# UNIVERSIDAD DE SONORA



## UELA DE ALTOS ESTUDIOS
## RTAMENTO DE MATEMATICAS

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

1942

# UNA CONSTRUCCION DE LA INTEGRAL DE RIEMANN - STIELTJES Y SUS APLICACIONES

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN MATEMATICAS
P R E S E N T A:

Jorge Alberto Valé Sánchez

IERMOSILLO SONORA MARZO DE 1983

)8

# UNIVERSIDAD DE SONORA

## ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

## DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS


EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

# UNA CONSTRUCCION DE LA INTEGRAL DE RIEMANN - STIELTJES Y SUS APLICACIONES

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A:


Jorge Alberto Valé Sánchez



HERMOSILLO SONORA MARZO DE 1983

A Toñe quien se embarco una tarde para enseñarme a comer nieve en invierno y despues a correr felizmente con ella por la vida

A Bianca quien cada mañana con una libre sonrisa me obsequia la alegría de existir

A éllas quienes quisás poco les interese el contenido del siguiente trabajo pero verdaderamente les interesa quien lo presenta.

Mis más completos agradecimientos.

i) Al pueblo trabajador, quien paga la educación (y todo).

ii) A todos los trabajadores de la Preparatoria Morelos.Colegio de Ciencias y Humanidades La Paz, por su apoyo y confianza.

iii) A M en C, Fernando Avila Murillo Director de esta tesis por su valiosa ayuda, asesorias y consejos.

iv) A los profesores M en C. Marco Antonio Valencia Arvizu, M en C. Arturo Fragozo Robles, M en C. Fernando Luke y Dr. Rubén Flores. Comité de Tesis, por su paciencia , ayuda y apoyo en la revisión del trabajo de tésis y sus correcciones.

v) A la Srita. Blanca Irene Tapia V. por su grandiosa ayuda al mecanografiar el trabajo.

vi) A el Ing. Pedro Rene Meza Verdugo. Subdirector de la Preparatoria Morelos C.C.H. La Paz quien ha absorbido mi trabajo en mi ausencia y me ha brindado todo su apoyo.

# CONTENIDO

0. INTRODUCCION

1. Teorías Clásicas de Integración.

2. Integración de Stieltjes.

3. Otro tratamiento de la Integral de Riemann-Stieltjes.

4. Aplicaciones.

5. Apéndice sobre Funciones Crecientes.

# 0. INTRODUCCION

## 0.1. UN POCO DE HISTORIA.

Durante el siglo XVIII, la integral de una función fué generalmente tratada como la "inversa" de la derivada. Esto es, una función $f(x)$ era integrada encontrando una antiderivada o función primitiva $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$: la integral de $f(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$ era entonces dada por el *Teorema Fundamental del Cálculo*, conocido entonces sólo de forma heurística, y el cual nos dice que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Al mismo tiempo, la idea de integral como cierta clase de límite o como el área de un conjunto de ordenadas bajo una curva era familiar, pero generalmente se utilizaba en la aproximación de integrales en las cuales era imposible o inconveniente encontrar su antiderivada. Ni los límites de sumas ni las áreas de conjuntos planos eran lo suficientemente bien entendidos para proveer las bases de un tratamiento lógico de la Integral. En particular, el concepto de área fue completamente intuitivo, aceptado como evidente por si mismo, e inecesaria su definición precisa.

Fue Cauchy quien primero marcó la necesidad de proveer una definición general y prueba de la existencia de la integral para una conciderable clase de funciones que pudieran entonces proveer una base para la discusión de integrales particulares y sus propiedades. La definición dada en 1823 por Cauchy empieza con una función $f(x)$ continua (En el sentido moderno) Sobre el intervalo $[x_0,x]$ y subdivide éste en n subintervalos por medio de puntos $x_0, x_1,\ldots,x_n=x$, con ésta subdivisión de $[x_0, x]$ asocia la suma aproximada

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).(x_i-x_{i-1}) \tag{1}$$

lo que llevaría a definir la integral $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ como el límite de la suma (1) cuando el máximo de las longitudes $x_i - x_{i-1}$ se aproxima a cero. Esta definición es completada mas tarde por Riemann. Quien elige un punto arbitrario $\bar{x}_i = x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$ en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición, i=1,2,..,n y define la integral como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (2)$$

donde $\delta$ denota el máximo de las longitudes $\delta_i$ de los subintervalos de la partición de $[a,b]$. Nótese que ésta es una *generalización* directa de la definición de Cauchy dada en (1).

La definición de Riemann (2) de la integral fué la más general, no obstante, durante las últimas tres décadas del siglo XIX ésta definición fue reformulada en diversas formas que agregaron nuevas iluminaciones para el desarrollo del concepto de Integral y que prepararon el camino para las importantes generalizaciones que se agregaron a principios del siglo XX.

Por 1870, varios matemáticos de forma independiente, introdujeron las así llamadas *"Sumas Superior e Inferior de Riemann"* para la función acotada en f sobre $[a,b]$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad I(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad (3)$$

donde P es una partición de $[a,b]$, en n subintervalos y $M_i$ y $m_i$ son los valores máximos y mínimos (hoy sup e inf) de f(x) en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Hoy éstas sumas son llamadas *"Sumas de Darboux"* y es fácil observar que tales sumas se acercan a límites S e I cuando $\delta \to 0$.

En 1880 Vito Volterra introduce el término general *"Integral Superior"* e *"Integral Inferior"* para S e I con

$$S = \overline{\int}_a^b f(x)dx \qquad \text{é} \qquad I = \underline{\int}_a^b f(x)dx \tag{4}$$

Después, Giuseppe Peano notó que éstas integrales dadas en (4), pueden definirse convenientemente como la *mínima cota superior* y como la *máxima cota inferior* de las sumas superior e inferior de Riemann, respectivamente para todas las particiones P del intervalo $[a,b]$

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx = \inf \{S(P)\} \qquad y \qquad \underline{\int}_a^b f(x)dx = \text{SUP } \{I(P)\} \tag{5}$$

la función f es integrable, si, y solo si las integrales superior e inferior son iguales.

Desde sus orígenes la idea de integral había sido motivada por el concepto de área. En particular si $O_f$ denota el conjunto de ordenadas de una función no-negativa f sobre el intervalo de. el conjunto de todos los puntos (x,y) con $a \leq x \leq b$ y $0 \leq y \leq b$, la idea era que el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ debe ser el área $a(O_f)$.

La primera definición formal de área es dada por Peano en 1887. Retomando las ideas de Eudoxo y su método de exhausión como punto de partida, definió el *área interna* $a_i(S)$ de S como la mínima cota superior de las áreas de todos los poligonos que están contenidos en S, y el *área exterior* $a_e(S)$ como la máxima cota inferior de las áreas de todos los polígonos que contiene a S. Es claro que $a_i(S) \leq a_e(S)$, pero pueden no ser iguales. Por ejemplo si S es el conjunto de todos los puntos (x,y) en el cuadrado unitario $0 \leq x, y \leq 1$ tales que los números x,y son ambos irracionales, entonces $a_e(S)=1$, el área del cuadrado, pero $a_i(S)=0$ porque únicamente polígonos degenerados están contenidos en S.

Con la definición de Peano, de área interior y exterior se establece que

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx = a_i\ (O_f) \qquad y \qquad \overline{\int}_a^b f(x)dx = a_e(O_f) \tag{6}$$

para cualquier función no negativa f sobre $[a,b]$. En caso $a_i(S) = a_e(S)$ el valor común es el área a(S) de S. Si f es integrable entonces (6) se reduce a

$$\int_a^b f(x)dx = a(0_f) \tag{7}$$

en este punto, el concepto de la integral viene a cerrar el círculo regresando a su motivación original.

Este anterior concepto de área es ahora referido como "*contenido de Jordan*" debido a que Camile Jordan le dio su tratamiento definitivo con la diferencia de que él usa únicamente polígonos hechos de pequeños cuadrados con lados horizontales y verticales, Jordán define lo que él llamó *contenido interior* $c_i(S)$ y *contenido exterior* $c_e(S)$ de un conjunto plano, equivalente a las áreas interior y exterior de Peano; sin embargo, su tratamiento trabaja igualmente bien en todas las dimensiones y así su concepto de contenido generaliza simultáneamente los conceptos de longitud, área y volúmen. El llama al conjunto S *Medible* con contenido c(S) si $c_i(S) = c_e(S)$.

Jordan procede a definir la integral de Riemann de una función acotada de n variables reales definidas sobre un conjunto medible E en un n-espacio Euclideano. Sea P una partición de E en conjuntos medibles $E_1,\ldots,E_m$ con interiores ajenos, y sea $\overline{P}_i$ un punto arbitrario de $E_i$ i=1,2,...m. Entonces

$$S(P) = \sum_{i=1}^{m} f(\overline{P}_i)\, c\,(E_i)$$

es una suma de Riemann para f en E. La función f es integrable sobre el conjunto E, con tal de que

$$\int_E f = \lim_{\delta > 0} \sum_{i=1}^{m} f(\overline{x}_i) c(E_i) \tag{8}$$

exista, siendo $\delta$ el máximo de los diametros de los conjuntos $E_1,\ldots E_m$. En el caso unidimensional con $E = [a,b]$, viene a ser

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)c(E_i) \tag{9}$$

que en comparación con (2), la partición de $[a,b]$ en subintervalos ha sido *generalizada* a una partición de $[a,b]$ en *conjuntos medibles*.

Con estas nociones, se tiene nuevas caracterizaciones de la condición de Integrabilidad de Riemann. Una basada sobre la visión "geométrica" de la integral de una función en términos de el área acotada por la gráfica para f definida y acotada sobre $[a,b]$, sea E el conjunto de puntos en el plano acotado por la gráfica de la función f, las líneas x=a, y=b y el eje x. Entonces f es Riemann-Integrable si, y solo si el conjunto E es Jordan-medible y

$$\int_a^b |f| = c(E), \qquad \int_a^b f = c(E^+) - c(E^-) \tag{10}$$

donde $E^+$ y $E^-$ denota las partes de E por arriba y abajo del eje x respectivamente.

La introducción del concepto de conjunto medible trajo otra caracterización del criterio de integrabilidad por igualdad de las integrales inferior y superior.

Considérese las sumas más generales

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i c(E_i) \qquad y \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i c(E_i)$$

donde $E_i$ son conjuntos medibles, mutuamente ajenos y tales que $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$. Entonces la mínima cota superior de las I y la máxima cota inferior de la S viene a ser las integrales inferior y superior de f, el criterio de integrabilidad puede establecerse en terminos de estas sumas más generales.

Las generalizaciones anteriores permiter ver que una generalización de los conceptos de medida y medibilidad, permiten una generalización de los conceptos de integral e integrabilidad. Supóngase, en otras palabras, que $\mathfrak{M}$ denota una clase de conjuntos medibles, la cual contiene a la clase de conjuntos Jordan-medibles, y supóngase que una medida, m(E) ha sido definido para todos los miembros de $\mathfrak{M}$ en tal forma que

$m(E)$ coincida con $c(E)$ cuando E es Jordan-medible. Entonces la primera caracterización de funciones Riemann-Integrables (10) sugiere que el concepto de integrabilidad puede extenderse a cualquier función acotada f cuyos correspondientes conjuntos E pertenecen a $\mathfrak{M}$. La integral de f puede entonces definirse por

$$\int_a^b f = m\ (E^+)-m(E^-) \tag{11}$$

de forma semejante la caracterización por igualdad de integrales superior e inferior, sugiere definir integrales superior e inferior $*\overline{\int}_a^b f$ y $*\underline{\int}_a^b$ con respecto a $\mathfrak{M}$, como la máxima cota inferior de $S^*$ y la mínima cota superior de $I^*$ para las sumas

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} M_i m(E_i) \qquad I^* = \sum_{i=1}^{n} m_i\ m(E_i)$$

donde ahora $E_i$ pertenecen a $\mathfrak{M}$, entonces

$$\underline{\int}_a^b f \leq *\underline{\int}_a^b f \leq *\overline{\int}_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f$$

y f puede definirse integrable siempre que $*\underline{\int}_a^b f = *\overline{\int}_a^b f$.

Es claro que las definiciones anteriores, basadas sobre el amplio concepto de medibilidad, representan generalizaciones de la integral de Riemann.

Hoy la teoria de la integración de Lebesgue viene a ser (en cierto sentido técnico) la última generalización del concepto de integral de funciones de variable real, la cual a diferencia de considerar dada por Thomas-Jean Stieltjes en 1894 por un camino un tanto distinto a los expuestos antes. Stieltjes quien empieza su carrera como astrónomo se da la tarea de hacer un estudio general de fracciones continuas [3, pag 26] en donde usa un nuevo tipo de integrales que mas tarde aplica como integrales con respecto a distribuciones de masa total finita, incluyendo concentraciones puntuales. Introduce la noción de distribución de masa continua, una distribución tal está completamente determinada cuando g(x), la masa total entre 0 y x es conocida para cada valor positivo de x. La función g es entonces positiva y creciente. Define el momento de orden k es definido como el límite de las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^k \left[ g(x_i) - g(x_{i-1}) \right] \tag{12}$$

cuando $|P| \to o$, donde P es partición de $[a,b]$ con $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Stieltjes mostró que cuando f es continua y g es no necesariamente positiva, el límite correspondiente de (12) existe y le denotó por

$$\int_a^b f(x)dg(x) \ .$$

Integral que posteriormente viene a ser caso particular del trabajo de J. Radón en 1913.

0.2.- Justificación de la Tésis.

A lo largo de la historia, la integral y su definición se han visto reformuladas un gran número de veces, (sección 0.1) hasta llegar a su sentido más general expuesto en la teoria de Lebesgue. El sentido de la generalización de un concepto matemático, y su importancia, está en las llena con todos los requisitos.

En el sentido teórico presenta varias ventajas sobre la definición clásica. El tratamiento es más general ya que las funciones que son Darboux-Stieltjes en el sentido clásico (capítulo 2) son integrables en éste nuevo sentido. Con la definición generalizada se satisfacen algunas propiedades que en la teoría clásica no se verifican, en particular, si las funciones integrando f e integrador F tienen discontinuidades comunes, entonces f no es integrable respecto a F; éste incomodo resultado desaparece en el tratamiento generalizado. Mostraremos (teorema 3,2,4) que toda función f, seccionalmente continua ó seccionalmente monótona y acotada siempre es F-integrable.

En la sección 3.2 se define la integral generalizada de Riemann-Stieltjes de forma semejante a como es definido la integral de Darboux-Stieltjes en su sentido generalizado (sección 3.1) y se procede a compararlas entre sí y con las definiciones clásicas dadas en los capítulos anteriores. *Si una función es Darboux-Stieltjes en el sentido clásico entonces es Darboux-Stieltjes y Riemann-Stieltjes en el sentido generalizado y las tres integrales coinciden.* La fórmula correcta para integrales de Lebesgue-Stieltjes del *teorema de integración por partes* dada por Hewitt [2] es demostrada sin referencia a la teoria de Lebesgue-Stieltjes.

Respecto a la notación, la integral generalizada solo requiere de algunos cambios mínimos, y los teoremas de caracterización y de propiedades de la integral en el sentido generalizado se desarrollan sin alguna deficultad.

Deliberadamente la teoría presupone conocimientos mínimos de anágral de Riemann-Stieltjes (capítulo 3) en su sentido generalizado así como las comparaciones con las teorias clásicas, se anexan algunas aplicaciones (capítulo 4) motivadoras en Probabilidad, Variable Compleja y en el Flujo de Fluidos Viscosos. La introducción pretende enmarcar históricamente el desarrollo de las distintas generalizaciones de la integral de Riemann.

# CAPITULO 1

## TEORIAS CLASICAS DE INTEGRACION.

### 1.1 INTEGRAL DE DARBOUX.

Definición 1.1.1.- Sea $[a,b]$ un intervalo dado. Por una *partición* P de $[a,b]$ entenderemos un subconjunto finito de $[a,b]$ ordenado, que escribimos en la forma

$$P = \{a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

Definición 1.1.2.- Sea f una función real acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$. Para $A \subseteq [a,b]$ adoptamos la notación

$$M(f,A) = \text{SUP}\ \{f(x)\ ;\ x\varepsilon A\} \text{ y } m(f,A) = \inf\ \{f(x):\ x\varepsilon A\}$$

La *suma Superior de Darboux* $\bar{S}(f,p)$ de f con respecto a la partición P es la suma

$$S(f,p) = \sum_{k=1}^{n} M(f, [t_{k-1}, t_k])\ (t_k - t_{k-1})$$

y la *Suma Inferior de Darboux* es

$$I(f,p) = \sum_{k=1}^{n} m(f, [t_{k-1}, t_k])\ (t_k - t_{k-1})$$

Es importante notar que

y así:

$$m(f, [a,b])\ (b-a) \leq I\ (f,p) \leq S\ (f,p) \leq M\ (f, [a,b]).\ (b-a) \qquad (1)$$

Definición 1.1.3.- La *Integral Superior de Darboux* S(f) de f en $[a,b]$ está definida por:

$$S(f) = \inf \{S(f,p) : p \text{ es partición de } [a,b]\}$$

y la *Integral Inferior de Darboux* es

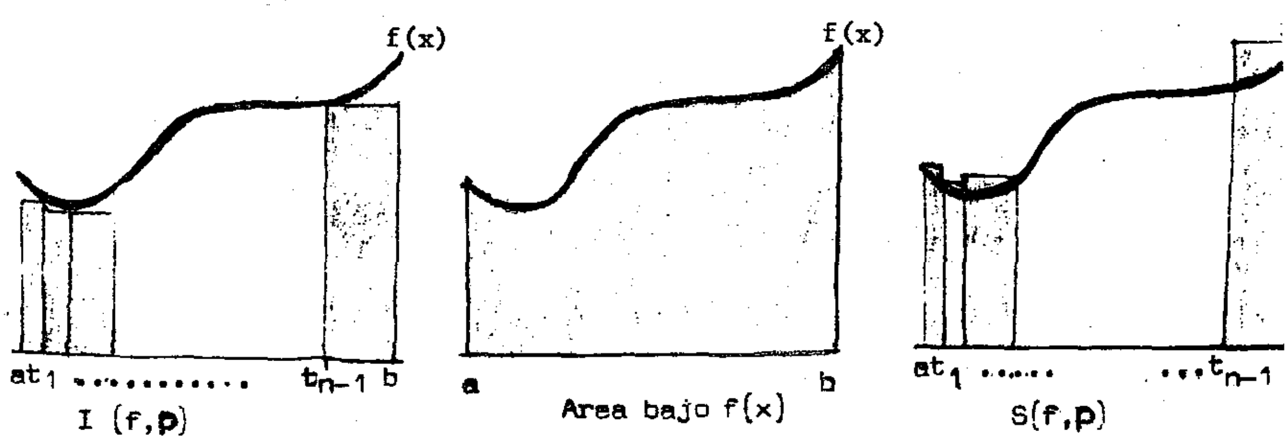
$$I(f) = \sup \{I(f,p) : p \text{ es partición de } [a,b]\} .$$

En vista de (1), S(f) y I(f) son números reales. Diremos que f *es Darboux-Integrable en* $[a,b]$ si I(f) = S(f); en éste caso escribimos

$$(D) \int_a^b f = (D) \int_a^b f\ (x)\ dx = I(f) = S(f)$$

para este valor común.

Una interpretación para el concepto de integral es el de considerar a (D) $\int_a^b f$ como el área de la región bajo la gráfica de f, cuando f(x) $\geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, ya que cada suma inferior de Darboux representa el área de una unión de rectángulos que están contenidos en la región. Más aún, (D) $\int_a^b f$ es el único número que es mayor o igual que todas las sumas inferiores de Darboux, y más pequeño o igual que todas las sumas superiores de Darboux (figura 1).



Mostraremos algunos ejemplos que, aunque elementales desde el punto vista del cálculo integral, en nuestro caso servirán para fijar más los conceptos y terminología antes señaladas.

Ejemplo 1.1.1.- La función más simple, cuya integral no es obvia es $f(x) = x^2$, consideremos a f definido en $[o,b]$, $b>0$.
Para una partición

$$P = \{0 = t_o < t_1 <\ldots< t_n = b\}$$

tenemos

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \sup \{x^2 : x\varepsilon \left[t_{k-1}, t_k\right]\}. (t_k-t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} t_k^2 (t_k-t_{k-1});$$

elegimos $t_k = \frac{kb}{n}$, y usando el hecho de que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

obtenemos

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 b^2}{n^2} \left( \frac{b}{n} \right) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{b^3}{6} (1+ \frac{1}{n})(2+ \frac{1}{n}).$$

Para valores grandes de n, $S(f,P)$ se acerca a $b^3/3$, por lo que concluimos que

$$\inf\{S(f,P): P \text{ partición de } [a,b]\} = S(f) \lesssim \frac{b^3}{3}$$

Para la misma partición calculamos

$$I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2 b^2}{n^2} \left( \frac{b}{n} \right) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \left[ \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \right]$$

$$= \frac{b^3}{6} (1- \frac{1}{n})(2- \frac{1}{n}),$$

que para valores grandes de n se acerca a $\frac{b^3}{3}$ , por lo que $\sup\{I(f,P)$: p es partición de $[a,b]\} = I(f)$

debe cumplir

$$I(f) \geq \frac{b^3}{3} .$$

Nótese que las sumas superiores de Darboux se aproximan al valor $\frac{b^3}{3}$ por valores mayores que éste (por exceso), mientras que las sumas inferiores de Darboux lo hacen por valores menores que $\frac{b^3}{3}$ (aproximaciones por defecto).

Como se mostrará en el 1er. teorema $I(f) \leq S(f)$, y podemos concluir que $I(f) = S(f) = \frac{b^3}{3}$, es decir, que $f(x) = x^2$ es Darboux-Integrable en $[0,b]$ y

$$(D)\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

Ejemplo 1.1.2.- En el intervalo $[0,b]$ consideremos la función $f(x)$ tal que $f(x)=1$ para x racional en $[0,b]$ y $f(x) = 0$ para x irracional en $[0,b]$.

Para cualquier partición $P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ tenemos

$$S(f,p) = \sum_{k=1}^{n} M(f, [t_{k-1}, t_k]) . (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1. (t_k - t_{k-1}) = b$$

y

$$I(f,p) = \sum_{k=1}^{n} m(f, [t_{k-1}, t_k]) . (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0(t_k - t_{k-1}) = 0.$$

Se sigue que $S(f)=b$ e $I(f)=0$. Las integrales superior e inferior de Darboux no coinciden y por lo tanto f no es Darboux-Integrable.

Ejemplo 1.1.3.- Sea $f(x) = x$ para x racional $f(x) = 0$ para x irracional, $x \varepsilon [o,b]$.

Para una partición $P=\{0=t_o<t_1<\ldots<t_n = b\}$ tenemos

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M(f, [t_{k-1}, t_k]). (t_k - t_{k-1}) =\sum_{k=1}^{n} t_k (t_k - t_{k-1});$$

y tomando $t_k = \frac{kb}{n}$ tenemos que

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n} . \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{b^2}{n^2} . (\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{b^2}{2} (1 + \frac{1}{n});$$

para valores grandes de n $(n\to\infty)$, $S(f,P)\to \frac{b^2}{b}$ mientras que

$$I(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m(f, [t_{k-1}, t_k]). (t_k - t_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} 0 (t_k - t_{k-1}) = 0.$$

Concluiremos que $f(x)$ no es Darboux-Integrable en $[o,b]$.

Demostraremos algunas propiedades de la integral de Darboux que nos permitirán caracterizarla.

Lema 1.1.1.- Sea f una función acotada en $[a,b]$. Si P y Q son particiones de $[a,b]$ y $P \subseteq Q$ entonces

$$I(f,p) \leq I(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P). \tag{2}$$

*Demostración.*- La desigualdad central se sigue de la definición de sumas inferior y superior de Darboux. Probaremos primero que

$$I (f,P) \leq I(f,Q)$$

Supóngase que Q tiene únicamente un punto más que P, digamos u. Si $P = \{a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ entonces $Q = \{a = t_o < t_1 <\ldots< t_{k-1}< u<t_k <\ldots< t_n = b\}$ para alguna $k\varepsilon \{1,2,\ldots,n\}$. La suma inferior de Darboux para P y Q es la misma excepto para los términos que involucran a $t_{k-1}$ y $t_k$. En efecto, la diferencia de sumas es

$$I(f,Q)-I(f,P)= m(f, [t_{k-1}, u]).(u-t_{k-1}) + m(f, [u, t_k]).(t_k-u)$$
$$- m(f, [t_{k-1}, t_k]).(t_k - t_{k-1}).$$

Basta probar que esta diferencia es positiva. Usando las propiedades del ínfimo de subconjuntos de R, vemos que

$$\begin{aligned} m(f, [t_{k-1}, t_k]).(t_k - t_{k-1}) &= m(f, [t_{k-1}, t_k]).\{(t_k - u) + (u - t_{k-1})\} \\ &\leq m(f, [u, t_k]).(t_k - u) + m(f, [t_{k-1}, u]).(u - t_{k-1}). \end{aligned}$$

En caso de que Q contenga más de un punto que P, la desigualdad se sigue por aplicaciones repetidas del argumento anterior.

Para probar que $S(f,Q) \leq S(f,P)$ se sigue un argumento análogo. //

El siguiente lema nos afirma que sin importar las particiones que se tomen, toda suma inferior de Darboux será menor ó igual que toda suma superior de Darboux

Lema 1.1.2.- Si f es una función acotada, definida en $[a,b]$, y si P,Q, son particiones de $[a,b]$, entonces

$$I(f,P) \leq S(f,Q) \qquad (3)$$

*Demostración.*- El conjunto dado por $P \cup Q$ es a su vez una partición de $[a,b]$. Como $P \subset P \cup Q$ y $Q \subset P \cup Q$, aplicando el lema 1.1.1 obtenemos

$$I(f,P) \leq I(f, P\cup Q) \leq S(f, P\cup Q) \leq S(f,Q). \quad //$$

El siguiente teorema justifica lo utilizado en los ejemplos referente a que la integral inferior de Darboux es menor o igual que la integral superior de Darboux.

Teorema 1.1.1.- Si f es una función acotada definida en $[a,b]$ entonces

$$I(f) \leq S(f)$$

*Demostración*.- Tomemos una partición fija P. El lema 1.1.2 nos muestra que $I(f,P)$ es una cota inferior para el conjunto

$$\{S(f,Q): Q \text{ es partición de } [a,b]\}$$

de aquí se deduce que $I(f,P)$ debe ser menor o igual que la máxima cota inferior (inf) de este conjunto, i.e.

$$I(f,P) \leq S(f)$$

Esta desigualdad nos muestra que $S(f)$ es una cota superior para el conjunto

$$\{I(f,P): P \text{ es partición de } [a,b]\},$$

por lo que $S(f)$ debe ser mayor ó igual que la mínima cota superior (sup) de este conjunto; esto es, se debe tener que

$$I(f) \leq S(f) \quad . //$$

La importancia del teorema siguiente es que nos da un "Criterio de Cauchy" para Integrabilidad de funciones en el sentido de Darboux.

Teorema 1.1.2.- Una función acotada f, definida en $[a,b]$, es Darboux-Integrable si, y solo si, para cada $\varepsilon>0$, existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon \qquad (4)$$

*Demostración.*- Necesidad: Supóngase que f es Darboux-Integrable y considérese una $\varepsilon>0$. Por las propiedades del sup e inf, existen particiones $P_1$ y $P_2$ de $[a,b]$, que satisfacen

$$I(f,P_1) > I(f) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(f,P_2) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $P = P_1 \cup P_2$, y aplicando el lema 1.1.1, obtenemos

$$S(f,P) - I(f,P) \leq S(f,P_2) - I(f,P_1) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left[I(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$= S(f) - I(f) + \varepsilon = \varepsilon,$$

puesto que $S(f) = I(f)$ al ser f Darboux-Integrable. Esto prueba (4).

Suficiencia: Supóngase que para cada $\varepsilon>0$, la desigualdad (4) se cumple para alguna partición P; entonces

$$S(f) \leq S(f,P) = S(f,P) - I(f,P) + I(f,P) < \varepsilon + I(f,P) \leq \varepsilon + I(f)$$

puesto que $\varepsilon$ es arbitrario tenemos que $S(f) \leq I(f)$ y por el teorema 1.1.1 concluimos que $S(f) = I(f)$, i.e., f es Darboux-Integrable. //

Definición 1.1.4.- La *norma de una partición P* es la máxima longitud de los subintervalos comprendidos en P y se representa por $|P|$. Así, si $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = b\}$ definimos $|P| = \max\{t_k - t_{k-1} : k=1,2,\ldots,n\}$.

Con esta definición podemos dar otro criterio para Integrabilidad en sentido de Darboux.

Teorema 1.1.3.- Una función acotada f en $[a,b]$ es Darboux-Integrable si, y solo si, para cada $\varepsilon>0$, hay un $\delta>0$ tal que para todas las particiones P de $[a,b]$ con $|P|<\delta$ se tiene que $S(f,P)-I(f,P)<\varepsilon$.

*Demostración.*- Necesidad: Supóngase que f es integrable en $[a,b]$, sea $\varepsilon>0$ y selecciónese una partición $Po = \{a = u_\circ < u_1 < \ldots < um = b\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P_\circ) - I(f,P_\circ) < \varepsilon/2.$$

Puesto que f es acotada, existe $B>0$ tal que $|f(x)| \leq B$ para toda $x\varepsilon\ [a,b]$. Sea $\delta = \varepsilon/(8mB)$, en donde m es el número de intervalos comprendidos en $P_\circ$. Para verificar la condición del teorema, considérese alguna partición $P = \{a=t_\circ<t_1<\ldots< t_n = b\}$ con $|P|<\delta$. Sea $Q = P\cup P_\circ$. Si Q tiene un elemento más que P, una ojeada en la demostración del lema 1.1.1 nos lleva a que

$$I(f,Q)-I(f,P) \leq B(t_k - t_{k-1}) - (-B)(t_k - t_{k-1})$$

$$\leq B|P| + B|P| = 2\,B|P|.$$

Este es el caso en que Q tiene un solo elemento más que P. En general, puesto que Q tiene a lo más m elementos que no están en P, tendremos

$$I(f,Q)-I(f,P) \leq 2m\,B|P| \leq 2mB\delta = \varepsilon/4.$$

Por el lema 1.1.1 tenemos que $I(f,P_\circ) \leq I(f,Q)$ y así también

$$I(f,P_\circ) - I(f,P) < \varepsilon/4.$$

Similarmente, $S(f,P) - S(f,P_\circ) < \varepsilon/4$, con lo que

$$S(f,P)-I(f,P) \leq S(f,P_\circ)-I(f,P_\circ) + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Suficiencia: El teorema anterior (1.1.2) nos muestra que la condición $\varepsilon - \delta$ en este caso implica la integrabilidad de f en el sentido de Darboux.

## 1.2. INTEGRAL DE RIEMANN.

Definición 1.2.1.- Sea f una función acotada, definida en $[a,b]$ y sea $P = \{a=t_0<t_1 <\ldots< t_n = b\}$. Una *Suma de Riemann de* f asociada con la partición P es una suma de la forma

$$R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k - t_{k-1})$$

donde $x_k \in [t_{k-1}, t_k]$ para $k = 1,2,..,n$

Nótese que la elección de los $x_k$ es enteramente arbitraria así que hay una infinidad de sumas de Riemann asociadas con una misma función y partición.

Definición 1.2.2.- Sea f una función acotada definida en $[a,b]$ f se dice *Riemann-Integrable* en $[a,b]$ si existe un número r, con la siguiente propiedad:

Para cada $\varepsilon>o$, existe $\delta>o$ tal que $|R - r|<\varepsilon$ para cada suma de Riemann R de f asociada con una partición P, tal que $|P|<\delta$.

El número r es la *Integral de Riemann* de f en $[a,b]$ y la denotamos

$$(R) \int_a^b f \quad = (R) \int_a^b f(x)dx = r$$

Teorema 1.2.1.- Una función acotada f, definida sobre $[a,b]$, es Riemann-Integrable si, y solo si, es Darboux integrable, en cuyo caso los valores de las integrales coinciden.

*Demostración.* Supongamos que f es Darboux-Integrable, sobre $[a,b]$ en el sentido de la definición 1.1.3. Sean $\varepsilon>o$ y $\delta>o$ elegidos de tal forma que la condición del teorema 1.1.3. Se cumple.

Para cada suma de Riemann $R(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k-t_{k-1})$ asociada con una partición P, con $|P|<\delta$, tenemos

$$I(f,P)\leq R(f,P) \leq S(f,P)$$

y además

$$S(f,P)< I(f,P)+ \varepsilon \leq I(f)+ \varepsilon = (D)\int_a^b f + \varepsilon$$

también

$$I(f,P)> S(f,P)- \varepsilon \geq S(f)- \varepsilon = (D)\int_a^b f - \varepsilon$$

con estas desigualdades tenemos

$$\left| R(f,P) - (D) \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

por lo que f es Riemann-Integrable y

$$(R)\int_a^b f = (D)\int_a^b f$$

Ahora supóngase que f es Riemann-Integrable en el sentido de la definición 1.2.2, considerese $\varepsilon>0$, sean $\delta>0$ y r como se da en la definición.

Seleccionando alguna partición

$$P = \{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$$

con $|P|<\delta$, y para cada $k=1,2,\ldots,n$ selecciónese $x_k$ en $[t_{k-1}, t_k]$ tal que

$$f(x_k)< m(f,[t_{k-1}, t_k]) + \varepsilon$$

la suma de Riemann R para ésta elección de los $x_k$ satisface

$$R(f,P)\leq I(f,P)+ \varepsilon\ (b - a)$$

así como

$$|R(f,P) - r| < \varepsilon$$

se sigue que

$$I(f) \geq I(f,P) \geq R(f,P) - \varepsilon(b-a) > r - \varepsilon - \varepsilon(b-a);$$

puesto que $\varepsilon$ es arbitrario, concluimos que $I(f) \geq r$. Un argumento similar nos muestra que $S(f) \leq r$, puesto que $I(f) \leq S(f)$, vemos que

$$I(f) = S(f) = r,$$

lo que muestra que f es Darboux-Integrable y que

$$(D)\int_a^b f = r = (R)\int_a^b f \ . \ //$$

El siguiente teorema nos presenta algunas de las propiedades que cumple la integral de Riemann.

**Teorema 1.2.2.-** Sean f y g funciones integrables sobre $[a,b]$ y sea c un número real. Entonces

i) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ ;

ii) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ;

iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $\qquad (a < c < b)$;

iv) Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a,b]$, entonces
$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ ;

v) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

Omitimos la demostración. //

Un conjunto N es *"a lo más numerable"* si es finito o infinito numerable.

*Definición 1.2.3.-* Un conjunto S de números reales tiene *medida cero* si, para cada $\varepsilon > o$, existe una cubierta a lo más numerable $(I_\lambda)_{\lambda\varepsilon N}$ de intervalos abiertos, tal que la suma de sus longitudes es menor que $\varepsilon$, esto es, si $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ tenemos que

$$S \subset \bigcup_{\lambda\varepsilon N} I_\lambda \qquad \text{y} \qquad \sum_{\lambda\varepsilon N} (b_\lambda - a_\lambda) < \varepsilon.$$

**Teorema 1.2.3.- Sea f una función real, acotada y definida sobre $[a,b]$. Sea D el conjunto de discontinuidades de f en $[a,b]$. f es Riemann-Integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, D es un conjunto de medida cero.**

*Demostración.* **Necesidad.- Definamos para $T \subseteq [a,b]$**

$$\Omega_f(T) = \operatorname{Sup}\{ f(x)-f(y) : x,y\varepsilon T \}$$

$$B(x,h) = \{ y\varepsilon R : |y-x| < h \}$$

$$w_f(x) = \lim_{h\to 0^+} \Omega_f(B(x,h)) \cap [a,b])$$

**Nótese que si $x\varepsilon D$, $w_f(x) > o$ por lo que se tiene**

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \,, \qquad D_k = \{x / w_f(x) \geq {}^1/k\}$$

**Si suponemos que D no es de medida cero, algún $D_k$ No es de medida cero y si P es un partición de $[a,b]$**

$$\begin{aligned} S(f,P)-I(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \left[ M(f, [t_{k-1}, t_k]) - m(f, [t_{k-1}, t_k]) \right]. \\ &\qquad (t_k - t_{k-1}). \\ &= S_1 + S_2 \geq S_1 \end{aligned}$$

donde en $S_1$ están los términos correspondientes a subintervalos que contengan en su interior puntos de D. Como $D_{k_1}$ no es de medida cero, hay un

$\varepsilon>0$ tal que toda cubierta a lo más numerable de $D_{k_1}$, tiene suma de longitudes $\geq \varepsilon$, Los subintervalos de $S_1$ cubren a $D_{k_1}$ y en ellos $M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k]) \geq \frac{1}{k_1}$ así que $S_1 \geq \frac{\varepsilon}{k_1}$ por lo que la condición de integrabilidad no se satisface.

Suficiencia. Supongamos que D tiene medida cero. Como cada $D_k$ tiene medida cero, lo cubrimos con intervalos tales que la suma de sus longitudes sea menor que $1/k$. Como $D_k$ es compacto basta un número finito de intervalos. La unión de estos intervalos es un conjunto abierto $A_k$, así que $B_k = [a,b]- A_k$ es la unión de un número finito de intervalos cerrados contenidos en $[a,b]$. Sea I uno de ellos. Si $x\varepsilon I$, $w_f(x)< \frac{1}{k}$. Hay una subdivisión de I en un número finito de subintervalos T de longitud $<\delta$ en los que $\Omega_f(T)< \frac{1}{k}$. Construimos una partición $P_k$ de $[a,b]$ tal que si P es más fina que $P_k$

$$S(f,P)-I(f,P)= S_1+S_2 \quad y \quad S_2< \frac{b-a}{k}, \; S_1\leq \frac{M-m}{k}$$

donde $S_1$ contiene los términos correspondientes a subintervalos que contienen en su interior puntos de $D_k$ y donde M y m son el sup e inf de f en $[a,b]$. Como esto vale para toda $k\geq 1$, f satisface la condición de integrabilidad en $[a,b]$. //

# CAPITULO II

## INTEGRACION DE STIELTJES

### 2.1 INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES.

A continuación presentaremos la definición de la integral de Riemann-Stieltjes, concepto más general que las integrales del capítulo anterior. Esta integral incluye dos funciones f y F en lugar de una sola, y la integral de Riemann se presenta como un caso particular.

Al igual que en las secciones anteriores una partición P de $[a,b]$ es un subconjunto finito ordenado de puntos

$$P = \{a=t_o<t_1<\ldots<t_n = b\}.$$

La norma de P, $|P|$, es el mayor de los n números $t_k-t_{k-1}$. La partición P' de $[a,b]$ se dice que es más fina que P (ó un refinamiento de P), si $P\subseteq P'$.
Nótese que si $P\subseteq P'$, entonces $|P'|\leq|P|$.

Definición 2.1.1.- Sean f y F dos funciones acotadas definidas en $[a,b]$. Sean $P=\{a=t_o<t_1<\ldots<t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ y $x_k$ un punto del subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ para k=1,2,...,n. Una suma de la forma

$$R_F(f,P)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k).\ [F(t_k)-F(t_{k-1})]$$

se denomina suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto de F.

Definición 2.1.2.- Sean f y F dos funciones acotadas y definidas en $[a,b]$. Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$, y escribimos $f\varepsilon R(F)$ en $[a,b]$, si existe un número r que tiene la propiedad siguiente:

Para todo $\varepsilon>o$ existe una partición $P\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que para toda partición P mas fina que $P_\varepsilon$ y para todo $x_k$ en $[t_{k-1}, t_k]$ tenemos

$$| R_F(f,P) - r | < \varepsilon.$$

El número r, si existe, es llamado la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a F en $[a,b]$ y lo escribimos

$$(R\text{-}S)\int_a^b f dF \quad ó \quad (R\text{-}S)\int_a^b f(x)dF(x).$$

Las funciones f y F en la integral son llamadas respectivamente integrando e integrador. Nótese que en el caso de que $F(x)=x$ tenemos el caso particular de la integral de Riemann (sección 1.2).

Presentaremos solo algunos teoremas importantes de esta teoria.

Teorema 2.1.1.- (Propiedades Lineales de la Integral)

(a) Si $f\varepsilon R(F)$ y $g\varepsilon R(F)$ en $[a,b]$, entonces $g+f\varepsilon R(F)$, $cf\varepsilon R(F)$

para toda constante c, y

$$(R\text{-}S)\int_a^b (f+g)dF = (R\text{-}S)\int_a^b f dF + (R\text{-}S)\int_a^b g dF$$

$$(R\text{-}S)\int_a^b cf dF = c.(R\text{-}S)\int_a^b f dF$$

(b) Si $f\varepsilon R(F_1)$ en $[a,b]$ y $f\varepsilon R(F_2)$ en $[a,b]$ entonces $f\varepsilon R(c_1F_1 + c_2F_2)$ en $[a,b]$ (para cualesquiera constantes $c_1$ y $c_2$) y tenemos

$$(R\text{-}S)\int_a^b f d(c_1F_1 + c_2F_2) = c_1(R\text{-}S)\int_a^b f dF_1 + c_2\text{-}(R\text{-}S)\int_a^b f dF_2.$$

Omitimos su demostración. //

Teorema 2.1.2.- (Integración por partes). Si $f\varepsilon R(F)$ en $[a,b]$, entonces $F\varepsilon R(f)$ en $[a,b]$ y tenemos

$$(R\text{-}S)\int_a^b f(x)dF(x) + (R\text{-}S)\int_a^b F(x)df(x) = f(b)F(b)-f(a)F(a).$$

*Demostración.* Tomemos un $\varepsilon > o$, tenemos que $(R\text{-}S)\int_a^b fdF$ existe, por lo que hay una partición $P\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que para toda P' más fina que $P\varepsilon$ se cumple

$$| R_F(f,P.) - (R\text{-}S)\int_a^b fdF | < \varepsilon \qquad (1)$$

Tomemos cualquier suma de Riemann-Stieltjes para la integral $(R\text{-}S)\int_a^b Fdf$, sea esta

$$\begin{aligned} R_f(F,P) &= \sum_{k=1}^{n} F(x_k)(f(t_k)-f(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} F(x_k)f(t_k) - \sum_{k=1}^{n} F(t_{k-1})F(t_{k-1}) \end{aligned}$$

donde P es más f una que $P_\varepsilon$. Tomemos $A= f(b)F(b)-f(a)F(a)$ y así tenemos

$$A=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)F(t_k) - \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})F(t_{k-1})$$

si restamos éstas dos igualdades tendremos

$$A-R_f(F,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left[F(t_k)-F(x_k)\right] + \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\left[F(x_k)-F(t_{k-1})\right]$$

las dos sumas de la derecha pueden combinarse en una sola suma de la forma $R_F(f,P')$, donde P' es la partición de $[a,b]$ obtenida tomando juntos los puntos $x_k$ y $t_k$. Así P' es más fina que P y por tanto más fina que $P\varepsilon$. Por lo que la desigualdad (1) es válida, y tenemos

$$| A-R_f(F,P) - (R\text{-}S)\int_a^b fdF | < \varepsilon$$

siempre que $P \subseteq P\varepsilon$, y de acuerdo a la definición tenemos

$$(R\text{-}S)\int_a^b Fdf = A - (R\text{-}S)\int_a^b fdF \quad . //$$

El siguiente resultado nos da una forma de reducir una integral de Riemann-Stieltjes a una integral de Riemann.

Teorema 2.1.3.- Sea $f\varepsilon R(F)$ en $[a,b]$. Si F tiene derivada F' continua en $[a,b]$, entonces la integral de Riemann $(R)\int_a^b f(x)F'(x)dx$ existe y se tiene

$$(R\text{-}S)\int_a^b f(x)dF(x)= (R)\int_a^b f(x)F'(x)dx$$

*Demostración*.- Tomemos $g(x)= f(x)F'(x)$ y consideremos la suma de Riemann

$$R(g,P) =\sum_{k=1}^{n} g(x_k)[t_k-t_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)F'(x_k)(t_k-t_{k-1})$$

la misma partición P y la misma elección de $x_k$ puede utilizarse para la suma de Riemann-Stieltjes

$$R_F(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k).\ [F(t_k)-F(t_{k-1})].$$

Aplicando el teorema del valor medio podemos escribir

$$F(t_k)-F(t_{k-1}) = F'(v_k)(t_k-t_{k-1}) \text{ donde } v_k\varepsilon(t_{k-1}, t_k)$$

y así

$$R_F(f,P)-R(g,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)[F'(v_k)-F'(x_k)](t_k-t_{k-1})$$

ya que f es acotada, tenemos $M>o$ tal que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\varepsilon[a,b]$. Ya que $F'$ es continua en $[a,b]$ entonces es uniformemente continua. Así, dado $\varepsilon>o$, hay un $\delta>o$ tal que

$$o\leq |x-y|<\delta \quad \text{implica} \quad |F'(x)-F'(y)|< \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

si tomamos una partición $P'\varepsilon$ de norma $|P'\varepsilon|<\delta$, entonces para cualquier partición más fina P tendremos en la igualdad anterior

$$|F'(v_k)-F'(x_k)|< \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

y para tal P tenemos

$$| R_F(f,P)-R(g,P) | < \varepsilon/2$$

por otro lado ya que $f\varepsilon R(F)$ en $[a,b]$, existe una partición $P''\varepsilon$ tal que si $P\underline{c}P''\varepsilon$ entonces

$$| R_F(f,P)-(R\text{-}S)\int_a^b f dF | < \varepsilon/2$$

y combinando estas 2 últimas desigualdades, vemos que para P mas fina que $P\varepsilon=P'\varepsilon \cup P''\varepsilon$, tendremos

$$| R(g,P)-(R\text{-}S)\int_a^b f dF | < \varepsilon$$

lo que demuestra el teorema. //

Es claro que si F es constante en $[a,b]$ toda suma $R_F(f,P)=0$ y así $(RS)\int_a^b fdF$ existe, y tiene el valor cero. Un caso más interesante es cuando F es constante excepto en un punto c del intervalo, donde presenta una discontinuidad de salto. En este caso, la integral no necesariamente existe y si existe no necesariamente vale cero. Esto es lo que nos afirma el siguiente teorema.

Teorema 2.1.4.- Dados $a<c<b$. Definimos F en $[a,b]$ como sigue: los valores $F(a)$, $F(c)$, $F(b)$ son arbitrarios; $F(x) = F(a)$ si $a\leq x<c$ y $F(x)=F(b)$ si $c<x\leq b$ . Sea f definida en $[a,b]$ de manera que por lo menos una de las funciones f ó F sea continua por la izquierda en c y una por lo menos sea continua por la derecha en c. Entonces $f \varepsilon R(F)$ en $[a,b]$ y tenemos

$$\int_a^b fdF = f(c) \left[F(c^+)- F(c^-)\right]$$

*Demostración*.- Si $c\varepsilon P$, todo termino de la suma $R_F(f,P)$ es nulo salvo los dos términos procedentes del subintervalo que contiene a por c, pongamos pues

$$R_F(f,P)= f(x_{k-1})\left[F(c)-F(c^-)\right] + f(x_k)\left[F(c^+)-F(c)\right]$$

donde $t_{k-1} \leq c \leq t_k$ igualdad que también podemos escribir

$$\Delta=\left[f(x_{k-1})-f(c)\right]\left[F(c)-F(c^-)\right]+\left[f(x_k)-f(c)\right]\left[F(c^+)-F(c)\right]$$

con $\Delta=R_F(f,P)-f(c)\left[F(c^+)-F(c^-)\right]$. Luego tenemos

$$|\Delta|\leq|f(x_{k-1})-f(c)|\,|F(c)-F(c^-)| + |f(x_k)-f(c)|\,|F(c^+)-F(c)|$$

Si f es continua en c, para todo $\varepsilon>o$ existe un $\delta>o$ tal que $|P|<\delta$ implica

$$|f(x_{k-1})-f(c)|<\varepsilon \quad y \quad |f(x_k)-f(c)|<\varepsilon$$

En este caso, obtenemos la desigualdad

$$|\Delta|\leq \varepsilon|F(c)-F(c^-)|+ \varepsilon|F(c^+)-F(c)| \tag{2}$$

pero esta desigualdad es válida sea f continua ó no en c por ejemplo, si f es discontinua a la derecha y a la izquierda de c, entonces $F(c)=F(c^-)$ y $F(c)=F(c^+)$ y conseguimos $\Delta=0$. Por otra parte, si f es continua a la izquierda y discontinua a la derecha de c, debemos tener $F(c)=F(c^+)$ y obtenemos $|\Delta|\leq \varepsilon|F(c)-F(c^-)|$. Analogamente, si f es continua a la derecha y discontinua a la izquierda de c, tenemos $F(c)=F(c^-)$ y $|\Delta|\leq \varepsilon|F(c^+)-F(c)|$ luego (2) es valida en cualquier caso, lo que demuestra el teorema. //

## 2.2 INTEGRAL DE DARBOUX-STIELTJES.

*Definición* 2.2.1.- Sea F una función monótona creciente en $[a,b]$ y sea $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ una partición de $[a,b]$. Adoptando la notación dada en 1.1.2, para toda función real f acotada en $[a,b]$ definimos la suma superior de Darboux-Stieltjes de f con respecto a F y a la partición P de $[a,b]$ como

$$S_F(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M(f,[t_{k-1},t_k]).\ [F(t_k)-F(t_{k-1})],$$

y la suma inferior de Darboux-Stieltjes de f respecto a F y a la partición P de $[a,b]$ como

$$I_F(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m(f,[t_{k-1},t_k]).\ [F(t_k)-F(t_{k-1})].$$

La integral superior de Darboux-Stieltjes, y la integral inferior de Darboux-Stieltjes son

$$S_F(f)=\inf\{S_F(f,P):\ P \text{ es partición de } [a,b]\}$$
$$I_F(f)=\sup\{I_F(f,P):\ P \text{ es partición de } [a,b]\}$$

si las integrales superior e inferior coinciden entonces se dice que f es Darboux-Stieltjes integrable y la integral de Darboux-Stieltjes es dada por el valor común:

$$(DS)\int_a^b f\,dF = S_F(f) = I_F(f).$$

Si la integral existe, ésto es, si $S_F(f)=I_F(f)$ decimos que f es integrable con respecto a F en el sentido de Darboux-Stieltjes y escribimos $f\varepsilon D(F)$ en $[a,b]$. Tomando $F(x)=x$ se ve que la integral de Darboux (1.1) es un caso particular de la integral de Darboux-Stieltjes.

Teorema 2.2.1.- Sea F creciente, y f acotada en $[a,b]$. Si Q es un refinamiento de P es

$$I_F(f,P) \leq I_F(f,Q) \leq S_F(f,Q) \leq S_F(f,P)$$

*Demostración*, (Semejante a lo del lema (1.1.1)).//

Teorema. 2.2.2.- $I_F(f,) \leq S_F(f,)$

*Demostración*. (Semejante a la del teorema (1,1,1)).//

Teorema. 2.2.3.- $f \varepsilon D(F)$ en $[a,b]$ si, y solo si, para cada $\varepsilon > o$ existe una partición P tal que

$$S_F(f,P) - I_F(f,P) < \varepsilon, \qquad (1)$$

En ese caso, decimos que f satisface la condición de Riemann respecto a F en $[a,b]$

*Demostración*. Para cada partición P tenemos

$$I_F(f,P) \leq I_F(f) \leq S_F(f) \leq S_F(f,P)$$

así (1) implica

$$o \leq S_F(f) - I_F(f) < \varepsilon$$

por lo que si se cumple (1) para todo $\varepsilon > o$ tenemos

$$S_F(f) = I_F(f)$$

Inversamente, supongamos que $f \varepsilon D(F)$ y sea $\varepsilon > o$ dado. Existen particiones $P_1$ y $P_2$ tales que

$$S_F(f,P_2) - (DS)\int_a^b f dF < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(DS)\int_a^b f dF - I_F(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tomando P como un refinamiento común de $P_1$ y $P_2$, tenemos

$$S_F(f,P) \leq S_F(f,P_2) < (D\text{-}S)\int f dF + \frac{\varepsilon}{2} < I_F(f,P_1) + \varepsilon \leq I_F(f,P) + \varepsilon \ .//$$

Teorema 2.2.4.- Sea F creciente, $f\varepsilon$ D(F), si y solo si $f\varepsilon$ R(F), en $[a,b]$ en cuyo caso las integrales coinciden.

*Demostración:* Necesidad. Sea $P_\varepsilon$ una partición de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - I_F(f,P) < \varepsilon,$$

Para cada suma de Riemann-Stieltjes tenemos

$$I_F(f,P_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\ [F(t_k)-F(t_{k-1})] \leq S_F(f,P)$$

y como

$$I_F(f,P) \leq (D\text{-}S)\int_a^b f dF \leq S_F(f,P)$$

tenemos que para P más fina que $P_\varepsilon$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(X_k).\ [F(t_k)-F(t_{k-1})] - (D\text{-}S)\int_a^b f dF\right| < \varepsilon$$

Como $\varepsilon > o$ es arbitrario y la desigualdad es válida para toda P más fina que $P_\varepsilon$, por la definición 2.1.1 tenemos que $f\varepsilon$ R(F) y además se cumple

$$(R\text{-}S)\int_a^b f dF = (D\text{-}S)\int_a^b f dF \ .$$

Suficiencia. Supóngase que $f\varepsilon$ R(F) (definición 2.1.1). Sea $\varepsilon > o$. Seleccionemos una partición $P_\varepsilon = \{a=t_o<t_1<\ldots<t_n = b\}$ de tal forma que para cada P mas fina que $P_\varepsilon$ se tenga que

$$|\ R_F(f,P) - r\ | < \varepsilon$$

y tomemos $x_k$ en $[t_{k-1},\ t_k]$ de modo que $f(x_k) < m\ (f, [t_{k-1}, t_k]) + \varepsilon$

La suma de Riemann-Stieltjes para esta elección de los $x_k$ satisface

$$R_F(f,P) < I_F(f,P) + \varepsilon\ (b-a).\ [F(b)-F(a)]$$

y también

$$|\ R_F(f,P)-r\ | < \varepsilon$$

por lo que

$$I_F(f) \geq I_F(f,P) \quad R_F(f,P)-\ \varepsilon[F(b)-F(a)] > r-\varepsilon-\varepsilon[F(b)-F(a)]$$
$$[F(b)-F(a)]$$

puesto que $\varepsilon$ es arbitrario, concluimos que

$$I_F(f) \geqslant r\ ;$$

similarmente se llega a que

$$S_F(f) \leqslant r$$

por lo que se concluye que

$$I_F(f) = S_F(f) = r\ ;$$

ésto es, que $f \varepsilon D(F)$ y además

$$(D-S)\ \int_a^b f dF = r = (R-S)\ \int_a^b f dF\ .//$$

*Definición*.- 2.2.2.- Sea f una función definida en $[a,b]$, si $P=\{t_o,\ t_1,\ldots,t_n\}$ es una partición de $[a,b]$ escribimos $\Delta f_k = f(t_k)-f(t_{k-1})$, $k=1,2,..,n$. Si existe un número positivo M tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta fk| \leq M$$

para todas las particiones de $[a,b]$, se dice que f es de variación acotaen $[a,b]$.

Definición 2.2.3.- Sea f de variación acotada en $[a,b]$, y designemos por $\Sigma(P)$ la suma $\sum_{k=1}^{n}|\Delta fk|$ correspondiente a la partición $P=\{t_o, t_1,...,t_n\}$ de $[a,b]$, el número $V_f(a,b)=\text{SUP}\{\Sigma(P)$: P es partición de $[a,b]\}$ se llama la variación total de f en el intervalo $[a,b]$.

Teorema 2.2.5.- Supongamos que F es de variación acotada en $[a,b]$ designemos por $V(x)$ la variación total de F en $[a,x]$ si $a<x\leq b$ y tomemos $V(a)=0$. Sea f una función definida y acotada en $[a,b]$ Si $f\varepsilon D(F)$ en $[a,b]$, entonces $f\varepsilon D(V)$ en $[a,b]$.

*Demostración.* Si $V(b)=0$, V es constante y el resultado es trivial, supongamos por lo tanto que $V(b)>o$. Supongamos también que $|f(x)|\leq M$ si $x\varepsilon[a,b]$. Puesto que V es creciente, necesitamos tan solo verificar que f satisface la condición de Riemann con respecto a V en $[a,b]$. Dado $\varepsilon>o$, elijamos $P_\varepsilon$ de modo que para cualquier P más fina y todo par de puntos $x_k$ y $x'_k$ en $[t_{k-1}, t_k]$ se tenga

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x'_k)]\Delta F_k\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad V(b)<\sum_{k=1}^{n}|\Delta F_k| + \frac{\varepsilon}{4M}$$

para P más fino que $P_\varepsilon$ estableceremos las dos desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n}[M(f,[t_{k-1}, t_k])- m(f,[t_{k-1}, t_k] \;(\Delta V_k- |\Delta F_k|)< \frac{\varepsilon}{2}$$

y $$\sum_{k=1}^{n}[M(f,[t_{k-1}, t_k])- m(f,[t_{k-1}, t_k])|\Delta F_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

que al sumarlos nos dan $S_v(f,)-I_v(f,P) < \varepsilon$ para demostrar la primer desigualdad, observese que $\Delta V_k-|\Delta F_k|\geq o$ y, por tanto

$$\sum_{k=1}^{n}[M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k])](\Delta V_k-|\Delta F_k|)\leq 2M\sum_{k=1}^{n}(\Delta V_k-|\Delta F_k|)$$

$$= 2m(V(b)-\sum_{k=1}^{n}|\Delta F_k|)< \frac{\varepsilon}{2}$$

para probar la segunda desigualdad, consideremos

$A(P)=\{k \mid \Delta F_k \geq 0\}$, $B(P)=\{k/\Delta F_k < 0\}$ y

$h=\frac{1}{4}\varepsilon/V(b)$. Si $k\varepsilon A(P)$ elijamos $x_k$ y $x_k'$ de forma que

$f(x_k)-f(x_k') > M(f,[t_{k-1},t_k])-m(f,[t_{k-1},t_k])-h$ pero si $k\varepsilon B(P)$, elijamos $x_k$ y $x_k'$ para que

$f(x_k')-f(x_k) > M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k])-h$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k])] \, |\Delta F_k| < \sum_{k\varepsilon A(P)}[f(x_k)-f(x_k')] \, |\Delta F_k|$$

$$+\sum_{k\varepsilon B(P)}[f(x_k')-f(x_k)] \, |\Delta F_k| + h\sum_{k=1}^{n} |\Delta F_k|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_k')]$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}+hV(b)=\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

por lo que se deduce que $f\varepsilon D(V)$ en $[a,b]$. //

**Teorema 2.2.6.- Si f es continua en $[a,b]$ y F es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f\varepsilon D(F)$ en $[a,b]$.**

*Demostración.* Es suficiente probar el teorema cuando F es estrictamente creciente. La continuidad de f en $[a,b]$ implica la continuidad uniforme, así que dado $\varepsilon>o$, hay un $\delta>o$ ( que sólo depende de $\varepsilon$) tal que

$$|x-y|<\delta \quad \text{implica} \quad |F(x)-f(y)|< {}^{\varepsilon}/A$$

donde $A= 2([F(b)-F(a)]$. Si $P_\varepsilon$ es una partición de norma $|P_\varepsilon|<\delta$, entonces para una P más fina que $P_\varepsilon$ debe ser

$$M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k]) \leq {}^{\varepsilon}/A$$

$$S_F(f,P)-I_F(f,P)\geq \left[M(f,\left[t_{i-1},\ t_i\right])-m(f,\left[t_{i-1},\ t_i\right])\right]\left[F(t_i)-F(c)\right]$$

puesto que cada término de la suma es $\geq 0$. Si c es una discontinuidad común a la derecha, podemos suponer que el punto $x_i$ se elige de manera que $F(x_i)-F(c)\geq \varepsilon$ además, la hipótesis del teorema implica $M(f,\left[t_{i-1},\ t_i\right])-m(f,\left[t_{i-1},\ t_i\right])\geq \varepsilon$ luego $S_F(f,P)-I_F(f,P)\geq \varepsilon^2$ y no puede satisfacerse la condición de Riemann. (Si c es una discontinuidad común a la izquierda, el razonamiento es analogo. //

ya que $M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k]) = \text{Sup}\{f(x)-f(y)/x,y\varepsilon[t_{k-1}, t_k]\}$ multiplicando la desigualdad por $\Delta F_k$ y sumando, encontramos

$$S_F(f,P)- I_F(f,P)\leq \frac{\varepsilon}{A}\sum_{k=1}^{n}\Delta F_k = \frac{\varepsilon}{2}\leq \varepsilon$$

y puesto que se satisface la condición de Riemann concluimos que $f\varepsilon D(F)$ en $[a,b]$. //

Teorema 2.2.7.- Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para la existencia de la integral de Riemann $(R)\int_a^b f(x)dx$

a) f continua en $[a,b]$
b) f de variación acotada en $[a,b]$

demostración, aplicando $F(x)=x$ y aplicando el teorema anterior, y la integración por partes. //

Teorema 2.2.8.- Supongamos que F es creciente en $[a,b]$ y sea $a<c<b$. Supongamos además que f y F son ambas continuas a la derecha de $x=c$, esto es, supongamos que existe un $\varepsilon>o$ tal que para toda $\delta>o$ hay valores de x e y en el intervalo $(c,c+\delta)$ para los cuales

$$|f(x)-f(c)|\geq \varepsilon \quad \text{y} \quad |F(y)-F(c)|\geq \varepsilon$$

en tal caso no puede existir la integral $(R-S)\int_a^b f(x)dF(x)$ tampoco existe si f y F son discontinuas a la izquierda de c.

*Demostración.* Sea P una partición de $[a,b]$ que contiene a c como un punto de subdivisión y formemos la diferencia

$$S_F(f,P)-I_F(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\left[M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k])\right]\Delta F_k$$

si el i-ésimo subintervalo tiene c como extremo izquierdo entonces

# CAPITULO 3

## OTRO TRATAMIENTO DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES.

### 3.1 LA INTEGRAL DE DARBOUX-STIELTJES GENERALIZADA.

Supondremos en todo el capítulo que F es una función creciente en $[a,b]$, con $F(a)<F(b)$. Usaremos la notación siguiente para los límites laterales (además de la ya establecida en 1.1):

$$F(t^-) = \lim_{x\to t^-} F(x) \quad \text{y} \quad F(t^+) = \lim_{x\to t^+} F(x)$$

para los extremos, por facilidad de notación definiremos

$$F(a^-) = F(a) \qquad \text{y} \qquad F(b^+) = F(b).$$

Nótese que $F(t^-) \leq F(t^+)$ para toda $t \in [a,b]$. Cuando F es continua en t, tenemos $F(t^-) = F(t^+) = F(t)$. De otra forma $F(t^-) < F(t^+)$ y la diferencia $f(t^+) - F(t^-)$ es llamado el *salto* de F en t.

Definición 3.1.1.- Sean f una función real acotada en $[a,b]$ y una partición $P = \{a=t_0<t_1<\ldots< t_n = b\}$ escribiremos

$$J_F(f,P) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k).\left[F(t_k^+) - F(t_k^-)\right]$$

La suma superior de Darboux-Stieltjes generalizada es

$$S_F^*(f,P) = J_F(f,P) + \sum_{k=1}^{n} M(f,(t_{k-1}, t_k)).\left[F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)\right]$$

y la suma inferior de Darboux-Stieltjes generalizada

$$I_F^*(f,P) = J_F(f,P) + \sum_{k=1}^{n} m(f,(t_{k-1}, t_k)).\left[F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)\right].$$

Obsérvese que estas definiciones toman en cuenta los efectos del salto de F. Nótese además

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[M(f,(t_{k-1}, t_k)) - m(f,(t_{k-1}, t_k))\right] \left[F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)\right] \quad (1)$$

y

$$m(f, [a,b]).\left[F(b) - F(a)\right] \le I_F^*(f,P) \le S_F(f,P)$$

$$\le M(f, [a,b]).\left[F(b) - F(a)\right]. \quad (2)$$

Puesto que

$$\sum_{k=0}^{n}\left[F(t_k^+)-F(t_k^-)\right]+ \sum_{k=1}^{n}\left[F(t_k^-)-F(t_{k-1}^+)\right]= F(b^+)=F(b)-F(a)$$

La *integral superior* de Darboux-Stieltjes generalizada es

$$S_F^*(f) = \inf \{S_F^*(f,P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$$

y la *integral inferior* de Darboux-Stieltjes generalizada

$$I_F^*(f) = \sup \{I_F^*(f,P): P \text{ es partición de } [a,b]\}$$

Mostraremos más adelante que $I_F^*(f) \le S_F^*(f)$. Por consiguiente diremos que f es Darboux-Stieltjes integrable en el sentido generalizado, en $[a,b]$ con respecto a F, o más brevemente *F-integrable* en $[a,b]$, si $I_F^*(f) = S_F^*(f)$, en cuyo caso escribiremos

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f(x)dF(x)= I_F^*(f) = S_F^*(f).$$

Lema 3.1.1.- Sea f una función acotada sobre $[a,b]$, y sean P y Q particiones de $[a,b]$ tal,que $P\subseteq Q$. Entonces

$$I_F^*(f,P) \le I_F^*(f,Q) \le S_F^*(f,Q) \le S_F^*(f,P).$$

*Demostración.-* La desigualdad central es obvia, las pruebas de las desigualdades de la izquierda y de la derecha son semejantes a las del lema 1.1.1. Mostraremos que

$$S_F^*(f,Q) \leq S_F^*(f,P).$$

Basta con probar ésta considerando que Q tiene exactamente un punto más, digamos u, que P. Si

$$P = \{a=t_o<t_1<\ldots< t_n = b\}$$

entonces

$$Q = \{a=t_o<t_1<\ldots< t_{k-1}<u<t_k<\ldots< t_n = b\}$$

para alguna $k\varepsilon\{1,2,\ldots,n\}$. Encontramos que

$$S_F^*(f,P)-S_F^*(f,Q) = M(f,(t_{k-1}, t_k)).\left[F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)\right]$$
$$- \{f(u).\left[F(u^+) - F(u^-)\right] + M(f,(t_{k-1}, u)).\left[F(u^-) - F(t_{k-1}^+)\right]$$
$$+ M(f,(u, t_k)).\left[F(t_k^-) - F(u^+)\right]\}$$

y ésta es no negativa porque

$$M(f,(t_{k-1}, t_k)).\left[F(t_k^-)-F(t_{k-1}^+)\right]$$
$$= M(f,(t_{k-1}, t_k)).\left[F(t_k^-)-F(u^+)+F(u^+)-F(u^-)+F(u^-)-F(t_{k-1}^+)\right]$$
$$\geq M(f,(u,t_k)).\left[F(t_k)-F(u^+)\right]+ f(u)\left[F(u^+)-F(u^-)\right]$$
$$+ M(f,(t_{k-1}, u)).\left[F(u^-)-F(t_{k-1}^+)\right]. \quad //$$

Lema 3.1.2.- Si f es una función acotada en $[a,b]$ y si P y Q son particiones de $[a,b]$, entonces $I_F^*(f,P) \leq S_F^*(f,Q)$

*Demostración*.- $P_o$= PUQ es también una partición de $[a,b]$ y como $P\subseteq P_o$, $Q\subseteq P_o$; concluimos por el lema 3.1.1

$$I_F^*(f,P) \leq I_F^*(f,P_o) \leq S_F^*(f,P_o) \leq S_F^*(f,P). \quad //$$

Teorema 3.1.1.- Para toda función acotada f sobre $[a,b]$, tenemos $I_F^*(f) \leq S_F^*(f)$.

*Demostración.*- Tomemos una partición fija P. El lema 3.1.2 nos asegura que $I_F^*(f,P)$ es una cota inferior para el conjunto

$$\{S_F^*(f,Q) : Q \text{ es partición de } [a,b]\}$$

por lo que $I_F^*(f,P)$ debe ser menor ó igual que la máxima cota inferior del conjunto, por lo que

$I_F^*(f,P) \leq S_F^*(f)$. Y de aquí se sigue inmediatamente la conclusión.//

El siguiente resultado nos da un criterio de integrabilidad.

Teorema 3.1.2.- Una función real f, acotada sobre $[a,b]$, es F-integrable si, y solo si, para cada $\varepsilon>0$, existe una partición P de $[a,b]$, tal que

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon.$$

*Demostración.*- Necesidad: supóngase que f es F-integrable, existen entonces $P_1$ y $P_2$, particiones de $[a,b]$, con

$$I_F^*(f,P_1) > I_F^*(f) - \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad S_F^*(f,P_2) < S_F^*(f) + \varepsilon/2$$

tomando $P = P_1 \cup P_2$ tenemos

$$I_F^*(f,P_1) \leq I_F^*(f,P) \leq S_F^*(f,P) \leq S_F^*(f,P_2)$$

y

$$\begin{aligned} S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) &\leq S_F^*(f,P_2) - I_F^*(f,P_1) \\ &\leq S_F^*(f) + \varepsilon/2 - I_F^*(f) + \varepsilon/2 \\ &= S_F^*(f) - I_F^*(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

y puesto que f es F-integrable $S_F^*(f) = I_F^*(f)$, $S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon$.

Suficiencia. Supongamos que para cada $\varepsilon > o$ se cumple que

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon.$$

Tenemos

$$S_F^*(f) \leq S_F^*(f,P) = S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) + I_F^*(f,P)$$

$$\leq \varepsilon + I_F^*(f,P) \leq \varepsilon + I_F^*(f)$$

por ser $\varepsilon$ arbitrario $S_F^*(f) \leq I_F(f)$ por lo que el teorema 3.1.1 nos permite concluir

$$I_F^*(f) = S_F^*(f) \quad \text{(i.e, f es F-integrable). //}$$

Pasaremos a analizar algunas de las propiedades de ésta integral.

Teorema 3.1.3 (linealidad).- Sean f y g funciones F-integrables sobre $[a,b]$, y sea c un número real. Entonces

a) cf es F-integrable y $\int_a^b (cf)\, dF = c\int_a^b f dF$

b) f + g es F-integrable y $\int_a^b (f+g) dF = \int_a^b f dF + \int_a^b g dF$

*Demostración.*- De (a), consideraremos por casos, $c>o$, $c=-1$ y $c<o$, $c=0$ es obvio.

i) Sea $c>o$, consideremos una partición P de $[a,b]$. Por la propiedades del supremum tenemos $M(cf,[t_{k-1}, t_k]) = cM(f,[t_{k-1}, t_k])$ y así $S_F^*(cf,P) = c\ S_F^*(f,P)$, por el mismo criterio $S_F^*(cf) = cS_F^*(f)$. Por lo anterior y dado que f es F-integrable

$$I_F^*(cf) = c\ I_F^*(f) = c\ S_F^*(f) = S_F^*(cf)$$

i,e cf es F-integrable y $\int_a^b cf\,dF = c\int_a^b f\,dF$.

ii) $c = -1$, Para todas las particiones P de $[a,b]$ tenemos $S_F^*(-f,P) = -I_F^*(f,P)$ por lo que

$$S_F^*(-f) = \inf\{S_F^*(-f,P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$$
$$= \inf\{-I_F^*(f,P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$$
$$= -\text{SUP}\{I_F^*(f,P) : P \text{ es partición de } [a,b]\} = -I_F^*(f)$$

sustituyendo f por-f, obtenemos que $I_F^*(-f) = -S_F^*(f)$, y ya que f es F-integrable

$S_F^*(-f) = -I_F^*(f) = -S_F^*(f) = I_F^*(-f)$ por lo que -f es F-integrable y $\int_a^b(-f)\,dF = -\int_a^b f\,dF$.

iii) $c < 0$, Aplicando los resultados probados a $-c$ obtenemos

$$\int_a^b cf\,dF = -\int_a^b(-c)f\,dF = -(-c)\int_a^b f\,dF = c\int_a^b f\,dF$$

Prueba de (b).

Sea $\varepsilon > 0$ y $P_1$, $P_2$ particiones de $[a,b]$ tales que

$$S_F^*(f,P_1) - I_F^*(f,P_1) < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad S_F^*(g,P_2) - I_F^*(g,P_2) < \varepsilon/2$$

esto por la integrabilidad de f y g. Tomemos $P = P_1 \cup P_2$, por el lema 3.1.1 tenemos que

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad S_F^*(g,P) - I_F^*(g,P) < \varepsilon/2. \tag{3}$$

Para cualquier subconjunto C de $[a,b]$ tenemos que

$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in C\} \geq \inf\{f(x) : x \in C\} + \inf\{g(x) : x \in C\}$$

por lo que

$$I_F^*(f+g,P) \geq I_F^*(f,P) + I_F^*(g,P)$$

De forma similar

$$S_F^*(f+g,P) \leq S_F^*(f,P) + S_F^*(g,P)$$

y por (3) tenemos

$$S_F^*(f+g,P) - I_F^*(f+g,P) < \varepsilon$$

ésto es, (f+g) es F-integrable. Puesto que

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)\,dF &= S_F^*(f+g) \leq S_F^*(f+g,P) \leq S_F^*(f,P) + S_F^*(g,P) \\ &< I_F^*(f,P) + I_F^*(g,P) + \varepsilon \leq I_F^*(f) + I_F^*(g) + \varepsilon \\ &= \int_a^b f\,dF + \int_a^b g\,dF + \varepsilon \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)\,dF &= I_F^*(f+g) \geq I_F^*(f+g,P) \geq I_F^*(f,P) + I_F^*(g,P) \\ &\geq S_F^*(f,P) + S_F^*(g,P) - \varepsilon = \int_a^b f\,dF + \int_a^b g\,dF - \varepsilon \end{aligned}$$

y concluimos que

$$\int_a^b (f+g)\,dF = \int_a^b f\,dF + \int_a^b g\,dF \quad . //$$

Teorema 3.1.4 (aditividad).- Sea f definida en $[a,b]$. Si $a<c<b$ y f es F-integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, entonces es F-integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^c f\,dF + \int_c^b f\,dF$$

*Demostración.*- Puesto que f es acotada en $[a,c]$ y $[c,b]$, es acotada en $[a,b]$. Sea $\varepsilon>0$, hay particiones $P_1$ y $P_2$ de $[a,c]$ y $[c,b]$ tales que

$$S^*_{F,[a,c]}(f,P_1) - I^*_{F,[a,c]}(f,P_1) < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad S^*_{F,[c,b]}(f,P_2) - I^*_{F,[c,b]}(f,P_2) < \varepsilon/2$$

El conjunto $P=P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a,b]$ para la cual

$$S^*_{F,[a,b]}(f,P) = S^*_{F,[a,c]}(f,P_1) + S^*_{F,[c,b]}(f,P_2)$$

(por la definición de los límites laterales para los extremos, sólo se incluye una sola vez y el salto en c)

$$I^*_{F,[a,b]}(f,P) = I^*_{F,[a,c]}(f,P_1) + I^*_{F,[c,b]}(f,P_2)$$

por lo que f es F-integrable en $[a,b]$, por el teorema 3.1.2 y

$$\int_a^b f\,dF \leq S^*_{F,[a,b]}(f,P) = S^*_{F,[a,c]}(f,P_1) + S^*_{F,[c,b]}(f,P_2)$$

$$< I^*_{F,[a,c]}(f,P_1) + I^*_{F,[c,b]}(f,P_2) + \varepsilon \leq \int_a^c f\,dF + \int_c^b f\,dF + \varepsilon$$

Similarmente

$$\int_a^b f\,dF > \int_a^c f\,dF + \int_c^b f\,df - \varepsilon$$

al ser $\varepsilon$ arbitraria tenemos $\int_a^b f\,dF = \int_a^c f\,dF + \int_c^b f\,dF$. //

Teorema 3.1.5.- Si f y g son F-integrables sobre $[a,b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para $x \varepsilon [a,b]$, entonces $\int_a^b f\,dF \leq \int_a^b g\,dF$.

Demostración: Tomemos $h=g-f$, así h es F-integrable en $[a,b]$. Puesto que $h(x) \geq 0$ para toda $x \varepsilon [a,b]$, $I^*_F(h,P) \geq 0$ para toda partición P, y así

$$\int_a^b h\,dF = I^*_F(h) \geq 0$$

por el teorema 3.1.3. //

$$\int_a^b g\,dF - \int_a^b f\,dF = \int_a^b h\,dF \geq 0,$$

lo que verifica el teorema. //

Teorema 3.1.6.- Si f es F-integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es F-integrable y $|\int_a^b f\,dF| \leq \int_a^b |f|\,dF$

*Demostración:* Para cualquier subconjunto C de $[a,b]$ tenemos $M(|f|,C) - m(|f|,C) \leq M(f,C) - m(f,C)$ por lo que para toda P tenemos

$$S_F^*(|f|,P) - I_F^*(|f|,P) \leq S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon$$

la última desigualdad por ser f F-integrable. Queda así demostrado que $|f|$ es F-integrable, ahora como $-|f| \leq f \leq |f|$, el teorema 3.1.5 nos da

$$-\int_a^b |f|\,dF \leq \int_a^b f\,dF \leq \int_a^b |f|\,dF$$

lo que demuestra el teorema. //

Teorema 3.1.7.- Sea $F_1$ y $F_2$ funciones crecientes sobre $[a,b]$. Si f es $F_1$-integrable y $F_2$-integrable sobre $[a,b]$ y si $c>0$, entonces f es $cF_1$-integrable, y es $(F_1+F_2)$-integrable; además

$$\int_a^b f\,d(cF_1) = c\int_a^b f\,dF_1 \tag{4}$$

y

$$\int_a^b f\,d(F_1+F_2) = \int_a^b f\,dF_1 + \int_a^b f\,dF_2 \tag{5}$$

*Demostración:* Utilizando las propiedades de límites, tenemos que

$$(F_1 + F_2)(t^+) = \lim_{x\to t^+} \left[F_1(x)+F_2(x)\right] = \lim_{x\to t^+} F_1(x) + \lim_{x\to t^+} F_2(x)$$

$$= F_1(t^+)+F_2(t^+)$$

y de forma semejante para $(F_1+F_2)(t^-)$, $(cF_1)(t^+)$ y $(cF_1)(t^-)$. Por lo que para toda partición P de $[a,b]$, tenemos

$$S^*_{F_1+F_2}(f,P) = S^*_{F_1}(f,P) + S^*_{F_2}(f,P)$$
$$I^*_{F_1+F_2}(f,P) = I^*_{F_1}(f,P) + I^*_{F_2}(f,P) \qquad (6)$$
$$S^*_{cF_1}(f,P) = c\, S^*_{F_1}(f,P) \quad y \quad I^*_{F_1}(f,P) = c\, I^*_{F_1}(f,P)$$

de donde es claro la validez de (4). Existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S^*_{F_1}(f,P) - I^*_{F_1}(f,P) < \varepsilon/2$ y $S^*_{F_2}(f,P) - I^*_{F_2}(f,P) < \varepsilon/2$

de aquí que, utilizando (6) tenemos que (5) se sigue de

$$S^*_{F_1+F_2}(f,P) - I^*_{F_1+F_2}(f,P) < \varepsilon$$

por lo que f es $(F_1+F_2)$-integrable, así

$$\int_a^b fd(F_1+F_2) \leq S^*_{F_1+F_2}(f,P) < I^*_{F_1+F_2}(f,P) + \varepsilon$$
$$= I^*_{F_1}(f,P) + I^*_{F_2}(f,P) + \varepsilon \leq \int_a^b fdF_1 + \int_a^b fdF_2 + \varepsilon$$

y similarmente

$$\int_a^b fd(F_1+F_2) > \int_a^b fdF_1 + \int_a^b fdF_2 - \varepsilon \quad : \quad //$$

**Teorema 3.1.8.- Toda función continua f en $[a,b]$ es F-integrable**

*Demostración*: f es uniformemente continua en el cerrado $[a,b]$, por lo que para $\varepsilon > o$, existe $\delta > o$ tal que

$$x, y \in [a,b] \text{ y } |x-y| < \delta \text{ implica que } |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{F(b)-F(a)} \qquad (7)$$

Consideremos cualquier partición P con $|P| < \delta$. Puesto que f toma su máximo y su mínimo sobre cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, se sigue de (7) que

$$M(f,[t_{k-1}, t_k])-m(f,[t_{k-1}, t_k]) < \frac{\varepsilon}{F(b)-F(a)}$$

para cada valor de k. Por (1) en la definición 3.1.1 tenemos

$$S_F^*(f,P)- I_F^*(f,P)\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{F(b)-F(a)} \left[F(t_k^-)-F(t_{k-1}^+)\right]\leq \varepsilon$$

por lo que f es F-integrable.//

El siguiente teorema nos da un mecanismo para calcular un gran número de "F-integrales" usando integrales ordinarias de Riemann.

Teorema 3.1.9 Supóngase que F es diferenciable sobre $[a,b]$ y que $F'$ es continua sobre $[a,b]$. Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f(x)\ F'(x)dx.$$

*Demostración.* Tenemos que $fF'$ es Riemann-Integrable y f es F-integrable, por lo que existe una partición $P= \{a=t_0<t_1<\dots<t_n = b\}$ tal que

$$S(fF',P)- I(fF',P)< \varepsilon/2 \ \text{ y } \ S_F^*(f,P)- I_F^*(f,P)< \varepsilon/2 \qquad (8)$$

Aplicando el teorema del valor medio a F sobre cada $[t_{k-1}, t_k]$, existe $x_k\varepsilon(t_{k-1}, t_k)$ para el cual $F(t_k)-F(t_{k-1}) = F'(x_k)(t_k-t_{k-1})$, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k).\ \left[F(t_k)-F(t_{k-1})\right]=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ F'(x_k).\ (t_k-t_{k-1})$$

Dado que F es continua, no presenta saltos y por la igualdad anterior

$$I_F^*(f,P) \leq S(fF',P) \qquad \text{y} \qquad I(fF',P) \leq S_F^*(f,P)$$

Ahora, de (8),

$$\int_a^b f dF \geq I_F^*(f,P) \geq S_F^*(f,P) - \varepsilon/2 \geq I(fF';P) - \varepsilon/2$$

$$> S(fF';P) - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 \geq (R)\int_a^b f(x)F'(x)dx - \varepsilon$$

De manera semejante $\int_a^b f dF < (R)\int_a^b f(x)F'(x)dx + \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se cumple el teorema. //

Teorema 3.1.10. Toda función f monótona en $[a,b]$ es F-integrable

Demostración: Podemos suponer que f es creciente. Dado que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para toda $x \in [a,b]$, f es acotada sobre $[a,b]$. Para $\varepsilon > 0$ aplicamos el *lema A.2 del apendice* para obtener $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ donde, para $k = 1,2,\dots,n$

$$f(t_k^-) - f(t_{k-1}^+) = f(t_k^-) \quad y \quad m(f,(t_{k-1}, t_k)) = f(t_{k-1}^+)$$

Puesto que

$$M(f,(t_{k-1}, t_k)) = f(t_k^-) \quad y \quad m(f,(t_{k-1}, t_k)) = f(t_{k-1}^+)$$

tenemos

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left[ f(t_k^-) - f(t_{k-1}^+) \right] \cdot \left[ F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+) \right]$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{F(b)-F(a)} \left[ F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+) \right] \leq \varepsilon$$

por lo que concluimos que f es F-integrable

## 3.2. COMPARACION CON LA TEORIA CLASICA.

Antes de entrar a los teoremas, analizaremos algunas de las ventajas que nos proporciona el tratamiento generalizado respecto al clásico usual.

En la teoría clásica encontramos rápidamente ejemplos desafortunados: "f no es integrable respecto a F si ambas tienen un punto de discontinuidad común".

Ejemplo 3.2.1 Sea el intervalo $[a,b]$ fijo y definamos

$$\delta_u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t<u \\ 1 & \text{para } t\geq u \end{cases}$$

para u>a; y hagamos

$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t=a \\ 1 & \text{para } t>a \end{cases}$$

Si $f = F = \delta_u$, entonces (DS) $\int_a^b fdF$ y (RS) $\int_a^b fdF$ no existen (teorema 2. 1.4)

Por razones como ésta, es que se abandona la teoría clásica de Riemann-Stieltjes en favor de la integral de Lebesgue-Stieltjes que aplicada al ejemplo 3.2.1 nos da el valor de 1 para la integral; pero esta requiere un conocimiento previo de la teoría de la medida.

Estos desagradables ejemplos desaparecen en el tratamiento de la integral generalizada que se presenta en la sección 3.1 que impone menos restricciones a las funciones tratadas, como demostraremos en los siguientes teoremas, en los que mostraremos que si F es una función escalonada, entonces todas las funciones acotadas son F-integrables

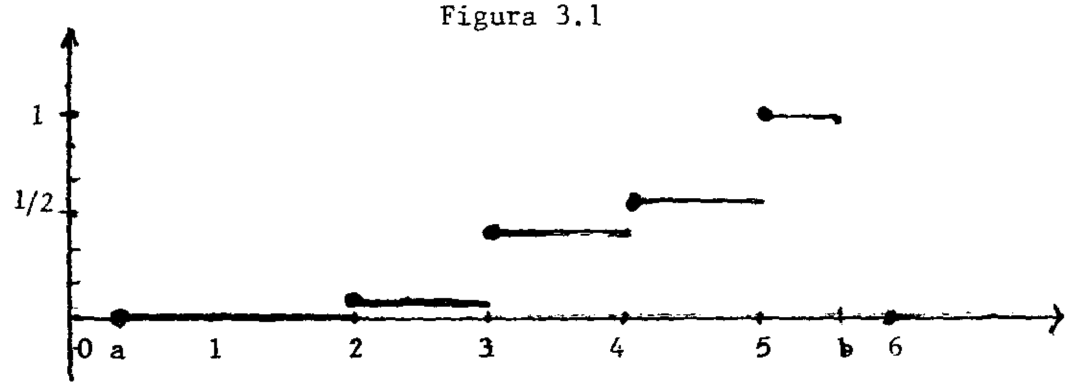
Ejemplo 3.2.2. Si $u_1$, $u_2$, $u_m$, son puntos distintos en $[a,b]$; $c_1$, $c_2$,..., $c_m$, son números positivos entonces

$$F = \sum_{j=1}^{m} c_j \ \delta_{u_j}$$

(donde $\delta_u$ es como en el ejemplo 1) es una función escalonada creciente con saltos $c_j$ en $u_j$. Como caso particular podemos considerar $0<a\leq 1$, $b\geq 5$, $u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=4$, $u_4=5$ y $c_1=1/12$, $c_2=1/3$, $c_3=1/6$, $c_4=5/12$. La gráfica de ésta función esta dada en la figura 3.1. Para cualquier función f acotada en $[a,b]$, tenemos

$$\int_a^b fdF = \frac{1}{2}\, f(2) + \frac{1}{3}\, f(3) + \frac{1}{6}\, f(4) + \frac{1}{12}\, f(5) \qquad \text{(ver teorema 3.2.1)}$$

Figura 3.1




Teorema 3.2.1.- Sea F una función escalonada creciente con salto $c_j$ xn $u_j$. Entonces toda función acotada f en $[a,b]$ es F-integrable

y
$$\int_a^b f dF = \sum_{j=1}^{m} c_j \; f(u_j) \tag{1}$$

*Demostración.* Sea P la partición de $[a,b]$ que consiste de a,b y todos los puntos $u_1$, $u_2,\ldots u_m$. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $a=u_1<u_2<\ldots<u_m=b$. Entonces $F(u_j^+) - F(u_j^-) = c_j$ para j = 1,2, ...,m y $F(u_j-) - F(u_j^+) = 0$ para j=1,2,...,m.
De aquí que

$$S_F^*(f,P) = I_F^*(f,P) = J_F(f,P) = \sum_{j=1}^{m} f(u_j).\; c_j$$

por lo que concluimos que

$$S_F^*(f) = I_F^*(f) = \sum_{j=1}^{m} f(u_j).\; c_j$$

y las conclusiones del teorema. //

Teorema 3.2.2.- Sea $(u_n)$ una secesión en $[a,b]$ y sea $(c_n)$ una sucesión sumable de números positivos. Sea $F = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \; \delta_{un}$. Entonces toda función acotada f en $[a,b]$ es F-integrable

y
$$\int_a^b f dF = \sum_{n=i}^{\infty} c_n f(u_n) \tag{2}$$

*Demostración.* Fijemos f y sea B>o una cota superior para $|f|$:.

Considérese $\varepsilon > o$ y selecciónese un entero m tal que $\Sigma_{n=m+1}^{\infty} c_n < \varepsilon/(4B)$. Sean

$$F_1 = \sum_{n=1}^{m} c_n \delta u_n \qquad \text{y} \qquad F_2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \, \delta u_n$$

así que $F = F_1 + F_2$ y por el teorema 3.2.1, tenemos que

$$\int_a^b f dF_1 = \sum_{n=1}^{m} c_n \, f(u_n) \quad . \tag{3}$$

Ya que

$$F_2(b) - F_2(a) = F_2(b) = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \; < \; \varepsilon/(4B)$$

la desigualdad (2) en la definición 3.1.1. nos lleva a

$$-\frac{\varepsilon}{4} \leq I_2^*(f,P) \leq \; S_{F_2}^*(f,P) \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

por lo que

$$S_{F_2}^*(f,P) - I_{F_2}^*(f,P) < {}^{\varepsilon}/2$$

para todas las particiones P de $[a,b]$. Si seleccionamos P tal que

$$S_{F_1}^*(f,P) - I_{F_1}^*(f,P) < {}^{\varepsilon}/2,$$

entonces (6) en el teorema 3.1.7 y la igualdad $F=F_1+F_2$ implican

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon$$

así es que f es F-integrable. De (4) tenemos que

$$\left| \int_a^b f dF_2 \right| \leq {}^{\varepsilon}/4.$$

por el teorema 3.1.7 y (3) tenemos que

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f dF_1 + \int_a^b f dF_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(u_n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n f(u_n) + \int_a^b f dF_2$$

puesto que

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n f(u_n) \right| \leq B \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n < \frac{\varepsilon}{4}$$

por lo que concluimos que

$$\left| \int_a^b f dF - \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(u_n) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

al ser $\varepsilon$ arbitrario, tenemos la validez de (2).

El siguiente resultado no se cumple en la teoría clasica. //

Teorema 3.2.3.- Si f es F-integrable sobre $[a,b]$ y $g(x)= f(x)$ excepto para un número finito de puntos, entonces $g(x)$ es F-integrable.

*Demostración.* Supongamos que $g(x)= f(x)$ excepto para un unico punto $x=u$ en $[a,b]$, para $\varepsilon>o$ tenemos

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon$$

para alguna $P = \{a=t_o<t_1<\ldots<t_n = b\}$ por el lema 3.1.1, podemos agregar u a P sin invalidar la anterior desigualdad. Entonces $u=t$, para alguna $\ell$ en $\{0,1,2,\ldots,n\}$. Las sumas superior para f y g excepto para el termino $k=\ell$ en $J_F$ y así

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(g,P) = f(u) \left[F(u^+)- F(u^-)\right] - g(u) \left[F(u^+) - F(u^-)\right]$$

El mismo argumento es aplicado a las sumas inferiores y así

$$I_F^*(f,P) - I_F^*(g,P) = S_F^*(f,P) - S_F^*(g,P).$$

de aquí que

$$S_F^*(g,P) - I_F^*(g,P) = S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon$$

por lo que g es F-integrable. //

Nótese que en el resultado anterior no se afirma que las integrales de f y g coinciden. El siguiente resultado se aplica a cualquier F no-decreciente.

Teorema 3.2.4.- Si f es seccionalmente continua ó seccionalmente monótona y acotada sobre $[a,b]$, entonces f es F-integrable.

*Demostración.* Sea P una partición de $[a,b]$ tal que se satisface la hipótesis del teorema. Considérese un intervalo fijo $[t_{k-1}, t_k]$. Si f es seccionalmente continua entonces su restricción a $(t_{k-1}, t_k)$ puede extenderse a una función continua $f_k$ en $[t_{k-1}, t_k]$. Si f es seccionalmente monótona, su restricción a $(t_{k-1}, t_k)$ puede extenderse a una función monótona $f_k$ en $[t_{k-1}, t_k]$: por ejemplo, si f es creciente en $(t_{k-1}, t_k)$, definimos

$$f_k(t_k) = \sup\{f(x) : x\varepsilon(t_{k-1}, t_k)\}$$

y

$$f_k(t_{k-1}) = \inf\{f(x) : x\varepsilon(t_{k-1}, t_k)\}$$

en ambos casos $f_k$ es F-integrable en $[t_{k-1}, t_k]$ (teoremas 3.1.8 y 3.1.10) puesto que f coincide con $f_k$ en $[t_{k-1}, t_k]$ excepto posiblemente en los extremos y el teorema 3.2.3 nos permite afirmar que f es F-integrable en $[t_{k-1}, t_k]$. Ahora por aditividad y un razonamiento inductivo muestran que f es F-integrable en $[a,b]$. //

En la teoría usual, el teorema de integración por partes, viene dado por la formula (para $F_1$ y $F_2$, crecientes y con derivada continua)

$$(R\text{-}S) \int_a^b F_1 dF_2 + (R\text{-}S) \int_a^b F_2 dF_1 = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a)$$

y se cumple con la condición de que una ó otra de las integrales exista, Este teorema falla dramaticamente con $F_1 = F_2 = \delta_u$. Por supuesto falla también para integrales de Lebesgue-Stieltjes. La formula correcta para integrales de Lebesgue-Stieltjes fue dada por E. Hewitt en [2]. Su resultado puede ser presentado sin referencia a la teoria de Lebesgue-Stieltjes como sigue:

Teorema 3.2.5.- [INTEGRACION POR PARTES]. Supóngase que $F_1$ y $F_2$ son funciones crecientes sobre $[a,b]$ y definamos

$$F_1^*(t) = \frac{1}{2}\left[F_1(t^-) + F_1(t^+)\right] \quad y \quad F_2^*(t) = \frac{1}{2}\left[F_2(t^-) + F_2(t^+)\right]$$

para toda $t\varepsilon [a,b]$. Entonces

$$\int_a^b F_1^* d F_2 + \int_a^b F_2^* dF_1 = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)\, F_2(a) \tag{5}$$

donde $F_1(b^+) = F_1(b)$, $F_1(a^-) = F_1(a)$, etc.

*Demostración.* Ambas integrales en (5) existen (por ser funciones monótonas). Para una $\varepsilon>o$, existe una partición

$$P = \{a=t_o<t_1<\ldots<t_n = b\}$$

tal que

$$S_{F_1}^*(F_2^*, P) - I_{F_1}^*(F_2^*, P) < \varepsilon$$

haciendo un desarrollo algebráico a partir de las definiciones tenemos que

$$S_{F_2}^*(F_1^*, P) + I_{F_1}^*(F_2^*, P) = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a) \tag{6}$$

y también

$$S_{F_1}^*(F_2^*, P) + I_{F_1}^*(F_1^*, P) = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)\, F_2(a) \tag{7}$$

se sigue de (6) que

$$\int_a^b F_1^* dF_2 + \int_a^b F_2^* dF_1 \leq S^*_{F_2}(F_1^*, P) + S^*_{F_1}(F_2^*, P)$$

$$< S^*_{F_2}(F_1^*, P) + I^*_{F_1}(F_2^*, P) + \varepsilon$$

$$= F_1(b)\, F_2(b) - F_1(a) F_2(a) + \varepsilon$$

y de (7) obtenemos

$$\int_a^b F_1^* dF_2 + \int_a^b F_2^* dF_1 > F_1(b) F_2(b) - F_1(a) F_2(a) - \varepsilon$$

como $\varepsilon$ es arbitrario tenemos la validez de (5)

Después de haber notado algunas de las ventajas que nos dá el tratamiento generalizado de la integral pasaremos a comparar las integrales.

El criterio de integrabilidad de Riemann Stieltjes implica el criterio usual de integrabilidad de Darboux-Stieltjes; estos criterios no son equivalentes en general, pero son equivalentes si F es una función continua.

Teorema 3.2.6.- Si $f \in D(F)$ en $[a,b]$, entonces f es F-integrable y las integrales coinciden

*Demostración.* Para cualquier partición P,

$$I_F(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m(f, [t_{k-1}, t_k]).\ [F(t_k) - F(t_k^-) + F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)$$

$$+ F(t_{k-1}^+) - F(t_{k-1})]$$

$$< \sum_{k=1}^{n} f(t_k) [F(t_k) - F(t_k^-)] + \sum_{k=1}^{n} m(f, (t_{k-1}, t_k)).\ [F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) [F(t_{k-1}^+) - F(t_{k-1})]$$

si sumamos la primer y tercer sumatorias obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left[F(t_k)-F(t_k^-)\right] + \sum_{k=o}^{n-1} f(t_k)\left[F(t_k^+)-F(t_k)\right]$$

$$= f(t_n)\left[F(t_n)-F(t_n^-)\right] + \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\left[F(t_k^+)-F(t_k^-)\right]$$

$$+ f(t_o)\left[F(t_o^+)-F(t_o)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\left[F(t_k^+)-F(t_k^-)\right] = J_F(f,P)$$

**con estas observaciones y recordando las definiciones de $I_F^*(f,P)$ nos muestran que $I_F(f,p) \le I_F^*(f,P)$. De la misma forma tenemos $S_F(f,P) \ge S_F^*(f,P)$ y también**

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) \le S_F(f,P) - I_F(f,P) \qquad (8)$$

**Si $\varepsilon > o$, la teoría clásica muestra que existe una partición P tal que $S_F(f,P)-I_F(f,P)<\varepsilon$, por (8) tenemos también que $S_F^*(f,P)-I_F^*(f,P)<\varepsilon$ y así f es F-integrable.**

**Para ver la igualdad de las integrales, obsérvese que**

$$\text{(D-S)} \int_a^b f dF \le S_F(f,P) < I_F(f,P) + \varepsilon \le I_F^*(f,P) + \varepsilon \le \int_a^b f dF + \varepsilon$$

**y de manera análoga**

$$\text{(D-S)} \int_a^b f dF > \int_a^b f dF - \varepsilon \quad . //$$

*Definición.* 3.2.1.- La F-norma de una partición P es

$$F|P| = \max \{F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+): k=1,2,\dots,n\}$$

ya que F es una función creciente, podemos reestablecer el lema A2. en el apendice.

Lema 3.2.1.- Si $\delta>o$, existe una partición P tal que $F|P|<\delta$.

Teorema 3.2.7.- Una función acotada f sobre $[a,b]$ es F-integrable, si y sólo si, para cada $\varepsilon>o$, existe $\delta>o$ tal que

$$F|P|<\delta \quad \text{implica} \quad S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P)< \varepsilon \tag{9}$$

para todas las particiones P de $[a,b]$.

*Demostración.* Necesidad: Supongamos que f es F-integrable sobre $[a,b]$. Sea $\varepsilon>o$, seleccionemos una partición de $[a,b]$

$$P_1 = \{a= u_o<u_1<\ldots<u_j=b\} \tag{10}$$

tal que

$$S_F^*(f,P_1) - I_F^*(f,P_1)< {}^{\varepsilon}/2$$

puesto que f es acotada, existe $B>o$ tal que $|f(x)|\leq B$ para toda $x\varepsilon[a,b]$. Sea $\delta={}^{\varepsilon}/(8jB)$; j es el número de intervalos contenidos por $P_1$.

Para verificar (9), consideremos cualquier partición

$$P_2 = \{a=t_o<t_1<\ldots<t_n=b\}$$

con $F|P_2|<\delta$. Sea $Q=P_1 U P_2$. Si Q tiene un elemento más que $P_2$, entonces tal como en la demostración del lema 3.1.1 nos lleva a

$$I_F^*(f,Q) - I_F^*(f,P_2) \leq B \quad F|P|- (-B) \quad F|P|= 2B \quad F|P|$$

puesto que Q tiene a lo más j elementos que no están en $P_2$, un argumento de inducción nos muestra que

$$I_F^*(f,Q) - I_F^*(f,P_2) \leq 2jB. \; F|P|< 2jB \; \delta={}^{\varepsilon}/4$$

por el lema 3.1.2 tenemos $I_F^*(f,P_1) \leq I_F^*(f,Q)$ y también

$$I_F^*(f,P_1) - I_F^*(f,P_2) < \varepsilon/4$$

analogamente $$S_F^*(f,P_2) - I_F^*(f,P_1) < \varepsilon/4$$

y también $$S_F^*(f,P_2) - I_F^*(f,P_2) < S_F^*(f,P_1) - I_F^*(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y en vista de (10)

$$S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon$$ con lo que se verifica (9) .

**Suficiencia.** Si la condición $\varepsilon$-$\delta$ se cumple, entonces para $\varepsilon>o$ (9) nos da una partición P (lema 3.2.8) tal que $S_F^*(f,P) - I_F^*(f,P) < \varepsilon$ para toda $\varepsilon>o$ por lo que f es F-integrable. //

A continuación se da una definición para la integral generalizada de Riemann-Stieltjes

*Definición* 3.2.2.- Sea f una función acotada sobre $[a,b]$ y sea

$$P = \{a=t_o < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

una suma de Riemann-Stieltjes generalizada de f asociada con P y F es una suma de la forma

$$R_F^*(f,P) = J_F(f,P) + \sum_{k=1}^{n} f(x) \left[F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)\right]$$

donde $x_k \in (t_{k-1}, t_k)$ para k=1,2,...,n. La función es Riemann-Stieltjes generalizada-integrable sobre $[a,b]$, si existe $r \in R$ con la siguiente propiedad. Para cada $\varepsilon>o$, existe $\delta>o$ tal que

$$\left| R_F^*(f,P) - r \right| < \varepsilon$$

para cada suma de Riemann-Stieltjes generalizada $R_F^*(f,P)$ con una partición

P con $F|P|<\delta$, Llamamos a r la integral de Riemann-Stieltjes generalizada y temporalmente la escribiremos

$$(R\text{-}S\text{-}G)\ \int_a^b f\,dF$$

Teorema 3.2.8.- Una función f acotada en $[a,b]$ es F-integrable si sólo si, es Riemann-Stieltjes generalizada integrable, en tal caso las integrales son iguales

*Demostración.* Necesidad. Sea f, F-integrable, sean $\varepsilon>o$ y $\delta>o$ tal que se verifica (9) en el teorema 3.2.7.Tenemos que para toda suma de Riemann-Stieltjes generalizada

$$R_F^*(f,P) = J_F(f,P) + \sum_{k=1}^{n} f(X_k)\ \left[F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)\right]$$

asociada con una partición P con $F|P|<\delta$ se cumple

$$I_F^*(f,P) \leq R_F^*(f,P) \leq S_F^*(f,P)$$

y como

$$S_F^*(f,P) < I_F^*(f,P) + \varepsilon \leq I_F^*(f) + \varepsilon = \int_a^b f\,dF + \varepsilon$$

y también

$$I_F^*(f,P) > S_F^*(f,P) + \varepsilon \geq S_F^*(f) - \varepsilon = \int_a^b f\,dF - \varepsilon$$

por lo que

$$\left| S_F^*(f,g) - \int_a^b f\,dF \right| < \varepsilon$$

f es Riemann-Stieltjes Generalizada-Integrable y

$$(R\text{-}S\text{-}G)\ \int_a^b f\,dF = \int_a^b f\,dF\ .$$

Suficiencia. Sea f-Riemann-Stieltjes Generalizada-Integrable y sea r como en la definición 3.2.2. Considerese $\varepsilon>o$ y sea $\delta>o$ (como en la misma definición). Por el lema 3.2.8, existe una partición $P = \{a=t_o<t_1<\ldots<t_n=b\}$ con $F|P|<\delta$. Seleccionemos, para cada $k=1,2,\ldots,n$, $x_k\varepsilon\ (t_{k-1}, t_k)$ de tal forma que $f(x_k)< m(f,(t_{k-1}, t_k)) + \varepsilon$. Para ésta elección de los $x_k$, la suma generalizada satisface

$$R_F^*(f,P)\leq I_F^*(f,P) + \varepsilon\left[F(b)-F(a)\right]$$

y también

$$\left| R_F^*(f,P)- r \right| < \varepsilon;$$

por lo que $I_F^*(f)\geq I_F^*(f,P)> r-\varepsilon-\varepsilon\left[F(b)- F(a)\right]$. Se

sigue que $I_F^*(f)\geq r$ y en forma semejante $S_F^*(f)\leq r$. De aquí que $I_F^*(f) = S_F^*(f) = r$ y así f es F-integrable y

$$\int_a^b f dF = (R\text{-}S\text{-}G) \int_a^b f dF$$

3.3 Integrales Impropias de Riemann-Stieltjes

Definición 3.3.1.- Supóngase que f es F-integrable sobre cada intervalo $[a,b]$ en R. Hacemos la siguiente definición cuando los límites existan:

$$\int_0^{\infty} f\,dF = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f\,dF; \qquad \int_{-\infty}^{0} f\,dF = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f\,dF$$

si ambos límites existen y sus sumas no tienen la forma $\infty + (-\infty)$, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dF = \int_{-\infty}^{0} f\,dF + \int_0^{\infty} f\,dF$$

si esta suma es finita, decimos que f es F-integrable en R

Teorema 3.3.1.- Si f es F-integrable sobre cada intervalo $[a,b]$ y si $f(x)\geq 0$ para toda $X\varepsilon R$, entonces f, es F-integrable sobre R ó bien $\int_{-\infty}^{\infty} f\,dF = +\infty$.

*Demostración*.- Sea $h(b) = \int_0^b f\,dF$ para $b>o$, nótese que si $o<b<b'$

$$h(b') = \int_0^{b'} f\,dF = \int_0^b f\,dF + \int_b^{b'} f\,dF$$

por lo que $h(b)\leq h(b')$ y así h es una función creciente lo que implica que $\lim_{b\to\infty} h(b)$ exista y

$$\lim_{b\to\infty} h(b) = \inf\{h(b):\ b\varepsilon(o,\infty)\}$$

el caso $\lim_{a\to\infty} \int_a^0 f\,dF$ es análogo.

Teorema 3.3.2.- Sea $(u_n)$ una sucesión de puntos distintos en R y sea $(c_n)$ una sucesión de números positivos tales que $\Sigma c_n<\infty$. (Usando la notación del ejemplo 3.2.1). Sea $F = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{u_n}$. Entonces toda función acotada f sobre R es F-integrable y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dF = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(u_n)$$

*Demostración.*- Tenemos por el teorema 3.2.1 y la definición que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dF = \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} f\,dF = \lim_{b\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(u_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(u_n)$$

Teorema 3.3.3.- Supóngase que F es diferenciable sobre R y que F' es continuo sobre R. Si f es continua sobre R entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dF = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F'(x)\,dx$$

*Demostración.*- Por el teorema 3.1.9 las integrales coinciden en $[-b,b]$, así entonces

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dF(x) = \int_{-b}^{b} f(x)F'(x)\,dx$$

por lo que

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_{b}^{b} f(x)F'(x)\,dx$$

esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F'(x)\,dx .$$

siempre que los límites existan. //

# CAPITULO 4.

## Algunas Aplicaciones de la Integral de Riemann-Stieltjes.

### 4.1.- Una aplicación en Probabilidad-La definición de Esperanza Matemática.-

Con el concepto de Integral de Riemann-Stieltjes desarrollado en el capítulo 3, podemos definir de forma unificada el concepto de Esperanza Matemática para variables aleatorias con funciones de distribución discretas, ó continuas. Para ello recordemos algunos conceptos fundamentales de la teoria de la Probabilidad.

**Definición 4.1.1.-** *Un espacio de probabilidad* es una terna $(\Omega,A,p)$, donde $\Omega$ es un conjunto no vacío, a es una $\sigma$-algebra de subconjunto de $\Omega$ y P es una función real definida sobre a con las siguientes propiedades

i) $P(A)\geq 0$ para todo elemento $A\varepsilon a$

ii) $P(\Omega)=1$

iii) Si $A_1, A_2,\ldots,A_n,\ldots$ es una sucesión de elementos de A, mutuamente ajenos, entonces

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)= \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

**Definición 4.1.2.-** Sea $(\Omega,A,p)$ un espacio de probabilidad y X, una función real definida sobre $\Omega$. Diremos que X es una *variable aleatoria real* (v.a), si para todo par de números reales a,b, con a<b, los conjuntos $(a<x<b)$, $(a\leq x<b)$, $(a<x\leq b)$, $(a\leq x\leq b)$ pertenecen a la $\sigma$-algebra a de los cuentas.

Diremos que la v.a. X es *discreta,* si toma a lo más un número infinito numerable de valores. En este caso, la función $f(x)= P\left[X=x\right]$ es llamada la función de densidad de la v.a X . Diremos que X es una v.a. *continua* si $P(X=x)=0$ $\forall x\varepsilon R$.

Diremos que X es una v.a. *absolutamente continua* (a,c), si existe una función real integrable, que cumple

i) $f(x) \geq 0$ para toda x, real

ii) $\int_R f(x)dx = 1$

iii) $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

una tal función f, es llamada la función de densidad de la v.a X.

Una v.a. continua no necesariamente es absolutamente continua, aunque es claro que si X es a.c. entonces es continua.

Definición 4.1.3.- *La función distribución (f.d.) de una v.a.X* definida sobre $(\Omega, A, p)$, es la función real F definida para todo número real x por medio de

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x' \leq x} f(x') \qquad \text{si X es discreta} \qquad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x')dx' \qquad \text{si X es a.c.} \qquad (2)$$

donde f es la función de densidad de X. Si X es v.a. discreta, entonces

$$f(x) = F(x) - F(x^-) \qquad \forall\, x \in R \qquad (3)$$

X es v.a. continua si, y solo si, su f.d. es continua y en ese caso $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F(a)$ y si X es v.a, a.c, entonces en los puntos de continuidad de f

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \qquad \forall\, x \in R \qquad (4)$$

Hemos definido las funciones de distribución en términos de variables aleatorias. Pueden definirse directamente

Definición 4.1.4.- Una *función de distribución* (f.d),, es cualquier función F que satisface las siguientes propiedades

(i) $0\leq F(x)\leq 1$ $\forall x\varepsilon R$,

(ii) F es una función creciente,

(iii) $F(-\infty)=0$ y $F(+\infty)=1$,

(iv) $F(x^+)= F(x)$ $\forall x$.

Nótese que si F(x) es definida como en (2) para la función de densidad f, es una f.d continua que satisface las propiedades (i)-(iv) de la definición anterior. Decimos que tal f.d tiene densidad f y aquellas funciones que tienen densidades son llamadas *f.d absolutamente continuas*.

Retomando la notación del ejemplo 3.2.1, a una función como $\delta_u(t)$ se le llama *distribución puntual concentrada* en u, f.d. que es de éste tipo se dice "*degenerada*"; en caso contrario "*no degenerada*".

Todas las propiedades de las funciones crecientes dadas en el apendice, son validas para una f.d. En particular, sea $\{u_i\}$ el conjunto numerable de puntos de salto de F y $c_j$ la medida del salto en $u_j$. Entonces

$$F(u_j) - F(u_j^-) = c_j$$

ya que F es continua por la derecha. Consideremos la función

$$F_d(x) = \sum_j c_j \, \delta_{u_j}(x) \tag{5}$$

(notación del ejemplo 3.2.1) la cual representa la suma de todos los saltos de F en $(-\infty,x)$. Esta es creciente, continua por la derecha con

$$F_d(-\infty)=0 \qquad y \qquad F_d(+\infty)= \sum_j c_j\leq 1$$

$F_d$ se llama la parte de saltos de F.

Teorema 4.1.1. Sea $F_c(x)=F(x)-F_d(x)$, entonces $F_c(x)$ es positiva, creciente y continua.

Demostración.- Sea $x<x'$, entonces tenemos

$$F_d(x')-F_d(x) = \sum_{x<u_j\leq x'} c_j = \sum_{x<u_j\leq x'} \left[F(u_j)-F(u_j^-)\right]$$

$$\leq F(x')- F(x)$$

de donde sigue que ambas $F_d$ y $F_c$ son crecientes, y si ponemos $x=-\infty$, vemos que $F_d \leq F$ y así $F_c$ es positiva. $F_d$ es continua por la derecha puesto que cada $\delta_{u_j}$ lo es y la serie que define $F_d$ converge uniformemente en x; el mismo argumento nos demuestra que

$$F_d(x)-F_d(x^-) = \begin{cases} c_j & \text{si } x=u_j \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

ahora, esta evaluación se cumple también si cambiamos $F_d$ por F de acuerdo a la definición de $u_j$ y $c_j$ por lo que obtenemos que para cada x

$$F_c(x)-F_c(x^-)= F(x)-F(x^-)- \left[F_d(x)- F_d(x^-)\right]= 0$$

esto muestra que $F_c$ es continua por la izquierda; puesto que lo es también por la derecha, al ser la diferencia de dos funciones tales, tenemos que $F_c$ es continua.

Teorema 4.1.2.- Sea F una f.d.. Supóngase que existe una función continua $G_c$ y una función $G_d$ de la forma

$$G_d(x)= \sum_j c_j{}' \, \delta'_{u_j}(x)$$

[donde $\{u_j'\}$ es un conjunto numerable de números reales y

$\sum_j |c_j'| < \infty]$, tal que

$$F = G_c + G_d$$

entonces

$$G_c = F_c , \quad G_d = F_d$$

donde $F_c$ y $F_d$ son como antes.

Demostración. Si $F_d \neq G_d$, entonces los conjuntos $\{u_j\}$ y $\{u_j'\}$ no son identicos, ó podemos remarcar los $u_j'$ de forma que $u_j' = u_j$ para toda j pero $a_j' \neq a_j$ para alguna j. En cualquiera de los casos tenemos para al menos una j, y $\bar{u} = u_j$ ó $u_j'$:

$$[F_d(\bar{u})-F_d(\bar{u}^-)] - [G_d(\bar{u})-G_d(\bar{u}^-)] \neq 0$$

puesto que $F_c-G_c=G_d-F_d$ ésto último implica que

$$F_c(\bar{u})-G_c(\bar{u})- [F_c(\bar{u}^-)-G_c(\bar{u}^-)] \neq 0$$

en contradicción con el hecho de que $F_c-G_c$ es una función contínua. Por lo tanto $F_d=G_d$ y en consecuencia $F_c=G_c$.

Definición 4.1.5.- Una f.d que puede representarse en la forma

$$F = \sum_j c_j \delta_{uj}$$

donde $\{u_j\}$ es un conjunto numerable de números reales, $c_j>o$ y $\sum_j c_j=1$, se llama *f.d discreta*.

Supóngase que $F_c \neq 0$, $F_d \neq 0$ en el teorema 4.1.1 entonces podemos hacer $p= F_d(\infty)$ de modo que $0<p<1$,

$$F_1 = \frac{1}{p} F_d, \qquad F_2 = \frac{1}{1-p} F_c ,$$

y escribir

$$F = pF_1 + (1-p)F_2 \tag{6}$$

ahora $F_1$ es una f.d discreta y $F_2$ es una f.d. continua, y F es dada por una *combinación convexa* de ellas. Si $F_c \equiv 0$, entonces F es discreta y hacemos $p \equiv 1$, $F_1 \equiv F, F_2 \equiv 0$; si $F_d \equiv 0$, entonces F es continua y hacemos p=0 $F_1 \equiv 0$, $F_2 \equiv F$; por lo que (6) es valida en cualquiera de los casos extremos.

Con lo anterior podemos resumir los resultados de los dos teoremas anteriores en el siguiente.

Teorema 4.1.3.- Toda f.d puede escribirse como la combinación convexa de una discreta y una continua. Tal descomposición es única.

*Definición* 4.1.6.- Sea X una v.a. discreta con valores $u_1$, $u_2$, $\dots, u_n, \dots$ en R y con función de densidad f(x). Siempre que $\sum_i x_i a_j$ converja la *Esperanza Matemática* de X se define como

$$\begin{aligned} EX = x_1 f(x_1) + \dots + x_n f(x_n) \dots \quad &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j c_j \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \end{aligned} \tag{7}$$

donde $c_j = F(x_j) - F(x_j^-) = f(x_j)$ de acuerdo con la definición 4.1.3 y F(x) es dada como en la definición 4.1.5 y la última integral de acuerdo al teorema 3.3.2.

*Definición* 4.1.7.- Si X es una v.a absolutamente continua con función de densidad f(x), siempre que $\int_{-\infty}^{\infty} f dF$ exista definimos la *Esperanza Matemática* de X como

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \qquad (8)$$

donde F(x) es como en (4) de la definición 4.1.3 y la segunda igualdad se deduce del teorema 3.3.3.

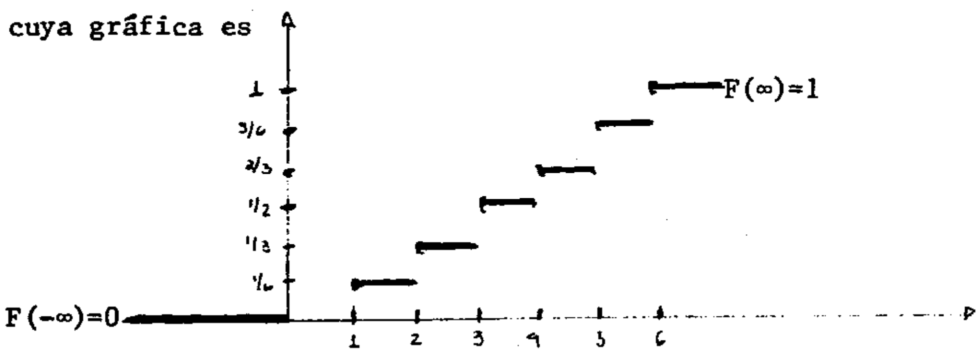
Ejemplo 4.1.1.- Considérese el lanzamiento de un dado honesto y sea X la v.a que da el total de puntos obtenidos. La función de densidad es

$$f(x) = P\left[X=x\right] = \begin{cases} 1/6 & \text{si } x=1,2,\ldots,6 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La función de Distribución F(x) es

$$F(x) = P\left[X\leq x\right] = \sum_{t\leq x} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1/6 & \text{si } 1\leq x<2 \\ 2/6 & \text{si } 2\leq x<3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{si } 6\leq x \end{cases}$$

cuya gráfica es




Consideremos un juego donde la ganancia es 2 si X es par y -1 si X es impar. La ganancia promedio es

$$E(G(X)) = \int_{\infty}^{\infty} G(x)dF(x) = \sum_{i} G(x_i)\left[F(x_i^+) - F(x_i^-)\right]$$

$$= \sum_{i} G(x_i) f(x_i) = 1/2$$

Ejemplo 4.1.2.- Consideremos en los siguientes casos el intervalo $[0,1]$ y sea f(x) dado por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in Q\\ 1 & \text{si } x\notin Q\end{cases}$$

(a) Si la función distribución es dada por

$$F_1(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1/2\\ 1 & \text{si } x\geq 1/2\end{cases}$$

entonces f es $F_1$-integrable, así que

$$E(f(x))=\int_0^1 f\,dF_1 \quad = f(\tfrac{1}{2}) \;= 0$$

(b) Si la función distribución es dada por

$$F_2(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1/\sqrt{2}\\ 1 & \text{si } x\geq 1/\sqrt{2}\end{cases}$$

f es $F_2$-integrable

$$E(f(x))=\int_0^1 f\,dF_2 \;= f(1/\sqrt{2}) = 1$$

(c) Sea $\{u_n,\ n\geq 1\}$ cualquier numeración del conjunto de todos los racionales en $[0,1]$.

Si la función distribución es dada por

$$F_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\delta_{u_n}(x) \quad \text{donde} \quad \delta_{u_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<u_n\\ 1 & \text{si } x\geq u_n\end{cases}$$

f es $F_3$-integrable y

$$E(f(x)) = \int_0^1 f(x)\,dF_3(x)= \sum_n \frac{1}{2^n}\, f(u_n) = 0$$

## 4.2. Flujo de fluidos viscosos.

4.2.1.- *Flujo laminar*.- Cuando un fluido viscoso fluye a través de un tubo cilíndrico no lo hace con todo el fluido a la misma velocidad; el fluido más cercano a las paredes del tubo sufre más fricción con las paredes y apenas se mueve del todo; cuando el fluido es cercano al eje central del tubo, se mueve más rápidamente. La velocidad del fluido se incrementa constantemente cuando se incrementa la distancia a la pared. Debido a la simetria circular, el efecto es de "tubos" concentricos de fluido que se deslizan uno sobre el otro. Este efecto es llamado *fluido laminar;* cada lamina o capa de fluido se mueve a su propia velocidad. Diferentes láminas se mueven a diferente velocidad.

La forma exacta de cómo se da el fluido laminar fue encontrada por J.L.M. Poiseville (1797-1869) quien estudiaba la presión sanguínea, la cual logra medir por primera vez, quería conocer cuanta sangre fluye a través de un vaso sanguíneo en un tiempo dado. De ésta información y del análisis de muestras sanguíneas, uno puede decir cuanto oxigeno y nutrientes están siendo distribuidos a las células servidas por ese vaso. El conocimiento del sanguíneo es una parte básica del entendimiento del cuerpo como sistema físico.

El resultado de Poiseville acerca del flujo de fluidos viscosos tiene otras aplicaciones como el flujo de aire en la traquea, el aceite en un oleoducto, el agua en un sistema de tuberias, los granos arrojados por un tubo en la bodega de un barco, etc. Las suposiciones involucradas en el resultado le hacen más aplicable a algunos problemas que a otros, pero nos dá una buena primer aproximación de todos ellos. Otro uso importante de la ley de Poiseville es medir la viscosidad relativa de los fluidos.

4.2.2. *Ley de Poiseville*.- Poiseville descubrió, y después otros dedujeron teoricamente, que la velocidad de las partículas de un fluido a una distancia de r centímetros fuera del eje central del tubo es

$$V(r) = \frac{P}{4KL}(R^2 - r^2) \qquad (cm/seg) \qquad (1)$$

donde

R= radio del tubo en cm. (Así $0 \leq r \leq R$)

L= longitud del tubo (cm.)

P= cambio de presión $P_1 - P_2$ a lo largo del tubo, ($dina/cm^2$)

K= coeficiente de viscosidad

(ver figura 1) (recordemos que presión es fuerza por unidad de área). Uno puede probar que la presión decrece constantemente [como función lineal] cuando el fluido se mueve a lo largo del tubo. Esto es la diferencia de presión final vs inicial que entra en la ecuación. La unidad cgs de viscosidad, el poise es llamado despúes Poiseville

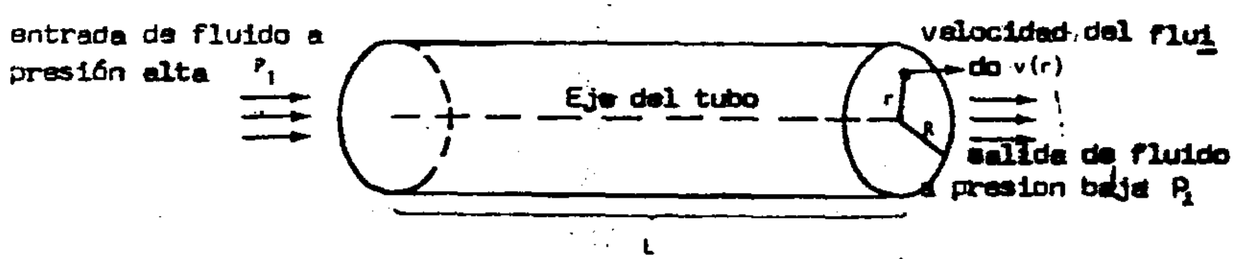



figura 1..

Las diversas hipótesis que deben ser ciertas para que (1) sea válido son:

i) No debe haber *turbulencia* en el fluido, ésto significa que no hay remolinos; las partículas del fluido se mueven en lineas rectas a lo largo del tubo.

ii) La velocidad del flujo v se supone que depende unicamente de r; v no cambia cuando el fluido se mueve a lo largo del tubo, ni cambia con el tiempo.

iii) El fluido es *Conservativo*, i.e, ni se crea, ni se pierde en el tubo. El fluido no escapa fuera a través de las paredes ni hay tubos alimentadores que pongan fluido dentro o fuera.

iv) El fluido es *Incomprensible*, i.e, hecho de partículas que no pueden ser trozadas ó aprisionadas unas a otras ( por las fuerzas presentes).

v) El tubo es horizontal y los efectos de la gravedad son ignorados. Para un tubo vertical (1) se transforma en

$$V(r)= \frac{P + g\rho L}{4KL} (R^2 - r^2) \qquad (2)$$

donde $g= 980 cm/sec^2$ es la constante de gravitación y $\rho$ es la densidad del fluido, i.e, su masa por unidad de volumen. Para tubos inclinados éstas velocidades horizontales y verticales deben sumarse vectorialmente. Por simplicidad usaremos (1)

vi) El tubo es un cilindro circular recto con dimensiones constantes L y R

vii) Hay mucha fricción en la pared, que el fluido no se mueve del todo (nótese que r=R nos lleva a V(r)=0)

Viii) El fluido no es un *fluido ideal* (las partículas friccionan entre si)

Estas suposiciones son satisfechas en varios grados en las aplicaciones mencionadas antes, es propenso que ocurran efectos turbulentos en tubos de diametro grande. Esto limita el uso de la ley en el estudio de tuberias, oleoductos, tolvas de granos etc, las dimensiones de los vasos sanguíneos cambian un poco, la sangre es bombeada por el corazón por lo que el flujo no está en estado uniforme, oxígeno y nutrientes abandonan la sangre por ósmosis a través de las paredes del tubo, así el fluido es aproximadamente conservado unicamente.

Desechando éstos y otros defectos prácticos, la ley de Poiseville es una simplificación válida del flujo de fluidos viscosos. En cierto sen tido, esto es lo verdadero de la ley: *v(r) es cero en las paredes del tubo y se incrementa constantemente cuando r decrece y se acerca al centro del tubo*. Esto tiene bases teóricas sólidas y bien entendidas. Podemos realmente calcular con ella, y en el laboratorio las condiciones supuestas pueden ser hechas realidad, dando un camino práctico para medir el coeficiente de viscosidad k para cualquier fluido, propiedad fundamental del fluido e importante en el diseño y trabajo de Ingenieria.

4.2.3.- Velocidad y Cantidad de Flujo.

Queremos usar la ley de Poiseuille para calcular el flujo total a través de un tubo de radio R. El flujo F es el volumen total de fluido que pasa a través del tubo cada segundo en unidades de $cm^3/seg$.

Consideremos primero (figura 2) cualquier pedazo pequeño tipico de área de sección transversal del tubo, consistiendo de $\Delta A$ $cm^2$ localizados r cm fuera del centro. ¿Cuanto fluido dejará el tubo a través de éste pequeño bocado de área en un segundo?. El fluido se mueve v(r) cm en un segundo; así una cantidad de fluido v(r) cm de largo, de sección transversal constante $\Delta A$ $cm^2$ fluirá fuera del tubo a través de $\Delta A$ en un segundo. Esta cantidad tiene volumen $v(r).(\Delta A)$.

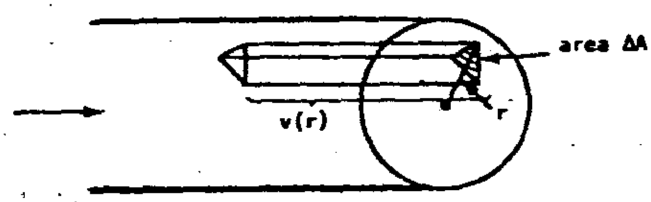



figura 2.

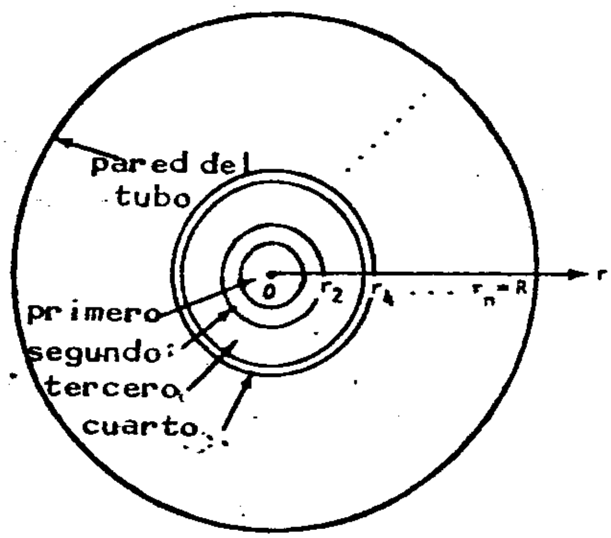
Así el fluido deja $\Delta A$ a una razón constante de $v(r).\ \Delta A$ $cm^3/seg$.

En la sección transversal del tubo circular de radio R, la velocidad v(r) dada por la ley de Poiseuille es la misma en todos los puntos localizados r cm del centro. Si consideramos anillos concéntricos de área (figura 3), la velocidad del fluido será aproximadamente constante en cada anillo. Podemos usar el resultado previo para calcular el *flujo total* a través de cada anillo, la suma de flujos anillo por anillo será el flujo total a través del tubo, el cual queremos encontrar.

Para identificar claramente estos anillos, partiremos el intervalo ($0 \leq r \leq R$) en n piezas usando puntos de partición

$$0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n = R$$

(no necesariamente igual espaciados), la primera, segunda,..., regiones son elegidas como se muestra en el dibujo.




Para k=1,2,...,n, la k-ésima región es un anillo con radio interior y exterior $r_{k-1}$ y $r_k$ y así tiene área

$$\pi(r_k)^2 - \pi(r_{k-1})^2$$

si tomamos n grande y los $r_k$ cercanos unos a otros, la velocidad del fluido que fluye a través de cualquier región será casi constante, aunque diferente de anillo a anillo. Que valor se aproximará a la velocidad constante en el k-ésimo anillo? Tomando cualquier punto en ese anillo, digamos uno que está $t_k$ unidades fuera del centro con $r_{k-1} \leq t_k \leq r_k$. Entonces $V(t_k)$ es una velocidad para el k-ésimo anillo y lo visto antes nos dice que el flujo a través del k-ésimo anillo $\approx V(t_k) \cdot \left[\Pi r_k^2 - \Pi r_{k-1}^2\right]$.

Llamaremos a $t_k$ un punto de evaluación para el k-ésimo subintervalo $\left[r_{k-1}, r_k\right]$.

Así el flujo total a través de todos los n anillos es

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} V(t_k) \cdot \left[\Pi r_k^2 - \Pi r_{k-1}^2\right] \tag{3}$$

Escribimos "aproximadamente" en ves de igual porque hemos reemplazado los varios valores de v(r) en el k-ésimo anillo por el valor simple $v(t_k)$. En efecto, tenemos una familia de aproximaciones de F en la ecuación (3) para cualquier partición P y cualquier elección de los puntos de evaluación. Como tomamos valores mayore de n y $r_k$'s y $t_k$'s más cercanamente espaciados, la teoria de integración nos dice que tales sumas se aproximan a un valor límite, la integral Rimann-Stieltjes de v respectó a A.

Sea la longitud de k-ésimo subintervalo

$$\Delta r_k = r_k - r_{k-1} \quad \text{y } A(r) = \pi r^2$$

si se incrementa n, $r_k$ y $r_{k-1}$ se aproximan uno al otro y su diferencia $\Delta r_k \to o$. Así si $n \to \infty$, $\Delta r_k \to o$, por lo que tenemos que F es una suma de Riemann-Stieltjes

$$F = \int_0^R r(r)\, d\, A(r)$$

$$= \int_0^R \frac{P}{4KL}(R^2 - r^2)\, d\, (\pi r^2)$$

y por el teorema 3.1.9 al ser A(r) continua en $[o,R]$ con $A'(r) = 2\pi r$ continua en $[o,R]$ tenemos

$$F = \int_0^R \frac{P}{4KL}(R^2 - r^2)\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi R^4 P}{8KL}.$$

4.3. Una aplicación en Análisis (Teorema de Herglotz)

Considérese el problema de encontrar la forma general de una función $\omega = f(Z)$ la cual es análitica en el disco unitario $|Z|<1$ y tiene parte real no negativa, i.e, la cual transforma el disco unitario en el semiplano derecho. Primero notemos que $\omega\alpha+i\beta$ $(\alpha>o)$ es una tal función y también lo es

$$f_t(x) = \frac{e^{i^t} + Z}{e^{i^t} - Z},$$

donde t es un número real arbitrario. En efecto, para t fijo y $|Z|<1$, los puntos $Z_1=e^{i^t}+Z$ y $Z_2=e^{i^t}-Z$ están dentro del círculo C de radio unitario con centro en el punto $e^{i^t}$. Más aún, $Z_1$ y $Z_2$ están sobre el mismo diametro de C, cuando el origen 0 está sobre C misma (ver figura 4.3.1). Pero por geometria elemental, el diametro completo subtiende el ángulo $\pi/2$ en 0, y por tanto el segmento de el diametro que une a los puntos $Z_1$ y $Z_2$ subtiende un ángulo $\alpha<\pi/2$. En otras palabras

$$|\arg f_t(Z)| = |\arg Z_1 - \arg Z_2| < \pi/2$$

lo que implica que $R_e f_t(Z)>o$, como se afirmaba

Es bastante notable que toda función $f(Z)$ analítica en el disco unitario con parte real no-negativa es una *combinación de Stieltjes* de funciones simples $f_t(Z)$ $0\leq t \leq 2\pi$ :

Teorema.(G.Herglotz).- Si $f(Z)$ es analítica en el disco $|Z|<1$ y tiene parte real no-negativa, entonces $f(Z)$ puede representarse en la forma

$$f(Z)= \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + Z}{e^{it} - Z}\, dF(t) \;+ i\beta \qquad (1)$$

*Demostración.* Es bien conocido que una función analítica en el disco $|Z|\leq r<1$ puede representarse en términos de los valores frontera de su parte real $u(Z)$ usando la fórmula de Schwarz [16, pag 194]

$$f(Z)= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + Z}{re^{it} - Z}\, u(re^{it})dt \;+ i\beta$$

La integral en la derecha puede ser escrita en la forma

$$f(Z)= \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + Z}{re^{it} - Z}\, dF_r(t) + i\beta,$$

donde

$$F_r(t)= \frac{1}{2\pi} \int_0^t u(re^{it})d\tau$$

De aquí que las variaciones totales $V_0^{2\pi}(F_r)$ $0< r <1$ forman un conjunto acotado. Sea $\{r_n\}$ una sucesión creciente de números en el intervalo $(0,1)$ excediendo $|Z|$ y que convergen a 1. Entonces se sigue del principio de selección de Helly, [9,pag 337] y [16, pag 74] que la sucesión funciones $\{F_{r_n}(t)\}$ contienen una subsucesión $\{F_{r'_n}(t)\}$ la cual es convergente a una función $F(t)$ acotada no decreciente.

Más aún, para Z fija, la sucesión de funciones

$$\frac{r'_n e^{it} + Z}{r'_n e^{it} - Z} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

cada una continua en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, converge uniformemente en el intervalo a la función límite

$$\frac{e^{it} + Z}{e^{it} - Z}$$

De aquí que, por el *teorema de la convergencia de Helly* [16, pag 72], [9, pag 334]

$$f(Z) = \lim_{n' \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{rn' e^{it} + Z}{rn' e^{it} - Z} \, dF_{r_{n'}}(t) + i\beta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + Z}{e^{it} - Z} \, dF(t) + i\beta$$

con lo que se prueba el teorema. //

Nótese que (1) incluye el caso $\omega = \alpha + i\beta$ $(\alpha \geq o)$

Si hacemos $F(t) = \frac{\alpha t}{2\pi}$ .

## APENDICE SOBRE FUNCIONES CRECIENTES

*Definición.* A-1. Sea f una función real definida en un conjunto S de R. Si para cualquier par de números x,y de S con $x<y$ se tiene que $f(x)\leq f(y)$, se dice que f es creciente en S.

Teorema A-1. Si f es una función creciente en $[a,b]$, entonces los límites laterales $f(x_o^+)$ y $f(x_o^-)$ existen para cada $x_o \varepsilon (a,b)$ y se verifica que

$$f(x_o^-) \leq f(x_o) \leq f(x_o^+). \qquad (1)$$

En los extremos se tiene

$$f(a) \leq f(a^+) \quad \text{y} \quad f(b^-) \leq f(b).$$

*Demostración.* Consideremos $A=\{f(x) : a<x<x_o\}$. Dado que f es creciente, $f(x_o)$ es cota superior de A. Si tomamos c = SUP A, entonces $c\leq f(x_o)$. Existen elementos f(x) en A para los cuales, dada $\varepsilon>o$, se cumple $c-\varepsilon<f(x)\leq c$. Tomemos $x_1<x_o$ de forma que $c-\varepsilon<f(x_1)<c$. Ahora para $\varepsilon>o$ y $\delta = x_o-x_1>o$. si $x_o-<x<x_o$ entonces $|f(c)-c|<\varepsilon$, por lo que $f(x_o^-)$ existe y es igual a c. La demostración de la existencia de $f(x_o^+)$ y de que $f(x_o^+) \geq f(x_o)$ es analoga. El mismo argumento sirve para los extremos del intervalo. //

Definición A-2.- f tiene una discontinuidad de salto en $x_o$ si existen $f(x_o^-)$ y $f(x_o^+)$ pero $f(x_o^-)\neq f(x_o^+)$.

Teorema A-2.- El único tipo posible de discontinuidades de una función creciente es de saltos.

*Demostración.*- Es inmediato de (1) en el teorema A-1 y la existencia de los límites laterales. //

Teorema A-2.- El conjunto de discontinuidades de una función f creciente es numerable.

*Demostración:* Sea S el conjunto $\{x : x$ es un punto de salto$\}$. Para cada $x\varepsilon S$, considérese el intervalo abierto $Ix = (f(x^-), f(x^+))$. Si $x'\varepsilon S$, y $x<x'$, digamos, entonces hay un punto $\tilde{x}$ tal que $x<\tilde{x}<x'$. Por lo que, debido a la monotonia de f tenemos

$$f(x^+) \leq f(\tilde{x}) \leq f(x'-)$$

~~por lo~~ que se sigue que Ix y Ix' son ajenos.
Así que podemos asociar a S en el dominio de f, una cierta colección de intervalos abiertos ajenos en el rango de f. Ahora, cualquiera de las colecciones es necesariamente numerable puesto que cada intervalo contiene números racionales, así que la colección de intervalos está en correspondencia uno a uno con un cierto subconjunto de racionales como, éste numerable, se deduce que el conjunto de discontinuidades es también numerable.//

Usaremos la notación $Sn\uparrow s$ con el significado de que (Sn) es una sucesión no decreciente que converge a s y $Sn\downarrow s$, si (Sn) es una sucesión no creciente con límite s.

Lema A.1.- Sea g una función creciente sobre $[a,b]$.

i) Si $u_n\uparrow u$, entonces $g(u_n^-)\uparrow g(u^-)$.

ii) Si $u_n\downarrow u$, entonces $g(u_n^+)\downarrow g(u^+)$.

*Demostración.*- Probaremos ii). Supóngase que $u_n\downarrow u$, sea $\varepsilon>0$; aquí $u\varepsilon [a,b]$. Existe $v>u$ tal que $v\varepsilon [a,b]$ y $g(v) < g(u^+)+ \varepsilon$. Seleccionemos N natural, tal que $n > N$ implique $u_n<v$. Entonces

$$n > N \text{ implica } g(u_n^+) \leq g(v) < g(u^+)+ \varepsilon.$$

Puesto que $g(u_n^+) \geq g(u^+)$ para todo n, concluimos que $g(u_n^+)\downarrow g(u^+)$;

# BIBLIOGRAFIA


[1].- K. Ross; Another aproach to Riemann-Stieltjes Integral American Mathematical Monthly oct. 1980 P,P.660-662.

[2].- E. Hewitt. Integration by parts for Stieltjes Integral American Mathematical Monthly vol 67 (1960) P.P.419-423.

[3].- C. Edwards. The Historical Development of the Calculus Springer Verlag.

[4].- T. Hawkins: Lebesgue theory of Integration. Chelsea Publishing Company.

[5].- G. Birkhoff: A Source Book in Classical Analysis Harvard. U.P.

[6].- T. Apostol: Mathematical Analysis. 2$^{d}$ed. Adisson-Wesley.

[7].- K. Ross. Elementary Analysis : the theory of Calculus Springer Verlag.

[8].- W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis. Mc Graw-Hill.

[9].- G.Y.Shilov: Mathematical Analysis. Pergamón Student.

[10].- R. Griego: Conceptos de Probabilidad. Colección Matemática Superior.

[11].- M. Loeve: Probability theory I. 4$^{th}$ Ed. Springer Verlag.

[12].- K.L. Chung: A Course in Probability theory. Ac. Press.

[13].- Hoel, Port, Stone: Introduction to Probability theory. Houghton Mifflin.

[14].- Ahlfors. Complex Analysis Mc. Graw-Hill.

[15].- P.tuchinsky. Viscous Fluid Flow and the integral calculus. UMAP. Unit 210.

[16].- G. Shilov, B.Gurevich, Integral, Measure and Derivative: A UNIFIED APPROACH. Dover.

[17].- R. Silverman Complex Analysis with Applications Prentice-Hall.