UNIVERSIDAD DE SONORA

Escuela de Altos Estudios

Una Teoría de Integración Fraccional para Funciones Generalizadas

T E S I S

Que para obtener el título de:
LICENCIADO EN MATEMATICAS
p r e s e n t a :

LUIS FELICIANO VALENCIA ARVIZU

Hermosillo, Son. 1981

Para EL;

quien me dotó de cuerpo, vida y pensamiento.

Para mis Padres;

quienes se esforzaron siempre por mi educación.

Para mi Esposa;

quién me apoyó y exentándome de responsabilidades me proporcionó tiempo.

Para mis Hijos;

quienes con sus necesidades y sueños me proveyeron de coraje.

Y para todas aquellas personas que depositaron su confianza en mí, contribuyendo así con la UNIVERSIDAD DE SONORA para la creación de un fruto más, que lleve sus semillas del conocimiento.

INTRODUCCION

El cálculo fraccional nos proporciona un bello ejemplo de cómo se van desarrollando las teorías matemáticas. Puede trazarse su desarrollo desde el siglo XVII hasta la actualidad, y en él puede contemplarse cómo una inquietud intelectual puramente formal, la posibilidad de extender el orden de derivación a fracciones, encuentra una aplicación en un problema de mecánica antes de que hubiera algún desarrollo significativo de la teoría.

En el capítulo cero hemos hecho una breve reseña histórica del cálculo fraccional que, partiendo de Leibniz y pasando por los formalistas del siglo XIX, nos permite llegar a la parte principal de este trabajo, dando cuenta de los avances logrados por distintas corrientes en lo que va de este siglo, y dando un panorama general que permite comprender y situar la teoría de integración fraccional para funciones generalizadas que posteriormente presentamos. Para la redacción de este capítulo nos hemos basado principalmente en [1], [9] y [11].

Si el capítulo cero es el antecedente histórico necesario para ubicar nuestro tema, el capítulo primero da los antecedentes matemáticos necesarios para comprenderlo (y que generalmente no se incluyen en el curriculum de la Licenciatura en Matemáticas); en él se presentan los espacios de funciones que habrán de manejarse, precisándose el sentido en que han de entenderse los conceptos de función generalizada y operador, así como algunas de sus propiedades. Esta parte descansa en la notación y presentación que se hace en [12] de estos temas.

Los capítulos segundo y tercero forman la parte central de este trabajo, y siguen la exposición dada en [8] ; en el primero de ellos se introducen los operadores de Erdelyi-Kober y se desarrolla su teoría, llegando hasta algunas leyes de índices que permiten el manejo algorítmico de los operadores. El tercer capítulo presenta la solución de una ecuación diferencial utilizando los operadores estudiados.

Por último, se anexa un capítulo cuarto con el fin de presentar una panorámica de los diversos campos de aplicación de la teoría y de dar una idea del tipo de problemas que todavía quedan por resolver, y se concluye con un apéndice sobre la función gamma. Como el cálculo fraccional está fuera del curriculum de la Licenciatura en Matemáticas, se pretende con el apéndice facilitar a los estudiantes no avanzados la lectura del capítulo cero, que con el capítulo cuarto formaría una buena primera aproximación al cálculo fraccional. El capítulo cuarto se apoya principalmente en [1], que es una colección de trabajos presentados en 1974 en la Conferencia Internacional sobre Cálculo Fraccional efectuada en la Universidad de New Haven.

INDICE

CAPITULO CERO

ORIGEN Y EVOLUCION DEL CALCULO FRACCIONAL

CAPITULO PRIMERO

ESPACIOS MULTINORMADOS Y OPERADORES ADJUNTOS

CAPITULO SEGUNDO

LOS OPERADORES $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$, $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$, $I_{x^m}^{\alpha}$, $K_{x^m}^{\alpha}$

CAPITULO TERCERO

UNA APLICACION

CAPITULO CUARTO

CAMPOS DE APLICACION Y PROBLEMAS ABIERTOS

CAPITULO CERO

ORIGEN Y EVOLUCION DEL CALCULO FRACCIONAL

A) *PRIMEROS INTENTOS*

El Cálculo Fraccional tiene su origen en la extensión de significado de la expresión conocida $\frac{d^n y}{d^n x}$ de la notación de Leibniz usada en Cálculo Diferencial. Es decir: ¿Tiene sentido extender los valores de n a fracciones, irracionales ó complejos en dicha expresión?

La primera persona de quien se tiene noticia que indicó esta extensión fue G.A.L' Hospital en 1695, quien en una carta preguntó a Leibniz respecto a la notación para la n-ésima derivada de una función: ¿Qué [sucedería] si n fuera 1/2 ?, a lo que Leibniz replicó "esto conduciría aparentamente a una paradoja pero de ésta algún día serán extraídas consecuencias útiles".

El mismo Leibniz en 1697, refiriéndose al producto infinito de Wallis para ¶, afirmó que podía haberse usado el Cálculo Diferencial para obtener el mismo resultado y utilizó la notación $d^{1/2}y$ para denotar una derivada de orden 1/2.

L. Euler mencionó interpolaciones entre órdenes enteros de una derivada, en 1730. P.S. Laplace, en 1812, definió una derivada fraccional, pero la primera discusión de una derivada de este tipo apareció en 1819, en casi dos páginas de las 700 que constituyen el texto de Cálculo de S.F. Lacroix, quien aparentemente consideró este tópico *como* un mero ejercicio matemático.

Lacroix partió de $y=x^m$ con m entero positivo y calculó la n-ésima derivada:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n},$$

Usando Γ, el símbolo de Legendre para factorial generalizado (función gamma), obtuvo

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n};$$

y reemplazando n por 1/2 y m por cualquier real positivo a, de manera típica en los formalistas clásicos de este período, Lacroix obtuvo:

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1/2)} x^{a-1/2}$$

que expresa la 1/2 derivada de $y=x^a$.

También dió el resultado para y=x:

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}\ x^{1/2} = \frac{1!x^{1/2}}{1/2\,\Gamma(1/2)} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

J.B.J. Fourier, en 1822, fuê el siguiente en mencionar derivadas fraccionales, pero al igual que Euler, Laplace y Lacroix, no aportó ninguna aplicación.

La primera aplicación se debió a Niels Henrik Abel, en 1823, cuando aplicó el Cálculo Fraccional en la solución de una ecuación integral que surgió en la formulación del problema de la tautócrona. Este problema, llamado a veces el problema de la isócrona, consiste en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, tal que un objeto, al deslizarse sin fricción sobre ella, llegue al final del recorrido en un tiempo que es independiente del lugar en que comience el movimiento.

Probablemente la elegancia de la solución de Abel para este problema, llamó la atención de J. Liouville, quien dedicó mayor atención a dar una definición lógica de derivada fraccional, publicando tres largas memorias en 1832 y algunas más en 1855.

El punto de partida de Liouville fué un resultado conocido para derivadas de orden entero positivo, que extendió en forma natural para órdenes arbitrarios:

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m e^{ax}, \quad \text{extendiéndola para } \nu>0: \quad \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax} \;;$$

desarrolló $f(x)$ en la serie $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ y manejó la ν-derivada de $f(x)$ como:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}$$

. Esta se conoce como la "primera definición de Liouville".

Esta primera definición de Liouville tiene la clara desventaja de que ν está restringida por la convergencia de la serie.

Usó un segundo método para definir una derivada fraccional, aplicada a funciones de la forma x^{-a} con $a>0$, de la manera siguiente:

$$\int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du \;;$$

la transformación $xu=t$ da el resultado

$$\int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du = \frac{1}{x^a}\int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a)}{x^a},$$

de donde

$$x^{-a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a-1}e^{-xu}du,$$ y tomando la ν-derivada en ambos miembros:

$$\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}x^{-a}=\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\left[\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a-1}e^{-xu}du\right]=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a-1}\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}(e^{-xu})du=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a-1}(-1)^{\nu}u^{\nu}e^{-xu}du=\frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a+\nu-1}e^{-xu}du=$$

$$=\frac{(-1)^{\nu}\,\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)\;x^{a+\nu}},$$ de donde obtuvo la relación

$$\frac{d^{\nu}x^{-a}}{dx^{\nu}}=\frac{(-1)^{\nu}\,\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\nu},$$ conocida como la "segunda definición de Liouville".

En esta segunda definición, el término $(-1)^{\nu}$ sugiere la necesidad de incluir números complejos, y de hecho Liouville consideró tales valores, aplicando con éxito el Cálculo Fraccional en problemas de Teoría del Potencial. También trató de resolver ecuaciones diferenciales con esta herramienta.

Entre 1835 y 1850 hubo controversías respecto a las definiciones de derivada fraccional dadas por Lacroix y Liouville. Estas corrientes fueron apoyadas por George Peacock y P. Kelland, respectivamente. Sin embargo, Augustus de Morgan juzgó que ni una ni otra corriente podía considerarse superior y que ambas formas de definir derivadas fraccionales podían ser parte de una más general.

En 1850, William Center observó que la discrepancia entre las dos versiones se centraba en la derivada fraccional de una constante.

De acuerdo con la versión Peacock-Lacroix, la derivada fraccional de una constante da un resultado distinto de cero, a menos que la constante sea precisamente cero, mientras que en la versión Kelland-Liouville la derivada fraccional de una constante sí es cero, puesto que $\Gamma(0)= \infty$ y $\frac{1}{\Gamma(0)}$ puede tomarse como cero.

Center concluyó que cuando se conoce la forma de encontrar la derivada fraccional de una constante, entonces se puede saber qué sistema adoptar.

Bernhard Riemann desarrolló una teoría de operaciones fraccionales durante sus días de estudiante, en 1847, misma que fué publicada en 1876, después de su muerte. Usó una generalización de una serie de Taylor para deducir su fórmula para integración de orden arbitrario:

$$\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt + \Psi(x) \quad \text{sobre la que,}$$

en 1880, Arthur Cayley comentó que la función complementaria $\Psi(x)$ es de naturaleza indeterminada pues contiene una infinidad de constantes arbitrarias.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XIX no pudieron precisar una definición apropiada al no analizar en el plano complejo las consecuencias de sus definiciones.

B) PRIMERA DEFINICION ACEPTABLE

Fue Laurent quien clarificó la manera de calcular derivadas de orden arbitrario, en 1884. Su teoría, analizada en el plano complejo, fué la primera aceptable para el gusto de los matemáticos modernos.

Para ampliar un poco, de acuerdo con la notación de Harold

T. Davis (1936):

$_cD_x^{-\nu}f(x)$, $\nu \geq 0$ denota la integral de orden ν de la función $f(x)$ a lo largo del eje real, c y x son límites de integración.

$_cD_x^{\nu}f(x)$, $\nu \geq 0$ significa diferenciación de orden ν para $f(x)$.

En términos de esta notación, lo que requerían los matemáticos para encontrar una definición apropiada de derivada de orden arbitrario y obtener una teoría manipulable, es brevemente lo siguiente:

Para toda función $f(z)$ de variable compleja de una clase suficientemente amplia y cualquier número ν, irracional, fraccional o complejo, la función $_cD_z^{\nu}f(z)= g(z)$ debería definirse de modo que satisficiera lo siguiente:

1) Si $f(z)$ es analítica, la derivada $_cD_z^{\nu}f(z)$ es analítica en ν y z.

2) La operación $_cD_x^{\nu}f(x)$ produce el mismo resultado que la diferenciación ordinaria cuando ν es entero positivo.

   Si $\nu = -n$, n natural, entonces $_cD_x^{-n}f(x)$ produce lo mismo que integrar ordinariamente n veces la función $f(x)$ y $_cD_x^{-n}f(x)$ debe anularse con sus n-1 derivadas en x=c.

3) La operación de orden cero no altera la función $_cD_x^{0}f(x)= f(x)$.

4) Los operadores fraccionales deben ser lineales.

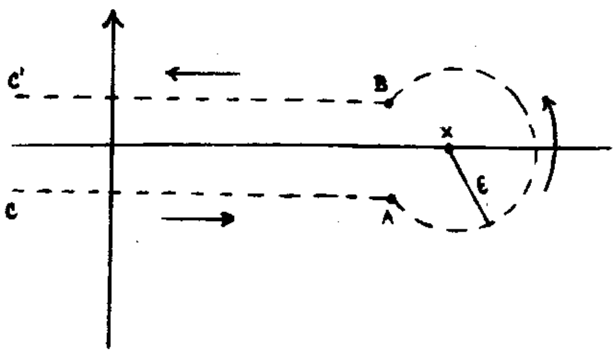
5) La ley de índices debe cumplirse $_cD_x^{-u}\, {_cD_x^{-\nu}}f(x)= {_cD_x^{-u-\nu}}f(x)$.

Como se mencionó anteriormente, Laurent obtuvo la primera definición que satisfizo estas propiedades. Publicó un artículo en 1884 que es considerado como definitivo para los fundamentos del Cálculo Fraccional.

Para ello, partió de la fórmula de Cauchy para funciones complejas analíticas:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\eta)}{(\eta-z)^{n+1}}\, d\eta$$

donde $\mathbb{C}$ es el contorno de integración en el plano complejo, ahora llamado Lazo de Laurent, que se muestra a la izquierda.



La generalizacion de n! no presenta problema dado que $\nu! = \Gamma(\nu+1)$; además, poniendo la integral en forma exponencial y haciendo $\eta = t$, $z = x$ se obtiene

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_{C} e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t)\,dt;$$

en la parte AB del lazo tenemos $t = x+\varepsilon e^{i\theta}$,de donde

$$\int_A^B e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-\nu-1)\ln[\varepsilon e^{i\theta}]} f(x+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\ln[\varepsilon e^{i\theta}]^{(-\nu-1)}} \varepsilon i e^{i\theta} f(x+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^{-\nu-1} \varepsilon i e^{i\theta} f(x+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-\nu} e^{-i\nu\theta}\, i\ f(x+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

Si tomamos $\nu<0$ entonces la integral anterior converge a cero cuando $\varepsilon \to 0$. En la parte CA del lazo, $\ln(\eta-x)= \ln(x-t)-i\pi$ y en la parte BC' del mismo, $\ln(\eta-x)= \ln(x-t)+i\pi$, de donde

$$\int_{C} e^{(-\nu-1)\ln(\eta-x)} f(\eta)\, d\eta = \int_{C}^{A} e^{(-\nu-1)[\ln(x-t)-i\pi]} f(t)\, dt +$$

$$+\int_{B}^{C'} e^{(-\nu-1)[\ln(x-t)+i\pi]} f(t)\, dt + \int_{A}^{B} e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t)\, dt$$

Al tomar $\nu<0$, y límite cuando $\varepsilon \to 0$, la integral en la parte AB del lazo se anula y obviamente $A\to x$, $B\to x$ y $C \to C'$, por lo que

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\left[e^{(\nu+1)i\pi} \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt - e^{-(\nu+1)i\pi} \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt \right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi}\left[\frac{e^{i\pi(\nu+1)} - e^{-i\pi(\nu+1)}}{2i} \right] \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} \operatorname{Sen}(\nu+1)\pi \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} (-\operatorname{Sen} \pi\nu) \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt$$

De acuerdo con la fórmula de reflexión de la función Γ,

- Sen $\P\nu = \frac{\P}{\Gamma(-\nu)\,\Gamma(\nu+1)}$ y esto nos conduce a

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)\P}{\P\,\Gamma(-\nu)\,\Gamma(\nu+1)} \int_{c'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{c'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\,dt$$

Finalmente, mediante un cambio de notación para emplear $\nu>0$ en lugar de $\nu<0$, obtenemos la definición de integración de orden arbitrario $\nu>0$ obtenida por Laurent, que en notación de Davis es

$${}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)\,dt.$$

Esta definición también se conoce como fórmula de Riemann-Liouville porque si $C=0$ ó $C=-\infty$ obtenemos las definiciones de Riemann y Liouville respectivamente, aunque en esta expresión no se considera la función complementaria $\Psi(x)$ que incluyó Riemann.

Esta fórmula de Riemann-Liouville para integración fraccional, no se puede usar directamente para diferenciación de orden arbitrario; sin embargo, mediante un pequeño truco se puede encontrar una expresión adecuada:

Sea $\nu= m-p$ donde m es el mínimo entero mayor o igual que ν y $0\leq p<1$; entonces para diferenciación de orden arbitrario

$${}_cD_x^{-\nu} f(x) = {}_cD_x^{m-p} f(x) = {}_cD_x^{m}\;{}_cD_x^{-p} f(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left[{}_cD_x^{-p} f(x)\right] =$$

$$= \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_{c}^{x} (x-t)^{p-1} f(t)\,dt\right]$$ donde el supuesto

${}_cD_x^{m-p} = {}_cD_x^{m}\;{}_cD_x^{-p}$ se puede justificar de la manera siguiente:

Sea $\phi(\nu,x)= {}_{0}D_{x}^{-\nu} f(x)= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt$ (es convergente para $\nu>0$),

$$\psi(\nu,x)= {}_{0}D_{x}^{m}\ {}_{0}D_{x}^{-p} f(x)= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t)dt$$

donde $-\nu= m-p$ con $m= 0,1,2,\dots$

Cuando $\nu>0$ escogemos $m=0$, entonces $\nu=p$, $\phi(\nu,x)= \psi(\nu,x)$ y podemos escribir:

$$\phi(\nu,x)= \frac{d}{dx} \int_0^x \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x,t)^{\nu-1} f(t)dt \right] dx$$ usando la fórmula de Dirichlet,

$$\phi(\nu,x)= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^x (x-t)^{\nu} f(t)dt$$ que es convergente para $\nu>-1$,

entonces tenemos que para $m=1$ $\phi(\nu,x)= \psi(\nu,x)$ y este proceso se continúa hasta que $\phi(\nu,x)= \psi(\nu,x)$ para $m=n$ y $\nu>-n$, donde n es natural.

Luego ϕ es analítica en R_1 donde $\nu>0$ y ψ es analítica en R_2 para $\nu>-n$; como $\phi=\psi$ en $R_1 \cap R_2$ con un punto límite en el semiplano derecho, entonces ψ es continuación analítica de ϕ; esto justifica el escribir ${}_{c}D_{x}^{m}\ {}_{c}D_{x}^{-p}= {}_{c}D_{x}^{m-p}$

C) *OTRAS DEFINICIONES*

Desafortunadamente la existencia de $f^{(p)}(x)$ no implica la relación $f^{(p)}(x)= {}_{x_0}D_{x}^{p} f(x)$. Para que esto se cumpla se requiere una restricción suplementaria: la continuidad de $f^{(p)}$ en el punto x_0.

Esta restricción ocasiona que la definición de Riemann-Liouville sea en algunos casos inadecuada, impulsando el estudio de otras definiciones con el propósito de solucionar tal inconveniente.

Frecuentemente es útil la idea siguiente: el desarrollo en serie de una función f para formar la derivada fraccional término a término de la serie, sobre la suposición de que la derivada fraccional de cada uno puede ser dada por interpolación directa.

Para el caso de una función analítica f, tenemos la definición de Hadamard, empleada con éxito en sus investigaciones sobre series de Taylor en 1892:

$${}_0D_x^{\nu}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n-\nu+1)}\,x^{n-\nu}$$ con ν arbitrario y dominio de convergencia esencialmente igual al de la expansión de f en serie de MacLaurin.

Otra de las definiciones, aportada por Weyl en 1917, se basa en series de Fourier como sigue:

Sea f una función 1-periódica con $\int_0^1 f(t)dt=0$, entonces la integral de orden $\nu>0$ es

$${}_{-\infty}I_x^{\nu}f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{-\nu}\left[\alpha_n\mathrm{Cos}\,(2nx-\nu/2)\pi+\beta_n\mathrm{Sen}(2nx-\nu/2)\pi\right],$$ donde

$$\alpha_n=\int_0^1 f(t)\ \mathrm{Cos}(2n\pi t)dt \quad \text{y} \quad \beta_n=\int_0^1 f(t)\ \mathrm{Sen}(2n\pi t)dt,$$ y

$${}_xW_{\infty}^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_x^{\infty}(t-x)^{\nu-1}f(t)dt \qquad \text{(Integral de Weyl)}$$

para ν complejo con $\mathrm{Re}\nu>0$.

Otra de las ideas es que la integral de Riemann-Liouville es una función holomorfa de orden ν. Sobre esta base, M. Riesz y seguidores, entre 1933 y 1949, desarrollaron el método llamado "continuación analítica de la integral de Riemann-Liouville".

Este proceso, en la teoría de la diferenciación fraccional, se aplica también a funciones de varias variables, sobre todo en espacios euclidianos y espacios métricos de dimensión grande y se usa en Física Nuclear (Potenciales de Riesz).

Erdelyi y Kober, entre 1940 y 1941, investigaron sobre la generalización de las integrales de Riemann-Liouville y Weyl, quedando este tópico prácticamente adormecido hasta 1960, aproximadamente, cuando Miklos Mikolas estudió el caso de derivadas e integrales fraccionales de orden complejo para funciones Lebesgue-integrales, basándose para ello en el concepto de Weyl.

Resultados de Mittag-Leffler y M. Riesz en el campo de teoría de funciones, permitieron entre otras cosas, una completa caracterización del dominio de existencia de la derivada fraccional; esto íntimamente relacionado con la teoría de funciones Zeta de Hurwitz.

Otra manera de definir derivadas fraccionales de orden arbitrario, después de algunos intentos (Grünwald en 1867, E. Post en 1930 y publicaciones de los últimos 30 años), consiste en una representación directa de ${}_{x_o}D_x^{\nu} f(x)$ como límite:

$${}_{x_o}D_x^{\nu} f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{x-x_o}{n}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\nu}{k} \quad f\left(x-k\frac{x-x_o}{n}\right)$$

conocida como íntegro-derivada, pues es una generalización común de derivadas e integrales iteradas en el caso de valores enteros de ν.

D) *INTEGRALES FRACCIONALES DE FUNCIONES GENERALIZADAS*

En forma independiente y paralela, el concepto de función es extendido, creándose el concepto de función generalizada.

Sobolev en 1936, estudiando la unidad de soluciones del problema de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas, fué el primero en usar explícitamente funciones generalizadas (Distribuciones).

En los años 1950-1951 aparece la monografía "Teoría de Distribuciones" de Laurent Schwartz, en la que sistematiza la teoría de funciones generalizadas, basándose en la teoría de espacios lineales topológicos. Esto ayuda a definir y utilizar las "derivadas" de funciones localmente discontinuas al extenderse la noción y el concepto de función.

Las integrales fraccionales de Riemann-Liouville para distribuciones pueden ser obtenidas de la teoría de convolución de distribuciones con soporte acotado por la izquierda. Es más difícil definir integrales de Weyl para distribuciones; además, la multiplicación por potencias de la variable, no es factible en el marco de trabajo de la teoría de distribuciones y aparecen frecuentemente en aplicaciones.

Una forma de resolver este problema es considerar que el operador de la integral Riemann-Liouville es adjunto del operador de la integral de Weyl y viceversa. Construir un espacio de funciones prueba en el que uno de estos operadores es continuo, permite definir el otro para una clase correspondiente de funciones generalizadas. Además, tales espacios pueden ser construidos de manera que la multiplicación por una potencia de la variable y la integración respecto a una potencia de la misma, sean permitidas.

Ampliando un poco:

a) *Desde el punto de vista de convoluciones (Gelfand-Shilov).*

La integral de Riemann-Liouville $I^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}f(y)dy$ con $x>0$, $\alpha>0$ y f localmente integrable, puede ser considerada como la convolución de f con la función p_α definida mediante

$$p_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

Se puede extender la función $p_\alpha(x)$ para cualquier valor complejo de α y se torna una distribución con soporte en $[0,\infty)$, excepto en los casos $\alpha= 0,-1,-2,\ldots$ en que $p_{-n}(x)= \delta(x)$[delta de Dirac] con soporte $\{0\}$.

Ahora existe una teoría de convoluciones para distribuciones con soporte acotado por la izquierda,por lo que $I^{\alpha}f= p_\alpha * f$ puede emplearse para definir la integral de Riemann-Liouville de orden arbitrario (real o complejo) para todas las distribuciones con soporte en $[0,\infty)$.

La teoría resultante tiene sus limitaciones:

1) Por una parte, la integral de Weyl

$$K^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(y-x)^{\alpha-1}f(y)dy$$ con $\alpha>0$, f localmente integrable en $[0,\infty)$, puede escribirse como la convolución $K^{\alpha}f(x)= p_\alpha(-x)*f(x)$, pero el soporte de $p_\alpha(-x)$ está en $(-\infty,0]$ y es difícil encontrar una clase satisfactoria de distribuciones para las que la convolución anterior tenga significado útil.

2) Por otro lado, en algunas aplicaciones se tropieza con

las integrales fraccionales de $x^{\mu}f(x)$ y $f(x^m)$ respecto a x, ó integrales fraccionales de f(x) respecto a una potencia de la variable.

Como la multiplicación por x^{μ}(excepto $\mu= 0,1,2,\ldots$) y el cambio de variable $x \to x^m$ no son permitidos en espacios de distribuciones, podemos concluir que la teoría de integración fraccionaria, para cubrir estos obstáculos, no puede ser extendida en términos de convolución de distribuciones.

b) *Desde el punto de vista de Transformadas de Mellin (Rooney 1972).*

Esta posibilidad se basa en la conexión de integrales fraccionales con Transformadas de Mellin:

$$f^{\wedge}[s]= \int_0^{\infty} x^{s-1}f(x)dx;$$ entonces, bajo condiciones apropiadas,

$$(I^{\alpha}f)^{\wedge}[s]= \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\,\hat{f}(s+\alpha) \quad \text{y} \quad (K^{\alpha}f)^{\wedge}[s]=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\alpha+s)}\,\hat{f}(s+\alpha).$$

Como las Transformadas de Mellin han sido extendidas a funciones generalizadas, esto puede usarse para definir integrales fraccionales de funciones generalizadas.

c) *Desde el punto de vista de operadores adjuntos.*

Esta manera de acceso a la definición de integrales fraccionales de funciones generalizadas está basada en la fórmula para integración fraccional por partes elaborada por Love y Young en 1938.

Bajo condiciones apropiadas y el teorema de Fubini,

$$\int_0^\infty I^\alpha f(x)g(x)\,dx=\int_0^\infty\left[\int_0^x p_\alpha(x-y)f(y)\,dy\right]g(x)\,dx=$$

$$\int_0^\infty\left[\int_y^\infty p_\alpha(x-y)g(x)\,dx\right]f(y)\,dy=\int_0^\infty f(x)K^\alpha g(x)\,dx,\quad \text{de donde}$$

I^α y K^α son operadores adjuntos y podemos escribir $(I^\alpha f,g)=(f,K^\alpha g)$.

Ahora bien, al encontrar un espacio de funciones prueba que sea mapeado continuamente en otro bajo alguno de estos operadores, entonces el operador adjunto mapea los espacios duales que son espacios de funciones generalizadas.

Este método tiene una clara ventaja sobre el anterior dado que $I^\alpha f$ se puede definir sin restricciones de crecimiento al infinito y $K^\alpha f$ sin restricciones en cero, mientras que las Transformadas de Mellin requieren restricciones en ambas partes.

Kober, en 1940, en el artículo "Sobre integrales y derivadas fraccionales" extiende los operadores I^α y K^α de tal forma que

$$I^{\eta,\alpha}_{x^m}f(x)=mx^{-m\eta-m\alpha}\int_0^x p_\alpha(x^m-y^m)\,y^{m\eta+m-1}f(y)\,dy \qquad \text{y}$$

$$K^{\nu,\alpha}_{x^m}f(x)=mx^{m\nu}\int_x^\infty p_\alpha(y^m-x^m)\,y^{-m\nu-m\alpha+m-1}\,f(y)\,dy,$$

los cuales son operadores adjuntos si $\nu=\eta+1-\frac{1}{m}$; además demostró, entre otras propiedades, la relación $I_x^{\eta,\alpha}\, x^{\beta} f = x^{\beta} I_x^{\beta+\eta,\alpha} f$. De lo anterior podemos decir que Kober integró respecto a una potencia de la variable e integró el producto de una potencia de la variable por una función.

Actualmente se estudian estas extensiones donde se integra con respecto a x^m en lugar de x. Estas extensiones sobre las cuales gira el presente trabajo son los operadores

$$I_{x^m}^{\eta,\alpha}\, \phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} x^{-m\eta-m\alpha} \int_0^x (x^m-u^m)^{\alpha-1} u^{m\eta+m-1} \phi(u)\,du$$

$$K_{x^m}^{\eta,\alpha}\, \phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} x^{m\eta} \int_x^{\infty} (u^m-x^m)^{\alpha-1} u^{-m\eta-m\alpha+m-1} \phi(u)\,du,$$

llamados operadores de Erdelyi-Kober, y los operadores

$$I_{x^m}^{\alpha}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^m-u^m)^{\alpha-1}\, u^{m-1} \phi(u)\,du$$

$$K_{x^m}^{\alpha}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (u^m-x^m)^{\alpha-1}\, u^{m-1} \phi(u)\,du$$ que en el caso

$m=1$ son respectivamente las integrales de Riemann-Liouville y Weyl de orden α de la función ϕ.

CAPITULO PRIMERO

ESPACIOS MULTINORMADOS Y OPERADORES ADJUNTOS

A) *ESPACIOS MULTINORMADOS*

DEF. 1.01.- Sea V un espacio lineal. Una *seminorma* γ sobre V, es una función que a cada $\phi \in V$ le asigna el real $\gamma(\phi) \geq 0$ y satisface

$\gamma(\alpha\phi) = |\alpha|\ \gamma(\phi)$

$\gamma(\phi+\psi) \leq \gamma(\phi) + \gamma(\psi)$ para $\alpha \in \mathcal{C}; \phi, \psi \in V$ cualesquiera.

Sea $S=\{\gamma_\mu\}_{\mu\in A}$ una colección finita o infinita de seminormas sobre V; se dice que la colección es *separadora* si $\gamma_\mu(\phi)=0\ \forall \mu\in A \Rightarrow \phi=0$.

DEF. 1.02.- Una *multinorma* sobre V es una colección separadora de seminormas sobre V. Si además la colección es numerable, entonces es una *multinorma numerable*.

Topología generada por una colección de seminormas.

Sea $S=\{\gamma_\mu\}_{\mu\in A}$ una colección de seminormas sobre V. Dados cualquier subconjunto finito $\{\gamma_{\mu_k}\}_{k=1}^{n}$ de S y los positivos arbitrarios $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, definimos una *bola con centro en* $\psi \in V$ como el conjunto de los $\phi \in V$ tales que $\gamma_{\mu_k}(\phi-\psi) \leq \varepsilon_k,\ k=1,2,3,\ldots,n$ y llamamos una *vecindad de* ψ a cualquier conjunto que contiene una bola con centro en ψ.

DEF. 1.03.- Un *espacio multinormado* es un espacio lineal con una topología generada por una multinorma M. Si la multinorma es numerable entonces es un *espacio numerablemente multinormado* y abreviamos espacio NM.

DEF. 1.04.- La *sucesión* $\{\phi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es *convergente* en V si $\phi_\nu \in V$ para toda $\nu=1,2,\ldots$ y existe $\phi \in V$ tal que para toda vecindad Ω de ϕ, $\phi_\nu \in \Omega$ $\forall \nu \geq N$. Escribimos $\{\phi_\nu\} \to \phi$ en V cuando $\nu \to \infty$ y decimos que ϕ es el *límite de la sucesión* $\{\phi_\nu\}$.

LEMA 1.01.- Sea V un espacio multinormado con multinorma M. $\{\phi_\nu\}\to\phi$ en V si y sólo si para cada $\gamma\in M$, $\gamma(\phi-\phi_\nu)\to 0$ cuando $\nu\to\infty$. El límite es único.

Dem. i) $\{\phi_\nu\}\to\phi$ en V si para toda bola B con centro en ϕ y cualquier subconjunto finito $\{\gamma_{\mu_k}\}_{k=1}^{n}$, $\gamma_{\mu_k}(\phi_\nu-\phi)\leq\varepsilon_k$ $\forall$ $\nu\geq N_k$; entonces $\gamma(\phi_\nu-\phi)\leq \min\{\varepsilon_k\}$ $\forall$ $\nu\geq \max\{N_k\}$, y entonces $\gamma(\phi_\nu-\phi)\to 0$ cuando $\nu\to\infty$ $\forall\,\gamma\in M$.

ii) Si $\gamma(\phi_\nu-\phi)\to 0$ cuando $\nu\to\infty$ $\forall\,\gamma\in M$, como cada vecindad de ϕ contiene una bola con centro en ϕ, entonces ϕ_ν está en cada vecindad de ϕ a partir de alguna ε_k, de aquí $\{\phi_\nu\}\to\phi$ en V.

iii) Supongamos que ϕ y ψ son límites de $\{\phi_\nu\}$ cuando $\nu\to\infty$; luego $\gamma(\phi-\psi)=0$, y como la colección de seminormas M es separadora, $\phi=\psi$. ///

DEF. 1.05.- Una *sucesión de Cauchy* en un espacio multinormado V, es una sucesión $\{\phi_\nu\}$ de elementos de V tales que para cualquier $\gamma\in M$, $\gamma(\phi_\nu-\phi_\mu)\to 0$ cuando $\nu\to\infty$ y $\mu\to\infty$ independientemente.

DEF. 1.06.- En un espacio V con topologías T_1 generada por una multinorma $\mathcal{R}=\{\rho_\mu\}_{\mu\in A}$ y T_2 generada por la multinorma $M=\{\gamma_\mu\}_{\mu\in B}$, decimos que la topología T_1 es *más débil* que la topología T_2 si toda T_1-vecindad es también T_2-vecindad y denotamos $T_1\subset T_2$.

LEMA 1.02.- Una condición necesaria y suficiente para que la topología T_1 sea más débil que la topología T_2 es que para cada $\rho\in\mathcal{R}$ exista un conjunto finito de seminormas $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ de M tales que para toda $\phi\in V$ $\rho(\phi)\leq c\,\max\{\gamma_1(\phi),\gamma_2(\phi),\ldots,\gamma_n(\phi)\}$, donde c y n dependen de ρ.

i) Suficiencia: En la topología T_1 sea la bola con centro en el origen $A=\{\phi \mid \rho_k(\phi) \le \varepsilon_k,\ k=1,2,\ldots m\}$, donde $\rho_k \in \mathcal{R}$ son arbitrarios; para cada ρ_k escogemos $\gamma_{1,k}, \gamma_{2,k}, \ldots, \gamma_{n,k} \in M$ tales que

$$\rho_k(\phi) \le c_k \text{ máx } \{\gamma_{1,k}(\phi), \gamma_{2,k}(\phi), \ldots, \gamma_{n,k}(\phi)\}.$$

Sea $B_k = \{\phi \mid \gamma_{j,k}(\phi) \le \varepsilon_k/c_k \quad j=1,2,\ldots,n\}$, entonces B_k es una T_2-bola con centro en el origen y contenida en A, y por lo tanto $T_1 \subset T_2$.

ii) Necesidad: Para la seminorma arbitraria $\rho \in \mathcal{R}$ consideramos la T_1-bola $A=\{\psi \mid \rho(\psi) \le 1\}$. Como $T_1 \subset T_2$, entonces existen un número finito de seminormas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in M$ y $\varepsilon > 0$ tales que la bola

$$B=\{\theta \mid \gamma_1(\theta) < \varepsilon, \gamma_2(\theta) < \varepsilon, \ldots, \gamma_n(\theta) < \varepsilon\}$$ es de T_1 y $B \subset A$.

Sea $\phi \in V$ tal que máx $\{\gamma_1(\phi), \gamma_2(\phi), \ldots, \gamma_n(\phi)\} \ne 0$ y construimos

$$\theta' = \frac{\varepsilon\phi}{\text{máx}\{\gamma_1(\phi),\ldots,\gamma_n(\phi)\}};$$ entonces $\theta' \in B \subset A$, de donde $\rho(\theta') \le 1$.

Así,
$$\rho\left(\frac{\varepsilon\phi}{\text{máx}\{\gamma_1(\phi),\ldots,\gamma_n(\phi)\}}\right) \le 1,$$

$$\varepsilon\rho(\phi) \le \text{máx}\{\gamma_1(\phi),\ldots,\gamma_n(\phi)\},$$

$$\rho(\phi) \le \varepsilon^{-1}\text{máx}\{\gamma_1(\phi),\ldots,\gamma_n(\phi)\}$$ y hacemos $C=\varepsilon^{-1}$.

En caso de que $\text{máx}\{\gamma_1(\phi),\ldots,\gamma_n(\phi)\}=0$, entonces para $a>0$ arbitraria y toda k,

$\gamma_k(a\phi) = a\gamma_k(\phi) = 0$. Luego $a\phi \in B \subset A$, $\rho(a\phi) \le 1$, $\rho(\phi) \le \frac{1}{a}$, y entonces $\rho(\phi)=0$ y se cumple la igualdad. ///

B) *DUALES DE ESPACIOS NM*

DEF. 1.07.- Sea V un espacio NM. Una *funcional* f sobre V es una función que a cada $\phi \in V$ le asigna un único complejo (f,ϕ). La funcional f es *lineal* si $(f, \alpha\phi + \beta\psi) = \alpha(f,\phi) + \beta(f,\psi)$ $\forall\, \phi,\psi \in V$ y α,β complejos.

DEF. 1.08.- La *funcional* f es *continua* en $\phi \in V$ si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe una vecindad Ω de ϕ, en V, tal que $|(f,\psi)-(f,\phi)| < \varepsilon$ siempre que $\psi \in \Omega$.

LEMA 1.03.- Sea V un espacio NM. Una condición necesaria y suficiente para que una funcional f sobre V sea continua en ϕ es que para toda $\phi \in V$ y toda sucesión $\{\phi_\nu\}$ que converja en V a ϕ suceda $\lim_{\nu\to\infty} (f, \phi_\nu) = (f, \phi)$.

i) Necesidad: Es inmediata de las definiciones de convergencia y continuidad.

ii) Suficiencia: Sea la colección $B_1, B_2, \ldots$ de bolas con centro en ϕ tales que toda vecindad de ϕ contiene al menos una de las B_k. Sea la colección $C_1 = B_1$, $C_2 = B_1 \cap B_2, \ldots, C_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k, \ldots$; obviamente $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ y toda vecindad de ϕ contiene al menos una C_j y las siguientes.

Supongamos que f no es continua en alguna $\phi \in V$, esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que no existe vecindad alguna Ω de ϕ con la propiedad $|(f,\psi)-(f,\phi)| < \varepsilon$ $\forall\ \psi \in \Omega$, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada C_j Con centro en ϕ, existe al menos una $\phi_j \in C_j$ con $|(f, \phi_j)-(f, \phi)| \geq \varepsilon$, o sea $\lim_{j\to\infty} (f, \phi_j) \neq (f, \phi)$.

Por otro lado, como $\phi_j \in C_j$ entonces $\phi_j \to \phi$ cuando $j \to \infty$; por lo tanto f debe ser continua por reducción al absurdo. ///

LEMA 1.04.- Sea V un espacio NM. Una condición necesaria y suficiente para que una funcional lineal f sobre V sea continua, es que para toda sucesión $\{\phi_\nu\}$ que converge a cero en V, suceda $\lim_{\nu\to\infty} (f, \phi_\nu) = 0$.

i) La necesidad es inmediata.

ii) Sea $\psi \in V$ y $\{\psi_\nu\} \to \psi$ en V arbitrarias.

Sea $\phi_\nu = \psi_\nu - \psi$ entonces $\phi_\nu \to 0$ en V cuando $\nu \to \infty$, luego $|(f, \psi_\nu) - (f, \psi)| = |(f, \psi_\nu - \psi)| = |(f, \phi_\nu)| \to 0$ cuando $\nu \to \infty$; por el lema anterior, f es continua en $\psi \in V$ arbitraria. ///

DEF. 1.09.- Sea V un espacio NM. El espacio lineal de todas las funcionales lineales continuas sobre V es llamado *dual* de V y lo denotamos V'.

Asignamos al espacio V' la topología generada por la multinorma $\{\xi_\phi\}_{\phi\in V}$ donde para cada $\phi\in V$ tenemos una seminorma ξ_ϕ sobre V' definida por $\xi_\phi(f) = |(f,\phi)|$.

Una bola con centro $g\in V'$ es cualquier conjunto de la forma $\{f \mid f\in V';\quad |(f-g,\phi_k)| \leq \varepsilon_k \ ,\ k=1,2,\ldots n\}$ donde n es entero positivo arbitrario, los ϕ_k son elementos arbitrarios en V y los ε_k son positivos arbitrarios.

Una *vecindad* de g en V' es cualquier conjunto que contenga una bola con centro en g. La colección de todas las vecindades en V' es llamada la *topología débil* de V'. Así, V' es un espacio multinormado, no necesariamente NM.

Una sucesión $\{f_\nu\}$ en V' es *convergente* si y sólo si existe $f\in V'$ tal que para cada $\phi\in V$, $(f_\nu - f, \phi) \to 0$ cuando $\nu\to\infty$.

$\{f_\nu\}$ es *sucesión de Cauchy* en V' si y sólo si para cada $\phi\in V$, $(f_\nu - f_\mu, \phi) \to 0$ cuando $\nu\to\infty$ y $\mu\to\infty$ independientemente.

TEOREMA 1.01.- Si V es un espacio NM completo, entonces V' es también completo.

Dem: Sea $\{f_\nu\}$ una sucesión de Cauchy en V' ; por la completez del plano complejo, para cada $\phi \in V$ existe un único complejo (f,ϕ) tal que $\lim_{\nu\to\infty}(f_\nu,\phi) = (f,\phi)$. La funcional f, así definida, es lineal y vamos a demostrar que es continua en el origen. Lo haremos por contradicción.

Supongamos que existe una sucesión $\{\phi_s\}$ en V que converge a cero en V, tal que la sucesión correspondiente $\{(f,\phi_s)\}$ de complejos, no converge.

Escogemos una subsucesión $\{\phi_\nu\}$ de $\{\phi_s\}$ tal que

$|(f,\phi_\nu)| \geq c > 0$ para $\nu = 1,2,\ldots$ y c fijo y

$\gamma_k(\phi_\nu) \leq 4^{-\nu}$ para $k=1,2,\ldots,\nu$, donde $\gamma_k \in M$ es la multinorma sobre V.

Sea $\psi_\nu = 2^\nu \phi_\nu$; entonces,

$\gamma_k(\psi_\nu - 0) = \gamma_k(\psi_\nu) = \gamma_k(2^\nu\phi_\nu) = 2^\nu\gamma_k(\phi_\nu) \leq 2^\nu 4^{-\nu} = 2^{-\nu} \to 0$ cuando $\nu \to \infty$;

de acuerdo con el lema 1.01, $\{\psi_\nu\} \to 0$ en V y la sucesión

$\{|(f,\psi_\nu)|\} = \{|(f,2^\nu\phi_\nu)|\} = \{2^\nu|(f,\phi_\nu)|\}$ diverge cuando $\nu \to \infty$.

Ahora escogemos una subsucesión $\{\psi_\nu'\}$ de $\{\psi_\nu\}$ y una subsucesión $\{f_\nu'\}$ de $\{f_\nu\}$, como sigue:

Escogemos ψ_1' tal que $|(f,\psi_1')| > 1$; como $\forall\ \psi \in V$ $(f_\nu,\psi) \to (f,\psi)$,

f_1' puede también escogerse de manera que $|(f_1', \psi_1')| > 1$, entonces suponiendo que los primeros $\nu-1$ términos han sido escogidos, seleccionamos ψ_ν' tal que

(a) $\quad |(f_j', \psi_\nu')| < 2^{j-\nu} \quad j=1,2,\ldots,\nu-1$ (esto porque para cada f_j' fija, $(f_j', \psi_\nu') \to 0$) y $|(f, \psi_\nu')| > \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |(f, \psi_\mu')| + \nu$ (porque para cada f, $(f, \psi_\nu') \to \infty$).

Para cada $\phi \in V$, $\quad (f_\nu, \phi) \to (f, \phi)$.

Ahora f_ν' puede ser escogido como un elemento de $\{f_\nu\}$ tal que

(b) $\quad |(f_\nu', \psi_\nu')| > \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |(f_\nu', \psi_\mu')| + \nu \quad$ y considerando la serie

$\psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu'$ con $m > n > k$, tenemos

$$\gamma_k\Big(\sum_{\nu=n}^{m} \psi_\nu'\Big) \le \sum_{\nu=n}^{m} \gamma_k(\psi_\nu') \le \sum_{\nu=n}^{\infty} \gamma_k(\psi_\nu') \le \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{-\nu} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

lo que prueba que las sumas parciales $\psi_m = \sum_{\nu=1}^{m} \psi_\nu'$ forman una sucesión de Cauchy en V. Por la completez de V, $\psi \in V$.

Finalmente,

(c) $$(f_\nu', \psi) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (f_\nu', \psi_\mu') + (f_\nu', \psi_\nu') + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} (f_\nu', \psi_\mu') \quad \text{y}$$

(d) $$\Big|\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} (f_\nu', \psi_\mu')\Big| < \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} 2^{\nu-\mu} = 1 \qquad \text{por (a).}$$

Usando la propiedad $|\alpha+\beta+\eta| \ge |\alpha| - |\beta| - |\eta|$ para complejos en la igualdad (c),

$$|(f_\nu', \psi)| \ge -\Big|\sum_{\mu=1}^{\nu-1} (f_\nu', \psi_\mu')\Big| + |(f_\nu', \psi_\nu')| - \Big|\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} (f_\nu', \psi_\mu')\Big|,$$

$$|(f_\nu', \psi)| > -\Big|\sum_{\mu=1}^{\nu-1} (f_\nu', \psi_\mu')\Big| + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |(f_\nu', \psi_\mu')| + \nu - \Big|\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} (f_\nu', \psi_\mu')\Big| \text{ por (b),}$$

$$|(f_\nu', \psi)| > -\sum_{\mu=1}^{\nu-1} |(f_\nu', \psi_\mu')| + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |(f_\nu', \psi_\mu')| + \nu - \Big|\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} (f_\nu', \psi_\mu')\Big|,$$

$|(f_\nu', \psi)| > \nu-1$ por (d), y esto prueba que $|(f_\nu', \psi)| \to \infty$ cuando $\nu \to \infty$, lo que contradice que $\{f_\nu\}$ sea una sucesión de Cauchy en V.

Entonces f es una funcional lineal continua en cero y por ende continua dondequiera. Por consiguiente V' es completo.

C) *OPERADORES ADJUNTOS*

DEF. 1.10.- Sean U y V espacios multinormados. Un *operador* T de U en V, es un mapeo que asigna un elemento $T(\phi) \in V$ al elemento $\phi \in U$.

Decimos que T es *continuo* en $\phi \in U$ si para toda vecindad $\Lambda \subset V$ de $T(\phi)$, existe una vecindad $\Omega \subset U$ de ϕ tal que $T(\Psi) \in \Lambda$ siempre que $\Psi \in \Omega$. Un operador lineal es continuo cuando es continuo en el origen.

DEF. 1.11.- Sea T un mapeo lineal continuo de U en V; definimos T' como el *operador adjunto* de T de manera que $T' : V' \to U'$ con $(T'f, \phi) = (f, T\phi)$.

LEMA 1.05.- Sean U y V espacios con multinormas $\mathcal{R} = \{\rho_\mu\}_{\mu \in A}$ y $M = \{\gamma_\mu\}_{\mu \in B}$ respectivamente. Sea T un mapeo lineal de U en V. Una condición necesaria y suficiente para que T sea continuo es que para toda $\rho \in \mathcal{R}$ corresponda un número finito de seminormas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in M$ y $C > 0$ tales que $\forall \cdot \phi \in U$
$\rho(T\phi) \leq C \text{ máx } \{ \gamma_1(\phi), \ldots, \gamma_n(\phi) \}$.

Dem.- Se hace de manera similar a la demostración del lema 1.03.///

DEF. 1.12.- Sea I un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Un conjunto V(I) se dice que es *espacio de funciones prueba* sobre I si:

1) V(I) está formado por funciones suaves definidas sobre I con valores en los complejos.

2) V(I) es un espacio NM completo.

3) Si $\{\phi_\nu\} \to 0$ en V(I) entonces todas sus derivadas de todos los órdenes convergen uniformemente a la función cero sobre cualquier subconjunto compacto de I.

DEF. 1.13.- Una *función generalizada* sobre I es cualquier funcional lineal continua sobre cualquier espacio de funciones prueba definido sobre I. Es decir f es función generalizada si está en el espacio V'(I). (Dual de algún espacio de funciones prueba V(I)). Se dice que la función generalizada f es *regular* si $\int_I f(t)\,\phi_\nu(t)\,dt \to 0$ en el sentido de Lebesgue para toda sucesión $\{\phi_\nu\}$ que converja a cero en V(I).

TEOREMA 1.02.- Si U y V son espacios NM y T es un mapeo lineal continuo de U en V, entonces el operador adjunto T' es un mapeo lineal continuo de V' en U'.

i) Sean $\phi, \psi \in U$; α, β complejos; $g, f \in V'$

$$\begin{aligned}(T'f, \alpha\phi+\beta\psi) &= (f, T(\alpha\phi+\beta\psi)) = (f, \alpha T(\phi)+\beta T(\psi)) = \\ &= (f, \alpha T(\phi)) + (f, \beta T(\psi)) = \alpha(f, T(\phi)) + \beta(f, T(\psi)) = \\ &= \alpha(T'f, \phi) + \beta(T'f, \psi),\end{aligned}$$

lo que muestra que T'f es una funcional lineal sobre U.

Sea $\{\phi_\nu\} \to 0$ en U cuando $\nu \to \infty$;

$$(T'f, \phi_\nu) = (f, T\phi_\nu) \to (f, T0) = (T'f, 0)$$

implica que T'f es una funcional lineal continua en el origen, por lo que es continua dondequiera y T'mapea V'en U'.

ii) $$(T'(\alpha f+\beta g), \phi) = (\alpha f+\beta g, T\phi) = (\alpha f, T\phi)+(\beta g, T\phi) =$$
$$= \alpha(f, T\phi) + \beta(g, T\phi) = \alpha(T'f, \phi) + \beta(T'g, \phi) =$$
$$= (\alpha T'f, \phi) + (\beta T'g, \phi) = (\alpha T'f + \beta T'g, \phi),$$

por lo que T' es lineal.

iii) Para $\phi \in$ U fija, en $|(T'f, \phi)| = |(f, T\phi)|$, la magnitud de la izquierda es el valor de una seminorma en U'y la de la derecha es el valor de una seminorma en V'; entonces, por el lema 1.05, T' es continuo. ///

TEOREMA 1.03.- Si U y V son espacios NM y T es un isomorfismo de U sobre V, entonces T' es un isomorfismo de V'sobre U'y $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Dem.- T es un mapeo 1-1, lineal y continuo de U sobre V y su inversa T^{-1} es un mapeo lineal de V sobre U. El teorema anterior afirma que T'es un mapeo lineal continuo de V'en U'y $(T^{-1})'$ es un mapeo lineal continuo de U'en V'.

Sea $\Psi = T\phi \in$ V. Para cada $f \in V'$, $(T^{-1})'$ T'f= f porque

$$(f, \Psi) = (f, TT^{-1} \Psi) = (T'f , T^{-1}\Psi) = ((T^{-1})' T'f, \Psi)$$
$$(f, \Psi) = (f, T^{-1} T \Psi) = ((T^{-1})'f, T\Psi) = (T'(T^{-1})'f, \Psi)$$

entonces $(T^{-1})' = (T')^{-1}$ y T'es un mapeo 1-1 de V'sobre U' . ///

CAPITULO SEGUNDO

LOS OPERADORES $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$, $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$, $I_{x^m}^{\alpha}$, $K_{x^m}^{\alpha}$

A) *LOS ESPACIOS* $F_{p,\mu}$ Y $F'_{p,\mu}$

Sea C^∞ el conjunto de funciones infinitamente diferenciables sobre $(0,\infty)$ y sea Lp el espacio de funciones p-integrales sobre $(0,\infty)$, de manera que

$$\|\phi\|_p = \left[\int_0^\infty |\phi(x)|^p dx\right]^{1/p} < \infty \quad si \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{con} \quad \phi \in L_p,$$

$$\|\phi\|_\infty = \underset{x\in(0,\infty)}{\text{ess sup}}\, \phi(x) < \infty \quad \text{si} \quad p = \infty \quad \text{con} \quad \phi \in L_\infty .$$

Lp con las operaciones usuales de **adición** y producto por escalar, es un espacio lineal completo.

DEF. 2.01.- Sea $1 \leq p \leq \infty$, para cada p definimos

$$\text{Fp} = \left\{\phi \in C^\infty \Big/ x^k \frac{d^k \phi}{dx^k} \in L_p \quad ; k = 0,1,2,\dots\right\}$$

LEMA 2.01.- Para toda p, $1 \leq p \leq \infty$, Fp con las operaciones usuales de adición y producto por escalar es un espacio lineal.

Fp $\subset C^\infty$ (espacio lineal)

Dem. Sean ϕ, ψ, $\in$ Fp ; α, β complejos

i) Para $1 \leq p \leq \infty$:

$$x^k \frac{d^k}{dx^k}(\phi + \psi)(x) = x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x) + x^k \frac{d^k}{dx^k}\psi(x) \in L_p \Rightarrow \phi + \psi \in \text{Fp}$$

Fp contiene a la función $\mathbf{0}$

i) Para $\phi \in$ Fp; $x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x) \in Lp$ y para $-\phi$, $x^k \frac{d^k}{dx^k}(-\phi)(x) =$

$$= (-1)^k x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x) \in Lp \Rightarrow -\phi \in Fp$$

$$x^k \frac{d^k}{dx^k}(\alpha\phi)(x) = \alpha x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x) \in Lp \Rightarrow \alpha\phi \in Fp.$$

Las demás propiedades son consecuencia de $Fp \subset C^\infty$.

ii) Sea $\phi \in Fp$; $1 \leq p < \infty$, definimos para k=0,1,2,... $\gamma_k^p(\phi) = \left[\int_0^\infty \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi\right|^p dx\right]^{1/p}$

y si p= ∞ definimos $\gamma_k^\infty(\phi) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0,\infty)} \phi(x)$.

LEMA 2.02.- Para $1 \leq p \leq \infty$ la colección Mp= $\{\gamma_k^p / k=0,1,2...\}$ es una multinorma numerable sobre Fp.

Dem. i) Sea $1 \leq p < \infty$; k=0,1,2,..., $\phi, \psi \in$ Fp, α complejo

$$\gamma_k^p(\alpha\phi) = \left[\int_0^\infty \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}(\alpha\phi)\right|^p dx\right]^{1/p} = \left[\int_0^\infty \left|\alpha x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi\right|^p dx\right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int_0^\infty |\alpha|^p \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi\right|^p dx\right]^{1/p} = |\alpha| \left[\int_0^\infty \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi\right|^p dx\right]^{1/p} = |\alpha| \gamma_k^p(\phi)$$

$\Rightarrow \gamma_k^p(\alpha\phi) = |\alpha| \gamma_k^p(\phi)$; usando la desigualdad de Minkowsky para integrales:

$$\gamma_k^p(\phi+\psi) = \left[\int_0^\infty \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}(\phi+\psi)\right|^p dx\right]^{1/p} = \left[\int_0^\infty \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi + x^k \frac{d^k}{dx^k}\psi\right|^p dx\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\int_0^\infty \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi\right|^p dx\right]^{1/p} + \left[\int_0^\infty \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\psi\right|^p dx\right]^{1/p} = \gamma_k^p(\phi) + \gamma_k^p(\psi)$$

$\Rightarrow \gamma_k^p(\phi+\psi) \leq \gamma_k^p(\phi) + \gamma_k^p(\psi)$. De acuerdo con la definición 1.01, Mp es una colección numerable de seminormas. Como $\gamma_0^p(\phi) = \left[\int_0^\infty |\phi(x)|^p dx\right]^{1/p}$, γ_0^p es una norma y la colección Mp, al contenerla, es separadora.

ii) Sea P= ∞. Para cada k=0,1,2,..., sea $Z \subset (0,\infty)$ con $\mu(Z)=0$:

$$\gamma_k^\infty(\alpha\phi) = \operatorname{ess\,sup}_{x\in(0,\infty)}(\alpha\phi) = \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup_{x\in Z^c}|\alpha\phi(x)|\right\} = \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup_{x\in Z^c}|\alpha|\,|\phi(x)|\right\} =$$

$$= \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{|\alpha| \sup_{x\in Z^c}|\phi(x)|\right\} = |\alpha| \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup_{x\in Z^c}|\phi(x)|\right\} = |\alpha|\,\gamma_k^\infty(\phi)$$

$$\gamma_k^\infty(\phi+\psi) = \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup_{x\in Z^c}|\phi(x)+\psi(x)|\right\} \leq \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup_{x\in Z^c}\left[|\phi(x)|+|\psi(x)|\right]\right\} =$$

$$= \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup_{x\in Z^c}|\phi(x)| + \sup_{x\in Z^c}|\psi(x)|\right\} = \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup_{x\in Z^c}|\phi(x)|\right\} + \inf_{Z\subset(0,\infty)}\left\{\sup|\psi(x)|\right\} =$$

$$= \gamma_k^\infty(\phi) + \gamma_k^\infty(\psi)$$

de donde γ_k^∞ para k=0,1,2,...es una colección numerable de seminormas sobre F_∞ .

Sea $\phi = 0$

$\gamma_k^{\infty}(\phi) = \inf_{z \in (0,\infty)} \{ \sup_{x \in z^c} |\phi(x)| \} \neq 0$ para cualquier k,

de donde la colección es separadora.

De acuerdo con la definición 1.02, Mp es una multinorma numerable sobre Fp para $1 \leq p \leq \infty$.

TEOREMA 2.01.- Fp es un espacio de Fréchet para $1 \leq p \leq \infty$.

TEOREMA 2.02.- F_p' para $1 \leq p \leq \infty$ es completo.

Esto se deduce del teorema anterior y el teorema 1.01. ///

Para considerar operaciones como producto y diferenciación respecto a potencias arbitrarias de la variable, se requiere generalizar los espacios Fp Y F_p'.

DEF. 2.02.- Sea $1 \leq p \leq \infty$, para cada μ compleja definimos

$F_{p,\mu} = \{ \phi \mid x^{-\mu}\phi(x) \in F_p \}$.

LEMA 2.02.- Para cada p, $1 \leq p \leq \infty$, $F_{p,\mu}$ es un espacio NM.

Dem.- Para cada $\phi \in F_{p,\mu}$ definimos $\gamma_k^{p,\mu}(\phi) = \gamma_k^{p}(x^{-\mu}\phi)$.

Sean $\phi, \psi \in F_{p,\mu}$ y α compleja; entonces para cada k=0,1,2,...

i) $\gamma_k^{p,\mu}(\alpha\phi) = \gamma_k^{p}(x^{-\mu}\alpha\phi) = |\alpha| \; \gamma_k^{p}(x^{-\mu}\phi) = |\alpha| \; \gamma_k^{p,\mu}(\phi)$

ii) $\gamma_k^{p,\mu}(\phi+\psi)=\gamma_k^p(x^{-\mu}[\phi+\psi])=\gamma_k^p(x^{-\mu}\phi+x^{-\mu}\psi)\leq\gamma_k^p(x^{-\mu}\phi)+\gamma_k^p(x^{-\mu}\psi)$

$$=\gamma_k^{p,\mu}(\phi)+\gamma_k^{p,\mu}(\psi)$$

Como γ_0^p es una norma en Fp:

iii) $0=\gamma_0^{p,\mu}(\phi)=\gamma_k^p(x^{-\mu}\phi) \Longrightarrow x^{-\mu}\phi=0\in Fp \Rightarrow \phi=0\in Fp_{,\mu}$, por lo que $\gamma_0^{p,\mu}$ es una norma sobre $Fp_{,\mu}$ y la colección $Mp_{,\mu}=\{\gamma_k^{p,\mu} \mid k=0,1,2,\ldots\}$ es una multinorma numerable sobre Fp . De donde $Fp_{,\mu}$ es un espacio NM y le asignamos la topología generada por $M_{p,\mu}$. ///

LEMA 2.03.- El mapeo $T\phi = x^{\mu}\phi$ es un isomorfismo de Fp sobre $Fp_{,\mu}$, donde $x^{\mu}\equiv \exp[\mu \ln x]$ con ln x real.

Dem.- Sean $\phi,\psi\in Fp$, α,β complejos:

$T\phi = T\psi \Rightarrow x^{\mu}\phi = x^{\mu}\psi \Rightarrow \mu\ln x\phi = \mu\ln\psi \Rightarrow \phi=\psi$ (Tes 1-1)

$T(\alpha\phi+\beta\psi)= x^{\mu}(\alpha\phi+\beta\psi)= x^{\mu}\alpha\phi+x^{\mu}\beta\psi = \alpha x^{\mu}\phi+\beta x^{\mu}\psi =$
$=\alpha T(\phi)+\beta T(\psi)$;

como $x^{\mu}x^{-\mu}\phi= x^{-\mu}x^{\mu}\phi \Rightarrow T^{-1}(\phi) = x^{-\mu}$ y T es sobre.

Sea $\{\phi_\nu\}\to 0$ en Fp cuando $\nu\to\infty$; entonces para toda k=0,1,2,... por el lema 1.01, $\gamma_k^p(\phi_\nu)\longrightarrow 0$ cuando $\nu\to\infty$. Ahora para toda k=0,1,2,... $\gamma_k^{p,\mu}(T(\phi_\nu)) = \gamma_k^{p,\mu}(x^{\mu}\phi_\nu)= \gamma_k^p(x^{-\mu}x^{\mu}\phi_\nu)=$
$=\gamma_k^p(\phi_\nu)\longrightarrow 0$ cuando $\nu\to\infty$.

Entonces T es continua en el origen y por ser lineal, es continua en todo Fp. ///

Teorema 2.03.- Para $1\leq p\leq\infty$ y cada complejo μ, $Fp_{,\mu}$ es un espacio de Fréchet y $Fp'_{,\mu}$ es completo.

Dem. i) Fp y $Fp_{,\mu}$ son espacios NM y X^{μ} es un isomorfismo de Fp sobre $Fp_{,\mu}$; como Fp es completo, $Fp_{,\mu}$ también lo es, de donde $Fp_{,\mu}$ es espacio de Frêchet.

ii) Por el teorema 1.01, $Fp'_{,\mu}$ es completo. ///

Ahora definimos algunos operadores sobre $Fp_{,\mu}$.

DEF. 2.03.- Sean $m>0$ y λ cualquier complejo; definimos los operadores

$$(x^{\lambda}\phi)_{(x)} = x^{\lambda}\phi(x) \qquad (\delta'\phi)_{(x)} = \frac{d}{dx}(x\phi(x))$$

$$(\delta\phi)_{(x)} = x\frac{d\phi}{dx} \qquad (D_m\phi)_{(x)} = \frac{d}{dx^m}\phi(x)$$

TEOREMA 2.04- Sean $m>0$, μ y λ complejos y $1\leq p\leq\infty$; entonces

a) X^{λ} es unisomorfismo de $Fp_{,\mu}$ sobre $Fp_{,\mu+\lambda}$ con inversa $X^{-\lambda}$

b) δ, δ' son mapeos lineales continuos de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu}$

c) Dm es un mapeo lineal continuo de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu-m}$.

Dem. a) Por el lema anterior, $X^{\mu+\lambda}$ es isomorfismo de Fp sobre $F_{p,\mu+\lambda}$ y $X^{-\mu}$ es un isomorfismo de $Fp_{,\mu}$ sobre Fp, entonces la composición $X^{\mu+\lambda}X^{-\mu} = X^{\lambda}$ es un isomorfismo de $Fp_{,\mu}$ sobre $Fp_{,\mu+\lambda}$.
Además $X^{-\lambda}X^{\lambda}\phi = X^{-\lambda}\phi = \phi$.

b) Sean $\phi,\psi\in Fp_{,\mu}$ α,β complejos:

$$(\alpha\phi+\beta\psi) = x\frac{d}{dx}(\alpha\phi+\beta\psi)_{(x)} = x\left[\alpha\frac{d\phi}{dx}(x)+\beta\frac{d\psi}{dx}(x)\right]=$$

$$=\alpha x\frac{d\phi(x)}{dx}+\beta x\frac{d\psi}{dx}(x) =$$

$$= \alpha\delta\phi_{(x)}+\beta\delta\psi_{(x)}$$ y δ es lineal.

Sea $\{\phi_\nu\} \rightarrow 0$ en $Fp_{,\mu}$; entonces $\{\frac{d}{dx}\phi_\nu\} \rightarrow 0$ en $Fp_{,\mu-1}$ y

$(\delta\phi_\nu)_x = x\frac{d\phi_\nu}{dx}(x)$ es una composición de mapeos, y como X mapea continuamente $Fp_{,\mu-1}$ en $Fp_{,\mu}$ entonces $\{\delta\phi_\nu(x)\} \rightarrow 0$ cuando $\{\phi_\nu\} \rightarrow 0$, de donde δ es continuo.

Por otra parte $\delta' = \delta + I$, de donde δ' es suma de mapeos lineales continuos de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu}$.

c) $D_m\phi = \frac{d}{dx^m}\phi(x) = \frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{dx}{dx^m} = \frac{1}{m}x^{1-m}\frac{d\phi}{dx}(x) = \frac{1}{m}x^{-m}x\frac{d\phi}{dx}(x)$,

de donde $D_m = \frac{1}{m}x^{-m}\delta$, que es una composición de mapeos lineales continuos de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu-m}$. ///

Para definir los operadores correspondientes sobre $Fp'_{,\mu}$, usamos operadores adjuntos.

DEF. 2.04.- Sean $m>0$, μ,λ complejos y $1\leq p\leq\infty$. Para $f\in F'_{p,\mu}$,

$(x^\lambda f, \phi) = (f, x^\lambda\phi)$ para $\phi\in F_{p,\mu-\lambda}$

$(\delta f, \phi) = (f, -\delta'\phi)$; $\phi\in F_{p,\mu}$

$(\delta' f, \phi) = (f, -\delta\phi)$; $\phi\in F_{p,\mu}$

$(D_m f, \phi) = (f, -\frac{1}{m}D x^{-m+1}\phi)$; $\phi\in F_{p,\mu+m}$.

La motivación de esta definición es tomar $f\in Fp'_{,\mu}$ como funcional regular, $\phi\in\mathcal{D}$, e integrando por partes

$$(f, x^\lambda\phi) = \int_0^\infty f(x)x^\lambda\phi(x)\,dx = \int_0^\infty x^\lambda f(x)\phi(x) = (x^\lambda f, \phi)$$

$$(f, -\delta'\phi) = \int_0^\infty f(x)\left[-\frac{d}{dx}(x\phi(x))\right]dx = -\left[f(x)\,x\,\phi(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty x\phi(x)\frac{df}{dx}(x)\,dx\right] =$$

$$= \int_0^\infty x\frac{df}{dx}(x)\phi(x)\,dx = \int_0^\infty \delta f(x)\phi(x)\,dx = (\delta f, \phi)$$

$$(f, -\delta\phi) = \int_0^\infty f(x)\left[-x \frac{d\phi}{dx}(x)\right]dx = -\left[f(x)\,x\,\phi(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi(x)\left[x\frac{df}{dx}(x) + f(x)\right]dx\right]$$
$$= \int_0^\infty (\delta + I) f(x)\,\phi(x)\,dx = \int_0^\infty \delta' f(x)\,\phi(x)\,dx = (\delta' f, \phi)$$
$$(D_m f, \phi) = (\tfrac{1}{m} x^{-m}\delta f, \phi) = (\delta f, \tfrac{1}{m} x^{-m}\phi) = (f, -\delta'[\tfrac{1}{m} x^{-m}\phi]) =$$
$$= (f, -\tfrac{1}{m} \tfrac{d}{dx}(x\,x^{-m}\phi)) = (f, -\tfrac{1}{m} D\, x^{-m+1}\phi).$$

TEOREMA 2.05.- Sean $m>0$, μ y λ complejos y $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

a) X^{λ} es un isomorfismo de $F'_{p,\mu}$ sobre $F'_{p,\mu-\lambda}$ con inversa $X^{-\lambda}$

b) δ, δ' son mapeos lineales continuos de $F'_{p,\mu}$ en sí mismo

c) Dm es un mapeo lineal continuo de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,\mu+m}$

Dem. a) Es inmediato de los teoremas 2.04 y 1.03.

byc) Se deducen de los teoremas 2.04 y 1.02. ///

B) LOS OPERADORES $I^{\eta,\alpha}_{x^m}$ Y $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ SOBRE $F_{p,\mu}$

DEF. 2.05.- Sean $m>0$, $Re(\alpha)>0$, η complejo, $\phi \in F_{p,\mu}$. Definimos los operadores de Erdelyi-Kober como:

$$(1)\quad I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} x^{-m\eta-m\alpha}\int_0^x (x^m - u^m)^{\alpha-1} u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du$$

$$(2)\quad K^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} x^{m\eta}\int_x^\infty (u^m - x^m)^{\alpha-1} u^{-m\eta-m\alpha+m-1}\phi(u)\,du$$

Efectuando el cambio de variable m=xt en (1) y (2),

$$I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} x^{-m\eta-m\alpha}\int_0^1 (x^m - x^m t^m)^{\alpha-1} (xt)^{m\eta+m-1}\, x\,\phi(xt)\,dt =$$
$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\,\phi(xt)\,dt$$
$$K^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} x^{m\eta}\int_1^\infty (x^m t^m - x^m)^{\alpha-1} (xt)^{-m\eta-m\alpha+m-1}\, x\,\phi(xt)\,dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (t^m - 1)^{\alpha-1} t^{-m\eta-m\alpha+m-1}\phi(xt)\,dt$$

y podemos redefinir los operadores como

$$(1') \qquad I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\,\phi(xt)dt$$

$$(2') \qquad K^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (t^m-1)^{\alpha-1}\, t^{-m\eta-m\alpha+m-1}\phi(xt)dt.$$

Kober, en su artículo "ON FRACTIONAL INTEGRALS AND DERIVATIVES"(1940), Teorema 2, demostró que

$I^{\eta,\alpha}_{x}$ es un mapeo continuo de Lp en Lp cuando $Re(\alpha) > 0$ y $Re\,\eta + 1 > \frac{1}{p}$

$K^{\eta,\alpha}_{x}$ es un mapeo continuo de Lp en Lp cuando $Re(\alpha) > 0$ y $Re\,\eta > -\frac{1}{p}$

(Kober usa la notación: $g^+_{\eta,\alpha} = I^+_{\eta,\alpha}$ equivale a $I^{\eta,\alpha}_x$ y

$h^-_{\eta,\alpha} = K^-_{\eta,\alpha}$ equivale a $K^{\eta,\alpha}_x$).

Lo anterior da lugar al lema siguiente.

TEOREMA 2.04.- Sean $1 \le p \le \infty$, $Re(\alpha) > 0$. $I^{\eta,\alpha}_{x^m}$ y $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ son mapeos lineales continuos de Lp en Lp cuando $mRe(\eta) + m > \frac{1}{p}$ y $mRe(\eta) > -\frac{1}{p}$, respectivamente.

Dem. i) La linealidad de ambos operadores es inmediata por la linealidad de las integrales en (1) y (2).

ii) La continuidad para m=1 fué demostrada por Kober, de manera que $I^{\eta,\alpha}_x\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{-\eta-\alpha}\int_0^x (x-z)^{\alpha-1}z^\eta\phi(z)dz$ es continua

cuando $Re(\eta) > \frac{1}{p}$; efectuando el cambio de variable $z= t^m x$,

$$I^{\eta,\alpha}_x\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{-\eta-\alpha}\int_0^1 (x-t^m x)^{\alpha-1}(t^m x)^\eta\phi(t^m x)\,m\,t^{m-1}x\,dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}t^{m\eta+m-1}\phi(t^m x)\,dt, \text{ que es continua}$$

cuando $\operatorname{Re}(m\eta + m - 1) + 1 > \frac{1}{p}$, i.e. $m\operatorname{Re}(\eta)\ m > \frac{1}{p}$.

Por (1'), $$I_{x^m}^{\eta,\alpha}\psi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\, \psi(xt)dt,$$

luego $$I_{x^m}^{\eta,\alpha}\psi(t^{m-1}x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\, \psi(t^m x)dt =$$

$I_x^{\eta,\alpha}\ \phi(x)$ y como $I_x^{\eta,\alpha}$ es continua entonces $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es continua para $m\operatorname{Re}(\eta) + m > \frac{1}{p}$.

En forma análoga,
$$K_x^{\eta,\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^\eta \int_1^\infty (z-x)^{\alpha-1}\, z^{-\eta-\alpha}\phi(z)dz$$ es continua si

$\operatorname{Re}(\eta) > -\frac{1}{p}$.

Con el cambio de variable $z=t^m x$ (para $\operatorname{Re}(m\eta) > -\frac{1}{p}$),
$$K_x^{\eta,\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^\eta \int_1^\infty (t^m x - x)^{\alpha-1}\, (t^m x)^{-\eta-\alpha}\ \phi(t^m x)\ xmt^{m-1}dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (t^m - 1)^{\alpha-1}\, t^{-m\eta-m\alpha+m-1}\phi(t^m x)dt,$$

que es continua cuando $\operatorname{Re}(m\eta) > -\frac{1}{p}$. Luego, $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es continuo porque
$$K_{x^m}^{\eta,\alpha}\ \psi(t^{m-1}x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^m-1)^{\alpha-1} t^{-m\eta-m\alpha+m-1}\phi(t^m x)\,dt = K_x^{\eta,\alpha}\phi(x). ///$$

TEOREMA 2.06.- Para $1 \le p \le \infty$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu}$ cuando $\operatorname{Re}(m\eta + \mu) + m > \frac{1}{p}$.

Dem. i) Caso $\mu=0$:
$$x\frac{d}{dx} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x\frac{d}{dx}\int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\phi(xt)dt =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\, t\ \phi'(xt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\, xt\, \phi'(xt)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta+m-1}\, (\delta\phi)(xt)\, dt \Rightarrow$$

$$(3)\quad \delta I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha}\delta\phi(x).$$

Proseguimos por inducción sobre K:

$$(4)\quad x^k \frac{d}{dx^k} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha} x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x)$$

La igualdad es válida para k=1 por (3).

Supongamos que $x^n \frac{d^n}{dx^n} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha} x^n \frac{d^n}{dx^n}\phi(x)$; aplicando δ ,

$$\delta\left[x^n \frac{d^n}{dx^n} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x)\right] = \delta I_{x^m}^{\eta,\alpha} x^n \frac{d^n}{dx^n}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha}\delta\left[x^n \frac{d^n}{dx^n}\phi(x)\right] \Rightarrow$$

$$x\left[x^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) + n x^{n-1}\frac{d^n}{dx^n} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x)\right] = I_{x^m}^{\eta,\alpha}\left[x\left(x^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\phi(x) + n x^{n-1}\frac{d^n}{dx^n}\phi(x)\right)\right] \Rightarrow$$

$$x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) + n x^n \frac{d^n}{dx^n} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha} x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\phi(x) + I_{x^m}^{\eta,\alpha} n x^n \frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \Rightarrow$$

$$x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha} x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\phi(x)$$, de donde

(4) es válida para toda k=0,1,2,...

Supongamos que $\mu=0$. $Fp_{,o} \equiv Fp \subset Lp$, y el lema anterior muestra que $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $Fp \subset Lp$ en Lp. Además

$$\gamma_k^{p,o}(I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi) = \gamma_k^{p}(I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi) = \left| x^k \frac{d^k}{dx^k} I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi\right|_p =$$

$$= \left| I^{\eta,\alpha}_{x^m} x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi \right|_p \leq M \left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi \right|_p = M\, \gamma^p_k(\phi)$$

donde M depende de η, α y m. Entonces el teorema es válido para μ =o.

ii) Caso general:

$$x^\mu I^{\eta+\mu/m,\alpha}_{x^m} x^{-\mu}\phi(x) = x^\mu \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^m)\, t^{m(\eta+\mu/m)+m-1} \quad (xt)^{-\mu} \quad \phi(xt)\,dt =$$

$$= \frac{x^\mu m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1} \; t^{m\eta+\mu+m-1-\mu} x^{-\mu} \quad \phi(xt)\,dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1} \; t^{m\eta+m-1} \qquad \phi(xt)\,dt = I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x)$$

de donde (5) $\qquad I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) = x^\mu I^{\eta+\mu/m,\alpha}_{x^m} x^{-\mu}\phi(x)$

Si $\phi \in Fp_{,\mu}$ entonces $X^{-\mu}\phi \in Fp_{,o} \equiv Fp$ y el operador $I^{\eta+\mu/m,\alpha}_{x^m}$ mapea continuamente Fp en Fp $\equiv$ $Fp_{,o}$ (para $Re(\eta+\mu/m)+m > \frac{1}{p}$ por el lema 2.04). Finalmente X^μ es un isomorfismo de $Fp_{,o}$ sobre $Fp_{,\mu}$. Luego $I^{\eta,\mu}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu}$ si $Re(m\eta+\mu\;)+m > \frac{1}{p}$. Esta restricción es necesaria porque para $\phi(x) = X^\mu$ y p= ∞ ,

$$\Gamma(\alpha)\, I^{\eta,\alpha}_{x^m} x^\mu = m\int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1} \; t^{m\eta+m-1} \qquad (xt)^\mu \; dt \; =$$

$$= X^\mu \int_0^1 (1-t^m)^{\alpha-1} \; t^{m(\eta+\mu/m)} \qquad mt^{m-1}dt \; =$$

(con $t^m = z$) $\qquad = X^\mu \displaystyle\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\eta+\mu/m+1-1}\,dz$

(función Beta) $\qquad = X^\mu \quad B(\eta+\mu/m+1,\; \alpha)$;

de donde $\quad I_{x^m}^{\eta,\alpha} x^{\mu} = \Gamma(\eta + \mu/m + 1) x^{\mu}$.

Esta igualdad requiere de las siguientes restricciones:

$\mathrm{Re}(\eta + \mu/m + 1) > 0$ y $\mathrm{Re}(\alpha + \eta + \mu/m + 1) > 0$; i.e.

$\mathrm{Re}(m\eta) + m > 0$ y $\mathrm{Re}(m\alpha + m\eta + \mu) + m > 0$, donde la segunda restricción es redundante mientras que $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$.

TEOREMA 2.07.- Para $1 \leq p \leq \infty$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu}$ si $\mathrm{Re}(m\eta - \mu) > -\frac{1}{p}$.

Dem. i) Caso $\mu = 0$.

$$\delta K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = x \frac{d}{dx}\left[\frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (t^m - 1)^{\alpha-1}\, t^{-m\eta - m\alpha + m - 1}\, \phi(xt)\,dt\right] =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\, x \int_1^{\infty} (t^m - 1)^{\alpha-1}\, t^{-m\eta - m\alpha + m - 1}\, t\,\phi'(xt)\,dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (t^m - 1)^{\alpha-1}\, t^{-m\eta - m\alpha + m - 1}\, xt\,\phi'(xt)\,dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (t^m - 1)^{\alpha-1}\, t^{-m\eta - m\alpha + m - 1}\, (\delta\phi)(xt)\,dt \Rightarrow$$

(3') $\quad \delta K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = K_{x^m}^{\eta,\alpha}\delta\phi(x)$. Por inducción sobre k:

(4') $\quad x^k \frac{d^k}{dx^k} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = K_{x^m}^{\eta,\alpha}\, x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x)$

La igualdad (4') es válida para k=1 por (3'). Supongamos que

$x^n \frac{d^n}{dx^n} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = K_{x^m}^{\eta,\alpha}\, x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x)$ y aplicamos δ

$$\delta\left(x^n \frac{d^n}{dx^n} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x)\right) = \delta\left(K_{x^m}^{\eta,\alpha} x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right) = K_{x^m}^{\eta,\alpha}\ \delta\left(x^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right) \Rightarrow$$

$$x\left[n x^{n-1}\frac{d^n}{dx^n} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) + x^n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x)\right] = K_{x^m}^{\eta,\alpha}\ x\left(n x^{n-1}\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) + x^n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\phi(x)\right) \Rightarrow$$

$$n x^n\frac{d^n}{dx^n} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) + x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = K_{x^m}^{\eta,\alpha} n x^n\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) + K_{x^m}^{\eta,\alpha} x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\phi(x) \Rightarrow$$

$$x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = K_{x^m}^{\eta,\alpha} x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\phi(x),$$

por lo que (4) es válida para toda $k=0,1,2,\ldots$

Supongamos que $\mu=0$. Por el lema 2.04, $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $Fp \subset Lp$ en Lp. Además,

$$\gamma_k^{p,0}(K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi) = \gamma_k^{p}(K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi) = \left|x^k\frac{d^k}{dx^k} K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi\right|_p =$$

$$= \left|K_{x^m}^{\eta,\alpha} x^k\frac{d^k}{dx^k}\phi\right|_p \leq N\left|x^k\frac{d^k}{dx^k}\phi\right| = N\,\gamma_k^p(\phi)$$

donde N depende de η, α, m. Luego el teorema está demostrado para $\mu=0$.

ii) Caso general:

$$x^\mu K_{x^m}^{\eta-\mu/m,\alpha} x^{-\mu}\phi(x) = x^\mu\frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (t^m-1)^{\alpha-1} t^{-m(\eta-\mu/m)-m\alpha+m-1}(xt)^{-\mu}\phi(xt)dt =$$

$$= x^\mu\frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (t^m-1)^{\alpha-1} t^{-m\eta+\mu-m\alpha+m-1-\mu}\ x^{-\mu}\phi(xt)dt=$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (t^m-1)^{\alpha-1} t^{-m\eta-m\alpha+m-1}\phi(xt)dt \Rightarrow$$

(5') $\quad K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = x^\mu K_{x^m}^{\eta-\mu/m,\alpha} x^{-\mu}\phi(x)$

Si $\phi \in Fp_{,\mu}$, entonces $x^{-\mu}\phi \in Fp_{,0} \equiv Fp$ y $K_{x^m}^{\eta,-\mu/m}$ mapea continuamente Fp en Fp cuando $m\mathrm{Re}(\eta-\mu/m) > -\frac{1}{p}$ (lema 2.04).

Como X^{μ} es un isomorfismo de $Fp \equiv Fp_{,0}$ sobre $Fp_{,\mu}$, tenemos que $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu}$ si $\mathrm{Re}(m\eta-\mu) > -\frac{1}{p}$.

Respecto a la restricción, sean $\phi(x) = X^{\mu}$ y $p=\infty$;

$$\Gamma(\alpha)\; K_{x^m}^{\eta,\alpha}\; X^{\mu} = m\int_1^{\infty} (t^m - 1)^{\alpha-1}\, t^{-m\eta-m\alpha+m-1}\, (xt)^{\mu}\, dt =$$

$$= X^{\mu}\int_1^{\infty} (t^m - 1)^{\alpha-1}\, t^{-m(\eta+\alpha)+\mu}\, mt^{m-1}\, dt =$$

(cambio $t^m=w$)
$$= X^{\mu}\int_1^{\infty} (w-1)^{\alpha-1}\, w^{-\eta-\alpha+\mu/m}\, dw$$

(cambio de variable $z=1-\frac{1}{w}$)
$$= X^{\mu}\int_0^1 \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{-\eta-\alpha+\mu/m} \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 dz =$$

$$= X^{\mu}\int_0^1 (1-z)^{\eta-\mu/m-1} z^{\alpha-1}\, dz = X^{\mu} B(\alpha,\eta-\mu/m) \Longrightarrow$$

$$K_{x^m}^{\eta,\alpha}\; \phi(x) = \frac{\Gamma(\eta-\mu/m)}{\Gamma(\eta-\mu/m+\alpha)}\, X^{\mu},$$ que involucra las restricciones

$\mathrm{Re}(\eta-\mu/m) > 0$, y $\mathrm{Re}(-\mu/m+\alpha) > 0$,o sea $\mathrm{Re}(m\eta-\mu) > 0$ y $\mathrm{Re}(m\eta-\mu+m\alpha) > 0$, donde esta última restricción es redundante cuando $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$. ///

A. C. Mc. Bride, en su tesis doctoral (1971) demostró que, sobre $Fp_{,\mu}$, $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es analítica con respecto a α para $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ y $\mathrm{Re}(m\eta-\mu) + m > \frac{1}{p}$; y $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es analítica respecto a α para $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ y

$\mathrm{Re}(m\eta-\mu) > -\frac{1}{p}$, dando la definición de analiticidad como sigue.

DEF. 2.06.- Sean U y V espacios NM. Suponiendo que para cada α en algún dominio D del plano complejo corresponde un mapeo lineal continuo T_α: U $\to$ V, decimos que T_α es analítica con respecto a α en D si existe un mapeo lineal continuo $\frac{\partial}{\partial\alpha}T_\alpha$: U $\to$ V tal que para cada $\phi \in$ U fija, $\frac{1}{h}\left[T_{\alpha+h}\phi - T_\alpha\phi\right] - \frac{\partial}{\partial\alpha}T_\alpha\phi \to 0$ en V cuando el incremento complejo $h \to 0$ de cualquier manera.

Ahora se pretende extender analíticamente para α arbitrario.

LEMA 2.05.- Sean $\phi \in F_{p,\mu}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ y $\mathrm{Re}(m\eta+\mu)+m > \frac{1}{p}$; entonces

$$\delta I^{\eta,\alpha+1}_{x^m}\phi(x) = I^{\eta,\alpha+1}_{x^m}\delta\phi = m\, I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) - (m\eta+m\alpha+m)\, I^{\eta,\alpha+1}_{x^m}\phi(x).$$

Dem. Usando (1),

$$\delta\, I^{\eta,\alpha+1}_{x^m}\phi(x) = x\frac{d}{dx}\left[x^{-m\eta-m(\alpha+1)}\frac{m}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x (x^m-u^m)^\alpha u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du\right] =$$

$$= \frac{mx}{\Gamma(\alpha+1)}\left[x^{-m\eta-m\alpha-m}\int_0^x \alpha(x^m-u^m)^{\alpha-1}mx^{m-1}u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du - (m\eta+m\alpha+m)\,x^{-m\eta-m\alpha-m-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^x (x^m-u^m)^\alpha u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du\right]$$

$$= \frac{\alpha m^2}{\Gamma(\alpha+1)}x^{-m\eta-m\alpha}\int_0^x (x^m-u^m)^{\alpha-1}u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du - \frac{(m\eta+m\alpha+m)}{\Gamma(\alpha+1)}m\,x^{-m\eta-m\alpha-m}\cdot$$

$$\cdot\int_0^x (x^m-u^m)^\alpha u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du$$

$$= \frac{m^2}{\Gamma(\alpha)}x^{-m\eta-m\alpha}\int_0^x (x^m-u^m)^{\alpha-1}u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du - (m\eta+m\alpha+m)m\,x^{-m\eta-m(\alpha+1)}\int_0^x (x^m-u^m)^\alpha u^{m\eta+m-1}\phi(u)\,du$$

$$= m\, I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x) - (m\eta+m\alpha+m)\, I^{\eta,\alpha+1}_{x^m}\phi(x).$$

Reacomodando el resultado tenemos

$$(6) \quad m\, I_{x^m}^{\eta,\alpha}\, \phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\, \delta\, \phi(x) + (m\eta + m\alpha + m)\, I_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\, \phi$$

LEMA 2.06.- Sea $Re(\alpha) > 0$, $\phi \in Fp_{,\mu}$ y $Re(m\eta - \mu\ ) > -\frac{1}{p}$; entonces

$$(6') \quad m\, K_{x^m}^{\eta,\alpha}\, \phi = (m\eta + m\alpha)\, K_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\, \phi(x) - K_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\, \delta\, \phi(x)\ ;$$

usando (2')

$$\delta\, K_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\, \phi(x) = x \frac{d}{dx} \left[\frac{m}{\Gamma(\alpha+1)} \int_1^\infty (t^m - 1)^\alpha\, t^{-m\eta - m\alpha - 1}\, \phi(xt)\, dt \right] ;$$

$$= x \frac{m}{\Gamma(\alpha+1)} \int_1^\infty (t^m - 1)^\alpha\, t^{-m\eta - m\alpha - 1}\, t\, \phi'(xt)\, dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha+1)} \int_1^\infty (t^m - 1)^\alpha\, t^{-m\eta - m\alpha}\, x\, \phi'(xt)\, dt =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t^m - 1)^\alpha\, t^{-m\eta - m\alpha}\, \phi(xt) \Big|_1^\infty - \int_1^\infty \Big\{ \alpha (t^m - 1)^{\alpha-1}\, m t^{m-1}\, t^{-m\eta - m\alpha} + \right.$$

$$\left. + (-m\eta - m\alpha)\, t^{-m\eta - m\alpha - 1}\, (t^m - 1)^\alpha \Big\}\, \phi(xt)\, dt \right] =$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(m\eta + m\alpha\ ) \int_1^\infty (t^m - 1)^\alpha\, t^{-m\eta - m\alpha - 1}\, \phi(xt)\, dt - \alpha m \int_1^\infty (t^m - 1)^{\alpha - 1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, t^{-m\eta - m\alpha + m - 1}\, \phi(xt)\, dt \right] =$$

$$= (m\eta + m\alpha) \frac{m}{\Gamma(\alpha+1)} \int_1^\infty (t^m - 1)^\alpha\, t^{-m\eta - m\alpha - 1} \phi(xt)\, dt - \frac{m^2}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (t^m - 1)^{\alpha - 1} \cdot$$

$$\cdot\, t^{-m\eta - m\alpha + m - 1}\, \phi(xt)\, dt = (m\eta + m\alpha\ )\, K_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\, \phi(x) - m\, K_{x^m}^{\eta,\alpha}\, \phi(x),$$

y reacomodando obtenemos (6').

TEOREMA 2.08.- Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $\mathrm{Re}(m\eta + \mu) + m > \frac{1}{p}$.

i) Para todo camplejo α, $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu}$.

ii) Para η fija, $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es entera respecto a α sobre $F_{p,\mu}$.

iii) Si además $\mathrm{Re}(m\eta + m\alpha + \mu) + m > \frac{1}{p}$, $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un automorfismo de $F_{p,\mu}$ y $(I_{x^m}^{\eta,\alpha})^{-1} = I_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}$.

Dem. i) ii) Por el teorema 2.06, $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu}$ para $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, y es analítico respecto a α para $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ (Mc.Bride). Por el lema 2.05, $m\, I_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\delta\phi(x) + (m\eta + m\alpha + m)\, I_{x^m}^{\eta,\alpha+1}\phi(x)$, donde el lado izquierdo es lineal, continuo y analítico para $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Luego el lado derecho es lineal, continuo y analítico para $\mathrm{Re}(\alpha+1) > 0$, i.e. $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$. Iterando tenemos que el lado izquierdo es lineal, continuo y analítico para $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$, lo que implica que el lado derecho es lineal, continuo y analítico para $\mathrm{Re}(\alpha+1) > -1$, sea $\mathrm{Re}(\alpha) > -2$, y repetimos el procedimiento extendiendo por continuación analítica el que $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es mapeo lineal, continuo y analítico para $\mathrm{Re}(m\eta + \mu) + m > \frac{1}{p}$ y α arbitrario.

iii) Usando la primera ley de índices para $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$, tenemos

$$I_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} I_{x^m}^{\eta,\alpha} \phi(x) = I_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta} \phi(x)$$ que era válida para

$\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(m\eta + \mu) + m > \frac{1}{p}$; ahora por continuación analítica es válida para $\mathrm{Re}(m\eta + \mu) + m > \frac{1}{p}$ y $\mathrm{Re}(m\eta + m\alpha + \mu) + m > \frac{1}{p}$.

Haciendo $\alpha=0$ en (6),

$$m\, I_{x^m}^{\eta,0} \phi(x) = I_{x^m}^{\eta,1}\delta\phi(x) + (m\eta + m)\, I_{x^m}^{\eta,1}\phi(x)$$

$$I_{x^m}^{\eta,0} \phi(x) = \frac{1}{m} I_{x^m}^{\eta,1}\delta\phi(x) + (\eta+1)\, I_{x^m}^{\eta,1}\phi(x)$$

$$I_{x^m}^{\eta,0}\ \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^1 (1-t^m)^0\, t^{m\eta+m-1}\ \ (xt)\ \phi'(xt)\,dt + (\eta+1)\ I_{x^m}^{\eta,1}\ \ \phi(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^1 t^{m(\eta+1)}\ \ x\ \phi'(xt)\,dt + (\eta+1)\ I_{x^m}^{\eta,1}\ \ \phi\,(x).$$

(Integrando por partes)

$$= \frac{1}{\Gamma(1)} \left[\ t^{m(\eta+1)}\ \ \phi\,(xt)\Big|_0^1 - \int_0^1 m(\eta+1)\,t^{m\eta+m-1}\ \ \phi(xt)\,dt\right] +$$

$$+ (\eta+1)\ I_{x^m}^{\eta,1}\ \ \phi\,(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1)}\,\phi\,(x) - \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^1 m(\eta+1)\,t^{m\eta+m-1}\ \ \phi(xt)\,dt +$$

$$+ (\eta+1)\ \ I_{x^m}^{\eta,1}\ \ \phi\,(x) =$$

$$= \phi(x) - (\eta+1)\,\frac{m}{\Gamma(1)} \int_0^1 t^{m\eta+m-1}\ \ \phi\,(xt)\,dt +$$

$$+ (\eta+1)\ \frac{m}{\Gamma(1)} \int_0^1 t^{m\eta+m-1}\,\phi\,(xt)\,dt \quad \Longrightarrow$$

$$(7) \qquad I_{x^m}^{\eta,0}\ \phi(x) = \phi(x)$$

Luego, $\quad I_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}\ I_{x^m}^{\eta,\alpha}\ \phi\,(x) = I_{x^m}^{\eta,0}\ \ \phi(x) = \phi(x)$

$\qquad\quad I_{x^m}^{\eta,\alpha}\ I_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}\ \phi\,(x) = I_{x^m}^{\eta+\alpha-\alpha,\alpha}\ I_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}\phi(x) = I_{x^m}^{\eta+\alpha,0}\phi(x) = \phi\,(x),$

de donde

$$(8) \qquad \left(I_{x^m}^{\eta,\alpha}\right)^{-1} = I_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}$$

TEOREMA 2.09.- Sea $1 \leq p \leq \infty$, $\mathrm{Re}(m\eta - \mu) > -\frac{1}{p}$. Entonces para toda α compleja,

i) $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu}$.

ii) Para η fija, $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es entera respecto a α sobre $Fp_{,\mu}$.

iii) Si además $Re(m\eta+m\alpha-\mu)>-\frac{1}{p}$, $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es un automorfismo de $Fp_{,\mu}$ y $(K^{\eta,\alpha}_{x^m})^{-1}=K^{\eta+\alpha,-\alpha}_{x^m}$.

Dem. i, ii) Por el teorema 2.07 $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo para $Re(m\eta-\mu)>-\frac{1}{p}$ y $Re(\alpha)>0$, y la analiticidad para $Re(\alpha)>c$ demostra por Mc. Bride, haciendo uso de (6'),

$$mK^{\eta,\alpha}_{x^m}\ \phi(x)=(m\eta+m\alpha)\ K^{\eta,\alpha+1}_{x^m}\ \phi(x)\ -K^{\eta,\alpha+1}_{x^m}\ \delta\ \phi(x),$$

donde el lado izquierdo es un mapeo lineal continuo y analítico para $Re(\alpha)>0$; en consecuencia el lado derecho lo es para $Re(\alpha+1)>0$, i.e. $Re(\alpha)>1$. Repitiendo el proceso como en el teorema anterior, $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu}$ y analítico respecto a α para $Re(m\eta-\mu)>-\frac{1}{p}$.

iii) Haciendo $\alpha=0$ en (6') e integrando por partes,

$$mK^{\eta,0}_{x^m}\ \phi(x)=m\eta\,K^{\eta,1}_{x^m}\ \phi(x)\ -K^{\eta,1}_{x^m}\ \delta\ \phi(x)$$

$$K^{\eta,0}_{x^m}\phi(x)=\eta\,K^{\eta,1}_{x^m}\ \phi(x)-\frac{1}{m}\,K^{\eta,1}_{x^m}\ x\ \frac{d}{dx}\phi(x)=$$

$$=\eta\,K^{\eta,1}_{x^m}\ \phi(x)-\frac{1}{\Gamma(1)}\int_1^\infty(t^m-1)^0\,t^{-m\eta-m+m-1}\ (xt)\,\phi'(xt)dt=$$

$$=\eta\,K^{\eta,1}_{x^m}\ \phi(x)-\int_1^\infty t^{-m\eta}\ x\ \phi'(xt)dt=$$

$$=\eta\ K^{\eta,1}_{x^m}\ \phi(x)-\left[t^{-m\eta}\phi(xt)\Big|_1^\infty-\int_1^\infty(-m\eta)\,t^{-m\eta-1}\phi(xt)dt\right]=$$

$$=\eta\ K^{\eta,1}_{x^m}\ \phi(x)-\lim_{\nu\to\infty}\ \nu^{-m\eta}\phi(x\nu)+\phi(x)-m\eta\int_1^\infty t^{-m\eta-1}\phi(xt)dt=$$

$$=\phi(x)-\lim_{\nu\to\infty}\ \nu^{-m\eta}\ \phi(x\nu)\ =\ \phi(x),$$

de donde

$$(7') \qquad K_{x^m}^{\eta,0}\ \phi(x) = \phi(x)$$

Haciendo uso de la primera ley de índices para $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$,

$K_{x^m}^{\eta,\alpha}\ K_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta}\phi(x) = K_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta}\ \phi(x)$, tenemos que de acuerdo con la continuación analítica efectuada, vale para $\mathrm{Re}(m\eta-\mu)>-\frac{1}{p}$ y $\mathrm{Re}(m\eta+m\alpha-\mu)>-\frac{1}{p}$, además $K_{x^m}^{\eta,\alpha}\ K_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}\phi(x)= K_{x^m}^{\eta,0}\ \phi(x)=\phi(x)$,

$$K_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}K_{x^m}^{\eta,\alpha}\ \phi(x)= K_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}K_{x^m}^{\eta+\alpha-\alpha,\alpha}\ \phi(x) = K_{x^m}^{\eta+\alpha,0}\phi(x) = \phi(x),$$

por lo que

$$(8') \qquad \left(K_{x^m}^{\eta,\alpha}\right)' = K_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}$$

C) LOS OPERADORES $I_{x^m}^{\alpha}$, $K_{x^m}^{\alpha}$ SOBRE $F_{p,\mu}$.

DEF. 2.07.- Sea $m>0$ y $\mathrm{Re}(\alpha)>0$. Para $\phi\in F_{p,\mu}$ definimos los operadores

$$I_{x^m}^{\alpha}\ \phi(x)=\frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x^m-u^m)^{\alpha-1}\ u^{m-1}\ \phi(u)\ du$$

$$K_{x^m}^{\alpha}\phi(x)=\frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(u^m-x^m)^{\alpha-1}\ u^{m-1}\ \phi(u)\ du,$$

que combinadas con las definiciones (1) y (2) nos dan

$$I_{x^m}^{\eta,\alpha}\ \phi(x)= x^{-m\eta-m\alpha}\, I_{x^m}^{\alpha}\, x^{m\eta}\ \phi(x)$$

$$K_{x^m}^{\eta,\alpha}\phi(x)= x^{m\eta}\ K_{x^m}^{\alpha}\ x^{-m\eta-m\alpha}\phi(x),$$

y haciendo $\eta=0$ obtenemos

$$(9) \qquad I_{x^m}^{\alpha}\ \phi(x)= x^{m\alpha}\, I_{x^m}^{0,\alpha}\ \phi(x)$$

$$(9') \qquad K_{x^m}^{\alpha}\ \phi(x)= K_{x^m}^{0,\alpha}\ x^{m\alpha}\ \phi(x)$$

Es posible desarrollar una teoría para I_x^α y K_x^α basándose en el concepto de convolución de distribuciones como en el libro Funciones Generalizadas, Vol I., de Gel'fand-Shilo, pero no se puede extender para $m>1$. Aquí deducimos las propiedades de $I_{x^m}^\alpha$ y $K_{x^m}^\alpha$ de las relaciones (9) y (9').

TEOREMA 2.10.- $I_{x^m}^\alpha$ es un mapeo lineal continuo de Fp,μ en $Fp,\mu+m\alpha$ si $Re(\mu)+m>\frac{1}{p}$. Si además $Re(\mu+m\alpha)+m>\frac{1}{p}$, $I_{x^m}^\alpha$ es un isomorfismo de Fp,μ sobre $Fp,\mu+m\alpha$ y $\left(I_{x^m}^\alpha\right)^{-1}=I_{x^m}^{-\alpha}$.

DEM. Usando la relación (9) y el teorema 2.08 i); para todo α $I_{x^m}^{0,\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de Fp,μ en Fp,μ si $Re(\mu)+m>\frac{1}{p}$. Como $X^{m\alpha}$ es un isomorfismo de Fp,μ sobre $Fp,\mu+m\alpha$, entonces $I_{x^m}^\alpha$ es un mapeo lineal continuo de Fp,μ en $Fp,\mu+m\alpha$ si $Re(\mu)+m>\frac{1}{p}$. Por el teorema 2.08 iii) $I_{x^m}^{0,\alpha}$ es un automorfismo de Fp,μ si $Re(\mu+m\alpha)+m>\frac{1}{p}$ con inversa $\left(I_{x^m}^{0,\alpha}\right)^{-1}=I_{x^m}^{\alpha,-\alpha}$. De (9), $I_{x^m}^\alpha$ es una composición de isomorfismos de Fp,μ sobre $Fp,\mu+m\alpha$ cuando además se satisface $Re(\mu+m\alpha)+m>\frac{1}{p}$. Por otra parte,

$$\left(I_{x^m}^\alpha\right)^{-1}=\left(x^{m\alpha}I_{x^m}^{0,\alpha}\right)^{-1}=\left(I_{x^m}^{0,\alpha}\right)^{-1}\left(x^{m\alpha}\right)^{-1}=I_{x^m}^{\alpha,-\alpha}x^{-m\alpha},$$

y usando (5) con $\mu=m\alpha$, $\eta=0$, $\alpha=-\alpha$:

$$I_{x^m}^{0,-\alpha}\phi(x)=x^{m\alpha}I_{x^m}^{\alpha,-\alpha}x^{-m\alpha}\phi(x),$$

de donde $\left(I_{x^m}^\alpha\right)^{-1}=x^{-m\alpha}I_{x^m}^{0,-\alpha}=I_{x^m}^{-\alpha}$.

De (9) deducimos que la identidad es $I_{x^m}^0$. ///

Si desarrollamos la teoría de $I_{x^m}^\alpha$ sin antes desarrollar la de $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$,

$$\frac{d}{dx^m}I_{x^m}^{\alpha+1}\phi(x)=\frac{d}{dx^m}\left[\frac{m}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x(x^m-u^m)^\alpha u^{m-1}\phi(u)\,du\right]=$$

$$= \frac{m}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x \alpha (x^m - u^m)^{\alpha-1} u^{m-1} \phi(u)du =$$

$$= \frac{m\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^m - u^m)^{\alpha-1} u^{m-1} \phi(u)du = I^{\alpha}_{x^m} \phi(x)$$

y usaríamos (10) $\frac{d}{dx^m} I^{\alpha+1}_{x^m} \phi(x) = I^{\alpha}_{x^m} \phi(x)$ para extender para α

arbitraria, por continuación analítica.

Empleando (10) Con α y repitiendo el proceso,

$$\frac{d}{dx^m} \phi(x) = \frac{d}{dx^m} I^{0}_{x^m} \phi(x) = I^{-1}_{x^m} \phi(x)$$

$$\left[\frac{d}{dx^m}\right]^2 \phi(x) = \frac{d}{dx^m} I^{-1}_{x^m} \phi(x) = I^{-2}_{x^m} \phi(x),$$ etc., para obtener

(11) $$\left[\frac{d}{dx^m}\right]^k \phi(x) = I^{-k}_{x^m} \phi(x) \qquad k=0,1,2,\ldots$$

TEOREMA 2.11.- Si Re $(\mu+m\alpha)<\frac{1}{p}$, $K^{\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu+m\alpha}$. Si además $Re(\mu)<\frac{1}{p}$, $K^{\alpha}_{x^m}$ es un isomorfismo de $Fp_{,\mu}$ sobre $Fp_{,\mu+m\alpha}$ con $\left(K^{\alpha}_{x^m}\right)^{-1} = K^{-\alpha}_{x^m}$.

Dem. Sea $\phi \in Fp_{,\mu}$. Por el teorema 2.09, $K^{0,\alpha}_{x^m} X^{m\alpha}\phi(x)$ es una composición de mapeos continuos de $Fp_{,\mu}$ en $Fp_{,\mu+m\alpha}$ si $Re(-(\mu+m\alpha)) > -\frac{1}{p}$, i.e. $Re(\mu+m\alpha)<\frac{1}{p}$, y es una composición de isomorfismos de $Fp_{,\mu}$ sobre $Fp_{,\mu+m\alpha}$ si además $Re(m\alpha-(\mu+m\alpha)) > -\frac{1}{p}$, i.e. $Re(\mu)<\frac{1}{p}$. Además,

$$\left(K^{\alpha}_{x^m}\right)^{-1} = \left(K^{0,\alpha}_{x^m} x^{m\alpha}\right)^{-1} = \left(x^{m\alpha}\right)^{-1}\left(K^{0,\alpha}_{x^m}\right)^{-1} = X^{-m\alpha} K^{\alpha,-\alpha}_{x^m}$$

sustituyendo ϕ por $X^{-m\alpha}\psi$; α por $-\alpha$; μ por $-m\alpha$ y $\eta=0$ en (5'),

$X^{-m\alpha}K^{\alpha,-\alpha}_{x^m} X^{m\alpha} X^{-m\alpha}\psi = K^{0,-\alpha}_{x^m} X^{-m\alpha}\psi$, de donde proseguimos

$\left(K^{\alpha}_{x^m}\right)^{-1} = X^{-m\alpha} K^{\alpha,-\alpha}_{x^m} = K^{0,-\alpha}_{x^m} X^{-m\alpha} = K^{-\alpha}_{x^m}$ por (9').

Usando (9'), hacemos $\alpha=0$ y $K^{0}_{x^m}\phi(x)= K^{0,0}_{x^m}\phi(x)=\phi(x)$, de donde $K^{0}_{x^m}$ es la identidad.

En (6'), hacemos $\eta=0$ y $\phi=\frac{1}{m}x^{m\alpha}\psi$, donde $\psi\in Fp_{,\mu}$ y $Re(\mu+m\alpha)<\frac{1}{p}$.

$$mK^{0,\alpha}_{x^m}\frac{1}{m}x^{m\alpha}\psi(x)= m\alpha K^{0,\alpha+1}_{x^m}\frac{1}{m}x^{m\alpha}\psi(x)-K^{0,\alpha+1}_{x^m}\delta\left(\frac{1}{m}x^{m\alpha}\psi\right)(x)$$
$$K^{0,\alpha}_{x^m}x^{m\alpha}\psi(x)=\alpha K^{0,\alpha+1}_{x^m}x^{m\alpha}\psi(x)-K^{0,\alpha+1}_{x^m}\frac{1}{m}x\left[m\alpha x^{m\alpha-1}\psi(x)+x^{m\alpha}\frac{d\psi}{dx}\right]$$
$$K^{\alpha}_{x^m}\psi(x)=\alpha K^{0,\alpha+1}_{x^m}x^{m\alpha}\psi(x)-K^{0,\alpha+1}_{x^m}\alpha x^{m\alpha}\psi(x)-K^{0,\alpha+1}_{x^m}\frac{1}{m}x^{m\alpha}x\frac{d\psi}{dx}$$
$$K^{\alpha}_{x^m}\psi(x)= -K^{0,\alpha+1}_{x^m}\frac{1}{m}x^{m\alpha}\delta\psi(x) \qquad \text{pero} \qquad \delta=mx^m\frac{d}{dx^m}$$
$$K^{\alpha}_{x^m}\psi(x)= -K^{0,\alpha+1}_{x^m}x^{m\alpha}x^m\frac{d}{dx^m}\psi(x)= -K^{0,\alpha+1}_{x^m}x^{m(\alpha+1)}\frac{d}{dx^m}\psi(x),$$

y por (9),

$$(10')\qquad K^{\alpha}_{x^m}\psi(x)= -K^{\alpha+1}_{x^m}\frac{d}{dx^m}\psi(x)$$

Sea $\alpha=1$ en (10'),

$$K^{-1}_{x^m}\psi(x)= -K^{0}_{x^m}\frac{d}{dx^m}\psi(x)=-\frac{d}{dx^m}\psi(x) \quad \text{con } Re(\mu-m)<\frac{1}{p},$$
$$K^{-2}_{x^m}\psi(x)= -K^{-1}_{x^m}\frac{d}{dx^m}\psi(x)=\left[\frac{d}{dx^m}\right]^2\psi(x) \quad \text{con } Re(\mu-2m)<\frac{1}{p},$$

y así sucesivamente para obtener

$$(11')\qquad K^{-n}_{x^m}\psi(x)=(-1)^n\left[\frac{d}{dx^m}\right]^n\psi(x) \qquad \text{para } Re(\mu-mn)<\frac{1}{p}.$$

D) LOS OPERADORES $I^{\eta,\alpha}_{x^m}$, $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$, $I^{\alpha}_{x^m}$, $K^{\alpha}_{x^m}$ SOBRE $F'_{p,\mu}$

Ahora ya se puede desarrollar la teoría de integración fraccional sobre los espacios de funciones generalizadas $F'_{p,\mu}$. Las definiciones están motivadas considerando funcionales regulares y operadores adjuntos.

DEF. 2.08.- Sea $f\in F'_{p,\mu}$; para $1\le p\le\infty$ y $Re(\alpha)>0$ definimos

(12) $\left(I^{\eta,\alpha}_{x^m} f, \phi\right) = \left(f, K^{\eta+1-\frac{1}{m},\alpha}_{x^m}\phi\right)$ para $\phi \in Fp,\mu$.

(13) $\left(K^{\eta,\alpha}_{x^m} f, \phi\right) = \left(f, I^{\eta-1+\frac{1}{m},\alpha}_{x^m}\phi\right)$ para $\phi \in Fp,\mu$.

(14) $\left(I^{\alpha}_{x^m} f, \phi\right) = \left(f, x^{m-1}K^{\alpha}_{x^m}x^{-m+1}\phi\right)$ para $\phi \in Fp,\mu-m\alpha$

(15) $\left(K^{\alpha}_{x^m} f, \phi\right) = \left(f, x^{m-1}I^{\alpha}_{x^m}x^{-m+1}\phi\right)$ para $\phi \in Fp,\mu-m\alpha$

TEOREMA 2.12.- Sea $1\leq p\leq\infty$ y α cualquier complejo.

i) $I^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $F'p,\mu$ en $F'p,\mu$ si

$Re(m\eta-\mu)+m > \frac{1}{q}$

ii) Si además $Re(m\eta+m\alpha-\mu)+m > \frac{1}{q}$, $I^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es un automorfismo de $F'p,\mu$ y $\left(I^{\eta,\alpha}_{x^m}\right)^{-1} = I^{\eta+\alpha,-\alpha}_{x^m}$. $I^{\eta,0}_{x^m}$ es la identidad.

Dem. i) Por el teorema 2.09 $K^{\eta+1-\frac{1}{m},\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de Fp,μ en Fp,μ si $Re(m[\eta+1-\frac{1}{m}]-\mu)>-\frac{1}{p}$, i.e. $Re(m\eta-\mu)+m>\frac{1}{q}$.
Como Fp,μ es un espacio NM, entonces el operador adjunto es un mapeo lineal continuo de $F'p,\mu$ en $F'p,\mu$ (Teor 1.02).

ii) $K^{\eta+1-\frac{1}{m},\alpha}_{x^m}$ es un automorfismo de Fp,μ si se cumple la restricción $Re(m[\eta+1-\frac{1}{m}]+m\alpha-\mu)>-\frac{1}{p}$, i.e. $Re(m\eta+m\alpha-\mu)+m>\frac{1}{q}$, y por el teorema 1.03 el operador adjunto es un automorfismo de $F'p,\mu$.
Además,

$$\left(I^{\eta,\alpha}_{x^m}\right)^{-1} = \left[\left(K^{\eta+1-\frac{1}{m},\alpha}_{x^m}\right)^{-1}\right]' = \left[K^{\eta+\alpha+1-\frac{1}{m},-\alpha}_{x^m}\right]' = I^{\eta+\alpha,-\alpha}_{x^m}$$

donde $'$ denota operador adjunto. La identidad es $I^{\eta,0}_{x^m}$ por lo siguiente:
$\left(I^{\eta,0}_{x^m} f, \phi\right) = \left(f, K^{\eta+1-\frac{1}{m},0}_{x^m}\phi\right) = \left(f, \phi\right)$, lo que implica $I^{\eta,0}_{x^m} f = f$ .///

TEOREMA 2.13.- Para $1\leq p\leq\infty$ y cualquier complejo α,

i) $K^{\eta,\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $F'p,\mu$ en $F'p,\mu$ si

$Re(m\eta+\mu) > -\frac{1}{q}$

ii) Si además $\mathrm{Re}(m\eta+m\alpha+\mu)>-\frac{1}{q}$, $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un automorfismo de $F'_{p,\mu}$ y $\left(K_{x^m}^{\eta,\alpha}\right)^{-1}=K_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha}$. $K_{x^m}^{\eta,0}$ es la identidad.

Dem. i) Por el teorema 2.08, $I_{x^m}^{\eta-1+\frac{1}{m},\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu}$ si $\mathrm{Re}(m[\eta-1+\frac{1}{m}]+\mu)+m>\frac{1}{p}$, i.e. $\mathrm{Re}(m\eta+\mu)>-\frac{1}{q}$, y por el teorema 1.02 $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,\mu}$.

ii) Si además $\mathrm{Re}(m[\eta-1+\frac{1}{m}]+m\alpha+\mu)+m>\frac{1}{p}$, i.e. $\mathrm{Re}(m\eta+m\alpha+\mu)>-\frac{1}{q}$, entonces $I_{x^m}^{\eta-1+\frac{1}{m},\alpha}$ es un automorfismo de $F_{p,\mu}$ y por el teorema 1.03 $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ es un automorfismo de $F'_{p,\mu}$. Además, usando adjuntos,

$$\left(K_{x^m}^{\eta,\alpha}\right)^{-1}=\left[\left(I_{x^m}^{\eta-1+\frac{1}{m},\alpha}\right)^{-1}\right]'=\left[I_{x^m}^{\eta+\alpha-1+\frac{1}{m},-\alpha}\right]'=K_{x^m}^{\eta+\alpha,-\alpha},$$

y obtenemos la identidad

$$(K_{x^m}^{\eta,0}f,\phi)=(f,I_{x^m}^{\eta-1+\frac{1}{m},0}\phi)=(f,\phi).\Rightarrow K_{x^m}^{\eta,0}f=f.\ ///$$

TEOREMA 2.14.- Para $1\leq p\leq\infty$ y α cualquier complejo,

i) $I_{x^m}^{\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,\mu-m\alpha}$ si $m-\mathrm{Re}(\mu)>\frac{1}{q}$.

ii) Si además $m+\mathrm{Re}(m\alpha-\mu)>\frac{1}{q}$, entonces $I_{x^m}^{\alpha}$ es un isomorfismo de $F'_{p,\mu}$ sobre $F'_{p,\mu-m\alpha}$ y $(I_{x^m}^{\alpha})^{-1}=I_{x^m}^{-\alpha}$, donde $I_{x^m}^{0}$ es la identidad.

Dem. i) Sea $\phi\in F_{p,\mu-m\alpha}\Rightarrow X^{-m+1}\phi\in F_{p,\mu-m\alpha-m+1}$, X^{-m+1} es isomorfismo de $F_{p,\mu-m\alpha}$ sobre $F_{p,\mu-m\alpha-m+1}$. Por el teorema 2.11, $K_{x^m}^{\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu-m\alpha-m+1}$ en $F_{p,\mu-m+1}$ si $\mathrm{Re}([\mu-m+1]+m\alpha)<\frac{1}{p}$, i.e. $m-\mathrm{Re}(\mu)>\frac{1}{q}$; entonces seguimos por el teorema 1.02 que $I_{x^m}^{\alpha}$ es un mapeo lineal continuo de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,\mu-m\alpha}$.

ii) Si además se cumple $\mathrm{Re}([\mu-m+1])<\frac{1}{p}$, i.e. $m-\mathrm{Re}(\mu)>\frac{1}{q}$, entonces $X^{m-1}K^{\alpha}_{x^m}X^{-m+1}$ es una composición de isomorfismos de $F_{p,\mu-m\alpha}$ sobre $F_{p,\mu}$, de donde $I^{\alpha}_{x^m}$ es un isomorfismo de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,\mu-m\alpha}$. Además

$$\left(I^{\alpha}_{x^m}\right)^{-1}=\left[(x^{m-1}K^{\alpha}_{x^m}x^{-m+1})^{-1}\right]'=\left[X^{m-1}K^{-\alpha}_{x^m}X^{-m+1}\right]'=I^{-\alpha}_{x^m}.$$

Para la identidad, $(I^{0}_{x^m}f,\phi)=(f,x^{m-1}K^{0}_{x^m}x^{-m+1}\phi)=(f,x^{m-1}x^{-m+1}\phi)=(f,\phi)$. ///

TEOREMA 2.15.- Para $1\leq p\leq\infty$ y α cualquier complejo,

i) $K^{\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,\mu-m\alpha}$ si $\mathrm{Re}(m\alpha-\mu)<\frac{1}{q}$

ii) Si además $-\mathrm{Re}(\mu)<\frac{1}{q}$, $K^{\alpha}_{x^m}$ es un isomorfismo de $F'_{p,\mu}$ sobre $F'_{p,\mu-m\alpha}$ y $\left(K^{\alpha}_{x^m}\right)^{-1}=K^{-\alpha}_{x^m}$. La identidad es $K^{0}_{x^m}$.

Dem. i) Sea $\phi\in F_{p,\mu-m\alpha}$. Como X^{-m+1} es un isomorfismo de $F_{p,\mu-m\alpha}$ en $F_{p,\mu-m\alpha-m+1}$ y como $I^{\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu-m\alpha-m+1}$ en $F_{p,\mu-m+1}$ si $\mathrm{Re}([\mu-m+1]-m\alpha)+m>\frac{1}{p}$, i.e. $\mathrm{Re}(m\alpha-\mu)<\frac{1}{q}$, y X^{m-1} es un isomorfismo de $F_{p,\mu-m+1}$ sobre $F_{p,\mu}$, se sigue que $X^{m-1}I^{\alpha}_{x^m}X^{-m+1}$ es un mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu-m\alpha}$ en $F_{p,\mu}$. Por el teorema 1.02, $K^{\alpha}_{x^m}$ es un mapeo lineal continuo de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,\mu-m\alpha}$.

ii) Si $\mathrm{Re}\,[(\mu-m+1-m\alpha)+m\alpha]+m>\frac{1}{p}$, i. e. $-\mathrm{Re}(\mu)<\frac{1}{q}$, entonces $X^{m-1}I^{\alpha}_{x^m}X^{-m+1}$ es un isomorfismo de $F_{p,\mu-m\alpha}$ sobre $F_{p,\mu}$. De acuerdo con el teorema 1.03, $K^{\alpha}_{x^m}$ es un isomorfismo de $F'_{p,\mu}$ sobre $F'_{p,\mu-m\alpha}$. Además

$$\left(K^{\alpha}_{x^m}\right)^{-1}=\left[(x^{m-1}I^{\alpha}_{x^m}X^{-m+1})^{-1}\right]'=\left[X^{m-1}I^{-\alpha}_{x^m}X^{-m+1}\right]'=K^{-\alpha}_{x^m},$$

y para la identidad

$$(K^{0}_{x^m}f,\phi)=(f,x^{m-1}I^{0}_{x^m}x^{-m+1}\phi)=(f,x^{m-1}x^{-m+1}\phi)\;=(f,\phi)\;\cdot ///$$

E) LEYES DE INDICES

TEOREMA 2.16.- Sea $\phi\in F_{p,\mu}$. Entonces:

i) $I^{\eta+\alpha,\beta}_{x^m}I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x)=I^{\eta,\alpha+\beta}_{x^m}\phi(x)$ si $\mathrm{Re}(m\eta+m\alpha+\mu)+m>\frac{1}{p}$; $\mathrm{Re}(m\eta+\mu)+m>\frac{1}{p}$

ii) $K^{\eta,\alpha}_{x^m}K^{\eta+\alpha,\beta}_{x^m}\phi(x)=K^{\eta,\alpha+\beta}_{x^m}\phi(x)$ si $\mathrm{Re}(m\eta+m\alpha-\mu)>-\frac{1}{p}$; $\mathrm{Re}(m\eta-\mu)>-\frac{1}{p}$

iii) $I^{\alpha}_{x^m}I^{\beta}_{x^m}\phi(x)=I^{\alpha+\beta}_{x^m}\phi(x)=I^{\beta}_{x^m}I^{\alpha}_{x^m}\phi(x)$ si $\frac{1}{p}-\mathrm{Re}(\mu)-m<\min\{0,m\mathrm{Re}\alpha,m\mathrm{Re}\beta\}$

iv) $K^{\alpha}_{x^m}K^{\beta}_{x^m}\phi(x)=K^{\alpha+\beta}_{x^m}\phi(x)=K^{\beta}_{x^m}K^{\alpha}_{x^m}\phi(x)$ si $\frac{1}{p}-\mathrm{Re}\mu>\max\{m\mathrm{Re}\alpha,m\mathrm{Re}\beta,m\mathrm{Re}(\alpha+\beta)\}$

v) $I^{-\gamma}_{x^m}x^{-m\beta}I^{-\alpha}_{x^m}\phi(x)=x^{m\alpha}I^{\beta}_{x^m}x^{m\gamma}\phi(x)$ si $\frac{1}{p}-\mathrm{Re}\mu-m<\min\{0,m\mathrm{Re}\gamma\}$ y $\alpha+\beta+\gamma=0$

vi) $K^{-\alpha}_{x^m}x^{-m\beta}K^{-\gamma}_{x^m}\phi(x)=x^{m\gamma}K^{\beta}_{x^m}x^{m\alpha}\phi(x)$ si $-\frac{1}{p}-\mathrm{Re}\mu<\min\{0,m\mathrm{Re}\gamma\}$ y $\alpha+\beta+\gamma=0$

Dem. i) $$I^{\eta+\alpha,\beta}_{x^m}I^{\eta,\alpha}_{x^m}\phi(x)=\frac{m}{\Gamma(\beta)}x^{-m(\eta+\alpha)-m\beta}\int_0^x(x^m-u^m)^{\beta-1}u^{m(\eta+\alpha)+m-1}\Big[\frac{m}{\Gamma(\alpha)}u^{-m\eta-m\alpha}\cdot\int_0^u(u^m-t^m)^{\alpha-1}t^{m\eta+m-1}\phi(t)\,dt\Big]du$$

$$=\frac{m\,x^{-m\eta-m\alpha-m\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x(x^m-u^m)^{\beta-1}u^{m-1}\Big[m\int_0^u(u^m-t^m)^{\alpha-1}t^{m\eta+m-1}\phi(t)\,dt\Big]du=$$

$$=\frac{m\,x^{-m\eta-m\alpha-m\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x t^{m\eta+m-1}\phi(t)\Big[\int_t^x(x^m-u^m)^{\beta-1}(u^m-t^m)^{\alpha-1}mu^{m-1}\,du\Big]dt$$

efectuando el cambio de variable $u^m=x^m-[x^m-t^m]w$ tenemos

$$= \frac{m\, x^{-m\eta-m(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x t^{m\eta+m-1}\phi(t)\left[\int_0^1 (x^m-[x^m-(x^m-t^m)])^{\beta-1}(x^m-[x^m-t^m]w)^{\alpha-1}\cdot (t^m-x^m)\,dw\right]dt =$$

$$= \frac{m\, x^{-m\eta-m(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x t^{m\eta+m-1}\phi(t)\left[\int_0^1 (x^m-t^m)^{\beta-1} w^{\beta-1}(x^m-t^m)^{\alpha-1}(1-w)^{\alpha-1}\cdot (x^m-t^m)\,dw\right]dt =$$

$$= \frac{m\, x^{-m\eta-m(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x^m-t^m)^{\alpha+\beta-1}\, t^{m\eta+m-1}\quad \phi(t)\left[\int_0^1 w^{\beta-1}\,(1-w)^{\alpha-1}\,dw\right] dt =$$

$$= \frac{m\, x^{-m\eta-m(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x^m-t^m)^{\alpha+\beta-1} t^{m\eta+m-1}\quad B(\beta,\alpha)\ \phi(t)\,dt =$$

$$= \frac{m\, x^{-m\eta-m(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x (x^m-t^m)^{\alpha+\beta-1} t^{m\eta+m-1}\quad \phi(t)\ dt = I^{\eta,\alpha+\beta}_{x^m}\phi(x).$$

La demostración es para $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$. Una vez efectuada la continuación analítica para $I^{\eta,\alpha}_{x^m}$ se remplaza la restricción por $Re(m\eta + m\alpha + \mu) + m > \frac{1}{p}$.

ii) $$K^{\eta,\alpha}_{x^m} K^{\eta+\alpha,\beta}_{x^m}\ \phi(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} x^{m\eta}\int_x^\infty (u^m-x^m)^{\alpha-1} u^{-m\eta-m\alpha+m-1}\left[\frac{m}{\Gamma(\beta)} u^{m(\eta+\alpha)}\cdot \int_u^\infty (t^m-u^m)^{\beta-1} t^{-m(\eta+\alpha)-m\beta+m-1}\phi(t)\,dt\right]du =$$

$$= \frac{m\, x^{m\eta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_x^\infty (u^m-x^m)^{\alpha-1}\, mu^{m-1}\left[\int_u^\infty (t^m-u^m)^{\beta-1} t^{-m(\eta+\alpha)-m\beta+m-1}\phi(t)\,dt\right]du =$$

$$= \frac{m\, x^{m\eta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_x^\infty t^{-m\eta-m\alpha-m\beta+m-1}\ \phi(t)\left[\int_x^t (u^m-x^m)^{\alpha-1} m u^{m-1}(t^m-u^m)^{\beta-1}du\right]dt =$$

efectuando el cambio de variable $u^m = t^m - (t^m - x^m)\, w$

$$= \frac{m\,x^{m\eta}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_x^\infty t^{-m\eta-m(\alpha+\beta)+m-1}\phi(t)\left[\int_1^0 \left[t^m-(t^m-x^m)w-x^m\right]^{\alpha-1}\left[(t^m-x^m)w\right]^{\beta-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[-(t^m-x^m)\right]dw\right]dt =$$

$$= \frac{m\,x^{m\eta}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_x^\infty t^{-m\eta-m(\alpha+\beta)+m-1}\,\phi(t)\left[\int_0^1 (t^m-x^m)^{\alpha-1}(1-w)^{\alpha-1}(t^m-x^m)^{\beta-1}w^{\beta-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(t^m-x^m)\,dw\right]dt =$$

$$= \frac{m\,x^{m\eta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^\infty t^{-m\eta-m(\alpha+\beta)+m-1}(x^m-t^m)^{\alpha+\beta-1}\phi(t)\left[\int_0^1 w^{\beta-1}(1-w)^{\alpha-1}dw\right]dt =$$

$$= \frac{m\,x^{m\eta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (x^m-t^m)^{\alpha+\beta-1}t^{-m\eta-m(\alpha+\beta)+m-1}B(\beta,\alpha)\,\phi(t)\,dt =$$

$$= \frac{m\,x^{m\eta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_x^\infty (x^m-t^m)^{\alpha+\beta-1}\quad t^{-m\eta-m(\alpha+\beta)+m-1}\phi(t)\,dt = K_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta}\ \phi(x).$$

La demostración para $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}\beta>0$, $\mathrm{Re}(m\eta-\mu)>-\frac{1}{p}$ y al extender $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ analíticamente para α arbitrario, incluimos la restricción $\mathrm{Re}(m\eta+m\alpha-\mu)>-\frac{1}{p}$ en sustitución de $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ y $\mathrm{Re}\beta>0$.

iii) $$I_{x^m}^{\alpha}\,I_{x^m}^{\beta}\,\phi = x^{m\alpha}I_{x^m}^{0,\alpha}x^{m\beta}I_{x^m}^{0,\beta}\phi \ (\text{si } \mathrm{Re}\,\mu+m>\tfrac{1}{p}\quad;\ \mathrm{Re}(\mu+m\beta)+m>\tfrac{1}{p})$$

$$= x^{m\beta}x^{m\alpha}I_{x^m}^{\beta,\alpha}x^{-m\beta}x^{m\beta}\ I_{x^m}^{0,\beta}\phi \qquad \text{por } (5)$$

$$= x^{m(\alpha+\beta)}\,I_{x^m}^{\beta,\alpha}\,I_{x^m}^{0,\beta}\phi$$

$$= x^{m(\alpha+\beta)}\,I_{x^m}^{0,\alpha+\beta}\phi = I_{x^m}^{\alpha+\beta}\ \phi\,.$$

Intercambiando α y β, tenemos $I_{x^m}^{\beta}\,I_{x^m}^{\alpha}\,\phi = I_{x^m}^{\beta+\alpha}\,\phi$ con $\mathrm{Re}\,\mu+m>\frac{1}{p}$ y $\mathrm{Re}(\mu+m\alpha)+m>\frac{1}{p}$. De donde $I_{x^m}^{\alpha}\,I_{x^m}^{\beta}\phi = I_{x^m}^{\alpha+\beta}\ \phi =$ $= I_{x^m}^{\beta}\,I_{x^m}^{\alpha}\phi$ con las restricciones $\frac{1}{p}-\mathrm{Re}\mu-m<0$, $\frac{1}{p}-\mathrm{Re}\mu-m<m\,\mathrm{Re}\beta$ y $\frac{1}{p}-\mathrm{Re}\mu-m<m\,\mathrm{Re}\,\alpha$; i.e. $\frac{1}{p}-\mathrm{Re}\mu-m<\min\{0,\ m\mathrm{Re}\alpha\ ,\ m\mathrm{Re}\beta\}$.

iv) $K^{\alpha}_{x^m} K^{\beta}_{x^m}\phi = K^{0,\alpha}_{x^m}\, x^{m\alpha}\; K^{0,\beta}_{x^m}\, x^{m\beta}\phi$ si $Re(-m\beta-\mu) > -\frac{1}{p}$; $Re(-m\beta-m\alpha-\mu) > -\frac{1}{p}$

$= K^{0,\alpha}_{x^m}\, x^{m\alpha}\, x^{-m\alpha} K^{\alpha,\beta}_{x^m}\, x^{m\beta}\, x^{m\alpha}\phi$ por (5')

$= K^{0,\alpha}_{x^m}\, K^{\alpha,\beta}_{x^m}\, x^{m(\alpha+\beta)}\phi$

$= K^{0,\alpha+\beta}_{x^m}\, x^{m(\alpha+\beta)}\phi = K^{\alpha+\beta}_{x^m}\phi$

Intercambio α y β tenemos que

$K^{\beta}_{x^m} K^{\alpha}_{x^m}\phi = K^{\beta+\alpha}_{x^m}\phi$ para $Re(-m\alpha-\mu) > -\frac{1}{p}$; $Re(-m\beta-m\alpha-\mu) > -\frac{1}{p}$,

de donde

$K^{\alpha}_{x^m} K^{\beta}_{x^m}\phi = K^{\alpha+\beta}_{x^m}\phi = K^{\beta}_{x^m} K^{\alpha}_{x^m}\phi$ con las restricciones

$\frac{1}{p} - Re\mu > m\,Re\beta$; $\frac{1}{p} - Re\mu > mRe(\alpha+\beta)$ y $\frac{1}{p} - Re\mu >$ mRe ; i.e.

$\frac{1}{p} - Re\mu > \text{máx}\{mRe\alpha, mRe\beta, mRe(\alpha+\beta)\}$.

v) Sean los complejos α, β, γ tales que $\alpha+\beta+\gamma = 0$.

$I^{-\gamma}_{x^m} x^{-m\beta} I^{-\alpha}_{x^m}\phi = x^{-m\gamma} I^{0,-\gamma}_{x^m} x^{-m\beta} x^{-m\alpha} I^{0,-\alpha}_{x^m}\phi$ si $Re\mu + m > \frac{1}{p}$ y $Re(\mu - m\alpha - m\beta) + m > \frac{1}{p}$

$= x^{-m\gamma} I^{0,-\gamma}_{x^m} x^{-m(\beta+\alpha)} x^{m(\beta+\alpha)} I^{\beta+\alpha,-\alpha}_{x^m} x^{-m(\alpha+\beta)}\phi$; por (5)

$= x^{-m\gamma} I^{0,-\gamma}_{x^m}\, I^{-\gamma,-\alpha}_{x^m} x^{m\gamma}\phi$

$= x^{-m\gamma} I^{0,-\alpha-\gamma}_{x^m} x^{m\gamma}\phi$

$= x^{m\alpha} x^{m\beta} I^{0,\beta}_{x^m}\, x^{m\gamma}\phi = x^{m\alpha} I^{\beta}_{x^m} x^{m\gamma}\phi$.

Entonces $I^{-\gamma}_{x^m} x^{-m\beta} I^{-\alpha}_{x^m}\phi = x^{m\alpha} I^{\beta}_{x^m} x^{m\gamma}\phi$ si

$\frac{1}{p} - m - Re\mu < 0$ y $\frac{1}{p} - m - Re\mu < m\,Re(-\alpha-\beta) = mRe\gamma$. i.e.

$\frac{1}{p} - m - Re\mu < \min\{0, mRe\gamma\}$.

vi) Sean α, , γ complejos tales que $\alpha+\beta+\gamma = 0$.

$K^{-\alpha}_{x^m} x^{-m\beta}\; K^{-\gamma}_{x^m}\phi = K^{0,-\alpha}_{x^m} x^{-m\alpha} x^{-m\beta} K^{0,-\gamma}_{x^m} x^{-m\gamma}\phi$ si $Re(-[\mu - m\gamma]) > -\frac{1}{p}$ y $Re(-[\mu - m\gamma - m\beta - m\alpha]) > -\frac{1}{p}$

$= x^{-m(\alpha+\beta)} K^{\alpha+\beta,-\alpha}_{x^m} x^{m(\alpha+\beta)} x^{-m\alpha} x^{-m\beta} K^{0,-\gamma}_{x^m} x^{-m\gamma}\phi$; por (5')

$$= x^{m\gamma} K_{x^m}^{-\gamma-\alpha} K_{x^m}^{0,-\gamma} x^{-m\gamma}\phi =$$

$$= x^{m\gamma} K_{x^m}^{0,-\gamma-\alpha} x^{-m\gamma}\phi =$$

$$= x^{m\gamma} K_{x^m}^{0,\beta} \; x^{m(\beta+\alpha)}\phi = x^{m\gamma} K_{x^m}^{\beta} x^{m\alpha}\phi.$$

De donde $K_{x^m}^{-\alpha} x^{-m\beta} K_{x^m}^{-\gamma} \phi = x^{m\gamma} K_{x^m}^{\beta} x^{m\alpha}\phi$ con las condiciones

$-\frac{1}{p} + \mathrm{Re}\,\mu < m\mathrm{Re}\,\gamma$ y $-\frac{1}{p} + \mathrm{Re}\,\mu < m\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma) = 0$, i.e.

$-\frac{1}{p} + \mathrm{Re}\,\mu < \min\{0, m\mathrm{Re}\,\gamma\}$. ///

TEOREMA 2.17.- Sea $f \in F'_{p,\mu}$, entonces

i) $I_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} I_{x^m}^{\eta,\alpha} f = I_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta} f$ si $\mathrm{Re}(m\eta - \mu) + m > \frac{1}{q}$, $\mathrm{Re}(m\eta + m\alpha - \mu) + m > \frac{1}{q}$

ii) $K_{x^m}^{\eta,\alpha} K_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} f = K_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta} f$ si $\mathrm{Re}(m\eta + \mu) > -\frac{1}{q}$, $\mathrm{Re}(m\eta + m\alpha + \mu) > -\frac{1}{q}$

iii) $I_{x^m}^{\alpha} I_{x^m}^{\beta} f = I_{x^m}^{\alpha+\beta} f = I_{x^m}^{\beta} I_{x^m}^{\alpha} f$ si $\frac{1}{q} - m + \mathrm{Re}\,\mu < \min\{0, m\mathrm{Re}\;, m\mathrm{Re}\,\beta\}$

iv) $K_{x^m}^{\alpha} K_{x^m}^{\beta} f = K_{x^m}^{\alpha+\beta} f = K_{x^m}^{\beta} K_{x^m}^{\alpha} \phi$ si $\frac{1}{q} + \mathrm{Re}\,\mu > \max\{m\mathrm{Re}\,\alpha, m\mathrm{Re}\,\beta, m\mathrm{Re}(\alpha+\beta)\}$

v) $I_{x^m}^{-\gamma} x^{-m\beta} I_{x^m}^{-\alpha} f = x^{m\alpha} I_{x^m}^{\beta} x^{m\gamma} f$ si $\frac{1}{q} - m + \mathrm{Re}\,\mu < \min\{0, m\mathrm{Re}\,\gamma\}$ y $\alpha+\beta+\gamma = 0$

vi) $K_{x^m}^{-\alpha} x^{-m\beta} K_{x^m}^{-\gamma} f = x^{m\gamma} K_{x^m}^{\beta} x^{m\alpha} f$ si $-\frac{1}{q} - \mathrm{Re}\,\mu < \min\{0, m\mathrm{Re}\,\gamma\}$ y $\alpha+\beta+\gamma = 0$.

Dem. Sea ϕ $F_{p,\mu}$:

i) $\left(I_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} I_{x^m}^{\eta,\alpha} f, \phi\right) = \left(I_{x^m}^{\eta,\alpha} f,\ K_{x^m}^{\eta+\alpha+1-\frac{1}{m},\beta}\phi\right) =$

$= \left(f, K_{x^m}^{\eta+1-\frac{1}{m},\alpha} K_{x^m}^{\eta+1-\frac{1}{m}+\alpha,\beta}\phi\right) =$

$= \left(f,\ K_{x^m}^{\eta+1-\frac{1}{m},\alpha+\beta}\phi\right)$ si $\mathrm{Re}(m[\eta+1-\frac{1}{m}] -\mu) > -\frac{1}{p}$

y $\mathrm{Re}(m[\eta+1-\frac{1}{m}]+m\alpha-\mu) > -\frac{1}{p}$

$= \left(I_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta} f, \phi\right)$ (por (ii) del teorema anterior)

De donde $I_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} I_{x^m}^{\eta,\alpha} f = I_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta} f$ cuando $\mathrm{Re}(m\eta - \mu)+m > 1-\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ y $\mathrm{Re}(m\eta + m\alpha - \mu)+m > 1-\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$.

ii) $\left(K_{x^m}^{\eta,\alpha} K_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} f, \phi\right) = \left(K_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} f, I_{x^m}^{\eta-1+\frac{1}{m},\alpha}\phi\right) =$

$= \left(f, I_{x^m}^{\eta+\alpha-1+\frac{1}{m},\beta} I_{x^m}^{\eta-1+\frac{1}{m},\alpha}\phi\right) =$

$= \left(f, I_{x^m}^{\eta-1+\frac{1}{m},\alpha+\beta}\phi\right) =$ si $\mathrm{Re}(m[\eta-1+\frac{1}{m}]+m\alpha+\mu)+m > \frac{1}{p}$

y $\mathrm{Re}(m[\eta-1+\frac{1}{m}]+\mu)+m > \frac{1}{p}$;

$= \left(K_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta} f, \phi\right)$ (por (i) del teorema anterior)

De donde $K_{x^m}^{\eta,\alpha} K_{x^m}^{\eta+\alpha,\beta} f = K_{x^m}^{\eta,\alpha+\beta} f$ cuando $\mathrm{Re}(m\eta+m\alpha+\mu) > \frac{1}{p}-1 = -\frac{1}{q}$ y $\mathrm{Re}(m\eta+\mu) > \frac{1}{p}-1 = -\frac{1}{q}$.

ii) $I_{x^m}^{\alpha} I_{x^m}^{\beta} f$, por el teorema 2.14 requiere las restricciones

$m - \mathrm{Re}\mu > \frac{1}{q}$ y $m-\mathrm{Re}(\mu - m\beta) > \frac{1}{q}$; además

$\left(I_{x^m}^{\beta} I_{x^m}^{\alpha} f, \phi\right)$ requiere las condiciones $m-\mathrm{Re}\mu > \frac{1}{q}$ y $m-\mathrm{Re}(\mu-m\alpha) > \frac{1}{q}$.

Luego,

$\left(I_{x^m}^{\alpha} I_{x^m}^{\beta} f, \phi\right) = \left(I_{x^m}^{\beta} f, x^{m-1} K_{x^m}^{\alpha} x^{-m+1}\phi\right) =$

$= \left(f, x^{m-1} K_{x^m}^{\beta} x^{-m+1} x^{m-1} K_{x^m}^{\alpha} x^{-m+1}\phi\right) =$

$= \left(f, x^{m-1} K_{x^m}^{\beta} K_{x^m}^{\alpha} x^{-m+1}\phi\right) =$

$= \left(f, x^{m-1} K_{x^m}^{\beta+\alpha} x^{-m+1}\phi\right) = \left(I_{x^m}^{\beta+\alpha} f, \phi\right)$ con las restricciones

$\frac{1}{q}$ +Reμ -m < 0 y $\frac{1}{q}$ +Reμ -m < mReβ. Intercambiando α y β tenemos la restricción $\frac{1}{q}$ + Reμ -m < mRe , de donde

$$I^{\alpha}_{x^m} I^{\beta}_{x^m} f = I^{\alpha+\beta}_{x^m} f = I^{\beta}_{x^m} I^{\alpha}_{x^m} f \quad \text{con la restricción}$$

$\frac{1}{p}$ +Reμ -m < min$\{0, \text{mRe}\alpha, \text{mRe}\beta\}$.

iv) $K^{\alpha}_{x^m}\ K^{\beta}_{x^m} f$, por el teorema 2.15 requiere las restricciones

$$\mathrm{Re}(m\beta-\mu) < \frac{1}{q} \ \text{ y } \ \mathrm{Re}(m\alpha - [\mu - m\beta]) < \frac{1}{q}.$$

$$(K^{\alpha}_{x^m} K^{\beta}_{x^m} f,\ \phi) = (K^{\beta}_{x^m} f, x^{m-1} I^{\alpha}_{x^m} x^{-m+1} \phi) =$$
$$= (f, x^{m-1} I^{\beta}_{x^m}\ x^{-m+1} x^{m-1} I^{\alpha}_{x^m} x^{-m+1} \phi) =$$
$$= (f, x^{m-1} I^{\beta}_{x^m}\ I^{\alpha}_{x^m} x^{-m+1} \phi) =$$
$$= (f, x^{m-1}\ I^{\beta+\alpha}_{x^m}\ x^{-m+1} \phi) = (K^{\beta+\alpha}_{x^m} f,\ \phi).$$

Intercambiando α y β bajo la restricción adicional Re($m\alpha - \mu$) < $\frac{1}{q}$, tenemos

$$K^{\alpha}_{x^m}\ K^{\beta}_{x^m} f = K^{\alpha+\beta}_{x^m} f = K^{\beta}_{x^m}\ K^{\alpha}_{x^m} f \quad \text{con las restricciones}$$

$\frac{1}{q}$ +Reμ > mReβ , $\frac{1}{q}$ +Reμ > mRe($\alpha+\beta$) y $\frac{1}{q}$ +Reμ > mReα, i.e.

$\frac{1}{q}$ +Reμ > máx $\{$ mReα, mReβ,mRe($\alpha+\beta$)$\}$.

v) $I^{-\gamma}_{x^m} x^{-m\beta} I^{-\alpha}_{x^m} f$, con $\alpha+\beta+\gamma=0$, por los teoremas 2.05 y 2.14 requiere las restricciones

m-Reμ > $\frac{1}{q}$ y m-Re($\mu + m\alpha + m\beta$)> $\frac{1}{q}$, i.e.

$\frac{1}{q}$+Reμ-m<0 y $\frac{1}{q}$+Reμ -m < mRe($-\alpha-\beta$)= mReγ

$$(I^{-\gamma}_{x^m}\ x^{-m\beta} I^{-\alpha}_{x^m} f,\ \phi) = (x^{-m\beta} I^{-\alpha}_{x^m} f, x^{m-1} K^{-\gamma}_{x^m} x^{-m+1} \phi) =$$
$$= (I^{-\alpha}_{x^m} f,\ x^{-m\beta} x^{m-1} K^{-\gamma}_{x^m}\ x^{-m+1} \phi) =$$
$$= (f,\ x^{m-1} K^{-\alpha}_{x^m} x^{-m+1} x^{-m\beta} x^{m-1} K^{-\gamma}_{x^m}\ x^{-m+1} \phi) =$$
$$= (f,\ x^{m-1} K^{-\alpha}_{x^m}\ x^{-m\beta} K^{-\gamma}_{x^m}\ x^{-m+1} \phi)$$

$$=\left(f, x^{m-1}x^{m\gamma}K_{x^m}^{\beta}\, x^{m\alpha}x^{-m+1}\phi\right)=$$

$$=\left(f, x^{m\gamma}x^{m-1}K_{x^m}^{\beta}\, x^{-m+1}x^{m\alpha}\phi\right)=$$

$$=\left(x^{m\gamma}f,\ x^{m-1}K_{x^m}^{\beta}\, x^{-m+1}x^{m\alpha}\phi\right)=$$

$$=\left(I_{x^m}^{\beta}x^{m\gamma}f, x^{m\alpha}\phi\right)=\left(x^{m\alpha}I_{x^m}^{\beta}x^{m\gamma}f,\phi\right)$$. De donde

$$I_{x^m}^{-\gamma}x^{-m\beta}I_{x^m}^{-\alpha}f\ =\ x^{m\alpha}I_{x^m}^{\beta}x^{m\gamma}f \quad \text{si} \quad \tfrac{1}{q}+\mathrm{Re}\,\mu-m<\min\{0,m\mathrm{Re}\,\gamma\}.$$

vi) Sea $\alpha+\beta+\gamma=0$. Por los teoremas 2.05 y 2.15, $K_{x^m}^{-\alpha}x^{-m\beta}K_{x^m}^{-\gamma}f$ requiere las restricciones $\mathrm{Re}(m(-\gamma)-\mu)<\frac{1}{q}$ y $\mathrm{Re}(m(-\alpha)-[\mu+m\gamma+m\beta])<\frac{1}{q}$, i.e.

$-\frac{1}{q}-\mathrm{Re}\,\mu<m\mathrm{Re}\,\gamma$ y $-\frac{1}{q}-\mathrm{Re}\,\mu<m\ \mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma)=0.$

$$\left(K_{x^m}^{-\alpha}x^{-m\beta}K_{x^m}^{-\gamma}f,\phi\right)=\left(x^{-m\beta}K_{x^m}^{-\gamma}f,\ x^{m-1}I_{x^m}^{-\alpha}x^{-m+1}\phi\right)=$$

$$=\left(K_{x^m}^{-\gamma}f, x^{-m\beta}x^{m-1}I_{x^m}^{-\alpha}x^{-m+1}\phi\right)=$$

$$=\left(f,\ x^{m-1}I_{x^m}^{-\gamma}x^{-m+1}x^{-m\beta}x^{m-1}I_{x^m}^{-\alpha}x^{-m+1}\phi\right)=$$

$$=\left(f,\ x^{m-1}I_{x^m}^{-\gamma}x^{-m\beta}I_{x^m}^{-\alpha}x^{-m+1}\phi\right)=$$

$$=\left(f, x^{m-1}x^{m\alpha}I_{x^m}^{\beta}x^{m\gamma}x^{-m+1}\phi\right)=$$

$$=\left(f, x^{m\alpha}x^{m-1}I_{x^m}^{\beta}x^{-m+1}x^{m\gamma}\phi\right)=$$

$$=\left(x^{m\alpha}f, x^{m-1}I_{x^m}^{\beta}x^{-m+1}x^{m\gamma}\phi\right)=$$

$$=\left(I_{x^m}^{\beta}x^{m\alpha}f, x^{m\gamma}\phi\right)=\left(x^{m\gamma}I_{x^m}^{\beta}x^{m\alpha}f,\phi\right).$$

De donde $K_{x^m}^{-\alpha}x^{-m\beta}K_{x^m}^{-\gamma}f\ =\ x^{m\gamma}I_{x^m}^{\beta}x^{m\alpha}f$ si

$-\frac{1}{q}-\mathrm{Re}\,\mu<\min\{0,m\mathrm{Re}\,\gamma\}$. ///

CAPITULO TERCERO

UNA APLICACION

A) SOLUCION DE LA ECUACION $\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{d\phi}{dx}=\Psi$.

DEF. 3.01.- Sean L_ν, ν complejo arbitrario, el operador sobre $F_{p,\mu}$ definido por $L_\nu\phi(x) = \frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{d\phi}{dx}$.
Podemos redefinir el operador L_ν como $x^{-2}\left[\delta^2+2\nu\delta\right]$, y de acuerdo con el teorema 2.04, L_ν es un mapeo lineal continuo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu-2}$.

TEOREMA 3.01.- Si $\operatorname{Re}(2\nu+\mu)\neq\frac{1}{p}$ y $\operatorname{Re}\mu\neq\frac{1}{p}$, L_ν es invertible. Es decir, para cada $\phi\in F_{p,\mu-2}$, $L_\nu\phi=\Psi$ tiene una única solución $\phi\in F_{p,\mu}$ de la forma

i) $\phi = I_x^1\, x^{-2\nu-1} I_x^1\, x^{2\nu+1}\Psi$ si $\operatorname{Re}(2\nu+\mu)>\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re}\mu>\frac{1}{p}$

ii) $\phi = -K_x^1\, x^{-2\nu-1} I_x^1\, x^{2\nu+1}\Psi$ si $\operatorname{Re}(2\nu+\mu)>\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{p}$

iii) $\phi = -I_x^1\, x^{-2\nu-1} K_x^1\, x^{2\nu+1}\Psi$ si $\operatorname{Re}(2\nu+\mu)<\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re}\mu>\frac{1}{p}$

iv) $\phi = K_x^1\, x^{-2\nu-1}\, K_x^1 x^{2\nu+1}\Psi$ si $\operatorname{Re}(2\nu+\mu)<\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{p}$.

Demostración:

a) De la relación (11), $\frac{d}{dx}\phi=I_x^{-1}\phi$ y por el teorema 2.10, I_x^{-1} es un isomorfismo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu-1}$, con inversa I_x^1 si $\operatorname{Re}(\mu-1)+1>\frac{1}{p}$ y $\operatorname{Re}\mu+1>\frac{1}{p}$, satisfaciéndoce ambas restricciones con $\operatorname{Re}\mu>\frac{1}{p}$.

Si $D=\frac{d}{dx}$, entonces $D^{-1}= I_x^1$ si $\mathrm{Re}\,\mu > \frac{1}{p}$.

b) De la relación (11') $\frac{d}{dx}\phi = -K_x^{-1}\phi$ y por el teorema 2.11, K_x^{-1} es un isomorfismo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu-1}$, con inversa K_x^1 si $\mathrm{Re}(\mu-1) < \frac{1}{p}$ y $\mathrm{Re}\,\mu < \frac{1}{p}$, donde $\mathrm{Re}\,\mu < \frac{1}{p}$ satisface ambas restricciones. Si $D=\frac{d}{dx}$, entonces $D^{-1}= -K_x^1$ si $\mathrm{Re}\,\mu < \frac{1}{p}$.

c) Por el teorema 2.04, $x^{2\nu+1}$ es un isomorfismo de $F_{p,\mu-1}$ sobre $F_{p,\mu+2\nu}$ con inversa $x^{-2\nu-1}$.

La ecuación $\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d\phi}{dx} = \psi$ se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2\nu+1}\frac{d\phi}{dx}\right) = x^{2\nu+1}\psi \quad , \qquad \text{con} \quad \phi\in F_{p,\mu}.$$

i) Sea $\mathrm{Re}\,\mu > \frac{1}{p}$ en la ecuación continua $\frac{d}{dx}\left(x^{2\nu+1} I_x^{-1}\phi\right) = x^{2\nu+1}\psi$ X . Si además $\mathrm{Re}(2\nu+\mu) > \frac{1}{p}$, entonces

$I_x^{-1}x^{2\nu+1}I_x^{-1}\phi = x^{2\nu+1}\psi$ y usando (a) se tiene

$$x^{2\nu+1}I_x^{-1}\phi = I_x^1 x^{2\nu+1}\psi$$
$$I_x^{-1}\phi = x^{-2\nu-1}I_x^1 x^{2\nu+1}\psi$$
$$\phi = I_x^1 x^{-2\nu-1}I_x^1 x^{2\nu+1}\psi.$$

ii) Sea $\mathrm{Re}\,\mu < \frac{1}{p}$ y $\mathrm{Re}(2\nu+\mu) > \frac{1}{p}$. La ecuación queda

$I_x^{-1}x^{2\nu+1}(-K_x^{-1}\phi) = x^{2\nu+1}\psi$, y usando (a) y (b),

$$x^{2\nu+1}(-K_x^{-1}\phi) = I_x^1 x^{2\nu+1}\psi$$
$$-K_x^{-1}\phi = x^{-2\nu-1}I_x^1 x^{2\nu+1}\psi$$
$$\phi = -K_x^1 x^{-2\nu-1}I_x^1 x^{2\nu+1}\psi.$$

iii) Sea $\operatorname{Re}\mu > \frac{1}{p}$ y $\operatorname{Re}(2\nu+\mu) < \frac{1}{p}$. La ecuación queda

$$-K_x^{-1} x^{2\nu+1} I_x^{-1}\phi = x^{2\nu+1}\psi,$$ y usando (a) y (b),

$$x^{2\nu+1} I_x^{-1}\phi = -K_x^{1} x^{2\nu+1}\psi$$

$$I_x^{-1}\phi = -x^{-2\nu-1}K_x^{1}x^{2\nu+1}\psi$$

$$\phi = -I_x^{1}x^{-2\nu-1}K_x^{1}x^{2\nu+1}\psi.$$

iv) Sea $\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{p}$ y $\operatorname{Re}(2\nu+\mu) < \frac{1}{p}$. La ecuación queda

$$-K_x^{-1}x^{2\nu+1}\left(-K_x^{-1}\phi\right) = x^{2\nu+1}\psi$$

$$x^{2\nu+1}\left(-K_x^{-1}\phi\right) = -K_x^{1}x^{2\nu+1}\psi$$

$$-K_x^{-1}\phi = -x^{-2\nu-1}K_x^{1}x^{2\nu+1}\psi$$

$$\phi = K_x^{1}x^{-2\nu-1}K_x^{1}x^{2\nu+1}\psi. \quad ///$$

B) *SOLUCION EN EL ESPACIO DUAL*

Para definir el operador L_ν sobre el espacio de funciones generalizadas $F'_{p,\mu}$ usamos operadores adjuntos:

$$xL_\nu x\phi = x\left[\frac{d^2}{dx^2}(x\phi) + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}(x\phi)\right] =$$

$$= x\frac{d^2}{dx^2}(x\phi) + \frac{d}{dx}(x\phi) + 2\nu\frac{d}{dx}(x\phi),$$ pero $\delta'(\phi) = \frac{d}{dx}(x\phi)$

y $\delta'^2(\phi) = x\frac{d^2}{dx}(x\phi) + \frac{d}{dx}(x\phi)$, de donde

$$xL_\nu x\phi = \delta'^2(\phi) + 2\nu\delta'(\phi).$$

Como $x^2L_\nu = \delta^2 + 2\nu\delta$, $xL_{-\nu}x = \delta'^2 - 2\nu\delta'$ y δ y $-\delta'$ son operadores adjuntos (Def. 2.04), tenemos que x^2L_ν y $xL_{-\nu}x$ son adjuntos. Hacemos $\phi = x^2\psi$ con $\psi \in F_{p,\mu}$ y tomamos $f \in F'_{p,\mu}$.

$$(L_\nu f, \phi) = (L_\nu f, x^2\psi) = (x^2L_\nu f, \psi) = (f, xL_{-\nu}x\psi) = (f, xL_{-\nu}x^{-1}\phi)$$

DEF. 3.02.- Sea $f \in Fp'_{,\mu}$, para ν complejo arbitrario definimos el operador L_ν como $(L_\nu f, \phi) = (f, x L_{-\nu} x^{-1}\phi)$ con $\phi \in Fp_{,\mu+2}$

Como $XL_\nu X^{-1}\phi$ es un mapeo lineal continuo de $Fp_{,\mu+2}$ en $Fp_{,\mu}$, entonces por el teorema 1.02, L_ν es un mapeo lineal continuo de $Fp'_{,\mu}$ en $Fp'_{,\mu+2}$.

TEOREMA 3.02.- Si $\mathrm{Re}(2\nu-\mu) \neq \frac{1}{q}$ y $-\mathrm{Re}\mu \neq \frac{1}{q}$, L_ν es invertible. Es decir, para cada $g \in Fp'_{,}$, la ecuación $L_\nu f = g$ tiene una única solución $f \in Fp'_{,\mu}$ de la forma siguiente:

a) $f = I_x^1 x^{-2\nu-1} I_x^1 x^{2\nu+1} g$ si $\mathrm{Re}(2\nu-\mu) > \frac{1}{q}$, $-\mathrm{Re}\mu > \frac{1}{q}$

b) $f = -K_x^1 x^{-2\nu-1} I_x^1 x^{2\nu+1} g$ si $\mathrm{Re}(2\nu-\mu) > \frac{1}{q}$, $-\mathrm{Re}\mu < \frac{1}{q}$

c) $f = -I_x^1 x^{-2\nu-1} K_x^1 x^{2\nu+1} g$ si $\mathrm{Re}(2\nu-\mu) < \frac{1}{q}$, $-\mathrm{Re}\mu > \frac{1}{q}$

d) $f = K_x^1 x^{-2\nu-1} K_x^1 x^{2\nu+1} g$ si $\mathrm{Re}(2\nu-\mu) < \frac{1}{q}$, $-\mathrm{Re}\mu < \frac{1}{q}$.

Demostración:

En el teorema anterior sustituimos μ, ν.

Por (i), si $\mathrm{Re}(\mu+1-2\nu) < \frac{1}{p}$, $\mathrm{Re}(\mu+1) < \frac{1}{p}$, i.e.

$\mathrm{Re}(2\nu-\mu) > \frac{1}{q}$, $-\mathrm{Re}\mu > \frac{1}{q}$

$$L_{-\nu}^{-1} = K_x^1 x^{2\nu-1} K_x^1 x^{-2\nu+1}.$$

Por (iii), si $\mathrm{Re}(\mu+1-2\nu) < \frac{1}{p}$, $\mathrm{Re}(\mu+1) > \frac{1}{p}$, i. e.

$\mathrm{Re}(2\nu-\mu) > \frac{1}{q}$, $-\mathrm{Re}\mu < \frac{1}{q}$

$$L_{-\nu}^{-1} = -I_x^1 x^{2\nu-1} K_x^1 x^{-2\nu+1}.$$

Por (ii), si $\operatorname{Re}(\mu+1-2\nu) > \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re}(\mu+1) < \frac{1}{p}$, i.e.

$\operatorname{Re}(2\nu-\mu) < \frac{1}{q}$, $-\operatorname{Re}\mu > \frac{1}{q}$

$$L_{-\nu}^{-1} = -K_x^1\, x^{2\nu-1} I_x^1\, x^{-2\nu+1}.$$

Por (i), si $\operatorname{Re}(\mu+1-2\nu) > \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re}(\mu+1) > \frac{1}{p}$, i.e.

$\operatorname{Re}(2\nu-\mu) < \frac{1}{q}$, $-\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{q}$

$$L_{-\nu}^{-1} = I_x^1\, x^{2\nu-1} I_x^1\, x^{-2\nu+1}$$

Por el teorema 1.03, $L_\nu^{-1} = \left[\left(x L_{-\nu} x^{-1}\right)^{-1}\right]' = \left[x L_{-\nu}^{-1} x^{-1}\right]' = x^{-1}\left(L_{-\nu}^{-1}\right)' x$.

a) Si $\operatorname{Re}(2\nu-\mu) > \frac{1}{q}$ y $-\operatorname{Re}\mu > \frac{1}{q}$,

$$\begin{aligned}
L_\nu^{-1} &= x^{-1}\left(K_x^1\, x^{2\nu-1} K_x^1\, x^{-2\nu+1}\right)' x = \\
&= x^{-1} x^{-2\nu+1} I_x^1\, x^{2\nu-1} I_x^1\, x = \\
&= x^{-2\nu} I_x^1\, x^{2\nu-1} I_x^1\, x = \qquad \text{usando leyes de índices} \\
&= I_x^{1-2\nu} x^{-1} I_x^{2\nu} I_x^1\, x = \\
&= I_x^{1-2\nu} x^{-1} I_x^{2\nu} I_x^1\, x = \\
&= I_x^1 \left(I_x^{-2\nu} x^{-1} I_x^{2\nu+1}\right) x = \\
&= I_x^1\, x^{-2\nu-1} I_x^1\, x^{2\nu} x = I_x^1\, x^{-2\nu-1} I_x^1\, x^{2\nu+1},
\end{aligned}$$

lo que implica que $L_\nu f = g$ tiene como solución

$$f = I_x^1\, x^{-2\nu-1} I_x^1\, x^{2\nu+1} g.$$

b) Si $\operatorname{Re}(2\nu-\mu) > \frac{1}{q}$ y $-\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{q}$,

$L_\nu^{-1} = \left[x L_{-\nu}^{-1} x^{-1}\right]'$. Por iii),

$$\begin{aligned}
L_\nu^{-1} &= \left[-x I_x^1\, x^{2\nu-1} K_x^1\, x^{-2\nu+1} x^{-1}\right]' = \left[-x I_x^1\, x^{2\nu-1} K_x^1\, x^{-2\nu}\right]' = \\
&= \left[-x x\, I_x^{0,1} x^{2\nu-1} K_x^{0,1} x\, x^{-2\nu}\right]' = \left[-x^2 I_x^{0,1} x^{2\nu-1} x^{-2\nu+1} K_x^{2\nu-1,1} x^{-2\nu+1} x^{2\nu-1}\right] = \\
&= \left[-x^2 I_x^{0,1} K_x^{2\nu-1,1}\right]' = \left[-x^2 K_x^{2\nu-1,1} I_x^{0,1}\right]' = \\
&= \left[-x^2 x^{2\nu-1} K_x^{2\nu-1-(2\nu-1),1} x^{1-2\nu} I_x^{0,1}\right]' = \left[-x^{2\nu+1} K_x^{0,1} x^{1-2\nu} I_x^{0,1}\right]' = \\
&= \left[-x^{2\nu+1} K_x^1\, x^{-1} x^{1-2\nu} x^{-1} I_x^1\right]' = -K_x^1\, x^{-1-2\nu} I_x^1\, x^{2\nu+1},
\end{aligned}$$

y por consiguiente $f = -K_x^1\, x^{-1-2\nu} I_x^1\, x^{2\nu+1} g$.

(c) Si $\mathrm{Re}(2\nu-\mu)<\frac{1}{q}$) y $-\mathrm{Re}\mu>\frac{1}{q}$,

$L_\nu^{-1} = \left[x\, L_{-\nu}^{-1}\, x^{-1}\right]'$. Por (ii),

$$L_\nu^{-1} = \left[-x\, K_x^{1}\, x^{2\nu-1}\, I_x^{1}\, x^{-2\nu+1}\, x^{-1}\right]' = \left[-x\, K_x^{1}\, x^{2\nu-1} I_x^{1}\, x^{-2\nu}\right]' =$$

$$= \left[-x\, K_x^{0,1}\, x\, x^{2\nu-1} x\, I_x^{0,1}\, x^{-2\nu}\right]' = \left[-x\, K_x^{0,1}\, x^{2\nu+1}\, I_x^{0,1}\, x^{-2\nu}\right]' =$$

$$= \left[-x\, K_x^{0,1}\, x^{2\nu+1}\, x^{-(2\nu+1)} I_x^{-2\nu-1,1} x^{2\nu+1}\, x^{-2\nu}\right]' =$$

$$= \left[-x\, K_x^{0,1}\, I_x^{-2\nu-1,1}\, x\right]' = \left[-x\, I_x^{-2\nu-1}\, K_x^{0,1}\, x\right]' =$$

$$= \left[-x\, x^{2\nu+1}\, I_x^{-2\nu-1+(2\nu+1),1}\, x^{-2\nu-1} K_x^{0,1}\, x\right]' =$$

$$= \left[-x^{2\nu+2}\, I_x^{0,1}\, x^{-2\nu-1} K_x^{0,1}\, x\right]' = \left[-x^{2\nu+2}\, x^{-1}\, I_x^{1}\, x^{-2\nu-1}\, K_x^{1}\right]' =$$

$$= \left[-x^{2\nu+1} I_x^{1}\, x^{-2\nu-1}\, K_x^{1}\right]' = -\, I_x^{1}\, x^{-2\nu-1}\, K_x^{1}\, x^{2\nu+1},$$

lo que implica que $f= -\, I_x^{1}\, x^{-2\nu-1}\, K_x^{1}\, x^{2\nu+1} g$

(d) Si $\mathrm{Re}(2\nu-\mu)<\frac{1}{q}$ y $-\mathrm{Re}\mu<\frac{1}{q}$

$L_\nu^{-1} = \left[x\, L_{-\nu}^{-1}\, x^{-1}\right]'$ por (i)

$$L_\nu^{-1} = \left[x\, I_x^{1}\, x^{2\nu-1} I_x^{1}\, x^{-2\nu+1}\, x^{-1}\right]' = \left[x\, I_x^{1}\, x^{2\nu-1} I_x^{1}\, x^{-2\nu}\right]' =$$

$$= \left[x\, I_x^{1}\, I_x^{2\nu} x^{-1} I_x^{1-2\nu}\right]' = \left[x\, I_x^{1+2\nu} x^{-1}\, I_x^{-2\nu} I_x^{1}\right]' =$$

$$= \left[x\, x^{2\nu} I_x' \; x^{-1-2\nu} I_x' \right]' \quad = \left[x^{2\nu+1} I_x' \; x^{-2\nu-1} I_x' \right]' =$$

$$= K_x' \; x^{-2\nu-1} K_x' \; x^{2\nu+1} \quad , \quad \text{y entonces}$$

$f = K_x' x^{-2\nu-1} K_x' x^{2\nu+1} g$. ///

CAPITULO CUARTO

CAMPOS DE APLICACION Y PROBLEMAS ABIERTOS

En este capítulo mencionamos, a manera de ejemplo, tres campos de aplicación del cálculo fraccional y terminamos planteando algunas preguntas de interés para el avance del tema y que se encuentran aún (posiblemente) sin responder.

A) *TEORIA DE FUNCIONES.*

Los operadores diferenciales e integrales generalizados desde el punto de vista más reciente

$$ {}_{x_0}D_x^{\mu} f = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x-x_0}{n}\right)^{-\mu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\mu}{k} f\left(x - k\frac{x-x_0}{n}\right) $$

brindan una marcada extensión en la técnica del Cálculo, de manera tal que las reglas más importantes de integración y diferenciación de funciones elementales quedan involucradas en otras más generales.

Thomas J. Osler ha extendido la regla de Leibniz de la manera siguiente:

$$ \frac{d^q}{dx^q}[fg] = \sum_{J=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-\gamma-J+1)\,\Gamma(\gamma+J+1)} \; \frac{d^{q-\gamma-J}}{dx^{q-\gamma-J}} f \; \frac{d^{\gamma+J}}{dx^{\gamma+J}} g, $$

donde γ es arbitraria; posteriormente, en 1972, la expresó en forma

$$ \frac{d^q}{dx^q}[fg] = \sum_{J=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-\gamma-\lambda-1)\,\Gamma(\gamma+\lambda+1)} \; \frac{d^{q-\gamma-\lambda}}{dx^{q-\gamma-\lambda}} f \; \frac{d^{\gamma+\lambda}}{dx^{\gamma+\lambda}} g \; d\lambda. $$

También ha obtenido una generalización de la serie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(\nu n+\gamma+1)^{-1} \; D_x^{\nu n+\gamma} f(x)\Big|_{x=a} (x-a)^{\nu n+\gamma}\nu$$

donde γ es un complejo arbitrario y $0<\nu\leq 1$.

Usando la fórmula de Faâ di Bruno,

$$\frac{d^n}{dx^n}\, g(f(x)) = n! \sum_{m=1}^{n} g^{(m)} \sum \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k!} \left[\frac{f^{(k)}}{k!} \right]^{p_k}$$

donde $\sum$ se extiende sobre todas las combinaciones de valores enteros no negativos de p_1, p_2, ..., p_n tales que $\sum_{k=1}^{n} k p_k = n$ y $\sum_{k=1}^{n} p_k = m$, y la regla generalizada de Leibniz, se puede obtener

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q}\,\phi(f(x)) = \frac{(x-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)}\,\phi(f(x)) + \sum_{J=1}^{\infty} \binom{q}{J} \frac{(x-a)^{J-q}}{\Gamma(J-q+1)}\, J! \sum_{m=1}^{J} \phi^{(m)} \sum \prod_{k=1}^{J} \frac{1}{p_k!} \left[\frac{f^{(k)}}{k!}\right]^{p_k}$$

donde a es el límite inferior de integración. Esto es una generalización de la regla de la cadena.

También se han obtenido nuevas relaciones entre derivadas fraccionales y funciones trascendentes (como por ejemplo las derivadas fraccionales de $\log\Gamma(x)$ y la función Zeta de Hurwitz), así como se han encontrado representaciones de funciones especiales como las funciones de Bessel, Legendre e hipergeométricas, ofreciendo nuevos puntos de partida para su discución.

Sobre transformaciones integrales, la expresión

$$_{x_0}D_x^{-\nu} f = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{\nu-1}\,dt$$

con el cambio variable w=x-t se transforma en un caso especial de Transformada de Mellin, definida por $M_\nu[f] = \int_0^\infty f(w)\, w^{\nu-1}\, dw$, conduciendo por la llamada fórmula de inversión a una contraparte integral de la expansión de Laurent.

Erdelyi y Kober descubrieron en 1940 que versiones apropiadamente extendidas de dicha expresión para ${}_{x_0}\mathcal{D}_x^{-\nu}$, son útiles para la investigación de transformadas de Laplace, hipergeométricas y de Hankel, a tal grado que los operadores fraccionales en cuestión establecen mapeos importantes entre las clases de transformaciones mencionadas. Por ejemplo, la totalidad de la teoría de la transformada de Hankel puede obtenerse así de la bien conocida teoría de transformadas de Fourier.

B) ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES

La primera aplicación del Cálculo Fraccional (Abel 1823), se reduce hoy a resolver la ecuación integral ${}_{x_0}\mathcal{D}_x^{-\nu} f = \phi(x)$ con $0 < \nu < 1$. La solución explícita de tal ecuación puede obtenerse aplicando el operador inverso ${}_{x_0}\mathcal{D}_x^{\nu}$ en ambos lados. Durante las últimas tres o cuatro décadas, muchas ecuaciones diferenciales e integrales han sido tratadas mediante operadores fraccionales. Entre los numerosos ejemplos de teoría del potencial, electrodinámica, hidrodinámica, aerodinámica, cinética química, etc., los más conocidos e importantes son:

i) M. Riesz dió la solución para el problema de Cauchy para el espacio m-dimensional de Lorentz-Minkowski por medio de la integral de tipo Riemann-Liouville

$$I^{\nu} f(p) = \pi^{1-\frac{m}{2}} 2^{1-\nu} \left[\Gamma\left(\tfrac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\tfrac{\nu-m}{2}+1\right)\right]^{-1} \int_{S_p} f(Q)\, r_{PQ}^{\nu-m}\, dQ$$

donde P es un punto fijo en el espacio y Q un punto variable, r_{PQ} es su distancia en la métrica correspondiente, dQ es abreviatura de $dt_1\, dt_2 \ldots dt_m$ y

Sp es el dominio de integración.

2) La teoría generalizada del potencial axialmente simétrico, de Erdelyi y Weinsten, está basada en la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\nu+1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, con $u(r,z)$ donde ryz denotan coordenadas cilíndricas en el espacio eucli- diano $(2\nu+3)$- dimensional y esta ecuación requiere integración fraccional respecto a una función estrictamente creciente y diferenciable $\Psi(t)$ en el sentido

$$I_{\psi}^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{x_0}^{x} f(t)\left[\Psi(x) - \Psi(t)\right]^{\nu-1} \Psi'(t)\, dt.$$

C) *DIFERENCIACION GENERALIZADA*

Desde 1950 han sido encontradas dos formas totalemente diferentes para definir y utilizar las derivadas de funciones localmente discontinuas. Una de ellas es una extensión de la noción de función que ha sido realizada por las teorías modernas de funciones generalizadas como las distribuciones de Schwartz y los cocientes de convolución de Mikusinski. La otra consiste en una modificación del concepto de número real de tal forma que la derivada debería existir en el sentido ordinario para ciertas funciones discontinuas como la función de Heaviside en X=0.

Un poco después fue propuesta una tercera vía de acceso para abordar dicho propósito. En ésta se mantiene el concepto clásico de funciones y números reales, pero se extiende el proceso de diferenciación en forma apropiada. Entonces las derivadas de funciones discontinuas, vuelven a ser funciones en el sentido clásico y se puede trabajar enteramente en el marco del análisis clásico. El area de acción es más restringida que cuando se usan distribuciones o cocientes de convulción, no obstante que es lo suficiente amplia para abarcar los casos que surgen en la práctica.

Partimos de la fórmula de Riemann

$$ {}_{x_0}D_x^{\mu} f = \frac{d^m}{dx^m} \, {}_{x_0}I_x^{m-\mu} f \quad , \mu \geq 0 , m \text{ mínimo entero mayor que } \mu , $$

y la escribimos

$$ {}_{x_0}D^{\mu} f(x) = \frac{sgn\,(x-x_0)}{\Gamma(m-\mu)} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} f(t)\, |x-t|^{m-\mu-1} dt , $$

de la que se desea obtener la derivada generalizada en x_0 a partir de ${}_{x_0}D^{1-\varepsilon} f(x)$, tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ de manera que

i) el resultado posea carácter local; es decir que debe depender sólo de los valores de la función en una vecindad arbitraria pequeña de x_0;

ii) después de tomar límite sobre ε se debe tomar otro límite cuando $x \rightarrow x_0$ y su iteración debe asegurar la existencia de la derivada generalizada para una adecuada y amplia clase de funciones.

iii) si $f(x_0+0)$ y $f(x_0-0)$ existen, entonces la derivada generalizada debe relacionarse con el salto $|f(x_0+0) - f(x_0-0)|$.

Todas estas características son satisfechas si

$$ {}_{x_0}\mathcal{D}_+ f = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[{}_{x_0}D^{1-\varepsilon} f(x_0+\varepsilon) - {}_{x_0}D^{-\varepsilon} f(x_0-\varepsilon) \right] $$

$$ {}_{x_0}\mathcal{D}_- f = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[{}_{x_0}D^{1-\varepsilon} f(x_0-\varepsilon) - {}_{x_0}D^{-\varepsilon} f(x_0+\varepsilon) \right] $$

existen y son iguales. Entonces decimos que f es $\mathcal{D}$-diferenciable en x_0 y el valor ${}_{x_0}\mathcal{D}f = {}_{x_0}\mathcal{D}_+ f = {}_{x_0}\mathcal{D}_- f$ es llamado la $\mathcal{D}$-derivada de f en x_0.

D) ALGUNOS PROBLEMAS ABIERTOS

¿Posee el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial un análogo que relacione diferencias de orden fraccional con derivadas del mismo orden fraccional?

¿Se puede dar una interpretación geométrica para una derivada fraccional de orden particular?

¿Cuál es el análogo del teorema de Lebesgue sobre la diferenciación casi dondequiera de funciones monótonas para derivadas fraccionales?

¿El teorema de Fubini sobre la diferenciación casi dondequiera, término a término de una serie de funciones monótonas puede ser extendido o derivadas fraccionales?

¿Una función que no posea derivada ordinaria, puede poseer derivada (s) fraccional (es)?

Estas preguntas y otras más fueron planteadas en la conferencia internacional sobre Cálculo Fraccional efectuada en Junio de 1974 en la Universidad de New Haven, y las investigaciones que generan éstas y las ya resueltas, dada su aplicación en campos importantes, aseguran el futuro del Cálculo Fraccional.

APENDICE

LA FUNCION GAMMA

Fue introducida por L. Euler en su deseo de encotrar una función continua que tomara el valor n! en los enteros. La *función gamma* de Euler es $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ para $x>0$.

Consideremos ahora la integral compleja $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, $z = x+iy$; entonces $|\Gamma(z)| \le \int_0^\infty |t^{z-1}|e^{-t}dt = \int_0^\infty t^{x-1}|t^{iy}|e^{-t}dt < \infty$ para $X= \mathrm{Re}\,z>0$; de donde la función $\Gamma(z)$ está definida para $\mathrm{Re}\,z>0$.

Sean $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ entonces tenemos la relación : $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ donde a la integral se le denomina *función beta*, que denotamos $B(\alpha, \beta)$.

Demostración:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \left(\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^\infty v^{\beta-1}e^{-v}dv\right) = \qquad \text{(hacemos } u=x^2 \text{ y } v=y^2\text{)}$$

$$= \left(\int_0^\infty x^{2\alpha-2}e^{-x^2}2x\,dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2\beta-2}e^{-y^2}2y\,dy\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \cos^{2\alpha-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2\beta-1}\theta\; r^{2\alpha+2\beta-2}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha-1}\theta\;\mathrm{sen}^{2\beta-1}\theta\left(\int_0^\infty r^{2\alpha+2\beta-1}e^{-r^2}dr\right)d\theta = \qquad \text{(hacemos } r^2 = w\text{)}$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta\;\mathrm{sen}^{2\beta-1}\theta\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty w^{\alpha+\beta-1}e^{-w}dw\right)d\theta =$$

$$= 2\,\Gamma(\alpha+\beta) \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta \; sen^{2\beta-1}\theta \; d\theta =$$

(hacemos $\operatorname{Cos}\theta = t^{1/2}$;

$\operatorname{Sen}\theta = (1-t)^{1/2}$,

$d\theta = -\frac{1}{2}\, t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}$ dt)

$$= 2\,\Gamma(\alpha+\beta) \int_0^1 t^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-t)^{\beta-\frac{1}{2}} \left(\tfrac{-1}{2}\right) t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt =$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta) \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

Reacomodando la igualdad, tenemos una de las relaciones importantes:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Como caso particular α=a, β=1-a, en desarrollo anterior obtenemos:

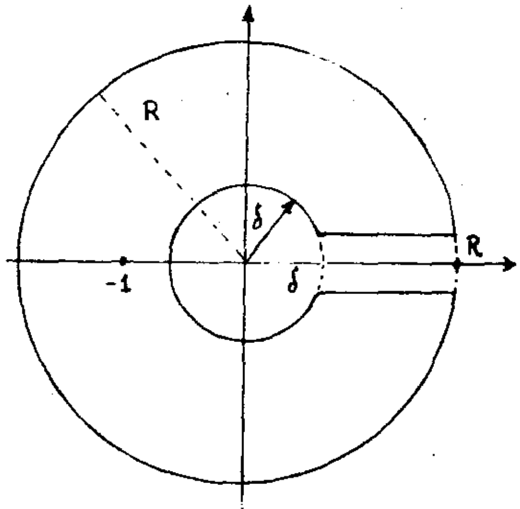
Para $0 < a < 1$,

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = 2\,\Gamma(1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\theta \; sen^{-2a+1}\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cot^{2a-1}\theta \, d\theta =$$

(hacemos $x = \operatorname{Cot}^2\theta$; $d\theta = -\frac{1}{2} x^{-1/2} (x+1)^{-1}$ dx)

$$= 2 \int_\infty^0 x^{a-\frac{1}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} (x+1)^{-1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx.$$

Para integrar esto último notamos que $\frac{x^{a-1}}{1+x}$ es la restricción de $\frac{z^{a-1}}{1+z}$ al eje real, escogemos la rama principal la cual es univaluada en el plano cortado de $z=0$ a $z=\infty$ en el eje positivo real. Para usar el método de residuos necesitamos una curva cerrada que coincida con el eje X para $0 < x < \infty$. Tomamos para ello el contorno de ''ojo de cerradura''



El residuo de $\dfrac{z^{a-1}}{1+z}$ en $z=-1$ es $(e^{\pi i})^{a-1}$

$$\int_\delta^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{a-1}\, iRe^{i\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta + \int_R^\delta \frac{(e^{2\pi i}x)^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(\delta e^{i\theta})^{a-1}\, i\delta e^{i\theta}}{1+\delta e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi i(e^{\pi i})^{a-1}$$

$$\int_\delta^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + (e^{2\pi i})^{a-1}\int_R^\delta \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{i(Re^{i\theta})^a}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta + \int_{2\pi}^0 \frac{i(\delta e^{i\theta})^a}{1+\delta e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi i\, e^{\pi i a} e^{-\pi i}$$

$$\left(1-e^{2\pi i a}e^{-2\pi i}\right)\int_\delta^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{i(Re^{i\theta})^a}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta + \int_{2\pi}^0 \frac{i(\delta e^{i\theta})^a}{1+\delta e^{i\theta}}\,d\theta = -2\pi i\, e^{\pi i a}$$

Tomando límites cuando $\delta \to 0$ y $R \to \infty$, las dos últimas integrales convergen a cero porque $\left|\int_0^{2\pi} \frac{i(Re^{i\theta})^a}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{R^a}{R-1}\,d\theta = 2\pi\frac{R^a}{R-1} \to 0$ si $R\to\infty$, $0 < Re\,\alpha = a < 1$,

y análogamente $\int_{2\pi}^0 \frac{i(\delta e^{i\theta})^\alpha}{1+\delta e^{i\theta}}\,d\theta \to 0$ cuando $\delta \to 0$,

y nos queda

$$\left(1-e^{2\pi i a}\right)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = -2\pi i\, e^{\pi i a},$$ de donde

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i\, e^{\pi i a}}{e^{2\pi i a}-1} = \frac{2i\pi}{e^{\pi i a}-e^{-\pi i a}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a}$$

y entonces tenemos la *propiedad de reflexión de la función gamma:*

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a} \qquad \text{para } 0<a<1.$$

CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE $\Gamma(z)$

Como t^{z-1} es analítica en z para cada t, $0<t<\infty$, su derivada es $t^{z-1}\ln t$ y además $\left|\int_0^\infty \ln t\ \ t^{z-1}e^{-t}\,dt\right| \leq \int_0^\infty |\ln t|\ t^{x-1}e^{-t}\,dt<\infty$; entonces la integral $\int_0^\infty \ln t\ \ t^{z-1}e^{-t}\,dt$ existe e integramos respecto a z:

$$\int\left[\int_0^\infty \ln t\ t^{z-1}e^{-t}dt\right]dz = \int_0^\infty\left[\int \log t\ t^{z-1}dz\right]e^{-t}dt = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,$$

de lo cual podemos decir que $\Gamma(z)$ tiene una derivada continua

$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \log t\ \ t^{z-1}e^{-t}dt$ para $Re\, z>0$, lo que hace de $\Gamma(z)$ una función analítica en este dominio.

Por otra parte, $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = \lim_{t\to\infty} -t^z e^{-t} + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ implica $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, y reacomodamos la relación funcional como

$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, donde ambos miembros existen y son analíticos para $Re\, z>0$. Como $\Gamma(z)$ y $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ existen y son analíticos e iguales entre sí en un dominio común, entonces son iguales en dondequiera que estén definidas (extensión analítica).

Repitiendo el proceso, obtenemos

$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}$ para cada entero n, de manera que

$\Gamma(z)$ es analítica en cada semiplano $Re\, z > -(n+1)$ con polos simples en $z = 0,-1,\ldots,-n$ y con residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$ en $z=-n$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. DOLD AND B. ECKMAN
Fractional Calculus and its applications
Lecture notes in Mathematics 457
Springer-Verlag. New York 1975

[2] A. ERDELYI
''*An application of fractional integrals*''
J. Analyse Math. 14 (1965) p.p. 113-126

[3] A. ERDELYI
''*Fractional integrals of generalized functions*''
J. Australian Math. Soc. 14 (1972) p.p. 30-37

[4] A. ERDELYI AND A. C. McBRIDE
''*Fractional integrals of distributions*''
SIAM J. on Mathematical, Analysis 1(1970) p.p. 547-557

[5] I. M. GELFAND AND SHILOV
Generalized Functions Vol. 1
Academic Press. New York 1964

[6] H. KOBER
''*On fractional integrals and derivatives*''
Quart. J. Math. Oxford Ser. 11(1940) p.p. 193-211

[7] E. R. LOVE

''Two index laws for fractional integrals and derivatives''

J. Australian Math. Soc. 14(1972) p.p. 385-410

[8] ADĀM C. McBRIDE

''A theory of fractional integration for generalized functions''

Vol. 6 Number 3(1975) p.p. 583-599

[9] KEITH B. OLDHAM AND JEROME SPANIER

The Fractional Calculus

Mathematics in science and engineering Vol. III

Academic Press. New York 1974

[10] POLYA Y LATTA

Variable compleja

Limusa. México 1976

[11] BERTRAM ROSS

''Fractional Calculus''

Math. Magazine Vol. 50 Number 3 (1977) p.p. 115-122

[12] A. H. ZEMANIAN

Generalized Integral Transformations

Interscience. New York 1968