UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

El Teorema de Seifert-Van Kampen y Algunas Aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

EDGAR CARBALLO DOMÍNGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAFAEL ROBERTO RAMOS FIGUEROA

Hermosillo, Sonora. Agosto de 2008.

El Teorema de Seifert-Van Kampen y Algunas Aplicaciones

Edgar Carballo Domínguez

Director de tesis: Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa

Índice

1. Introducción **2**

2. Teoría de Homotopía Elemental **4**

2.1. Homotopía de Trayectorias 4
2.2. Homotopía de Aplicaciones 16
2.3. El Grupo Fundamental del Círculo 34
2.4. Retractos y Aplicaciones 40

3. Grupos Libres y Productos Libres de Grupos **45**

3.1. Producto Débil de Grupos Abelianos 45
3.2. Grupos Abelianos Libres 52
3.3. Producto Libre de Grupos 66
3.4. Grupos Libres 74
3.5. Presentación de Grupos por Generadores y Relaciones 80

4. El Teorema de Seifert y Van Kampen sobre el Grupo Fundamental de la Unión de Dos Espacios. Aplicaciones **90**

4.1. Enunciado del Teorema de Seifert y Van Kampen 90
4.2. Primera Aplicación del Teorema de Seifert y Van Kampen . . 95
4.3. Segunda Aplicación del Teorema de Seifert y Van Kampen . . 105
4.4. Estructura del Grupo Fundamental de una Superficie Compacta 108
4.5. Prueba del Teorema de Seifert y Van Kampen 126

1. Introducción

Uno de los principales problemas de la topología es saber cuándo dos espacios topológicos no son homeomorfos, lo cual en general es muy difícil, pues, para demostrar que dos espacios topológicos son homeomorfos hay que encontrar tan sólo un homeomorfismo, pero al contrario, para demostrar que no lo son, hay que demostrar que no existe un homeomorfismo, y es imposible revisar cada función y decidir si es un homeomorfismo.

Podemos en cambio, encontrar propiedades topológicas, es decir, propiedades de un espacio topológico que se conserven bajo homeomorfismos, entre las que tenemos: Conexidad, compacidad, medibilidad, los axiomas de numerabilidad y separación, etcétera, podemos usar esto para saber que la bola cerrada no es homeomorfa a la bola abierta y que ésta no es homeomorfa a la unión disjunta de dos bolas abiertas.

Esta lista de propiedades topológicas no es suficiente, pues si revisamos cada una de ellas ninguna nos distingue entre la esfera y el toro que sabemos por intuición que no pueden ser homeomorfos.

La topología algebraica nos da nuevas propiedades topológicas que, mediante el álgebra nos hacen distinguir la esfera del toro.

La intención de esta tesis es introducir al lector la topología algebraica, y presentarle el primer grupo de homotopía o grupo fundamental y que aprecie la importancia de éste.

Esta tesis esta separada en 3 secciones. La primera, posiblemente la parte más topológica, nos presenta el grupo fundamental, y algunas otras definiciones como homotopía y por supuesto algunos resultados sobre ellos, esta sección es para presentar al lector las herramientas topológicas con que se va a trabajar. La segunda sección es puramente algebraica y se estudian los grupos libres, que como veremos, además de ser interesante por sí misma, nos va a ser de gran ayuda en la última sección que es la central en esta tesis como el título indica; esta sección la dedicamos al teorema de Seifter-Van Kampen que nos dice cómo es la estructura de los grupos fundamentales de muchos espacios topológicos y como aplicación calcularemos los grupos fundamentales del toro, el doble toro, etc., así como el plano proyectivo, la botella de Klein y sumas conexas de éstos.

Suponemos que el lector esté familiarizado con conceptos básicos de topología general, como continuidad, compacidad, conexidad por trayectorias, espacios producto y cociente y en algunos mometos se hace referencia a los axiomas de separación. También el lector debe estar familiarizado con el concepto de grupo, subgrupo, subgrupo normal.

2. Teoría de Homotopía Elemental

Este capítulo de este trabajo está basado principalmente en [3], excepto la sección 2.3 que fue basada en [4] y en [5].

I denoterá al intervalo cerrado $[0, 1]$.

2.1. Homotopía de Trayectorias

A través de este trabajo llamaremos *aplicación* a una *función continua.*

Definición 2.1. *Si X es un espacio topológico y $\sigma : I \to X$ es una aplicación, entonces llamaremos a σ una trayectoria, si además $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ entonces le llamamos lazo en x_0.*

Definición 2.2. *Sean $\tau, \sigma : I \to X$ trayectorias tales que*

$$\begin{aligned} \sigma(0) = \tau(0) = x_0 \\ \sigma(1) = \tau(1) = x_1 \end{aligned}$$

decimos que τ y σ son homotópicos con puntos extremos fijos denotado por $\sigma \approx \tau \operatorname{rel}\{0,1\}$ o bien $\sigma \approx_{\operatorname{rel}\{0,1\}} \tau$ si existe una aplicación $F : I \times I \to X$ tal que para cualquier $s, t \in I$

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \sigma(s) \\ F(s,1) &= \tau(s) \\ F(0,t) &= x_0 \\ F(1,t) &= x_1 \end{aligned}$$

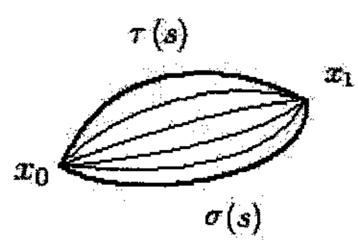

Figura 1:

En este caso llamamos a F homotopía de σ a τ y podemos denotarlo $F : \sigma \approx_{\operatorname{rel}\{0,1\}} \tau$.

Intuitivamente, una trayectoria $\sigma : I \to X$ se dice que es homotópica relativa al $\{0,1\}$ a τ si se puede deformar continuamente una en la otra dejando sus puntos extremos fijos. Al ir variando s, dejando fijo $t = t_0$, observamos que la imagen de F nos va "pintando" una curva en el espacio topológico X representando el instante en el tiempo $t = t_0$, como si hubieramos tomado una fotografía; recíprocamente, si dejamos fijo $s = s_0$ y vamos variando t en el intervalo I, la imagen de F nos "pinta" la trayectoria de una partícula o punto de la curva mientras ésta se deforma.

Enunciaremos ahora un pequeño lema sobre continuidad en la unión de espacios topológicos que nos va a ser de gran ayuda en el resto de este capítulo.

Lema 2.3. *Sea $X = A \cup B$ donde A y B son cerrados en X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas tales que para toda $x \in A \cap B$ se tiene que*

$$f(x) = g(x)$$

entonces podemos definir $h : X \to Y$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A \\ g(x) & si\ x \in B \end{cases}$$

y además h es continua en X.

Al lema anterior se le conoce como el lema de pegado, cuya prueba puede ser encontrada en [5] p.123.■

Proposición 2.4. *La relación $\approx_{\mathrm{rel}\{0,1\}}$ es de equivalencia.*

Demostración. Sean $\sigma, \tau, \rho : I \to X$ trayectorias en X tales que

$$\begin{aligned} \sigma(0) = \tau(0) = \rho(0) = x_0 \\ \sigma(1) = \tau(1) = \rho(1) = x_1 \end{aligned}$$

Probaremos primero la propiedad reflexiva, sea $F : I \times I \to X$ definida por $F(s,t) = \sigma(s)$ entonces F es una homotopía de σ a σ pues

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \sigma(s) \\ F(s,1) &= \sigma(s) \\ F(0,t) &= \sigma(0) = x_0 \\ F(1,t) &= \sigma(1) = x_1 \end{aligned}$$

así $F : \sigma \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \sigma$.

Probemos la simetría; supongamos que $F : \sigma \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \tau$. Sea $G : I \times I \to X$ tal que $G(s,t) = F(s, 1-t)$ entonces

$$\begin{aligned} G(s,0) &= F(s,1) = \tau(s) \\ G(s,1) &= F(s,0) = \sigma(s) \\ G(0,t) &= F(0,1-t) = x_0 \\ G(1,t) &= F(1,1-t) = x_1 \end{aligned}$$

con lo cual $G : \tau \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \sigma$.

Por último, para probar la transitividad supongamos que $F : \sigma \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \tau$ y $G : \tau \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \rho$; Definimos la función $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(s,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

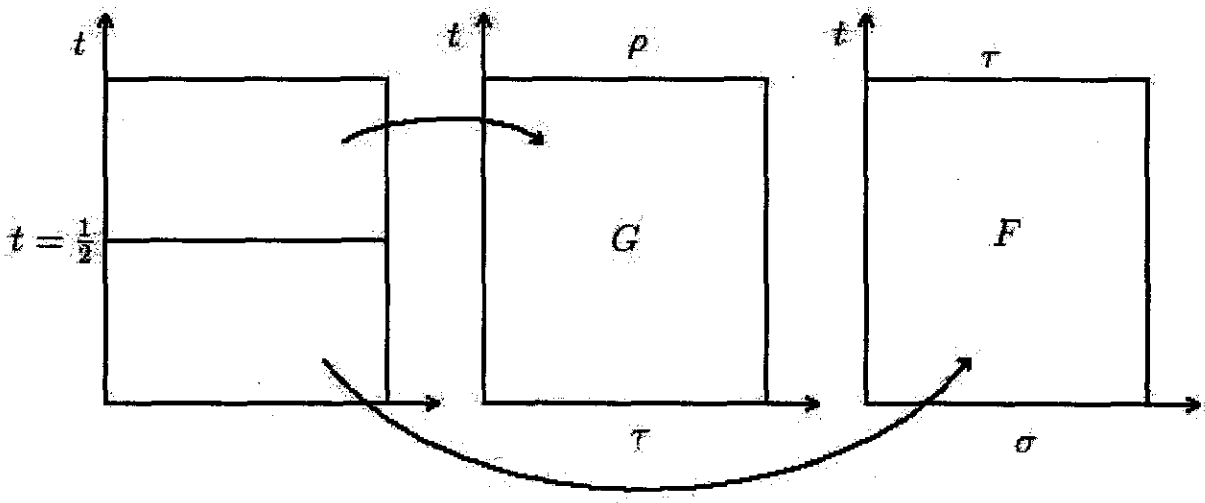

Figura 2:

Entonces H es continua pues $F(s,1) = \tau(s) = G(s,0)$ y las homotopías F, G son continuas, por el lema 2.3 H es continua y satisface

$$\begin{aligned} H(s,0) &= F(s,0) = \sigma(s) \\ H(s,1) &= F(s,1) = \rho(s) \\ H(0,t) &= x_0 \\ H(1,t) &= x_1 \end{aligned}$$

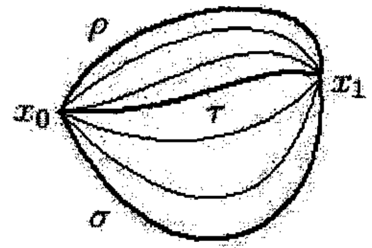

Figura 3:

entonces $H : \sigma \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \rho$. ■

Ya probado esta proposición 2.4 podemos hablar de sus clases de equivalencia, a las que les llamaremos *clases de homotopía.*

Definición 2.5. *Sean $\sigma, \tau : I \to X$ trayectorias en X tal que $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = \tau(0) = x_1$, $\tau(1) = x_2$. Definimos*

$$\sigma\tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Proposición 2.6. *Si $F : \sigma \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \sigma'$ y $G : \tau \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \tau'$ entonces $\sigma\tau \approx_{\text{rel}\{0,1\}} \sigma'\tau'$.*

Demostración. Gráficamente tenemos la siguiente situación

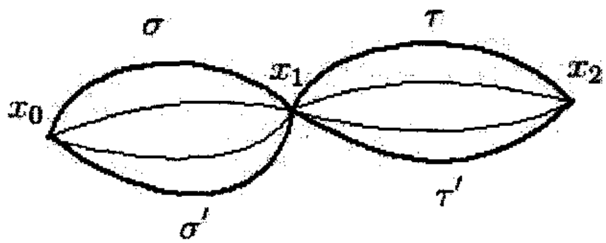

Figura 4:

Definimos $H : I \times I \to X$ motivada por la figura 5, de la siguiente manera

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

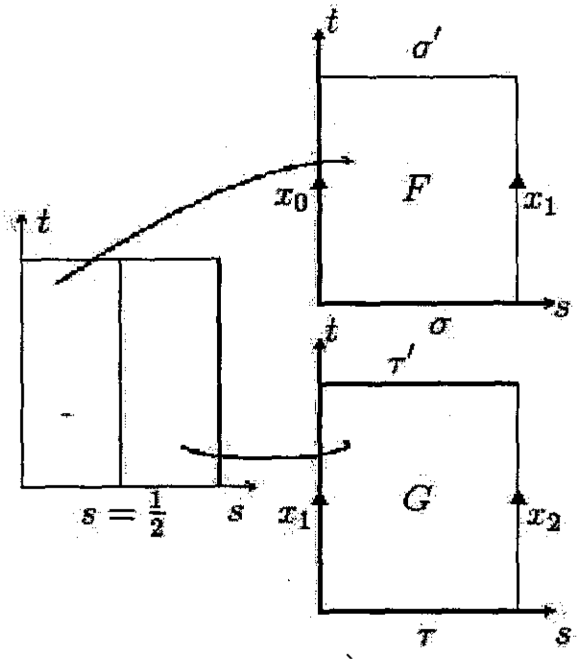

Figura 5:

H está bien definida pues $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$ y por el lema 2.3 es continua.

Además

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \begin{cases} \sigma(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \sigma\tau(s) \\ H(s,1) &= \begin{cases} \sigma'(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau'(2s-1,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \sigma'\tau'(s) \\ H(0,t) &= x_0 \\ H(1,t) &= x_2 \end{aligned}$$

Entonces así que $H : \sigma\tau \approx_{rel\{0,1\}} \sigma'\tau'$. Véase figura 5. ∎

Teorema 2.7. *Sea $\pi_1(X, x_0)$ el conjunto de las clases de homotopía de lazos en X con punto base x_0, con la operación $[\sigma][\tau] = [\sigma\tau]$. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es* *un grupo con elemento neutro* $[x_0]$ *y el inverso de* $[\sigma]$ *es* $[\sigma^{-1}]$ *donde* $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1-s)$ *Entonces* $\pi_1(X, x_0)$ *se llama grupo fundamental de* X *en* x_0.

Demostración. Veamos que el producto está bien definido. Sean $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_0)$, $\sigma \approx_{rel\{0,1\}} \sigma'$ y $\tau \approx_{rel\{0,1\}} \tau'$. Por la proposición 2.6 $\sigma\tau \approx_{rel\{0,1\}} \sigma'\tau'$ entonces $[\sigma\tau] = [\sigma'\tau']$. Ahora mostremos que $[\sigma][\sigma^{-1}] = [x_0]$. Consideremos la figura 6 y vamos a hacer lo siguiente, para cada $t_0 \in [0,1]$ fijo, definimos la trayectoria

$$F(s, t_0) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t_0}{2} \\ \sigma\left(2\left(\frac{t_0}{2}\right)\right) & \text{si } \frac{t_0}{2} \leq s \leq \frac{2-t_0}{2} \\ \sigma^{-1}(2s-1) & \text{si } \frac{2-t_0}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que por la simetría de la figura 6 tenemos que $\sigma(2s)|_{\frac{t_0}{2}} = \sigma^{-1}(2s-1)|_{\frac{2-t_0}{2}}$ para cada $t_0 \in I$.

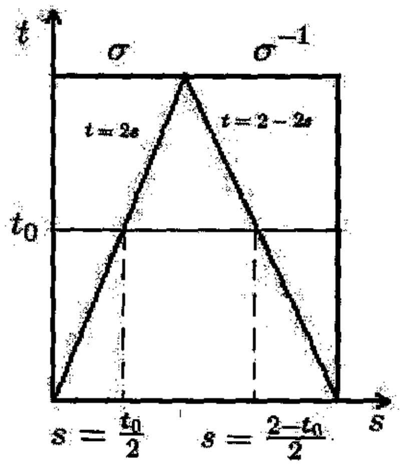

Figura 6:

Entonces obtenemos la homotopía

$$F(s, t) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ \sigma(t) & \text{si } \frac{t}{2} \leq s \leq \frac{2-t}{2} \\ \sigma^{-1}(2s-1) & \text{si } \frac{2-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ahora F está bien definida pues

$$\sigma\left(2\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)=\sigma(t)$$

$$\sigma^{-1}\left(2\left(\tfrac{2-t}{2}\right)-1\right)=\sigma^{-1}(1-t)=\sigma(t)$$

y por el lema 2.3 son continuas, veamos que es la homotopía buscada de x_0 a $\sigma\sigma^{-1}$

$$\begin{aligned}
F(s,0) &= \sigma(0)=x_0(s)\\
F(s,1) &= \begin{cases}\sigma(2s) & \text{si } 0\le s\le \frac{1}{2}\\ \sigma^{-1}(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases} = \sigma\sigma^{-1}(s)\\
F(0,t) &= \sigma(0)=x_0\\
F(1,t) &= \sigma^{-1}(1)=x_0
\end{aligned}$$

Entonces $[x_0]=[\sigma\sigma^{-1}]$, análogamente $[x_0]=[\sigma^{-1}\sigma]$ y concluimos que $[\sigma]^{-1}=[\sigma^{-1}]$.

Ahora mostramos la asociatividad. Sean $[\sigma],[\tau],[\omega]\in\pi_1(X,x_0)$; para cada $t_0\in[0,1]$ fijo, debemos demostrar que $(\sigma\tau)\omega\approx\sigma(\tau\omega)\,rel_{\{0,1\}}$. Separemos a $[0,1]$ en tres intervalos, los que le corresponderán a σ,τ,ω en los subintervalos $\left[0,\frac{t_0+1}{4}\right],\left[\frac{t_0+1}{4},\frac{t_0+2}{4}\right],\left[\frac{t_0+2}{4},1\right]$ respectivamente, véase figura 7. Ahora encontraremos tres homeomorfismos que manden su respectivo subintervalo al intervalo $[0,1]$ preservando la orientación.

Para σ queremos que para cada $t_0\in I$ fijo

$$\left[0,\frac{t_0+1}{4}\right]\to[0,1]$$

entonces para cada $s\in\left[0,\frac{t_0+1}{4}\right]$

$$s\mapsto\frac{s}{\frac{t_0+1}{4}}=\frac{4s}{t_0+1}$$

Para τ queremos que para cada $t_0\in I$ fijo

$$\left[\frac{t_0+1}{4},\frac{t_0+2}{4}\right]\to\left[0,\frac{1}{4}\right]\to[0,1]$$

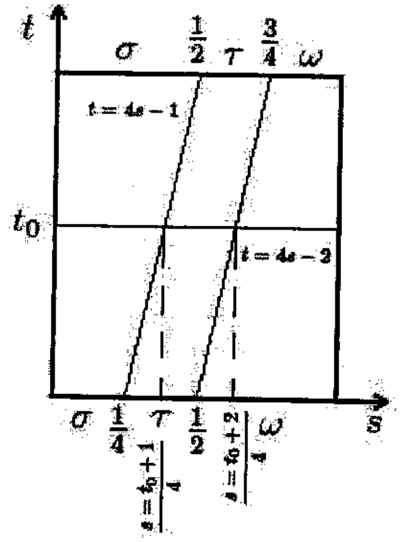

Figura 7:

entonces para cada $s \in \left[\frac{t_0+1}{4}, \frac{t_0+2}{4}\right]$

$$s \mapsto s - \frac{t_0+1}{4} \mapsto 4\left(s - \frac{t_0+1}{4}\right) = 4s - t_0 - 1$$

Para ω, queremos que para cada $t_0 \in I$ fijo

$$\left[\frac{t_0+2}{4}, 1\right] \to \left[0, 1 - \frac{t_0+2}{4}\right] \to [0,1]$$

entonces para cada $s \in \left[\frac{t_0+2}{4}, 1\right]$

$$s \mapsto s - \frac{t_0+2}{4} \mapsto \frac{s - \frac{t_0+2}{4}}{1 - \frac{t_0+2}{4}} = \frac{\frac{4s-t_0-2}{4}}{\frac{4-t_0-2}{4}} = \frac{4s - t_0 - 2}{2 - t_0}$$

Con estos cálculos definamos $F : [0,1] \times [0,1]$ tal que para cada $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$

$$F(s,t) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{4s}{t+1}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \tau(4s - t - 1) & \text{si } \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ \omega\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & \text{si } \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Está bien definida pues

$$\sigma\left(\frac{4\left(\frac{t+1}{4}\right)}{t+1}\right)=\sigma(1)=x_0=\tau(0)=\tau\left(4\left(\tfrac{t+1}{4}\right)-t-1\right)$$
$$\tau\left(4\left(\tfrac{t+2}{4}\right)-t-1\right)=\tau(1)=x_0=\omega(0)=\omega\left(\frac{4\left(\frac{t+2}{4}\right)-t-2}{2-t}\right)$$

y por el lema 2.3 es continua. Es la homotopía buscada pues

$$F(s,0) = \begin{cases} \sigma(4s) & \text{si } 0\leq s\leq \frac{1}{4} \\ \tau(4s-1) & \text{si } \frac{1}{4}\leq s\leq \frac{1}{2} \\ \omega(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2}\leq s\leq 1 \end{cases} = ((\sigma\tau)\omega)(s)$$

$$F(s,1) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0\leq s\leq \frac{1}{2} \\ \tau(4s-2) & \text{si } \frac{1}{2}\leq s\leq \frac{3}{4} \\ \omega(4s-3) & \text{si } \frac{3}{4}\leq s\leq 1 \end{cases} = (\sigma(\tau\omega))(s)$$

$$\begin{aligned} F(0,t) &= \sigma(0)=x_0 \\ F(1,t) &= \omega\left(\frac{4-t-2}{2-t}\right)=\omega(1)=x_0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $(\sigma\tau)\omega \approx_{rel\{0,1\}} \sigma(\tau\omega)$.

Ahora vemos que $[x_0]$ es el elemento neutro de $\pi_1(X,x_0)$. Sea $[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$, vamos a probar que $\sigma x_0 \approx_{rel\{0,1\}} \sigma$. Consideramos la figura 8.

Encontremos un homeomorfismo de $\left[0,\frac{t_0+1}{2}\right]$ a $[0,1]$, entonces a cada $s\in\left[0,\frac{t_0+1}{2}\right]$ le asociamos

$$\frac{s}{\frac{t_0+1}{2}-0}=\frac{2s}{t_0+1}$$

esto nos propone la función

$$F(s,t)=\begin{cases} \sigma\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{si } 0\leq s\leq\frac{t+1}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{t+1}{2}\leq s\leq 1 \end{cases}$$

pues el punto final de σ es x_0; F está bien definida ya que

$$\sigma\left(\frac{2\left(\frac{t+1}{2}\right)}{t+1}\right)=\sigma(1)=x_0$$

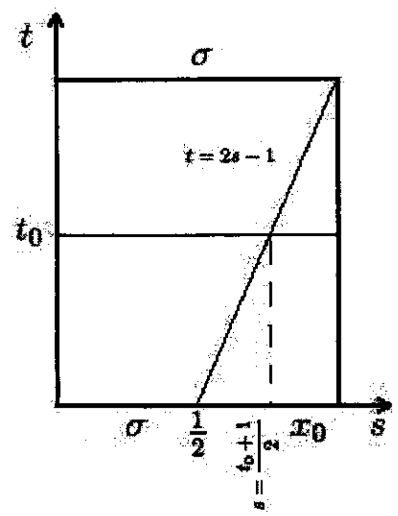

Figura 8:

la continuidad se sigue del lema 2.3; Además

$$F(s,0) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = (\sigma x_0)(s)$$

$$\begin{aligned} F(s,1) &= \sigma(s) \\ F(0,t) &= \sigma(0) = x_0 \\ F(1,t) &= x_0 \end{aligned}$$

Así $F : \sigma x_0 \approx_{rel\{0,1\}} \sigma$. De manera análoga obtenemos $x_0\sigma \approx_{rel\{0,1\}} \sigma$ y por lo tanto $[x_0]$ es el elemento identidad en $\pi_1(X, x_0)$. ■

Proposición 2.8. *Sea $\alpha : I \to X$ una trayectoria de x_0 a x_1. entonces la aplicación $\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ tal que $\alpha_*[\sigma] = [\alpha^{-1}\sigma\alpha]$ es un isomorfismo.*

Demostración. Primero α_* está bien definido pues si $\sigma_1 \approx_{rel\{0,1\}} \sigma_2$ entonces por la proposición 2.6 tenemos que $\alpha^{-1}\sigma_1\alpha \approx_{rel\{0,1\}} \alpha^{-1}\sigma_2\alpha$. Y además

$$(\alpha^{-1}\sigma_1\alpha)(0) = \alpha^{-1}(0) = \alpha(1) = x_1$$
$$(\alpha^{-1}\sigma_1\alpha)(1) = \alpha(1) = x_1$$

Así que $\alpha_*[\sigma] \in \pi_1(X, x_1)$.

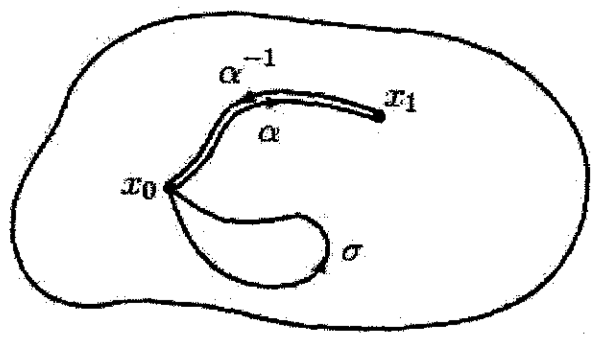

Figura 9:

Veamos que α_* es un homomorfismo. Sean $[\sigma_1], [\sigma_2] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_*[\sigma_1\sigma_2] &= [\alpha^{-1}\sigma_1\sigma_2\alpha] \\ &= [(\alpha^{-1}\sigma_1\alpha)(\alpha^{-1}\sigma_2\alpha)] \\ &= [\alpha^{-1}\sigma_1\alpha][\alpha^{-1}\sigma_2\alpha] \\ &= \alpha_*[\sigma_1]\alpha_*[\sigma_2]. \end{aligned}$$

Para demostrar que es biyectiva encontraremos una función inversa. Proponemos α_*^{-1} como ésta, ahora, si $[\sigma_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0)$ y $[\sigma_{x_1}] \in \pi_1(X, x_1)$ entonces

$$\begin{aligned} (\alpha_* \circ \alpha_*^{-1})[\sigma_{x_0}] &= \alpha_*^{-1}(\alpha_*[\sigma_{x_0}]) = \alpha_*^{-1}([\alpha^{-1}\sigma_{x_0}\alpha]) = [\alpha\alpha^{-1}\sigma_{x_0}\alpha\alpha^{-1}] = [\sigma_{x_0}] \\ (\alpha_*^{-1} \circ \alpha_*)[\sigma_{x_1}] &= \alpha_*(\alpha_*^{-1}[\sigma_{x_1}]) = \alpha_*([\alpha\sigma_{x_1}\alpha^{-1}]) = [\alpha^{-1}\alpha\sigma_{x_1}\alpha^{-1}\alpha] = [\sigma_{x_1}] \end{aligned}$$

Por lo que α_* es un isomorfismo. ■

Corolario 2.9. *Si X es conexo por trayectorias, entonces el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es independiente del punto x_0 salvo isomorfismos.*

Definición 2.10. *Definimos la categoría de los espacios topológicos punteados como aquella cuya clase de objetos son los pares (X, x_0); y si (Y, y_0) es otro espacio topológico con punto base y_0, los morfismos son las aplicaciones $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$. Cita [6]*

Definición 2.11. *Si $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$ definimos su morfismo inducido $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ por la regla $f_*[\sigma] = [f \circ \sigma]$.*

Observación 2.12. *Nótese que f_* está bien definido pues si $\sigma_1 \approx_{rel\{0,1\}} \sigma_2$ son lazos en x_0 entonces existe una homotopía F tal que*

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \sigma_1(s) \\ F(s,1) &= \sigma_1(s) \\ F(0,t) &= F(1,t) = x_0 \end{aligned}$$

Así, definimos $G : I \times I \to Y$ por $G(s,t) = f \circ F(s,t)$. Entonces

$$\begin{aligned} G(s,0) &= f(F(s,0)) = f(\sigma_1(s)) = (f \circ \sigma_1)(s) \\ G(s,1) &= f(F(s,1)) = f(\sigma_2(s)) = (f \circ \sigma_2)(s) \\ G(0,t) &= f(F(0,t)) = f(x_0) = y_0 = f(F(1,t)) = G(1,t) \end{aligned}$$

así $G : f \circ \sigma_1 \approx_{rel\{0,1\}} f \circ \sigma_2$.

f_* es un homomorfismo pues

$$f_*([\sigma_1][\sigma_2]) = f_*([\sigma_1\sigma_2]) = [f(\sigma_1\sigma_2)]$$

y además

$$f(\sigma_1\sigma_2) = \begin{cases} f\sigma_1(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f\sigma_2(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (f\sigma_1)(f\sigma_2)$$

entonces

$$[f(\sigma_1\sigma_2)] = [(f\sigma_1)(f\sigma_2)] = [f\sigma_1][f\sigma_2] = f_*[\sigma_1] f_*[\sigma_2]$$

Teorema 2.13. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación tal que $f(x_0) = y_0$ entonces f_* es un funtor, donde x_0 es el punto base de X y y_0 es el punto base de Y.*

Demostración. Si $Y = X$ y $f = Id_X$ la identidad en X entonces si $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ entonces $f_*[\sigma] = [f\sigma] = [\sigma]$. Además si $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ entonces $(gf)_*[\sigma] = [gf\sigma] = g_*[f\sigma] = g_*f_*[\sigma]$ por lo que $(gf)_* = g_*f_*$. ■

Ahora podemos hablar del funtor grupo fundamental de la categoría de los espacios topológicos punteados a la categoría de los grupos.

2.2. Homotopía de Aplicaciones

Dado que las trayectorias son aplicaciones de I en X, podemos intentar reemplazar I por algún espacio topológico Y y definir homotopía. Así ya no tendremos puntos finales $\{0,1\}$ como en I pero lo podemos reemplazar por algún $A \subseteq Y$.

Definición 2.14. *Sean X, Y espacios topológcos y $A \subseteq X$, sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones tales que $f|_A = g|_A$ decimos que $f \approx g$ rel A o bien $f \approx_{relA} g$ si existe una aplicación $F : X \times I \to Y$ que satisface que para toda $x \in X$, $a \in A$ y toda $t \in I$ lo siguiente*

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f(x) \\ F(x,1) &= g(x) \\ F(a,t) &= f(a) = g(a) \end{aligned}$$

En el caso de que $A = \emptyset$ escribimos simplemente $f \approx g$.

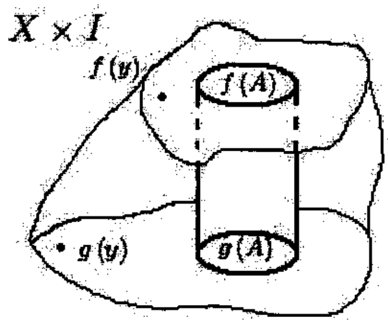

Figura 10:

Proposición 2.15. *La relación $\approx_{relA}$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos y $A \subseteq X$ y sean $f, g, h : X \to Y$. Veamos que $f \approx_{relA} f$ Definimos $F(x,t) = f(x)$ entonces

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f(x) \\ F(x,1) &= f(x) \\ F(a,t) &= f(a) \end{aligned}$$

Así que $f \approx_{relA} f$.

• Ahora la simetría, supongamos que $f \approx_{relA} g$ por la homotopía F. Definimos $G(x,t) = F(x, 1-t)$ que es continua y además

$$\begin{aligned} G(x,0) &= F(x,1) = g(x) \\ G(x,1) &= F(x,0) = f(x) \\ G(a,t) &= F(a,1-t) = f(a) = g(a) \end{aligned}$$

Así que $G : g \approx_{relA} f$.

A continuación probaremos la transitividad, suponemos que $F : f \approx_{relA} g$, $G : g \approx_{relA} h$, vamos a probar que $f \approx_{relA} h$. Sea

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

está bien definida pues F $\left(x, 2\frac{1}{2}\right) = F(x,1) = g(x) = G(x,0) = G\left(x, 2\frac{1}{2} - 1\right)$ y es continua por el lema 2.3. Luego

$$\begin{aligned} H(a,t) &= \begin{cases} F(a,2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ G(a,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g(a) \text{ si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ g(a) \text{ si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= g(a) \\ &= f(a) \\ &= h(a) \end{aligned}$$

Así que $G : f \approx_{relA} h$. ■

Ejemplo 2.16. *Sea $X = Y = \mathbb{R}^n$, si $f = Id_X$, $g = \overline{0}$ la función constante 0. Entonces $F(x,t) = tx$ es una homotopía de g a f.*

Definición 2.17. *Sea X un espacio topológico, decimos que X es contraíble si existe $x_0 \in X$ tal que $Id_X \approx x_0$, donde x_0 denota a la aplicación constante $g(x) = x_0$ para cada $x \in X$.*

Teorema 2.18. *X es contraíble si y sólo si para cualquier espacio topológico Y y para cualquier par de aplicaciones $f, g : Y \to X$ se satisface que $f \approx g$.*

Demostración. Supongamos que para cualquier espacio topológico Y y para cualquier par de aplicaciones $f, g : Y \to X$ se satisface que $f \approx g$, podemos tomar en particular $X = Y$ y las aplicaciones Id_X, x_0 entonces $Id_X \approx x_0$ y entonces X es contraíble.

Recíprocamente, supongamos que X es contraíble, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $H : Id_X \approx x_0$ entonces

$$\begin{aligned} H(x,0) &= Id_X(x) = x \\ H(x,1) &= x_0(x) = x_0 \end{aligned}$$

Sea Y un espacio topológico y $f, g : Y \to X$ Definimos $F : Y \times I \to X$ por la regla $F(y,t) = H(f(y), t)$ entonces $F : f \approx x_0$ pues

$$\begin{aligned} F(y,0) &= H(f(y), 0) = f(y) \\ F(y,1) &= H(f(y), 1) = x_0 \end{aligned}$$

De manera análoga, definimos $G : Y \times I \to X$ por la regla $G(y,t) = H(g(y), t)$ entonces $G : g \approx x_0$ pues

$$\begin{aligned} G(y,0) &= H(g(y), 0) = g(y) \\ G(y,1) &= H(g(y), 1) = x_0 \end{aligned}$$

Entonces $f \approx x_0 \approx g$ que es lo que queríamos probar. ∎

Teorema 2.19. *si X es un espacio topológico contraíble entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea X un espacio topológico contraíble y $x_0, x_1 \in X$ aplicando el teorema 2.18 al espacio topológico $Y = I$ y a las funciones x_0 y x_1 tenemos que $F : x_0 \approx x_1$ entonces

$$\begin{aligned} F(s,0) &= x_0 \\ F(s,1) &= x_1 \end{aligned}$$

Sea $\sigma(t) = F(0,t)$ es continua pues F también lo es, además

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= F(0,0) = x_0 \\ \sigma(1) &= F(0,1) = x_1 \end{aligned}$$

entonces $\sigma : I \to X$ es la trayectoria que buscamos. Entonces X es conexo por trayectorias. ∎

Obsérvese que no podemos afirmar el recíproco, es decir, si X es un espacio topológico conexo por tratectorias, no podemos afirmar que sea contraible, pues la esfera es un espacio topológico conexo por trayectorias pero no es contraible.

Corolario 2.20. *Todo subconjunto convexo X de un espacio euclideano es contraíble.*

Demostración. Sea Y un espacio topológico y $f_1, f_2 : Y \to X$, definimos una homotopía por

$$F(y,t) = tf_2(y) + (1-t) f_1(y)$$

entonces

$$\begin{aligned} F(y,0) &= f_1(y) \\ F(y,1) &= f_2(y) \end{aligned}$$

claramente F es continua pues es la combinación convexa entre las aplicaciones f_1 y f_2; lo que nos muestra que $f_1 \approx f_2$ y por el teorema 2.18 se tiene que X, es contraíble. ■

Definición 2.21. *Un espacio topológico X es simplemente conexo si es conexo por trayectorias y su grupo fundamental es trivial.*

Proposición 2.22. *Todo espacio topológico contraíble es simplemente conexo.*

La demostración de esta proposición no es obvia, pues aunque por el teorema 2.18 sabemos que si σ es una trayactoria basada en x_0 entonces $\sigma \approx x_0$ pero no podemos asegurar que $\sigma \approx x_0$ $rel\{0,1\}$; pero para ello necesitaremos algunos resultados.

Lema 2.23. *Si X es un espacio topológico y $F : I \times I \to X$ una aplicación Llamamos $\alpha(t) = F(0,t)$, $\beta(t) = F(1,t)$, $\gamma(s) = F(s,0)$, $\delta(s) = F(s,1)$. entonces $\delta \approx \alpha^{-1}\gamma\beta$ $rel\{0,1\}$.*

Demostración. Sean $x_0 = \delta(0) = \alpha(1)$ y $x_1 = \delta(1) = \beta(1)$. La idea es la siguiente, vamos a contruír homotopías E, G que vayan "transformando" a α^{-1} y a β en los lazos constantes x_0 y x_1 respectivamente, y usarlos junto con F para obtener una homotopía H tal que $H : \alpha^{-1}\gamma\beta \approx x_0\delta x_1$ $rel\{0,1\}$.

Primero construyamos $G : I \times I \to X$. Necesitamos que para cada $t_0 \in I$ fijo y para cada $s \in [0, 1 - t_0]$ se cumpla que

$$G(0, t_0) = \beta(t_0)$$

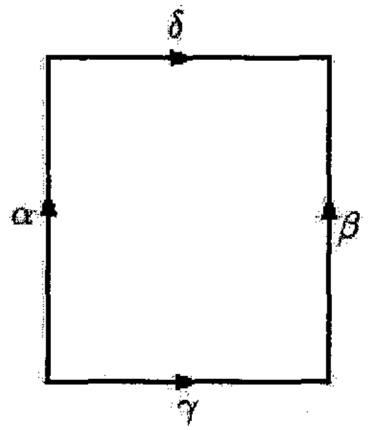

Figura 11:

$$G(1-t_0,t_0)=\beta(1)$$

y claro también que G sea continua. Por otra parte definimos

$$G(s,t)=x_1\equiv\beta(1)$$

siempre que $s>1-t$.

Consideremos el homeomorfismo $\sigma:[0,1-t]\to[t,1]$ que para cada $s\in[0,1-t]$

$$\sigma(s)=s+t$$

entonces proponemos

$$G(s,t)=\begin{cases}\beta(s+t) \text{ si } 0\leq s\leq 1-t\\ \beta(1) \text{ si } 1-t\leq s\leq 1\end{cases}$$

Es claro que $G(s,0)=\beta(s)$ y que al variar t, la trayectoria $G(s,t)$ es la curva $\beta(s)$ pero que empieza en el punto $\beta(t)$ y termina en valor constante $\beta(1)$, la función $\beta(s+t)$ es continua pues es la composición de las aplicaciones β y σ, y puesto que los conjuntos que definen $0\leq s\leq 1-t$ y $t\leq s\leq 1$ son cerrados en $I\times I$ se tiene por el lema 2.3 la continuidad de G. Ahora

$$\begin{aligned}G(s,0)&=\beta(s)\\G(s,1)&=\beta(1)=x_1\\G(0,t)&=\beta(t)\\G(1,t)&=\beta(1)=x_1\end{aligned}$$

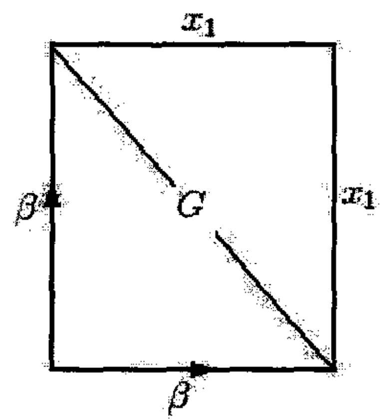

Figura 12:

Cambiando la función β por α en $G(s,t)$ definimos la aplicación E' : $I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned}
E'(s,0) &= \alpha(s)\\
E'(s,1) &= \alpha(1) = x_0\\
E'(0,t) &= \alpha(t)\\
E'(1,t) &= \alpha(1) = x_0
\end{aligned}$$

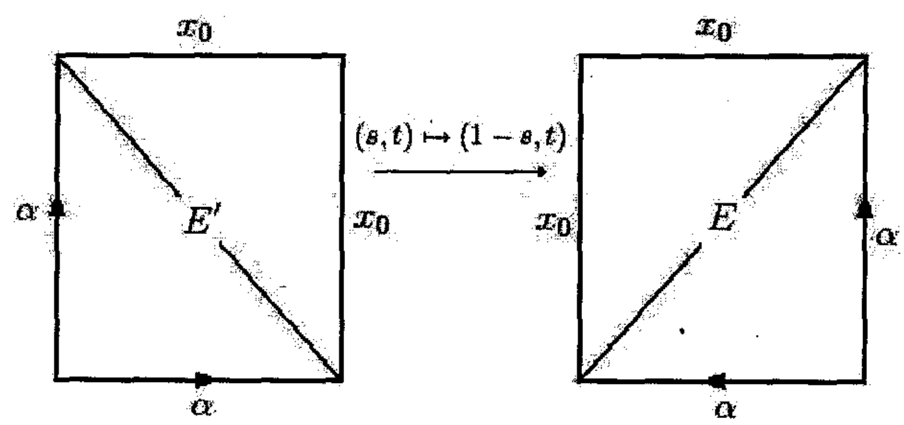

Figura 13:

y si definimos $E : I \times I \to X$ como

$$E(s,t) = E'(1-s,t)$$

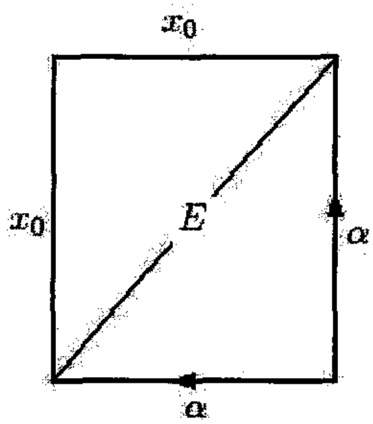

Figura 14:

y luego

$$\begin{aligned} E(s,0) &= E'(1-s,0) = \alpha(1-s) = \alpha^{-1}(s) \\ E(s,1) &= E'(1-s,1) = \alpha(1) = x_0 \\ E(0,t) &= E'(1,t) = x_0 \\ E(1,t) &= E'(0,t) = \alpha(t) \end{aligned}$$

Ahora vamos a definir la homotopía, para ello, "aplastaremos" las aplicaciones para definir una función H en $I \times I$ que contenga la información de las tres. Dividiremos el intervalo I en los tres subintervalos siguientes: $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, denotemos por R_1, R_2, R_3 los homeomorfismos "lineales" que preservan orientación, sobre los subintervalos anteriores a I, es decir

$$\begin{aligned} R_1(s) &= 4s \\ R_2(s) &= 4s-1 \\ R_3(s) &= 2s-1 \end{aligned}$$

y entonces nuestra homotopía será $H : I \times I \to X$

$$H(s,t) = \begin{cases} E(R_1(s),t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ F(R_2(s),t) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(R_3(s),t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} E(4s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ F(4s-1,t) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

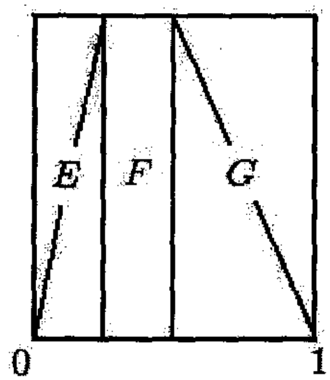

Figura 15:

H es continua por el lema 2.3 y porque R_1, R_2, R_3 son continuas. Además tenemos que

$$\left(\alpha^{-1}\gamma\right)\beta \approx (x_0\delta)\, x_1 \; rel\, \{0,1\}$$

pues

$$\begin{aligned}
H(s,0) &= \begin{cases} E(4s,0) \text{ si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ F(4s-1,0) \text{ si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,0) \text{ si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha^{-1}(4s) \text{ si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \gamma(4s-1) \text{ si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
&= \left(\alpha^{-1}\gamma\right)\beta(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(s,1) &= \begin{cases} E(4s,1) \text{ si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ F(4s-1,1) \text{ si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x_0 \text{ si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \delta(s) \text{ si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \text{ si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
&= (x_0\delta)\, x_1(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(0,t) &= E(R_1(0),t) \\
&= E(0,t) \\
&= x_0 \\
&= G(1,t) \\
&= G(R_3(1),t) \\
&= H(1,t)
\end{aligned}$$

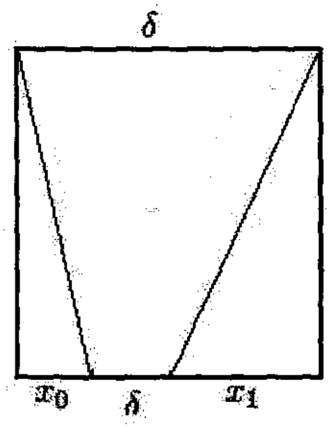

Figura 16:

Por último es fácil dar una homotopía tal que $(x_0\delta)\,x_1 \approx \delta\; rel\,\{0,1\}$ y por la propiedad de transitividad demostrada en la proposición 2.4 tenemos que

$$\alpha^{-1}\gamma\beta \approx \delta\; rel\,\{0,1\}$$

■

Definición 2.24. *Sean X, Y espacios topológicos. Una aplicación sobreyectiva $p : X \longrightarrow Y$ se llama aplicación de identificación si la topología de Y es la topología cociente inducida por p.*

Teorema 2.25 (de Transgresión). *Sea $p : X \longrightarrow Y$ una identificación y $h : X \longrightarrow Z$ una aplicación. Suponga que hp^{-1} es 1-valuada (esto es, h es constante en cada fibra $p^{-1}(y)$). Entonces $hp^{-1} : Y \longrightarrow Z$ es continua, y además el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, "hp^{-1}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [1] pág 123, teorema 3.2. ■

Ya tenemos las herramientas necesarias para demostrar la proposición 2.22. Aquí esta la prueba.

Demostración. Por la proposición 2.19 sabemos que X es conexo por trayectorias, sólo necesitamos probar que $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. Sea $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ mostraremos que $\sigma \approx_{rel\{0,1\}} x_0$. Llamemos $p' : I \to I/\{0,1\}$ a la proyección natural $p'(x) = [x]$ entonces $I/\{0,1\}$ tiene la topología inducida por p', en otras palabras, p es una identificación. Como σ, y x_0 son aplicaciones aplicamos el teorema de transgresión sobre ambas funciones y obtenemos

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & I/\{0,1\} \arrow[dl, "\sigma'"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "x_0"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & I/\{0,1\} \arrow[dl, "x_0'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

con $\sigma' : I/\{0,1\} \to X$ y $x_0' : I/\{0,1\} \to X$ definidas por $\sigma' = \sigma \circ p^{-1}$ y $x_0' = x_0 \circ p^{-1}$.

Dado que X es contraíble, la proposición 2.18 implica que existe una homotopía $F' : I/\{0,1\} \times I \to X$ tal que

$$F'([s], 0) = x_0'([s])$$
$$F'([s], 1) = \sigma'([s])$$

Ahora definimos una trayectoria $\alpha : I \to X$ por $\alpha(t) = F([0], t)$.

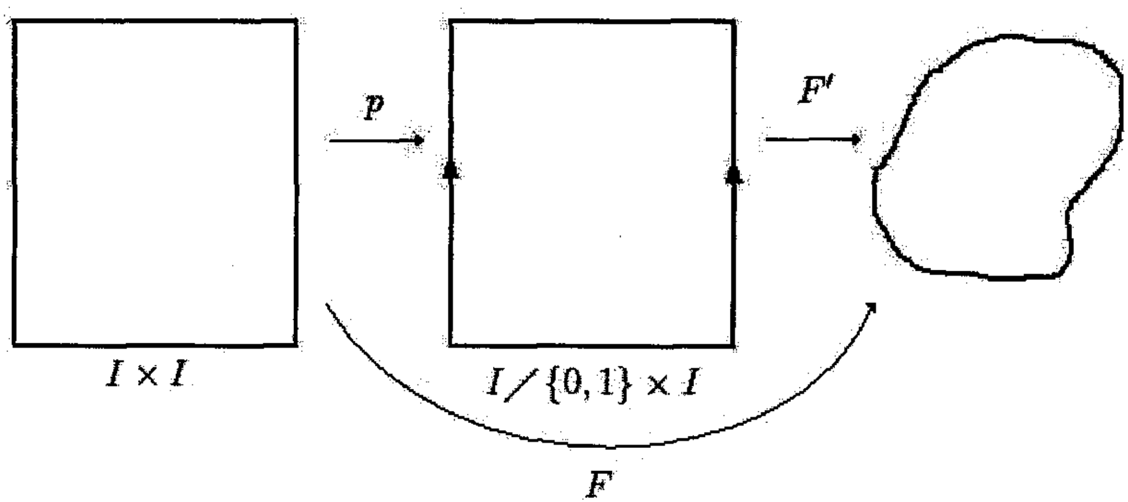

Figura 17:

Sea $p : I \times I \to I/\{0,1\} \times I$ la proyección canónica $p(s,t) = ([s], t)$ entonces p es una identificación y por lo tanto continua. Definimos $F =$

$F' \circ p$ luego F es continua y por lor los diagramas (I) y (II) tenemos que $x_0' (p'(s)) = x_0(s)$ y $\sigma'(p'((s))) = \sigma(s)$ y entonces obtenemos

$$\begin{aligned} F(s,0) &= F'(p(s,0)) = F'([s],0) = x_0'([s]) = x_0'(p'(s)) = x_0(s) \\ F(s,1) &= F'(p(s,1)) = F'([s],1) = \sigma'([s]) = \sigma'(p'((s))) = \sigma(s) \\ F(0,t) &= F'(p(0,t)) = F'([0],t) = \alpha(t) \\ F(1,t) &= F'(p(1,t)) = F'([1],t) = \alpha(t) \end{aligned}$$

Entonces haciendo $\delta = \sigma$, $\gamma = x_0$, $\alpha = \beta$ en el lema 2.23 tenemos que

$$\sigma \approx_{rel\{0,1\}} \alpha^{-1} x_0 \alpha \approx_{rel\{0,1\}} \alpha^{-1}(x_0\alpha) \approx_{rel\{0,1\}} \alpha^{-1}\alpha \approx_{rel\{0,1\}} x_0$$

■

Corolario 2.26. *Sean $f, g : Y \to X$ aplicaciones homotópicas por medio de una homotopía $F : Y \times I \to X$. Sea $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$ y $x_1 = g(y_0)$. Sea $\alpha : I \to X$ la trayectoria de x_0 a x_1 definida por $\alpha(t) = F(y_0, t)$ para cada $t \in I$. Entonces el diagrama siguiente conmuta.*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ & \pi_1(X, x_1) \end{tikzcd}$$

Demostración. Si $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$, entonces por el lema 2.23 tenemos que $g \circ \sigma \approx_{rel\{0,1\}} \alpha^{-1}(f \circ \sigma)\alpha$. Así que $g_*[\sigma] = [g \circ \sigma] = [\alpha^{-1}(f \circ \sigma)\alpha] = \alpha_*[f \circ \sigma] = \alpha_* f_*[\sigma]$. Véase figura 18.

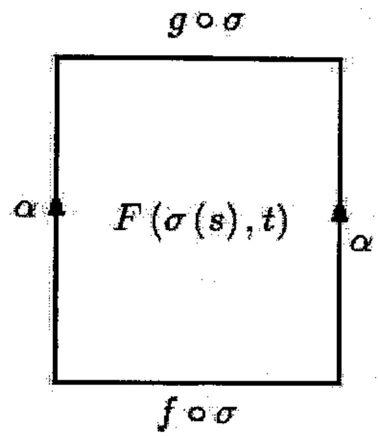

Figura 18:

■

Corolario 2.27. *Con las condiciones del corolario 2.26, f_* es un isomorfismo si y sólo si g_* lo es.*

Demostración. Sabemos de la proposición 2.8 que α_* es un isomorfismo y por lo tanto α_*^{-1} también lo es. Del corolario 2.26 tenemos que $g_* = \alpha_* f_*$ entonces si f_* es in isomorfismo tambien lo es g_*.

También $f_* = \alpha_*^{-1} g_*$ entonces si g_* es un isomorfismo también lo es f_*. ■

Definición 2.28. *Una aplicación $f : Y \to X$ se llama equivalencia homotópica si existe $f' : X \to Y$ tal que $f \circ f' \approx Id_X$ y $f' \circ f \approx Id_Y$. Entonces decimos que X y Y son homotópicamente equivalentes.*

Proposición 2.29. *X es contraíble $\Leftrightarrow$ X es homotópicamente equivalente a $\{x_0\}$.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos que X es contraíble, por su definición tenemos que $Id_X \approx x_0$ para algún $x_0 \in X$. Sea $Y = \{x_0\}$ sabemos que $x_0 : X \to Y$ sea $i : Y \to X$ la inclusión, entonces $i(x_0) = x_0$. Entonces

$$x_0 \circ i = x_0|_Y = Id_Y$$
$$Id_X \circ x_0 = x_0 \approx Id_X$$

Entonces x_0 es una equivalencia homotópica y con esto probamos que X es homotópicamente equivalente a $\{x_0\}$.

• $\Longleftarrow$]Supongamos que X es homotópicamente equivalente a $\{x_0\}$. Entonces existen $f : X \to \{x_0\}$ y $f' : \{x_0\} \to X$ tal que $f \circ f' \approx Id_{\{x_0\}}$ y $f' \circ f \approx Id_X$. Sea $x_1 = f'(x_0)$, entonces como $f' \circ f = x_1$ se tiene entonces sustituyendo que $x_1 \approx Id_X$ y por definición X es contraíble. ■

Corolario 2.30. *Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica entonces $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo para cualquier $x \in X$.*

Demostración. De la definición de equivalencia homotópica tenemos que existe $f' : Y \to X$ tal que $f \circ f' \approx Id_Y$ y $f' \circ f \approx Id_X$.

Utilizando el corolario 2.26 tenemos que

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[r, "f' \circ f_*"] \arrow[dr, "Id_*"'] & \pi_1(X, f' \circ f(x)) \\ & \pi_1(X,x) \arrow[u, "\alpha_*"'] \end{tikzcd}$$

Donde $\alpha : I \to X$ es una trayectoria de x a $f' \circ f(x)$ definida como en el corolario 2.26. Entonces tenemos que $f'_* \circ f_* = \alpha_* Id_* = \alpha_*$. además α_* es un isomorfismo entonces f es sobreyectiva.

De manera análoga, se tiene que $f_* \circ f'_* = Id_* \beta_* = \beta_*$ donde $\beta : I \to X$ es una trayectoria de x a $f \circ f'(x)$ luego tenemos que f_* es inyectiva. Así que f es un isomorfismo. ■

Proposición 2.31. *Sea X conexo por trayectorias, entonces son equivalentes:*

1. *X es simplemente conexo.*
2. *Toda aplicación de S^1 en X se puede extender a una aplicación del disco cerrado E^2 en X.*
3. *Si σ, $\tau : I \to X$ son trayectorias en X tales que $\sigma(0) = \tau(0)$ y $\sigma(1) = \tau(1)$ entonces $\sigma \approx \tau$ rel $\{0,1\}$.*

Demostración. 1)$\Longrightarrow$2): Sea $\sigma : I/\{0,1\} \to X$ sea $p' : I \to I/\{0,1\}$ la proyección canónica. Sea $x_0 = \sigma([0])$.

Sea $\sigma'_{x_0} = \sigma \circ p' : I \to X$ entonces σ'_{x_0} es un lazo basado en x_o pues

$$\sigma'_{x_0}(0) = \sigma p'(0) = \sigma([0]) = x_0 = \sigma([1]) = \sigma p'(1) = \sigma'_{x_0}(1)$$

Como X es simplemente conexo se tiene que $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ y entonces $\sigma'_{x_0} \approx x_0 \; rel\{0,1\}$. Sea F' su homotopía entonces $F' : I \times I \to X$ es tal que

$$\begin{gathered} F'(s,0) = x_0 \\ F'(s,1) = \sigma'_{x_0}(s) \\ F'(0,t) = F'(1,t) = x_0 \end{gathered}$$

Definimos $p : I \times I \to I/\{0,1\} \times I$ la proyección canónica, esto es, $p(s,t) = ([s], t)$.

Entonces F', p son continuas y además F' es constante en cada fibra de p ya que las únicas fibras de p con más de un elemento son los de la forma $p^{-1}([0], t) = \{(0,t), (1,t)\}$, y tenemos que $F'(0,t) = F'(1,t)$. Esto nos da derecho a definir $F = F' \circ p^{-1}$ y además por el teorema 2.25 (Teorema de transgresión) $F : I/\{0,1\} \times I \to X$ es continua y además $F' = F \circ p$

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "p"] \arrow[d, "F'"'] & I/\{0,1\} \times I \arrow[dl, "F"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Además

$$\begin{gathered} F([s],0) = F' \circ p^{-1}([s],0) = F'(s,0) = x_0 \\ F([s],1) = F' \circ p^{-1}([s],1) = F'(s,1) = \sigma'_{x_0}(s) = \sigma \circ p'(s) = \sigma([s]) \\ F([0],t) = F' \circ p^{-1}([0],t) = F'(0,t) = x_0 \end{gathered}$$

Ahora sea $\Pi : I/\{0,1\} \times I \to E_2$ donde $\Pi([\theta], h) = (2\pi\theta, h)$ en coordenadas polares.

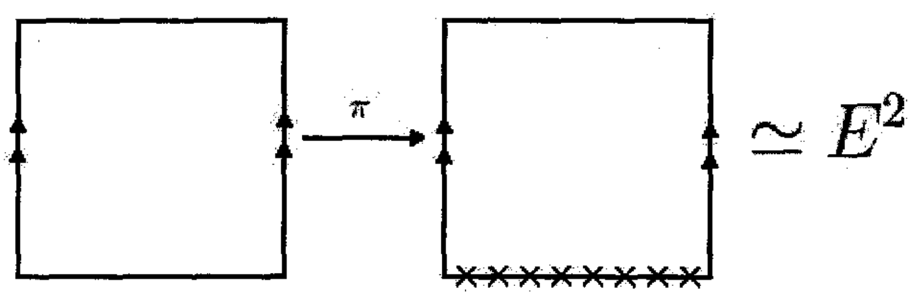

Figura 19:

Está bien definida pues $\Pi([0], h) = (0,h) = (2\pi, h) = (2\pi(1), h) = \pi([1], h)$.

Además F es constante en cada fibra de π, pues la única fibra de π con más de un elemento es $\Pi^{-1}(0) = \{([\theta], 0) : \theta \in I\}$ y $F([\theta], 0) = x_0$. Así que podemos definir la función $\widehat{F} : E^2 \to X$ tal que $\widehat{F} = F \circ \pi^{-1}$ y por el teorema de transgresión tenemos que $\widehat{F}$ es continua y $\widehat{F} \circ \pi = F$.

$$\begin{tikzcd} I/\{0,1\} \times I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "F"'] & E^2 \arrow[dl, "\widehat{F}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Entonces, si $\widetilde{F}(\theta, r) = \widehat{F}(2\pi\theta, r)$ afirmamos que $\widetilde{F}$ es la extensión de σ buscada, pues

$$\widetilde{F}(\theta, 1) = \widehat{F}(2\pi\theta, 1) = F\left(\pi^{-1}(2\pi\theta, 1)\right) = F([\theta], 1) = \sigma([\theta])$$

y $\widetilde{F}$ es continua así terminamos esta implicación.

2)$\Longrightarrow$1): Sea $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ probaremos que $x_0 \approx \sigma\ rel\{0,1\}$ y con esto $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ y como X es conexo por trayectorias tendríamos que X es simplemente conexo.

Sea $p' : I \to I/\{0,1\}$ la proyeción natural, entonces σ es constante en cada fibra de p' ya que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ por ser un lazo basado en x_0. Entonces podemos definir la función $\sigma' : I/\{0,1\} \to X$ donde $\sigma' = \sigma \circ (p')^{-1}$, por el teorema de transgresión obtenemos que σ' es continua y además $\sigma' \circ p' = \sigma$.

Así que por hipótesis podemos extender σ' a una aplicación $G : E^2 \to X$, tal que $G|_{I/\{0,1\}\times\{1\}} = \sigma'$. Consideremos $(I/\{0,1\}) \times I/*$, donde $*$ relaciona los elementos de la forma $([s_1], 0)$ con $([s_2], 0)$. Sea $\hat{p}$ la proyección natural $\widehat{p} : I/\{0,1\} \times I \to (I/\{0,1\} \times I)/*$, que es continua, así definimos $p : I \times I \to (I/\{0,1\})/*$ con la regla $p(s,t) = \widehat{p}(p'(s), t)$ continua pues p y p' son continuas. (Notemos que $(I/\{0,1\} \times I)/*$ restringido a $t = 1$ es una copia de S^1.

Sea $F = G \circ p$. Vemos que $G : x_0 \approx \sigma\ rel\{0,1\}$.

$$\begin{gathered} F(s,1) = G(p(s,1)) = \sigma'([s]) = \sigma(s) \\ F(s,0) = G(p(s,0)) = x_1 \\ \alpha(t) := F(0,t) = F(1,t) = G(p(0,t)) \end{gathered}$$

aplicando el Lema 2.23 tenemos:

$$\sigma \approx \alpha^{-1} x_1 \alpha\ rel\{0,1\}.$$

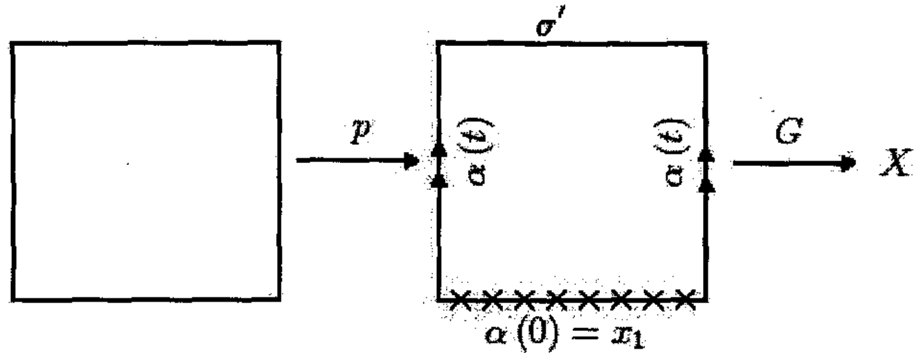

Figura 20:

entonces

$$\alpha^{-1}\alpha \approx \sigma \; rel \{0,1\}$$

luego

$$x_1 \approx \sigma \; rel \{0,1\}$$

y como $x_0 = \sigma(0) = x_1$ entonces

$$x_0 \approx \sigma \; rel \{0,1\}$$

1)$\Longrightarrow$3): Supongamos que X es simplemente conexo, sean σ, τ tales que $x_0 = \sigma(0) = \tau(0)$ y $x_1 = \sigma(1) = \tau(1)$. Como X es simplemente conexo, en particular su grupo fundamental es trivial y tenemos que $\sigma\tau^{-1} \approx x_0$ $rel \{0,1\}$. Usando la proposición 2.6,$(\sigma\tau^{-1})\tau \approx x_0\tau \; rel \{0,1\}$ y por un lado tenemos

$$\left(\sigma\tau^{-1}\right)\tau \approx \sigma\left(\tau^{-1}\tau\right) \;\; rel \{0,1\}$$

entonces

$$\left(\sigma\tau^{-1}\right)\tau \approx \sigma x_0 \; rel \{0,1\}$$

y luego

$$\left(\sigma\tau^{-1}\right)\tau \approx \sigma \; rel \{0,1\}$$

y por otro lado

$$x_0\tau \approx \tau \; rel \{0,1\}$$

y entonces

$$\sigma \approx \tau \; rel \{0,1\}$$

3)$\Longrightarrow$1): Sea $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, ahora σ y x_0 son trayectorias con el mismo punto inicial y final, se tiene entonces por hipótesis que $\sigma \approx x_0 \; rel\{0,1\}$ entonces X es simplemente conexo. ■

2.3. El Grupo Fundamental del Círculo

En esta sección encontraremos el primer grupo fundamental no trivial, el cual nos servirá como base para obtener incluso, todas las superficies compactas y conexas en $\mathbb{R}^3$. Intuitivamente,el grupo fundamental de S^1 es el grupo cíclico infinito, ya que podemos *enrollar* al círculo con trayectorias en alguna dirección y *desenrrollarlo* en sentido contrario, y además lo podemos enrollar tanto como queramos siempre una vuelta más y nunca va a volver a desenrollarse. Probaremos estas dos ideas en S^1 en forma rigurosa, primero que efectivamente que su grupo fundamental es cíclico y después que es de orden infinito, pero antes necesitamos algunos resultados de espacios métricos.

Los lemas 2.32, 2.33, 2.34 están basados en las pruebas en [5] pag. 198-200.

Lema 2.32. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua y X es compacto entonces existe $c \in X$ tal que para cualquier $x \in X$ se tiene que $f(c) \leq f(x)$.*

Demostración. Sea $A = f(X)$ entonces A es compacto por la continuidad de f. Mostraremos que A tiene un mínimo. Procedemos por contradicción, Si A no tiene un elemento mínimo entonces la colección de abiertos $\{(a,\infty)\}_{a\in A}$ es una cubierta de $\mathbb{R}$ tomemos una subcubierta finita $\{(a_i,\infty)\}_{i=1}^{n}$ de ella, sea $a_m = \min_{i=1,2,\ldots,n} \{a_i\}$ entonces $a_m \notin (a_m,\infty) = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i,\infty)$ entonces $\{(a_i,\infty)\}_{i=1}^{n}$ no es una cubierta de A que es una contradicción, asi que A tiene un elemento mínimo m y como f es sobre A entonces existe $c \in X$ tal que $f(c) = m$. ■

Lema 2.33. *Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de un espacio métrico compacto (X,d), entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada subconjunto A de X de diámetro menor que ε se tiene que A está contenido en alguno de los elementos de $\mathcal{A}$. a ε se le llama un número de Lebesgue.*

Demostración. Si $X \in \mathcal{A}$ entonces el resultado se cumple trivialmente. Entonces supongamos que $X \notin \mathcal{A}$ entonces de la compacidad de X tenemos que $\mathcal{A}$ tiene una cubierta finita $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ para cada $i = 1,2,...,n$ definamos $C_i = X - A_i$, claramente éste es un subconjunto cerrado de X. Definamos $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$. Veamos que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Como $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una cubierta de X entonces hay un i tal que $x \in A_i$ luego A_i es un conjunto abierto, o sea que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset A_i$ entonces si $y \in C_i$ se tiene que $y \notin B_\delta(x)$ y entonces $d(x,y) \geq \delta$ y entonces $d(x, C_i) \geq \delta$ entonces

$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d(x, C_j) \geq \frac{1}{n} d(x, C_i) \geq \frac{1}{n}\delta$ y como f es continua pues la función d lo es tenemos por el lema 2.32 que f alcanza un valor mínimo ε probemos que éste es un número de Lebesgue.

Sea $B \subset X$ tal que $Diam(B) < \varepsilon$ sea $x_0 \in B$ entonces $B \subset B_\varepsilon(x_0)$ entonces sea m tal que $d(x_0, C_m) = \max_{j=1,2,\dots,n} \{d(x_0, C_j)\}$

$$\varepsilon \leq f(x) \leq d(x_0, C_m)$$

Entonces $B \subset B_\varepsilon(x_0) \subset A_m$. ∎

Lema 2.34. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación del espacio métrico compacto (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_y) entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ entonces $\left\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) : y \in Y\right\}$ es un recubrimento abierto de Y y entonces $\mathcal{A} = \left\{f^{-1}\left(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)\right) : y \in Y\right\}$ es un recubrimento abierto de X sea δ un número de Lebesgue de esta cubierta. Entonces sean x_1, $x_2 \in X$ tales que $d_X(x_1, x_2) < \delta$ entonces $Diam(\{x_1, x_2\}) < \delta$ entonces existe $y \in Y$ tal que $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}\left(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)\right)$ o bien $\{f(x_1), f(x_2)\} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ así que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ por lo que f es uniformemente continua. ∎

Teorema 2.35. *El grupo fundamental $\pi_1(S^1, (1,0))$ es un grupo cíclico infinito generado por $[f]$ donde $f(t) = (\cos(2\pi t), sen(2\pi t))$.*

Demostración. Sea g un lazo en S^1 basado en $(1,0)$, esto es, $g : I \to S^1$ es continua y además $g(0) = g(1) = (1,0)$ Vamos a probar que $g \approx f^m rel\{0,1\}$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$

Consideremos

$$U_1 = \left\{(x,y) \in S^1 : y > -\tfrac{1}{10}\right\}$$
$$U_2 = \left\{(x,y) \in S^1 : y < \tfrac{1}{10}\right\}$$

Entonces U_1 y U_2 son conjuntos abiertos de S^1 y $S^1 = U_1 \cup U_2$. Es claro que tanto U_1 como U_2 son homeomorfos a $(0,1)$ así que ambos son contraíbles.

Supongamos primero un caso trivial. Si $g(I) \subset U_1$ o $g(I) \subset U_2$ entonces g es homotopico a un lazo constante en S^1 entonces por ser éste conexo por trayectorias, se tiene que g es homotópico a f^0. Entonces supongamos que no son válidas ninguna de las contenciones anteriores. Afirmamos que es posible divdir a I en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ tal que

1. $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$ o $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_2$ para cada i

2. $g([t_{i-1},t_i])$ y $g([t_i,t_{i+1}])$ no estan contenidos en el mismo U_j

Para probarlo por el lema 2.33 sabemos que existe un número de Lebesgue ε de la cubierta abierta $\{g^{-1}(U_1), g^{-1}(U_2)\}$ entonces dividimos el intervalo I en una cantidad finita de subintervalos de longitud menor que ε entonces se cumple la primer condición, pues por la forma en que fueron contruidos los subintervalos I_i usando un número de Lebesgue tenemos que cada elemento I_i cumple $I_i \subset g^{-1}(U_1)$ o $I_i \subset g^{-1}(U_2)$ entonces $g(I_i) \subset U_1$ o $g(I_i) \subset U_2$ Ahora si dos subintervalos contiguos son tal que ambos están contenidos en el mismo U_1 o U_2 simplemente consideramos su unión, hacemos este proceso para cada par de éstos (aquí usamos que fueran una cantidad finita) y entonces es claro que cumplen la primera y la segunda condición.

Consideremos para cada $i = 0,1,...,n-1$ la trayectoria $g_i : I \longrightarrow S^1$ tal que $g_i(s) = g(s(t_{i+1}-t_i)+t_i)$ es simplemente considerar la trayectoria de $g|_{[t_i,t_{i+1}]}$. Entonces es claro que $g = g_0g_1\cdots g_{n-1}$ además cada g_i es una trayectoria en U_1 o en U_2 Afirmamos que $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$ pues si $g([t_{i-1},t_i]) \subset U_1$ entonces por la condición 2 se tiene que $g([t_i,t_{i+1}]) \subset U_2$ entonces en particular $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$. Geométricamente observamos que $U_1 \cap U_2$ tiene 2 componentes por trayectorias, la que contiene a $(1,0)$ y la que contiene a $(-1,0)$ entonces podemos tomar para cada i una trayectoria $\gamma_i : I \longrightarrow U_1 \cap U_2$ que empiece en $g(t_i)$ y termine en $(1,0)$ ó $(-1,0)$ si dependiendo en cual componente por trayectorias de $U_1 \cap U_2$ se encuentre el punto $g(t_i)$. Definamos entonces

$$\begin{gathered}\delta_0 = g_0\gamma_0 \\ \delta_i = \gamma_{i-1}^{-1}g_i\gamma_i \text{ si } 0 < i < n-1 \\ \delta_{n-1} = \gamma_{n-2}^{-1}g_{n-1}\end{gathered}$$

Notemos que cada δ_i es una trayectoria en U_1 ó en U_2 entonces tenemos que

$$\begin{aligned}[g] &= [g_0g_1\cdots g_{n-1}] \\ &= \left[g_0\left(\gamma_0\gamma_0^{-1}\right)g_1\left(\gamma_1\gamma_1^{-1}\right)\cdots g_{n-2}\left(\gamma_{n-2}\gamma_{n-2}^{-1}\right)g_{n-1}\right] \\ &= \left[(g_0\gamma_0)\left(\gamma_0^{-1}g_1\gamma_1\right)\cdots\left(\gamma_{n-3}^{-1}g_{n-2}\gamma_{n-2}\right)\left(\gamma_{n-2}^{-1}g_{n-1}\right)\right] \\ &= [\delta_0\delta_1\cdots\delta_{n-1}]\end{aligned}$$

Notemos que si δ_i es un lazo en U_1 o en U_2 entonces por ser éste contraíble se tiene por el teorema 2.22 se tiene que δ_i es homotópico al lazo constante de valor $(1,0)$ o $(-1,0)$ según sea el caso entonces podemos ignorar estos casos y considerar que δ_i no es un lazo, simplemente una trayectoria con distintos puntos inicial y final. Sea η_1 una trayectoria en U_1 de $(1,0)$ a $(-1,0)$ además es única salvo homotopías pues si η_1' fuera otra trayectoria como η_1 entonces $\eta_1'\eta_1^{-1}$ es un lazo basado en $(1,0)$ y como U_1 es simplemente conexo tendriamos que $\eta_1'\eta_1^{-1}$ es homotopico (relativo a $\{0,1\}$) al lazo constante $(1,0)$ y entonces $\eta_1 \approx \eta_1'$ $\text{rel}_{\{0,1\}}$ Análogamente, sea η_2 una trayectoria en U_2 de $(-1,0)$ a $(1,0)$ que es única por las mismas razones que η_1 notemos que $f \approx \eta_1\eta_2$ $\text{rel}_{\{0,1\}}$ y además para cada i tenemos uno de los siguientes casos

$$\begin{gathered}\delta_i = \eta_1\\ \delta_i = \eta_1^{-1}\\ \delta_i = \eta_2\\ \delta_i = \eta_2^{-1}\end{gathered}$$

y además, por la condición 2, si $\delta_i = \eta_1^{\pm 1}$ entonces $\delta_{i+1} = \eta_2^{\pm 1}$ y si $\delta_i = \eta_2^{\pm 1}$ entonces $\delta_{i+1} = \eta_1^{\pm 1}$ entonces tenemos sólo uno de los tres casos siguentes para g y para alguna $m > 0$

$$\begin{gathered}g \approx (1,0) \approx f^0 \text{ rel}_{\{0,1\}}\\ g \approx \eta_1\eta_2\eta_1\eta_2...\eta_1\eta_2 \approx f^m \text{ rel}_{\{0,1\}}\\ g \approx \eta_2^{-1}\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}\eta_1^{-1}...\eta_2^{-1}\eta_1^{-1} = (\eta_1\eta_2\eta_1\eta_2...\eta_1\eta_2)^{-1} \approx f^{-m} \text{ rel}_{\{0,1\}}\end{gathered}$$

Con esto probamos que $\pi_1(S^1,(1,0))$ es un grupo cíclico. Ahora veamos que $\pi_1(S^1,(1,0))$ tiene que ser infinito para esto consideremos S^1 como subconjunto del plano complejo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sea h un lazo en S^1. Entonces por el lema 2.34 se tiene que h es uniformemente continua así que si tomamos $\varepsilon = 1$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|s-t| < \delta$ entonces $|h(s) - h(t)| < 1$. Entonces dividamos I en intervalos $[t_k, t_{k+1}]$ tal que $t_{k+1} - t_k < \delta$, entonces si $t, t' \in [t_k, t_{k+1}]$ se tiene que $|h(t) - h(t')| < 1$ Ahora para cada $i, 1 \le i \le n$ sea $\theta_i = Arg\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right)$ entonces de la desigualdad $|h(t_i) - h(t_{i-1})| < 1$ se tiene que

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$$

Ahora definamos el grado de h como sigue, $Grado(h) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\theta_i$. Este número es un entero pues $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ es una determinación del argumento del número complejo $\prod_{i=1}^{n}\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})} = \frac{h(t_n)}{h(t_0)} = 1$ así que $\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 2\pi k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$ entonces

$Grado(h) = k$ es un entero. Ahora veamos que el grado de h es independiente de la elección de los subintervalos de I, Notemos que si tomados dos particiones de intervalo I podemos encontrar una partición del mismo I que además es un refinamiento de ambas divisiones tomadas inicialmente, por lo que sólo es necesario mostrar que si tenemos una division de I entonces cualquier refinamiendo de éste genera el mismo valor para $Grado(h)$; para esto sólo es necesario considerar refinamiendos donde sólo se agregue un punto s que "corte" un subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y los demás refinamientos es repetir el procedimiento una cantidad finita de veces. El refinamiento que consideramos es $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < s < t_i < \cdots < t_n = 1$. Reemplacemos el valor θ_i correspondiente al subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ por $\theta_i' + \theta_i''$ por los correspondientes a los subintervalos $[t_{i-1}, s]$ y $[s, t_i]$ respectivamente, o sea

$$\theta_i' = Arg\left(\frac{h(s)}{h(t_{i-1})}\right)$$
$$\theta_i'' = Arg\left(\frac{h(t_i)}{h(s)}\right)$$

y de nuevo

$$-\tfrac{\pi}{2} < \theta_i' < \tfrac{\pi}{2}$$

$$-\tfrac{\pi}{2} < \theta_i'' \leq \tfrac{\pi}{2}$$

Así que $Arg\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right) = Arg\left(\frac{h(t_i)}{h(s)}\right) + Arg\left(\frac{h(s)}{h(t_{i-1})}\right) = \theta_i'' + \theta_i'$ y además por las desigualdades anteriores tenemos que

$$-\pi < \theta_i'' + \theta_i' < \pi$$

pero el hecho de que $Arg\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right) = \theta_i'' + \theta_i'$ nos dice que estos difieren en un múltiplo de 2π luego tenemos que necesariamente se da la desgualdad

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_i'' + \theta_i' < \frac{\pi}{2}$$

así que $\theta_i = \theta_i'' + \theta_i'$. Ahora mostraremos que el grado de un lazo es invariante bajo homotopías, así que supongamos que g, h son lazos basados en 1 homotópicos relativo al $\{0, 1\}$. Sea $F : I \times I \to S^1$ su homotopía y tenemos que

$$F(s, 0) = h(s)$$
$$F(s, 1) = g(s)$$
$$F(0, t) = F(1, t) = 1$$

De nuevo usamos el lema 2.34 de manera análoga a como se hizo anteriormente para afirmar la existencia de subdivisiones de $I \times I$ en rectángulos de la forma $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$; donde $\{s_i\}$ y $\{t_j\}$ son particiones del intervalo, y que F manda los intervalos a subconjuntos de S^1 de diámetro menor que 1 i.e., si $(s,t), (s',t') \in [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ se tiene que

$$|F(s,t) - F(s',t')| < 1$$

Ahora sean

$$\theta_i' = Arg\left(\frac{F(s_i,t_{j-1})}{F(s_{i-1},t_{j-1})}\right)$$
$$\theta_i'' = Arg\left(\frac{F(s_i,t_j)}{F(s_{i-1},t_j)}\right)$$

con $|\theta_i'| < \frac{\pi}{2}$ y $|\theta_i''| < \frac{\pi}{2}$. Si probamos que $\sum_{i=1}^{n} \theta_i' = \sum_{i=1}^{n} \theta_i''$ podriamos repetir el mismo argumento para cada $j = 1, 2, ..., m$ y tendriamos que $Grado\,(h) = Grado\,(g)$ Sea $\varphi_i = Arg\left(\frac{F(s_i,t_j)}{F(s_i,t_{j-1})}\right)$ con $|\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$ Ahora $\theta_i'' - \theta_i'$ y $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ son ambos determinaciones del argumento del mismo número así que éstos difieren en un múltiplo de 2π y por las mismas razones anteriores concluimos que $\theta_i'' - \theta_i' = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Ahora podemos sumar sobre la i obteniendo

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i'' - \sum_{i=1}^{n} \theta_i' = \sum_{i=1}^{n} \theta_i'' - \theta_i' = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i - \varphi_{i-1} = \varphi_n - \varphi_0$$

Ahora si calculamos φ_n y φ_0

$$\varphi_n = Arg\left(\frac{F(s_n,t_j)}{F(s_n,t_{j-1})}\right) = Arg\left(\frac{F(1,t_j)}{F(1,t_{j-1})}\right) = Arg\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$
$$\varphi_0 = Arg\left(\frac{F(s_0,t_j)}{F(s_0,t_{j-1})}\right) = Arg\left(\frac{F(1,t_j)}{F(1,t_{j-1})}\right) = Arg\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

así que llegamos a que $\sum_{i=1}^{n} \theta_i' = \sum_{i=1}^{n} \theta_i''$ que es lo que queríamos. Definamos $h_m = \cos(2m\pi t) + isen\,(2m\pi t)$ se puede calcular que tiene grado m así que el orden del grupo fundamental del círculo es infinito. Con esto hemos demostrado que $\pi_1(S^1, (1,0)) = \mathbb{Z}$. ■

2.4. Retractos y Aplicaciones

Como hemos visto, no es fácil encontrar grupos fundamentales en general, pero esta proposición nos dice que el el grupo fundamental de el producto de dos espacios topológicos, y por lo tanto de una cantidad finita, es la suma directa de los grupos fundamentales de cada espacio.topológico.

Proposición 2.36. *Sean X, Y espacios topológicos y sean $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. Entonces $\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Demostración. El isomorfismo se obtiene como sigue:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p_x"'] \arrow[dr, "p_y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Sean p_x, p_y las proyecciones $p_x : X \times Y \to X$ y $p_y : X \times Y \to Y$. Estos inducen los homomorfismos $(p_x)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \to \pi_1(X, x_0)$ y $(p_y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X \times Y)) \arrow[dl, "(p_x)_*"'] \arrow[dr, "(p_y)_*"] & \\ \pi_1(X) & & \pi_1(Y) \end{tikzcd}$$

Sea $\psi : \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ tal que si σ es un lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) digamos $\sigma(t) = (\sigma_x(t), \sigma_y(t))$ entonces definimos

$$\psi([\sigma]) := \left((p_x)_*[\sigma], (p_y)_*[\sigma]\right) = ([\sigma_x], [\sigma_y])$$

Notemos que σ_X es un lazo en X basado en x_0 y σ_Y es un lazo en Y basado en y_0 y además, si $\tau \approx \sigma \; rel\{0,1\}$ donde $\tau(t) = (\tau_x(t), \tau_y(t))$ tenemos que

$$\psi([\tau]) = ([\tau_x], [\tau_y]) = ([\sigma_x], [\sigma_y]) = \psi([\sigma])$$

Así que ψ está bien definido.

Probemos que ψ es homomorfismo. Sean $[\sigma]$, $[\tau] \in \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$, entonces

$$\begin{aligned} \psi([\sigma\tau]) &= \left((p_x)_*[\sigma\tau], (p_y)_*[\sigma\tau]\right) \\ &= \left((p_x)_*[\sigma](p_x)_*[\tau], (p_y)_*[\sigma](p_y)_*[\tau]\right) \\ &= \left((p_x)_*[\sigma], (p_y)_*[\sigma]\right)\left((p_y)_*[\tau], (p_x)_*[\tau]\right) \\ &= \psi([\sigma])\psi([\tau]) \end{aligned}$$

- Ahora probamos que ψ es biyectiva encontrando su inversa ψ^{-1}.

Sea $\varphi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ por la siguiente regla

$$\varphi([\sigma], [\tau]) := [(\sigma(t), \tau(t))] \ \forall t \in I$$

Afirmamos que $\varphi = \psi^{-1}$. Veamos primero que φ está bien definido. Supongamos que $F_1 : \sigma_1 \approx \sigma_2 \ rel\{0,1\}$ y $F_2 : \tau_1 \approx \tau_2 \ rel\{0,1\}$ entonces $(\sigma_1, \tau_1) \approx (\sigma_2, \tau_2) \ rel\{0,1\}$ pues sea $F : I \times I \to X \times Y$ como $F(s,t) = (F_1, F_2)(s,t)$ donde $(F_1, F_2)(s,t) = (F_1(s,t), F_2(s,t))$; pues

$$\begin{array}{c} F(s,0) = (F_1(s,0), F_2(s,0)) = (\sigma_1(s), \tau_1(s)) = (\sigma_1, \tau_1)(s) \\ F(s,1) = (F_1(s,1), F_2(s,1)) = (\sigma_2(s), \tau_2(s)) = (\sigma_2, \tau_2)(s) \\ F(0,t) = (F_1(0,t), F_2(0,t)) = (x_0, y_0) = (F_1(1,t), F_2(1,t)) = F(1,t) \end{array}$$

Por tanto F es la homotopía deseada.

Veamos que $\varphi = \psi^{-1}$. Calculemos $\psi \circ \varphi$ y $\varphi \circ \psi$

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi([\sigma], [\tau]) &= \psi[(\sigma, \tau)] \\ &= ((p_x)_*[(\sigma, \tau)], (p_y)_*[(\sigma, \tau)]) \\ &= ([p_x(\sigma, \tau)], [p_y(\sigma, \tau)]) \\ &= ([\sigma], [\tau]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi[\sigma] &= \varphi([p_x\sigma], [p_y\sigma]) \\ &= [(p_x\sigma, p_y\sigma)] \\ &= [\sigma] \end{aligned}$$

■

Definición 2.37. *Sea $A \subseteq X$. Diremos que A es un retracto de X si existe una aplicación $f : X \to A$ tal que $f|_A = Id_A$.*

Intuitivamente A es un retrato de X si X es puede deformar continuamente a A dejando los puntos de A fijos.

Teorema 2.38. *El círculo S^1 no es retracto del disco cerrado E^2.*

Demostración. Supongamos que si es un retracto, entonces existe una aplicación $f : E^2 \to S^1$ tal que $f|_{S^1} = Id_{S^1}$.

Sea $i : S^1 \to E^2$ la inclusión entonces $f \circ i = Id_{S^1}$ pues si $x \in S^1$ entonces $f \circ i(x) = f(i(x)) = f(x) = x = Id_{S^1}(x)$. Así como i es continua induce la función $i_* : \pi_1(S^1,(1,0)) \to \pi_1(E^2,(1,0))$, y f induce $f_* : \pi_1(E^2,(1,0)) \to \pi_1(S^1,(1,0))$. Por otro lado, tenemos $f_* \circ i_* = (f \circ i)_* = Id_*$ pero no puede ser ya que $f_* \circ i_*$ no es uno a uno, pues si $g \in \pi_1(S^1,(1,0))$ entonces como $\pi_1(E^2,(1,0))$ es simplemente conexo se tiene que $f_* \circ i_*(g) = f_*(i_*(g)) = f_*(0) = 0$ y sabemos que $\pi_1(S^1,(1,0))$ no es trivial por lo que $f_* \circ i_* = Id_*$ no es uno a uno esto nos lleva a una contradicción. ■

Definición 2.39. *Sea $A \subseteq X$. Diremos que A es un retracto fuerte de deformación de X si existe una aplicación $F : X \times I \to X$ tal que para cualquier $x \in X$, $a \in A$ se tiene*

$$\begin{gathered} F(x,0) = x \\ F(x,1) \in A \\ F(a,t) = Id_A \end{gathered}$$

Hay que observar que cualquier retracto fuerte de deformación es un retracto, pues la aplicación $f(x) = F(x,1)$ nos dice que A es un retracto de X.

Proposición 2.40. *S^1 es un retracto fuerte de deformación de $E^2 - \{(0,0)\}$.*

Demostración. Sea $F : E^2 - \{(0,0)\} \times I \to E^2 - \{(0,0)\}$ dada por

$$F((r,x),t) = ((1-t)r + t, x)$$

con $0 < r \leq 1$ y $0 \leq x \leq 2\pi$ (en coordenadas polares.)

F es continua pues sus proyecciónes son continuas. Ahora

$$\begin{gathered} F((r,x),0) = (r,x) \\ F((r,x),1) = (1,x) \in S^1 \\ F((1,x),t) = (1-t+t,x) = (1,x) \end{gathered}$$

Esto nos dice que efectivamente que S^1 es un retracto fuerte de deformación de $E^2 - \{(0,0)\}$. ■

Una aplicacion a esto nos da una particularización del teorema del punto fijo de Brouwer.

Corolario 2.41. *Cualquier aplicación $f : E^2 \to E^2$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que f no tiene puntos fijos y llegaremos a una contradicción.

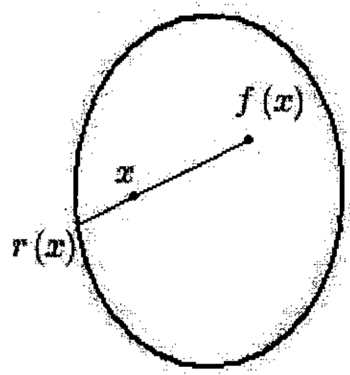

Figura 21:

Definamos $r : E^2 \longrightarrow S^1$ de la siguiente manera, para cada $x \in E^2$ por hipótesis sabemos que $x \neq f(x)$ así que definen una semirecta que va de $f(x)$ y que pasa por x, entonces sea $r(x)$ el punto de intersección de esta semirecta con S^1 como se ve en la figura 21. r es continua.

Ahora como $r|_{S^1} = Id_{S^1}$, esto quiere decir que S^1 es un retracto de E^2 que como ya demostramos en el teorema 2.38, no puede ser. ∎

Se puede probar fácilmente para el caso $n = 1$.

Corolario 2.42. *Cualquier aplicación* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$ pues de lo contrario ya habríamos terminado. Consideremos la aplicación $Id : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ entonces $f(0) > 0 = Id(0)$ y $f(1) < 1 = Id(1)$ entonces por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = Id(x_0) = x_0$ y entonces x_0 es un punto fijo de f.

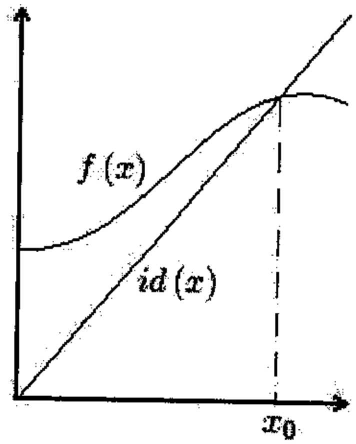

Figura 22:

■

3. Grupos Libres y Productos Libres de Grupos

Esta sección del trabajo está basado el los libros [4] y [2].

3.1. Producto Débil de Grupos Abelianos

Definición 3.1. *Sean G_1, G_2 grupos. Definimos*

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

y definimos el operador en el mismo por la regla

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$$

Observación 3.2. *$G_1 \times G_2$ es un grupo.*

Demostración.

Cerradura Sean (g_1, g_2), $(g_1', g_2') \in G_1 \times G_2$, entonces por definición tenemos que $g_1, g_1' \in G_1$ y $g_2, g_2' \in G_2$ entonces $g_1 g_1' \in G_1$ y $g_2 g_2' \in G_2$ asi que $(g_1 g_1', g_2 g_2') \in G_1 \times G_2$.

Asociatividad Sean (g_1, g_2), (g_1', g_2'), $(\overline{g_1}, \overline{g_2}) \in G_1 \times G_2$, entonces $(g_1 g_1')\overline{g_1} = g_1(g_1'\overline{g_1})$ y analogamente $(g_2 g_2')\overline{g_2} = g_2(g_2'\overline{g_2})$ así que

$$\begin{aligned}
((g_1, g_2)(g_1', g_2'))(\overline{g_1}, \overline{g_2}) &= (g_1 g_1', g_2 g_2')(\overline{g_1}, \overline{g_2}) \\
&= ((g_1 g_1')\overline{g_1}, (g_2 g_2')\overline{g_2}) \\
&= (g_1(g_1'\overline{g_1}), g_2(g_2'\overline{g_2})) \\
&= (g_1, g_2)((g_1'\overline{g_1}), (g_2'\overline{g_2})).
\end{aligned}$$

Neutro Sean 1_1 y 1_2 los elementos neutros de los grupos G_1 y G_2 respectivamente, entonces $(1_1, 1_2) \in G_1 \times G_2$ y además es su elemento neutro pues si $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ entonces

$$(1_1, 1_2)(g_1, g_2) = (1_1 g_1, 1_2, g_2) = (g_1, g_2)$$
$$(g_1, g_2)(1_1, 1_2) = (g_1 1_1, g_2 1_2) = (g_1, g_2)$$

Inverso Sea $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, entonces también $\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) \in G_1 \times G_2$, veamos que $\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) = (g_1, g_2)^{-1}$

$$\begin{aligned} \left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right)(g_1, g_2) &= \left(g_1^{-1}g_1, g_2^{-1}g_2\right) = (1_1, 1_2) \\ (g_1, g_2)\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) &= \left(g_1g_1^{-1}, g_2g_2^{-1}\right) = (1_1, 1_2) \end{aligned}$$

■

De manera análoga podemos definir el producto de los grupos $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ denotado por $\prod_{i=1}^{n} G_i$ o por $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$. También el producto de una familia numerable de grupos $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ éste denotado por $\prod_{i=1}^{\infty} G_i$ en ambos casos definimos el producto componente a componente. Ahora definimos el producto de familas arbitrarias de grupos.

Notación 3.3. *En futuras ocaciones denotaremos* 1 *al elemento identidad del grupo* G*, en cado de haber una familia* $\{G_i\}_{i\in I}$ *de grupos denotaremos* 1_i *al elemento identidad en el grupo* G_i*.*

Definición 3.4. *Sea* $\{G_i\}_{i\in I}$ *una familia arbitraria de grupos. Sea* $\prod_{i\in I} G_i$ *su producto cartesiano, es decir,*

$$\prod_{i\in I} G_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} G_i : \forall i \in I,\ f(i) \in G_i \right\}$$

Y definimos el producto componente a componente, $(f \cdot g)(i) = f(i)\, g(i)$ *para cada* $i \in I$*. A* $\left(\prod_{i\in I} G_i, \cdot\right)$ *se le llama producto directo o producto cartesiano de la familia* $\{G_i\}_{i\in I}$*.*

Observación 3.5. *Si* $\{G_i\}_{i\in I}$ *es una familia de grupos abelianos entonces* $\prod_{i\in I} G_i$ *también lo es.*

Demostración. Sean $f, g \in \prod_{i\in I} G_i$ entonces veamos que $fg = gf$. Sea $i \in I$, entonces $fg(i) = f(i)\, g(i) = g(i)\, f(i) = gf(i)$. ■

Dada una familia arbitraria de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$, su producto débil se define como el subgrupo de su producto directo $\prod_{i\in I} G_i$ formado por los elementos g tales que $g(i)$ es el neutro en G_i excepto para una cantidad finita de elementos de I. Formalmente lo definimos así

Definición 3.6. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos y sea*

$$G=\left\{f\in\prod_{i\in I}G_i : f(i)=1_i \text{ excepto para una cantidad finita de elementos de } I\right\}.$$

Entonces llamaremos a G el producto débil de $\{G_i\}_{i\in I}$.

Observación 3.7. *El producto débil es un subgrupo del producto directo.*

Demostración. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos y sea G su producto débil, entonces sólo tendremos que probar que para cualquiera dos elementos $f,g\in G$, se tiene que $fg^{-1}\in G$.

Sean $f,g\in G$ entonces digamos que F_f, F_g son los conjuntos finitos de I tales que para cualquier $i\notin F_f$, $f(i)=1_i$ y para cualquier $i\notin F_g$, $g(i)=1_i$, así el conjunto de elementos i donde $g^{-1}(i)\neq 1_i$ es F_g también. Por otro lado hay que notar que $F_f\cup F_g$ es finito, y además si $i\notin F_f\cup F_g$ entonces como $i\notin F_f$ se tiene que $f(i)=1_i$ y $i\notin F_g$ tenemos $g^{-1}(i)=1_i$ con esto probamos que para cualquier $i\notin F_f\cup F_g$ $fg^{-1}(i)=1_i$ entonces $fg^{-1}\in G$. ∎

Observación 3.8. *Si los G_i son abelianos y la operación de los grupos es aditiva, al producto débil suele llamársele suma directa y se denota por $\oplus$.*

Observación 3.9. *Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia finita de grupos entonces su producto débil y su producto directo coinciden.*

Proposición 3.10. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos y sea G su producto débil, o producto directo, entonces para cualquier $i\in I$, la función $\varphi_i : G_i\to G$ definido de la siguiente forma, para cada $j\in I$, y $x\in G_i$*

$$(\varphi_i(x))(j)=\begin{cases} x \text{ si } j=i\\ 1 \text{ si } j\neq i\end{cases}$$

es un monomorfismo.

Demostración. Tenemos que probar que φ_i es homomorfismo y que es uno a uno.

φ_i **es un homomorfismo.** Veamos ambos casos si $j=i$ tenemos que

$$(\varphi_i(xy))(j)=xy=(\varphi_i(x))(j)\cdot(\varphi_i(y))(j)$$

Si $j\neq i$ tenemos

$$(\varphi_i(xy))(j)=1=1\cdot 1=(\varphi_i(x))(j)\cdot(\varphi_i(y))(j)$$

φ_i **es inyectiva.** Como φ_i es un homomorfismo, es suficiente con mostrar que $\varphi_i^{-1}(1) = \{1_i\}$. Sea $x \in \varphi_i^{-1}(1)$, entonces $\varphi_i(x) = 1$ o bien $(\varphi_i(x))(j) = 1_j$ para cualquier $j \in I$. Si tomamos en particular $j = i$ tenemos que $x = (\varphi_i(x))(i) = 1_i$.

■

Definición 3.11. *A los φ_i como en la proposición anterior se le llaman monomorfismos naturales.*

En el caso de que cada G_i sea abeliano el teorema siguiente da una caracterización importante de su producto débil y de sus monomorfismos naturales.

Teorema 3.12. *Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una colección de grupos abelianos y G es su producto débil entonces dado un grupo abeliano A y dada una colección de homomorfismos $\{\psi_i : G_i \to A\}_{i\in I}$ existe un único homomorfismo $\psi : G \to A$ tal que para cualquier $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & G \arrow[dl, "\psi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Demostración. Si $f \in G$, sea $\{i_j\}_{j=i}^n \subset I$ el conjunto finito donde se cumple que $f(i_j) \neq 1$ que existe por definición de producto débil, entonces definimos $\psi : G \to A$ de la siguiente manera

$$\psi(f) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f(i_j))$$

ψ está bien definida ya que el producto es finito y A es un grupo abeliano así que no depende el orden en el que se tomen los $\{i_j\}$.

Podemos observar que si $\{k_j\}_{j=i}^m \supset \{i_j\}_{j=i}^n$ entonces $\psi(f) = \prod\limits_{j=1}^{m} \psi_{i_m}(f(k_m))$ pues para los elementos $k_j \notin \{i_j\}_{j=i}^n$ se tiene que $f(k_j) = 1$ y así tambien, por ser ψ_{i_n} un homomorfismo, $\psi_{i_j}(f(i_j)) = 1$ y entonces no afectará en el producto.

Ahora probamos que ψ es un homomorfismo. Sean $f_1, f_2 \in G$ y sea $\{i_j\}_{j=i}^n$ los índices para los cuales $f_1(i_j) \neq 1$ o $f_2(i_j) \neq 1$.

Por la observación anterior tenemos

$$\psi(f_1) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f_1(i_j))$$

$$\psi(f_2) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f_2(i_j))$$

Ahora calculemos $\psi(f_1 f_2)$

$$\begin{aligned}
\psi(f_1 f_2) &= \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f_1 f_2(i_j)) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f_1(i_j) f_2(i_j)) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f_1(i_j)) \psi_{i_j}(f_2(i_j)) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f_1(i_j)) \prod_{j=1}^{n} \psi_{i_j}(f_2(i_j)) \\
&= \psi(f_1) \psi(f_2)
\end{aligned}$$

Ahora veamos que el diagrama conmuta, tenemos que probar que para cualquier $i \in I$ se tiene que $\psi\varphi_i = \psi_i$. Tomemos $x \in G$ entonces por definición tenemos

$$\varphi_i(x)(j) = \begin{cases} x \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

entonces aplicando ψ tenemos que

$$\psi\varphi_i(x) = \psi_i(x)$$

así que el diagrama conmuta.

Ahora la unicidad, sea $\psi' : G \to A$ un homomorfismo que hace conmutar el diagrama.

Sea $f \in G$ probaremos la siguiente igualdad

$$f = \prod_{i \in I} (\varphi_i(f(i))) \tag{1}$$

para ello tomemos $j \in I$ arbitraria, notemos que

$$\varphi_i(f(i))(j) = \begin{cases} f(j) \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

luego

$$\left(\prod_{i \in I} \varphi_i(f(i))\right)(j) = \prod_{i \in I} (\varphi_i(f(i)))(j) = f(j)$$

para cada $j \in I$ por lo tanto probamos (1). Entonces

$$\begin{aligned} \psi'(f) &= \psi'\left(\prod_{i \in I} \varphi_i(f(i))\right) \\ &= \prod_{i \in I} \psi'(\varphi_i(f(i))) \\ &= \prod_{i \in I} \psi_i(f(i)) \\ &= \psi(f) \end{aligned}$$

Se sigue que $\psi' = \psi$ y el teorema queda demostrado. ■

Al teorema anterior se le suele llamar propiedad universal del producto débil de grupos abelianos.

La siguiente proposición establece que el teorema 3.12 caracteriza el producto débil de grupos abelianos.

Proposición 3.13. *Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una colección de grupos abelianos y G su producto débil. Sea G' un grupo abeliano arbitrario y $\varphi_i' : G_i \to G'$ una colección de homomorfismos tal que el teorema 3.12 sea válido al sustituir G y φ_i respectivamente por G' y φ_i', entonces existe un único isomorfismo $h : G \to G'$ tal que para cualquier $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\varphi_i'"'] & G \arrow[dl, "h"] \\ G' & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Demostración. Por el teorema 3.12 tenemos que existe un homomorfismo h que hace conmutar el diagrama 2. Por otra parte, el teorema 3.12 también se aplica a G' y φ'_i por las hipótesis de la proposición 3.13 así que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi'_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & G' \arrow[dl, "k"] \\ G & \end{tikzcd} \tag{3}$$

Si unimos los diagramas 2 y 3 tenemos

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "h"] \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[r, "\varphi'_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & G' \arrow[d, "k"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G' \arrow[d, "k"] \\ G_i \arrow[ur, "\varphi'_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi'_i"'] & G \arrow[d, "h"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

y por lo tanto los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & G \arrow[dl, "koh"] \\ G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi'_i"] \arrow[d, "\varphi'_i"'] & G' \arrow[dl, "hok"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, es claro que

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & G \arrow[dl, "Id_G"] \\ G & \end{tikzcd}$$

conmuta. Y por la unicidad del teorema 3.12 tenemos que

$$kh = Id_G$$

$$hk = Id_{G'}$$

Con esto h posee una función inversa así que h es un isomorfismo. ■

Observación 3.14. *Puesto que cada φ_i es un monomorfismo, podemos identificar G_i con su imagen en G por φ_i, y considerar φ_i como una inclusión cuando sea conveniente. Así que en este caso diremos que G es el producto débil de los grupos G_i entendiendose que φ_i es una inclusión.*

3.2. Grupos Abelianos Libres

Definición 3.15. *Sea G un grupo. Sea $S \subset G$. Se dice que S genera a G si todo elemento de G puede escribirse como producto de potencias de elementos de S. Además si S es finito diremos que G es finitamente generado.*

Observación 3.16. *Si G es un grupo, y $S \subset G$ entonces S genera a G si y sólo si S no está contenido en algún subgrupo propio de G.*

Demostración. Sea $\langle S\rangle = \{s_1^{m_1}s_2^{m_2}\cdots s_k^{m_k} : m_i \in \mathbb{Z}, s_i \in S, k \in \mathbb{N}\}$

Supongamos que existe un subgrupo propio H de G tal que $S \subset H$. Por las propiedades de ceradura bajo producto e inversos de H tenemos que

$$\langle S\rangle \subset H$$

como H es propio de G tenemos que existe $g \in G$ tal que $g \notin \langle S\rangle$ así que g no se puede escribir como producto de potencias de elementos de S y entonces S no genera a G.

Ahora supongamos que S no genera a G entonces $\langle S\rangle \neq G$ y es claro que $S \subset \langle S\rangle$ y además que $\langle S\rangle$ es un subgrupo de G así que ya acabamos. ■

Ejemplo 3.17. *Si G es un grupo cíclico de orden n, a saber*

$$G = \left\{x^i : i \in \mathbb{Z}, x^n = 1\right\}$$

entonces $\{x\}$ genera a G.

Si el conjunto S genera a un grupo G, cierto producto de elementos de S pueden dar el neutro de G, por ejemplo

a) si $x \in S$ entonces $xx^{-1} = 1$.

b) si G es un grupo cíclico de orden n generado por $\{x\}$ entonces $x^n = 1$.

a un producto de elementos de S que sea igual al neutro se le llama una relación entre elementos del conjunto generador S. Podemos distinguir entre dos tipos de relaciones, triviales y no triviales, las primeras que son consecuencias de los axiomas de grupo como en a), y las no triviales que son las que dependen de la estructura del grupo G como en b).

Estas observaciones nos llevan a la "definición"siguiente, si S es un conjunto generador de G decimos que G está libremente generado por S si todas las relaciones entre los elementos de S son triviales.

También estas nociones nos llevan a la idea de que podemos determinar completamente un grupo por los elementos de un conjunto generador y las relaciones no triviales entre ellos.

Para poder dar una definición precisa de la idea anterior, nos basaremos en las siguientes observaciones

Observación 3.18. *1. Sea S un conjunto de generadores de G y $f : G \to G'$ un epimorfismo, entonces el conjunto $f(S)$ es un conjunto generador de G', además cualquier relación de G entre los elementos de S es tambien una relación en G' entre los elementos de $f(S)$, así que G' satisface al menos tantas relaciones como G.*

2. Sea S un conjunto generador de G y $f : G \to G'$ un homomorfismo. entonces f está completamente determinado por su restricción al conjunto S, sin embargo, es falso que toda aplicación $g : S \to G'$ pueda extenderse a un homomorfismo $f : G \to G'$, ya que puede que g no "mande" la identidad en la identidad (suponiendo que la identidad fuese un elemento de S).

Ahora daremos la definición de grupo abeliano libre.

Definición 3.19. *Sea S un conjunto arbitrario. Uno grupo abeliano libre sobre un conjunto S es un grupo abeliano F junto con una función $\varphi : S \to F$ tal que para cualquier grupo abeliano A y para cualquier función $\psi : S \to A$ existe un único homomorfismo $f : F \to A$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Demostraremos que esta definición caracteriza efectivamente a los grupos abelianos libres sobre un conjunto S dado.

Proposición 3.20. *Sean F y F' grupos abelianos libres sobre un conjunto S respecto a las funciones $\varphi : S \to F$ y $\varphi' : S \to F'$ respectivamente. Entonces existe un único isomorfismo $h : F \to F'$ que además hace conmutar el diagrama siguiente*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & F \arrow[dl, "h"] \\ F' & \end{tikzcd}$$

Demostración. De las definiciónes de que F, F' son grupos abelianos libre sobre S respecto a φ y φ' respectivamente, tenemos que

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & F \arrow[dl, "h"] \\ F' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi"'] & F' \arrow[dl, "k"] \\ F & \end{tikzcd}$$

para algunas funciones h, k.

A partir de estos diagramas tenemos que los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[dl, "k \circ h"] \\ F & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & F' \arrow[dl, "k \circ h"] \\ F' & \end{tikzcd}$$

Pero la funcion identidad en F y F' respectivamtente tambien hacen conmutar dichos diagramas y por la unicidad se sigue que $k \circ h = Id_F, h \circ k = Id_{F'}$ asi que en particular h es el isomorfismo buscado. ∎

Hasta ahora simplemente hemos dado una definición; dado un conjunto S no sabemos si existe algún grupo abeliano libre sobre S además no sabemos si la función φ es inyectiva ni que F está generada por $\varphi(S)$. Así que mostraremos primero que $\varphi(S)$ genera a F.

Proposición 3.21. *Si F es un grupo abeliano libre sobre S con respecto a φ entonces F está generado por $\varphi(S)$.*

Demostración. Es claro que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \langle \varphi(\mathrm{S}) \rangle \arrow[dl, "i"] \\ F & \end{tikzcd} \tag{4}$$

donde $i : \langle \varphi(S) \rangle \to F$ es la función inclusión. Por otro lado, F es un grupo abeliano libre, así que existe un homomorfismo $f : F \to \langle \varphi(S) \rangle$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ \langle \varphi(\mathrm{S}) \rangle & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Por los diagramas 4 y 5 tenemos

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \langle \varphi(\mathrm{S}) \rangle \arrow[d, "i"] \\ & F \end{tikzcd}$$

además la función identidad Id_F también hace conmutar este diagrama así que $if = Id_F$ así que i es sobreyectiva y entonces $i = Id_F$ y luego $F = \langle \varphi(S) \rangle$. ■

Consideremos la siguiente situación, si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia no vacía de subconjuntos de S ajenos dos a dos, cuya unión es S mismo, además, para cada $i \in I$, F_i es un grupo abeliano libre sobre S_i respecto a la función $\varphi_i : S_i \to F_i$. Sea F el producto débil de los grupos F_i denotemos por η_i al monomorfismo natural de F_i a F. Como $\{S_i\}_{i \in I}$ son ajenos por pares, podemos definir $\varphi : S \to F$ de la siguiente manera,

$$\varphi|_{S_i} = \eta_i \varphi_i$$

Proposición 3.22. *Bajo las hipótesis anteriores, F es un grupo abeliano libre sobre S respecto a φ.*

Demostración. Sea A un grupo abeliano arbitrario y $\psi : S \to A$ una función cualquiera. Para cada índice $i \in I$ definimos

$$\psi_i = \psi|_{S_i}$$

ahora como por la hipótesis F_i es un grupo abeliano libre sobre S_i existe un único homomorfismo $f_i : F_i \to A$ tal que el diagrama siguiente conmuta para cada $i \in I$

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & F_i \arrow[dl, "f_i"] \\ A & \end{tikzcd} \tag{6}$$

por el teorema 3.12 existe un único homomorfismo $f : F \to A$ tal que para cualquier $i \in I$ se tiene que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "f_i"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ A & \end{tikzcd} \tag{7}$$

de los diagramas 6 y 7 y del hecho de que $\varphi|_{S_i} = \eta_i \circ \varphi_i$ y $\psi_i = \psi|_{S_i}$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\varphi|_{S_i}"] \arrow[d, "\psi|_{S_i}"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Dado que $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ tenemos que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Sólo nos falta probar la unicidad de esta f. Sea $f' : F \to A$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & F \arrow[dl, "f'"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Definimos $f_i' : F_i \to A$ por $f_i' = f' \circ \eta_i$, luego tenemos que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & F_i \arrow[dl, "f_i'"] \\ A & \end{tikzcd}$$

ya que

$$\begin{aligned} f_i'\varphi_i &= f'\eta_i\varphi_i \\ &= f'\left(\varphi|_{S_i}\right) \\ &= f'\varphi|_{S_i} \\ &= \psi|_{S_i} \\ &= \psi_i \end{aligned}$$

Ahora dado que F_i es un grupo abeliano libre sobre S_i respecto a φ_i, tenemos que f_i' es único tal que el diagrama anterior conmuta y por (6) tenemos que $f_i = f_i'$ para cada $i \in I$ y además el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "f_i=f_i'"'] & F \arrow[dl, "f'"] \\ A & \end{tikzcd}$$

luego obtenemos que $f = f'$ por la unicidad en (7) pues habíamos definido $f_i' = f' \circ \eta_i$. ■

La proposición anterior significa que el producto débil de una colección de grupos abelianos libres es un grupo abeliano libre. Vamos a utilizar este teorema para demostrar la existencia de un grupo abeliano libre sobre S. Supongamos que

$$S = \{x_i\}_{i\in I}$$

y definimos S_i el subconjunto de S con un sólo elemento

$$S_i = \{x_i\}$$

sea F_i el grupo cílico infinito formado por todas las potencias de x_i

$$F_i = \{x_i^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

denotemos por $\varphi_i : S_i \to F_i$ a la inclusión, esto es, $\varphi_i(x_i) = x_i^1$.

Proposición 3.23. *F_i es un grupo abeliano libre sobre S_i.*

Demostración. Sean $i \in I$ fijo, A un grupo abeliano y $\psi_i : S_i \to A$ una función. Definimos $f_i : F_i \to A$ de la siguiente manera

$$f_i\left(x_i^m\right) = \psi_i\left(x_i\right)^m$$

f_i es un homomorfismo pues

$$\begin{aligned} f_i\left(x_i^m x_i^n\right) &= f_i\left(x_i^{m+n}\right) \\ &= \psi_i\left(x_i\right)^{m+n} \\ &= \psi_i\left(x_i\right)^m \psi_i\left(x_i\right)^n \\ &= f_i\left(x_i^m\right) f_i\left(x_i^n\right) \end{aligned}$$

Veamos que f_i hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & F_i \arrow[dl, "f_i"] \\ A & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} f_i \circ \varphi_i\left(x_i\right) &= f_i\left(x_i^1\right) \\ &= \psi_i\left(x_i\right) \end{aligned}$$

Probamos ahora la unicidad de f_i. Sea $f_i' : F_i \to A$ un homomorfismo que haga conmutar el diagrama. Entonces

$$f_i' \circ \varphi_i = \psi_i$$
$$\Rightarrow f_i'\left(x_i\right) = \psi_i\left(x_i\right)$$
$$\Rightarrow f_i'\left(x_i^m\right) = f_i'\left(x_i\right)^m = \psi_i\left(x_i\right)^m = f_i\left(x_i^m\right)$$

para cada $x_i^m \in F_i$ con lo que probamos la unicidad. ■

Corolario 3.24. *El producto débil F de los grupos F_i es un grupo abeliano libre sobre $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ respecto a φ.*

Demostración. Es un resultado directo de la proposición 3.22 y la proposición 3.23. ■

Observese que el cardinal de I es el mismo que el cardinal de S, esto significa que F es el producto débil de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como elementos tenga S.

Ahora probaremos que φ es inyectiva. Tenemos que $\varphi|_{S_i} = \eta_i \circ \varphi_i$.

Sea $x_i \in S$, luego

$$\varphi(x_i) = \eta_i \circ \varphi_i(x_i) = \eta_i(x_i)$$

entonces

$$\varphi(x_i)_j = \eta_i(x_i)_j = \begin{cases} x_i^1 \text{ si } i = j \\ x_j^0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Ahora sean $x_i, x_j \in S$ tales que $x_i \neq x_j$ entonces

$$\varphi(x_i)_j = x_j^0 \neq x_j^1 = \varphi(x_j)_j$$

asi que $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$ entonces φ es uno a uno.

Como φ es inyectiva, podemos identificar a cada $x_i \in S$ con $\varphi(x_i) \in F$, entonces S se vuelve un subconjunto de F. Además es claro que podemos expresar a cada elemento $g \neq 1$ de F de manera única, salvo el orden de los factores de la forma

$$g = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_k}^{n_k}$$

donde los $i_1, i_2, \ldots, i_k$ son distintos y $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son todos enteros distintos de cero.

Observamos que si F' es otro grupo abeliano libre sobre S respecto a la función $\varphi' : S \to F'$, entonces ésta es también inyectiva ya que por la proposición 3.20 tenemos que existe un isomorfismo h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & F \arrow[dl, "h"] \\ F' & \end{tikzcd}$$

de aquí $\varphi' = \varphi \circ h$ entonces φ' es inyectiva.

Recapitulando lo anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.25. *Dado un grupo abeliano libre F sobre un conjunto S respecto a una función $\varphi : S \to F$, entonces F es isomorfo a un producto débil de grupos cíclicos infinitos, φ es inyectiva y además $\varphi(S)$ genera a F.*

Observación 3.26. *Otra manera de abordar el tema de los grupos abelianos libres sería decir que un grupo abeliano F es libre sobre el conjunto $S = \{s_i\}_{i\in I} \subset F$ si todo elemento $g \neq 1$ de F admite una expresión de la forma*

$$g = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_k}^{n_k}$$

única salvo el orden de los factores. Aunque es más fácil de enunciar nos conviene más la otra.

Una razón para la importancia de los grupos abelianos libres es la siguiente

Proposición 3.27. *Todo grupo abeliano es imagen homomorfa de un grupo abeliano libre; es decir, dado un grupo abeliano A existe un grupo abeliano libre F y un epimorfismo $f : F \to A$.*

Demostración. Sea S un conjunto generador de A (podríamos tomar por ejemplo $S = A$) y sea F un grupo abeliano libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$ entonces existe un homomorfismo f que hace conutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ A & \end{tikzcd}$$

donde i es la función inclusión, probamos que f es sobreyectiva.

Sea $a \in A$ entonces existen $x_1, x_2, ..., x_k \in S$ y $m_1, m_2, ..., m_k \in \mathbb{Z}$ tales que $a = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}$ sea $g = \varphi(x_1)^{m_1} \varphi(x_2)^{m_2} \cdots \varphi(x_k)^{m_k} \in F$ luego

$$\begin{aligned} f(g) &= f\left(\varphi(x_1)^{m_1} \varphi(x_2)^{m_2} \cdots \varphi(x_k)^{m_k}\right) \\ &= f(\varphi(x_1))^{m_1} f(\varphi(x_2))^{m_2} \cdots f(\varphi(x_k))^{m_k} \\ &= i(x_1)^{m_1} i(x_2)^{m_2} \cdots i(x_k)^{m_k} \\ &= x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k} \\ &= a \end{aligned}$$

entonces f es un epimorfismo. ■

Gracias a la proposición anterior podemos dar la siguiente

Definición 3.28. *Sean A un grupo abeliano, S un conjunto generador de A, F un grupo abeliano libre sobre S y $f : F \longrightarrow A$ un epimorfismo, entonces a los elementos de* $\ker f - \{1\}$ *se le llaman relaciones no triviales entre S. Si $\{r_i\}_{i\in I}$ es una colección de relaciones no triviales entre S y si $r \in \langle r_i \rangle_{i\in I}$ entonces se dice que la relación r es consecuencua de las relaciones r_i.*

Observación 3.29. *Si la colección $\{r_i\}_{i\in I}$ genera a* $\ker f$ *entonces el grupo A está completamente determinado, salvo isomorfismos, por el conjunto generador S y el conjunto de relaciones $\{r_i\}_{i\in I}$ pues A es isomorfo al grupo cociente $F \diagup \langle r_i \rangle_{i\in I}$.*

Si S, S' son conjuntos con el mismo cardinal y F, F' son grupos abelianos libres sobre S y S' respectivamente, entonces F y F' son isomormos, esto se debe a que cada uno de ellos es isomorfo al producto débil de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como elementos tenga S o de igual manera, S'. Veamos que, en el caso finito, el recíproco es tambien cierto, para ello primero pasaremos por la siguiente

Definición 3.30. *Si G es un grupo y $n \in \mathbb{N}$, definimos G^n como el conjunto generado por $\{g^n : g \in G\}$, en otras palabras*

$$G^n = \langle \{g^n : g \in G\} \rangle$$

Observación 3.31. *En la definición anterior, si G es abeliano, entonces es claro que $\{g^n : g \in G\}$ es un subgrupo y por lo tanto $G^n = \{g^n : g \in G\}$.*

Lema 3.32. *Sea F un grupo abeliano libre sobre un conjunto de k elementos entonces $F \diagup F^n$ es un grupo finito de orden n^k.*

Demostración. Si

$$F = \{x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k} : p_1, ..., p_k \in \mathbb{Z}\}$$

entonces

$$F^n = \{(x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k})^n : p_1, ..., p_k \in \mathbb{Z}\}$$

Sea $aF^n \in F \diagup F^n$ entonces $aF^n = (x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}) F^n$; por el algoritmo de la división tenemos que $p_i = q_i n + r_i$ con $0 \leq r_i < n$ de aquí

$$\begin{aligned}
x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k} &= x_1^{q_1 n + r_1} \cdots x_k^{q_k n + r_k} \\
&= (x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k})(x_1^{q_1 n} \cdots x_k^{q_k n}) \\
&= (x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k})(x_1^{q_1} \cdots x^{q_r})^n
\end{aligned}$$

además $(x_1^{q_1}\cdots x^{q_r})^n \in F^n$ por lo que $aF^n = (x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k})F^n$. Ahora si probamos que los elementos de $\{(x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k})F^n : 0 \leq r_i < n\}$ son distintos entre sí habremos terminado.

Supongamos que $(x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k})F^n = (x_1^{s_1}\cdots x_k^{s_k})F^n$ con $0 \leq r_i, s_i < n$ para toda $i = 1, ..., k$ entonces

$$(x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k})(x_1^{s_1}\cdots x_k^{s_k})^{-1} \in F^n$$

luego

$$(x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k})(x_1^{s_1}\cdots x_k^{s_k})^{-1} = (x_1^{t_1}\cdots x_k^{t_k})^n \in F^n$$

así que $x_1^{r_1-s_1}\cdots x_k^{r_k-s_k} = x_1^{nt_1}\cdots x_k^{nt_k}$. Como estamos suponiendo que los x_i son distintos, $nt_i = r_i - s_i$. Se sigue de las restricciones de r_i y de s_i que $|r_i - s_i| < n$ pues $0 \leq r_i < n$ implica que $-n < -r_i \leq 0$ y también sabemos que $0 \leq s_i < n$ sumando estas desigualdades tenemos $-n < s_i - r_i < n$ lo que implica que $|r_i - s_i| < n$, además $|r_i - s_i| = |nt_i|$ entonces $|nt_i| < n$ y entonces $t_i = 0$ y se concluye que $r_i = s_i$. ∎

Corolario 3.33. *Sean S y S' conjuntos finitos de distinto cardinal, y F y F' grupos abelianos libres sobre S y S' respectivamente, entonces F y F' no son isomorfos.*

Demostración. Supongamos que F y F' son isomorfos, luego veamos que $|F/F^n| = |F'/F'^n|$, pues si $h : F \to F'$ es un isomorfismo, consideremos la composición $\pi \circ h : F \to F'/F'^n$, donde $\pi(f') = f'F'^n$ para cada $f' \in F'$. Probaremos que $\ker \pi \circ h = F^n$. Sea $x \in \ker \pi \circ h$ entonces $\pi \circ h(x) = F'^n$ entonces $h(x) \in F'^n$ luego $h(x) = x'^n$ para algún $x' \in F'$ luego $x = h^{-1}(x'^n) = h^{-1}(x')^n$ con $h^{-1}(x') \in F$ se sigue que $x \in F^n$. Recíprocamente, sea $x \in F^n$ entonces $h(x) \in F'^n$ y luego $\pi \circ h(x) = F'^n$ entonces $x \in \ker \pi \circ h$; entonces F/F^n F'/F'^n son isomorfos, en particular, $|F/F^n| = |F'/F'^n|$ y por el lema 3.32 $n^{|S|} = n^{|S'|}$ luego $|S| = |S'|$ lo cual contradice la hipótesis. ∎

Definición 3.34. *Sea F un grupo abeliano libre sobre un conjunto S, definimos el rango de F como el cardinal de S.*

Hemos probado que, en caso finito, dos grupos abelianos libres son ismorfos si y sólo si tienen el mismo rango.

Definición 3.35. *Sea G un grupo abeliano, definimos su subgrupo de torsión como*

$$tG = \{x \in G : \exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ \textit{tal que } nx = 0\}$$

además, si $tG = G$ decimos que G es de torsión y si $tG = \{0\}$ decimos que G es libre de torsión.

Observación 3.36. *el subgrupo de torsión tG sí es en realidad un subgrupo de G.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in tG$ entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ambos distintos de cero, tales que

$$n_1 x_1 = 0$$
$$n_2 x_2 = 0$$

veamos que $x_1 - x_2 \in tG$. Sea $n = n_1 n_2 \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} n(x_1 - x_2) &= nx_1 - nx_2 \\ &= n_2(n_1 x_1) - n_1(n_2 x_2) \\ &= n_2(0) - n_1(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Proposición 3.37. *El grupo cociente G/tG es libre de torsión*

Demostración. Supongamos que $n(g + tG) = ng + tG = tG$ para algún $n \neq 0$ entonces $ng \in tG$ luego por definición, existe $m \neq 0$ tal que $mng = 0$ y como $mn \neq 0$ se tiene que $g \in tG$ luego $g + tG = tG$ entonces $t(G/tG) = \{tG\}$ así que G/tG es libre de torsión. ■

Observación 3.38. *Sean G y G' grupos abelianos isomorfos, entonces $tG \cong tG'$ y $G/tG \cong G'/tG'$.*

Demostración. Supongamos que $h : G \to G'$ es un isomorfismo, sea $h' : tG \to tG'$ dada por $h'(g) = h(g)$ está bien definida ya que si $ng = 0$ entonces $nh'(g) = 0$, además es inyectiva pues $\ker h' \subset \ker h = \{0\}$ veamos que es sobreyectiva, sea $g' \in tG'$ entonces, por un lado $ng' = 0$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$, y por otro lado, existe $g \in G$ tal que $h(g) = g'$ veamos que $g \in tG$.

$$nh(g) = nh(g) = n(g') = 0$$

y de la inyectividad de h, $ng = 0$ en otras palabras, $g \in tG$.

Ahora veamos que $G/tG \cong G'/tG'$. sea $\overline{h} : G \to$ definida por $\overline{h}(g) = h(g) + tG'$ es sobreyectiva, pues es la composición de h y la proyección canónica $\pi : G' \to G'/tG'$, ambas son sobreyectivas, si probamos que $\ker \overline{h} = tG$ ya habremos terminado por el primer teorema del isomorfismo, para ello, sea $g \in \ker \overline{h}$ entonces $\overline{h}(g) = tG'$ y por definición, $\overline{h}(g) = h(g) + tG'$ así que $h(g) \in tG'$ y ya que h es biyectiva, $g \in h^{-1}(tG') = tG$. Recíprocamente, si $g \in tG$ entonces $h(g) \in tG$ y entonces $\overline{h}(g) = tG'$ y luego $g \in \ker \overline{h}$. ■

El recíproco de la observación anterior no es cierta en general, no podemos afirmar que G es isomorfo a G' si $tG \cong tG'$ y $G/tG \cong G'/tG'$. Sin embargo, para grupos abelianos finitamente generados tenemos el siguiente teorema que nos describe completamente su estructura.

Teorema 3.39. **a)** *Sea A un grupo abeliano finitamente generado y T su subgrupo de torsión. Entonces T y A/T también son finitamente generados, además A es isomorfo al producto directo $T \times A/T$. Por lo tanto, la estructora de A está completamente determinada por su subgrupo de torsión y de su grupo cociente libre de torsión.*

b) *Todo grupo abeliano finitamente generado libre de torsión es un grupo abeliano libre de rango finito.*

c) *Todo grupo abeliano de torsión T finitamente generado es isomorfo a un producto $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$, donde C_i es un grupo cíclico finito de orden ε_i además para cada i, ε_i divide a ε_{i+1}. Además los enteros ε_i están unívocamente determinados por el grupo de torsión T y determinan completamente su estructura.*

Demostración. La prueba se puede encontrar en [2] pág. 88, 184. ■

A los enteros ε_i del teorema anterior se le llaman coeficientes de torsión de T y más en general, si T es el grupo de torsión de A, se denominan coeficientes de torsión de A. Análogamente, el rango del grupo libre A/T se le llama rango de A.

El teorema anterior también nos asegura que todo grupo abeliano finitamente generado es un producto directo de grupos cíclicos, pero nos dice más, Obsérvese que un grupo de torsión finitamente generado es de orden finito.

Teorema 3.40. *Sea F un grupo abeliano libre sobre el conjunto S y F' un subgrupo de F. Entonces F' es un grupo abeliano libre sobre un cierto conjunto S' y el cardinal de S' es menor o igual que el de S.*

Demostración. Se puede encontrar la prueba en [2] pág. 183. ■

Aun que las demostraciones de los teoremas 3.39 y 3.40 no son dificiles, no las probaremos por que pertenecen propiamente al estudio del álgebra lineal y módulos sobre un anillo de ideales principales.

3.3. Producto Libre de Grupos

El producto libre de una colección grupos arbitrarios es lo análogo al producto débil de una colección de grupos abelianos.

En esta sección todo grupo considerado puede o no ser abeliano, al menos que se especifique lo contrario.

Definición 3.41. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una colección de grupos y G un grupo y supongamos que para cada índice $i \in I$ tenemos un homomorfismo $\varphi_i : G_i \to G$ entonces diremos que G es el producto libre de los grupos G_i con respecto a los homomorfismos φ_i si para cualquier grupo H y cualquier colección de homomorfismos $\{\psi_i : G_i \to H\}_{i\in I}$ existe un único homomorfismo $f : G \to H$ tal que para todo $i \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & G \arrow[dl, "f"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Proposición 3.42. *Supongamos que G y G' son productos libres de una colección $\{G_i\}_{i\in I}$ de grupos respecto la los homomorfismos $\varphi_i : G_i \to G$ y $\varphi_i' : G_i \to G'$ respectivamente. Entonces existe un único isomorfismo $h : G \to G'$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama para cada $i \in I$*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\varphi_i'"'] & G \arrow[dl, "h"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración es análoga al teorema 3.13. ■

Aunque hemos definido el producto libre de grupos y demostrado su unicidad aún falta probar su existencia.

También probaremos que los homomorfismos φ_i dados en la definición de producto libre son monomorfismos y además podemos saber más sobre el producto G, éste está generado por la unión de las imágenes $\varphi_i(G_i)$.

Teorema 3.43. *Dada una colección de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ siempre existe su producto libre.*

Demostración. Definimos una palabra en la colección $\{G_i\}_{i\in I}$ como una sucesión finita $(x_1, x_2, ..., x_n)$ donde cada $x_k \in \bigcup_{i\in I} G_i$, (notemos que es una unión ajena), además dos terminos consecutivos de la sucesión pertenecen a distintos grupos y no aparecen los términos neutros de algún G_i, a esta n le llamaremos longitud de la palabra.

Consideremos también la palabra vacía, es decir, la de longitud cero y la denotaremos $()$.

Denotamos $\mathcal{W}$ al conjunto de todas las palabras.

Para cada $i \in I$ definiremos la siguiente acción $\cdot_i : G_i \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$

Si $x_1 \notin G_i$ entonces definimos

$$\begin{aligned} g \cdot_i (x_1, x_2, ..., x_n) &= \begin{cases} (g, x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } g \neq 1_i \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } g = 1_i \end{cases} \\ g \cdot_i () &= \begin{cases} (g) \text{ si } g \neq 1_i \\ () \text{ si } g = 1_i \end{cases} \end{aligned}$$

ahora si $x_1 \in G_i$ entonces

$$\begin{aligned} g \cdot_i (x_1, x_2, ..., x_n) &= \begin{cases} (gx_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } g \neq 1_i \\ (x_2, ..., x_n) & \text{si } gx_1 = 1_i \end{cases} \\ g \cdot_i (x_1) &= () \text{ si } gx_1 = 1_i \end{aligned}$$

veamos que $\cdot_i$ es efectivamente una acción, para ello haremos un exámen exhaustivo de los distintos casos.

Primero veamos que

$$1_i \cdot_i w = w \text{ para cada } w \in \mathcal{W} \tag{8}$$

Si $w = ()$ entonces por definición $1_i \cdot_i w = w$.

Ahora supongamos que $w = (x_1, x_2, ..., x_n)$ entonces consideramos los siguientes dos casos.

Si $x_1 \notin G_i$ entonces

$$1_i \cdot_i (x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ahora si $x_1 \in G_i$ entonces

$$1_i \cdot_i (x_1, x_2, ..., x_n) = (1_i x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ahora probemos que $(gg') \cdot_i w = g\,(g' \cdot_i w)$

Si $g = g' = 1_i$ tenemos

$$(gg')\cdot_i w = 1_i \cdot_i w = 1_i \cdot_i (1_i \cdot_i w) = g \cdot_i (g' \cdot_i w)$$

la última igualdad se da por (8).

Si $g = 1$ y $g' \neq 1$

$$(gg')\cdot_i w = g' \cdot_i w = 1_i \cdot_i (g' \cdot_i w) = g \cdot_i (g' \cdot_i w)$$

la última igualdad se da por (8).

Si $g \neq 1$ y $g' = 1$

$$(gg')\cdot_i w = g \cdot_i w = g \cdot_i (1_i \cdot_i w) = g \cdot_i (g' \cdot_i w)$$

la última igualdad se da por (8).

Si $g \neq 1$ y $g' \neq 1$ analizaremos varios casos; primero consideremos la palabra vacía, $w = ()$

$$(gg')\cdot_i w = \begin{cases} (gg') \text{ si } gg' \neq 1_i \\ () \text{ si } gg' = 1_i \end{cases}$$

por otra parte,

$$g \cdot_i (g' \cdot_i w) = g \cdot_i (g') = \begin{cases} (gg') \text{ si } gg' \neq 1_i \\ () \text{ si } gg' = 1_i \end{cases}$$

ahora si $w = (x_1)$, si $x_1 \notin G_i$

$$(gg')\cdot_i w = \begin{cases} (gg', x_1) \text{ si } gg' \neq 1_i \\ (x_1) \text{ si } gg' = 1_i \end{cases}$$

por otra parte,

$$g \cdot_i (g' \cdot_i w) = g \cdot_i (g', x_1) = \begin{cases} (gg', x_1) \text{ si } gg' \neq 1_i \\ (x_1) \text{ si } gg' = 1_i \end{cases}$$

si $x_1 \in G_i$ tenemos

$$(gg')\cdot_i w = \begin{cases} (gg'x_1) \text{ si } gg'x_1 \neq 1_i \\ () \text{ si } gg'x_1 = 1_i \end{cases}$$

por otra parte,

$$
\begin{aligned}
g\cdot_i(g'\cdot_i w) &= g\cdot_i\begin{cases} (g'x_1) \text{ si } g'x_1\neq 1_i\\ () \text{ si } g'x_1 = 1_i\end{cases}\\
&= \begin{cases} (gg'x_1) \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1\neq 1_i\\ (g) \text{ si } g'x_1 = 1_i\\ () \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1 = 1_i\end{cases}\\
&= \begin{cases} (gg'x_1) \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1\neq 1_i\\ (gg'x_1) \text{ si } g'x_1 = 1_i \text{ y } g\cdot_i(g'\cdot_i x_1)\neq 1_i\\ () \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1 = 1_i\end{cases}\\
&= \begin{cases} (gg'x_1) \text{ si } gg'x_1\neq 1_i\\ () \text{ si } gg'x_1 = 1_i \text{ y } g'x_1\neq 1_i\end{cases}
\end{aligned}
$$

Ahora consideremos una palabra de longitud $n>1$, sea $w=(x_1,x_2,...,x_n)$ y supongamos que $x_1\notin G_i$

$$
(gg')\cdot_i w = \begin{cases} (gg',x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } gg'\neq 1_i\\ (x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } gg' = 1_i\end{cases}
$$

por otra parte,

$$
g\cdot_i(g'\cdot_i w) = g\cdot_i(g',x_1,x_2,...,x_n) = \begin{cases} (gg',x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } gg'\neq 1_i\\ (x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } gg' = 1_i\end{cases}
$$

De nuevo, si $x_1\in G_i$

$$
(gg')\cdot_i w = \begin{cases} (gg'x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } gg'x_1\neq 1_i\\ (x_2,...,x_n) \text{ si } gg'x_1 = 1_i\end{cases}
$$

por otra parte,

$$
\begin{aligned}
g\cdot_i(g'\cdot_i w) &= g\cdot_i\begin{cases} (g'x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1\neq 1_i\\ (x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1 = 1_i\end{cases}\\
&= \begin{cases} (gg'x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1\neq 1_i\\ (g,x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1 = 1_i\\ (x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1 = 1_i\end{cases}\\
&= \begin{cases} (gg'x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1\neq 1_i\\ (gg'x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1 = 1_i \text{ y } g'x_1 = 1_i\\ (x_2,...,x_n) \text{ si } g'x_1\neq 1_i, gg'x_1 = 1_i\end{cases}\\
&= \begin{cases} (gg'x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } gg'x_1\neq 1_i\\ (x_2,...,x_n) \text{ si } gg'x_1 = 1_i\end{cases}
\end{aligned}
$$

Así que $\cdot_i$ es una acción. ■

Además esta acción es libre para cada $i \in I$ pues si $g \in G_i$ es tal que $g \cdot_i w = w$ para cada $w \in \mathcal{W}$ podemos tomar $w = ()$ y tenemos $g \cdot_i () = ()$ y entonces de la definición de la acción $\cdot_i$ tenemos que $g = 1_i$, lo que significa que efectivamente, la acción $\cdot_i$ es libre.

Ahora cada $g \in G_i$ puede pensarse como una permutación en $\mathcal{W}$ y G_i como un subconjunto del grupo de permutaciones de $\mathcal{W}$ que es lo que dice la siguiente afirmación:

Sea $Biy(\mathcal{W}) = \{\theta : \mathcal{W} \to \mathcal{W} : \theta \text{ es biyectiva}\}$ el grupo de permutaciones de $\mathcal{W}$ y consideremos las siguientes permutaciones

$$\theta_g(w) = g \cdot_i w$$

$\theta_g \in Biy(\mathcal{W})$ ya que

$$\theta_g \theta_{g^{-1}}(w) = \theta_g\left(g^{-1} \cdot_i w\right) = g \cdot_i \left(g^{-1} \cdot_i w\right) = \left(gg^{-1}\right) \cdot_i w = w$$

$$\theta_{g^{-1}} \theta_g(w) = \theta_{g^{-1}}(g \cdot_i w) = g^{-1} \cdot_i (g \cdot_i w) = \left(g^{-1}g\right) \cdot_i w = w$$

Ahora para cada $i \in I$ sea $\varphi_i : G_i \to Biy(\mathcal{W})$ dado por

$$\varphi_i(g) = \theta_g$$

estas funciones son monomorfismos:

φ_i **es homomorfismo** Sean $g_1, g_2 \in G_i$ y $w \in \mathcal{W}$ entonces

$$\theta_{g_1 g_2}(w) = (g_1 g_2) \cdot_i w = g_1 \cdot_i (g_2 \cdot_i w) = g_1 \cdot_i \theta_{g_2}(w) = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}(w)$$

φ_i **es inyectiva** Sea $g \in G_i$ tal que $\varphi_i(g) = \theta_g = Id_{\mathcal{W}}$ así que

$$\theta_g(w) = g \cdot_i w = w \ \forall w \in \mathcal{W}$$

y como la acción es libre se tiene que $g = 1_i$.

Sea $G = \left\langle \bigcup_{i \in I} \varphi_i(G_i) \right\rangle$ es claro que G es un subgrupo de $Biy(\mathcal{W})$ y todo elemento de G es producto de potencias de elementos de $\bigcup_{i \in I} \varphi_i(G_i)$; además si dos elementos consecutivos están en el mismo grupo podemos reemplazarlo por un sólo factor, así todo elemento no neutro puede ser expresado en forma reducida, es decir, no hay dos factores en el mismo grupo y no aparece ningun elemento neutro de ellos. Además afirmamos que tal expresiónes única:

Supongamos que $\theta = \theta_{g_1} \cdots \theta_{g_m} = \theta_{h_1} \cdots \theta_{h_n}$ donde ambas expresiones son reducidas, entonces

$$\theta\,() = (g_1, \ldots, g_m) = (h_1, ..., h_n)$$

así que $m = n$ y además $g_i = h_i$ en otras palabras, la expresión es única.

Afirmamos que G es el producto libre de los $\{G_i\}_{i \in I}$ con respecto a los monomorfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$

Sea H un grupo arbitrario y $\{\psi_i : G_i \to H\}_{i \in I}$. Definimos $f : G \to H$ de la siguiente manera. Si $\theta = \theta_{g_1} \cdots \theta_{g_m} \in G$, donde $\theta \neq 1$, $\theta_{g_k} \in \varphi_{g_k}(G_{i_k})$ $\forall$ $k = 1, ..., m$ está en forma reducida definimos

$$f(\theta) = (\psi_{i_1}(g_1)) \cdots (\psi_{i_m}(g_m))$$

$$f(1) = 1$$

f está bien definida pues la forma reducida es única $\forall \theta \in G, \theta \neq 1$.

Veamos que f es un homomorfismo. Sean θ_1 y $\theta_2 \in G$ donde

$$\theta_1 = \theta_{g_1} \cdots \theta_{g_m},\ g_k \in G_{i_k}\ \forall\ k = 1, ..., m$$

$$\theta_2 = \theta_{g_{m+1}} \cdots \theta_{g_n},\ g_k \in G_{i_k}\ \forall\ k = m+1, ..., n$$

son sus formas reducidas entonces

$$f(\theta_1) f(\theta_2) = (\psi_{i_1}(g_1)) \cdots (\psi_{i_m}(g_m)) \left(\psi_{i_{m+1}}(g_{m+1})\right) \cdots (\psi_{i_n}(g_n))$$

Consideremos 2 casos, primero si $i_m \neq i_{m+1}$ entonces

$$f(\theta_1) f(\theta_2) = f\left(\theta_{g_1} \cdots \theta_{g_m} \theta_{g_{m+1}} \cdots \theta_{g_n}\right) = f(\theta_1 \theta_2)$$

ahora si $i_m = i_{m+1}$

$$\begin{aligned}
f(\theta_1) f(\theta_2) &= (\psi_{i_1}(g_1)) \cdots (\psi_{i_m}(g_m)) \left(\psi_{i_{m+1}}(g_{m+1})\right) \cdots (\psi_{i_n}(g_n)) \\
&= (\psi_{i_1}(g_1)) \cdots \left((\psi_{i_m}(g_m)) \left(\psi_{i_{m+1}}(g_{m+1})\right)\right) \cdots (\psi_{i_n}(g_n)) \\
&= (\psi_{i_1}(g_1)) \cdots (\psi_{i_m}(g_m g_{m+1})) \left(\psi_{i_{m+2}}(g_{m+2})\right) \cdots (\psi_{i_n}(g_n))
\end{aligned}$$

si $i_m \neq i_{m+2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(\theta_1) f(\theta_2) &= f\left(\theta_{g_1} \cdots \theta_{g_m g_{m+1}} \theta_{g_{m+2}} \cdots \theta_{g_n}\right) \\ &= f(\theta_1 \theta_2) \end{aligned}$$

en caso contrario repetimos el proceso como anteriormente.

Ahora veamos que f hace conmutar el diagrama para cada $i \in I$

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & G \arrow[dl, "f"] \\ H & \end{tikzcd}$$

si $g \in G_i$ entonces $f(\varphi_i(g)) = f(\theta_g) = \psi_i(g)$.

Ahora f es único pues si suponemos que f' tambien hace conmutar el diagrama anterior. Bastará con probar la igualdad para los elementos del conjunto generador de G por ser f, f' homomorfismos. Sea $\theta_g \in G$ entonces para algún $i \in I$

$$f'(\theta_g) = f'(\varphi_i(g)) = \psi_i(g) = f(\varphi_i(g))$$

así que f es único y así G es el producto libre de los $\{G_i\}_{i \in I}$ con respecto a los monomorfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$.

Notemos que al ser φ_i monomorfismos podemos identificar a cada grupo G_i con si imagen $\varphi_i(G_i)$ y considerar G_i como un subgrupo del prodcuto libre G; entonces φ será considerada como una inclusión.

Observación 3.44. *Los puntos más importantes a recordar de la demostración del teorema 3.43 son los siguientes*

1. *Todo elemento $g \neq 1$ puede expresarse de manera única como un producto en forma reducida de los elementos de los grupos G_i.*

2. *Las reglas para multiplicar de tales productos en forma reducida son obvias y naturales.*

Ejemplo 3.45. *Sean G_1, G_2 grupos cíclicos de orden 2 generados por x_1 y x_2 respectivamente, entonces todo elemento de su producto libre puede ser expresado de manera única como productos de x_1 y x_2 de manera alternada, por ejemplo algunos elementos típicos del producto libre son*

$$x_1, x_1x_2, x_1x_2x_1$$

$$x_2, x_2x_1, x_2x_1x_2$$

hay que observar que los elementos x_1x_2 *y* x_2x_1 *son de orden infinito.*

Podemos notar una gran diferencia entre su prodcuto directo y su producto libre, ya que su producto directo es el 4-Grupo de Klain, que es abeliano y de orden 4, mientras que el producto libre tiene orden infinito y no es abeliano.

De ahora en adelante denotaremos al producto libre de $\{G_i\}_{i\in I}$ como $\prod_{i\in I}^{\star} G_i$, o bien $G_1 \star G_2 \star G_3 \star \cdots G_n$ para una cantidad finita.

3.4. Grupos Libres

Como es de suponer, la definición de grupo libre es análoga a la de grupo abeliano libre.

Definición 3.46. *Sea S un conjunto arbitrario. Un grupo libre sobre el conjunto S (o grupo libre generado por S) es un grupo F junto con una función $\varphi : S \to F$ tal que para cualquier grupo H y cualquier función $\psi : S \to H$ existe un único homomorfismo $f : F \to H$ que hace conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Exactamente como en los casos anteriores, esta definición caracteriza completamente un grupo libre como lo enuncia el siguiente resultado cuya demostración es análoga a la de la proposición 3.20.

Proposición 3.47. *Sean F y F' dos grupos libres sobre el conjunto S respecto a las funciones $\varphi : S \to F$ y $\varphi' : S \to F'$ respectivamente. Entonces existe un único isomorfismo $h : F \to F'$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & F \arrow[dl, "h"] \\ F' & \end{tikzcd}$$

■

Falta probar la existencia de un grupo libre sobre un conjunto S arbitrario y establecer sus propiedades principales. Usaremos el mismo método que en el caso de grupos abelianos libres.

Proposición 3.48. *Supongamos que $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, que los conjuntos S_i son ajenos por pares, no vacíos y para cada $i \in I$, sea F_i un grupo libre sobre S_i con respecto a una función $\varphi_i : S_i \to F_i$. Si F es el producto libre de los grupos F_i con respecto a los monomorfismos $\eta_i : F_i \to F$, $\eta_i(g) = \theta_g$ y si definimos $\varphi : S \to F$ como $\varphi|_{S_i} = \eta_i \circ \varphi_i$. Entonces F es el grupo libre sobre el conjunto S respecto a la función φ.*

Demostración. La demostración de esta proposición es idéntica a la proposición 3.22. ∎

De manera intuitiva, la proposición 3.48 significa que el producto libre de grupos libres es un grupo libre.

Aplicaremos ahora esta proposición para demostrar la existencia de grupos libres tal como se hizo en el caso de grupos abelianos libres.

Proposición 3.49. *Sea $S = \{x_i\}_{i\in I}$ y para cada $i \in I$ sea $S_i = \{x_i\}$ el conjunto que sólo contiene al elemento x_i. Denotemos por F_i al grupo cíclico infinito generado por x_i*

$$F_i = \{x_i^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y sea $\varphi_i : S_i \to F_i$ la inclusión. Entonces F_i es un grupo libre sobre el conjunto S_i respecto a φ_i.

Demostración. Es completemante análoga a la demostración del caso abeliano.

∎

Corolario 3.50. *Dado un conjunto S existe su grupo libre.*

Demostración. Aplicando las proposiciones 3.48 y 3.49 obtenemos que F es un grupo libre sobre S con respecto a la función φ. ∎

De lo conocido de productos libres sabemos que todo elemento g no neutro puede expresarse de manera única de la forma reducida

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

donde los $x_i \in S$ y dos elementos consecutivos son siempre distintos y los n_i son enteros no nulos. A esta expresión le llamamos palabra reducida, y para no tener excepciones, el elemento neutro estará representado por la palabra vacía. Las reglas para formar inversos y productos son obvias.

Veamos ahora que φ definida anteriormente por $\varphi|_{S_i} = n_i \circ \varphi_i$ es inyectiva.

Sean $x_i, x_j \in S$ tales que $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$ entonces $\eta_i(\varphi_i(s_i)) = \eta_j(\varphi_j(s_j))$ entonces $\eta_i(x_i) = \eta_j(x_j)$ esto implica por definición de η_i que $\theta_{x_i} = \theta_{x_j}$ además ambas son palabras en forma reducida en F así que tienen que ser la misma, así que $x_i = x_j$.

Ahora probamos que F está generado por $\varphi(S)$. Sea $\theta \in F$ $\theta \neq 1$ entonces si su expresión reducida es

$$\theta = \theta_{g_1} \theta_{g_2} \cdots \theta_{g_n}$$

donde cada $g_k \in F_{i_k} = \langle x_{i_k} \rangle$ $\forall$ $k = 1, ..., n$; en otras palabras, $g_k = x_{i_k}^{m_k}$ con $m_k \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_{x_{i_1}^{m_1}} \theta_{x_{i_2}^{m_2}} \cdots \theta_{x_{i_n}^{m_n}} \\
&= \theta_{\varphi_{i_1}(x_{i_1})^{m_1}} \theta_{\varphi_{i_2}(x_{i_2})^{m_2}} \cdots \theta_{\varphi_{i_n}(x_{i_n})^{m_n}} \\
&= \eta_{i_1}\left(\varphi_{i_1}(x_{i_1})^{m_1}\right) \eta_{i_2}\left(\varphi_{i_2}(x_{i_2})^{m_2}\right) \cdots \eta_{i_n}\left(\varphi_{i_n}(x_{i_n})^{m_n}\right) \\
&= \eta_{i_1}\left(\varphi_{i_1}(x_{i_1})\right)^{m_1} \eta_{i_2}\left(\varphi_{i_2}(x_{i_2})\right)^{m_2} \cdots \eta_{i_n}\left(\varphi_{i_n}(x_{i_n})\right)^{m_n} \\
&= \varphi(x_{i_1})^{m_1} \varphi(x_{i_2})^{m_2} \cdots \varphi(x_{i_n})^{m_n}
\end{aligned}$$

y entonces $\langle \varphi(S) \rangle = F$.

Hemos demostrado que existe un grupo libre F sobre un conjunto dado S respecto a una función particular φ que es inyectiva y que manda a S a un conjunto generador de F. Si dieramos otro grupo libre sobre el mismo conjunto S respecto a otra función φ' entonces por la proposición 3.47 obtendríamos que φ' es también inyectiva y además $\langle \varphi'(S) \rangle = F'$.

Concluímos esta sección estudiando la relación entre grupos libres y grupos abelianos libres. Recordamos que si x, y son elementos arbitrarios de un grupo G, entonces $[x, y]$ denota el elemento $xyx^{-1}y^{-1}$ y se llama conmutador de x con y. $[G, G]$ denota el subgrupo de G generado por todos sus conmutadores y se llama subgrupo conmutador, se comprueba fácilmente que es un subgrupo normal y el grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano, y no sólo eso, si N es un subgrupo normal de G tal que G/N es abeliano, entonces $[G, G] \subset N$; la prueba de esta afirmación se puede encontrar en [2] pág. 122.

Proposición 3.51. *Sea F un grupo libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$ y denotemos por $\pi : F \to F/[F, F]$ la proyección natural de F sobre su grupo cociente. Entonces $F/[F, F]$ es un grupo abeliano libre sobre el conjunto S con respecto a la función $\pi \circ \varphi : S \to F/[F, F]$.*

Demostración. Sea A un grupo abeliano y $\psi : S \to A$ una función. Dado que F es un grupo libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$ se tiene la existencia de un único homomorfismo $f : F \to A$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & F \arrow[dl, "f"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

ahora definamos $\bar{f} : F\diagup [F,F] \to A$ tal que

$$\bar{f}\left(a\left[F,F\right]\right) = f\left(a\right)$$

veamos primero que está bien definido, supongamos que $a\left[F,F\right] = a'\left[F,F\right]$, luego $a\left(a'\right)^{-1} \in \left[F,F\right]$, observemos que cualquier elemento de $[F,F]$ es enviado al 1 bajo f, basta probarlo para los generadores de $[F,F]$

$$f\left(xyx^{-1}y^{-1}\right) = f\left(x\right)f\left(y\right)f\left(x\right)^{-1}f\left(y\right)^{-1} = 1$$

pues A es abeliano. Luego

$$1 = f\left(a\left(a'\right)^{-1}\right) = f\left(a\right)f\left(a'\right)^{-1}$$

y entonces $f\left(a\right) = f\left(a'\right)$, y por lo tanto

$$\bar{f}\left(a\left[F,F\right]\right) = \bar{f}\left(a'\left[F,F\right]\right)$$

Así que $\bar{f}$ está bien definida.

Probemos que $\bar{f}$ es un homomorfismo. Sean $a\left[F,F\right], a'\left[F,F\right] \in F\diagup\left[F,F\right]$ entonces

$$\begin{aligned}
\bar{f}\left(a\left[F,F\right]a'\left[F,F\right]\right) &= \bar{f}\left(aa'\left[F,F\right]\right)\\
&= f\left(aa'\right)\\
&= f\left(a\right)f\left(a'\right)\\
&= \bar{f}\left(a\left[F,F\right]\right)\bar{f}\left(a'\left[F,F\right]\right)
\end{aligned}$$

así que $\bar{f}$ es un homomorfismo; además hace conmutar el diagrama siguiente por su misma definición

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & F\diagup[F,F] \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

y es el único con esa propiedad, pues supongamos que $f' : F\diagup\left[F,F\right] \to A$ también hace conmutar este diagrama luego para cada $a \in F$ se tiene que

$$f'\left(a\left[F,F\right]\right) = f\left(a\right) = \bar{f}\left(a\left[F,F\right]\right)$$

luego $f' = \bar{f}$

Los dos diagramas anteriores inducen este diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\pi\circ\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & F/[F,F] \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

veamos que es $\bar{f}$ es el único que hace conmutar el diagrama anterior (III), supongamos que $\tilde{f}$ también lo hace conmutar, entonces para cada $x \in S$, $\tilde{f} \circ \pi (\varphi (x)) = \psi (x) = f (\varphi (x))$, la segunda igualdad es por el diagrama (I) y como $\varphi (S)$ genera a F tenemos que $\tilde{f} \circ \pi = f$ pero por el diagrama (II) $\bar{f}$ es la única tal que $\bar{f} \circ \pi = f$ esto significa que $\tilde{f} = \bar{f}$ por lo tanto, $F/[F,F]$ es un grupo abeliano libre sobre S. ■

Corolario 3.52. *Si F y F' son grupos libres sobre conjuntos finitos S y S' entonces F y F' son isomorfos si y sólo si tienen el mismo cardinal.*

Demostración. Supongamos que F y F' son grupos libres isomorfos sobre los conjuntos S y S' respectivamente, digamos que $h : F \longrightarrow F'$ es su isomorfismo. Veamos que $F/[F,F]$ y $F'/[F',F']$ son isomorfos

$$F \xrightarrow{h} F' \xrightarrow{\pi} F'/[F',F']$$

Si probamos que $\ker (\pi \circ h) = [F,F]$ habremos terminado por el segundo teorema del isomorfismo; probemos la doble contención, sea $xyx^{-1}y^{-1} \in [F,F]$, entonces

$$h\left(xyx^{-1}y^{-1}\right) = h (x) h (y) h (x)^{-1} h (y)^{-1} \in [F',F']$$

y entonces $\pi \circ h (xyx^{-1}y^{-1}) = [F',F']$ entonces $xyx^{-1}y^{-1} \in \ker (\pi \circ h)$.

Recíprocamente, si $a \in \ker (\pi \circ h)$ entonces $\pi \circ h (a) = [F',F']$ así que $h (a) \in [F',F'] = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in F'\} \rangle$ luego podemos expresar $h (a)$ de la siguiente forma

$$h (a) = \prod_{i=1}^{n} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}$$

y luego

$$a = \prod_{i=1}^{n} h^{-1} (x_i) h^{-1} (y_i) h^{-1} h^{-1} (x_i)^{-1} h^{-1} (y_i)^{-1} \in [F,F]$$

y por la proposición 3.51 tenemos que $F\diagup[F,F]$ y $F'\diagup[F',F']$ son grupos abelianos libres sobre S y S' respectivamente y luego por el corolario 3.33 tienen el mismo cardinal. La prueba recíproca es idéntica a la de grupos abelianos libres. ■

Definición 3.53. *Si F es un grupo libre sobre S entonces definimos el rango de F como el número cardinal de S.*

El corolario 3.52 nos dice que el rango es un invariante de grupos, al menos si el rango es finito, se puede mostrar también se cumple si el rango es infinito, la prueba de esta afirmación es sólo aritmética, por lo que se omitirá.

3.5. Presentación de Grupos por Generadores y Relaciones

Empezamos con un resultado análogo a la proposición 3.27 para grupos arbitrarios.

Proposición 3.54. *Todo grupo es imagen homomórfica de un grupo libre. Para ser precisos, si S es un conjunto arbitrario de generadores del grupo G y F un grupo libre sobre S entonces la inclusión $i : S \to G$ determina un epimorfismo de F a G.*

Demostración. La prueba de esta proposición es análoga a la 3.27. ∎

Esta proposición nos permite dar una definición de relación no trivial entre generadores por un método análogo al de los grupos abelianos, la diferencia en es este caso general es que no cualquier subgrupo puede ser el núcleo de un homomorfismo, sólo los grupos normales, así que haremos una modificación en está definición.

Definición 3.55. *Sea S un conjunto de generadores del grupo G y F un grupo libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$. Sea $\psi : S \to G$ la inclusión y $f : F \to G$ el único homomorfismo tal que $\psi = f \circ \varphi$, definimos una relación entre los generadores de S para el grupo G como un elemento no trivial $r \in \ker f$.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Definición 3.56. *Si tenemos $\{r_i\}_{i\in I}$ una familia de relaciones entonces se dice que una relación r es consecuencia de los $\{r_i\}_{i\in I}$ si r pertenece al menor subgrupo normal que contiene a los $\{r_i\}_{i\in I}$. Si cualquier relación es consecuencia de $\{r_i\}_{i\in I}$ se dice que $\{r_i\}_{i\in I}$ es un conjunto completo de relaciones.*

En vista de la definición anterior es conveniente denotar por $\overline{\langle \{r_i\}_{i\in I} \rangle}$ al menor subgrupo normal que contiene a $\{r_i\}_{i\in I}$.

Si $\{r_i\}_{i\in I}$ es un conjunto completo de relaciones, entonces $\ker f$ está completamente determinada por $\{r_i\}_{i\in I}$, ya que es la intersección de todos los subgrupos normales que contienen a $\{r_i\}_{i\in I}$. Así que G está completamente determinado, salvo isomorfismos, por el conjunto generador S y el conjunto $\{r_i\}_{i\in I}$ pues G es isomorfo al cociente $F \big/ \overline{\langle \{r_i\}_{i\in I} \rangle}$.

Definición 3.57. *Una presentación de un grupo G es un par $\left(S, \{r_i\}_{i\in I}\right)$ donde S es un conjunto generador de G y $\{r_i\}_{i\in I}$ es un conjunto completo de relaciones entre los generadores. La presentación se dice finita si tanto S y I son finitos y el grupo G se llama de presentación finita si posee al menos una presentación finita.*

Nótese que culaquier grupo admite muchas presentaciones distintas, recíprocamente dadas dos presentaciones es, en general, difícil saber si los grupos que definen son isomorfos.

Ejemplo 3.58. *Un grupo cíclico de orden n admite una presentación $(\{x\}, x^n)$.*

Demostración. Sea G un grupo cíclico de orden n, digamos

$$G = \left\{x, x^2, x^3, \ldots, x^n = 1\right\}$$

entonces por lo sabido de grupos libres tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S = \{x\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \langle \varphi(x) \rangle = F \arrow[dl, "f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

donde ψ es la inclusión y f es un epimorfismo por la proposición 3.54. Como $F = \langle \varphi(x) \rangle$ es claro que F es el cíclico infinito; y $f\left(\varphi(x)^k\right) = x^k$ Luego

$$\begin{aligned}
\ker f &= \left\{x^k : f\left(x^k\right) = 1\right\} \\
&= \left\{\varphi(x)^k : f\left(\varphi(x)^k\right) = 1\right\} \\
&= \left\{\varphi(x)^k : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f\left(\varphi(x)^k\right) = x^{nm}\right\} \\
&= \left\{\varphi(x)^k : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x^k = x^{nm}\right\} \\
&= \left\{\varphi(x)^k : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } k = mn\right\} \\
&= \langle \varphi(x)^n \rangle
\end{aligned}$$

así una presentación para G es $(x, \varphi(x)^n)$, o bien, abusando de la notación, como lo haremos de ahora en adelante, aprovechando que φ es inyectiva podemos escribir la presentación de G así (x, x^n). ∎

Proposición 3.59. *Las presentaciones* $(\{a,b\}, baba^{-1})$ *y* $(\{a,c\}, a^2c^2)$ *definen el mismo grupo.*

Demostración. Sean $F(a,b)$ y $F(a,c)$ los grupos libres sobre los conjuntos $\{a,b\}$ y $\{a,c\}$ respecto a φ_f y φ_g respectivamente. Definamos los homomorfismos $\bar{f} : F(a,b) \to F(a,c)$ y $\overline{g} : F(a,c) \to F(a,b)$ de la siguiente forma. Sean $f : \{a,b\} \to F(a,c)$ y $g : \{a,c\} \to F(a,b)$ por la siguiente regla

$$\begin{aligned} f(a) &= \varphi_g(a) \\ f(b) &= \varphi_g(c)\varphi_g(a) \\ g(a) &= \varphi_f(a) \\ g(c) &= \varphi_f(b)\varphi_f(a)^{-1} \end{aligned}$$

luego, por definición de $F(a,b)$ y $F(a,c)$ tenemos la existencia de únicos $\bar{f} : F(a,b) \to F(a,c)$ y $\overline{g} : F(a,c) \to F(a,b)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \{a,b\} \arrow[r, "\varphi_f"] \arrow[d, "f"'] & F(a,b) \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ F(a,c) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{a,c\} \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "g"'] & F(a,c) \arrow[dl, "\overline{g}"] \\ F(a,b) & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que $\bar{f}$ y $\overline{g}$ son isomorfismos y uno es inverso del otro, vamos a probarlo en los generadores

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\bar{f}(\varphi_f(a))\right) &= \overline{g}(f(a)) \\ &= \overline{g}(\varphi_g(a)) \\ &= g(a) \\ &= \varphi_f(a) \\ \overline{g}\left(\bar{f}(\varphi_f(b))\right) &= \overline{g}(f(b)) \\ &= \overline{g}(\varphi_g(c)\varphi_g(a)) \\ &= \overline{g}(\varphi_g(c))\,\overline{g}(\varphi_g(a)) \\ &= g(c)\,g(a) \\ &= \varphi_f(b)\varphi_f(a)^{-1}\varphi_f(a) \\ &= \varphi_f(b) \end{aligned}$$

así que $\overline{g} \circ \bar{f} = Id$

hagamos lo mismo para $\bar{f} \circ \overline{g}$

$$\begin{aligned}
\bar{f}\left(\overline{g}\left(\varphi_g\left(a\right)\right)\right) &= \bar{f}\left(g\left(a\right)\right) \\
&= \bar{f}\left(\varphi_f\left(a\right)\right) \\
&= f\left(a\right) \\
&= \varphi_g\left(a\right) \\
\bar{f}\left(\overline{g}\left(\varphi_g\left(c\right)\right)\right) &= \bar{f}\left(g\left(c\right)\right) \\
&= \bar{f}\left(\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right) \\
&= \bar{f}\left(\varphi_f\left(b\right)\right)\bar{f}\left(\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right) \\
&= f\left(b\right)f\left(a\right)^{-1} \\
&= \varphi_g\left(c\right)\varphi_g\left(a\right)\varphi_g\left(a\right)^{-1} \\
&= \varphi_g\left(c\right)
\end{aligned}$$

luego $\bar{f} \circ \overline{g} = Id$ con esto probamos que tanto $\bar{f}$ como $\overline{g}$ son isomorfismos y que son inversos uno del otro.

Ahora afirmamos que

$$\overline{\left\langle \varphi_g\left(a\right)\varphi_g\left(c\right)^2 \right\rangle} = \bar{f}\left(\overline{\left\langle \varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1} \right\rangle}\right)$$

Note que

$$\varphi_g\left(a\right)^2\varphi_g\left(c\right)^2 = \varphi_g\left(c\right)^{-1}\bar{f}\left(\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right)\varphi_g\left(c\right)$$

pues

$$\begin{aligned}
\varphi_g\left(a\right)^2\varphi_g\left(c\right)^2 &= \varphi_g\left(c\right)^{-1}\varphi_g\left(c\right)\varphi_g\left(a\right)\varphi_g\left(a\right)\varphi_g\left(c\right)\varphi_g\left(a\right)\varphi_g\left(a\right)^{-1}\varphi_g\left(c\right) \\
&= \varphi_g\left(c\right)^{-1}f\left(b\right)f\left(a\right)f\left(b\right)f\left(a\right)^{-1}\varphi_g\left(c\right) \\
&= \varphi_g\left(c\right)^{-1}\bar{f}\left(\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right)\varphi_g\left(c\right)
\end{aligned}$$

luego $\varphi_g\left(a\right)^2\varphi_g\left(c\right)^2 \in \overline{\left\langle \bar{f}\left(\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right)\right\rangle}$.

Ahora como $\overline{\left\langle \varphi_g\left(a\right)^2\varphi_g\left(c\right)^2 \right\rangle}$ es el mìnimo subgrupo normal que contiene a $\varphi_g\left(a\right)^2\varphi_g\left(c\right)^2$ entonces

$$\overline{\left\langle \varphi_g\left(a\right)^2\varphi_g\left(c\right)^2 \right\rangle} \subset \overline{\left\langle \bar{f}\left(\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right)\right\rangle}$$

y como $\bar{f}$ es un isomorfismo entonces

$$\overline{\left\langle \bar{f}\left(\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right)\right\rangle} = \bar{f}\left(\overline{\left\langle \varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)\varphi_f\left(b\right)\varphi_f\left(a\right)^{-1}\right\rangle}\right)$$

y con esto terminamos la primer contención, la otra es análoga,

$$\bar{f}\left(\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}\right) = \varphi_g(c)^{-1}\,\varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2\,\varphi_g(c)$$

así que $\bar{f}\left(\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}\right) \in \overline{\left\langle \varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2 \right\rangle}$ y por la misma razón anterior

$$\overline{\left\langle \bar{f}\left(\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}\right)\right\rangle} \subset \overline{\left\langle \varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2 \right\rangle}$$

y luego

$$\bar{f}\left(\overline{\left\langle \varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}\right\rangle}\right) \subset \overline{\left\langle \varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2 \right\rangle}$$

lo que prueba que

$$\overline{\left\langle \varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2 \right\rangle} = \overline{\left\langle \bar{f}\left(\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}\right)\right\rangle}$$

lo que prueba nuestra afirmación. De manera análoga podemos probar que

$$\overline{\left\langle \varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}\right\rangle} = \overline{g}\left(\overline{\left\langle \varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2 \right\rangle}\right)$$

por lo tanto, el subgrupo normal de $F(a,b)$ generado por

$$\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}$$

; y el subgrupo normal de $F(a,c)$ generado por

$$\varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2$$

se corresponden por los isomorfismos $\bar{f}$ y $\overline{g}$. Entonces tenemos un isomorfismo

$$\hat{f} : \frac{F(a.b)}{\overline{\left\langle \varphi_f(b)\,\varphi_f(a)\,\varphi_f(b)\,\varphi_f(a)^{-1}\right\rangle}} \to \frac{F(a,c)}{\overline{\left\langle \varphi_g(a)^2\,\varphi_g(c)^2 \right\rangle}}$$

■

Note que la escencia del razonamiento anterior está contenido en dos simples cálculos:

1. Si $b = ca$ entonces $baba^{-1} = ca^2c$ y $a^2c^2 = c^{-1}\left(baba^{-1}\right)c$.
2. Si $c = ba^{-1}$ entonces $a^2c^2 = a^2\left(ba^{-1}\right)\left(ba^{-1}\right) \Rightarrow a^2c^2\left(ba^{-1}\right)^{-1} = a^2 \Rightarrow \left(ba^{-1}\right)a^2c^2\left(ba^{-1}\right)^{-1} = baba^{-1}$.

En el siguiente capítulo veremos que estos grupos anteriores son el grupo fundamental de la Botella de Klein.

Ahora encontraremos una presentación para $G/[G,G]$ en términos de la presentación de G.

Observemos que si tenemos un conjunto S y una función $\psi : S \to G$ tal que $\psi(S)$ genera a G, si F es un grupo abeliano libre sobre S con respecto a $\varphi : S \to F$, entonces por definición existe un único homomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & F \arrow[dl, "f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

aún más, dado que $\psi(S)$ genera a G, f es claramente un epimorfismo, ya que si $g \in G$ entonces podemos expresar a g como productos de potencias de elementos en $\psi(S)$

$$g = \prod_{i=1}^{n} \psi(s_i)^{h_i}$$

luego $\prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(s_i)^{h_i} \in F$ y además por la conmutatividad del diagrama tenemos que

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} \varphi(s_i)^{h_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} f(\varphi(s_i))^{h_i} = \prod_{i=1}^{n} \psi(s_i)^{h_i} = g$$

así que efectivamente, f es epimorfismo.

Podemos extender el diagrama anterior al siguiente

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & F \arrow[r, "\pi_F"] \arrow[dl, "f"] & F/[F,F] \arrow[ddll, "\bar{f}"] \arrow[d, phantom, "(III)"] \\ G \arrow[d, "\pi_G"'] \arrow[r, phantom, "(II)"] & & {} \\ G/[G,G] & & \end{tikzcd}$$

Dado que por la proposición 3.51 se cumple que $F/[F,F]$ es un grupo abeliano libre sobre S con respecto a la función $\pi_F \circ \varphi : S \to F/[F,F]$

lo que nos da la existencia de la única función $\bar{f}$ que hace conmutar el diagrama grande (III) anterior, ahora con esto veremos que el trapecio (II) en el diagrama también conmuta, para esto hay que probar que $\bar{f} \circ \pi_F = \pi_G \circ f$. Primero sabemos, ya que (I) y (III) conmutan que $\bar{f} \circ \pi_F \circ \varphi(x) = \pi_G \circ \psi(x) = \pi_G \circ f \circ \varphi(x)$ para cada $x \in S$, o bien, $\bar{f} \circ \pi_F(\varphi(x)) = \pi_G \circ f(\varphi(x))$ para cada $\varphi(x) \in \varphi(S)$ con $F = \langle \varphi(S) \rangle$ así que $\bar{f} \circ \pi_F = \pi_G \circ f$ y por lo tanto el trapecio (II) conmuta.

Ahora afirmamos que $\bar{f}(a[F,F]) = f(a)[G,G]$ en efecto, sea $a \in F$ entonces $\bar{f} \circ \pi_F(a) = \pi_G \circ f(a)$ y así $\bar{f}(a[F,F]) = f(a)[G,G]$.

Veamos que $\bar{f}$ es epimorfismo. Sea $g[G,G] \in G/[G,G]$, entonces $g \in G$ y lo podemos expresar como productos de potencias de elementos de S digamos

$$g = \prod_{i=1}^{n} \psi(s_i)^{h_i}$$

luego

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi(s_i)^{h_i}[F,F] \in F/[F,F]$$

así tenemos que

$$\begin{aligned}
\bar{f}\left(\prod_{i=1}^{n} \varphi(s_i)^{h_i}[F,F]\right) &= f\left(\prod_{i=1}^{n} \varphi(s_i)^{h_i}\right)[G,G] \\
&= \prod_{i=1}^{n} f \circ \varphi(s_i)^{h_i}[G,G] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \psi(s_i)^{h_i}[G,G] \\
&= g[G,G]
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

Veamos ahora que $\ker \bar{f} = \{a[F,F] : a \in \ker f\}$. Sea $a[F,F]$ con $a \in \ker f$ entonces $\bar{f}(a[F,F]) = f(a)[G,G] = [G,G]$ pues $f(a) = 1$ así que $a[F,F] \in \ker \bar{f}$. Recíprocamente, sea $a[F,F] \in \ker \bar{f}$ entonces $\bar{f}(a[F,F]) = [G,G]$, pero por otro lado, $\bar{f}(a[F,F]) = f(a)[G,G]$ lo que implica que $f(a) \in [G,G]$ entonces

$$f(a) = \prod_{i=1}^{n} \left(x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}\right)^{h_i}$$

con $x_i, y_i \in G$; por ser f un epimorfismo existen $x_i', y_i' \in F$ tal que $f(x_i') = x_i$ y $f(y_i') = y_i$ y sustituyendo y usando el hecho de que f es homomorfismo

$$f(a) = f\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i'y_i'(x_i')^{-1}(y_i')^{-1}\right)^{h_i}\right)$$

y así

$$\begin{aligned}
1 &= f(a)\, f\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i'y_i'(x_i')^{-1}(y_i')^{-1}\right)^{h_i}\right)^{-1} \\
&= f\left(a\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i'y_i'(x_i')^{-1}(y_i')^{-1}\right)^{h_i}\right)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

lo que quiere decir que $a\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i'y_i'(x_i')^{-1}(y_i')^{-1}\right)^{h_i}\right)^{-1} \in \ker f$ así entonces, como $\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i'y_i'(x_i')^{-1}(y_i')^{-1}\right)^{h_i}\right)^{-1} \in [F, F]$

$$a[F,F] = a\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i'y_i'(x_i')^{-1}(y_i')^{-1}\right)^{h_i}\right)^{-1}[F,F] \in \ker f$$

esto prueba la otra contención y por lo tanto la igualdad

$$\ker \bar{f} = \{a[F,F] : a \in \ker f\}. \tag{9}$$

Ahora con estas observaciones podemos encontrar la presentación para $G/[G,G]$

Proposición 3.60. *Sea $(S, \{r_i\}_{i\in I})$ una presentación para un grupo G, entonces una presentación respecto a un* ***grupo abeliano libre*** *$F(S)$ para $G/[G,G]$ es*

$$\left(\pi_g(S) \mid \{r_i[G,G]\}_{i\in I}\right)$$

Demostración. Sea $F(S)$ un grupo libre sobre S con respecto a la inclusión, entonces $G \cong F(S)/\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}$ y además tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & F \arrow[dl, "f"] \\
F/N &
\end{tikzcd}$$

donde π es la proyección natural, y por la conmutatividad del diagrama, también lo debe de ser f, y además es claro que $\pi(S)$ genera a $F(S)/\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}$ por lo que podemos usar las observaciones anteriores.

Afirmamos ahora que

$$\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}=\left\{\prod_{k=1}^{m}x_k^{-1}r_{i_k}^{n_k}x_k : x_k\in F, r_{i_k}\in\{r_i\}_{i\in I}, n_k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}\right\}$$

dado que $\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}\lhd F(S)$ entonces $\ker f$ debe contener a los productos $\prod\limits_{k=1}^{m}x_k^{-1}r_{i_k}^{n_k}x_k$ y tenemos la contención

$$\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}\supset\left\{\prod_{k=1}^{m}x_k^{-1}r_{i_k}^{n_k}x_k : x_k\in F, r_{i_k}\in\{r_i\}_{i\in I}, n_k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}\right\}$$

ahora $\left\{\prod\limits_{k=1}^{m}x_k^{-1}r_{i_k}^{n_k}x_k : x_k\in F, r_{i_k}\in\{r_i\}_{i\in I}, n_k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}\right\}\lhd F(S)$ y además este subgrupo contiene a los $\{r_i\}_{i\in I}$, entonces por ser $\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}$ el menor subgrupo normal con estas propiedades tenemos que

$$\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}\subset\left\{\prod_{k=1}^{m}x_k^{-1}r_{i_k}^{n_k}x_k : x_k\in F, r_{i_k}\in\{r_i\}_{i\in I}, n_k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}\right\}$$

y por lo tanto la igualdad, hay que notar que

$$\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}=\ker f$$

ya que f es la proyección natural y de (9) y de la igualdad recién obtenida tenemos que

$$\begin{aligned}
\ker\bar{f} &= \{a[F,F] : a\in\ker f\}\\
&= \left\{\prod_{k=1}^{m}x_k^{-1}r_{i_k}^{n_k}x_k[F,F] : x_k\in F, r_{i_k}\in\{r_i\}_{i\in I}, n_k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}\right\}\\
&= \left\{\prod_{k=1}^{m}\left(x_k^{-1}[F,F]\right)\left(r_{i_k}^{n_k}[F,F]\right)\left(x_k[F,F]\right) : x_k\in F, r_{i_k}\in\{r_i\}_{i\in I}, n_k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}\right\}\\
&= \overline{\langle\{r_i[F,F]\}_{i\in I}\rangle}
\end{aligned}$$

entonces una presentación para $G/[G,G]$ es $\left(\pi(S), \{r_i[F,F]\}_{i\in I}\right)$. ■

Enfatizamos que la presentación dada para $G/[G,G]$ en la proposición anterior es respecto a un grupo abeliano libre puede ser distinta a una presentación dada respecto a un$\langle\rangle$ grupo libre.

4. El Teorema de Seifert y Van Kampen sobre el Grupo Fundamental de la Unión de Dos Espacios. Aplicaciones

Los resultados y definiciones de este capítulo estan basados en [4].

4.1. Enunciado del Teorema de Seifert y Van Kampen

Teorema 4.1. *Sean U, V abiertos, conexos por trayectorias de un espacio topológico X tales que $U \cup V = X$ y $U \cap V \neq \emptyset$ y $U \cap V$ también es conexo por trayecyorias. Elijamos un punto $x_0 \in U \cap V$ para los grupos fundamentales que cosideramos. Sea H un grupo arbitrario y ρ_1, ρ_2, ρ_3 tres homomorfismos tales que el diagrama siguiente conmute*

$$\begin{tikzcd} & \pi(U) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\ \pi(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & H \\ & \pi(V) \arrow[ur, "\rho_2"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \to H$ tal que hace conmutar los tres diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd}$$

donde los φ_i y los ψ_i son los homomorfismos inducidos por las inclusiones.

Proposición 4.2. *$\pi(X)$ está caracterizado salvo isomorfismos.*

Demostración. Sea G un grupo y $\psi_1', \psi_2', \psi_3'$ homomorfismos con las siguientes propiedades:

1. El diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \pi\left(U\right) \arrow[dr, "\psi_1'"] & \\
\pi\left(U\cap V\right) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3'"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & G \\
 & \pi\left(V\right) \arrow[ur, "\psi_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

2. Dado un grupo H arbitrario y una colección de homomorfismos ρ_1, ρ_2, ρ_3 tales que hagan conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & \pi\left(U\right) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi\left(U\cap V\right) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & H \\
 & \pi\left(V\right) \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un único homomorfismo $\sigma' : G \to H$ tal que los tres siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
\pi\left(U\right) \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\rho_1"'] & G \arrow[dl, "\sigma'"'] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi\left(V\right) \arrow[r, "\psi_2'"] \arrow[d, "\rho_2"'] & G \arrow[dl, "\sigma'"'] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi\left(U\cap V\right) \arrow[r, "\psi_3'"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi\left(X\right) \arrow[dl, "\sigma'"'] \\
H &
\end{tikzcd}$$

Probemos que $G \cong \pi\left(X\right)$. Por funtorialidad tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \pi\left(U\right) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi\left(U\cap V\right) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi\left(X\right) \\
 & \pi\left(V\right) \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

que es inducido por el siguiente diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr] & \\ U \cap V \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \\ & V \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Por hipótesis tenemos que existe un único homomorfismo $k : G \to \pi(X)$ que hace conmutar los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\psi_1"'] & G \arrow[dl, "k"'] \\ \pi(X) & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "\psi_2'"] \arrow[d, "\psi_2"'] & G \arrow[dl, "k"'] \\ \pi(X) & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3'"] \arrow[d, "\psi_3"'] & G \arrow[dl, "k"'] \\ \pi(X) & \end{tikzcd}$$

Además por el teorema 4.1 existe un único homomorfismo $h : \pi(X) \to G$ tal que los siguientes tres diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_1'"'] & \pi(X) \arrow[dl, "h"] \\ G & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_2'"'] & \pi(X) \arrow[dl, "h"] \\ G & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\psi_3'"'] & \pi(X) \arrow[dl, "h"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Luego juntando los diagramas anteriores tenemos estos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\psi_1'"'] & G \arrow[dl, "hk"] \\ G & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "\psi_2'"] \arrow[d, "\psi_2'"'] & G \arrow[dl, "hk"] \\ G & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3'"] \arrow[d, "\psi_3'"'] & G \arrow[dl, "hk"] \\ G & \end{tikzcd}$$

dado que la $Id_G : G \to G$ también hace conmutar estos tres diagramas, y por hipótesis, hk es el único que hace conmutar los tres diagramas, entonces tenemos que $hk = Id_G$. De manera análoga, podemos obtener que $kh = Id_{\pi(X)}$

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "kh"] \\ \pi(X) & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \pi(X) \arrow[dl, "kh"] \\ \pi(X) & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\psi_3"'] & \pi(X) \arrow[dl, "kh"] \\ \pi(X) & \end{tikzcd}$$

de ambas tenemos que h y k son biyectivas y por lo tanto isomorfismos que era lo que se quería probar. ■

El teorema 4.1 afirma que $\pi(X)$ esta determinada de manera única por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \pi(U) \\
\pi(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\
& \pi(V)
\end{tikzcd}$$

en el sentido de que $\pi(X)$ completa el diagrama anterior de tal forma que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \pi(U) \arrow[dr] & \\
\pi(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] \arrow[rr] & & \pi(X) \\
& \pi(V) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

siendo $\pi(X)$ el grupo más libre que puede hacer esta completación.

Ahora establezcamos la versión general del teorema de Seifert-Van Kampen. Supongamos que tenemos las siguientes hipótesis:

X es un espacio topológico conexo por trayectorias y $x_0 \in X$, además tenemos una familia de conjuntos abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tales que cada uno es conexo por trayectorias, $x_0 \in U_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$; también $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, es decir $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Consideremos ahora los grupos fundamentales de los subgrupos U_λ con respecto al punto base x_0; para $U_\lambda \subset U_\mu$ definamos $\varphi_{\lambda\mu} : \pi(U_\lambda) \to \pi(U_\mu)$ inducida por la inclusión, y para cada U_λ, definamos $\psi_\lambda : \pi(U_\lambda) \to \pi(X)$ también inducido por las inclusiones. Podemos observar que para $U_\lambda \subset U_\mu$

el siguiente diagrama conmuta por functorialidad

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_\lambda) \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda\mu}"'] & \pi(X) \\
\pi(U_\mu) \arrow[ur, "\psi_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

pues el siguiente diagrama de inclusiones conmuta trivialmente

$$\begin{tikzcd}
U_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & X \\
U_\mu \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.3. *Con las hipótesis anteriores, $\pi(X)$ cumple la siguiente propiedad universal: Sea H un grupo arbitrario y $\rho_\lambda : \pi(U_\lambda) \to H$ una colección de homomorfismos definida para cada $\lambda \in \Lambda$ tales que si $U_\lambda \subset U_\mu$ entonces el diagrama siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_\lambda) \arrow[r, "\rho_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda\mu}"'] & H \\
\pi(U_\mu) \arrow[ur, "\rho_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \to H$ que para cualquier $\lambda \in \Lambda$ hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_\lambda) \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\
H &
\end{tikzcd}$$

De manera análoga a la proposición 4.2, este teorema caracteriza a $\pi(X)$ salvo isomorfismos.

La prueba de este teorema se dará en la cuarta sección de este capítulo, primero introduciremos algunas aplicaciones de este teorema para calcular grupos findamentales de algunos espacios.

4.2. Primera Aplicación del Teorema de Seifert y Van Kampen

Supongamos que $X = U \cup V, U \cap V \neq \emptyset$ además U, V abiertos y $U \cap V$ es conexo por trayectorias y φ_i, ψ_i con el mismo significado que en el teorema 4.1.

Teorema 4.4. *Si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi(X)$ es el producto libre de $\pi(U)$ y $\pi(V)$ respecto a los homomorfismos $\psi_1 : \pi(U) \to \pi(X)$, $\psi_2 : \pi(V) \to \pi(X)$.*

Demostración. Sea H un grupo arbitrario y sean $\rho_1 : \pi(U) \to H, \rho_2 : \pi(V) \to H$ homomorfismos arbitrarios, tendremos que demostrar que existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \to H$ tal que los diagramas siguientes conmuten

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Como por hipótesis $\pi(U \cap V) = \{1\}$, sea el homomorfismo $\rho_3 : \pi(U \cap V) \to H$ definido por $\rho_3(1) = 1$. Entonces el siguiente diagrama es trivialmente conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \pi(U) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\ \pi(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & H \\ & \pi(V) \arrow[ur, "\rho_2"'] & \end{tikzcd}$$

y por el teorema 4.1 existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \to H$ que hace conmutar los tres diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd}$$

como el tercer diagrama conmuta independientemente de cual sea el homomorfismo σ, entonces σ es el único que hace conmutar los dos primeros diagramas, y por lo tanto, $\pi(X)$ es el producto libre de $\pi(U)$ y de $\pi(V)$. ■

Recordemos ahora algunas definiciones del primer capítulo.

Definición 4.5. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, se dice que A es un retracto de X si existe una aplicación $r: X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cualquier $a \in A$ (entonces r se llama retracción).*

Un subespacio A es un retracto de deformación de X si existe una retracción $r: X \to A$ homotópica a la identidad en X, más precisamente:

Definición 4.6. *Si $A \subset X$ es un retracto de deformación de X si existe una aplicación $r: X \to A$ y una homotopía $f: X \times I \to X$ tal que para cualquier $x \in X$, $a \in A$, $t \in I$*

$$f(x,0) = x$$
$$f(x,1) = r(x)$$
$$f(a,t) = a$$

Proposición 4.7. *Sean $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ aplicaciones homotópicas relativas a $\{a\}$ Entonces $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_* : \pi(X,x) \to \pi(Y, \varphi_0(x))$.*

Demostración. Como $\varphi_0 \approx \varphi_1 \; rel_{\{a\}}$ existe una aplicación $\varphi : X \times I \to Y$ tal que

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$$
$$\varphi(x,1) = \varphi_1(x)$$
$$\varphi(a,t) = \varphi_0(a) = \varphi_1(a)$$

luego sea $[\sigma] \in \pi(X,a)$, ahora $\varphi_0(\sigma) \cong \varphi_1(\sigma)$ pues sea $F: I \times I \to Y$ definido por

$$F(s,t) = \varphi(\sigma(s), t)$$

y luego

$$F(s,0) = \varphi(\sigma(s), 0) = \varphi_0(\sigma(s))$$
$$F(s,1) = \varphi(\sigma(s), 1) = \varphi_1(\sigma(s))$$
$$F(0,t) = \varphi(\sigma(0), t) = \varphi(a,t) = \varphi_0(a) = \varphi_1(a)$$
$$F(1,t) = \varphi(\sigma(1), t) = \varphi(a,t) = \varphi_0(a) = \varphi_1(a)$$

así entonces $[\varphi_0(\sigma)] = [\varphi_1(\sigma)]$ y tenemos que

$$(\varphi_0)_*[\sigma] = [\varphi_0(\sigma)] = [\varphi_1(\sigma)] = (\varphi_1)_*[\sigma] \in \pi(Y, \varphi_0(a)).$$

■

Teorema 4.8. *Si A es un retracto de deformación de X, entonces la inclusión $i : A \to X$ induce un isomorfismo de $\pi(A,a)$ en $\pi(X,a)$ para cualquier $a \in A$.*

Demostración. Sólo hay que probar que el homomorfismo inducido por la inclusión es biyectiva. Por definición de retracción $r \circ i = Id_A$ entonces $r_* i_*$ es la identidad en $\pi(A,a)$ y por lo tanto i_* es inyectiva, veamos ahora que $i_* r_*$ es la identidad en $\pi(X,a)$. La definición de retracto de deformación de X implica que para cada $a \in A$, $r \approx Id\ rel_{\{a\}}$. Además $i \circ r = r : X \to A$ y entonces $i \circ r \approx Id\ rel_{\{a\}}$ entonces por la proposición 4.7 tenemos que $i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = (Id_A)_*$ entonces i_* es sobreyectiva y por lo tanto es un isomorfismo.
■

Calculemos ahora algunos grupos fundamentales usando el teorema 4.4, como el de la figura de ocho y más generalmente, la rosa de n pétalos.

Proposición 4.9. *Sea X un espacio topológico tal que $X = A \cup B$, $A \cap B = \{x_0\}$ y A y B son homeomorfos a S^1 entonces $\pi(X, x_0)$ es el grupo libre de dos generadores.*

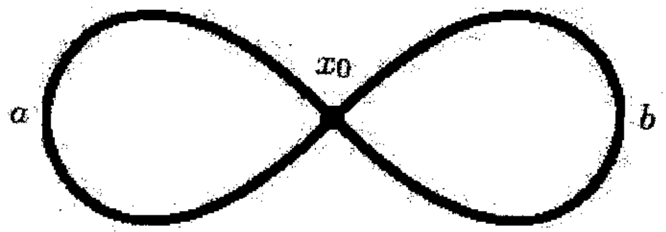

Figura 23:

Demostración. Si A y B fueran abiertos podríamos utilizar directamente el teorema 4.4, pero no lo son. Sin embargo haremos unas modificaciones ligeras para obtener conjuntos abiertos. Sea $a \in A - \{x_0\}$ y $b \in B - \{x_0\}$ entonces, definamos

$$U = X - \{a\}$$

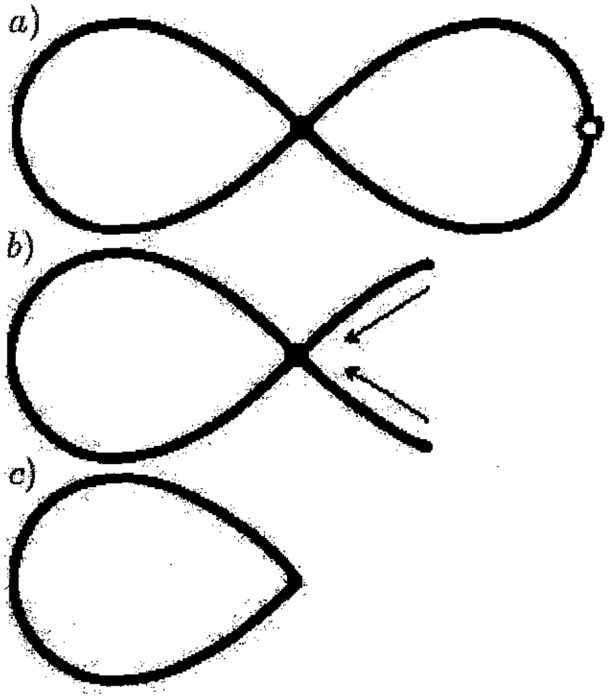

Figura 24: a) El espacio U . b) Espacio homeomorfo a U. c) La retracción de U al círculo.

$$V = X - \{b\}$$

Entonces ambos U, V son abiertos y son homeomorfos a una circunferencia con dos antenas y además

$$U \cap V = X - \{a, b\}$$

es contraíble. Por otra parte A, B son retractos de deformación de U y V respectivamente, y por el teorema 4.8

$$F(\alpha) = \pi(A, x_0) = \pi(U, x_0)$$
$$F(\beta) = \pi(B, x_0) = \pi(V, x_0)$$

donde α, β son clases de lazos que recorren A y B una sola vuelta. Ahora podemos utilizar el teorema 4.4 sobre los conjuntos abiertos U, V para obtener que $\pi(X, x_0)$ es el producto libre de $F(\alpha)$ y $F(\beta)$, así que

$$\pi(X, x_0) = F(\alpha, \beta) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$$

■

Sea E^2 el disco unitario cerrado en $\mathbb{R}^2$, sean a, b puntos distintos en el interior de E^2, sea $Y = E^2 - \{a, b\}$ entonces podemos encontrar $X \subset Y$ tal que X sea la unión de dos círculos y cada círculo rodea a cada punto a, b y X es un retracto de deformación de Y así que $\pi(X) = \pi(Y)$ es el grupo libre de dos generadores. Podemos aplicar el mismo razonamiendo si consideramos el disco abierto menos dos puntos, o todo el plano menos dos puntos, etc. o en lugar de quitar un punto, podemos quitar todo un disco pequeño y el resultado es el mismo.

Proposición 4.10. *Sea X la unión de n circunferencias con un sólo punto x_0 en común, es decir,*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

y cada A_i es homeomorfo a S^1 y $A_i \cap A_j = \{x_0\}$ si $i \neq j$. El espacio topológico X puede dibujarse como una rosa de n pétalos. Entonces $\pi(X, x_0)$ es el grupo libre de n generadores.

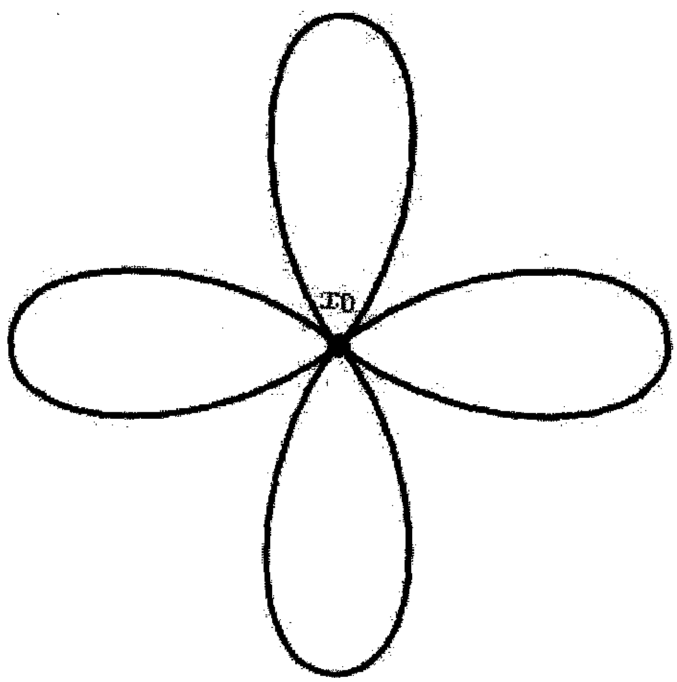

Figura 25:

Demostración. Procedamos por inducción respecto a n, en la proposición 4.9 se mostró que el teorema es válido para $n = 2$. Supongamos que

$$X_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

supongamos que

$$\pi(X_n, x_0) = F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

luego hagamos un razonamiento análogo al de la prueba en la proposición 4.9, Sea $a_k \in A_k - \{x_0\}$ para cada $k \leq n+1$ y entonces definamos

$$U = X_{n+1} - \{a_{n+1}\}$$

$$V = X_{n+1} - \{a_k\}_{k=1}^{n}$$

ambos son abiertos en el espacio topológico X_{n+1} y también $U \cap V = X_{n+1} - \{a_k\}_{k=1}^{n+1}$ es contraíble; Además $\pi(V, x_0) = \pi(S^1) = F(\alpha_{n+1})$, donde α_{n+1} es la clase de un lazo que dé una vuelta alrededor de A_{n+1}, pues V es un retracto de deformación de S^1. Ahora podemos usar el teorema 4.4 y obtenemos que $\pi(X_{n+1}, x_0)$ es el producto libre de $\pi(U, x_0)$ y $\pi(V, x_0)$

$$\begin{aligned} \pi(X_{n+1}, x_0) &= \pi(U, x_0) \star \pi(V, x_0) \\ &= F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \star F(\alpha_{n+1}) \\ &= F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}) \\ &= \underbrace{\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \cdots \star \mathbb{Z}}_{n+1 \text{ veces}} \end{aligned}$$

lo que prueba esta proposición. ■

Si consideramos el espacio topológico $Y = E^2 - \{a_i\}_{i=1}^{n}$ donde los a_i no son bordes de E^2 entonces podemos tomar un conjunto $X \subset Y$ tal que X es unión de n espacios homeomorfos a S^1 que intersecten en un sólo punto, y además X sea un retracto de deformación de Y, entonces $\pi(Y) = \pi(X) = F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ donde cada α_i es la clase de un lazo que da una vuelta al punto a_i.

Estos cálculos en las proposiciones anteriores nos revelan un punto importante sobre el uso del teorema 4.4, se necesita usar, en la mayoría de los casos, propiedades de los retractos de deformación, por lo que formalizaremos esta idea de la siguiente manera.

Lema 4.11. *Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ como en la hipótesis del teorema 4.3, y suponga que $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos de X que cumpla las siguientes condiciones:*

1. *$x_0 \in A_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.*
2. *$A_\lambda \subset U_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y además, la inclusión $i_\lambda : A_\lambda \to U_\lambda$ induce un isomorfismo $(i_\lambda)_* : \pi(A_\lambda) \to \pi(U_\lambda)$.*
3. *$U_\lambda \subset U_\mu \implies A_\lambda \subset A_\mu$ para cualquier $\lambda, \mu \in \Lambda$.*

denotemos por $\psi'_\lambda : \pi(A_\lambda) \to \pi(X)$ y $\varphi'_{\lambda\mu} : \pi(A_\lambda) \to \pi(A_\mu)$ los homomorfismos inducidos por las inclusiones, entonces para cualquier grupo H y para cualquier colección de homomorfismos tales que si $U_\lambda \subset U_\mu$ entonces el diagrama siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\pi(A_\lambda) \arrow[r, "\rho_\lambda"] \arrow[d, "\varphi'_{\lambda\mu}"'] & H \\
\pi(A_\mu) \arrow[ur, "\rho_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \to H$ tal que para cualquier $\lambda \in \Lambda$ hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
\pi(A_\lambda) \arrow[r, "\psi'_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\
H &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea H un grupo arbitrario y $\rho_\lambda : \pi(A_\lambda) \to H$ homomorfismos cualesquiera tal que si $A_\lambda \subset A_\mu$ entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\pi(A_\lambda) \arrow[r, "\rho_\lambda"] \arrow[d, "\varphi'_{\lambda\mu}"'] & H \\
\pi(A_\mu) \arrow[ur, "\rho_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces la colección de homomorfismos $\rho_\lambda \circ (i_\lambda)_*^{-1} : \pi(U_\lambda) \to H$ tiene la propiedad de que el diagrama siguiente conmuta si $U_\lambda \subset U_\mu$

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_\lambda) \arrow[d, "(i_{\lambda*})^{-1}"'] \arrow[dr, "\rho_\lambda(i_{\lambda*})^{-1}"] & \\
\pi(A_\lambda) \arrow[r, "\rho_\lambda"] \arrow[d, "\varphi'_{\lambda\mu}"'] & H \\
\pi(A_\mu) \arrow[ur, "\rho_\mu"] \arrow[d, "i_{\mu*}"'] & \\
\pi(U_\mu) \arrow[uur, "\rho_\mu(i_{\mu*})^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que

$$(i_\mu)_* \circ \varphi'_{\lambda\mu} \circ (i_\lambda)_*^{-1} = \varphi_{\lambda\mu}$$

para ello sea $[\sigma] \in \pi(U_\lambda)$ entonces, como $(i_\lambda)_*$ es sobreyecyiva, existe $[\sigma'] \in \pi(A_\lambda)$ tal que $(i_\lambda)_* [\sigma'] = [\sigma]$ y entonces

$$\varphi_{\lambda\mu}[\sigma] = \varphi_{\lambda\mu} \circ (i_\lambda)_* [\sigma'] = [i_{\lambda\mu} \circ i_\lambda \circ \sigma'] = [\sigma']$$

donde $i_{\lambda\mu} : \pi(U_\lambda) \to \pi(U_\mu)$ denota la inclusión.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(i_\mu)_* \circ \varphi'_{\lambda\mu} \circ (i_\lambda)_*^{-1} [\sigma] &= (i_\mu)_* \circ \varphi'_{\lambda\mu} \circ (i_\lambda)_*^{-1} \circ (i_\lambda)_* [\sigma'] \\
&= (i_\mu)_* \circ \varphi'_{\lambda\mu} [\sigma'] \\
&= \left[i_\mu \circ i'_{\lambda\mu} \circ \sigma' \right] \\
&= [\sigma']
\end{aligned}$$

donde $i'_{\lambda\mu} : \pi(A_\lambda) \to \pi(A_\mu)$ denota la inclusión, así que se cumple la afirmación.

Entonces la colección de homomorfismos $\rho_\lambda \circ (i_\lambda)_*^{-1} : \pi(U_\lambda) \to H$ hace conmutar el diagrama siguiente si $U_\lambda \subset U_\mu$

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_\lambda) \arrow[r, "\rho_\lambda(i_{\lambda*})^{-1}"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda\mu}"'] & H \\
\pi(U_\mu) \arrow[ur, "\rho_\mu(i_{\mu*})^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

y por el teorema 4.3 existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \to H$ tal que para toda $\lambda \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda (i_{\lambda_*})^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd}$$

luego es claro que

$$\begin{tikzcd} \pi(A_\lambda) \arrow[r, "i_{\lambda_*}"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & \pi(U_\lambda) \arrow[dl, "\rho_\lambda (i_{\lambda_*})^{-1}"] \\ H & \end{tikzcd}$$

conmuta, y uniendo los diagramas anteriores (I) y (II) y por funtorialidad tenemos que

$$\begin{tikzcd} \pi(A_\lambda) \arrow[r, "\psi'_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora veamos que σ es el único homomorfismo que hace conmutar el diagrama (III) para cada $\lambda \in \Lambda$, supongamos que σ' que hace conmutar

$$\begin{tikzcd} \pi(A_\lambda) \arrow[r, "\psi'_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma'"] \\ H & \end{tikzcd}$$

entonces

$$\begin{aligned} \sigma' \circ \psi_\lambda &= \sigma' \circ \psi_\lambda \circ (i_\lambda)_* \circ (i_\lambda)_*^{-1} \\ &= \sigma' \circ \psi'_\lambda \circ (i_\lambda)_*^{-1} \\ &= \rho_\lambda \circ (i_\lambda)_*^{-1} \end{aligned}$$

entonces para cualquier $\lambda \in \Lambda$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda (i_{\lambda_*})^{-1}"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma'"] \\ H & \end{tikzcd}$$

pero σ es la única que hace conmutar el diagrama anterior, así que $\sigma = \sigma'$.
■

4.3 Segunda Aplicación del Teorema de Seifert y Van Kampen

Asumamos nuevamente las hipótesis del teorema 4.1: $U, V, U \cap V$ subconjuntos abiertos y conexos por trayectorias de un espacio topológico X tales que $X = U \cup V$ y $x_0 \in U \cap V$.

Teorema 4.12. *Supongamos que V es simplemente conexo. Entonces $\psi_1 : \pi(U) \to \pi(X)$ es un epimorfismo, y aún más, su núcleo es el menor subgrupo normal de $\pi(U)$ que contiene a la imagen $\varphi_1(\pi(U \cap V))$, en otras palabras*

$$\ker \psi_1 = \overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V)) \rangle}$$

Note que este teorema determina por completo la estructura de $\pi(X)$ pues éste es isomorfo al cociente $\pi(U) \big/ \overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V)) \rangle}$.

Demostración. Veamos primero que ψ_1 es un epimorfismo. Tenemos que el siguiente diagrama que es conmutativo por functorialidad

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(U) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi(X) \\
 & \pi(V) \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

y dado que $\pi(V)$ es trivial tenemos que

$$\psi_2 \circ \varphi_2 = \psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_3 = 1$$

notemos que $Im\varphi_1 \subset \ker \psi_1$, lo usaremos más adelante en esta prueba. Ahora, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(U) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3 \equiv 1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \psi_1(\pi(U)) \\
 & \pi(V) \arrow[ur, "\psi_2 \equiv 1"'] &
\end{tikzcd}$$

así, se cumplen las hipótesis del teorema 4.1 entonces existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \longrightarrow \psi_1(\pi(U))$ tal que los tres siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\
\psi(\pi(U)) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\
\psi(\pi(U)) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3 \equiv 1"] \arrow[d, "\psi_3 \equiv 1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\
\psi(\pi(U)) &
\end{tikzcd}
$$

y por otra parte, los tres siguientes diagramas tambien conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \psi(\pi(U)) \arrow[dl, "i"] \\
\pi(X) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(V) \arrow[r, "\psi_2 \equiv 1"] \arrow[d, "\psi_2 \equiv 1"'] & \psi(\pi(U)) \arrow[dl, "i"] \\
\pi(X) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3 \equiv 1"] \arrow[d, "\psi_3 \equiv 1"'] & \psi(\pi(U)) \arrow[dl, "i"] \\
\pi(X) &
\end{tikzcd}
$$

entonces los diagramas siguientes conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "i \circ \sigma"] \\
\pi(X) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \pi(X) \arrow[dl, "i \circ \sigma"] \\
\pi(X) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\psi_3"'] & \pi(X) \arrow[dl, "i \circ \sigma"] \\
\pi(X) &
\end{tikzcd}
$$

pero el homomorfismo identidad también hace conmutar estos diagramas así que $i \circ \sigma = Id$ y entonces $i : \psi_1(\pi(U)) \longrightarrow \pi(X)$ es sobreyectiva, lo que implica que $\psi_1(\pi(U)) = \pi(X)$ y entonces ψ_1 es un epimorfismo.

Ahora probemos la segunda parte del teorema, que $\ker \psi_1 = \overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V)) \rangle}$. Ya hemos visto que $Im\varphi_1 \subset \ker \psi_1$ denotemos $N = \overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V)) \rangle}$ entonces como $\ker \psi_1$ es un subgrupo normal de $\pi(U)$ se tiene que

$$N \subset \ker \psi_1$$

veamos la otra contención. Sea $\rho_1 : \pi(U) \longrightarrow \pi(U) \diagup N$ la proyección natural, $\rho_2 : \pi(V) \equiv 1 \longrightarrow \pi(U) \diagup N$, $\rho_3 : \pi(U \cap V) \longrightarrow \pi(U) \diagup N$ los únicos homomorfismos, pues $\pi(V) = \pi(U \cap V) = 1$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(U) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi(U\cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3\equiv 1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi(U)/N \\
 & \pi(V)\equiv 1 \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema 4.1 que nos asegura la existencia de un homomorfismo $\sigma : \pi(X) \rightarrow \pi(U)/N$ que hace conmutar este diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\
\pi(U)/N &
\end{tikzcd}$$

entonces

$$\ker\psi_1 \subset \ker\rho_1$$

pues si $a \in \ker\psi_1$ entonces $\rho_1(a) = \sigma \circ \psi_1(a) = \sigma(1) = 1$ así tenemos que $a \in \ker\rho_1$ y además es claro que $\ker\rho_1 = N$ entonces

$$\ker\psi_1 \subset N$$

y probamos el teorema. ■

4.4. Estructura del Grupo Fundamental de una Superficie Compacta

En esta sección usaremos el teorema 4.12 para determinar la estructura del grupo fundamental de una superficie compacta. Por ejemplo el toro, que es el producto $S^1 \times S^1$. La proposición 2.36 nos garantiza que su grupo fundamental es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pero obtendremos el mismo resultado usando el teorema 4.12 con la ventaja de que este método podrá ser generalizado a cualquier superficie compacta y conexa en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 4.13. *El grupo fundamental del toro es* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demostración. Representemos al toro T como el espacio obtenido al identificar los lados opuestos de un cuadrado. Los lados a y b se convierten bajo la identificación en circunferencias que se intersectan en el punto x_0.

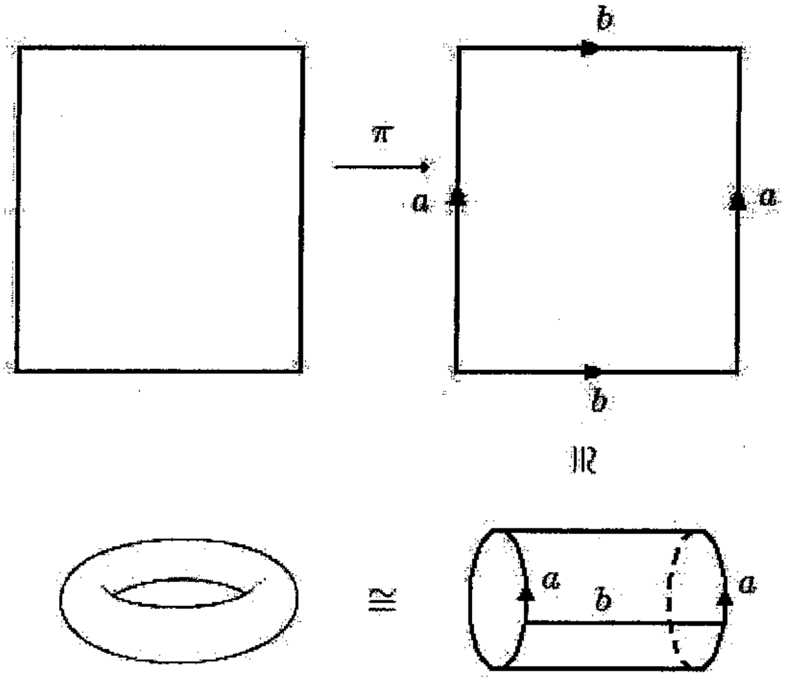

Figura 26:

Sea y el centro del cuadrado, $U = T - \{y\}$ y V la imagen del interior del cuadrado bajo la identificación, dado que T es Hausdorff, U es abierto, V también es abierto, pues V es el complemento de la unión de las circunferencias

a y b bajo la identificación que es compacta y por lo tanto cerrada. además $U, V, U \cap V$ son conexos por trayectorias, pues son imágenes de aplicaciones sobreyectivas de un espacio topológico conexo por trayectorias; también V es simplemente conexo, pues es homeomorfo a un disco abierto.

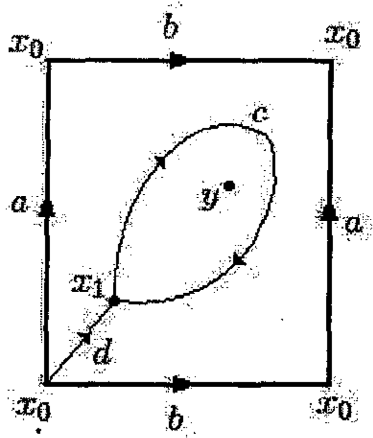

Figura 27:

Sea $x_1 \in U \cap V$ apliquemos el teorema 4.12: $\psi_1 : \pi(U, x_1) \to \pi(T, x_1)$ es un epimorfismo y $\ker \psi_1 = \langle \varphi_1(\pi(U \cap V)) \rangle$, donde $\varphi_1 : \pi(U \cap V, x_1) \to \pi(U, x_1)$. La unión de los círculos a y b es un retracto de deformación de U entonces

$$\pi(U, x_o) = F(\alpha, \beta)$$

donde α, β son clases de lazos determinados por a y b.

si $d : I \to U$ es una trayectoria de x_0 a x_1 en U y $\delta = [d]$ entonces

$$\pi(U, x_1) = F(\alpha', \beta')$$

donde $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$ y $\beta' = \delta^{-1}\beta\delta$, pues por el teorema 2.8 $d_* : \pi(U, x_o) \to \pi(U, x_1)$ tal que $d_*[\sigma] = [d^{-1}\sigma d]$ es un isomorfismo.

Por otro lado, una circunferencia es un retracto de deformación de $U \cap V$ así que $\pi(U \cap V) = \mathbb{Z}$ está generado por $\gamma = [c]$ donde c es un lazo que da exactamente una vuelta alrededor del punto y (ver figura 27). Afirmamos ahora que

$$\varphi_1(\gamma) = \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}$$

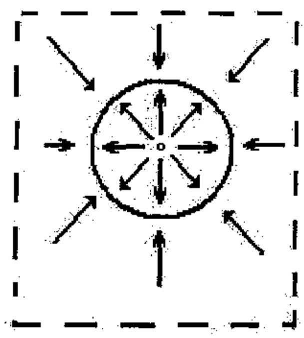

Figura 28:

pues por asociatividad tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\gamma) &= \varphi_1([c]),\ [c] \in \pi(U \cap V, x_1) \\
&= [c] \in \pi(U, x_1) \\
&= \left[d^{-1}aba^{-1}b^{-1}d\right] \\
&= \left[d^{-1}add^{-1}bdd^{-1}a^{-1}dd^{-1}b^{-1}d\right] \\
&= \left[d^{-1}ad\right]\left[d^{-1}bd\right]\left[d^{-1}a^{-1}d\right]\left[d^{-1}b^{-1}d\right] \\
&= \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}
\end{aligned}$$

y dado que γ genera a $\pi(U \cap V, x_1)$ entonces $[\sigma] \in \pi(U \cap V, x_1) \implies [\sigma] = \gamma^m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\varphi_1([\sigma]) = \varphi_1(\gamma^m) = \varphi_1(\gamma)^m = \left(\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}\right)^m$$

en otras palabras

$$\varphi_1(\pi(U \cap V, x_0)) = \left\langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} \right\rangle$$

y entonces

$$\overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V, x_0)) \rangle} = \overline{\langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} \rangle}$$

y entonces por el teorema 4.12 $\pi(T, x_1) = F(\alpha', \beta') \big/ \overline{\langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} \rangle}$.

Cambiando al punto base x_0 vamos a probar que

$$\pi(T, x_0) = F(\alpha, \beta) \big/ \overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \rangle}$$

en efecto, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi(U, x_1) & \xrightarrow{\psi_1} & \pi(T, x_1) \\ {\scriptstyle d_*^{-1}}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle d_*^{-1}} \\ \pi(U, x_0) & \xrightarrow{\psi_1'} & \pi(T, x_0) \end{array}$$

pues si $[\sigma] \in \pi(U \cap V, x_1)$ entonces

$$\psi_1' \circ d_*^{-1}([\sigma]) = \psi_1'\left(\left[d\sigma d^{-1}\right]\right) = \left[d\sigma d^{-1}\right]$$

y

$$d_*\psi_1([\sigma]) = d_*([\sigma]) = \left[d\sigma d^{-1}\right]$$

pues ψ_1 y ψ_i' son inducidas por las inclusiones. Esto induce el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} \pi(U, x_1) \diagup \ker\psi_1 & \xrightarrow{\overline{\psi_1}} & \pi(T, x_1) \\ {\scriptstyle \overline{d_*^{-1}}}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle \overline{d_*^{-1}}} \\ \pi(U, x_0) \diagup \ker\psi_1' & \xrightarrow{\overline{\psi_1'}} & \pi(T, x_0) \end{array}$$

entonces

$$\ker\psi_1' = d_*^{-1}(\ker\psi_1)$$

pues si $[\sigma] \in \ker\psi_1'$ entonces $\psi_1'[\sigma] = 1$ y por la conmutatividad del diagrama, $d_*^{-1} \circ \psi_1 \circ d_*[\sigma] = 1$ entonces $\psi_1(d_*[\sigma]) = 1$ así $d_*[\sigma] \in \ker\psi_1$ y $[\sigma] \in d_*^{-1}(\ker\psi_1)$. Recíprocamente, si $[\sigma] \in d_*^{-1}(\ker\psi_1)$ entonces $\psi_1(d_*[\sigma]) = 1$ y luego $\psi_1'[\sigma] = d_*^{-1} \circ \psi_1 \circ d_*[\sigma] = d_*^{-1}(1) = 1$ entonces $[\sigma] \in \ker\psi_1'$.

Dado que $\ker\psi_1 = \overline{\langle\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}\rangle}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \ker\psi_1' &= d_*^{-1}\left(\overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}\right) \\ &= \overline{\langle d_*^{-1}(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})\rangle} \\ &= \overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\pi(T, x_0) = F(\alpha, \beta) \diagup \ker\psi_1' = F(\alpha, \beta) \diagup \overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$$

Ahora probaremos que $F(\alpha,\beta) \diagup \overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ es abeliano. Es suficiente probarlo para los generadores $\overline{\alpha} = \alpha\overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ y $\overline{\beta} = \beta\overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$. Notemos que

$$\alpha\beta\left(\beta\alpha\right)^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$$

lo que implica que

$$\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\alpha} = \overline{\beta}\overline{\alpha}$$

por lo tanto $F(\alpha,\beta) \diagup \overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ es abeliano, y ya que $[F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$ es el menor sugbrupo normal de $F(\alpha,\beta)$ que hace abeliano al cociente tenemos que

$$[F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)] \subset \overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$$

y por otra parte, $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$ y como $\overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ es el menor subgrupo normal que contiene a $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ tenemos que

$$\overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} \subset [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$$

y por lo tanto

$$\overline{\langle\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} = [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$$

y entonces

$$\pi(T, x_0) = F(\alpha,\beta) \diagup [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$$

y por la proposición 3.51 $F(\alpha,\beta) \diagup [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$ es un grupo abeliano libre de dos generadores y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y entonces

$$\pi(T, x_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

■

Proposición 4.14. *El grupo fundamental del plano proyectivo real es el grupo cíclico de orden 2.*

Demostración. Consideremos el plano proyectivo real P_2 como la identificación de las antípodas de un polígono de 2 lados. La arista a se convierte bajo la identificación en una circunferencia y x_0 es un punto sobre ella. Sea y el centro del polígono y sean $U = P_2 - \{y\}$ y V la imagen del interior del polígono bajo la identificación.

Dado que P_2 es Hausdorff entonces $\{y\}$ es cerrado en P_2 y por lo tanto U es abierto. Por otra parte, como la circunferencia a es un compacto en P_2 entonces a es cerrado en P_2, así que V es abierto en P_2, y no sólo eso, V

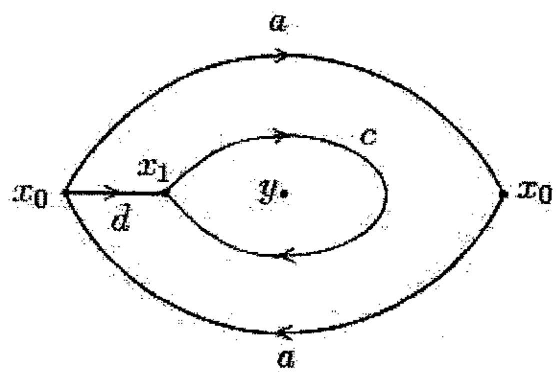

Figura 29:

es simplemente conexo pues es homeomorfo a un disco abierto y sea $x_1 \in U \cap V$. Entonces se cumplen las hipótesis del teorema 4.12, U, V son abiertos y conexos por trayectorias en P_2, $P_2 = U \cup V$ $x_1 \in U \cap V$ con V simplemente conexo.

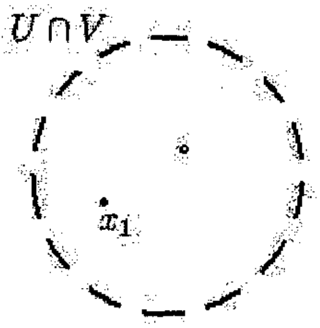

Figura 30:

La circunferencia a es un retracto de deformación de U, así que $\pi(U, x_0)$ es un grupo cíclico infinito generado por $\alpha = [a]$. Sea $d : I \to U$ una trayectoria de x_0 a x_1 y sea $\delta = [d]$ entonces por la proposición 2.8 $d_* : \pi(U, x_0) \cong \pi(U, x_1) = F(\alpha')$ con $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$.

Finalmente, $\pi(U \cap V, x_1)$ es un grupo cíclico infinito generado por la clase $\gamma = [c]$ de un lazo c que rodea al punto y exactamente una vez, pues la imagen de c es un retracto de deformación de $U \cap V$. además por la figura 29 tenemos que

$$\varphi_1(\gamma), \gamma = [c] \in \pi(U \cap V, x_1)$$

$$\begin{aligned}
&= [c] \in \pi(U, x_1) \\
&= \left[d^{-1}aad\right] \\
&= \left[d^{-1}add^{-1}ad\right] \\
&= \left[d^{-1}ad\right]\left[d^{-1}ad\right] \\
&= \left(\delta^{-1}\alpha\delta\right)\left(\delta^{-1}\alpha\delta\right) \\
&= \alpha'^2
\end{aligned}$$

y dado que γ genera a $\pi(U \cap V, x_1)$ significa que si $[\sigma] \in \pi(U \cap V, x_1)$ es cualquier elemento arbitrario entonces $[\sigma] = \gamma^m$ para algun $m \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\varphi_1[\sigma] = \varphi_1(\gamma^m) = \varphi_1(\gamma)^m = \left(\alpha'^2\right)^m$$

y entonces

$$\varphi_1(\pi(U \cap V, x_1)) = \left\langle \alpha'^2 \right\rangle$$

además como $\langle \alpha' \rangle$ es abeliano y $\langle \alpha'^2 \rangle$ es un subgrupo de $\langle \alpha' \rangle = \pi(U, x_1)$. Entonces tenemos que el menor subgrupo normal de $\pi(U, x_1)$ que contiene a $Im\varphi_1$ es el subgrupo generado por (α'^2), es decir,

$$\overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V, x_1)) \rangle} = \overline{\langle \alpha'^2 \rangle}$$

y ahora, por el teorema 4.12,

$$\pi(P_2, x_1) = \langle \alpha' \rangle \diagup \left\langle \alpha'^2 \right\rangle$$

Haciendo un cambio de punto base como en el caso del toro tenemos que

$$\pi(P_2, x_0) \cong \langle \alpha \rangle \diagup \left\langle \alpha^2 \right\rangle \cong \mathbb{Z}\diagup 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

■

Teorema 4.15. *El grupo fundamental abelianizado de la suma de n toros es isomorfo a* $\prod_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}$.

Demostración. Calculemos la suma conexa de n toros de la misma forma que a los casos anteriores. Consideremos la suma M de n toros como un polígono de $4n$ lados con las aristas identificandas por pares. Las aristas $a_1, b_1, ..., a_n, b_n$ se convierten, al hacer las identificaciones correspondientes, en circunferencias que se intersectan dos a dos en el punto x_0.

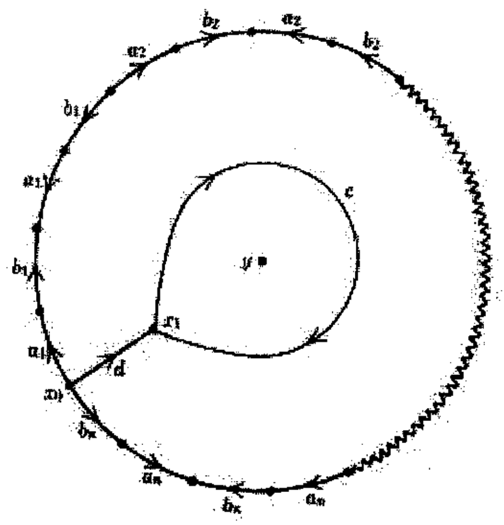

Figura 31:

Sean y el centro del polígono, $U = M - \{y\}$ y V la imagen del interior del polígono bajo la identificación, que es homeomorfo a un disco abierto, sea $x_1 \in U \cap V$. Note que $U \cap V$ es homeomorfo a un disco abierto menos es centro del disco. La unión de los $2n$ círculos a_i, b_i es un retracto de deformación de U y podemos llegar de manera análoga al caso de toro (proposición 4.13) a que

$$\pi(U, x_0) = F(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_n, \beta_n)$$

con $\alpha_i = [a_i], \beta_i = [b_i]$. Si $d : I \to U$ es la trayectoria de x_0 a x_1 de la figura 31 y $\delta = [d]$ entonces $\pi(U, x_0)$ es isomorfo bajo d_* a $\pi(U, x_1)$ entonces $\pi(U, x_1)$ es un grupo libre de generadores $\alpha_i' = \delta^{-1}\alpha_i\delta, \beta_i' = \delta^{-1}\beta_i\delta$.

Ahora $U \cap V$ es del mismo tipo de homotopía que una circunferecia y como antes, $\pi(U \cap V, x_1)$ es el grupo cíclico infinito generado por $\gamma = [c]$, la

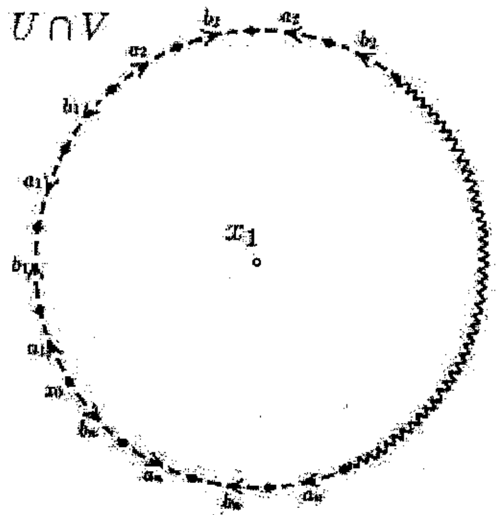

Figura 32:

clase del lazo c que da exactamente una vuelta a y, por la figura 31 obtenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\gamma) &= \varphi_1[c]\,;\ \ [c] \in \pi(U \cap V, x_1) \\
&= [c] \in \pi(U, x_1) \\
&= \left[d^{-1}\left(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}\right) d\right] \\
&= \left[d^{-1} a_1 d d^{-1} b_1 d d^{-1} a_1^{-1} d d^{-1} b_1^{-1} d \cdots d^{-1} a_n d d^{-1} b_n d d^{-1} a_n^{-1} d d^{-1} b_n^{-1} d\right] \\
&= \left[d^{-1} a_1 d\right]\left[d^{-1} b_1 d\right]\left[d^{-1} a_1^{-1} d\right]\left[d^{-1} b_1^{-1} d\right] \cdots \left[d^{-1} a_n d\right]\left[d^{-1} b_n d\right]\left[d^{-1} a_n^{-1} d\right]\left[d^{-1} b_n^{-1} d\right] \\
&= \left(\delta^{-1}\alpha_1\delta\right)\left(\delta^{-1}\beta_1\delta\right)\left(\delta^{-1}\alpha_1^{-1}\delta\right)\left(\delta^{-1}\beta_1^{-1}\delta\right) \cdots \left(\delta^{-1}\alpha_n\delta\right)\left(\delta^{-1}\beta_n\delta\right)\left(\delta^{-1}\alpha_n^{-1}\delta\right)\left(\delta^{-1}\beta_n^{-1}\delta\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i', \beta_i']
\end{aligned}$$

y dado que γ genera a $\pi(U \cap V, x_1)$ entonces para cualquier $[\sigma] \in \pi(U \cap V, x_1)$ arbitrario tenemos que $[\sigma] = \gamma^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ y entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_1([\sigma]) &= \varphi_1(\gamma^m) \\
&= \varphi_1(\gamma)^m \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i', \beta_i']\right)^m
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\varphi_1(\pi(U \cap V, x_1)) = \left\langle \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i', \beta_i'] \right\rangle$$

y entonces tendríamos que

$$\overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V, x_1)) \rangle} = \overline{\left\langle \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i', \beta_i'] \right\rangle}$$

y por el teorema 4.12,

$$\pi(M, x_1) \cong \frac{F(\alpha_1', \beta_1', ..., \alpha_n', \beta_n')}{\overline{\left\langle \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i', \beta_i'] \right\rangle}}$$

y haciendo un cambio de punto base como en los casos anteriores obtenemos

$$\pi(M, x_0) \cong \frac{F(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_n, \beta_n)}{\overline{\left\langle \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \right\rangle}}$$

es decir, $\pi(M, x_0)$ tiene una presentación formada por los generadores $\{\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_n, \beta_n\}$ y la única relación $\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]$ que para el caso $n > 1$, no existe alguna descripción intrínseca sencilla de este grupo, más sin embargo

$$\frac{\pi(M, x_0)}{[\pi(M, x_0), \pi(M, x_0)]} \cong \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}$$

para demostrar esta última afirmación necesitamos los lemas 4.16 y 4.17

Lema 4.16. *Si G es un grupo y N, H son subgrupos normales de G entonces HN es un subgrupo normal de G. Además $N \lhd HN$ y $H \lhd HN$.*

La prueba de este lema se encuentra en [2] p.144.■

Ahora usaremos el lema 4.16 para probar el siguiente

Lema 4.17. *Si G es un grupo y $K \lhd G$ entonces*

$$[G/K, G/K] = \frac{[G, G]\, K}{K}$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
[G/K, G/K] &= \left\langle \left\{ [x][y][x]^{-1}[y]^{-1} : [x],[y] \in G/K \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \left\{ xyx^{-1}y^{-1}K : x, y \in G \right\} \right\rangle \\
&= \{cK \in G/K : c \in [G,G]\} \\
&= \bigcup_{c\in[G,G]} \{ck : k \in K\} \\
&= \{ck : c \in [G,G], k \in K\} / \sim
\end{aligned}$$

donde $ck \sim c'k'$ si $ck\,(c'k')^{-1} \in K$ pero $\sim$ es la misma relación que la que induce K en el sentido de que $g \sim g'$ si y sólo si $gK = g'K$; Entonces

$$\begin{aligned}
[G/K, G/K] &= \{ck : c \in [G,G], k \in K\} / K \\
&= \frac{[G,G]\,K}{K}
\end{aligned}$$

Otra forma de demostrar el lema 4.17 es el siguiente:

Notemos que por el lema 4.16 que $K \lhd [G,G]\,K$ ya que K y $[G,G]$ son ambos subgrupos normales de G. Entonces $\frac{[G,G]\,K}{K}$ es un grupo.

Consideremos $\phi : [G/K, G/K] \to \frac{[G,G]\,K}{K}$ dada por

$$\phi(\bar{a}) = [a]$$

primero veamos que está bien definida, sea $\bar{a} \in [G/K, G/K]$ entonces

$$\begin{aligned}
aK &= \bar{a} \\
&= \prod_{i\in F} \bar{x}_i \bar{y}_i \bar{x}_i^{-1} \bar{y}_i^{-1} \text{ para algunos } \bar{x}_i, \bar{y}_i \in G/K \\
&= \prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} K
\end{aligned}$$

además los productos son finitos; entonces $\left(\prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \right)^{-1} a \in K$ luego

$$\begin{aligned}
a &= \left(\prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \right) \left(\prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \right)^{-1} a \\
&= \prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \left(\left(\prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \right)^{-1} a \right) \in [G,G]\,K
\end{aligned}$$

entonces $[a] \in \frac{[G,G]\,K}{K}$. Ahora supongamos que $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ entonces $a_1 a_2^{-1} \in K$ y entonces $[a_1] = [a_2]$.

Ahora probemos que ϕ es un homomorfismo

$$\begin{aligned}
\phi\left(\overline{a_1}\overline{a_2}\right) &= \phi\left(\overline{a_1 a_2}\right)\\
&= [a_1 a_2]\\
&= [a_1]\,[a_2]\\
&= \phi\left(\overline{a_1}\right)\phi\left(\overline{a_2}\right)
\end{aligned}$$

veamos que ϕ es inyectiva. Sea $\overline{a} \in \ker\phi$ entonces $\phi\left(\overline{a}\right) = 1$ así $[a] = 1$ y llegamos a que $a \in K$ y luego $\overline{a} = 1$. Ahora ϕ es sobre pues si $[ck] \in \frac{[G,G]\,K}{K}$ donde $c \in [G,G]$ y $k \in K$, probemos que $\overline{ck} \in [G/K, G/K]$; es claro que $\overline{ck} \in G/K$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{ck} &= ckK\\
&= cK\\
&= \prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} K \text{ donde } c = \prod_{i\in F} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \text{ para algunos } x_i, y_i \in G\\
&= \prod_{i\in F} \bar{x}_i \bar{y}_i \bar{x}_i^{-1} \bar{y}_i^{-1} \in [G/K, G/K]
\end{aligned}$$

y luego $\phi\left(\overline{ck}\right) = [ck]$ y por lo tanto ϕ es un isomorfismo. ■

Continuemos con nuestro análisis de la suma conexa de toros, denotemos

$$\begin{aligned}
G &= F\left(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_n, \beta_n\right)\\
K &= \overline{\left\langle \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \right\rangle}
\end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{G/K}{[G/K, G/K]} &= \frac{G/K}{([G,G]\,K)/K} \text{ por el lema 4.17.}\\
&= \frac{G/K}{[G,G]/K} \text{ por que } K \subset [G,G] \text{ en este caso.}\\
&\cong \frac{G}{[G,G]} \text{ por el primer teorema del isomorfismo.}
\end{aligned}$$

y regresando a la otra notación concluimos que

$$\frac{\pi\left(M, x_0\right)}{\left[\pi\left(M, x_0\right), \pi\left(M, x_0\right)\right]} = \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}.$$

■

Hemos obtenido el grupo fundamental abelianizado de la suma conexa de n toros y esto es suficiente para establecer el siguiente resultado.

Corolario 4.18. *Si $m \neq n$ entonces la suma conexa de m toros y la suma conexa de n toros no son del mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Por el corolario 3.33 el grupo fundamental abelianizado de la suma conexa de m toros y el grupo fundamental abelianizado de la suma conexa de n toros no pueden ser isomorfos y entonces los grupos fundamentales no son isomorfos. ■

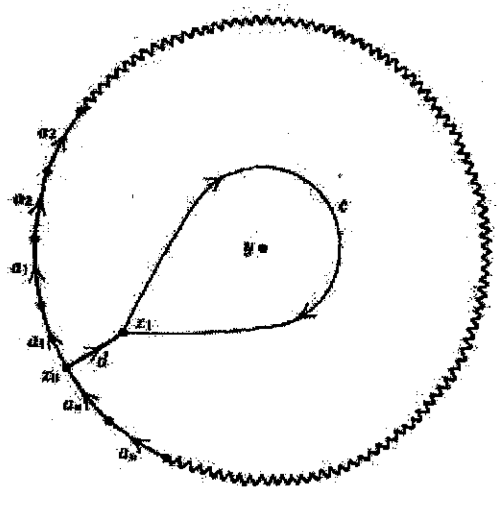

Figura 33:

Ahora calculemos el grupo fundamental de M, donde M es la suma conexa de n planos proyectivos. M puede obtenerse como la identificación de un polígono de $2n$ lados, tal como lo muestra la figura 33. Siguiendo el mismo proceso de la suma conexa de toros llegamos a que su grupo fundamental $\pi\left(M, x_0\right)$ admite una presentación formada por el conjunto de generadores $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ donde α_i está representado por el círculo a_i, $\alpha_i = [a_i]$

y una relación $\alpha_1^2\alpha_2^2...\alpha_n^2$. De nuevo para $n > 1$ $\pi(M, x_0)$ no admite una descripción intrínseca sencilla, pero abelianizándolo, tenemos por la proposición 3.60 que $\pi(M, x_0) \diagup [\pi(M, x_0), \pi(M, x_0)]$ tiene una presentación de generadores $\{\alpha_i [\pi(M, x_0), \pi(M, x_0)]\}_{i=1}^n$ y la relación $\alpha_1^2\alpha_2^2...\alpha_n^2 [F, F]$ donde F es el grupo abeliano libre sobre el conjunto generador que no nos dice mucho.

Busquemos otro camino: Por el teorema I.7.2 en [4], una superficie no orientable M de género n admite una de las dos presentaciones siguientes

1. Si n es impar, M es homeomorfa a la suma conexa de una superficie orientable de género $k = \frac{1}{2}(n-1)$ y un plano proyectivo; véase figura 34.

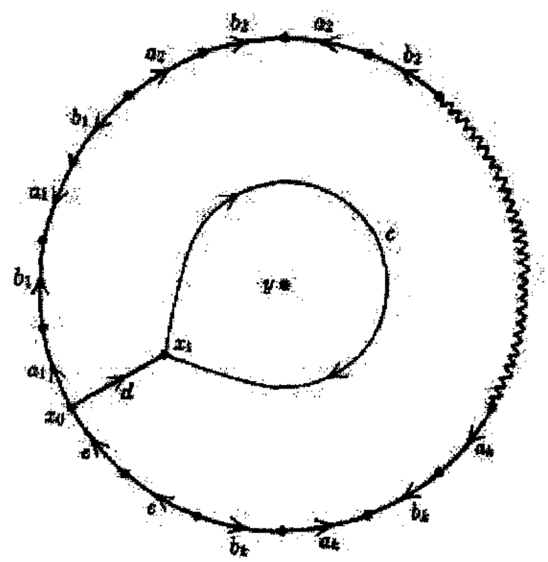

Figura 34:

2. Si n es par, M es homeomorfa a la suma conexa de una superficie orientable de género $k = \frac{1}{2}(n-2)$ y una botella de Klein; véase figura 35.

En el primer caso, usando el mismo esquema que hemos usado para calcular los grupos fundamentales para la suma conexa de espacios topológicos, una presentación para el grupo fundamental de M es

$$\left(\{\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_k, \beta_k, \varepsilon\} \mid [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] ... [\alpha_k, \beta_k]\varepsilon^2\right)$$

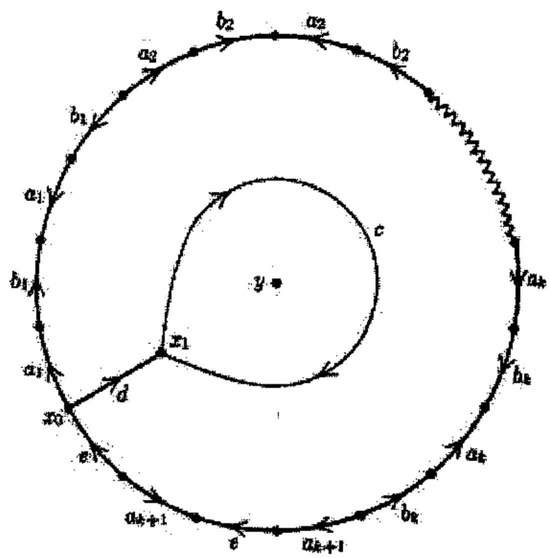

Figura 35:

y por la proposición 3.60 podemos encontrar una presentación para el grupo abelianizado de $\pi(M)$, $\pi(M)\diagup[\pi(M),\pi(M)]$ que está dada por

$$\left(\{[\alpha_1],[\beta_1],...,[\alpha_k],[\beta_k],[\varepsilon]\}\mid[\alpha_1,\beta_1][\alpha_2,\beta_2]...[\alpha_k,\beta_k]\varepsilon^2[F,F]\right)$$

En el caso dos, existe una presentación de $\pi(M)$ dada por

$$\left(\{\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_k,\beta_k,\varepsilon\}\mid[\alpha_1,\beta_1][\alpha_2,\beta_2]...[\alpha_k,\beta_k]a_{k+1}\varepsilon a_{k+1}^{-1}\varepsilon\right)$$

y nuevamente por la proposición 3.60 encontramos una presentación para el grupo abelianizado $\pi(M)\diagup[\pi(M),\pi(M)]$ que resulta ser

$$\left(\{[\alpha_1],[\beta_1],...,[\alpha_k],[\beta_k],[\varepsilon]\}\mid[\alpha_1,\beta_1][\alpha_2,\beta_2]...[\alpha_k,\beta_k]\varepsilon^2[F,F]\right)$$

la misma que en el caso anterior por lo que basta concentrarnos en el primer caso.

Sea F el grupo libre sobre el conjunto generador, es decir,

$$F=F([\alpha_1],[\beta_1],...,[\alpha_k],[\beta_k],[\varepsilon])$$

entonces

$$\frac{\pi(M)}{[\pi(M),\pi(M)]}\cong\frac{\langle[\alpha_1]\rangle\times\langle[\beta_1]\rangle\times\cdots\times\langle[\alpha_k]\rangle\times\langle[\beta_k]\rangle\times\langle[\varepsilon]\rangle}{\langle[\alpha_1,\beta_1][\alpha_2,\beta_2]...[\alpha_k,\beta_k]\varepsilon^2\rangle}$$

veamos que el lado derecho de la expresión es isomorfa a

$$\frac{\langle[\alpha_1]\rangle \times \langle[\beta_1]\rangle \times \cdots \times \langle[\alpha_k]\rangle \times \langle[\beta_k]\rangle \times \langle[\varepsilon]\rangle}{\langle\varepsilon^2\rangle}$$

Sea $G = F(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_k, \beta_k, \varepsilon)$ y $K = \overline{\langle[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] ... [\alpha_k, \beta_k]\,\varepsilon^2\rangle}$. Observemos que

$$K = \overline{\langle[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] ... [\alpha_k, \beta_k]\rangle}\ \overline{\langle\varepsilon^2\rangle}$$

la contención $\subset$ es clara pues $\overline{\langle[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] ... [\alpha_k, \beta_k]\rangle}\ \overline{\langle\varepsilon^2\rangle}$ es subgrupo normal de F y contiene a $[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] ... [\alpha_k, \beta_k]\,\varepsilon^2$. Para la otra contención notemos que si tenemos un elemento arbitrario en $\overline{\langle[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] ... [\alpha_k, \beta_k]\rangle}\ \overline{\langle\varepsilon^2\rangle}$ entonces es de la forma

$$\left(g_1[\alpha_1, \beta_1]^{r_1} g_1^{-1} \cdots g_k[\alpha_k, \beta_k]^{r_k} g_k^{-1}\right)\left(g_{k+1}\varepsilon^{2r_{k+1}} g_{k+1}^{-1}\right) \qquad \text{para algunos } r_i$$

y entonces este producto es un elemento de K; entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{G/K}{[G/K, G/K]} &\cong \frac{G/K}{\frac{[G,G]K}{K}} && \text{por el lema 4.17.}\\
&\cong \frac{G}{[G,G]\,K} && \text{por el primer teorema del isomorfismo.}\\
&\cong \frac{G/[G,G]}{\frac{[G,G]K}{[G,G]}} && \text{por el primer teorema del isomorfismo.}\\
&\cong \frac{F/[F,F]}{\frac{[F,F]\overline{\langle\varepsilon^2\rangle}}{[F,F]}} && \text{por definición de } G \text{ y } K. \qquad (10)
\end{aligned}$$

y por otro lado, tenemos el epimorfismo canónico $\varphi : F(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_k, \beta_k, \varepsilon) \to \langle\alpha_1\rangle \times \langle\beta_1\rangle \times \cdots \times \langle\alpha_k\rangle \times \langle\beta_k\rangle \times \langle\varepsilon\rangle$ tal que $\ker\varphi = [F, F]$ o sea, φ induce un isomorfismo

$$\overline{\varphi} : \frac{F(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_k, \beta_k, \varepsilon)}{[F, F]} \cong \langle\alpha_1\rangle \times \langle\beta_1\rangle \times \cdots \times \langle\alpha_k\rangle \times \langle\beta_k\rangle \times \langle\varepsilon\rangle$$

por el primer teorema del isomorfismo y tenemos que

$$\overline{\varphi}\left(\frac{[F, F]\overline{\langle\varepsilon^2\rangle}}{[F, F]}\right) = \langle\varepsilon^2\rangle \qquad (11)$$

pues $\varphi([\varepsilon^2]) = \langle \varepsilon^2 \rangle$.

Usando (10) y (11) y el isomorfismo inducido por $\overline{\varphi}$, $\overline{\overline{\varphi}}$

$$\begin{aligned}
\frac{G/K}{[G/K, G/K]} &\cong \frac{F/[F,F]}{\frac{[F,F]\langle\varepsilon^2\rangle}{[F,F]}} \\
&\overset{\overline{\overline{\varphi}}}{\cong} \frac{\langle \alpha_1 \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \alpha_k \rangle \times \langle \beta_k \rangle \times \langle \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon^2 \rangle} \\
&\cong \langle \alpha_1 \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \alpha_k \rangle \times \langle \beta_k \rangle \times \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon^2 \rangle} \\
&\cong
\end{aligned}$$

entonces $\frac{\pi(M)}{[\pi(M),\pi(M)]}$ es un grupo abeliano de rango $n-1$ y un coeficiente de torsión de orden 2.

Acabamos de probar el siguiente teorema

Teorema 4.19. *El grupo fundamental abelianizado de la suma de n planos proyectivos es isomorfo a* $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n-1 \text{ veces}} \times \mathbb{Z}_2$.■

Podemos resumir estos resultados sobre los grupos fundamentales abelianizados de la siguiente manera.

Proposición 4.20. *Si M es la suma conexa de n toros entonces su grupo fundamental abelianizado es un grupo abeliano libre de rango $2n$. Si M es la suma conexa de n planos proyectivos entonces el grupo fundamental abelianizado es de rango $n-1$ y tiene un coeficiente de torsión de orden 2.*

Corolario 4.21. *Toda superficie conexa compacta y orientable no es del mismo tipo de homotopía que una superficie conexa compacta no orientable.*

Demostración. Por la proposición anterior, el grupo fundamental abelianizado de una superficie no orientable contiene un elemento de orden 2 mientras que en los orientables todos sus elementos tienen orden infinito, así que los grupos fundamentales no pueden ser isomorfos. ■

Corolario 4.22. *Si $m \neq n$ entonces la suma conexa de m planos proyectivos y la de n planos proyectivos no pueden ser del mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Supongamos que hay un isomorfismo $h : \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}} \times \mathbb{Z}_2 \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{m \text{ veces}} \times \mathbb{Z}_2$ entonces h manda al elemento de orden 2 al de orden 2, así que

$$\overline{h} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2$$

entonces $m = n$ por el corolario 3.33. ■

4.5. Prueba del Teorema de Seifert y Van Kampen

En esta sección se hará una demostración del teorema de Seifert-Van Kampen en su forma general (4.3). Consideremos una cubierta de conjuntos abiertos y conexos por trayectorias $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de un espacio topológico conexo por trayectorias X tal que esta familia sea cerrada bajo intersecciones finitas y además $x_0 \in U_\lambda$;Usemos la mismo notación, φ_i, ψ_i denotan los homomorfismos inducidos por la inclusiones. El teorema de Seifert-Van Kampen afirma que para cualquier grupo H y y cualquier colección de homomorfismos $\rho_\lambda : \pi(U_\lambda) \to H$ tales que si $U_\lambda \subset U_\mu$ entonces el diagrama siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[r, "\rho_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda\mu}"'] & H \\ \pi(U_\mu) \arrow[ur, "\rho_\mu"'] & \end{tikzcd}$$

entonces existe un único homomorfismo $\sigma : \pi(X) \to H$ que para cualquier $\lambda \to \Lambda$ hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

Probemos unos lemas antes de esta prueba

Lema 4.23. *El grupo $\pi(X)$ está generado por la unión de las imágenes $\psi_\lambda(\pi(U_\lambda))$ $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \pi(X)$ y $f : I \to X$ una trayectoria representante de la clase α en $\pi(X)$. Entonces la familia de imágenes inversas

$$\left\{f^{-1}(U_\lambda) : \lambda \in \Lambda\right\}$$

es una cubierta por abiertos del compacto $[0,1]$ pues f es continua y la familia $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ cubre a $\pi(X)$. Sea ε el número de Lebesgue de esta cubierta y escojamos $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Dividamos al intervalo $[0,1]$ en subintervalos

$$J_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$$

para $0 \leq i \leq n-1$. Por la manera que se escogió n, podemos afirmar que para cada J_i existe un U_{λ_i} tal que

$$f(J_i) \subset U_{\lambda_i}$$

ahora, $U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i}$ es conexo por trayectorias y además $f\left(\frac{i}{n}\right) \in U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i}$ ya que como $\frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \cap \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] = J_{i-1} \cap J_i$; entonces existe una trayectoria $g_i : I \to U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i}$ tal que

$$\begin{aligned} g_i(0) &= x_0 \\ g_i(1) &= f\left(\frac{i}{n}\right) \end{aligned}$$

y sea $h_i : [0,1] \to J_i$ el único homeomorfismo "lineal" que preserva orientación. Entonces definamos $f_i : [0,1] \to X$ para cada $i \in \{0,1,...,n-1\}$ por la regla

$$f_i = f|_{J_i} \circ h_i$$

es una trayectoria que representa el recorrido de f en el intervalo J_i.

Las trayectorias $f_0 g_1^{-1}, g_1 f_1 g_2^{-1}, ..., g_{n-2} f_{n-2} g_{n-1}^{-1}, g_{n-1} f_{n-1}$ son lazos y cada uno vive en su respectivo U_{λ_i} pues

$$\begin{aligned} f_0 g_1^{-1}(0) &= f_0(0) = f|_{J_0}(h_0(0)) = f|_{J_0}(0) = x_0 \\ f_0 g_1^{-1}(1) &= g_1^{-1}(1) = g_1(0) = x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_i f_i g_{i+1}^{-1}(0) &= g_i(0) = x_0 \\ g_i f_i g_{i+1}^{-1}(1) &= g_{i+1}^{-1}(1) = g_{i+1}(0) = x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{n-1} f_{n-1}(0) &= g_{n-1}(0) = x_0 \\ g_{n-1} f_{n-1}(1) &= f_{n-1}(1) = (h_{n+1}(1)) = f|_{J_{n+1}}(1) = x_0 \end{aligned}$$

y como f_i, g_i, g_{i+1} toman valores en U_{λ_i} entonces también su imagen. Llamemos

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= f_0 g_1^{-1} \\ \alpha_i &= g_i f_i g_{i+1}^{-1} \\ a_{n-1} &= g_{n-1} f_{n-1} \end{aligned}$$

así que $\alpha_i \in \psi_{\lambda_i}(\pi(U_{\lambda_i}))$ y además

$$\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$$

lo que prueba el lema. ■

Lema 4.24. *Sean U_λ y U_μ dos conjuntos abiertos de la cubierta de X y sea*

$$h : I \to U_\nu$$

una lazo en x_0. Denotemos como $a \in \pi(U_\lambda, x_0), \beta \in \pi(U_\mu, x_0)$, las clases de equivalencias de h es sus respectivos subespacios. Entonces

$$\rho_\lambda(\alpha) = \rho_\mu(\beta)$$

Demostración. Sea $U_\nu = U_\lambda \cap U_\mu$ que por hipótesis, también pertenece a la cubierta de X, además, h representa un lazo $\gamma \in \pi(U_\nu, x_0)$ entonces

$$\alpha = \varphi_{\nu\lambda}(\gamma)$$

pues

$$\varphi_{\nu\lambda}(\gamma) = \varphi_{\nu\lambda}[h] = [\varphi_{\nu\lambda}(h)] = [h] = \alpha$$

y entonces por hipótesis tenemos que

$$\rho_\lambda(\alpha) = \rho_\lambda \circ \varphi_{\nu\lambda}(\gamma) = \rho_\nu(\gamma)$$

y de manera análoga que

$$\rho\mu(\beta) = \rho_\nu(\gamma)$$

y entonces

$$\rho_\lambda(\alpha) = \rho\mu(\beta)$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Este lema que nos relaciona nos permite ser un tanto "descuidados" con la notación sin miedo de ambigüedades y podemos denotar

$$\rho(h) = \rho_\lambda(\alpha) = \rho_\mu(\beta)$$

sin preocuparnos de haber tomado h como lazo en U_λ o en U_μ.

Lema 4.25. *Sea $\beta_i \in \pi(U_{\lambda_i})$ para $i = 1, 2, ..., q$ tal que*

$$\psi_{\lambda_1}(\beta_1)\psi_{\lambda_2}(\beta_2)\cdots\psi_{\lambda_q}(\beta_2) = 1$$

entonces el producto

$$\rho_1(\beta_1)\rho_2(\beta_2)\cdots\rho_q(\beta_2) = 1$$

Demostración. Sean
$$f_i : \left[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q}\right] \to u_\lambda$$
un representante de β_i para cada $i = 1, 2, ...q$ entonces el producto
$$\prod_{i=1}^{q} \psi_{\lambda_i}(\beta_i)$$
es un representante del lazo $f : [0,1] \to X$ que está bien definido por
$$f|_{\left[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q}\right]} = f_i$$
pues
$$f_i\left(\frac{i}{q}\right) = x_0 = f_{i+1}\left(\frac{i}{q}\right)$$
y por hipótesis f es homotópico al lazo constante x_0 por lo tanto existe una función $F : I \times I \to X$ tal que
$$F(s,0) = f(s)$$
$$F(s,1) = F(0,t) = F(1,t) = x_0$$
esto nos induce una cubierta por abiertos $\{F^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ del espacio métrico $I \times I$, sea ε su número de Lebesgue. Podemos dividir a $I \times I$ en pequeños rectángulos de diámetro menor que ε como sigue. Escojamos particiones $\{s_i\}_{i=1}^{m}, \{t_i\}_{i=1}^{n}$ de norma menor que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ tal que las fracciones $\frac{j}{q} \in \{s_i\}_{i=1}^{m}$ para cada $j = 1, 2, ..., q-1$. Ahora introduciremos una notación para varios vértices, puntos y rectángulos de esta subdivisión.

Vértices:
$$v_{ij} = (s_i, t_j)$$
para $0 \le i \le m$ y $0 \le j \le n$

Subintervalos:
$$\begin{aligned} J_i &= [s_{i-1}, s_i] \\ K_j &= [t_{i-1}, t_i] \end{aligned}$$
para $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$

Rectángulos:

$$R_{ij} = J_i \times K_j$$

para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$

Bordes:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= J_i \times \{t_j\} \\ b_{ij} &= \{s_i\} \times K_j \end{aligned}$$

para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq n$

Trayectorias:

$$\begin{aligned} A_{ij} &: J_i \to X \\ B_{ij} &: K_j \to X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{ij}(s) &= F(s, t_j) \\ B_{ij}(t) &= F(s_i, t) \end{aligned}$$

Para cada rectángulo R_{ij} existe un $U_{\lambda(i,j)}$ tal que

$$F(R_{ij}) \subset U_{\lambda(i,j)}$$

y se puede pues el diámetro de cada R_{ij} es menor que ε por construcción.

Cada vértice v_{ij} es vértice de 1,2 ó 4 rectángulos R_{kl}; Sea $U_{\mu(i,j)}$ la intersección de estos $U_{\lambda(k,l)}$ entonces

$$F(v_{ij}) \in U_{\mu(i,j)}$$

y por hipótesis, como $U_{\mu(i,j)}$ es uno de los de la cubierta de X entonces

$$x_0 \in U_{\mu(i,j)}$$

sea $g_{ij} : I \to U_{\mu(i,j)}$ una trayectoria de x_0 a $F(v_{ij})$, si $F(v_{ij}) = x_0$ entonces g_{ij} es la trayectoria constante x_0.

Ahora sean

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \rho\left(g_{i-1,j} A_{ij} g_{ij}^{-1}\right) \\ \beta_{ij} &= \rho\left(g_{i,j-1} A_{ij} g_{ij}^{-1}\right) \end{aligned}$$

están bien definidas por el lema 4.24. Aseguramos que para cada R_{ij} se cumple la siguiente relación

$$\alpha_{i,j-1}\beta_{i,j} = \beta_{i-1,j}\alpha_{i,j} \tag{12}$$

para probar esto primero consideremos el homomorfismo "lineal" que preserva orientación η de $I \times I$ a $R_{i,j}$ y sea

$$F_{i,j} = F \circ \eta : I \times I \longrightarrow U_{\lambda(i,j)}$$

y apliquemos el lema 2.23 y obtenemos que

$$A_{i,j} \approx B_{i-1,j}^{-1} A_{i,j-1} B_{i,j}$$

y entonces

$$A_{i,j-1}B_{i,j} \approx B_{i-1,j}A_{i,j} \tag{13}$$

además las trayectorias $g_{i-1,j-1}A_{i,j-1}g_{i,j-1}^{-1}$, $g_{i,j-1}B_{i,j}g_{i,j}^{-1}$, $g_{i-1,j-1}B_{i-1,j}g_{i-1,j}^{-1}$, $g_{i-1,j}A_{i,j}g_{i,j}^{-1}$ son lazos, además cada factor vive en $U_{\lambda(i,j)}$ así que también su producto. Por la relación 13 tenemos que

$$g_{i-1,j-1}A_{i,j-1}g_{i,j-1}^{-1}g_{i,j-1}B_{i,j}g_{i,j}^{-1} \approx g_{i-1,j-1}B_{i-1,j}g_{i-1,j}^{-1}g_{i-1,j}A_{i,j}g_{i,j}^{-1}$$

y obtenemos que

$$\left[g_{i-1,j-1}A_{i,j-1}g_{i,j-1}^{-1}g_{i,j-1}B_{i,j}g_{i,j}^{-1}\right] = \left[g_{i-1,j-1}B_{i-1,j}g_{i-1,j}^{-1}g_{i-1,j}A_{i,j}g_{i,j}^{-1}\right]$$

y aplicando $\rho_{\lambda(i,j)}$ tenemos que

$$\rho_{\lambda(i,j)}\left[g_{i-1,j-1}A_{i,j-1}g_{i,j-1}^{-1}g_{i,j-1}B_{i,j}g_{i,j}^{-1}\right] = \rho_{\lambda(i,j)}\left[g_{i-1,j-1}B_{i-1,j}g_{i-1,j}^{-1}g_{i-1,j}A_{i,j}g_{i,j}^{-1}\right]$$

y ya que ρ es homomorfismo tenemos que lado izquierdo de la igualdad es igual a $\alpha_{i,j-1}\beta_{i,j}$ y el derecho es $\beta_{i-1,j}\alpha_{i,j}$ y probamos 12.

Ahora probaremos que

$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,0} = \prod_{k=1}^{q} \rho_{\lambda_k}(\beta_k) \tag{14}$$

notemos que $g_{i-1,0}$, $g_{i,0}$, $A_{i,0}$ viven en $U_{\lambda(i,1)}$, así que

$$\rho_{\lambda(i,1)}\left[g_{i-1,0}A_{i,0}g_{i,0}^{-1}\right]$$

está bien definido y además si definimos $\omega(r)$ tal que $s_{\omega(r)} = \frac{r}{q}$, que existe por la forma en que se construyeron las s_i, tenemos que

$$U_{\lambda(i,0)} \subset U_{\lambda_j}$$

para cada $i = \omega(i-1)+1, ..., \omega(i)-1, \omega(i)$. Por el lema 4.24 tenemos que

$$\rho_{\lambda_j}\left[g_{i-1,0}A_{i,0}g_{i,0}^{-1}\right] = \rho_{\lambda(i,0)}\left[g_{i-1,0}A_{i,0}g_{i,0}^{-1}\right]$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m}\alpha_{i,0} &= \prod_{i=1}^{m}\rho_{\lambda(i,0)}\left[g_{i-1,0}A_{i,0}g_{i,0}^{-1}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{q}\prod_{i=\omega(j-1)+1}^{\omega(j)}\rho_{\lambda(i,0)}\left[g_{i-1,0}A_{i,0}g_{i,0}^{-1}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{q}\prod_{i=\omega(j-1)+1}^{\omega(j)}\rho_{\lambda_j}\left[g_{i-1,0}A_{i,0}g_{i,0}^{-1}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{q}\left(\prod_{i=\omega(j-1)+1}^{\omega(j)}\left[g_{i-1,0}A_{i,0}g_{i,0}^{-1}\right]\right) \\
&= \prod_{j=1}^{q}\rho_{\lambda_j}\left[g_{\omega(j-1),0}\left(\prod_{i=\omega(j-1)+1}^{\omega(j)}A_{i,0}\right)g_{\omega(j),0}^{-1}\right]
\end{aligned}$$

ahora bien sabemos que para cualquier j tenemos que

$$g_{\omega(j-1),0} = x_0$$

pues

$$F\left(v_{\omega(j-1),0}\right) = \beta_j(1) = x_0$$

y continuando la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m}\alpha_{i,0} &= \prod_{j=1}^{q}\rho_{\lambda_j}\left[\prod_{i=\omega(j-1)+1}^{\omega(j)}A_{i,0}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{q}\rho_{\lambda_j}(\beta_j)
\end{aligned}$$

y con esto probamos 14.

Notemos que

$$\begin{aligned} \alpha_{i,n} &= 1 & (15) \\ \beta_{0,j} &= 1 & (16) \\ \beta_{mj} &= 1 & (17) \end{aligned}$$

para mostrar 15 basta probar que $\left[g_{i-1,n}A_{i,n}g_{i,n}^{-1}\right] = [x_0]$ lo cual es claro pues como $F(v_{i,n}) = F(s_i, 1) = x_0$ se tiene que $g_i = x_0$; de igual forma se obtiene que $g_{i-1} = x_0$ ahora $A_{i,n}(s) = x_0$ lo que muestra $\left[g_{i-1,n}A_{i,n}g_{i,n}^{-1}\right] = [x_0]$ y entonces 15. Podemos obtener 16 y 17 de la misma manera, sólo que usando que $F(0,t) = F(1,t) = x_0$.

Veamos ahora que

$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,j-1} = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,j}$$

pues, aplicando 17 y repedidamente 12 y por último 16 tenemos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,j-1} &= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\cdots\alpha_{m,j-1} \\ &= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\cdots\alpha_{m,j-1}\beta_{m,j} \\ &= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\cdots\alpha_{m-1,j-1}\beta_{m-1,j}\alpha_{m,j} \\ &\vdots \\ &= \beta_{0,,j}\alpha_{1,j}\alpha_{2,j}\cdots\alpha_{m,j} \\ &= \alpha_{1,j}\alpha_{2,j}\cdots\alpha_{m,j} \\ &= \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} \end{aligned}$$

y a partir de este resultado es claro que

$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,0} = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,n}$$

pero por 15, el lado derecho de la ecuación es la identidad, así tenemos que

$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,0} = 1$$

y por 14

$$\prod_{k=1}^{q} \rho_{\lambda_k}(\beta_k) = 1$$

que es lo que queríamos probar. ■

Con estos lemas probaremos el teorema 4.3

Demostración. Tenemos que dar la existencia de una única σ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] & \pi(X) \arrow[dl, "\sigma"] \\ H & \end{tikzcd}$$

lo podemos hacer de la siguiente forma, si tenemos que $\alpha \in \pi(X)$ entonces el lema 4.23 tenemos que

$$\alpha = \psi_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\psi_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\psi_{\lambda_n}(\alpha_n)$$

donde $\alpha_i \in \pi(U_{\lambda_i})$ entonces podemos definir

$$\sigma(\alpha) = \rho_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\rho_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\rho_{\lambda_n}(\alpha_n)$$

veamos que está bien definido. Supongamos que

$$\alpha = \psi_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\psi_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\psi_{\lambda_n}(\alpha_n) = \psi_{\lambda_1'}(\alpha_1')\,\psi_{\lambda_2'}(\alpha_2')\cdots\psi_{\lambda_m'}(\alpha_m')$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \psi_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\psi_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\psi_{\lambda_n}(\alpha_n)\left(\psi_{\lambda_1'}(\alpha_1')\,\psi_{\lambda_2'}(\alpha_2')\cdots\psi_{\lambda_m'}(\alpha_m')\right)^{-1} \\ &= \psi_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\psi_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\psi_{\lambda_n}(\alpha_n)\,\psi_{\lambda_m'}(\alpha_m')^{-1}\cdots\psi_{\lambda_2'}(\alpha_2')^{-1}\,\psi_{\lambda_1'}(\alpha_1')^{-1} \end{aligned}$$

pero por el lema 4.25 tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \rho_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\rho_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\rho_{\lambda_n}(\alpha_n)\,\rho_{\lambda_m'}(\alpha_m')^{-1}\cdots\rho_{\lambda_2'}(\alpha_2')^{-1}\,\rho_{\lambda_1'}(\alpha_1')^{-1} \\ &= \rho_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\rho_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\rho_{\lambda_n}(\alpha_n)\left(\rho_{\lambda_1'}(\alpha_1')\,\rho_{\lambda_2'}(\alpha_2')\cdots\rho_{\lambda_m'}(\alpha_m')\right)^{-1} \end{aligned}$$

y de aqui que

$$\rho_{\lambda_1}(\alpha_1)\,\rho_{\lambda_2}(\alpha_2)\cdots\rho_{\lambda_n}(\alpha_n) = \rho_{\lambda_1'}(\alpha_1')\,\rho_{\lambda_2'}(\alpha_2')\cdots\rho_{\lambda_m'}(\alpha_m')$$

así que σ está bien definida, y es claro que hace conmutar el diagrama.

La unicidad de sigue inmediatamente del lema 4.23, sea $\sigma' : \pi(X) \to H$, que haga conmutar el mismo diagrama que σ, y sea $\alpha \in \pi(X)$ mostraremos que $\sigma'(\alpha) = \sigma(\alpha)$. Sabemos que

$$\alpha = \prod_{i=1}^{n} \psi_{\lambda_i}(\alpha_i)$$

entonces

$$\begin{aligned} \sigma'(\alpha) &= \sigma'\left(\prod_{i=1}^{n} \psi_{\lambda_i}(\alpha_i)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \sigma'(\psi_{\lambda_i}(\alpha_i)) \end{aligned}$$

y por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\sigma'(\psi_{\lambda_i}(\alpha_i)) = \rho_{\lambda_i}(\alpha_i)$ y entonces

$$\begin{aligned} \sigma'(\alpha) &= \prod_{i=1}^{n} \rho_{\lambda_i}(\alpha_i) \\ &= \sigma(\alpha) \end{aligned}$$

■

Referencias

[1] J. Dugundji, *Topology,* Allyn and Bacon

[2] J. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Addison-Wesley Iberoamericana, tercera edición

[3] J. Greenberg, *Algebraic topology: a first course,* ABP

[4] W. S. Massey, *Algrebraic topology: an introduction*, Springer

[5] J. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, segunda edición

[6] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, segunda edición