UNIVERSIDAD DE SONORA

Escuela de Altos Estudios

REPRESENTACIONES DISTINTAS Y CUADRADOS LATINOS

TESIS

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presenta

José Luis Díaz Gómez

Hermosillo, Sonora

Julio de 1979

Dedíco este trabajo de tésis:

A mis padres, hermanos, esposa y a mis hijos, con el amor y afecto que se merecen.

Al matemático Enrrique Valle Flores, por la sugerencia del tema con gran reconocimiento, estimación y respeto.

Al matemático Fernando Avila M., por su generosa asesoría y constante estímulo durante la preparación de la tésis.

Al matemático Marco Antonio Valencia A. por la valiosa ayuda que me brindó al revizar la tésis.

Al Gato Negro.

Al pueblo de Sonora.

I N D I C E

INTRODUCCION

Leonhard Euler (1707-1783)escribió,en los últimos años de su vida, una voluminosa memoria acerca de un tipo de cuadrados mágicos llamada "Recherches sur une nouvelle espéce de carrés magiques".Hoy se les dá a estas estructuras matemáticas el nombre de cuadrados latinos,debido a que Euler tenía la costumbre de nombrar sus casillas con letras latinas y no con las del alfabeto griego .La última frase de la memoria de Euler dice:"interrumpo aquí mis investigaciones sobre una cuestión,que aunque de escasa utilidad por sí misma,nos ha conducido a importantes observaciones en la teoría combinatoria y en la teoría general de los cuadrados mágicos".

Las investigaciones a las que Euler no concedió importancia han resultado de enorme valor en la teoría y planificación de experimentos controlados .

Sir Ronald Fisher (1890-1962),profesor de genética y una de las máximas autoridades en estadística,fué el primero en poner de manifiesto la utilidad de los cuadrados latinos en las investigaciones agrónomicas .

En este trabajo se presenta un teorema de P.Hall referente a la existencia de un conjunto de representantes distintos de subconjuntos de un conjunto ; los resultados obtenidos se aplican a la construcción de cuadrados latinos de orden nxn .Estas estructuras matemáticas son utilizadas en el diseño de experimentos controlados,de los cuales se presentan tres ejemplos .Después,se efectúa una discusión del teorema de P.Hall en tres contextos diferentes y se presentan nuevos resultados matemáticos obtenidos a partir del teorema.

La organización de la tésis es como sigue;

En el capítulo I se estudia la teoría de representaciones distintas de subconjuntos y el teorema original de existencia de un CRD de P.Hall ; después, utilizando el concepto de bloque, se da una nueva demostración del teorema de P.Hall y una generalización obtenida por M.Hall que incluye una cota inferior sobre el número de CRD de un sistema finito de subconjuntos.

En el capítulo II se definen los conceptos de cuadrado y rectángulo latino ; se demuestra un teorema que permite construir un cuadrado latino nxn a partir de un rectángulo latino de orden (n-r)xn y se muestra una generalización que permite construir un cuadrado latino nxn partiendo de un rectángulo latino hxc ; además, se obtienen cotas inferiores y superiores sobre el número de cuadrados latinos nxn distintos.

En el capítulo III se presentan algunas aplicaciones de los cuadrados latinos en el diseño de experimentos :la distribución en cuadrado latino, cuadrado latino modificado y cuadrado greco-latino .Se incluye el análisis de varianza para dos experimentos agrícolas .La inclusión de este tema es con el fin de mostrar cómo un problema que originalmente era recreativo, pudo convertirse en un poderoso auxiliar en temas de matemáticas aplicadas, en este caso, de Estadística Matemática y Diseño de Experimentos. El capítulo es más descriptivo que los restantes y se omiten las demostraciones de los métodos estadísticos .

En el capítulo IV se retoma el problema original sobre la existencia de un CRD y se reformula en tres lenguajes distintos :el de combinatoria, el de gráficas y el de transversales .Esto permite actualizar el problema y obtener nuevos resultados .

En el capítulo V se obtiene una aplicación del teorema de P.Hall al álgebra lineal ;se discuten de nuevo los teoremas de P.Hall y M.Hall en términos de transversales,incluyendo una aplicación a problemas de horarios,y se obtiene una conexión entre la teoría de matroides y la teoría de transversales .Se muestra además un algoritmo que genera un CRD o exhibe k conjuntos que violan la condición de existencia de un CRD.

Con estos dos últimos capítulos,damos una visión actualizada de los temas matemáticos surgidos a partir del teorema de P.Hall,redondeando y extendiendo el problema original del cual surgió esta tésis.

CAPITULO I

REPRESENTACIONES DISTINTAS DE SUBCONJUNTOS

1.1 TEOREMA DE P.HALL

Sea S cualquier conjunto y

$$(1.1) \qquad C_1 , C_2 , \dots , C_m ,$$

cualquier sistema finito de subconjuntos de S . Estamos interesados en la existencia de un Conjunto de Representantes Distintos del sistema finito (1.1), el cual abreviamos como un CRD , entendiendo por un CRD lo siguiente:

DEFINICION 1.1.1 . Un conjunto de Representantes Distintos del sistema finito (1.1), es un conjunto de m elementos distintos del conjunto S

$$(1.2) \qquad c_1 , c_2 , \dots , c_m ,$$

tal que $$c_i \in C_i .$$

Diremos que c_i representa a C_i y escribiremos, cuando sea necesario, $c_i = R(C_i)$. No es necesario que los conjuntos C_i sean finitos o que sean distintos unos de otros. Los subconjuntos se distinguen sólo por sus índices.

EJEMPLO 1.1.1 . Considérese el siguiente conjunto,

$$S = \{1,2,3,4,5,6\},$$

y el siguiente sistema finito de subconjuntos del conjunto S :

$$C_1 = \{ 1,2 \}$$

$$C_2 = \{ 1,3 \}$$

$$C_3 = \{ 4,5 \}$$

(1.3) $$C_4 = \{ 4,5 \}$$

$$C_5 = \{ 5,6 \} ;$$

un CRD para el sistema finito (1.3) es el siguiente :

$$c_1 = 1 , c_2 = 3 , c_3 = 4 , c_4 = 5 , c_5 = 6 .$$

Otro ejemplo de un CRD para el mismo sistema (1.3) es :

$$s_1 = 2 , s_2 = 3 , s_3 = 5 , s_4 = 4 , s_5 = 6 .$$

Si el sistema finito de subconjuntos de S es

$$D_1 = \{ 1,2 \}$$

$$D_2 = \{ 1,2 \}$$

(1.4) $$D_3 = \{ 1,2 \}$$

$$D_4 = \{ 3,4,5 \}$$

$$D_5 = \{ 3,4,5 \}$$

es imposible seleccionar un CRD para el sistema (1.4), ya que no es posible escoger tres números distintos para los subconjuntos D_1 , D_2 , D_3 puesto que su unión sólo contiene dos números distintos, que son el 1 y el 2.

Comparando los resultados obtenidos con los sistemas (1.3) y (1.4) , nos preguntamos : ¿ bajo que condiciones un sistema finito de subconjuntos C_i , $i = 1,2, \ldots , m$, de un conjunto S, posee un CRD ?.

Es obvio que si existe un CRD , entonces cualquier selección de k de los conjuntos del sistema finito contiene al menos k elementos distintos del conjunto S, pues de otra manera sería imposible encontrar representantes distintos para esos k conjuntos.

EJEMPLO 1.1.2. Una firma comercial tiene un cierto número de empleos vacantes de varios tipos y también un grupo de solicitantes para llenarlos .Cada una de estas personas está capacitada para algunos trabajos de los necesitados, y entonces se plantea la siguiente pregunta: ¿ Es posible asignar a cada persona un puesto para el cual esté capacitada ? .

Una forma de resolver el problema es la siguiente : Formar un sistema de subconjuntos de solicitantes agrupados según sus capacidades y tomar un representante distinto de cada subconjunto para asignarlo al empleo para el cual está capacitado.

Es claro que no siempre puede esperarse que se tenga un trabajo apropiado para cada solicitante . Debe haber por lo menos tantos empleos como subconjuntos de solicitantes tomemos . Pero imaginemos que el conjunto S de solicitantes está formado por tres solicitantes : dos carpinteros y uno que es plomero y carpintero, y que hay cuatro empleos vacantes para estos tres hombres : uno en carpintería y tres en plomería . Si formamos un sistema de tres subconjuntos de solicitantes y tomamos un representante distinto de cada subconjunto para asignar a cada empleo, entonces claramente uno de los carpinteros se quedará sin trabajo y dos puestos de plomero quedarán vacantes dado que sólo se pueden tomar dos representantes distintos de los tres subconjuntos.

En conclusión, si del conjunto S de solicitantes formamos m subconjuntos de solicitantes, entonces para poder resolver nuestro problema de asignación de empleos debe satisfacerse la siguiente condición :

Si se toma una selección de k subconjuntos de solicitantes k = 1,2, 3,...,m ,entonces debe haber al menos k solicitantes distintos y k empleos distintos para los cuales, en conjunto, estén capacitados.

En vista de las conclusiones de los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2, puede afirmarse que una condición necesaria para la existencia de representaciones distintas es la siguiente:

CONDICION C . Toda selección de k ($\leq m$) subconjuntos distintos de (1.1), contiene al menos k elementos distintos del conjunto S .

Se pretende demostrar que si el número de subconjuntos es finito , esta condición es suficiente para la existencia de un CRD .

TEOREMA 1.1.1 . Para que un CRD de (1.1) exista, es suficiente que para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, cualquier selección de k subconjuntos del sistema (1.1) contenga al menos k elementos distintos del conjunto S .

Antes de demostrar el teorema probemos el siguiente lema.

LEMA 1.1.1 . Si (1.2) es cualquier CRD de (1.1) y si la intersección de todos los CRD de (1.1) es el conjunto

$$R = \{ c_1 , c_2 , \ldots , c_e \} ,$$

donde e puede ser 0, i.e. R el conjunto vacío, entonces la unión de los e conjuntos

$$C_1 , C_2 , \ldots , C_e$$

contiene exactamente e elementos, a saber, los elementos de R.

Por definición, R es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto S que aparecen como representantes de algún C_i en todo CRD de (1.1) .

Para demostrar el lema, consideremos el conjunto R' formado por todos los elementos c del conjunto S que satisfacen la siguiente propiedad: existe una sucesión de subíndices

$$i, j, k, \ldots , \ell', \ell$$

tal que

$$\begin{aligned} c &\in C_i \\ c_i &\in C_j \\ c_j &\in C_k \\ &\cdots \\ c_{\ell'} &\in C_\ell \end{aligned}$$

y además $\ell \leq e$.

Primero demostraremos que todo elemento c *de* R' *pertenece a* (1.2). *Si no fuera así, reemplazando en* (1.2)

$$c_i\ ,\ c_j\ ,\ c_k\ ,\ \ldots\ ,\ c_\ell$$

por

$$c\ ,\ c_i\ ,\ c_j\ ,\ \ldots\ ,\ c_{\ell'}\ ,$$

respectivamente, tendríamos un nuevo CRD de (1.1) *que no contendría a* $c_{\ell'}$ *y por lo tanto* c_ℓ *no pertenecería a* R, *lo que contradiría* $\ell \leq e$.

No habrá pérdida de generalidad si suponemos que

$$R' = \{ c_1\ ,\ c_2\ ,\ \ldots\ ,\ c_w \}$$

con $w \geq e$, *pues si* $c_i \in R$ *entonces* $c_i \in R'$. *Es decir, tenemos que* $R' \supset R$.

Tomemos ahora cualquier $c \in C_i$ *para* $i \leq w$. *El correspondiente* $c_i \in R'$ *y entonces existe una sucesión de índices* $j\ ,\ k\ ,\ \ldots\ ,\ \ell$ *con* $\ell \leq e$ *tales que*

$$\begin{aligned} c_i &\in C_j \\ c_j &\in C_k \\ &\cdots \\ c_{\ell'} &\in C_\ell \end{aligned}$$

y esto, junto con $c \in C_i$, *demuestra que* $c \in R'$ *y entonces* $c_i \in R'$ *para* $i \leq w$.

De aquí se concluye que $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_w$ *tiene exactamente* w *elementos, que son los de* R' . *Estos elementos deben representar a* $C_1, C_2, \ldots, C_w$

en cualquier CRD y entonces $R \supset R'$. Por lo tanto,

$$R = R'$$

$$e = w$$

$$R = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_w \quad .$$

Esta es la afirmación del lema . ///

La demostración del teorema 1.1.1 se seguirá por inducción sobre m. El caso m = 1 es trivial.

Supondremos ahora que cualquier selección de k conjuntos del sistema (1.1) contiene al menos k elementos distintos del conjunto S y también que el teorema es válido para m-1 conjuntos . Podemos, por lo tanto, aplicar el teorema a los m-1 conjuntos

(1.5) $$C_1 \ , \ C_2 \ , \ \ldots \ , \ C_{m-1}$$

que tienen al menos un CRD de acuerdo con el teorema. De aquí se sigue que (1.1) tendrá al menos un CRD probando únicamente que C_m no está contenido en todo CRD de (1.5) .

Pero si (sin perder generalidad)

$$R^* = \{ c_1 \ , \ c_2 \ , \ \ldots \ , \ c_e \} \qquad (e > 0)$$

es la intersección de todos los CRD de (1.5) y si C_m está contenido en R^* entonces, por el lema 1.1.1, la unión de los k = e + 1 conjuntos

$$C_1 \ , \ C_2 \ , \ \ldots \ , \ C_e \ , \ C_m$$

contendrá sólo e elementos, que serán los elementos de R^* . Esto es contrario a la hipótesis y por lo tanto C_m no está contenido en R^* ; y así, si c_m es cualquier elemento de C_m que no está contenido en R^* ; existe un CRD de (1.5) en el cual no aparece c_m . Este CRD de (1.5), junto con c_m constituye el deseado CRD de (1.1) . ///

1.2 BLOQUES Y BLOQUES CRITICOS

DEFINICION 1.2.1 . Un bloque $B_{r,s}$ es un sistema finito de r subconjuntos de (1.1) donde s es el número de elementos distintos de estos r conjuntos .

Supondremos que todo subconjunto C_i de cualquier bloque $B_{r,s}$ contiene sólo un número finito de elementos y también que la condición C es equivalente a la condición $s \geq r$ para cualquier bloque $B_{r,s}$.

Si en un bloque $s = r$, decimos que el bloque $B_{r,s}$ es un bloque crítico. Por convención, se considerará al bloque vacío $B_{0,0}$ como un bloque crítico.

Definiremos también la unión e intersección de bloques . Supongamos que A_1 , A_2 , ... , A_m , C_{m+1} , ... , C_r son los subconjuntos del bloque $B_{r,s}$ y que A_1 , A_2 , ... , A_m , D_{m+1} , ... , D_t son los subconjuntos del bloque $B_{t,v}$. Entonces definimos la intersección $B_{r,s} \cap B_{t,v}$ como el bloque cuyos elementos son A_1 , A_2 , ... , A_m y la unión $B_{r,s} \cup B_{t,v}$ como el bloque cuyos elementos son A_1, A_2 , ... , A_m , C_{m+1} , ... , C_r , D_{m+1} , ..., D_t.

L E M A . 1.2.1 . La unión $B_{k,k} \cup B_{\ell,\ell}$ y la intersección $B_{k,k} \cap B_{\ell,\ell}$ de bloques críticos, son también bloques críticos .

DEMOSTRACION . Dados los bloques críticos $B_{k,k}$, $B_{\ell,\ell}$, sea $B_{k,k} \cap B_{\ell,\ell} = B_{r,s}$ y $B_{k,k} \cup B_{\ell,\ell} = B_{u,v}$.

Si C_1 , ... , C_r y a_1 , ... , a_s son los subconjuntos y elementos de $B_{r,s}$; entonces $s \geq r$. En el bloque $B_{u,v}$ tenemos que $u = k + 1 - r$ y a lo más $k + 1 - s$ elementos distintos . Por lo tanto $k + 1 - s \geq v \geq u = k + 1 - r$ y entonces $s = r$ y $v = u$, de donde $B_{r,s}$ y $B_{u,v}$ son bloques críticos. ///

LEMA . 1.2.2 . Si $B_{k,k}$ es un bloque crítico, la eliminación de elementos del bloque crítico en conjuntos que no pertenecen al bloque crítico deja válida la condición C.

DEMOSTRACION . Sea $B_{r,s}$ cualquier bloque. Demostraremos que si $B'_{r,s'}$ es el bloque después de la eliminación, entonces $s' \geq r$.

Sea $B_{k,k}$ un bloque crítico tal que $B_{r,s} \cap B_{k,k} = B_{u,v}$ y $B_{r,s} \cup B_{k,k} = B_{y,z}$. Si A_1 , A_2 , ... , A_m , C_{m+1} , ... , C_r son los subconjuntos de $B_{r,s}$ y A_1 , A_2 , ... , A_m , D_{m+1} , ... , D_k son los subconjuntos de $B_{k,k}$ entonces los subconjuntos de $B_{u,v}$ son A_1 , A_2 , ... , A_m y los subconjuntos de $B_{y,z}$ son A_1 , A_2 , ... , A_m , C_{m+1} , ... , C_r , D_{m+1} , ..., D_k. Por lo tanto, los subconjuntos del bloque eliminado $B'_{r,s'}$ son A_1, A_2 , ... , A_m , C'_{m+1} , ... , C'_r :

Pero el bloque C_{m+1} , ... , C_r de la unión $B_{y,z}$ contiene $z-k$ elementos que no pertenecen al bloque crítico $B_{k,k}$. De aquí que $s' = v+z-k$, es decir, s' es la suma de los elementos de la intersección y los elementos del bloque C'_{m+1} , ... , C'_r . Como $y = r+k-u$, $z \geq y$, $v \geq u$ entonces tenemos que $s' = v+z-k$, $u+y-k = r$ y por lo tanto, $s' \geq r$ y así la condición C, después de la eliminación, sigue siendo válida .///

A continuación se dará una demostración del teorema 1.1.1 usando el concepto de bloque y los lemas demostrados.

Demostraremos el teorema usando inducción sobre el número de conjuntos m , siendo válido para $m = 1$. Supondremos que en el sistema (1.1) existe un bloque crítico $B_{k,k}$ que no es todo el sistema (1.1) ; esto es, $1 \leq k \leq m$. Eliminando los elementos del bloque $B_{k,k}$ en los subconjuntos restantes, el sistema (1.1) queda formado por dos bloques ajenos, que son el bloque $B_{k,k}$ y el bloque $B'_{m-k,v}$. Por el lema 1.2.2 ; la condición C sigue siendo válida y podemos suponer por inducción que $B_{k,k}$ y $B'_{m-k,\nu}$ tienen cada uno un CRD y como son ajenos, uniendolos forman un CRD para el sistema (1.1) .

Supongamos ahora que en el sistema (1.1) no existen bloques críticos, excepto todo el sistema (1.1). Seleccionemos un elemento arbitrario de cualquier conjunto como un representante y eliminémoslo de los otros conjuntos . En estas circunstancias, un bloque $B_{r,s}$ con $r \leqslant m$ se convierte en un bloque $B'_{r,s'}$ en el cual $s' = s$ ó $s' = s-1$. Pero, por suposición, $B_{r,s}$ no tiene bloques críticos y así $s \geqslant r+1$, de donde $s' \geqslant r$ y por lo tanto la condición C sigue siendo válida para los m-1 bloques, y de esta manera tenemos por inducción un CRD que junto con el representante seleccionado para el primer conjunto forma un CRD para todo el sistema (1.1).///

El siguiente corolario nos da un límite inferior sobre el número de CRD diferentes para el sistema (1.1).

COROLARIO. 1.2.1. Si el sistema (1.1) tiene un CRD y el menor de los subconjuntos contiene r elementos distintos entonces, si $r \geqslant m$, existen al menos $r(r-1) \ldots (r-m+1)$ CRD diferentes y si $r < m$, existen al menos $r!$ CRD diferentes .

DEMOSTRACION . Supondremos que en (1.1) existe un subconjunto C_i en el cual puede tomarse un elemento arbitrario como representante para un CRD . Si (1.1) no contiene bloques críticos podemos tomar un representante arbitrario de cualquier conjunto y eliminarlo sin violar la condición C. Pero si (1.1) contiene bloques críticos, esto es cierto para un bloque crítico mínimo; en este bloque un conjunto C_1 tiene la propiedad de que cualquier elemento puede elegirse como representante, y este representante puede elegirse en al menos r formas . Eliminando el representante elegido para C_1 de los subconjuntos C_2 , ... , C_m obtenemos los conjuntos C'_2 , .. . , C'_m que poseen un CRD y en el cual el menor de los conjuntos contiene al menos $r-1$ elementos. Continuando en esta forma tendremos al menos $r(r-1) \ldots (r-m+1)$ elecciones si $r \geq m$ y $r!$ si $r < m$. ///

En el teorema 1.1.1 se demuestra que si el número de subconjuntos es finito, la condición C es suficiente para la existencia de un CRD. Enseguida se dará una extensión del teorema 1.1.1 al caso en que el número de subconjuntos C_i sea infinito, aunque todo subconjunto C_i sea finito. Si el sistema de subconjuntos es infinito y además contiene conjuntos infinitos, la condición C no garantiza la existencia de un CRD. Por ejemplo, considérese el siguiente sistema infinito de subconjuntos del conjunto S :

$$C_0 , C_1 , \ldots ,$$

donde $C_0 = \{ c_1 , c_2 , \ldots \}$ $C_i = \{ c_i \}$ $i = 1 , 2 , \ldots$; la condición C es válida para este sistema pero ningún representante puede seleccionarse para C_0 que no sea también un representante de algún C_i. Por lo tanto en el teorema siguiente es necesaria la condición de que los conjuntos sean finitos.

TEOREMA 1.2.1 . Sea S cualquier conjunto y

$$(2.1) \qquad C_1 , C_2 , \ldots$$

un sistema infinito de subconjuntos finitos de S . Si el sistema (2.1) satisface la condición C para todo k finito, entonces existe un CRD del sistema (2.1).

DEMOSTRACION. La operación básica será la eliminación D de ciertos elementos en algunos conjuntos C_i , de tal manera que los conjuntos eliminados $C'_i \subseteq C_i$ cumplan la condición C. Estableciendo una ordenación parcial sobre eliminaciones, escribiremos $D_1 \subseteq D_2$ para las eliminaciones D_1 y D_2, si todo elemento eliminado por D_1 es también eliminado por D_2. Estamos interesados en eliminaciones que preservan la condición C. Si las eliminaciones $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots \subseteq D_i \subseteq \dots$ en cadena ascendente preservan la condición C, sea D la eliminación que consiste en eliminar un elemento b del conjunto S todas las veces que éste aparezca en cualquier D_i de la cadena. Afirmamos que D también preserva la condición C. Como r y s son finitos, en cualquier bloque $B_{r,s}$ sólo un número finito de eliminaciones en la cadena lo afectan y entonces hay una última eliminación D_n que lo afecta. Bajo esta eliminación D_n, el bloque $(B_{r,s})' = B'_{r,s'}$ satisface la condición C, ya que por hipótesis $s' \geqslant r$ y por lo tanto D preserva la condición C. Por el lema de Zorn, habrá para todas las eliminaciones que preservan la condición C un elemento maximal. Demostraremos que bajo una eliminación maximal que preserva la condición C todo conjunto eliminado C'_i contiene un elemento único y estos elementos forman un CRD para el sistema original (2.1).

Si hay un elemento c_1 que no pertenezca a un bloque crítico, eliminémoslo de todo conjunto C_i que lo contenga. Por este tipo de eliminación, un bloque $B_{r,s}$ es reemplazado por $B'_{r,s'}$, donde $s' = s$ si c_1 no es un elemento de cualquier conjunto de $B_{r,s}$ y $s' = s-1$ si c_1 es un elemento de algún conjunto de $B_{r,s}$. Como estamos suponiendo que $s > r$, tenemos que $s' > s-1 > r$ y por lo tanto, la condición C vale después de una eliminación de este tipo.

Si hay bloques críticos $B_{k,k}$, aplicamos el lema 1.2.2 eliminando los elementos del bloque crítico en conjuntos que no pertenezcan al bloque $B_{k,k}$ para que la condición C siga siendo válida. Por el teorema 1.1.1, un bloque crítico $B_{k,k}$, siendo finito, posee un CRD cuando la condición C es válida, y después de que estos elementos son eliminados de los demás conjun tos,los subconjuntos restantes satisfacen la condición C. Por lo tanto,para una eliminación maximal que satisface la condición C,todo elemento está en un bloque crítico y todo bloque crítico tiene un elemento único en cada conjunto. Así,para una eliminación maximal que preserva la condición C ,todo conjunto consta de un elemento único y estos elementos forman un CRD para el sistema (2.1). ///

C A P I T U L O II

CUADRADOS Y RECTANGULOS LATINOS

2.1 DEFINICIONES.

Como el punto principal es el de demostrar la existencia de cuadrados latinos a partir de rectángulos latinos, definiremos los conceptos de cuadrados y rectángulos latinos.

DEFINICION. 2.1.1 . Un cuadrado latino nxn es un arreglo de n hileras y n columnas de los enteros 1,2, ... , n , de tal manera que ningún entero aparece más de una vez en cada hilera y en cada columna.

EJEMPLOS:

cuadrado latino 3x3

1	2	3
2	3	1
3	1	2

cuadrado latino 5x5

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2

DEFINICION. 2.1.2. Un rectángulo latino hxc basado en los enteros 1,2, ... ,n, es un arreglo de h hileras y c columnas formadas con los enteros 1,2, ... ,n, de tal manera que los enteros en cada hilera y cada columna son diferentes.

EJEMPLOS:

rectángulo latino 4x3

4	5	1
1	2	3
3	4	5
2	3	4

rectángulo latino 3x5

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

2.2 TEOREMAS DE EXISTENCIA DE CUADRADOS LATINOS

TEOREMA 2.2.1. *Para cada n, existe al menos un cuadrado latino* nxn.

DEMOSTRACION. *Sea el cuadrado latino*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{array}$$

TEOREMA 2.2.2. *Dado un rectángulo latino de* $n-r$ *hileras y* n *columnas tal que cada uno de los números* $1, 2, \dots, n$ *aparece una vez en cada hilera y en cada columna, entonces existen* r *hileras que pueden ser agregadas al rectángulo dado para formar un cuadrado latino* nxn.

DEMOSTRACION. *Para probar el teorema, tomamos por* C_i , $i=1,2,\dots,n$, *los subconjuntos formados por los números* $1,2,\dots,n$ *, que no aparecen en la* i*-ésima columna del rectángulo dado. Existen* n *conjuntos* C_i *, cada uno contiene* r *números y cada número aparece solamente* r *veces en todos los* C_i*'s. Además existen* $n-r$ *números en la* i*-ésima columna y cada número aparece en* $n-r$ *columnas.*

Demostraremos que estos subconjuntos C_i *satisfacen los requerimientos del teorema 1.1.1 (la necesidad de estos requerimientos es evidente).*

Cualquier selección de k *de estos subconjuntos contendrá* kr *números y al menos* k *de éstos pueden ser distintos puesto que cada número está contenido en sólo* r *conjuntos. Por consiguiente los requerimientos del teorema 1.1.1 estan satisfechos y los representantes distintos*

$$c_1 \; , \; c_2 \; , \; \dots \; , \; c_n$$

pueden escogerse para todos los conjuntos C_i simultaneamente . Por definición de los conjuntos C_i, estos n representantes distintos c_i: $i=1,2,\ldots,n$, pueden usarse para formar una $((n-r)+1)$ hilera del rectángulo dado produciendo un rectángulo latino $((n-r)+1)xn$. Repitiendo este procedimiento r veces, encontraremos r hileras que agregadas al rectángulo dado formarán un cuadrado latino nxn . ///

El siguiente teorema nos permite conocer de cuántas formas puede agregarse una hilera a un rectángulo latino para formar un cuadrado latino.

TEOREMA 2.2.3. El número de formas en que una hilera puede agregarse a un rectángulo latino $(n-r)xn$ para formar un rectángulo latino $(n-r+1)xn$ es al menos $r!$.

DEMOSTRACION. Se ha visto en el teorema 2.2.1 que cada conjunto C_i contiene r números; aplicando el corolario 1.2.1 a estos n conjuntos C_i en los cuales $r < n$, tendremos que existen al menos $r!$ CRD que pueden agregarse al rectángulo latino dado para formar un rectángulo latino $(n-r+1)xn$.

A continuación se dará una generalización del teorema 2.2.2 .

TEOREMA 2.2.4. Sea R un rectángulo hxc basado en los enteros $1,2,\ldots,n$ y $N(i)$ el número de veces que el entero i aparece en rectángulo R . Una condición necesaria y suficiente para que R pueda extenderse a un cuadrado latino nxn es que para cada $i=1,2,\ldots,n$, $N(i) \geqslant h + c - n$.

DEMOSTRACION. La necesidad de la condición es fácil de ver. Denotemos por H_i , $i=1,2,\ldots,h$, el conjunto de c enteros que pertenecen a la i-ésima hilera del rectángulo R. Además denotemos por C_i ; $i=1,2,\ldots,h$, el conjunto de los $k=n-c$ enteros entre $1,2,\ldots,n$, que no aparecen en H_i. Sea $M(i)$ el número de veces que el entero i aparece en los conjuntos C_1 , C_2 , $\ldots$, C_h .

Si R puede extenderse a un cuadrado latino, entonces los enteros i no pueden aparecer en los conjuntos C_1 , C_2 , ... , C_h más que $k=n-c$ veces Por lo tanto,

$$M(i) \leq n-c \ .$$

Pero $$N(i) + M(i) = h \ ,$$

de donde $$M(i) = h - N(i) \ ,$$

y así tenemos $$h - N(i) \leq n - c \ ,$$

y en conclusión $$N(i) \geq h + c - n \ .$$

Por lo tanto, la necesidad queda satisfecha.

Para probar la suficiencia, formemos los h conjuntos C_i , $i=1,2,\ldots,h$, donde para cada i los conjuntos C_i consisten de aquellos elementos que no están incluidos en la i-ésima hilera del rectángulo dado. Cada uno de estos conjuntos contiene $n-c$ elementos, mientras que en el rectángulo $h\mathrm{x}n$ cada elemento i aparece $N(i) + M(i) = h$ veces.

Por hipótesis $N(i) \geq h + c - n$, así que cada elemento i aparece $M(i) \leq n - c$ veces entre los conjuntos C_1 , C_2 , ... , C_h . Estos conjuntos C_i satisfacen las condiciones del teorema 1.1.1, es decir, cualquier selección de los conjuntos C_i contendrán $k(n-c)$ elementos, de los cuales al menos k de ellos serán distintos y por lo tanto podemos escoger un CRD para todos los conjuntos C_i simultaneamente. Estos elementos c_1 , c_2 , ... , c_h , del CRD de los conjuntos C_i pueden agregarse como una columna al rectángulo dado para formar una $(c+1)$ columna del rectángulo y formar un rectángulo latino $h\mathrm{x}(c+1)$. Repitiendo este procedimiento $n-c$ veces, obtendremos un rectángulo latino $h\mathrm{x}n$ y con este puede construirse un cuadrado latino $n\mathrm{x}n$ según el teorema 2.2.2 .///

2.3 ENUMERACION DE CUADRADOS LATINOS

Como consecuencia de los teoremas anteriores se tiene el siguiente teorema que nos da una cota inferior del número de cuadradados latinos.

TEOREMA 2.3.1 . Existen al menos $n!(n-1)! \ldots 2!\,1!$ cuadrados latinos diferentes.

DEMOSTRACION. Por los teoremas anteriores se puede construir un cuadrado latino $n x n$, y las n hileras de este cuadrado pueden ser colocadas en $n!, (n-1)!, \ldots , 2!, 1!$ formas. Por lo tanto existen al menos $n!(n-1)! \ldots 2!1!$ cuadrados latinos diferentes. ///

Un cuadrado latino reducido es el que tiene la primera hilera y la primera columna en orden natural. Dado un cuadrado latino, reducido o no, es posible formar $n!(n-1)!$ cuadrados latinos permutando las columnas en $n!$ formas y las ultimas $(n-1)$ hileras en $(n-1)!$ formas. Por lo tanto, si L_n es el número de cuadrados latinos de orden n y R_n es el número de cuadrados latinos reducidos, entonces

$$L_n = n!\ (n-1)!\ R_n .$$

Por el teorema 2.3.1 , sabemos que

$$L_n \geq n!\ (n-1)! \ldots 2!\ 1! \ ,$$

así que
$$R_n \geq (n-2)! \ldots 2!\ 1! = b_n .$$

Podemos dar una cota superior para R_n

L E M A 2.3.1. $$R_n \leq \left[\prod_{i=1}^{n-1} (n-1)^i \right] b_n$$

DEMOSTRACION. Puesto que la primera hilera y la primera columna son $1,2, \ldots , n$, para la segunda hilera se descarta el 2, dando $(n-1)!$ permutaciones posibles. Procediendo por hileras y eliminando los elementos usados por columna, en la i-ésima hay $i-1$ elementos que no pueden usarse en la primera columna y en general, hay i elementos que no pueden usarse en las columnas $2, 3, \ldots, i$; además, los $n-i$ elementos restantes después de colocar las primeras columnas se pueden permutar de $(n-i)!$ maneras, así que

$$R_n \leqslant (n-1)!(n-2)(n-2)!(n-3)^2(n-3)! \ldots (n-i)^{i-1}(n-i)! \ldots 2^{n-3}2!\cdot 1^{n-2}\cdot 1! = (n-2)!(n-3)! \ldots 1! \prod_{i=1}^{n}(n-i)^{i} . \quad ///$$

El problema de determinar R_n permanece abierto y sólo se conoce un un valor exacto para $n \leqslant 9$, según la siguiente tabla.

n	R_n	Factorización prima
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	4	2^2
5	56	$2^3\cdot 7$
6	9 408	$2^6\cdot 3\cdot 7^2$
7	16 942 080	$2^{10}\cdot 3\cdot 5\cdot 1103$
8	535 281 401 856	$2^{17}\cdot 3\cdot 1\ 361\ 291$
9	377 597 570 964 258 816	$2^{21}\cdot 3^2\cdot 5\ 231\cdot 3\ 824\ 477$

C A P I T U L O III

DISTRIBUCIONES EN CUADRADO LATINO

3.1 INTRODUCCION.

Una de las principales aplicaciones de los cuadrados latinos es en el diseño de experimentos agrícolas e industriales. Sir Ronald Fisher, profesor de gênetica en la Universidad de Cambridge y una autoridad en estadística, fué el primero en poner de manifiesto la utilidad de los cuadrados latinos en las investigaciones agrícolas. Por ejemplo, si se deseara realizar un experimento de campo en el que se desea conocer cuales son los efectos de cinco productos químicos sobre un determinado cultivo, una de las dificultades clásicas de este tipo de experimentos es que, en general, la fertilidad de diversas porciones de un mismo terreno varía de forma muy irregular. En estos casos, una forma de plantear el experimento para poder ensayar simultaneamente los cinco productos químicos y eliminar los sesgos debidos a las diferencias en fertilidad, es el siguiente: Se divide el campo en parcelas que sean las casillas de un cuadrado latino cinco por cinco y se aplican los tratamientos según un cuadrado latino escogido al azar. Después, un sencillo análisis estadístico eliminará los sesgos debidos a las variaciones de fertilidad del terreno.

Supongamos que en este experimento tenemos cinco cultivos en lugar de uno: ¿Cómo podremos realizarlo para tomar en consideración esta nueva variable?. Las otras variables son la fertilidad de las hileras, la fertilidad de las columnas y el tipo de tratamiento. La solución consiste en utilizar un cuadrado greco-latino; las letras letras griegas indican dónde deben aplicarse los productos químicos,y las letras latinas los cultivos.

El empleo de los cuadrados latinos no se reduce al diseño de experimentos agrícolas; puede ser aplicado también en biología,medicina,sociología y en otras ramas de la ciencia. La "parcela" no tiene por qué ser una porción de terreno.Puede ser una vaca,una hoja,una jaula de cobayas o un paciente.

En las secciones siguientes se mostrarán los diseños más usuales en cuadrados latinos.

3.2 DISTRIBUCION EN CUADRADO LATINO

El diseño de cuadrado latino se usa frecuentemente en experimentaciones agrícolas e industriales. A causa de las economías posibles debidas a tamaños reducidos de muestras,el diseño en cuadrado latino tiene mayor atracción para los investigadores en todos los campos. En particular el ingeniero ha usado prolíficamente el diseño en cuadrado latino.

Esta distribución es muy eficáz cuando el número de tratamientos está entre 4 y 10. Se conoce la variabilidad en dos sentidos perpendiculares por lo cual es muy deseable reducir o controlar el efecto de dicha variabilidad para disminuir el valor del error experimental. Por otra parte,tiene la desventaja de que es rígido en el número de repeticiones y en agrupar los tratamientos en hileras y columnas en tal forma que no se repita ningún tratamiento en hilera ni en columna; además se reducen los grados de libertad para el error experimental. Para aprovechar las ventajas de esta distribución,es indispensable lo siguiente:

a) Dividir el lote o lugar de la experiencia en un número de unidades expe rimentales igual al cuadrado del número de tratamientos.

b) El número de repeticiones debe ser igual al número de tratamientos.

c) Formar hileras y columnas de unidades experimentales iguales al número de repeticiones y tratamientos.

d) Distribuir los tratamientos en tal forma que ningún tratamiento se repita en hilera ni en columna.

Para lograr lo anterior, se arreglan los tratamientos haciendo permutaciones horizontales y verticales.

Supongamos que hay 7 tratamientos : A, B, C, D, E, F, G.

i) Permutaciones horizontales,

A	B	C	D	E	F	G
G	A	B	C	D	E	F
F	G	A	B	C	D	E
E	F	G	A	B	C	D
D	E	F	G	A	B	C
C	D	F	G	A	B	C
B	C	D	E	F	G	A

ii) Permutaciones verticales,

A	G	F	E	D	C	B
B	A	G	F	E	D	C
C	B	A	G	F	E	D
D	C	B	A	G	F	E
E	D	C	B	A	G	F
F	E	D	C	B	A	G
G	F	E	D	C	B	A

e) Sortear las hileras y en el cuadrado así obtenido, sortear las columnas Esto tiene como finalidad hacer una distribución de los tratamientos más dispersa en el campo y evitar que, AB, CD, DE, etc., estén juntos sistematicamente.

EJEMPLO : usando el cuadrado base de las permutaciones horizontales

1	A	B	C	D	E	F	G
2	G	A	B	C	D	E	F
3	F	G	A	B	C	D	E
4	E	F	G	A	B	C	D
5	D	E	F	G	A	B	C
6	C	D	E	F	G	A	B
7	B	C	D	E	F	G	A

mediante cualquier metodo de sorteo, supongamos que el sorteo de las hileras numeradas del 1 al 7 quedara de la manera siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7
4	E	F	G	A	B	C	D
2	G	A	B	C	D	E	F
6	C	D	E	F	G	A	B
1	A	B	C	D	E	F	G
7	B	C	D	E	F	G	A
3	F	G	A	B	C	D	E
5	D	E	F	G	A	B	C

numerando las columnas del 1 al 7 en este cuadrado , se sortean las columnas , las cuales quedarán como en el cuadro siguiente :

G 43	F 44	D 45	B 46	E 47	C 48	A 49
C 42	B 41	G 40	E 39	A 38	F 37	D 36
F 29	E 30	C 31	A 32	D 33	B 34	G 35
E 28	D 27	B 26	G 25	C 24	A 23	F 22
D 15	C 16	A 17	F 18	B 19	G 20	E 21
A 14	G 13	E 12	C 11	F 10	D 9	B 8
B 1	A 2	F 3	D 4	G 5	E 6	C 7

Las letras representan los tratamientos,y los números,el número de la unidad experimental. Este sería el cuadrado final para la distribución del cuadrado latino 7x7; las unidades experimentales numeradas siguen un sistema que facilita su manejo.

La distribución en cuadrado latino es útil para realizar experimentos de campo donde se experimentan fertilizantes,herbicidas e insecticidas o se conoce la dirección de la variación en dos sentidos perpendiculares.

Habiendo señalado las ventajas y limitaciones del diseño en cuadrado latino,condensaremos los cálculos correspondientes para un análisis de varianza.

Para realizar el análisis,usaremos la siguiente nomenclatura:

a = tratamientos ; $i = 1,2, \ldots ,n$

$n = a$ = repeticiones ; $j = 1,2, \ldots ,n$

$k = 1,2, \ldots ,n$ hileras

$\ell = 1,2, \ldots ,n$ columnas.

Forma usual de la suma de cuadrados.

1. M_{xx} = Factor de corrección

$$= \frac{X^2}{a^2}$$

2. ΣX^2 = Suma total de cuadrados

$$= \Sigma X_{ij}^2 - M_{xx}$$

3. H_{xx} = Suma de cuadrados por hilera

$$= \frac{\Sigma X_k^2}{n} - M_{xx}$$

4. C_{xx} = Suma de cuadrados por columna

$$= \frac{\Sigma X_\ell^2}{n} - M_{xx}$$

5. T_{xx} = Suma de cuadrados por tratamiento

$$= \frac{\Sigma X_i^2}{n} - M_{xx}$$

6. E_{xx} = Suma de cuadrados de error experimental

$$= \Sigma X^2 - (H_{xx} + C_{xx} + T_{xx})$$

Donde X_k, X_ℓ, X_i representan los totales por hilera, columna y tratamiento.

El análisis de varianza generalizado para un diseño de cuadrado latino nxn con una observación por unidad experimental es el siguiente:

tabla 3.2.1

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Relación F
Media	1	M_{xx}	M	...
Renglones	n-1	H_{xx}	H	...
Columnas	n-1	C_{xx}	C	...
Tratamientos	n-1	T_{xx}	T	T/E
Error experimental	(n-1)(n-2)	E_{xx}	E	...
TOTAL	n^2	ΣX^2	...	...

3.3 INTERPRETACION DE RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA UNA DISTRIBUCION EN CUADRADO LATINO

En un experimento se estudiaron siete variedades de maíz.

a) Híbrido H-412

b) Híbrido Favorita

c) Sintético Precoz, blanco

d) Sintético NLVS-1, blanco

e) Sintético Carmen, blanco

f) Sintético Carmen, amarillo

g) Sintético Carmen, amarillo P. L.

La distribución de las variedades y la producción de grano seco, en kilos por parcela, fué la siguiente:

								Total de hileras X_k
	F 12.0	B 10.6	D 10.6	C 9.3	E 11.0	A 9.0	G 11.2	73.7
	B 8.7	E 8.6	G 8.3	F 9.6	A 7.5	D 9.0	C 8.2	59.9
	G 9.3	C 7.9	E 7.9	D 8.2	F 8.6	B 9.9	A 10.1	61.9
	C 7.0	F 7.9	A 8.0	G 8.1	B 9.1	E 10.8	D 12.7	63.6
	D 8.6	G 9.9	B 8.8	A 8.1	C 8.9	F 10.7	E 10.0	65.0
	A 7.7	D 7.1	F 6.6	E 6.6	G 7.3	C 7.5	B 8.7	51.5
	E 6.3	A 6.6	C 7.8	B 8.2	D 7.1	G 8.6	F 7.3	51.9
Total de columnas X_ℓ	59.6	58.6	58.0	58.1	59.5	65.5	68.2	427.5

Producción de grano seco por variedad y repetición

	A	B	C	D	E	F	G	
	9.0	10.6	9.3	10.6	11.0	12.0	11.2	
	7.5	8.7	8.2	9.0	8.6	9.6	8.3	
	10.1	9.9	7.9	8.2	7.9	8.6	9.3	
	8.0	9.1	7.0	12.7	10.8	7.9	8.1	
	8.1	8.8	8.9	8.6	10.0	10.7	9.9	
	7.7	8.7	7.5	7.1	6.6	6.6	7.3	
	6.6	8.2	7.8	7.1	6.3	7.3	8.6	
X = 427.5	57.0	64.0	56.6	63.3	61.2	62.7	62.7	total por variedad

$a = 7$; $i = 1,2,\ldots,7$ variedades

$n = a = 7$; $j = 1,2,\ldots,7$ repeticiones

$k = 1,2,\ldots,7$ hileras

$\ell = 1,2,\ldots,7$ columnas.

Hay $an = a^2 = 49$ unidades experimentales.

La variación total observada se compone de la variación entre hileras, la variación entre columnas, la variación entre variedades y la variación debida al error experimental.

Forma usual del cálculo de la suma de cuadrados (S.C.).

1. $M_{xx} = \dfrac{X^2}{a^2} = \dfrac{(427.5)^2}{49} = 3729.72$

2. $\Sigma X^2 = \Sigma X_{ij}^2 - M_{xx} = (9.0^2 + \ldots + 6.6^2 + 7.3^2) - M_{xx}$

$= 3831.89 - 3729.72 = 102.17$

3. $H_{xx} = \dfrac{\Sigma X_k^2}{n} - M_{xx} = \dfrac{73.7^2 + \ldots + 51.9^2}{7} - 3729.72 = 51.30$

4. $C_{xx} = \dfrac{\Sigma X_\ell^2}{n} - M_{xx} = \dfrac{59.6^2 + \ldots + 68.2^2}{7} - 3729.72 = 14.20$

5. $V_{xx} = \frac{\Sigma X_i^2}{n} - M_{xx} = \frac{57.0^2 + \ldots + 62.7^2}{7} - 3792.72 = 7.92$

6. $E_{xx} = \Sigma X^2 - (H_{xx}+C_{xx}+V_{xx}) = 102.17 - (51.30+14.20+7.92) = 28.75$

El análisis de varianza y las pruebas de F quedarían como se muestra en la tabla siguiente.

TABLA 3.3.1

Causas de variación	G. L.	S. C.	Cuadrado medio	F	F_{05}	F_{01}
Hileras	a - 1 - 6	51.30				
Columnas	a -1 = 6	14.20				
Variedades	a - 1 = 6	7.92	1.320 N.S.	1.38	2.42	3.47
Error	(a-1) (a-2)=30	28.75	0.958			
Total	a^2 - 1 =48	102.17				

Los grados de libertad (G.L.) para el error experimental se obtienen por diferencia, semejante a la obtención de la S.C. o mediante la fórmula (a-1)(a-2).

$G.L_{error} = G.L_{total} - (G.L._H + G.L._C + G.L._V)$

$= 48 - (6+6+6) = 30$

$G.L_{error} = (a^2-1) - 3(a-1) = (a-1)(a-2)$

$G.L_{error} = (7-1)(7-2) = 30$

La prueba de F en el análisis de varianza indica que no hay diferencia significativa entre las producciones de las siete variedades, es decir,

$$F = \frac{1.320}{0.958}$$

$$= 1.38 < F_{05\ (6,30)} = 2.42.$$

3.4 DISTRIBUCION EN CUADRADO LATINO MODIFICADO

Esta distribución es útil cuando se tiene un número de 20 a 30 tratamientos y el número de repeticiones es cuatro o seis o el número de tratamientos es un múltiplo del de repeticiones. Tiene la ventaja de aprovechar la eficiencia de la distribución en bloque y la del cuadrado latino.

El método consiste en dividir el número de tratamientos en grupos de tratamientos igual al número de repeticiones. El número de tratamientos por grupo es el cociente de dividir el número de tratamientos entre el número de repeticiones.

Por ejemplo, si se tienen 20 tratamientos con cinco repeticiones, se formará un cuadrado latino 5x5, es decir, 5 grupos por 5 repeticiones: cada grupo tendrá 20/5 = 4 tratamientos. Se hace la distribución del cuadrado latino 5x5 y se sortean los 4 tratamientos en cada grupo:

1 2 3 4	5 6 7 8	9 10 11 12	13 14 15 16	17 18 19 20
G_1	G_2	G_3	G_4	G_5

La distribución de los grupos en cuadrado latino y de los tratamientos en cada grupo quedará como en la figura 3.4.1.

La distribución es tal que no se repiten los tratamientos, ni en fila ni en columna. Se utilizarían 100 unidades experimentales, numeradas del 1 al 100 ; en la figura se indican los números de las 20 unidades experimentales de la primera repetición.

El registro de los tratamientos, repeticiones y de las unidades experimentales es similar al descrito para el diseño de cuadrado latino.

Los cálculos correspondientes para un análisis de varianza para este diseño son los siguientes:

a = tratamientos ; $i = 1,2,\ldots,n$.

n = repeticiones ; $j = 1,2,\ldots,n$.

n = hileras ; $k = 1,2,\ldots,n$. n = columnas ; $\ell = 1,2,\ldots,n$.

1. M_{xx} = Factor de corrección

$$= \frac{X}{an}$$

2. ΣX^2 = Suma total de cuadrados

$$= \Sigma X^2_{ij} - M_{xx}$$

3. H_{xx} = Suma de cuadrados por hilera

$$= \frac{\Sigma X^2_k}{a} - M_{xx}$$

4. C_{xx} = Suma de cuadrados por columna

$$\frac{\Sigma X^2_\ell}{a} - M_{xx}$$

5. T_{xx} = Suma de cuadrados por tratamiento

$$= \frac{\Sigma X^2_i}{n} - M_{xx}$$

6. E_{xx} = Suma de cuadrados de error experimental

$$= \Sigma X^2 - (H_{xx} + C_{xx} + T_{xx})$$

El análisis de varianza para una distribución en cuadrado latino modificado es el siguiente:

tabla 3.4.2

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Relación F
Media	1	M_{xx}	M	...
Renglones	n-1	H_{xx}	H	...
Columnas	n-1	C_{xx}	C	...
Tratamientos	a-1	T_{xx}	T	T/E
Error experimental	Diferencia	E_{xx}	E	...
Total	an	ΣX^2	...	...

Los grados de libertad del error experimental se calculan mediante la diferencia; $G.L_E = G.L_{total} - (G.L._M + G.L._H + G.L._C + G.L._T)$.

TABLA 3.4.1 . *Distribución en cuadrado latino modificado 5x5*

número de tratamiento

Repetición																				
V	G_4				G_1				G_3				G_5				G_2			
	13	16	15	14	3	1	2	4	9	10	12	11	20	18	17	19	8	5	6	7
IV	G_2				G_5				G_1				G_4				G_3			
	5	8	7	6	20	17	19	18	3	4	1	2	16	15	13	14	12	9	11	10
III	G_5				G_2				G_4				G_3				G_1			
	18	20	17	19	7	5	8	6	14	13	15	16	10	9	8	7	4	3	2	1
II	G_3				G_4				G_2				G_1				G_5			
	11	9	12	10	16	15	13	14	8	6	5	7	3	1	2	4	20	19	17	18
I	G_1				G_3				G_5				G_2				G_4			
	3	2	1	4	9	11	8	10	19	17	20	18	5	7	6	8	15	14	13	16
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

número de la unidad experimental

3.5 INTERPRETACION DE RESULTADOS PARA UNA DISTRIBUCION EN CUADRADO LATINO MODIFICADO.

En un experimento se estudiarón 16 variedades de maíz blanco, que son las que se muestran en la tabla 3.5.1 .

La distribución de las 16 variedades y el rendimiento de mazorca en kilos por parcela útil (números inferiores), fué el que se muestra en la tabla 3.5.2 . (pag. 36)

TABLA 3.5.1

Número	Nombre	Número	Nombre
1	Asgrow H-511W	9	Coah. T 9
2	N. L. T65	10	Apodaca 1
3	N. L. T66	11	Apodaca 2
4	N. L. T67	12	Guerito
5	N. L. T68	13	Carmen
6	N. L. T71	14	N.L. VS-2
7	N. L. T72	15	N.L. VS-1
8	Coah. T5	16	H-412

Tabla 3.5.3 . Rendimiento de mazorca , peso seco en kg/parcela , de 16 variedades de maíz sembradas en Apodaca , N. L. , en la primavera de 1964 , con distribución en cuadrado latino modificado. Datos de la tabla número 3.5.2.

TABLA 3.5.2

					X_k
I	+16 14 15 13 ++2.7 2.6 3.5 2.8	2 3 1 4 2.4 2.4 4.1 2.5	12 11 9 10 2.9 3.9 2.8 2.0	5 8 7 6 2.1 3.0 1.9 2.7	44.4
II	12 9 10 11 3.2 2.7 2.2 2.2	14 15 13 16 3.4 3.9 2.6 2.9	8 7 5 6 2.7 2.6 2.8 2.6	3 4 1 2 2.3 3.0 3.5 3.2	45.8
III	7 6 5 8 2.4 1.7 2.6 3.6	9 11 10 12 2.8 3.4 3.2 2.2	4 2 3 1 2.5 2.9 2.7 3.4	15 14 13 16 2.9 2.6 2.7 3.2	44.8
IV	3 4 1 2 2.6 2.8 3.3 2.6	5 8 6 7 3.1 3.0 2.9 2.5	16 15 14 13 2.9 3.9 3.0 2.9	9 11 12 10 3.0 3.1 2.7 2.6	46.9
X_1	43.6	47.3	46.5	44.5	181.9 $X_{..}$

\+ *variedad*

++ *rendimiento*

TABLA 3.5.1

Grupo	Número de variedad	Número de la variedad	Repeticiones I	II	III	IV	X_i	$\bar{X}$	Porcentaje Relativo
G_1	1	Asgrow 511W	4.1	3.5	3.4	3.3	14.3	3.58	130
	2	N.L. T65	2.4	3.2	2.9	2.6	11.1	2.78	101
	3	N.L. T66	2.4	2.3	2.7	2.6	10.0	2.50	91
	4	N.L. T67	2.5	3.0	2.5	2.8	10.8	2.70	98
G_2	5	N.L. T68	2.1	2.8	2.6	3.1	10.6	2.65	96
	6	N.L. T71	2.7	2.6	1.7	2.9	9.9	2.48	90
	7	N.L. T72	1.9	2.6	2.4	2.5	9.4	2.35	85
	8	Coah. 75	3.0	2.7	3.6	3.0	12.3	3.08	112
G_3	9	Coah. 79	2.8	2.7	2.8	3.0	11.3	2.83	103
	10	Apodaca1	2.0	2.2	3.2	2.6	10.0	2.50	91
	11	Apodaca2	3.9	2.2	3.4	3.1	12.6	3.15	115
	12	Guerito	2.9	3.2	2.2	2.7	11.0	2.75	100
G_4	13	Carmen (testigo)	2.8	2.6	2.7	2.9	11.0	2.75	100
	14	N.L.VS-2	2.6	3.4	2.6	3.0	11.6	2.90	105
	15	N.L.VS-1	3.6	3.9	2.9	3.9	14.3	3.58	130
	16	H-412	2.7	2.7	3.2	2.9	11.7	2.93	107
Suma por repetición			44.4	45.8	44.8	46.9	181.9	2.84	
							X..	x	

Como se muestra en la distribución, al formar los grupos G_1, G_2, G_3 G_4, no se repite una variedad en fila ni en columna, por lo cual se puede eliminar la variación para dichas causas.

En la tabla anterior, la columna de porcentaje relativo se obtiene mediante la siguiente relación:

$$\text{Porcentaje relativo} = \frac{\text{producción de variedad} \times 100}{\text{producción del testigo Carmen}}$$

Se tomo a la variedad Carmen como testigo por ser una de las mejores variedades del noroeste de México para siembras en tierras bajas;N.L. VS-1 y N.L.VS-2 tienen como progenitores a Carmen y fueron obtenidas en tres ciclos de selección masal metodo modificado.

Tomando como ejemplo la producción de la primera variedad Asgrow H -511W , se obtuvo

$$\text{Porcentaje relativo} = \frac{3.58 \times 100}{2.75} = 130\%$$

Es decir,H-511 produjo 30% más que Carmen.

Para determinar si la producción de cada variedad es significativamente distinta,es necesario estudiar la variación y hacer las comparaciones correspondientes.

Como no se repite en fila ni en columna ninguna variedad,se puede eliminar la variación.La variación total tiene los siguientes componentes: entre hileras,entre columnas,entre variedades y error experimental. Para calcular la varianza,es necesario obtener la suma de cuadrados de las desviaciones por el metodo más usual.

a = variedades ; $i = 1,2,\ldots,16.$

n = repeticiones ; $j = 1,2,\ldots,4.$

n = hileras ; $k = 1,2,\ldots,4.$

n = columnas ; $\ell = 1,2,\ldots,4.$

1. $M_{xx} = \dfrac{X^2}{an} = \dfrac{(181.1)^2}{64} = \dfrac{33087.61}{64} = 516.99$

2. $\Sigma X^2 = \Sigma X_{ij}^2 - M_{xx} = (4.1^2 \ldots + 2.9^2) - M_{xx} = 532.05 - 516.99 = 15.05$

3. $H_{xx} = \dfrac{\Sigma X_k^2}{a} - M_{xx} = \dfrac{44.4^2 + \ldots + 46.9^2}{16} - M_{xx} = 0.24$

4. $C_{xx} = \dfrac{\Sigma X_\ell^2}{a} - M_{xx} = \dfrac{43.6^2 + \ldots + 44.5^2}{16} - M_{xx} = 0.56$

5. $V_{xx} = \frac{\Sigma X_i^2}{n} - M_{xx} = \frac{14.3^2 + \ldots + 11.7^2}{4} - M_{xx} = 7.70$

6. $E_{xx} = \Sigma X^2 - (H_{xx} + C_{xx} + V_{xx}) = 15.05 - (0.24 + 0.56 + 7.70) = 6.55$

Tabla 3.5.4. Análisis de varianza para una distribución en cuadrado latino modificado, $a = 16$, $n = 4$.

Causas de variación	G.L.	S.C.	Cuadrado medio	F	F_{05}	F_{01}
Hileras	$n-1 = 3$	0.24	...			
Columnas	$n-1 = 3$	0.56	...			
Variedades	$a-1 = 15$	7.70	0.513	3.29	2.18	3.07
Error	Diferencia = 42	6.55	0.156			
Total	$an-1 = 63$	15.05				

$$C.V. = \frac{0.156}{2.84} \times 100 = 13.9\%$$

La prueba $F = \frac{0.513}{0.156} = 3.29 > F_{01(15,42)}$, indica que la diferencia de las producciones de las variedades es altamente significativa . Los datos son confiables, pues el valor del coeficiente de variabilidad fué de 13.9%, que es similar al obtenido por diversos investigadores cuando se han tomado todas las precauciones en el manejo y uso de unidades experimentales.

3.6 CUADRADOS GRECO — LATINOS

El concepto de cuadrado latino puede ampliarse fácilmente y obtener así el llamado diseño en cuadrado Greco-Latino; sin proceder a detallar el cuadrado greco-latino, únicamente indicaremos la naturaleza del diseño. En este arreglo los tratamientos se agrupan en repeticiones de tres maneras distintas, con la consecuencia de que los efectos de las tres diferentes fuentes de variación se igualan para todos los tratamientos.

Como un ejemplo, supongamos que deseamos ensayar cinco productos químicos α , β , ψ , ϕ , ε , en cinco cultivos A,B,C.D,E. Una forma de efectuar la distribución para realizar el experimento, es dividir el campo en parcelitas que sean las casillas de un cuadrado greco-latino 5x5, como se muestra en la siguiente tabla.

$D\varepsilon$	$E\phi$	$B\beta$	$A\psi$	$C\alpha$
$A\beta$	$B\alpha$	$D\phi$	$C\varepsilon$	$E\psi$
$E\alpha$	$A\varepsilon$	$C\psi$	$B\phi$	$D\beta$
$B\psi$	$C\beta$	$E\varepsilon$	$D\alpha$	$A\phi$
$C\phi$	$D\psi$	$A\alpha$	$E\beta$	$B\varepsilon$

Se notará que: i) que cada letra latina aparece una vez en cada hilera y en cada columna ,ii) que cada letra griega aparece una sola vez en cada hilera y en cada columna ,iii) que cada letra latina aparece una sola vez con cada letra griega.

Análisis estadístico. Las sumas de cuadrados para hileras, columnas, tratamientos y letras griegas, se obtienen del modo acostumbrado. Para un cuadrado greco-latino nxn el error tiene $(n-1)(n-3)$ grados de libertad . Este número es inadecuado cuando n es menor que 6.

C A P I T U L O IV

OTRAS FORMULACIONES DEL TEOREMA DE P.HALL

4.1 EL TEOREMA DEL MATRIMONIO

El teorema de P. Hall da respuesta a la siguiente pregunta, conocida como el problema del matrimonio: si se tiene un conjunto de muchachos, los cuales conocen a varias muchachas, ¿bajo qué condiciones pueden casarse los muchachos de tal manera que cada uno se case con una muchacha conocida por él?. Se supone que la poligamia no está permitida . Por ejemplo, si hay cuatro muchachos $\{ h_1 , h_2 , h_3 , h_4 \}$ y cinco muchachas $\{ m_1 , m_2 , m_3 , m_4, m_5 \}$ relacionados de la siguiente manera:

Muchacho	Muchacha conocida por el muchacho
h_1	m_1 m_4 m_5
h_2	m_1
h_3	m_2 m_3 m_4
h_4	m_2 m_4

Una posible solución al problema es h_1 casado con m_4 , h_2 casado con m_1 , h_3 casado con m_3 y h_4 casado con m_2 .

Es claro que una condición necesaria para la solución del problema del matrimonio es que todo conjunto de k muchachos conozca al menos k muchachas del conjunto, para todo $1 \leqslant k \leqslant m$, donde m denota el número total de muchachos. La necesidad de la condición es evidente y se sigue del hecho de que si esto no es verdad para un cierto conjunto k, entonces algunos muchachos no podrían casarse.

TEOREMA 4.1.1. Una condición necesaria y suficiente para una solución del problema del matrimonio es que todo conjunto de k muchachos conozcan en conjunto al menos k muchachas, $1 \leq k \leq m$.

La siguiente demostración se debe a Halmos y Vaughan.

Para demostrar la suficiencia usaremos inducción y supondremos que el teorema es válido si el número de muchachos es menor que m. El teorema es trivial para $m = 1$. Supongamos que hay m muchachos; entonces tendremos que considerar dos casos :

i) Supongamos primero que todo conjunto de k muchachos $1 \leq k \leq m$, conoce en conjunto al menos k+1 muchachas. Entonces si tomamos cualquier muchacho y lo casamos con una muchacha que conozca, la condición sigue siendo válida para los otros m-1 muchachos. Estos m-1 muchachos pueden casarse, de acuerdo a la hipótesis de inducción, completando la prueba en este caso.

ii) Supongamos ahora que hay un conjunto de k muchachos que conocen en conjunto exactamente k muchachas. Estos k muchachos pueden casarse, de acuerdo a la hipótesis de inducción quedando m-k muchachos. Pero entonces, cualquier selección de h de estos m-k muchachos ($1 \leq k \leq m$) conoce al menos h de las muchachas restantes, de otra manera estos k muchachos junto con la colección anterior de k muchachos conocerían en conjunto menos de h+k muchachas, que es una contradicción a nuestra suposición. Se sigue entonces que la condición original puede aplicarse a los m-k muchachos, quienes pueden casarse por inducción en tal forma que todos sean felices, y la prueba está completa. ///

4.2 GRAFICAS BIPARTITAS

Comenzaremos definiendo una Gráfica Simple como una pareja $(V(G), L(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices, y $L(G)$ es un conjunto finito de pares no ordenados de elementos distintos de $V(G)$ llamados Líneas. Por ejemplo la figura 4.2.1 representa la gráfica simple G cuyo conjunto de vértices $V(G)$ es el conjunto $\{u, v, w, z\}$ y su conjunto de líneas $L(G)$ consiste de las parejas $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ $\{u, w\}$ y $\{w, z\}$.

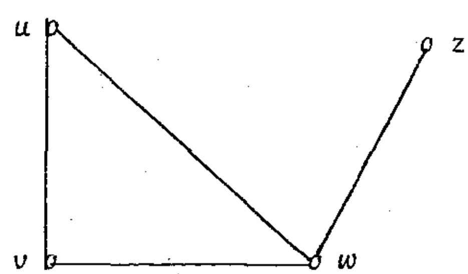

fig.4.2.1

La línea v,w se dice que une los vértices v y w : nótese que sólo puede haber cuando más una línea que una v y w.

Supongamos que el conjunto de vértices de una gráfica G puede dividirse en dos conjuntos ajenos V_1 y V_2 en tal forma que toda línea de G une un vértice de V_1 con uno de V_2 ; entonces G se llama una Gráfica Bipartita y se denota por $G(V_1, V_2)$. Es necesario enfatizar que en una gráfica $G(V_1, V_2)$ no es necesario que todo vértice de V_1 esté unido a todo vértice de V_2 ; si esto sucede y G es simple, entonces G se llama una Gráfica Bipartita Completa, denotada usualmente por $K_{m,n}$ donde m y n son los números de vértices en V_1 y V_2, respectivamente. Por ejemplo, la figura 4.2.2 representa $K_{4,3}$ y la figura 4.2.3 representa $K_{1,5}$.

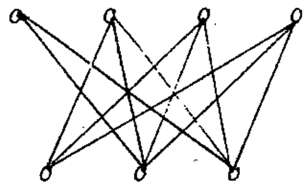

figura 4.2.2

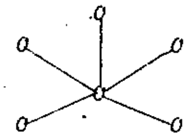

figura 4.2.3

Nótese que $K_{m,n}$ tiene $m+n$ vértices y mn líneas .

Un Acoplamiento Completo de V_1 a V_2 en una gráfica bipartita $G(V_1,V_2)$, es una correspondencia uno a uno entre los vértices de V_1 y un subconjunto de los vértices de V_2 con la propiedad de que los vértices correspondientes están unidos.

El problema del matrimonio puede representarse gráficamente tomando a G como la gráfica bipartita en la cual el conjunto de vértices está dividido en dos conjuntos ajenos V_1 y V_2 correspondiendo V_1 a los muchachos y a las muchachas V_2, y en la cual toda línea une un muchacho a una muchacha que él conoce. La figura 4.2.4 muestra la gráfica G correspondiente a nuestro ejemplo:

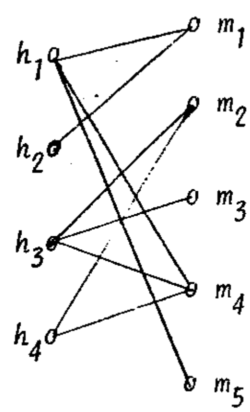

figura4.2.4

El problema del matrimonio puede expresarse en términos de teoría de gráficas de la siguiente manera: si $G = (V_1,V_2)$ es una gráfica bipartita ,¿cuándo existirá un acoplamiento completo de V_1 a V_2 en G ? .

A continuación se establecerá el teorema de P.Hall en el lenguaje de un acoplamiento completo de una gráfica bipartita. En el siguiente teorema, $|A|$ denota el número de elementos del conjunto A.

TEOREMA. 4.2.1. Sea $G = G(V_1,V_2)$ una gráfica bipartita y para todo subconjunto A de V_1, sea $\phi(A)$ el conjunto de vértices de V_2 que se aparea con al menos un vértice de A. Entonces, un acoplamiento completo de V_1 a V_2 existe si, y sólo si $|A| \leq |\phi(A)|$.

La demostración de este teorema es simplemente una traducción de la demostración del teorema 4.1.1 a la teoría de gráficas.

4.3 TEORIA DE TRANSVERSALES

Recordemos que en el problema del matrimonio los conjuntos de muchachas conocidas por los muchachos fueron $\{ m_1 , m_4 , m_5 \}$,$\{ m_1 \}$, $\{ m_2 , m_3 , m_4 \}$, $\{ m_2 , m_4 \}$ y que una solución del problema se obtuvo encontrando cuatro muchachas distintas, una de cada conjunto. En general si E es un conjunto finito no vacío y $\tau = \{ C_1 , C_2 , \ldots , C_m \}$ una familia de subconjuntos no vacíos de E(no necesariamente distintos), entonces un Transversal de E es un conjunto de m elementos distintos distintos de E, uno de cada conjunto C_i .

Como en el ejemplo 1.1.1, sea $E = \{ 1,2,3,\ldots,6 \}$,$C_1 = C_2 = \{ 1,2 \}$ $C_3 = C_4 = \{ 2,3 \}$ y $C_5 = \{ 1,4,5,6 \}$. Es imposible encontrar cinco elementos distintos de E, uno de cada subconjunto C_i ; en otras palabras la familia $\tau = \{ C_1,C_2,\ldots,C_5 \}$ no tiene transversales. Nótese, sin embargo, que la subfamilia $\tau' = \{ C_1,C_2,C_3,C_5 \}$ tiene un transversal; por ejemplo $\{ 1,2,3, 4 \}$. A un transversal de una subfamilia de τ le llamaremos un Transversal Parcial de τ ; en este ejemplo τ tiene varios transversales parciales, por ejemplo, $\{ 1,2,3,6 \}$, $\{ 2,3,6 \}$, $\{ 1,5 \}$, ϕ ,etc. . Es claro que cualquier subconjunto de un transversal parcial es un transversal parcial.

Nos preguntamos ¿bajo que condiciones una familia dada de subconjuntos posee un transversal?. La conexión entre este problema y el problema del matrimonio es fácil de ver tomando a E como el conjunto de muchachas y a C_i como el conjunto de muchachas conocidas por el muchacho H_i $(1 \leq i \leq m)$; un transversal en este caso es entonces un conjunto de m muchachas, uno correspondiente a cada muchacho y conocida por él. Es claro que el teorema 4.1.1 da una condición necesaria y suficiente para que una familia de subconjuntos tenga un transversal; estableceremos una vez más el teorema de P.Hall, ahora en términos de transversales, y daremos una demostración debida a R. Rado.

TEOREMA.4.3.1. Sea E un conjunto finito no vacío y $\tau = \{ C_1, C_2, \ldots C_m \}$ una familia de subconjuntos no vacía de E. τ tiene un transversal si, y sólo si, la unión de k subconjuntos C_i contiene al menos k elementos, para $1 \leq k \leq m$.

DEMOSTRACION. La necesidad de la condición es obvia. Para probar la suficiencia, demostraremos que si uno de los subconjuntos, digamos C_1, contiene más de un elemento, entonces podemos quitar un elemento de C_1 sin alterar la condición. Repitiendo este procedimiento, el problema se reduce al caso en el cual cada subconjunto contiene sólo un elemento. Sólo nos quedaría demostrar la validez del "procedimiento de reducción". Supongamos que C_1 contiene elementos x, y, de tal manera que su eliminación invalida la condición. Entonces, existen subconjuntos A y B de $\{ 2, 3, \ldots, n \}$ con la propiedad siguiente:

$$\left| \bigcup_{j \in A} C_j \cup (C_1 - \{ x \}) \right| \leq |A| \quad y \quad \left| \bigcup_{j \in B} C_j \cup (C_1 - \{ y \}) \right| \leq |B|$$

Pero estas dos desigualdades dan una contradicción puesto que :

$$|A| + |B| + 1 = |A \cup B| + |A \cap B| + 1$$

$$\leqslant \Big|\bigcup_{j \in A \cup B} C_j \cup C_1\Big| + \Big|\bigcup_{j \in A \cap B} C_j\Big| \qquad \text{por la condición}$$

$$\leqslant \Big|\bigcup_{j \in A} C_j \cup (C_1 - \{x\})\Big| + \Big|\bigcup_{j \in B} C_j \; (C_1 - \{y\})\Big| \qquad \text{puesto que} \quad |C_1| \geqslant 2$$

$$\leqslant |A| + |B| \quad , \text{por hipótesis.}///$$

La belleza de esta demostración radica en el hecho esencial de que sólo consiste de un paso, en contraste con la de Halmos y Vaughan que considera dos pasos separados. Nótese la simplificación respecto a la primera demostración del teorema de P.Hall.

En seguida daremos una demostración del teorema 2.2.2 en términos de la teoría de transversales.

DEMOSTRACION. Probaremos que el rectángulo latino dado puede extenderse a un rectángulo latino $(n-r+1)xn$;y repitiendo este procedimiento r veces se obtendrá un cuadrado latino nxn.

Sea $E = \{1,2,\ldots,n\}$ y $\tau = \{C_1,C_2,\ldots,C_n\}$ donde C_i denota los conjuntos formados con los elementos de E que no aparecen en la i-ésima columna del rectángulo dado. Si probamos que τ tiene un transversal, entonces la demostración estará completa; puesto que los elementos de este transversal formarán la hilera adicional. Por el teorema 4.3.1, es suficiente demostrar que la unión de cualesquiera k de los conjuntos C_i contiene al menos k elementos distintos; pero esto es obvio, puesto que la unión de k conjuntos contiene kr elementos distintos, incluyendo repeticiones, y si hubiera menos de k elementos distintos entonces al menos uno de los elementos tendría que aparecer más de r veces, lo que es una contradicción.///

CAPITULO V

VISION ACTUAL DEL TEOREMA DE P. HALL Y APLICACIONES

5.1 UNA APLICACION DEL TEOREMA DE P.HALL AL ALGEBRA LINEAL

TEOREMA.5.1.1. *En un espacio vectorial de dimensión infinita cuales quiera dos bases de HAMEL tienen la misma cardinalidad.*

DEMOSTRACION. *Sean* $\{ x_i , i \in I \}$ *y* $\{ y_j , j \in J \}$ *dos bases de un es pacio vectorial V sobre un campo K. Si expresamos cada* x_i *como una combina ción lineal de los* y_i *, tendremos un conjunto* C_i *de y's asociado a* x_i *, a saber, aquellos y's con coeficientes diferentes de cero en las expresiones para* x_i *en términos de los y's. Los conjuntos* C_i $i \in I$*, son finitos y satis facen la condición C del capítulo I, pues si k conjuntos* C_i *contienen un nú mero menor de k y's, las x's correspondientes serán linealmente dependietes; por lo tanto, podemos escoger distintas y's de los* C_i *y entonces el cardi- nal de las y's es menor que el de las x's. Similarmente, el cardinal de las x's es menor que el de las y's y los dos cardinales son iguales. ///*

5.2 MAS SOBRE TEORIA DE TRANSVERSALES

Durante las dos últimas décadas, una gran cantidad de escritos han si do publicados sobre el teorema del matrimonio. Este problema es el punto de partida para una rama de la matemática combinatoria que está empezando a emerger como una materia razonable y coherente, la teoría de transversa- les.

Dos libros sobre la materia han sido publicados por H. H. Crapo y

G.C. Rota y L. Mirsky ; sin embargo, estos escritos están enfocados desde un punto de vista muy diferente. En esta sección ampliaremos lo expuesto en el capítulo IV sobre transversales y su relación con respecto a representaciones distintas de subconjuntos. Para una lectura más fluida, repetiremos las definiciones.

Sea S un conjunto y $\mathcal{C} = \langle C_i \mid i \in I \rangle$ un sistema de subconjuntos de S Escribiremos $|C_i| = \#(C_i)$ para denotar la cardinalidad de C_i. Si $\mathcal{C} = \langle C_i \mid i \in I \rangle$ y $\mathcal{D} = \langle D_j \mid j \in J \rangle$ son dos sistemas, definiremos $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ y $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ de la siguiente manera:

$\mathcal{C} = \mathcal{D}$ si existe una biyección $F:\rightarrow J$ tal que $\mathcal{C}_i = \mathcal{D}_{F(i)}$ para todo $i \in I$.

$\mathcal{C}+\mathcal{D}$ denota el sistema $H = \langle H_\xi \mid \xi \varepsilon K \rangle$, donde $K = (I x\{0\}) \cup (J x\{1\})$, $H_{(i,0)} = C_i$ y $H_{(j,1)} = D_j$.

Una función transversal de $\mathcal{C}$ es una función de elección $\phi: I \longrightarrow S$ inyectiva ($\phi(i) \neq \phi(j)$ para $i \neq j$) y tal que $\phi(i) \varepsilon \mathcal{C}_i$. El elemento $\phi(i)$ es el representante de $\mathcal{C}_i$ en ϕ y $\langle \phi(i) \mid i \in I \rangle$ es un CRD para $\mathcal{C}$. Un Transversal de $\mathcal{C}$ es $T = \langle \phi(i) \mid i \in I \rangle$ dónde ϕ es una función transversal , y un Transversal parcial es un transversal de un subsistema $\mathcal{C}/K = \langle C_i | i \varepsilon K \rangle$ con $K \varepsilon I$. Denotaremos por $TR(\mathcal{C})$ el conjunto de todos los transversales de $\mathcal{C}$ y por $PTR(\mathcal{C})$ el conjunto de todos los transversales parciales.

Un sistema $\mathcal{C}$ tiene la propiedad transversal ($\mathcal{C} \varepsilon \mathcal{T}$) si, y sólo si , $\mathcal{C}$ tiene un transversal.

Muchos problemas de la matemática combinatoria se reducen a la pregunta de si un sistema $\mathcal{C}$ tiene o no un transversal o alguna propiedad similar .

El axioma de elección es un teorema de transversales que se enuncia de la siguiente manera.

Si $\mathcal{C}$ es un sistema de conjuntos no vacíos ajenos por parejas ($C_i \cap C_j \neq \phi$, $i \neq j$) entonces $\mathcal{C} \in \mathcal{T}$.

Una condición necesaria para que $\mathcal{C}$ tenga transversales (condición C) es la siguiente:

CONDICION C : si $\mathcal{C}(K) = \bigcup_{i\in K} C_i$, $K \subset I$ entonces $|\mathcal{C}(K)| \geq |K|$.

Y esta condición es también suficiente para el caso de sistemas finitos (teorema 1.1.1):

TEOREMA 5.2.1. Si $|\mathcal{C}| < \aleph_0$ entonces $\mathcal{C} \in \mathcal{T}$ si, y sólo si, la condición C es válida.

Una extensión de este teorema es la que obtuvo M.Hall, quién demostró (teorema 1.2.1) que la condición C es también suficiente en el caso cuándo $|\mathcal{C}|$ es arbitrario, pero cada $\mathcal{C}_i$ es finito. Las $2^{|I|}-1$ condiciones de la condición C son mutuamente independientes para un sistema finito de subconjuntos, pero para un sistema infinito de conjuntos finitos la condición C es equivalente a un conjunto menor de condiciones, $|\mathcal{C}(K)| \geq |K|$ para todo $K \Subset I$ donde $K \Subset I$ significa que K es un conjunto finito de I . En vista de esto, el teorema de M.Hall puede establecerse de la siguiente forma:

TEOREMA.5.2.2. Sea $\mathcal{C}$ un sistema de conjuntos finitos . Entonces $\mathcal{C} \in \mathcal{T}$ si, y sólo si, $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{T}$ para todo $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{C}$.

Enseguida demostraremos un teorema que será de utilidad .

TEOREMA.5.2.3. Sea S un conjunto finito no vacío y $\mathcal{C} = \langle C_i \mid i \in I \rangle$ una familia de subconjuntos de S. $\mathcal{C}$ tiene un transversal parcial de tamaño t si, y sólo si, la unión de k subconjuntos C_i, contiene al menos $k+t-m$ elementos . $\left(|\mathcal{C}(K)| \geq k+t-m \right)$.

DEMOSTRACION. Sea D cualquier conjunto ajeno a S y tal que $|D| = m-t$.

Consideremos $\mathcal{C}' = \langle D_i \mid i \in I \rangle$ con $D_i = C_i \cup D$. Sabemos que $\mathcal{C}'$ tiene un transversal si, y sólo si, la unión de k subconjuntos D_i tiene al menos k elementos; quitando los m-t elementos de D, por lo menos k-(m-t) deben pertenecer a los C_i, y entonces un transversal de $\mathcal{C}'$ es un transversal parcial de $\mathcal{C}$. ///

COROLARIO.5.2.1. Si S es cualquier conjunto no vacío, $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de S y X es cualquier subconjunto de S, entonces X tiene un transversal parcial de $\mathcal{C}$ de tamaño t si, y sólo si, para todo subconjunto A de $\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\left|\left(\bigcup_{j\in A} C_j\right)\cap X\right| \geq |A| + t-m$$

DEMOSTRACION. La demostración resulta de aplicar el teorema 5.2.3 a la familia $\mathcal{C}'_X = \langle D_i \mid i \in I \rangle$ con $D_i = C_i \cap X$. ///

Concluiremos esta sección con una breve discusión sobre transversales comunes. Si S es un conjunto finito no vacío $\mathcal{C} = \langle C_1, C_2, \ldots, C_m \rangle$ y $\mathcal{D} = \langle D_1, D_2, \ldots, D_m \rangle$ son dos familias de subconjuntos no vacías de S, es de interés conocer cuando existe un transversal común para $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ i.e. un conjunto de m elementos distintos de S que forman un transversal para $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. En problemas de horarios, por ejemplo, si S denota el conjunto de horas en las cuales pueden impartirse varias materias de una escuela, $\mathcal{C}_i$ denota el conjunto de horas en que m maestros pueden impartir esas materias y $\mathcal{D}_i$ el conjunto de horas en las que están disponibles m aulas, entonces un transversal común de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ asignaría a cada maestro un aula a la hora en la cual puede impartir su materia.

Podemos dar una condición necesaria y suficiente para que dos familias tengan un transversal común.

TEOREMA.5.2.4. Sea S un conjunto finito no vacío y $\mathcal{C} = \langle C_1, C_2, \ldots, C_m \rangle$ y $\mathcal{D} = \langle D_1, D_2, \ldots, D_m \rangle$ dos familias de subconjuntos no vacíos de S; entonces $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ tienen un transversal común si, y sólo si,

$$\left| \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{D}(L) \right| \geq |K| + |L| - m \qquad (K, L \subset \{1, 2, \ldots, m\})$$

Nótese que este teorema se reduce al teorema de P.Hall si $\mathcal{D}(L) = S$

El problema de encontrar bajo que condiciones existe un transversal común para tres familias de subconjuntos no vacíos de un conjunto es un problema abierto. Una solución de este problema traería consecuencias importantes en combinatoria.

5.3. TEORIA DE MATROIDES Y TRANSVERSALES

El término "matroide" fué inventado por Hassler Whitney en el año de 1930 para describir un conjunto con una definida "estructura independiente". En esta sección introduciremos el concepto de matroide y su conexión con la teoría de transversales.

DEFINICION.5.3.1. Un matroide M es un par (S, β) donde S es un conjunto finito no vacío y β es una colección no vacía de subconjuntos de S, llamados **bases**, que satisfacen las siguientes propiedades:

β i) ninguna base contiene a otra.

βii) si B_1 y B_2 son bases, y si e es cualquier elemento de B_1, entonces hay un elemento f de B_2, con la propiedad de que $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ es también una base.

Si usamos en forma repetida la propiedad (βii) se tendrá que cualesquiera dos bases de un matroide M tiene el mismo número de elementos; este número se llama el rango de M, denotado por $\rho(M)$.

Un subconjunto de S se llama independiente si está contenido en alguna base del matroide M. Se sigue que las bases de M son precisamente los conjuntos independientes maximales, i.e., aquellos conjuntos independientes que no estan contenidos en otro conjunto independiente mayor, y por lo tanto cualquier matroide está definido únicamente por sus conjuntos independientes.

Si S es un conjunto finito de vectores en un espacio vectorial V, entonces podemos definir un matroide sobre S tomando como bases todos los subconjuntos linealmente independientes que generan el mismo subespacio que S. Un matroide obtenido en esta forma se llama un matroide vectorial.

Dado cualquier conjunto finito no vacío S, se llamará matroide trivial sobre S, al matroide cuyo único conjunto independiente es el conjunto vacío. Este matroide es de rango cero.

Un matroide discreto sobre S es un matroide en el cual todo subconjunto de S es independiente. Nótese que el matroide discreto sobre S tiene sólo una base que es S, y que el rango de cualquier subconjunto A es simplemente el número de elementos de A.

Recordemos que si $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de S, entonces el teorema de P.Hall da una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{T}$ tenga un transversal. Si tenemos un matroide definido sobre S entonces es razonable preguntarse si existe una condición para la existencia de un transversal independiente, i.e., un transversal de $\mathcal{T}$ que es también un conjunto independiente en el matroide. El teorema siguiente, conocido como teorema de Rado, contesta esta pregunta.

TEOREMA.5.3.1. Sea M un matroide sobre un conjunto S y $\mathcal{T}=\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de S; entonces $\mathcal{T}$ tiene un transversal independiente si, y sólo si, la unión de k de los subconjuntos C_i contiene un conjunto independiente de tamaño al menos k, para $1 \leqslant k \leqslant m$.

Nótese que si M es un matroide discreto sobre S, entonces este teorema se reduce al teorema 4.3.1.

DEMOSTRACION. Imitaremos la demostración del teorema 4.3.1. La necesidad de la condición es obvia. Para probar la suficiencia, demostraremos que si uno de los subconjuntos, digamos C_1, contiene más de un elemento, entonces podemos quitar un elemento de C_1 sin alterar la condición. Repitiendo este procedimiento, el problema se reduce al caso en el cual cada subconjunto contiene sólo un elemento. Sólo nos quedaria demostrar la validez del procedimiento de reducción.

Supongamos que C_1 contiene elementos x, y, de tal manera que su eliminación invalida la condición. Entonces existen subconjuntos A y B de $\{2, 3, \ldots, n\}$ con la siguiente propiedad:

$$\rho\Big(\bigcup_{j\in A} C_j \cup (C_1 - \{x\})\Big) \leqslant |A| \quad y \quad \rho\Big(\bigcup_{j\in B} C_j \cup (C_1 - \{y\})\Big) \leqslant |B|$$

Pero estas dos condiciones dan una contradicción puesto que:

$$|A| + |B| + 1 = |A\cup B| + |A\cap B| + 1$$

$$\leqslant \rho\Big(\bigcup_{j\in A\cup B} C_j \cup C_1\Big) + \rho\Big(\bigcup_{j\in A\cap B} C_j\Big) \quad \text{, por la condición,}$$

$$\leqslant \rho\Big(\bigcup_{j\in A} C_j \cup (C_1 - \{x\})\Big) + \rho\Big(\bigcup_{j\in B} C_j \cup (C_1 - \{y\})\Big) \text{, puesto que } \quad |C_1| \geqslant 2$$

$$\leqslant |A| + |B| \quad \text{, por hipótesis. ///}$$

Enseguida daremos una demostración del teorema sobre la existencia de un transversal común de dos familias de subconjuntos de un conjunto usando matroides.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 5.2.4. Sea M un matroide cuyos conjuntos independientes son precisamente los transversales parciales de la familia $\mathcal{C}$; entonces $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ tienen un transversal común si, y sólo si, $\mathcal{D}$ tiene un transversal independiente. Pero por el teorema 5.3.1 esto es cierto si, y sólo si, la unión de cualquier k de los conjuntos D_i contienen un transversal parcial de $\mathcal{G}$ de tamaño k. El resultado se sigue del corolario 5.2.1. ///

5.4 UN ALGORITMO

Si S es un conjunto no vacío y $C_1, C_2, \ldots, C_m$ un sistema de subconjuntos de S, verificar la condición C para este sistema, requiere $2^n - 1$ pruebas. Desde el punto de vista computacional, es necesario un algoritmo que no sólo diga si el sistema tiene un CRD, sino también, en caso de que lo tenga, encontrarlo. El siguiente algoritmo se da en forma descriptiva.

Algoritmo H. Dados los conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_m$ con elementos a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, \#(C_j)$, $j = 1, 2, \ldots m$, se dan las siguientes instrucciones;

1. Se escogen arbitrariamente $a_{ij} \varepsilon C_j$ empezando con $j = 1$, de tal forma que el elemento escogido sea distinto de los elementos escogidos anteriormente.

2. Si se llega a $j = m$, los a_{ij} escogidos forman un CRD de los C_i.

3. Si no se puede continuar el paso 1 despues de $j < m$, se enlistan los elementos de C_j como $b_1, b_2, \ldots, b_t$, $t = \#(C_j)$, (lista T_1).

4. Se busca C_{b_1} el conjunto con representante b_1.

5. Se comparan los elementos de C_{b_1} con los b_i y los elementos nuevos se agregan a la lista T_1 (lista T_2).

6. Se repite el proceso empezando en 4, con b_i para $i = 1, 2, \ldots$ (lista T_i).

7. Si algún elemento b_i enlistado no es representante de algún conjunto, pertenece a algún conjunto representado por $b_{i'}$, con $i' < i$; regresando hasta T_1, tenemos una sucesión $b_i \varepsilon C_{b_{i'}}, b_{i'} \varepsilon C_{b_{i''}}, \ldots, b_{i^*} \varepsilon T_1$.

8. Se hacen $b_{i'}$, $b_{i''}$, ... representantes de $C_{b_{i'}}$, $C_{b_{i''}}$, ... respectivamente.

9. b_{i*} se hace representante de C_j .

10. Se repite el proceso a partir del paso 1, con $j+1$.

11. Si se llega a una lista T_m sin elementos que no sean representantes de algún C_i , $i = 1,2,\ldots,j-1$, el sistema de subconjuntos no tiene CRD.

TEOREMA.5.4.1. El algoritmo H, aplicado al sistema $\mathcal{C} = \langle C_i \mid i \in I \rangle$, genera un CRD del sistema o exhibe k conjuntos que violan la condición C .

DEMOSTRACION. Si el algoritmo llega a una lista final T_m con elementos b_1 , b_2 , ..., b_{k-1} en que cada b_i es representante de algún C_{b_i}, $i = 1, 2,\ldots,k-1$, y si ningún elemento de estos conjuntos puede ser agregado a la lista, entonces los $(k-1)$ conjuntos C_{b_i} junto con el conjunto C_j del paso 3 , hacen k conjuntos con $(k-1)$ elementos entre sí, lo cual viola la condición C. ///

Una consecuencia del algoritmo anterior es el siguiente:

TEOREMA.5.4.2. Sea $\mathcal{C} = \langle C_i \mid i \in I \rangle$ un sistema de subconjuntos de S. Para que $A \subset S$ esté contenido en un transversal de $\mathcal{C}$, es necesario y suficiente que $\mathcal{C}$ tenga un transversal y que A sea un transversal parcial de $\mathcal{C}$.

B I B L I O G R A F I A

INTRODUCCION

1. *Leonhard Euler*, Recherches sur une nouvelle espece de quarrés magiques, *Ver. Zeeuwsch, Geenootsch, Wetensch, Vlissingen*, 9(1782)85-239.

2. *Martin Gardner*, Mathematical Games, Scientific American, *nov. 1959*, *pag. 181-188*.

CAPITULO I

3. *P. Hall*, On representatives of subsets, *J. London Math. Soc. vol. 10 (1935) pag. 26-30*.

4. *M. Hall, Jr.*, Distinct representatives of subsets, *Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 922-926*.

5. *M. Hall, Jr.*, Combinatorial theory, *John Wiley and Sons Inc. 1967*.

CAPITULO II

6. *M. Hall, Jr.*, An existence theorem for latin squares, *Bull. Amer. Math. Soc. vol. 51 (1945) 387-388*.

7. *H. J. Ryser*, A combinatorial theorem with an application to latin rectangles, *Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 550-552*.

8. *J. Dénes and A. D. Keedwell*, Latin Squares and their Applications, *Academic Press, New York, 1974*.

9. *Ronald Alter*, How many latin squares are there?, *Amer. Math. Monthly, vol. 82 (1975) 632-634*.

CAPITULO III

10. P. Reyes Castañeda, Diseños de experimentos agrícolas, Ed. Trillas, México, 1978.

11. Cochran, W.G., and Cox, G.M. Experimental Designs, Sec. ed. John Wiley and Sons Inc., 1957.

12. Bernard Ostle, Estadística Aplicada, Ed. Limusa, México 1974.

CAPITULO IV

13. P.R. Halmos and Vaughan, The marriage problem, Amer. J. Math. 72 (1950) 214-215.

14. R. Rado, A theorem on independence relations, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 13 (1942) 83-89.

15. Robin J. Wilson, Introduction to graph theory, Academic Press, New York, 1972.

16. Oysten Ore, Teoría y aplicaciones de las gráficas, Random House, Ed. Norma, Biblioteca de matemática contemporánea.

17. L. Mirsky, Transversal theory, Academic Press, New York. 1971.

CAPITULO V

18. H. Whitney, On the abstract properties of linear dependence, Amer. J. Math. 57 (1935) 509-533.

19. E.C. Milner, Transversal theory, Proc. of the International Congress of Math., vol. I, Vancouver Canada 1974.

20. H.H. Crapo and G.C. Rota, On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial geometries. Preliminary edition, M.I.T. Press, Cambridge, Mass, 1970.

21. R.J. Wilson, An introduction to matroid theory, Amer. Math. Mont. 80 (1973) #5.