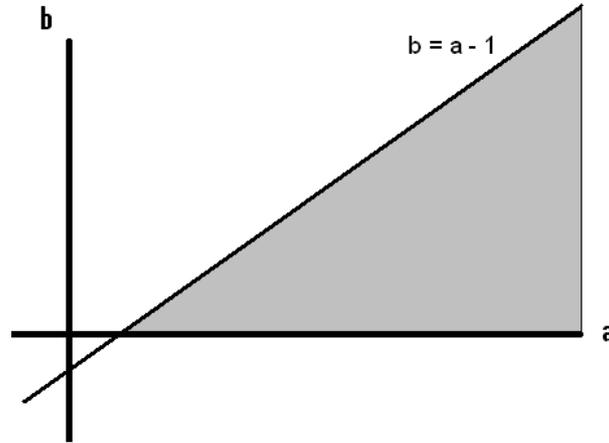
Por otro lado, necesitamos que este valor de $\mu > 0$, entonces

$$\frac{3a + a^2 + ab}{a - b - 1} > 0 \implies a - b - 1 > 0 \implies a > b + 1.$$

Ahora, como necesitamos que $\mu > 1$ para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, se observa que

$$\frac{3a + a^2 + ab}{a - b - 1} > 1 \implies 3a + a^2 + ab > a - b - 1 \implies a^2 + 2a + 1 + b(a + 1) > 0$$

y se ve claramente que la última desigualdad se cumple para para todo $a, b \in \mathbb{R}$, en particular para $a > b + 1$; por lo que, basta con que que $a > b + 1$ para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, y para que $\mu_0 > 0$ (ver figura 4.14).

Figura 4.14: Región Donde $P_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\mu_0 > 0$

Y para el valor del parámetro de bifurcación $\mu = \mu_0$, los valores propios de la matriz jacobiana, dado a (2.11) y (2.12) son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i \frac{\sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}}{\sqrt{a-b-1}}, \\ \lambda_2 &= -i \frac{\sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}}{\sqrt{a-b-1}}, \\ \lambda_0 &= -(a+b+1).\end{aligned}$$

Habiendo conseguido ya los valores propios deseados, nos falta analizar si la velocidad de cruce de estos a través del eje imaginario es diferente de cero. Aplicando la fórmula para la velocidad de cruce (2.9), dada por

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

con

$$\begin{aligned}L_1(\mu) &= a + b + 1, \\ L_2(\mu) &= b\mu + ab, \\ L_3(\mu) &= 2ab\mu - 2ab,\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{2ab + (-1 - a - b)b}{2 \left((-1 - a - b)^2 + \frac{2(ab+a^2b)}{(a-b-1)} \right)}.$$

Buscaremos la posibilidad de que la derivada sea igual a cero. Para esto se tiene que

$$\alpha'(\mu_0) = 0 \implies 2ab + (-1 - a - b)b = 0 \implies a = b + 1.$$

Observemos que la velocidad de cruce es diferente de cero para los valores de los parámetros de control dentro de la región factible. Además, podemos observar que dentro de ésta, la velocidad de cruce es positiva. Por lo tanto, podemos asegurar que en la región de factibilidad sí ocurre una bifurcación de Hopf.

Cálculo de la Variedad Central

Procedemos al cálculo de la variedad central. Para ello, trasladaremos el punto de equilibrio P_2 al origen con el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \sqrt{b(\mu - 1)} \\ y_2 &= x_2 - \sqrt{b(\mu - 1)} \\ y_3 &= x_3 - (a + b + 1) \end{aligned}$$

En términos de las variables y_1 , y_2 e y_3 , el sistema de Lorenz queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 \sqrt{\frac{(a+1)b(1+a+b)}{a-b-1}} y_3 - y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 &= \sqrt{\frac{(a+1)b(1+a+b)}{a-b-1}} y_2 + y_1 \left(\sqrt{\frac{(a+1)b(1+a+b)}{a-b-1}} + y_2 \right) - b y_3. \end{aligned}$$

Ahora, el punto de equilibrio es el origen, los valores propios son los mismos (ya que sólo hicimos una traslación), y los vectores propios asociados a los valores propios son: para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a\sqrt{b(\mu-1)} \\ a\sqrt{b(\mu-1)} \\ w_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ w_0\sqrt{b(\mu-1)} \\ -w_0(a+1) \end{pmatrix}$$

y para $\lambda = \lambda_0$ tenemos que

$$v_2 = \begin{pmatrix} a\sqrt{b(\mu-1)} \\ (a + \lambda_0)\sqrt{b(\mu-1)} \\ -(\lambda_0^2 + \lambda_0(a+1)) \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz que necesitamos para llevar el sistema a la forma de Jordan, está dada en términos de los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a\sqrt{b(\mu-1)} & a\sqrt{b(\mu-1)} \\ w_0\sqrt{b(\mu-1)} & a\sqrt{b(\mu-1)} & (a + \lambda_0)\sqrt{b(\mu-1)} \\ -w_0(a+1) & w_0^2 & -(\lambda_0^2 + \lambda_0(a+1)) \end{pmatrix}$$

Ya con la matriz cambio de base, calculamos su inversa, la cual no se presenta debido a lo extenso que es. Haciendo los cálculos correspondientes, se tiene que la matriz del sistema en forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}}{\sqrt{a-b-1}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}}{\sqrt{a-b-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b+1) \end{pmatrix}$$

Acontinuación, lo que haremos es ortogonalizar la variedad central y la variedad estable. El cambio de variables que necesitamos nos lo da la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= a\sqrt{\frac{(1-a)b(a+b+1)}{a-b-1}}(w+z_2) \\ y_2 &= \sqrt{\frac{(1-a)b(a+b+1)}{a-b-1}} \left(-\sqrt{a-b-1}(1+b)w + \sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}z_1 + a\sqrt{a-b-1}z_2 \right) \\ y_3 &= -b(a+b+1)w - \frac{\sqrt{2}(a+1)\sqrt{a(a+1)b}z_1}{\sqrt{a-b-1}} + \frac{2a(a+1)bz_2}{a-b-1} \end{aligned}$$

Con este cambio de variable, el sistema para (z_1, z_2, w) es:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}}{\sqrt{a-b-1}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}}{\sqrt{a-b-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde la (f_{11}, f_{22}, f_{33}) , representa la parte no lineal del sistema en la forma de Jordan. Y debido a lo extenso de estas expresiones, se omite la expresión explícita de éstas. De manera similar al caso anterior, calcularemos la expresión de la variedad central, la cual está dada por la expresión

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_2^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2$$

Derivando, tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

y sustituyendo (4.3.1) obtenemos la expresión de la variedad central.

Todos los cálculos se hicieron con el programa MATHEMATICA, los resultados encontrados fueron demasiado extensos por lo que se omite la representación explícita de las expresiones de l_1 , la variedad central, así como de las funciones de las cuales depende el primer coeficiente de Lyapunov.

Ahora, conociendo la expresión de la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por la expresión

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0R_2) \quad (4.8)$$

con

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{a(a+1)b}}{\sqrt{a-b-1}} \\ R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2 &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos correspondientes se tiene que la expresión del coeficiente de Lyapunov es:

$$\begin{aligned} l_1 &= (a^2(a+1)b^2(9a^4 + a^3(20 - 18b) - (b+1)^3(b+3) + 2a^2(10b^2 + b + 5) \\ &\quad - 2a(b^3 - 6b^2 - 5b + 2))) / \\ &\quad (4(a^6 + (b+1)^2 + 2a^5(6b+1) + 2a(b+1)^3(b^2 - 3b + 1) + a^4(25b^2 + 18b - 1) \\ &\quad - 2a^3(7b^3 - 5b^2 + 6b + 2) - a^2(11b^4 + 44b^3 + 40b^2 + 24b + 1))) \end{aligned}$$

Debido a lo complejo de la expresión del coeficiente de Lyapunov no se pudo hacer un análisis algebraico del mismo, apoyándonos en el programa MATHEMATICA se hizo un análisis gráfico para determinar el signo de éste dentro de la región de factibilidad, encontrando que el primer coeficiente de Lyapunov es positivo dentro de la región de factibilidad. La figura 4.15 muestra las curvas de nivel cero del primer coeficiente de Lyapunov dentro del primer cuadrante, también se presenta la curva de nivel del plano que determina la región de factibilidad, observándose que, efectivamente el signo del primer coeficiente de Lyapunov es positivo dentro de la región de factibilidad.

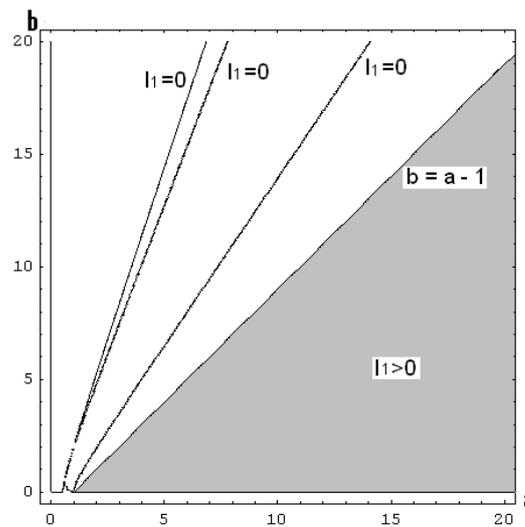


Figura 4.15: Curvas de Nivel Cero del Primer Coeficiente de Lyapunov y Signo del Mismo Dentro de la Región de Factibilidad.

La figura 4.16 muestra la intersección de la superficie generada por la expresión del primer coeficiente de Lyapunov con el plano que genera la expresión de la restricción que determina la región de factibilidad.

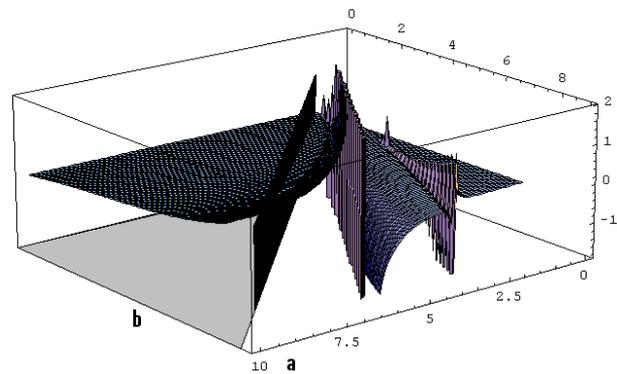
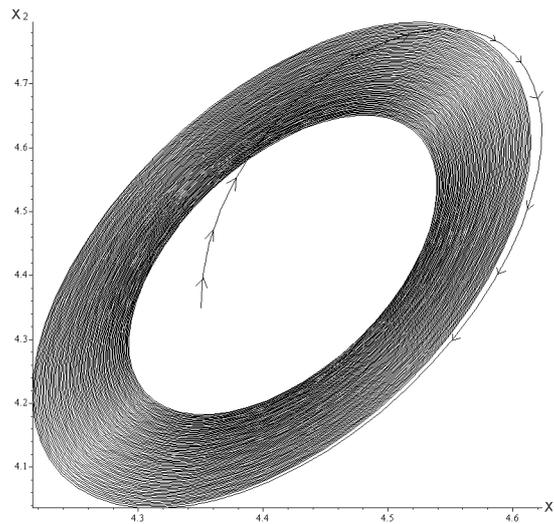


Figura 4.16:

Ahora, para corroborar los resultados expuestos, las figuras 4.17 y 4.18 presentan las simulaciones que muestran el cambio de estabilidad del punto de equilibrio al pasar a través del parámetro de bifurcación, lo cual garantiza la presencia de una bifurcación de Hopf, no se presenta la simulación que presenta la órbita periódica ya que como ésta es repulsora no la podemos ver.

Figura 4.17: Punto de Equilibrio Estable, $a = 3$, $b = 1$, $\mu = 20.5$

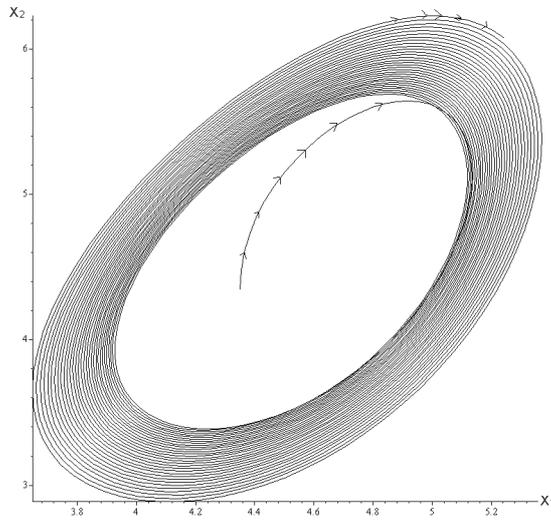


Figura 4.18: Punto de Equilibrio Inestable, $a = 3$, $b = 1$, $\mu = 21.5$

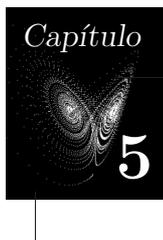
4.4 Resultado Principal

Resumimos los resultados obtenidos en esta capítulo en el siguiente

Teorema 4.1. *Considere el sistema de Lorenz*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

Si se considera cualquiera de los parámetros del sistema como parámetro de bifurcación, y el resto como parámetros de control, sólo es posible encontrar puntos en el plano de los parámetros de control en los cuales el sistema exhibe una bifurcación de Hopf subcrítica.



El Sistema de Chen

En 1999, G. Chen encontró otro atractor caótico en un simple sistema autónomo tridimensional, el cual, no es topológicamente equivalente al sistema de Lorenz. El sistema de Chen pertenece a otra familia canónica de sistemas caóticos y está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

Sistema de Chen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

Este sistema no pertenece a la familia generalizada de sistemas tipo Lorenz, puesto que para el sistema de Chen

$$a_{12}a_{21} < 0$$

Así como en los casos anteriores, consideraremos a cada uno de los parámetros, a uno como parámetro de bifurcación y a los otros dos como parámetros de control.

5.1 Caso I: $a = \mu$, y (b, c) Parámetros de Control

Los cálculos para este sistema serán los mismos que en los casos de Lorenz y de Lü, por lo que iniciamos con el cálculo de los puntos de equilibrio.

5.1.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

Cálculo de los puntos de equilibrio

Buscaremos ahora todos los puntos de equilibrio que posee el sistema, con la finalidad de buscar aquellos que sean no-hiperbólicos. Para esto hacemos:

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) &= 0 \\ (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 &= 0 \\ x_1x_2 - bx_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior tenemos que los puntos de equilibrio del sistema son:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{b(2c - \mu)}, \sqrt{b(2c - \mu)}, 2c - \mu) \\ P_3 &= (-\sqrt{b(2c - \mu)}, -\sqrt{b(2c - \mu)}, 2c - \mu) \end{aligned}$$

Cálculo de los valores propios

Teniendo ya los puntos de equilibrio, buscaremos cuál de ellos es un punto de equilibrio no-hiperbólico, ya que es una condición para que ocurra una bifurcación de Hopf. Buscaremos los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio en cuestión. No olvidemos que buscamos un valor para el parámetro de bifurcación que genere un par de valores propios en el eje imaginario y otro fuera de él. La matriz jacobiana asociada al sistema de Chen es:

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ c - \mu - x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix}$$

Evaluando la jacobiana en el punto de equilibrio P_1 se tiene

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ c - \mu & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(c - \mu + \sqrt{c^2 + 6c\mu - 3\mu^2}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(c - \mu - \sqrt{c^2 + 6c\mu - 3\mu^2}) \\ \lambda_0 &= -b \end{aligned}$$

Lo primero que necesitamos para que los valores propios λ_1 y λ_2 estén sobre el eje imaginario es que

$$c - \mu = 0 \implies \mu = -c.$$

Como estamos considerando que los parámetros deben ser positivos, concluimos que en el origen no ocurre la bifurcación de Hopf.

Análisis en el Punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{b(2c - \mu)}, \sqrt{b(2c - \mu)}, 2c - \mu)$

Lo primero que analizaremos son las condiciones que deben de cumplir los parámetros para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, y observamos que deben cumplir lo siguiente:

$$2c - \mu \geq 0 \implies 2c \geq \mu \quad (5.1)$$

La jacobiana evaluada en el punto de equilibrio P_2 , es:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ c & c & -\sqrt{b(2c - \mu)} \\ \sqrt{b(2c - \mu)} & \sqrt{b(2c - \mu)} & -b \end{pmatrix}$$

Recordemos que buscamos un valor para el paámetro de bifurcación que cumpla con (2.10), haciendo las operaciones se tiene que los valores de μ que cumplen con estas condiciones son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{4}(3c + \sqrt{17c^2 - 8bc}) \\ \mu_2 &= \frac{1}{4}(3c - \sqrt{17c^2 - 8bc}) \end{aligned}$$

Los dos valores anteriores de μ cumplen con lo deseado, pero nosotros haremos el análisis sólo para $\mu_0 = \mu_1$.

Necesitamos que éste valor de μ_0 sea positivo. Observemos que

$$\frac{1}{4}(3c + \sqrt{17c^2 - 8bc}) > 0 \implies 17c^2 - 8bc > 0 \implies c > \frac{8}{17}b.$$

Regresando con el análisis para buscar los valores para los parámetros de control para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, necesitamos que

$$2c \geq \mu \implies 2c \geq \frac{1}{4}(3c + \sqrt{17c^2 - 8bc}) \implies 25c^2 \geq 17c^2 - 8bc \implies 8c^2 \geq 8bc \implies c + b > 0$$

por lo que $P_2 \in \mathbb{R}^3$ para todo valor de b y c .

Para $\mu_0 = \mu_1$, los valores propios de la matriz jacobiana, debido a (2.11) y (2.12), son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{bc} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{bc} \\ \lambda_0 &= \frac{1}{4}(c - 4b - \sqrt{17c^2 - 8bc}) \end{aligned}$$

Otra condición que pedimos para nuestro análisis, es que el valor propio real sea negativo, por lo que analizaremos las condiciones que deben cumplir los parámetros de control para que esto suceda:

$$(c - 4b - \sqrt{17c^2 - 8bc}) < 0 \implies c - 4b < \sqrt{17c^2 - 8bc}.$$

Si $c - 4b < 0$, es decir, $c < 4b$ tenemos que $\lambda_0 < 0$, por otro lado, si $c - 4b > 0$, es decir, $c > 4b$, tenemos que

$$c^2 - 8bc + 16b^2 < 17c^2 - 8bc \implies c > b$$

la figura (5.1) muestra la región del plano de los parámetros donde ocurre la bifurcación de Hopf.

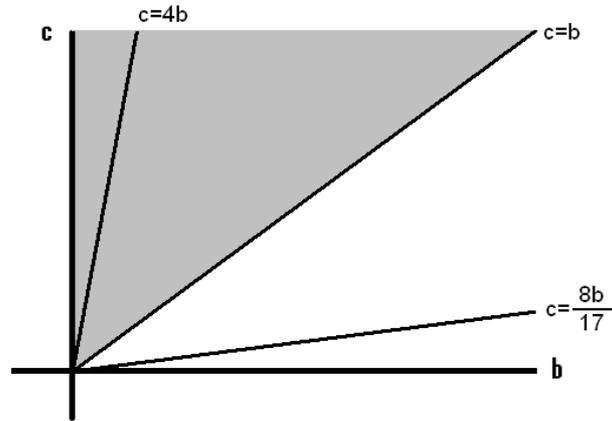


Figura 5.1: Región donde $P_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mu_1 > 0$, y $\lambda_0 < 0$

Ya teniendo los valores propios deseados, veremos qué pasa con la velocidad de cruce de estos al atravesar el eje imaginario, la velocidad de cruce de estos valores propios está dada por la expresión (2.9),

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

Donde

$$\begin{aligned} L_1(\mu) &= \mu + b - c \\ L_2(\mu) &= bc \\ L_3(\mu) &= 4bc\mu - 2b\mu^2 \end{aligned}$$

por lo que la velocidad de cruce de los valores propios está dada por la expresión:

$$\alpha'(\mu_0) = -\frac{b\sqrt{17c^2 - 8bc}}{2(bc + [\frac{1}{4}(-4b + c + \sqrt{17c^2 - 8bc})]^2)}$$

Observemos que la velocidad de cruce nunca va a ser cero dentro de la región de factibilidad, además, se observa que es siempre negativa dentro de la misma. De esta manera podemos decir que en el punto de equilibrio P_2 sí ocurre la bifurcación de Hopf.

Cálculo de la Variedad Central

Continuaremos con el cálculo de la variedad central, para ello, trasladaremos el punto de equilibrio P_2 al origen con el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - \sqrt{b(2c - \mu)} \\y_2 &= x_2 - \sqrt{b(2c - \mu)} \\y_3 &= x_3 - (2c - \mu)\end{aligned}$$

con este cambio de variables, el sistema de Chen queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\frac{1}{4} \left(3c + \sqrt{17c^2 - 8bc} \right) (y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 &= c(y_2 - y_1) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{-b(-5c + \sqrt{17c^2 - 8bc})} + 2y_1 \right) y_3 \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{-b(-5c + \sqrt{17c^2 - 8bc})} y_2 + y_1 \left(\sqrt{-b(-5c + \sqrt{17c^2 - 8bc})} + 2y_2 \right) - 2by_3 \right)\end{aligned}$$

Ahora, el punto de equilibrio es el origen, los valores propios son los mismos. Los vectores propios asociados a los valores propios son: para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} \\ \mu_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} \\ w_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} \\ -w_0(\mu_0 - c) \end{pmatrix}$$

y para $\lambda = \lambda_0$ se tiene

$$v_2 = \begin{pmatrix} \mu_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} \\ (\mu_0 + \lambda_3) \sqrt{b(2c - \mu_0)} \\ -(\lambda_3^2 + \lambda_3(\mu - c)) \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz que necesito para llevar el sistema a la forma de Jordan, es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mu_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} & \mu_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} \\ w_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} & \mu_0 \sqrt{b(2c - \mu_0)} & (\mu + \lambda_3) \sqrt{b(2c - \mu_0)} \\ -w_0(\mu_0 - c) & w_0^2 & -(\lambda_3^2 + \lambda_3(\mu_0 - c)) \end{pmatrix}$$

Ya con la matriz cambio de base, calculamos su inversa, la cual no se presenta debido a lo extenso que es. Apoyándonos en el MATHEMATICA, desarrollamos la expresión,

$$J = P^{-1}AP$$

y se tiene que la matriz del sistema en forma de Jordan queda de la siguiente manera

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{bc} & 0 \\ \sqrt{bc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(c - 4b - \sqrt{17c^2 - 8bc}) \end{pmatrix}$$

Acontinuación, lo que haremos es ortogonalizar la variedad central y la variedad estable, para ello realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}$$

de la siguiente manera, definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{8}\sqrt{-b(-5c + \sqrt{17c^2 - 8bc})} \left(3c + \sqrt{17c^2 - 8bc}\right) (w + z_2) \\ y_2 &= \frac{1}{5}\sqrt{-b(-5c + \sqrt{17c^2 - 8bc})} \left(4cw - 4bw + 4\sqrt{bc}z_1 + 3cz_2 + \sqrt{17c^2 - 8bc}z_2\right) \\ y_3 &= \frac{1}{4} \left(-4b^2w + \sqrt{bc}(c - \sqrt{17c^2 - 8bc})z_1 + b(-\sqrt{17c^2 - 8bc}w + c(w + 4z_2))\right) \end{aligned}$$

con este cambio de variable, el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{bc} & 0 \\ \sqrt{bc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(c - 4b - \sqrt{17c^2 - 8bc}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde la f_{11} , f_{22} y f_{33} , representan a la parte no lineal del sistema en la forma de Jordan. Debido a lo extenso de estas expresiones, se omite la forma explícita de estas. De manera similar al caso anterior, calcularemos la expresión de la variedad central, la cual está dada por la expresión

$$w = h(z_1, z_2) = a_1z_2^2 + a_2z_1z_2 + a_3z_1^2$$

derivando, tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

y sustituyendo los datos que ya conocemos, los cuales son:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\sqrt{bc}z_2 + f_{11}(z_1, z_2, w) \\ \dot{z}_2 &= \sqrt{bc}z_1 + f_{22}(z_1, z_2, w) \\ \dot{w} &= \frac{1}{4}(c - 4b - \sqrt{17c^2 - 8bc})w + f_{33}(z_1, z_2, w) \end{aligned}$$

obtenemos la expresión de la variedad central.

Todos los cálculos se hicieron con el programa MATHEMATICA, los resultados encontrados fueron demasiado extensos por lo que se omite la representación explícita de las expresiones de , la variedad central, el primer coeficiente de Lyapunov, así como de las funciones de las cuales depende éste. Conociendo la expresión de la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por la expresión

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0R_2) \quad (5.2)$$

con

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{bc} \\ R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2 &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

Como ya se mencionó antes, la expresión del primer coeficiente de Lyapunov no se presenta explícitamente, sin embargo, haciendo un cuidadoso análisis gráfico, se observó que éste siempre es negativo en el primer cuadrante del plano de los parámetros de control, por lo que se espera que las órbitas periódicas que presentará el sistema serán atractoras.

En la siguiente figura (ver figura 5.2), se muestra la órbita periódica atractora que presenta el sistema.

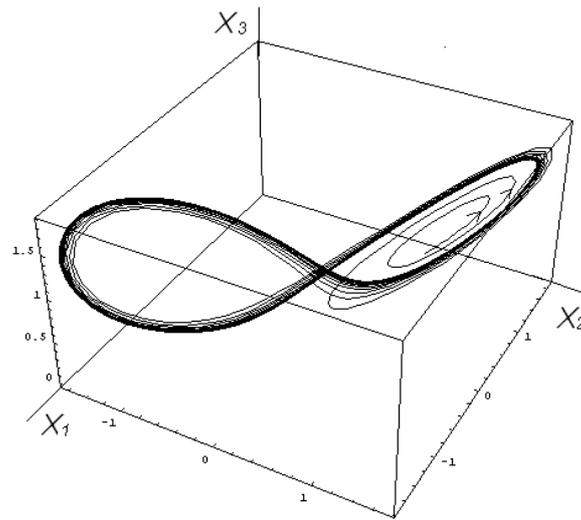


Figura 5.2: Órbita Periódica Atractora. Con $b = 1$, $c = 2$ y $\mu = 3$

5.2 Caso II: $b = \mu$, y (a, c) Parámetros de Control

Bajo estas condiciones, el sistema de Chen queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \mu x_3\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para éste sistema son:

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{\mu(2c - a)}, \sqrt{\mu(2c - a)}, 2c - a) \\ P_3 &= (-\sqrt{\mu(2c - a)}, -\sqrt{\mu(2c - a)}, 2c - a)\end{aligned}$$

5.2.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

No perdamos de vista que nos interesa analizar los puntos de equilibrio, en los cuales, la matriz jacobiana del sistema presenta un par de valores propios con parte real cero y otro valor propio real. La matriz jacobiana asociada a éste sistema es:

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\mu \end{pmatrix}$$

Análisis en el Punto de equilibrio $P_1 = (0, 0, 0)$.

La matriz jacobiana evaluada en el origen es:

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

y sus valores propios debido a (2.11) Y (2.12) son los siguientes

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(c - a + \sqrt{c^2 + 6ac - 3a^2}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(c - a - \sqrt{c^2 + 6ac - 3a^2}) \\ \lambda_0 &= -\mu\end{aligned}$$

Lo primero que debemos hacer para conseguir colocar los valores propios en el eje imaginario es hacer que $c - a = 0$, lo cual implica que $c = a$, pero con esta condición, no podemos conseguir que $c^2 + 6ac - 3a^2 < 0$, por lo que no tendremos ningún valor propio complejo, de esto concluimos que en el origen no ocurre la bifurcación de Hopf.

Análisis en el Punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{\mu(2c-a)}, \sqrt{\mu(2c-a)}, 2c-a)$

Siguiendo con nuestro análisis, veamos ahora qué ocurre en P_2 . Primeramente veremos, qué condiciones deben de cumplir los parámetros de control para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$. Para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, necesitamos que $2c-a > 0$, y mediante un simple análisis, observamos que:

$$2c - a > 0 \implies c > \frac{1}{2}a$$

también se observa que μ debe ser positiva, por lo que mas adelante concluiremos con este análisis (ver figura 5.3).

La matriz jacobiana evaluada en éste punto de equilibrio nos queda de la siguiente manera:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{\mu(2c-a)} \\ \sqrt{\mu(2c-a)} & \sqrt{\mu(2c-a)} & -\mu \end{pmatrix}$$

No perdamos de vista que buscamos valores para μ que satisfagan las condiciones (2.10). Los valores de μ que cumplen con estas condiciones son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{c^2 + 3ac - 2a^2}{c} \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

Como necesitamos que los parámetros sean positivos descartamos el análisis para μ_2 , y nos quedamos sólo con μ_1 . Entonces, para que este valor de μ sea positivo necesitamos que:

$$c^2 + 3ac - 2a^2 > 0$$

analizando esta ecuación cuadrática, empleando la tabla (2.1), se puede ver que se trata de un par de rectas concurrentes. Haciendo un análisis algebraico podemos observar que

$$c^2 + 3ac - 2a^2 = \left(\frac{-3a + a\sqrt{17}}{2}\right)\left(\frac{-3a - a\sqrt{17}}{2}\right).$$

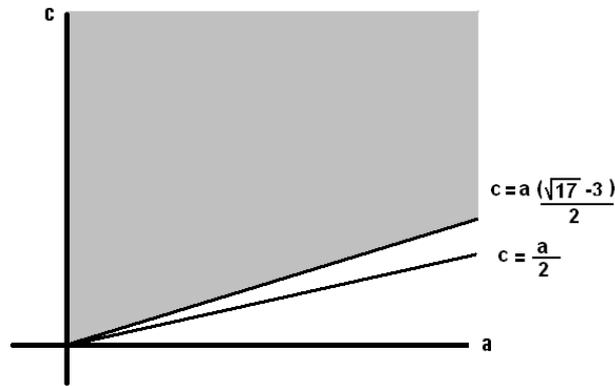
De esta manera, la recta que nos interesa es

$$c = \frac{-3a + a\sqrt{17}}{2},$$

ya que para toda

$$c > \frac{-3a + a\sqrt{17}}{2} \implies c^2 + 3ac - 2a^2 > 0$$

entonces, con esta restricción y con $c > \frac{1}{2}a$, tenemos que $P_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\mu_1 > 0$. La figura 5.3 muestra el área de factibilidad donde ocurre la bifurcación de Hopf.

Figura 5.3: Región donde $P_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\mu_0 > 0$

Ahora, tomando a $\mu_0 = \mu_1$, tenemos que los valores propios (debido a 2.11 y 2.12) asociados a este valor del parámetro de bifurcación son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i\sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2} \\ \lambda_0 &= \frac{2a(a - 2c)}{c}\end{aligned}$$

La velocidad de cruce de los valores propios a través del eje imaginario dada por (2.9), la cual es:

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

con

$$\begin{aligned}L_1(\mu) &= \mu + a - c \\ L_2(\mu) &= c\mu \\ L_3(\mu) &= 4ac\mu - 2a^2\mu\end{aligned}$$

es la expresión:

$$\alpha'(\mu_0) = -\frac{(c^2 + 3ac - 2a^2)c^2}{2(c^4 + 3ac^3 - 16a^3c + 14a^2c^2 + 4a^4)}$$

La velocidad de cruce no será igual a cero dentro de la región de factibilidad, y se observa que será siempre negativa. Con esto podemos concluir que, para valores de

los parámetros de control dentro del área delimitada por las restricciones encontradas, siempre ocurre una bifurcación de Hopf.

Cálculo de la Variedad Central

Sabiendo ya que ocurre la bifurcación de Hopf, continuamos con nuestro análisis calculando la variedad central, para ello, trasladaremos el punto de equilibrio P_2 al origen con el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \sqrt{\mu(2c - a)} \\ y_2 &= x_2 - \sqrt{\mu(2c - a)} \\ y_3 &= x_3 - (2c - a) \end{aligned}$$

con este cambio de variables, el sistema de Chen queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= c(y_2 - y_1) - \left(\sqrt{\frac{2a^3}{c} + 5ac + 2c^2 - 7a^2 + y_1} \right) y_3 \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{c} \left(2a^2 y_3 - c^2 y_3 + c \left(\sqrt{\frac{2a^3}{c} + 5ac + 2c^2 - 7a^2 y_2 + y_1} \right) \left(\sqrt{\frac{2a^3}{c} + 5ac + 2c^2 - 7a^2 + y_2} \right) - \right. \end{aligned}$$

Ahora, el punto de equilibrio es el origen, los valores propios son los mismos y los vectores propios asociados a los valores propios son: para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\mu(2c - a)} \\ a\sqrt{\mu(2c - a)} \\ w_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ w_0\sqrt{\mu(2c - a)} \\ -w_0(a - c) \end{pmatrix}$$

y para $\lambda = \lambda_0$ tenemos que

$$v_2 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\mu(2c - a)} \\ (a + \lambda_3)\sqrt{\mu(2c - a)} \\ -(\lambda_3^2 + \lambda_3(a - c)) \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz que necesitamos para llevar el sistema a la forma de Jordan, la cual está dada en términos de los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a\sqrt{\mu(2c - a)} & a\sqrt{\mu(2c - a)} \\ w_0\sqrt{\mu(2c - a)} & a\sqrt{\mu(2c - a)} & (a + \lambda_3)\sqrt{\mu(2c - a)} \\ -w_0(a - c) & w_0^2 & -(\lambda_3^2 + \lambda_3(a - c)) \end{pmatrix}$$

Ya con la matriz cambio de base, calculamos su inversa, la cual no se presenta debido a lo extenso que es. Haciendo los cálculos correspondientes, es decir, desarrollando la expresión

$$J = P^{-1}AP$$

tenemos que la matriz del sistema en forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2} & 0 \\ \sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2a(a-2c)}{c} \end{pmatrix}.$$

A continuación, ortogonalizaremos la variedad central y la variedad estable, el cambio de variables que necesitamos nos lo da la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= a\sqrt{\frac{2a^3}{c} + 5ac + 2c^2 - 7a^2}(w + z_2) \\ y_2 &= \frac{\sqrt{\frac{2a^3}{c} + 5ac + 2c^2 - 7a^2} (2a^2w + c\sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2}z_1 + ac(z_2 - 3w))}{c} \\ y_3 &= -\frac{2a(2a^3 - 7a^2c + 5ac^2 + 2c^3)w}{c^2} - (a - c)\sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2}z_1 + (c^2 + 3ac - 2a^2)z_2 \end{aligned}$$

con este cambio de variable, el sistema nos queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2} & 0 \\ \sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2a(a-2c)}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde la f_{11} , f_{22} y f_{33} , representan a la parte no lineal del sistema en la forma de Jordan. Debido a lo extenso de estas expresiones, se omite la forma explícita de las mismas. De manera similar al caso anterior, calcularemos la expresión de la variedad central, la cual está dada por la expresión

$$w = h(z_1, z_2) = a_1z_2^2 + a_2z_1z_2 + a_3z_2^2$$

derivando, tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

y sustituyendo los datos que ya conocemos, los cuales son:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2}z_2 + f_{11}(z_1, z_2, w) \\ \dot{z}_2 &= \sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2}z_1 + f_{22}(z_1, z_2, w) \\ \dot{w} &= \frac{2a(a-2c)}{c}w + f_{33}(z_1, z_2, w) \end{aligned}$$

obtenemos la expresión de la variedad central, la cual no se presenta explícitamente debido a que es muy extensa. Ahora, conociendo la expresión de la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por la expresión

$$L = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0R_2) \quad (5.3)$$

con

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{c^2 + 3ac - 2a^2} \\ R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\ &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\ R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\ F_2 &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos correspondientes se tiene que la expresión del primer coeficiente de Lyapunov es:

$$l_1 = -\frac{a^2(c^2 + 3ac - 2a^2)^2(2a^5 - 12a^4c + 16a^3c^2 + a^2c^3 - 3ac^4 - 4c^5)}{8(a^4 - 4a^3c + 2a^2c^2 + 3ac^3 + c^4)(4a^4 - 16a^3c + 14a^2c^2 + 3ac^3 + c^4)}$$

Haciendo un análisis gráfico del primer coeficiente de Lyapunov se concluye que dentro de la región factible, este se hace cero, además que presenta cambios de signo entre las rectas en las cuales se hace cero, la figura 5.4 muestra la región de factibilidad, así como, el signo del primer coeficiente de Lyapunov.

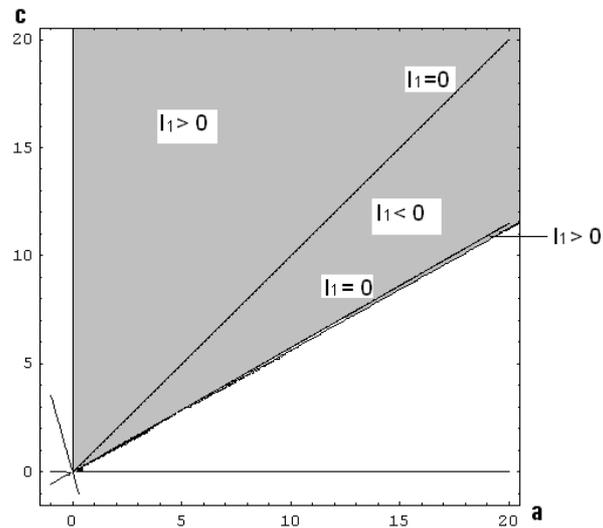


Figura 5.4: Signos del Primer Coeficiente de Lyapunov

En las figuras 5.5 y 5.6, se presenta la simulación de la órbita periódica atractora que presenta el sistema, así como, la simulación del punto de equilibrio estable que resulta al pasar a través del valor crítico del parámetro de bifurcación.

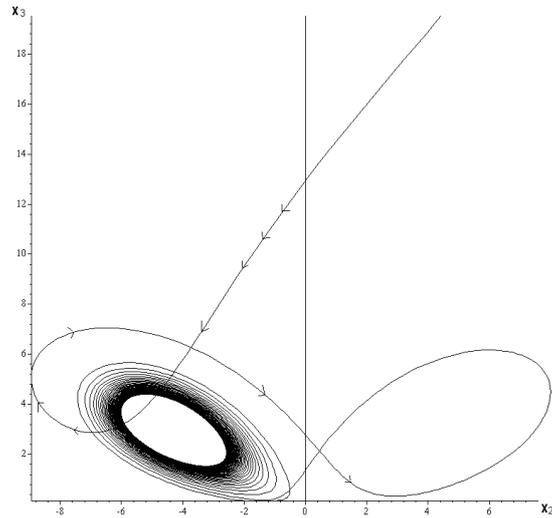


Figura 5.5: Órbita Periódica Estable con $a = 5$, $c = 4$, y $\mu = 6.4$

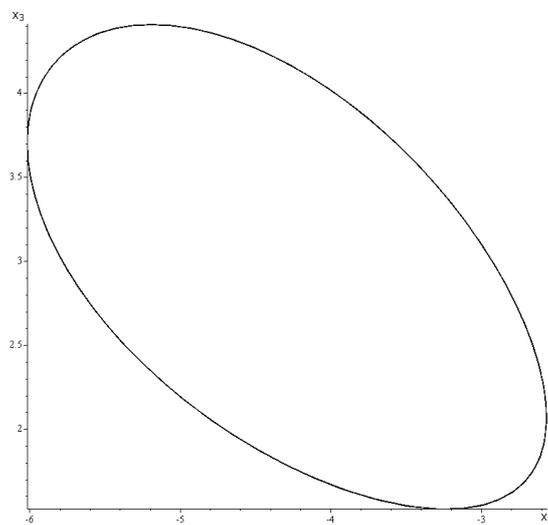


Figura 5.6: Órbita Periódica Estable con $a = 5$, $c = 4$, y $\mu = 6.4$

5.3 Caso III: $c = \mu$, y (a, b) Parámetros de Control

Bajo estas condiciones, el sistema de Chen queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (\mu - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

Haciendo los mismos cálculos que en el caso anterior, encontramos que los puntos de equilibrio para éste sistema son:

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{b(2\mu - a)}, \sqrt{b(2\mu - a)}, 2\mu - a) \\ P_3 &= (-\sqrt{b(2\mu - a)}, -\sqrt{b(2\mu - a)}, 2\mu - a)\end{aligned}$$

5.3.1 Análisis de Estabilidad en Puntos de Equilibrio No-Hiperbólicos

La matriz jacobiana asociada a éste sistema es:

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\mu \end{pmatrix}$$

Análisis en el Punto de equilibrio $P_1 = (0, 0, 0)$.

Iniciamos nuestro análisis en el origen. La matriz jacobiana evaluada en éste punto de equilibrio es:

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ \mu - a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

y sus valores propios son los:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(\mu - a + \sqrt{\mu^2 + 6a\mu - 3a^2}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(\mu - a - \sqrt{\mu^2 + 6a\mu - 3a^2}) \\ \lambda_0 &= -b\end{aligned}$$

Para colocar los valores propios en el eje imaginario necesitamos que $\mu - a = 0$, y esto lo logramos haciendo $\mu = a$, pero con esta condición, no podemos conseguir que $\mu^2 + 6a\mu - 3a^2 < 0$, por lo que no tendremos ningún valor propio complejo, de esto concluimos que en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf.

Análisis en el Punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{b(2\mu - a)}, \sqrt{b(2\mu - a)}, 2\mu - a)$

Siguiendo con nuestro análisis, veamos ahora qué ocurre en P_2 . Primeramente veremos qué condiciones deben de cumplir los parámetros de control para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$. Observemos que, para que $P_2 \in \mathbb{R}^3$, $2\mu - a > 0$. Observamos que:

$$2\mu - a > 0 \implies \mu > \frac{1}{2}a \quad (5.4)$$

también se observa que μ debe ser positiva, por lo que más adelante concluiremos con este análisis.

Ahora, evaluando la matriz jacobiana en éste punto de equilibrio tenemos:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -\mu & \mu & -\sqrt{b(2\mu - a)} \\ \sqrt{b(2\mu - a)} & \sqrt{b(2\mu - a)} & -b \end{pmatrix}$$

No perdamos de vista que buscamos valores para μ que satisfagan las condiciones (2.10), haciendo los cálculos correspondientes, encontramos los siguientes valores de μ que cumplen con las condiciones anteriores

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}(b - 3a + \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2}) \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(b - 3a - \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2}) \end{aligned}$$

Haciendo un análisis, se observó que para los dos valores de μ la jacobiana posee un par de valores propios con parte real igual a cero, entonces, enfocaremos nuestro estudio sólo para el valor de μ_1 . Veremos, qué condiciones deben de cumplir los parámetros de control para que $\mu_1 > 0$, primero:

$$17a^2 - 6ab + b^2 \geq 0 \implies 8a^2 + (3a - b)^2 \geq 0.$$

Lo cual se cumple para todo a y b .

Por otro lado,

$$\frac{1}{2}(b - 3a + \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2}) > 0 \implies b - 3a + \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2} > 0 \implies \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2} > 3a - b$$

como podemos observar, si $3a - b < 0$, el resultado es trivial. Ahora, si $3a - b > 0$, es decir, $b < 3a$, entonces,

$$17a^2 - 6ab + b^2 > 9a^2 - 6ab + b^2 \implies 8a^2 > 0$$

y esto, como podemos observar, se cumple para todo valor de a y b .

Veremos bajo qué condiciones se cumple (5.4). Obsérvese que

$$\frac{1}{2}(b - 3a + \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2}) > \frac{1}{2}a \implies \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2} > 4a - b$$

observemos que si $4a - b < 0$, el resultado es trivial. Ahora, si $4a - b > 0$ entonces,

$$17a^2 - 6ab + b^2 < 16a^2 - 8ab + b^2 \implies a^2 + 2ab > 0$$

Concluimos entonces que la región de factibilidad es el primer cuadrante del plano de los parámetros de control.

Entonces, teniendo ya el valor de μ_0 , buscamos los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en $\mu_0 = \mu_1$. Utilizando las fórmulas (2.11) Y (2.12) se tiene que los valores propios son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i\sqrt{b\mu} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{b\mu} \\ \lambda_0 &= \mu - a - b\end{aligned}$$

Recordemos que también necesitamos que $\lambda_0 < 0$, es decir, $\mu - a - b < 0$, haciendo el análisis correspondiente se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu - a - b < 0 &\implies \mu > a + b \implies \frac{1}{2}(b - 3a + \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2}) < a + b \\ &\implies \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2} < 5a + b \implies 0 < 8a^2 + 16ab\end{aligned}$$

por lo que se concluye que $\lambda_0 < 0$ para $\mu = \mu_1$.

Al igual que en los casos anteriores, analizaremos como se comporta la velocidad de cruce de estos valores propios complejos, la cual está dada por la expresión (2.9):

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L_3'(\mu_0) - \omega_0^2 L_1'(\mu_0) + \lambda_0 L_2'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

para nuestro caso

$$\begin{aligned}L_1(\mu) &= a + b - \mu \\ L_2(\mu) &= b\mu \\ L_3(\mu) &= 4ab\mu - 2a^2b\end{aligned}$$

haciendo los cálculos correspondientes, se tiene que la velocidad de cruce de los valores propios está dada por la expresión:

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{b\sqrt{17a^2 - 6ab + b^2}}{21a^2 + 2b^2 - a(b + 5\sqrt{17a^2 - 6ab + b^2})}$$

y mediante un simple análisis podemos observar que nunca es cero y que siempre es positiva, por lo que concluimos que en el punto de equilibrio P_2 sí ocurre una bifurcación de Hopf.

Ya teniendo los valores propios, podemos calcular los vectores propios asociados a estos valores propios, los cuales necesitamos para construir la matriz en forma de Jordan; haciendo los cálculos correspondientes, se determinan los eigenvectores, los cuales son:

para $\lambda = \lambda_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a\sqrt{b(2\mu - a)} \\ a\sqrt{b(2\mu - a)} \\ w_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ w_0\sqrt{b(2\mu - a)} \\ -w_0(a - \mu) \end{pmatrix}$$

y para $\lambda = \lambda_0$ tenemos que

$$v_2 = \begin{pmatrix} a\sqrt{b(2\mu - a)} \\ (a + \lambda_3)\sqrt{b(2\mu - a)} \\ -(\lambda_3^2 + \lambda_3(a - \mu)) \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz que necesitamos para llevar el sistema a la forma de Jordan, la cual esta dada en términos de los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a\sqrt{b(2\mu - a)} & a\sqrt{b(2\mu - a)} \\ w_0\sqrt{b(2\mu - a)} & a\sqrt{b(2\mu - a)} & (a + \lambda_3)\sqrt{b(2\mu - a)} \\ -w_0(a - \mu) & w_0^2 & -(\lambda_3^2 + \lambda_3(a - \mu)) \end{pmatrix}$$

Ya con la matriz cambio de base, calculamos su inversa, la cual no se presenta debido a lo extenso que es. Haciendo los cálculos correspondientes, es decir, desarrollando la expresión

$$J = P^{-1}AP$$

tenemos que la matriz del sistema en forma de Jordan queda de la siguiente manera

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b\mu} & 0 \\ \sqrt{b\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - a - b \end{pmatrix}$$

Acontinuación, lo que haremos es ortogonalizar la variedad central y la variedad estable, el cambio de variables que necesitamos nos lo da la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}$$

de la siguiente manera, definimos

$$\begin{aligned}
y_1 &= a\sqrt{b(b-4a+\sqrt{17a^2-6ab+b^2})}(w+z_2) \\
y_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{b(b-4a+\sqrt{17a^2-6ab+b^2})}\left(-3aw-bw+\sqrt{17a^2-6ab+b^2}w\right. \\
&\quad \left.+\sqrt{2}\sqrt{b(b-3a+\sqrt{17a^2-6ab+b^2})}z_1+2az_2\right) \\
y_3 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sqrt{17a^2-6ab+b^2}\sqrt{b(b-3a+\sqrt{17a^2-6ab+b^2})}z_1-2b^2(w-z_2)\right. \\
&\quad \left.-a\left(10bw+5\sqrt{2}\sqrt{b(b-3a+\sqrt{17a^2-6ab+b^2})}z_1+6bz_2\right)\right. \\
&\quad \left.+b\left(2\sqrt{17a^2-6ab+b^2}w+\sqrt{2}\sqrt{b(b-3a+\sqrt{17a^2-6ab+b^2})}z_1\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+2\sqrt{17a^2-6ab+b^2}z_2\right)\right)
\end{aligned}$$

con este cambio de variable, el campo nos queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b\mu} & 0 \\ \sqrt{b\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde (f_{11}, f_{22}, f_{33}) representan a la parte no lineal del sistema en la forma de Jordan, y debido a lo extenso de estas expresiones, se omite la forma explícita de las mismas. De manera similar al caso anterior, calcularemos la expresión de la variedad central, la cual está dada por la expresión

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_2^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_1^2$$

derivando, tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2.$$

Sustituyendo los datos que ya conocemos, los cuales son:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\sqrt{b\mu}z_2 + f_{11}(z_1, z_2, w) \\
\dot{z}_2 &= \sqrt{b\mu}z_1 + f_{22}(z_1, z_2, w) \\
\dot{w} &= (\mu-a-b)w + f_{33}(z_1, z_2, w)
\end{aligned}$$

obtenemos la expresión de la variedad central; la cual no se presenta explícitamente debido a que es muy extensa.

Ahora, conociendo la expresión de la variedad central, podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov, el cual está dado por la expresión

$$l_1 = \frac{1}{16w_0}(R_1 + w_0 R_2) \quad (5.5)$$

con

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sqrt{b\mu} \\
 R_1 &= (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) \\
 &\quad - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0} \\
 R_2 &= (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_1 &= f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2)) \\
 F_2 &= f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2))
 \end{aligned}$$

Desarrollando los cálculos correspondientes se obtiene el primer coeficiente de Lyapunov, el cual no se presenta debido a lo extenso que es.

Haciendo un análisis gráfico de la expresión del primer coeficiente de Lyapunov, se observa que éste se hace cero en dos rectas en el plano de los parámetros y que se presentan cambios de signo en el mismo para valores de los parámetros de control entre estas rectas, la figura 5.7 muestra el signo del primer coeficiente de Lyapunov dentro del primer cuadrante.

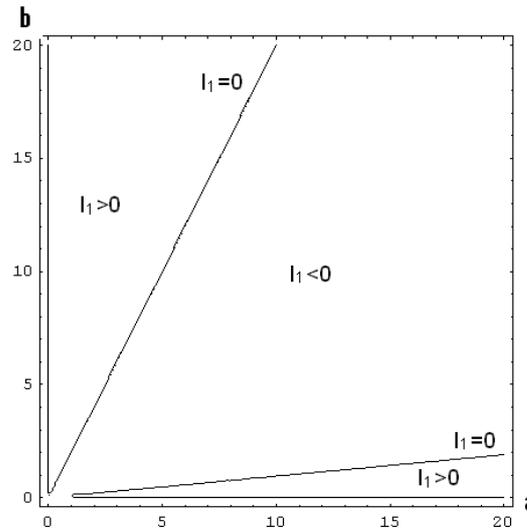


Figura 5.7: Signos del Primer Coeficiente de Lyapunov

Ahora, como la velocidad de cruce es negativa, se espera que para $\mu > \mu_0$, aparezca una órbita periódica atractora, así como también para $\mu = \mu_0$ se espera la bifurcación de Hopf degenerada, es decir, se espera un centro de órbitas periódicas, las figuras 5.8 y 5.9, muestran la simulación para cada uno de los casos de comportamientos esperados.

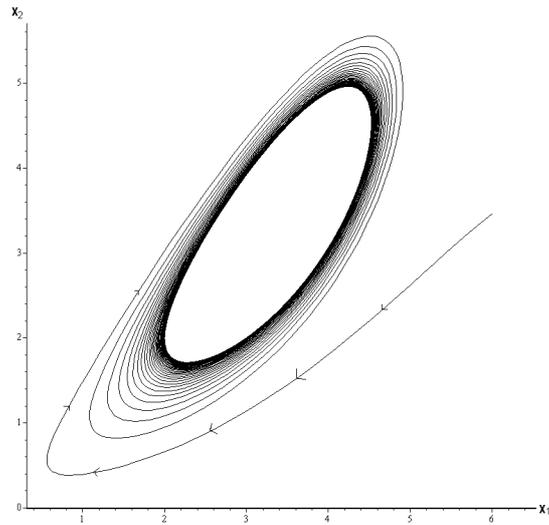


Figura 5.8: Órbita Periódica Atractora para $a = 5$, $b = 5$ y $\mu = 3.7$, siendo $\mu_0 = 3.6$

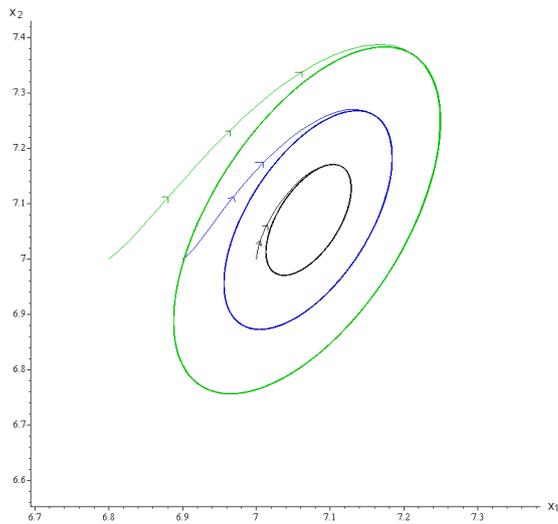


Figura 5.9: Bifurcación de Hopf Degenerada para $a = 5$, $b = 10$ y $\mu = \mu_0 = 5$

5.4 Resultado Principal

Resumimos los resultados obtenidos en esta capítulo en el siguiente

Teorema 5.1. *Considere el sistema de Chen*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

Si se considera cualquiera de los parámetros del sistema como parámetro de bifurcación, y el resto como parámetros de control, es posible encontrar puntos en el plano de los parámetros de control en los cuales el sistema sufre la bifurcación de Hopf subcrítica, supercrítica y degenerada.

Conclusión

En el trabajo que se ha presentado, se estudiaron las condiciones que deben satisfacer los parámetros que poseen los tres sistemas estudiados, para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf, ya sea subcrítica, supercrítica o degenerada, se ubicaron las regiones de factibilidad en el plano de los parámetros de control y se determinó el signo que posee el primer coeficiente de Lyapunov en dichas regiones de factibilidad, siendo los resultados los siguientes: en los primeros tres capítulos se presentó una breve reseña de los sistemas de Lü, de Lorenz y de Chen, así como los resultados matemáticos que se utilizaron para llevar a cabo este estudio, en el capítulo 4 se estudió el sistema de Lü, observándose que existe una región en el plano de los parámetros de control, en la cual siempre es posible que ocurra la bifurcación de Hopf en sus tres modalidades, subcrítica, supercrítica y degenerada, se observó también que dentro de esta región de factibilidad no es posible impedir la ocurrencia de la bifurcación de Hopf.

En el capítulo 5 se estudió el sistema de Lorenz, en este sistema también se encontró una región en el plano de los parámetros de control donde siempre ocurre la bifurcación de Hopf, a diferencia del sistema de Lü, en el sistema de Lorenz sólo puede ocurrir la bifurcación de Hopf subcrítica, es decir, las órbitas periódicas que se presentan son inestables, este resultado nos permite ver una clara diferencia entre el sistema de Lü y el sistema de Lorenz.

Por último, en el capítulo 6 se estudió al sistema de Chen, encontrando también que en el plano de los parámetros de control siempre es posible encontrar una región de factibilidad donde ocurre la bifurcación de Hopf, presentándose ésta en sus tres modalidades, subcrítica, supercrítica y degenerada. En todos los sistemas se presentan gráficas que nos permiten ver el comportamiento de los sistemas y la dinámica que estos presentan, corroborando así, los resultados algebraicos que se dan.

Bibliografía

- [1] Guanrong Chen, *On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol 12, No. 8 (2002) 1789-1812.
- [2] Jinhu Lü, Guanrong Chen, *Bridge the gap between the Lorenz system and Chen system*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol 12, No. 12 (2002) 2917-2926.
- [3] Jinhu Lü, Guanrong Chen, *A new chaotic attractor coined*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol 12, No.3(2002) 659-661.
- [4] Jinhu Lü, Guanrong Chen, Suochun Zhang, *Dynamical analysis of a new chaotic attractor*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 12, No. 5 (2002) 1001-1015.
- [5] Jinhu Lü, Guanrong Chen, Suochun Zhang, *The compound structure of a new chaotic attractor*, Chaos, Solitons and Fractals 14 (2002) 669-672.
- [6] Yongguang Yu, Suochun Zhang, *Hopf bifurcation analysis of Lü system*, chaos, solitons and fractals 21 (2002) 1215-1220.
- [7] Vanecek A, Celikovský S. *Control System: from linear analysis to synthesis of chaos*. London: Prentice-Hall; 1996.
- [8] J.E.Marsden, M.McCracken, *The Hopf bifurcation and it applications*, Springer-Verlag New York 1976.
- [9] Carmen Chicone, *Ordinary differrential ecuations with applications*, Springer.
- [10] Lawrence Perko, *Differentisl ecuations and dynamical systems*, Second Edition Springer, (2001).
- [11] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag.