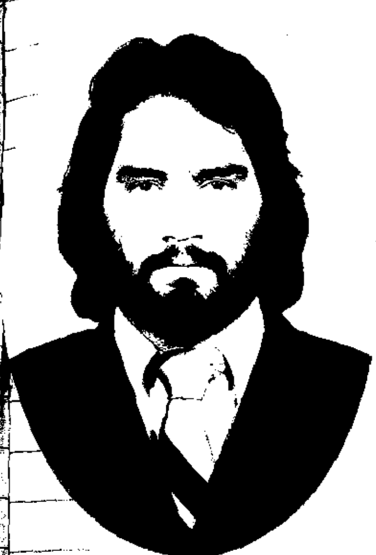


Acta no. 22
foja no. 21
libro no. 01
Jacobo Nuñez U.
700372

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México siendo las 11 00 horas del día 15 de Diciembre de 1983 se reunieron en la sala de lectura de la Escuela de Altos Estudios de la Universidad de Sonora, los señores

— RUBEN FLORES ESPINOZA —

— PEDRO FLORES PEREZ —

— EDUARDO TELLECHEA ARMENTA —

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como secretario el ultimo para efectuar el Examen Profesional de la Carrera de:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

a el señor JACOBO GUADALUPE NUÑEZ URIAS, despues de haber presentado su Tesis intitulada "CLASIFICACION DE SINGULARIDADES" el que previamente le fué aprobado por el Jurado.

Los señores sinodales replicaron a el sustentante y despues de debatir entre si reservada y libremente lo declararon

— APROBADO POR UNANIMIDAD —

Acto continuo el presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente que firman los que han intervenido

Presidente

secretario

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

" CLASIFICACION DE SINGULARIDADES "

Jacobo Guadalupe Nuñez Urias*

*Trabajo presentado para obtener el Título de Licenciado en Matemáticas.

Diciembre de 1983.

I N D I C E

INTRODUCCION

Respecto al tema de funciones y sus singularidades, existe una gran cantidad de investigaciones que se han hecho, tanto por su interés desde el punto de vista de la Matemática pura, como por sus aplicaciones, de aquí que haya diversos enfoques a éste tema.

En general, el propósito de éste trabajo es describir el comportamiento de funciones $F: R^n \to R^m$ (mas adelante especificamos las dimensiones n,y,m y los casos que aquí se contemplan) tanto en puntos regulares como en puntos singulares (puntos donde la diferencial se anula), y hacer una distinción o clasificación de tales singularidades.

En el Capítulo I, tratamos el caso de funciones diferenciables $F: R^n \to R$, que para éste caso, podemos hablar de puntos singulares en donde la función alcanza un máximo, un mínimo ó es un punto silla (punto de inflexión). En la primera parte desarrollamos los criterios que pueden ser vistos (o son vistos) en un curso de Cálculo avanzado a nivel licenciatura; en la segunda parte auxiliándonos del *Teorema de Taylor* vemos que condiciones deben cumplir las formas de Taylor de orden mayor o igual a 2 para poder dar una clarificación de las singularidades en los términos arriba descritos.

En el Capítulo II tratamos el caso $F: R^n \to R^m$; definimos equivalencia entre funciones dando algunos ejemplos; s las funciones $C^\infty(R^n, R^m)$ las dividimos en clases de equivalencia para así hablar, no de una función específica sino funciones representativas de una clase (gérmenes) estableciendo equivalencia entre gérmenes en forma local y tratando de encontrar la expresión de la forma normal en un punto crítico no degenerado.

En el Capítulo III tratamos el caso de funciones F: $R^2 \to R^2$ y damos la clasificación de las singularidades en punto que llamaremos dobleses ó cúspides, encontrando la expresión de la forma normal para las funciones en dichos puntos.

Por último damos un panorama general de los resultados que se han encontrado para dimensiones n,m de F: $R^n \to R^m$ en el contexto de las últimas investigaciones que se han hecho, tratando de ubicar éste modesto trabajo.

CLASIFICACION DE SINGULARIDADES. FUNCIONES $F:R^n \to R$.

CAPITULO I

En este capítulo investigaremos el comportamiento local de funciones $F:R^n \to R$ en puntos crítico, $(\nabla F(x_0)=0)$ desarrollando criterios para determinar si la función alcanza máximo, mínimo o inflexión en estos puntos; primero en el caso de que sea punto crítico no degenerado, dando la versión para este tipo de funciones de los conocidos criterios de máximos y mínimos del caso de funciones reales de variable real; y después, haciendo uso del *Teorema de Taylor* en varias variables, generalizar para el caso de que el punto crítico sea degenerado. Esta generalización no cubre todas las contingencias pero sí es bastante general.

Comencemos estableciendo algunas definiciones y la notación que emplearemos, y recordando algunos resultados estándar de Cálculo Avanzado.

I. PUNTOS CRITICOS NO DEGENERADOS.

Definición 1.1.1. $F:R^n \to R$ para A R^n, A abierto y $x_0 \varepsilon A$ y cualquier vector $Y \varepsilon R^n$ tal que $x_0+tY \varepsilon A$. Definimos la derivada de F en x_0 respecto a Y es:

$$F'_Y(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0+tY)-F(x_0)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Observación 1.1.1. *a)* Si $||Y||=1$ $F'(x_0)$ es la derivada direccional de F en x_0 respecto a Y (en la dirección de Y).

b) Si $Y=e_k$ $F'_{e_k}(x_0)=F'_k(x_0)$ es la derivada parcial de F respecto a e_k

Notación: $$F'_{e_k}(x_0) = D_k F(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0)$$

$$F'_Y(x_0) = \frac{\partial F}{\partial Y}(x_0)$$

Definición 1.1.2.- $F:R^n\to R$, F es diferenciable en $x_0 \in D_F$ si existe una transformación lineal $T_{x_0}: R^n \to R$ tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)-T_{x_0}(x-x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

T_{x_0} es llamada la diferencial de F en x_0

Notación:

$$T(x-x_0)= d_{x_0}F(x-x_0).$$

Definición 1.1.3.- Si F es diferenciable en x_0 definimos el gradiente de F en x_0 como:

$$\nabla F(x_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0),\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0),\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Observaciones a la definición de Diferenciabilidad 1.1.2.

F es diferenciable en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)-T_{x_0}(x-x_0)}{||x-x_0||} = 0$$

Si escribimos: $x-x_0= Y$ $||x-x_0||=||Y||$ se puede escribir:

$$\lim_{Y\to 0} \frac{F(x_0+Y)-F(x_0)-T_{x_0}(Y)}{||Y||} = 0$$

O también:

$$F(x_0+Y)=F(x_0)+T_{x_0}(Y)+||Y||\ R_1(x_0,Y) \quad (*)$$

donde

$$||Y||<r \text{ y } \lim_{Y\to 0} R_1(x_0,Y)= 0$$

$$R_1(x_0,Y)= \frac{F(x_0+Y)-F(x_0)-T_{x_0}(Y)}{||Y||}$$

Para x_0 fijo $R(x_0,Y)$ toma valores reales.

A la expresión (*) se le conoce como la forma de Taylor de ler. orden.

Proposición 1.1.2. Si F es diferenciable en x_0 entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) = T_{x_0}(Y)$$

Demostración: Del hecho de que F es diferenciable en x_0 significa que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(x_0)-T_{x_0}(x-x_0)}{||x-x_0||} = 0 \qquad (1)$$

si escribimos:

$$x-x_0 = tY \qquad x=x_0+tY$$

$$\text{Si } x\to x_0 \Longleftrightarrow ||x-x_0||\to 0 \Longleftrightarrow ||tY||\to 0 \Longleftrightarrow t\to 0$$

Así, la expresión (1) la podemos escribir como:

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+tY)-F(x_0)-T_{x_0}(tY)}{t} = 0$$

Por la linealidad de T_{x_0} tenemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+tY)-F(x_0)-t\,T_{x_0}(Y)}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+ty)-F(x_0)}{t} - \lim \frac{\cancel{t}\,T_{x_0}(Y)}{\cancel{t}} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+tY)-F(x_0)}{t} - T_{x_0}(Y) = 0$$

es decir

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+tY)-F(x_0)}{t} = T_{x_0}(Y)$$

O sea que:

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(x_0) = T_{x_0}(Y)$$

Observación 1.1.3. Como $\frac{\partial F}{\partial Y}(x_0)=T_{x_0}(Y)$ si $Y=e_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)=T_{x_0}(e_i)$$

Proposición 1.1.2. Si F es diferenciable en x_0 entonces

$$T_{x_0}(Y)=\nabla F(x_0).Y$$

Si $Y=(Y_1, Y_2), \ldots Y_n)$ $\qquad Y=\sum_{i=1}^{n} Y_i e_i$

$$T_{x_0}(Y)=T(\sum_{i=1}^{n} Y_i\, e_i)=\sum_{i=1}^{n} T(Y_i e_i)=\sum_{i=1}^{n} Y_i T(e_i)=$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)=\nabla F(x_0).Y$$

De aquí en adelante $F:R^n\to R$

Definición: Si F es diferenciable en x_0 y $\nabla F(x_0)=0$
x_0 es llamado punto crítico o Singularidad de F

1.1.4 F toma un valor máximo absoluto en x_0 si

$$\forall\, x\varepsilon D_F \qquad F(x)\leq F(x_0)$$

1.1.5 F toma un valor mínimo absoluto en x_0 si

$$\forall\, x\varepsilon D_F \qquad F(x)\geq F(x_0)$$

1.1.6 $F(x_0)$ es llamado máximo relativo o mínimo relativo si existe
$V(x_0)$ vecindad de x_0 $\ni$
$\forall\, x\varepsilon\ V(x_0)$
$F(x)\leq F(x_0)$ o $F(x)\geq F(x_0)$ respectivamente.

1.1.7 Sea F diferenciable en x_0, x_0 punto crítico
F tiene un punto de inflexión(punto silla)

En x_0 si $\forall V(x_0)$ vecindad de x_0 existen $x \varepsilon V(x_0)$ tal que $F(x) \leq F(x_0)$ y también existen $x' \varepsilon V(x_0)$ tal que $F(x') \geq F(x_0)$.

Observación 1.1.4. A un máximo o mínimo se le llama valor extremo.

Teorema 1.1.1. Sea $F: R^n \to R$ diferenciable. Supongamos que F toma un valor extremo en un punto x_0 del interior de su dominio, entonces

$$\nabla F(x_0) = 0$$

Demostración: Supongamos que F tiene mínimo local en X_0 entonces $\forall\, Y \varepsilon R^n \; ||Y|| = 1$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $-\varepsilon < t < \varepsilon$ $F(x_0) \leq F(x_0 + tY)$ y para $0 < t < \varepsilon$

$$\frac{F(x_0+tY) - F(x_0)}{t} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{F(x_0-tY) - F(x_0)}{t} \geq 0$$

y como

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(x_0) = \nabla F(x_0) Y$$

además

$$0 \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x_0+tY) - F(x_0)}{t} = \nabla F(x_0) Y$$

$$0 \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x_0-tY) - F(x_0)}{t} = \nabla F(x_0)(-Y)$$

$$= -\nabla F(x_0)\, Y$$

Podemos concluir que $\nabla F(x_0)(Y) = 0$ y como Y es arbitrario $\Longrightarrow \nabla F(x_0) = 0$

La demostración para el máximo es análoga.

Observación 1.1.5. Si F es diferenciable en x_0, x_0 un valor extremo es un punto crítico.

Veremos que si F es diferenciable en x_0 y x_0 es un punto crítico, la naturaleza del punto crítico estará determinada por el signo de $F(x)-F(x_0)$ para $x\in V(x_0)$.

Observación 1.1.6. El signo de $F(x)-F(x_0)=$ signo de $R_1(x_0, Y)$ si x_0 es punto crítico.

Demostración: Si tomamos $x=x_0+Y$ de la observación a la definición tenemos:

$$F(x_0+Y)-F(x_0)=\nabla F(x_0)Y+||Y||R_1(x_0, Y)$$

donde

$$\lim_{Y\to 0} R_1(x_0, Y)=0$$

como x_0 es punto crítico $\nabla F(x_0)=0$

$F(x_0+Y)-F(x_0)=||Y||R_1(x_0, Y)$ es decir

$F(x_0+Y)-F(x_0)$ tiene el signo de $R_1(x_0,Y)$

ya que $R_1(x_0,Y)=\dfrac{F(x_0+Y)-F(x_0)-\nabla F(x_0)Y}{||Y||}$

pero veamos otras expresiones para $R_1(x_0, Y)$

Notación: $D_{ij}F(x)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ $\quad i,j=1,2, \ldots, n$

$B_n(x_0)=\{x\in R^n \mid ||x-x_0||< n\}$ ←bola abierta de radio n.

Teorema 1.1.2. (Teorema de Taylor de 2do. Orden para campos escalares).

Sea $F: R^n\to R$ con $D_{ij}F$ continuas en $B_n(x_0)$
entonces $\forall Y\in R^n$ tal que $x=(x_0+Y)\in B_n(x_0)$ se tiene

$$F(x)-F(x_0)=\nabla F(x_0)Y+\frac{1}{2}\,Y\,H(x_0+CY)Y^t \qquad \text{(A)}$$

$0<C<1$

O también:

$$F(x)-F(x_0)=\nabla F(x_0)Y+\frac{1}{2}\,Y\,H(x_0)Y^t+||Y||^2$$

$$R_2(x_0,\,Y)$$

donde

$$\lim_{Y\to 0} R_2(x_0,\,Y)=0$$

Demostración: Consideremos Y fijo y definimos:

$$g(u)=F(x_0+uY) \qquad -1\leq u\leq 1$$
$$g(1)=F(x_0+Y)$$
$$g(0)=F(x_0)$$
$$F(x_0+Y)-F(x_0)=g(1)-g(0)$$

como g: R→R aplicando el Teorema de Taylor de segundo orden en $[0,\,1]$

$$g(x)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}\,g''(C)(x-0)^2 \quad \text{para } 0<C<1$$
$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}\,g''(C)(1-0)^2$$
$$g(1)-g(0)=g'(0)+\frac{1}{2}\,g''(C) \qquad \text{para } 0<C<1$$

$$\text{Así } F(x)-F(x_0)=g(1)-g(0)=g'(0)+\frac{1}{2}\,g''(C) \quad (*)$$

Si escribimos:

$$r(u)=x_0+uY$$
$$r''(u)=Y \qquad r(0)=x_0$$

Por la regla de la cadena

$$g(u)=F(r(u))$$
$$g'(u)=F'(r(u))r'(u)=\nabla F(r(u))r'(u)=\nabla F(r(u))Y$$
$$g'(0)=\nabla F(x_0)Y \quad (1)$$

del hecho $g'(u)=\nabla F(r(u))\ Y=\sum_{j=1}^{n} D_j F(r(u))Y_j$

$$g''(u)=\sum_{i=1}^{n} D_i\Big(\sum_{j=1}^{n} D_j F(r(u))Y_j\Big)\ Y_i$$

$$g''(u)=\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}F(r(u))\ Y_iY_j=Y\ \ H(r(u))Y^t$$

y como $r(u)=x_0+uY$

$$r(C)=x_0+CY$$

$$g''(C)=YH(x_0+CY)Y^t \qquad (2)$$

sustituyendo (1) y (2) en (*) tenemos:

$$F(x_0+Y)-F(x_0)=g'(0)+\frac{1}{2}g''(C) \qquad 0<C<1$$

$$=\nabla F(x_0)Y+\frac{1}{2}YH(x_0+CY)Y^t$$

y obtenemos (A)

Si definimos:

$$||Y||^2 R_2(x_0, Y)=\frac{1}{2}Y(H(x_0+CY)-H(x_0))Y^t \quad Y\neq 0$$

$$R_2(x_0, 0)=0$$

$$||Y||^2 R_2(x_0, Y)=\frac{1}{2}H(x_0+CY)Y^t-\frac{1}{2}Y\,H(x_0)Y^t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}Y\,H(x_0+CY)Y^t=||Y||^2 R_2(x_0, Y)+\frac{1}{2}Y\,H(x_0)Y^t$$

y sustituyendo esta expresión en el resultado (A)

$$F(x_0+Y)-F(x_0)=\nabla F(x_0)Y+\frac{1}{2}Y\,H(x_0)Y^t+||Y||^2R_2(x_0,Y)$$

sólo falta probar que:

$$\lim_{Y\to 0} R_2(x_0, Y)=0$$

y como

$$||Y||^2R_2(x_0, Y)=\frac{1}{2}Y(H(x_0+CY)-H(x_0))Y^t \quad Y\neq 0$$

$$||Y||^2|R_2(x_0, Y)|=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[D_{ij}F(x_0+CY)-D_{ij}F(x_0)\right]Y_iY_j\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|D_{ij}F(x_0+CY)-D_{ij}F(x_0)\right|\,||Y||^2$$

Es decir:

$$\left|R_2(x_0, Y)\right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|D_{ij}F(x_0+CY)-D_{ij}F(x_0)\right|$$

Para $Y \neq 0$ y como cada $D_{ij}F$ es contínua en $x_0 \Rightarrow \lim_{Y\to 0} D_{ij}F(x_0+CY)=D_{ij}F(x_0)$

Observación 1.1.7. Como $F(x_0+Y)-F(x_0)=\nabla F(x_0)Y+\frac{1}{2}YH(x_0)Y^t+||Y||^2R_2(x_0,Y)$ Para Y muy pequeño $R_2(x_0,Y)\to 0$ o más rápido que $||Y||^2\to 0$ cuando $Y\to 0$

Definición 1.1.8. $H(x_0)=(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x_0))$ $ij= 1,2, \ldots, n$ se le llama Hessian de F en x_0.

Definición 1.1.9. Si la matríz de Hessian es invertible en x_0, x_0 punto crítico a x_0 le llamaremos punto crítico no degenerado.

Definición 1.1.10. Si la matriz de Hessian no es invertible en x_0 punto crítico, a x_0 le llamaremos punto crítico degenerado.

Proposición 1.1.3. Sea $A=(a_{ij})$ matriz n x n real simétrica. y sea $Q(Y)=YAY^t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_iY_j$ entonces:

$Q(Y) > 0 \ \forall Y\neq 0 \Leftrightarrow$ todos los eigenvalores de A son positivos
$Q(Y) < 0 \ \forall Y\neq 0 \Leftrightarrow$ todos los eigenvalores de A son negativos

Demostración: Véase No. 6 de la Bibliografía.

Teorema 1.1.3. Sea $F:R^n\to R$ con segundas derivadas parciales $D_{ij}F$ continuas en $B_n(x_0)$; sea $H(x_0)$ la matriz de Hessian un punto crítico x_0 entonces:

a) Si todos los eigenvalores de $H(x_0)$ son positivos, F tiene un mínimo relativo en x_0.

b) Si todos los eigenvalores de $H(x_0)$ son negativos, F tiene un máximo relativo de x_0.

c) Si los eigenvalores de $H(x_0)$ son positivos y negativos, F tiene un punto de inflexión en x_0.

Demostración: Sea $Q(Y)=Y\ H(x_0)Y^t$ la fórmula de Taylor nos da:

$$F(x_0+Y)-F(x_0)=\frac{1}{2}\,Q(Y)+||Y||^2R_2(x_0,Y)$$

donde $x_0+Y\varepsilon B_n(x_0)$ y $\lim\limits_{Y\to 0} R_2(x_0,Y)=0$. Probaremos que existe r tal que si $0<||Y||<r$ el signo de $F(x_0+Y)-F(x_0)$ es el mismo de $Q(Y)$.

Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ eigenvalores de $H(x_0)$ son positivos.

Sea h el más pequeño, si $m<h$ $\lambda_1-m, \lambda_2-m, \ldots, \lambda_n-m$ son también positivos y son eigenvalores de $H(x_0)-mI$ donde I es la matriz identidad.

Por la observación anterior la forma cuadrática $Y\left[H(x_0)-mI\right]Y^t$ es definida positiva.

Es decir:

$$Y\left[H(x_0)-mI\right]Y^t>0 \quad \forall\ Y\neq 0$$

además

$$Y\ H(x_0)Y^t>Y\ (mI)Y^t=m||Y||^2 \quad \forall\ m<h$$

tomando $m=\frac{1}{2}h$ tenemos:

$$Q(Y)>\frac{1}{2}h||Y||^2 \quad \forall\ Y\neq 0 \text{ y como } \lim_{Y\to 0} R_2(x_0,\ Y)=0$$

entonces existe r tal que $\left|R_2(x_0,\ Y)\right|<\frac{1}{4}h$ con tal que $0<||Y||<r$ y para esta Y tenemos:

$$||Y||^2|R_2(x_0,\ Y)|<\frac{1}{4}\ h||Y||^2<\frac{1}{2}\ Q(Y)$$

y la fórmula de Taylor

$$F(x_0+\ Y)-F(x_0)=\ \frac{1}{2}\ Q(Y)+||Y||^2\ R_2(x_0,\ Y)$$

demuestra que:

$$F(x_0+\ Y)-F(x_0)\geq\ \frac{1}{2}\ Q(Y)-||Y||^2\ R_2(x_0,\ Y)>0$$

Así, F tiene un mínimo relativo en x_0 (fin de la parte a).

Para demostrar b) basta con aplicar el argumento anterior a -F.

Para demostrar c) sean λ_1, λ_2 eigenvalores de $H(x_0)$ de signos opuestos, y sea h= mín $\{|\lambda_1|\quad|\lambda_2|\}$ entonces, para cada valor m tal que $-h<m<h$ los números λ_1-m y λ_2-m, son eigenvalores de signos opuestos de la matriz:

$$H(x_0)-mI$$

así, si $m\varepsilon(-h,\ h)$ la forma cuadrática $Y\left[H(x_0)-mI\right]Y^t$ toma valores positivos y negativos en toda vecindad de Y=0

Elijamos r>0 tal que $\left|R_2(x_0,\ Y)\right|<\frac{1}{4}\ h$ siempre que $0<\ ||Y||<r$ vemos que para esta Y, el signo de $F(x_0+Y)-F(x_0)$ es el mismo que de Q(Y) y como cuando $Y\to 0$ se presentan valores positivos y negativos, entonces F tiene en x_0 un punto de inflexión.

2.- PUNTOS CRITICOS DEGENERADOS.

En la expresión:

$$F(x_0+Y)-F(x_0)=\nabla F(x_0)Y+\frac{1}{2}Q(Y)+||Y||^2R_2(x_0, Y) \quad (1)$$

$$H(x_0)=(D_{ij}F(x_0))_{i,j=1,2,\ldots n}$$

$$D_{ij}F(x_0)=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \qquad i,j=1,2,\ldots n$$

usaremos la notación:

$$d^0_{x_0}F(x)=F(x_0)$$

$$d_{x_0}F(x)=\nabla F(x_0)x=(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^1_{x_0}F$$

$$d^2_{x_0}F(x)=x\,H(x_0)x^t=(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^2_{x_0}F$$

en general

$$d^k_{x_0}F(x)=(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^k_{x_0}F$$

$$d^k_{x_0}F(x)=\sum_{k_1+k_2+\ldots k_n=k}\binom{k}{k_1,\ k_2,\ldots k_n}x_1^{k_1}\,x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}\ .$$

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}(a_1,\ a_2\ldots a_n)$$

donde

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) \qquad \binom{k}{k_1,\ k_2\ \ldots k_n}=\frac{k!}{k_1!\ k_2!\ \ldots k_n!}$$

$$x_0=(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$$

Así la expresión (1) se puede escribir con $x = x_0 + Y \Longrightarrow Y = x - x_0$

$$F(x) = d^0_{x_0} F(x) + d_{x_0} F(x-x_0) + d^2_{x_0} F(x-x_0) + \|x-x_0\|^2 R_2(x_0,Y)$$

por ejemplo para $F: R^2 \to R$ $\quad x_0 = (x_0, Y) \quad x = (x, Y)$

$$d^0_{x_0} F(x_0,Y) = F(x_0,Y_0)$$

$$d_{x_0} F(x,Y) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial Y}\right)_{x_0} F = x \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,Y_0) + Y \frac{\partial F}{\partial Y}(x_0,Y_0)$$

$$d^2_{x_0} F(x,Y) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial Y}\right)^2_{x_0} F = x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x}(x_0,Y_0) + 2xY \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y}(x_0,Y_0) + Y^2 \frac{\partial^2 F(x_0,Y_0)}{\partial Y^2}$$

$$d^k_{x_0} F(x,Y) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial Y}\right)^k_{x_0} F = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j Y^{k-j} \frac{\partial^k F}{\partial x^j \partial Y^{k-j}}(x_0,Y_0) \quad x_0 + Y = x$$

Teorema de Taylor 1.2.1. Sea $F: R^n \to R$ con todas las derivadas hasta de orden n contínuas en una vecindad de x_0; sea

$$x_0 + Y \in V_n(x_0) \text{ Y } T_n(x-x_0) = F(x_0) + d^2_{x_0} F(x-x_0) + \frac{1}{2!} d_{x_0} F(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{N!} d^n_{x_0} F(x-x_0)$$

La expresión de Taylor de N-ésimogrado alrededor de x_0

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - T_n(x-x_0)}{|x-x_0|^n} = 0$$

Demostración. (véase No. 7 de la bibliografía).

Definición 1.2.1. $K \subset R^n$ es un cono si $\forall\, x \in K$ y $t \in R$ entonces $tx \in K$.

Definición 1.2.2. Una función $g: K \to R$ se llama homogénea de grado P si $g(tx) = t^P g(x)$ $\forall\, t \in R$ Y $x \in K$ para algún P fija.

Definición: Sea g *homogénea.*

1.2.3. Decimos que es <u>definida positiva</u> si $\forall x \neq 0 \quad x \in K \quad g(x)>0$

1.2.4. Decimos que es <u>definida negativa</u> si $-g(x)$ es definida positiva.

1.2.5. Es <u>no definida</u> si no es positiva ni negativa.

1.2.6. Es <u>semidefinida positiva</u> si $\forall x \in K \quad g(x) \geq 0$

1.2.7 Es <u>semidefinida negativa</u> si $-g(x)$ es semidefinida positiva.

1.2.8 Es <u>no semidefinida</u> si existen $x, Y \in K \ni g(x)>0$ y $g(Y)<0$.

Observación 1.2.1. En las expresiones $d^2_x F(x)$, $d^3_{x_0} F(x), \ldots d^k_{x_0} F(x)$, vemos que son ejemplos de funciones homogéneas.

$$d^k_{x_0} F(tx) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \binom{k}{k_1 k_2 \ldots k_n} (tx_1)^{k_1} (tx_2)^{k_2} \ldots (tx_n)^{k_n}$$

$$\frac{2^k F}{2x_1^{k_1} \ldots 2x_n^{k_n}} (a_1, a_2 \ldots a_n) = \Sigma \binom{k}{k_1 \ldots k_n} t^{k_1} .\ t^{k_2} \ldots t^{k_n}$$

$$(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}) \frac{2^k F}{2x_1^{k_1} \ldots 2x_n^{k_n}} (a_1 \ldots a_n)$$

$$d^k_{x_0} F(tx) = t^k \Sigma \binom{k}{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{2^k F}{2x_1^{k_1} \ldots 2x_n^{k_n}} (a_1 \ldots a_n)$$

$$d^k_{x_0} F(tx) = t^k\, d^k_{x_0} F(x).$$

Definición 1.2.9. Sea $K \subset R^n$ cono y $\varepsilon>0$, la ε- cónica vecindad $K(\varepsilon)$ se define por el cono generado por la ε- vecindad en S^n de $K \cap S^n$ donde S^n es la esfera unitaria en R^n.

Observación 1.2.2. En el Teorema de Taylor tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-T_n(x-x_0)}{|x-x_0|^n} = 0 \qquad \text{donde } x= x_0+Y\varepsilon V(x_0)$$

$Y\varepsilon R^n$, si tomamos $x_0=0$ tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-T_n(x)}{|x|^n} = 0$$

y en $T_n(x)=F(x_0)+\frac{1}{1!}\, d_{x_0}F(x)+\frac{1}{2!}\, d^2_{x_0}F(x)+ \ldots + \frac{1}{n!}\, d^n_{x_0}F(x)=F(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k_{x_0}F(x)$

Notación: Al término $\frac{1}{k!}\, d^k_{x_0}F(x)=\mathbb{F}_k(x)$
el límite anterior se puede escribir en forma equivalente como:

$$F(x)= F(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{F}_k(x)+|x|^n R_n(x)$$

donde

$$\lim_{x\to 0} R_n(x)= 0$$

A $\mathbb{F}_k(x)$ le llamamos la k-ésima forma de Taylor.

Sean $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_s$, $\mathbb{F}_t$ denotarán la lera., 2da. y 3ra. forma de Taylor que no se anula en un punto crítico x_0. Claramente $2\leq p\leq s\leq t$ y s y t pueden no existir.

Definición 1.2.10. $k_i= \{x\varepsilon\ R^n |\ \mathbb{F}_i(x)=0\}$ $\quad i= p,s,t$
usaremos las formas de Taylor $\mathbb{F}_i$ para desarrollar un procedimiento para clasificar puntos críticos de F.

Observación 1.2.3. En las siguientes proposiciones y corolarios supondremos que $F:R^n\to R$ con derivadas parciales hasta de orden N contínuas, x_0 punto crítico.

Proposición 1.2.1. Si $\mathbb{F}_p$ es *no semidefinida*, entonces x_0 es un punto silla de F. Supondremos que

$$x_0=0 \quad y \quad F(x_0)=0 \quad y \quad G=B_n(0)$$

Demostración:

por el Teorema de Taylor

$$F(x)= \mathbb{F}_p(x)+ |x|^p R_p(x)$$

donde

$$\lim_{x\to 0} R_p(x)=0$$

sea

$$\mathbb{F}_p(h)\neq 0 \text{ como } \lim_{x\to 0} R_p(x)=0 \Longrightarrow \text{existe } \delta>0$$

tal que para $0<t<\delta |h|^p |R_p(th)|< \frac{1}{2} | \mathbb{F}_p(h)|$

Además, como $F(x)= \mathbb{F}_p(x)+|x|^p R_p(x)$ entonces

$$\begin{aligned} F(th) &= \mathbb{F}_p(th)+|th|^p R_p(th) \\ &= t^p \mathbb{F}_p(h)+ t^p|h|^p R_p(th) \\ &= t^p\left[\mathbb{F}_p(h)+|h|^p R_p(th)\right] \end{aligned}$$

Así, $F(th)$ tiene el signo de $\mathbb{F}_p(h)$ si $0<t<\delta$ y como $\mathbb{F}_p$ tiene valores positivos y negativos

$$\Longrightarrow F \text{ tiene un punto silla en } x_0.$$

Proposición 1.2.2. Si $\mathbb{F}_p$ es *definida positiva*, entonces x_0 es un mínimo local de F. Si $\mathbb{F}_p$ es *definida negativa*, entonces x_0 es un máximo local de F.

Demostración:

Supondremos que

$$x = 0 \qquad F(x_0)=0$$

como $\mathbb{F}_p$ es definida positiva y contínua en R^n y además la esfera unitaria en R^n es compacta tenemos que m>0.

Por la homogenidad de $\mathbb{F}_p(x)$ tenemos

$$\mathbb{F}_p(tx) = t^p\, \mathbb{F}_p(x)$$

$$\mathbb{F}_p\left(\frac{1}{|x|}x\right) = \left(\frac{1}{|x|}\right)^p \mathbb{F}_p(x)$$

es decir:

$$\mathbb{F}_p(x) = |x|^p\, \mathbb{F}_p\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

y como $\frac{x}{|x|}$ está en la esfera unitaria

así:

$$\mathbb{F}_p(x) > m|x|^p \quad \forall \quad x \in R^n \qquad (1)$$

además como

$$\lim_{x \to 0} R_p(x) = 0$$

existe $\delta>0$ tal que $|R_p(x)| < \frac{1}{2}m$ para $0<|x|<\delta$

Así: $-\frac{1}{2}m < R_p(x) < \frac{1}{2}m \Rightarrow -\frac{1}{2}m|x|^p < |x|^p R_p(x)$

como

$$F(x) = \mathbb{F}_p(x) + |x|^p R_p(x) \qquad (2)$$

para $0<|x|<\delta$ usando (1) y (2) tenemos:

$$F(x) > m|X|^p - \frac{1}{2}m|x|^p > 0$$

es decir que 0 es un mínimo local de F.

Para demostrar la segunda parte basta sustituir -F por F y aplicar la primera parte y entonces 0 es un máximo de F dado que 0 es un mínimo para -F.

Proposición 1.2.3. Supongamos que $\mathbb{F}_p$ es *semidefinida positiva* pero *no definida positiva*, y supongamos que $K_p \not\subset K_s$

a) Si $\mathbb{F}_s$ es no semidefinida o semidefinida negativa en K_p entonces x_0 es un punto silla de F.

b) Si $\mathbb{F}_s$ es definida positiva en K_p entonces x_0 es mínimo de F.

Suponemos $x_0=0 \quad F(x_0)=0$

Demostración: a) Primera parte.- Suponemos que $\mathbb{F}_p$ es semidefinida positiva, es decir, $\mathbb{F}_p(x)\geq 0$ pero no estrictamente positiva ya que si

$$\mathbb{F}_p(x)>0 \quad \forall\ x\varepsilon\ R^n \quad x\neq 0$$

$$K_p=\{x\varepsilon R^n \mid \mathbb{F}_p(x)=0\} = \{0\} \text{ y entonces } K_p\subset K_s \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Así que $\mathbb{F}_p$, no es estrictamente positiva

$$\text{i.e. } \exists_{x\varepsilon K_p}^{x\neq 0} \qquad \mathbb{F}_p(x)=0$$

para $x\varepsilon K_p \cap G$ donde G es vecindad de 0

$$F(x)= \mathbb{F}_s(x)+|x|^s R_s(x)$$

ya que si $x\varepsilon K_p$ $\mathbb{F}_p(x)=0$ donde $\lim_{x\to 0} R_s(x)=0$ y como $\mathbb{F}_s(x)$ es no semidefinida por la proposición (1) aplicada a $\mathbb{F}_s(x)$ 0 es un punto silla.

Demostración: a) Segunda parte.- Si $\mathbb{F}_s$ es semidefinida negativa sobre K_p como $F(x)= \mathbb{F}_s(x)+|x|^s R_s(x)$ donde $\lim_{x\to 0} R_s(x)=0$.

Por el argumento de la proposición (1) tenemos que:

$$\exists_{y\,\delta>0}\ h_1 \varepsilon k_p \text{ tal que } \mathbb{F}_s(th_1)<0$$

$$F(th_1)<0 \quad \text{si } 0<t<\delta$$

Además:

$$\mathbb{F}_p(x)>0 \quad \forall\ x\varepsilon k_p^c \cup \{0\},\ F(x)= \mathbb{F}_p(x)+|X|^p R_p(x)$$

Por el mismo argumento podemos encontrar:

$$h_2 \varepsilon k_p^c \qquad y\ \delta_2>0 \quad \text{tal que } F(th_2)>0$$

$$\text{si } 0<t<\delta_2 \quad \therefore \quad 0 \text{ es un punto de inflexión de F.}$$

Demostración: de b)

Sea $S^n=\{x \mid |x|\leq 1$ $\quad m= \text{Inf}.\{\mathbb{F}_s(x) \mid x\varepsilon k_p \cap S^n\}$

claramente $m>0$

Para $x\varepsilon k_p \cap S^n$, por la homogenidad de $\mathbb{F}_s$. Es decir:

$$\mathbb{F}_s(tx)= t^s\, \mathbb{F}_s(x)$$

tenemos

$$\mathbb{F}_s\left(\frac{1}{|x|}\, x\right)= \left(\frac{1}{|x|}\right)^s \mathbb{F}_s(x)$$

de donde

$$\mathbb{F}_s(x)= |x|^s\, \mathbb{F}_s\left(\frac{1}{|x|}\, x\right) \text{ como } \frac{x}{|x|}\varepsilon\ S^n,\ \mathbb{F}_s\left(\frac{1}{|x|}\, x\right)>\frac{3}{4}\, m$$

(ya que si $\mathbb{F}_s\left(\frac{1}{|x|}\, x\right)\leq\frac{3}{4}\, m \Longrightarrow m$ no es el Inf. y ésto contradice nuestra suposición).

Así:

$$\mathbb{F}_s(x)=|x|^s\, \mathbb{F}_s\left(\frac{1}{|x|}\, x\right)>\frac{3}{4}\, m|x|^s \ \forall\ x\varepsilon k_p \cap S^n \qquad (1)$$

Además, como $\mathbb{F}_p$ es definida positiva en $C=\left[k_p \cap S^n\right]^c \cup \{0\}$

Por el argumento de la proposición (2) existe $\delta>0 \ni F(x)>0$ si $0<|x|<\delta$ y $x\in G\cap C$

sea

$$\delta_1>0 \ni |R_s(x)|< \frac{1}{2} m \text{ si } 0<|x|<\delta_1$$

Así $-\frac{1}{2} m<R_s(x)<\frac{1}{2} m \qquad -\frac{1}{2} m|x|^s< R_s(x)|x|^s \qquad (2)$

así para $x\in k_p\cap S^n$ y $0<|x|<\delta_1$ usando (1) y (2) tenemos:

$$F(x)\geq \mathbb{F}_s(x)+|x|^s R_s(x)>\frac{3}{4} m|x|^s-\frac{1}{2} m|x|^s=\frac{1}{4} m|x|^s>0$$

$$\therefore \quad F(x)>0 \ \forall\ x\in k_p\cap S^n \ \text{ y } \ F(x)>0 \ \forall\ x\in G\cap C$$

es decir

$$F(x)>0 \quad \forall\ x \ni 0<|x|<\min.\{\delta, \delta_1\}$$

$$\therefore \quad 0 \text{ es un mínimo local de } F.$$

Observación 1.2.3. Si seguimos el razonamiento de la proposición 1.2.3. a) y hubiésemos tomado $\mathbb{F}_p$ semidefinida negativa pero no definida negativa y $k_p\not\subset k_s$; $\mathbb{F}_s$ no semidefinida, llegaríamos al mismo resultado.

Corolario 1.2.1. Si $\mathbb{F}_p$ es semidefinida negativa pero no definida negativa y $k_p\not\subset k_s$; $\mathbb{F}_s$ es no semidefinida, entonces 0 es un punto silla.

Observación 1.2.4. En la demostración de la proposición 1.2.3. a) si tomamos $\mathbb{F}_p$ semidefinida negativa pero no definida negativa, $k_p\not\subset k_s$ y $\mathbb{F}_s$ semidefinida positiva, tendríamos: $F(th_1)>0$ y $F(th_2)<0$ $\quad 0<t<\delta_2$ $h_2\in k_p^c$ $\quad 0<t<\delta$ $h_1\in k_p$ y también 0 sería punto de inflexión.

Corolario 1.2.2. Si $\mathbb{F}_p$ es semidefinida negativa, $k_p \not\subset k_s$ y $\mathbb{F}_s$ semidefinida positiva en k_p, entonces 0 es punto de inflexión.

Observación 1.2.5. En la proposición 1.2.3. b) con $k_p \not\subset k_s$ si para F $\mathbb{F}_p \geq 0$ y $\mathbb{F}_p \not> 0$, $\mathbb{F}_s > 0$, 0 es un mínimo.

Significa que para $-F$ $F_p \leq 0$ y $F_p \not< 0$ y $F_s < 0$, 0 es un máximo.

Corolario 1.2.3. Si $\mathbb{F}_p$ es semidefinida negativa, pero no definida negativa y $k_p \not\subset k_s$ y $\mathbb{F}_s$ es definida negativa en k_p, entonces 0 es un máximo local de F.

Si $\mathbb{F}_p$ y $\mathbb{F}_s$ en k_p son semidefinidos positivos pero no definidos positivos; veamos el comportamiento de $\mathbb{F}_t(x)$ en k_s y podremos establecer proposiciones semejantes.

El caso que falta por investigar: $k_p \subset k_s$ con $\mathbb{F}_p$ semidefinida positiva pero no definida positiva. Aqui no podemos establecer las mismas conclusiones como veremos en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1.2.1. Sea $F(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4 = (x-y^2)(x-2y^2)$ Claramente $(0,0)$ es punto crítico.

Aquí, si

$$\begin{matrix} x > 2y^2 \Rightarrow x > y^2 \\ x-2y^2 > 0 \text{ y } x-y^2>0 \end{matrix} \Longrightarrow F(x,y) > 0$$

si

$$\begin{matrix} x < y^2 \Rightarrow x < 2y^2 \\ x-y^2<0 \text{ y } x-2y^2<0 \end{matrix} \Longrightarrow F(x,y) > 0$$

si

$$y^2 < x < xy^2 \Rightarrow \begin{matrix} x-y^2>0 \\ x-2y^2<0 \end{matrix} \Longrightarrow F(x,y) < 0$$

Así $(0,0)$ es punto silla de F.

Aquí:

$$\mathbb{F}_2(x)= x^2 \qquad k_2= \{(x,y)\,|\,x=0\}$$

$$\mathbb{F}_3(x)= -3xy^2 \qquad k_3= \{(x,y)\,|\,x=0 \text{ o } y=0\}$$

$$\mathbb{F}_4(x)= 2y^4 \qquad k_4= \{(x,y)\,|\,y=0\}$$

$k_2 \subset k_3$ $\mathbb{F}_2$ es semidefinida positiva y

(0,0) es punto silla de F.

EJEMPLO 1.2.2. Sea $F(x,y)= x^2- 2xy^2+ 2y^4= (x,y^2)^2+ y^4$. Claramente (0,0) es un punto crítico.

Si:

$$x > y^2 \Longrightarrow x-y^2>0 \Longrightarrow (x-y^2)^2>0 \Longrightarrow F(x,y)>0$$

$$x < y^2 \Longrightarrow x-y^2<0 \Longrightarrow (x,y^2)^2>0 \Longrightarrow F(x,y)>0$$

$$x = y^2 \Longrightarrow x-y^2=0 \Longrightarrow (x,y^2)= 0 \Longrightarrow F(x,y)\geq 0$$

Aquí:

$$\mathbb{F}_2(x)= x^2 \qquad k_2= \{(x,y)\,|\,x=0\}$$

$$\mathbb{F}_3(x)= -2xy^2 \qquad k_3= \{(x,y)\,|\,x=0 \text{ o } y=0\}$$

$$\mathbb{F}_4(x)= 2y^4 \qquad k_4= \{(x,y)\,|\,y=0\}$$

k_2 k_3 $\mathbb{F}_2$ es semidefinida positiva y

(0,0) es un mínimo de F.

Además en el caso en el que todas las formas de orden mayor que P se anulen en k_p, no podemos dar criterios.

Así:

EJEMPLO 1.2.3.

$$F(x,y) = x^2 - xy^2 = x(x-y^2)$$

si

$$x > y^2 \Longrightarrow x-y^2>0 \Longrightarrow F(x,y)>0$$

si

$$0< x<y^2 \quad x>0 \quad y \ x-y^2< 0 \Longrightarrow F(x,y)<0$$

si

$$x < 0 \Longrightarrow x<y^2 \quad y\neq 0 \Longrightarrow F(x,y)<0$$

$(0,0)$ es un punto silla de F.

Aquí:

$\mathbb{F}_2(x) = x^2 \qquad K_2 = \{(x,y) \mid x=0\}$

$\mathbb{F}_3(x) = xy^2 \qquad k_3 = \{(x,y) \mid x=0 \text{ o } y=0\}$

$\mathbb{F}_4 \equiv 0$

$\mathbb{F}_i \equiv 0 \ \forall \ i\geq 4$

$K_2 \subset K_3 \qquad \mathbb{F}_i$ se anula en $k_2 \ \forall \ i>2$

EJEMPLO 1.2.4.

$$\text{Sea} \quad F(x,y) = \begin{cases} x^2-x^2y + e^{-1/y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)= 0 \end{cases}$$

$$x^2- x^2y+ e^{-1/y^2} = x^2(1-y)+ e^{-1/y^2}$$

Si $y<1$ $\quad 1-y>0$ $\quad$ si $x=0$ $\quad F(x,y)>0$

Si $y<1$ $\quad 1-y>0$ $\quad$ si $x\neq 0$ $\quad F(x,y)>0$ y

$(0,0)$ es un mínimo de F.

aquí

$$F_2(x)=x^2 \quad \to \quad k_2=\{(x,y)\,|\,x=0\}$$

$$F_3(x)=-x^2y \to \quad k_3=\{(x,y)\,|\,x=0 \text{ ó } y=0\}$$

$$k_2\subset k_3$$

CAPITULO II

1. CLASIFICACION DE FUNCIONES EN PUNTOS REGULARES. (DEFINICIONES Y EJEMPLOS)

Como en el caso de funciones $F:R^n \to R$ podemos definir la derivada de F en un punto respecto a un vector para funciones $F:R^n \to R^m$ así:

Definición 2.1.1. Sea $F: R^n \to R^m$, $A \subset R^n$ abierto y $p \in A$ $V \in R^n$ tal que $p + tV \in A$ $t \in R$ definimos la derivada de F en p respecto a V como:

$$\nabla_V F(p) = \lim_{t \to 0} \frac{F(p+tV)-F(p)}{t} \quad \text{donde este límite exista.}$$

La misma observación para el caso $F: R^n \to R$

Observación 2.1.1. $F(p): R^n \to R^m$ es lineal.
Si e_i es una base para R^n

$$Fx_i(p) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \nabla e_i F(p)$$

de hecho si

$$V = (V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} V_i e_i$$

tenemos

$$\nabla_V F(p) = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$$

Definición: Sea $F: R^n \to R^m$

2.1.2. F es de clase C^0 si F es contínua en todo su dominio.

2.1.3. F es de clase C^r $r \in N$ si tiene derivadas parciales hasta de orden $\leq r$ y éstas son contínuas.

2.1.4. F es de clase C^∞ si F es C^r $\forall r \in N$

Para funciones ϕ: $R^n \to R^n$

2.1.5. ϕ es homeomorfismo si ϕ y ϕ^{-1} son contínuas.

2.1.6. ϕ es difeomorfismo si ϕ y ϕ^{-1} son diferenciables.

2.1.7. ϕ es difeomorfismo de clase C^r si tanto ϕ como ϕ^{-1} son de clase C^r.

Definición 2.1.8. Sean F,g: $R^n \to R^m$ de clase C^r, decimos que g es C^r-equivalente a F si existen difeomorfismos ϕ, Ψ de clase C^r tal que

$$F(x) = (\Psi \circ g \circ \phi^{-1})(x)$$

es decir si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R^n & \xrightarrow{F} & R^m \\ \phi\uparrow & & \uparrow\psi \\ R^n & \xrightarrow{g} & R^m \end{array} \qquad (F \circ \phi)(x) = (\psi \circ g)(x)$$

Notación. Si g es C^r-equivalente a F, diremos que F y g son C^r-equivalentes.

Ejemplo 2.1.1. $F(x) = x^3$ $\quad g(x) = x$

F y g son C^0-equivalentes pero no C^1-equivalentes.

Si definimos $\phi(x) = {}^3 x$ $\quad \psi(y) = y$

ϕ no es derivable en 0 pero tanto ϕ como ψ y sus inversas son contínuas.

$$(f \circ \phi)(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

así $(F \circ \phi)(x) = (\psi \circ g)(x)$.

$$(\psi \circ g)(x) = x = x$$

Para ver que no son C^1-equivalente, supongamos que existan ϕ y ψ C^1-difeomorfas

$$(F \circ \psi)(x) = (\psi \circ g)(x)$$

$$F(\phi(x)) = \psi(g(x)) \qquad \psi(x_0)=0$$

$$F^1(\phi(x)) \cdot \phi^1(x) = \psi(g(x))g^1(x) \quad \text{Sea } x_0 = \phi^{-1}(0)$$

$$F^1(0)\phi^1(x_0) = \psi^1(g(x_0)) \cdot g^1(x_0)$$

$$\text{pero } F^1(0)=0 \quad y \quad g^1(x_0)=1$$

y como $\psi^1(y) \neq 0$ $y \in R$ (condición para que exista ψ^{-1})

Es decir que

$$F^1(0) \cdot \phi(x_0)=0 \quad y$$

$$\psi^1(g(x_0))\ g^1(x_0) \neq 0$$

y por lo tanto F y g no son C^1-equivalentes.

Ejemplo 2.1.2 $F(x)=x^2$ $g(x)=x$

demostremos que no son C^0-equivalentes. Supongamos que son C^0-equivalentes entonces $(F \circ \phi)(x) = \psi(g(x))$ es decir $F(x) = (\psi \circ g \circ \phi^{-1})(x)$, $\phi^{-1}(x)$ es siempre creciente o decreciente entonces $(g \circ \phi^{-1})(x)$ es siempre creciente o decreciente dado que $g(x)=x$ y si aplicamos $\psi(g \circ \phi^{-1}(x))$ será siempre creciente o cedreciente pero F no es así

Así F no es C^0-equivalente a g.

Ejemplo 2.1.3. $F(x,y)=(x,y^2)$ $g(x,y)=(x-y-(x+y)^2,\ 2(x-y)+(x+y)^2)$

F es C^∞ equivalente a g.

Si definimos $\phi(x,y)=(x-y,\ x+y)$ $\quad \psi(x,y)=(\frac{1}{3}(x+y),\ \frac{1}{3}(y-2x)$

$$(F o \phi)(x,y)= F(\phi(x))=(x-y),(x+y)^2)=(x-y,\ x^2+2xy+y^2)$$

$$(\psi\ og)(x,y)=(\frac{1}{3}(x-y-(x+y)^2+2(x-y)+(x+y)^2),\ \frac{1}{3}(2(x-y)+(x+y)^2-2(x-y-(x+y)^2)$$

$$= (x-y),\ x^2+2xy+y^2) \quad \text{así} \quad (Fo\phi)(x)=(\psi o g)(x)$$

Nos interesa el comportamiento local de una función en una vecindad de un punto, es natural identificar a todas las funciones que coincidan con F en una vecindad de un punto x_0 con una sola función, así:

Definición 2.1.9 Para una función F de clase C^∞, $x_0 \varepsilon R^n$ El germen de F en x_0 denotado por $\overline{F}(x_0)$

$$\overline{F}(x_0)=\{g(x) \text{ de clase } C^\infty |\ F(x)=g(x) \quad x\varepsilon V(x_0)\}$$

así diremos que F y g son germen-equivalentes en x_0

Si $F(x)=g(x) \quad \forall\ x\varepsilon V(x_0)$

Observación 2.1.2. Claramente el germen de F en x_0 es una clase de equivalencia para $F\varepsilon\ C^\infty$

Notación: $\overline{F}(x)= (F,x,y)$

Observación 2.1.3. El valor del germen es bien definido ya que si F y g son germen equivalentes entonces $F(x_0)= g(x_0)$
la composición entre funciones la podemos usar para definir:

Definición 2.1.10 La composición entre germenes

$$(g,y,z) \circ (F,x,y)=(g\circ F,\ x,z)$$

Así ya que tenemos el conjunto de funciones C^∞ dividido en clases de equivalencia podemos definir equivalencia entre germenes:

Definición 2.1.11. (F_1,x_1,y_1) y (F_2,x_2,y_2) son C^∞-equivalentes. Si existen germenes (ϕ,x_1,x_2) y $(\Psi,y_1,\ y_2)$ de difeomorfismos C^∞ tal que

$$(F_2,x_2,y_2)=(\psi\circ F_1\circ\phi^{-1},x_2,y_2)$$

es decir que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X,x_2 \arrow[r, "{(F_2,x_2,y_2)}"] & Y,y_2 \\ X,x_1 \arrow[u, "{(\phi,x_1,x_2)}"] \arrow[r, "{(F_1,x_1,y_1)}"] & Y,y_1 \arrow[u, "{(\psi,y_1,y_2)}"'] \end{tikzcd}$$

$$(F_2\circ\phi,x_1,y_2)=(\psi\circ F_1,x_1,y_2)$$

Notación: $(F,x_0,y_0)\simeq(g,x_1,y_1)$ significa F es C^∞ equivalente en x_0 a g en x_1, otra forma de escribir esto es:

Sean $F,\ g\colon R^n\to R^m$ y $x_1,x_2\in R^n$, decimos que el germen de F en x_2 es C^∞-equivalente al germen de g en x_1, si existen vecindades U_1 de x_1, U_2 de x_2, V_1 de $g(x_1)$ y V_2 de $F(x_2)$, y germenes de difeomorfismo C^∞ $\phi\colon U_1\to U_2$, $\psi\colon V_1\to V_2$ tal que $g(U_1)\subset V_1$ y $F(U_2)\subset V_2$, $\phi(x_1)=x_2$ y $(F\circ\phi)|_{U_1}=(\psi\circ g)|_{U_1}$, es decir $(F\circ\phi)(x)=(\psi\circ g)(x)\ \forall\ x\in U_1$, o sea, que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} U_2 \arrow[r, "F"] & V_2 \\ U_1 \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"] & V_1 \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \text{y} \quad \phi(x_1)=x_2$$

$$(F_2\circ\phi,\ x_1,y_2)=(\psi\circ g,x_1,y_2)$$

Observación 2.1.4. Se sigue de la definición que (F_1,x_1y_1)y (F_2,x_2,y_2) son C^∞-equivalentes$\Longleftrightarrow F_1$ y F_2 son C^∞-equivalentes en alguna vecindad de x_1 y x_2.

EJEMPLO 2.1.4 $F(x)= x^2$ $g(x)= 2x^2-x^4= x^2(2-x^2)$

F y g no son C^∞-equivalentes en todo R pero F en 0 es C^∞-equivalente a g en 0.

Definimos $\phi(x)= x\sqrt{2-x^2}$ $-1<x<1$ $\phi(0)=0$

$\psi(y)= y$

Claramente $\phi(x)$ y $\psi(y)$ son de clase C^∞ además

$$\phi^{-1}(x)=\sqrt{\frac{2+\ \ 4-4x^2}{2}} \quad -1<x<1 \quad \text{es } C^\infty$$

$$(F o \phi)(x)= F(\phi(x))= (x\sqrt{2-x^2})^2= x^2(2-x^2)$$

$$(\psi o g)(x)= x^2(2-x^2) \quad \text{es decir } F(x)=(\psi o g o \phi^{-1})(x)$$
$$\text{para } -1<x<1$$

Así

$$(F,0,0)\tilde{-}(g,0,0)$$

EJEMPLO 2.1.5. Para una función $F:R^n \to R^m$ de clase C^∞ en su dominio y $F(x_0)=y$ consideremos (F,x_0,y_0) y $(g,0,0)$ donde $g(x)=F(x+x_0)-F(x_0)$

Por la expresión de $g(x)$ es claramente C^∞.

Definimos $\phi(x)=x+x_0$ y $\psi(y)=y+F(x_0)$ que tambien son C^∞ y veamos que

$$F(x)=(\psi o g o \phi^{-1})(x)$$

$$\phi^{-1}(x)= x-x_0$$

$$g(\phi^{-1}(x))= F(x-x_0+x_0)-F(x_0)=F(x)-F(x_0)$$

aplicando:

$$\psi(g(\phi^{-1}(x))= F(x)-F(x_0)+F(x_0)=F(x)$$

EJEMPLO 2.1.6. $F(x)=x^2$ $\qquad g(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

demostraremos que (F,o,o) y $(g,1,-2/3)$ son C^∞-equivalentes, si definimos $g_1(x)=g(x+1)+2/3 \qquad g_1(0)=0$

Por el ejemplo anterior $(g,1,-2/3)$ y $(g_1,0,0)$ son C^∞-equivalentes

$$g_1(x)=\frac{1}{3}(x+1)^3-(x+1)+2/3=\frac{1}{3}(x^3+2x^2+3x+1)-x-1+2/3=\frac{1}{3}x^3+x^2$$

$$g_1(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2=x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)$$

Si definimos

$$\phi(x)=x\sqrt{\frac{1}{3}x+1}$$

$$\psi(y)=y \quad \text{claramente } \psi \text{ es difeomorfismo de clase } C^\infty$$

Tambien ϕ es un difeomorfismo de clase C^∞ definido de $(-2,\infty)$ $(-2\ 1/3,\infty)$ ya que ϕ esta definida para $x\geq -3$ y $\phi^1(x)>0$ si $x>-2\Rightarrow\phi^{-1}$ existe y es de clase C^∞

$$(F\circ\phi)(x)=F\left(x\sqrt{\frac{1}{3}x+1}\right)=x^2(1/3x+1)$$

$$(\psi\circ g)(x)=x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right) \quad \text{y } \phi(0)=0$$

Así

$$(F,0,0) \text{ y } (g_1,0,0) \text{ son } C^\infty\text{-equivalentes}$$

y como

$$(g_1,0,0) \text{ es } C^\infty\text{-equivalente a } (g,1,-2/3)$$

$$\therefore\ (F,0,0) \text{ y } (g,1,-2/3) \text{ son } C^\infty\text{-equivalentes.}$$

En los ejemplos anteriores de C^∞-equivalencia entre germenes, vemos que la expresión de F(x) es mas sencillas que la de g(x), es decir, que para una clase $\overline{F}(x_0)$ nos interesa trabajar con la expresión mas simple, que sea representante de un gérmen determinado, a tales tipos de expresiones les llamaremos formas normales de germenes.

Sea función $F:R^n \to R^m$, en términos de las funciones coordenas

$$F(x)=(F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,Fm(x))$$

recordemos que la diferencial de F en un punto $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ está dada por la transformación lineal $dF(b): R^n \to R^m$ representada por la matríz

$$A=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(b)\right) \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n \end{array}$$

Definición 2.1.12. El rango de la diferencial dF_b es el rango de la matriz A, y además que el máximo valor que puede tener A es mín $\{n,m\}$

Notación: Diremos que el rango de dF(b) es el rango de F en b.

Definición 2.1.13. Sea $F: R^n \to R^m$ si F tiene rango máximo en b, diremos que b es un punto regular para F. Si F no tiene rango máximo en b, diremos que b es un punto singular de F, o una singularidad de F en b.

Observación 2.1.5. Para $F: R^n \to R$ un punto singular es un punto crítico.

Definición 2.1.14. Sea $F: R^n \to R^m$ F tiene singularidad tipo S_k en b si el rango de F en b es mín $\{n,m\}$ -k

k es llamada la deficiencia de la singularidad.

Observación 2.1.5. Un punto regular tiene deficiencia 0.

Recordemos además que para F: $R^n \to R$

$$H(x_0) \cdot Z = \sum_{i=j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) Z_i Z_j \qquad Z=(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)$$

$$H(x_0) = \frac{\partial^2 F}{x_i \; x_j}(x_0) \quad i,j=1,..n$$

Es llamado la matriz Hessian de F en x_0

Definición 2.1.15. El número de eigenvalores negativos de la matriz es el índice del punto crítico. Cuando hablemos de (F,x_1,y_2) podemos escribir $F(x)$ en x_1 entendiendo que la función F es un representante (no necesariamente la forma normal) de la clase (F,x_1,y_1).

Proposición 2.1.1. Si (F,x_1, y_1) y (g,x_2,y_2) son C^∞ equivalentes entonces F es regular en $x_1 \Longleftrightarrow g$ es regular en x_2

Como (F,x_1,y_1) y (g,x_2,y_2) son C^∞-equivalentes

$$\Longrightarrow \exists_n \begin{array}{l} \text{germenes de} \\ \text{difeomorfismo} \\ \text{de clase } C^\infty \end{array} \quad \begin{array}{l} \phi: U_2 \to U_1 \quad y \quad \psi: V_2 \to V_1 \\ \\ \text{con } \phi(x_2)=x_1 \;\; y \;\; \psi(y_2)=y_1 \end{array}$$

tal que

$$(F o \phi)(x) = (\psi o g)(x) \qquad x \varepsilon U_2$$

derivando:

$$F^1(\phi(x))\phi^1(x) = \psi^1(g(x))g^1(x)$$

tomando $x=x_2$

$$F^1(x_1)\phi^1(x_2) = \psi^1(g(x_2))g^1(x_2)$$

y como $\phi^1(x_2) \neq 0$ y $\psi^1(g(x_2)) \neq 0$ (ya que son difeomorfismos)

$\Longrightarrow$ F es regular en $x_1 \Longleftrightarrow g$ es regular en x_2.

Antes de ver el teorema que nos caracteriza a las funciones en puntos regulares recordemos el teorema del Rango.

TEOREMA DEL RANGO 2.1.1. Sea $F:A \to R^m$ $A \subset R^n$, abierto vecindad de a $a \in A \subset R^n$, F de clase C^∞ tal que el rango de $F^1(x)=p$ p fijo entonces

1). Existe U A abierto y un difeomorfismo de clase C^∞ $u:U \to I^n = \{|x_i|<1 \quad 1\le i \le n$

2). $V \subset F(U)$ V abierto de $b=F(a)$ y un difeomorfismo de clase C^∞

$$v: I_m = \{|y_i|<1 \quad 1\le i\le m\} \longrightarrow V$$

tal que

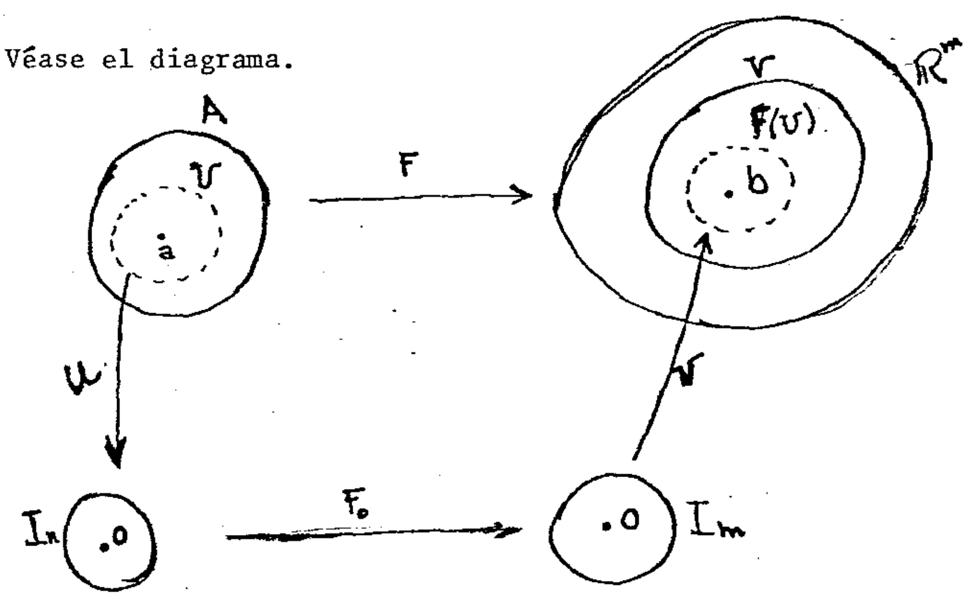
$$F(x) = (v \circ F_0 \circ u)(x)$$

donde

$$F_0 = F_0 : I_n \longrightarrow I_m$$

$$F_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0,0,0,\dots 0)$$

Véase el diagrama.



Demostración: Supongamos $a = 0 \varepsilon R^n$ y $F(a)=0\varepsilon R^m$ y que $F^1(x)$ tiene rango p $\forall x \varepsilon V(a)$

$$\text{que } F^1(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial Fm}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial Fm}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ tenga rango p significa}$$

que existe una submatriz pxp su determinante es distinta de 0 y que cualquier submatríz cuadrada de tamaño mayor que pxp tiene determinante igual a 0.

Sabemos que permutando renglones y columnas de la matriz se puede llevar el bloque pxp de det $\neq 0$ en la esquina superior derecha, así podemos suponer que

$$p = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{x} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{x_p} \\ \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial F_p}{\partial x_p} \end{bmatrix} \text{tiene det } p \neq 0$$

Sea u: V(0) $R^n \rightarrow R^n$ definida por

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (F_1(x), \ldots, F_p(x), x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

para $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Entonces:

$$u^1(x) = \left[\begin{array}{c|c} p & ? \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \quad \text{que tiene det} \neq 0 \ \forall x \varepsilon V(0)$$

Por el teorema de la función inversa u es invertible en una vecindad de 0.

Sea $\overset{-1}{u}: I^n \ R^n \rightarrow R$ la inversa de u. Si consideramos que

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = u(x_1, x_2, \ldots x_n) = (F_1(x), \ldots, F_p(x), x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

tenemos que

$$Fou^{-1}: I^n \quad R^n \to R^m$$

tiene la expresión:

$$Fou^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1, y_2, \dots, y_p \phi_{p+1}(y), \dots, \phi_m(y))$$

$$(y_1, y_2, y_3 \dots, y_n) \varepsilon \; I^n$$

así la diferencial de Fou^{-1} tiene la expresión

$$D(Fou^{-1}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \frac{\partial\phi_{p+1}}{\partial y_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_{p+1}}{\partial y_n} \\ & ? & & & & \\ & & & \frac{\partial\phi_m}{\partial y_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_m}{\partial y_n} \end{array}\right]$$

y como el rango de ésta matriz debe ser p, tenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_{p+1}}{\partial y_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_{p+1}}{\partial y_n} \\ & & \\ \frac{\partial\phi_m}{\partial y_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_m}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \end{bmatrix}$$

de donde concluimos que las funciones $\phi_{p+1}, \phi_{p+2}, \dots \phi_m$ no dependen de las variables $y_{p+1}, \dots y_n$

Entonces podemos definir

$$v^{-1}: R^m \to V(0) \qquad \text{por}$$

$$v^{-1}(x_1, x_2, \dots x_p, x_{p+1}, \dots x_m) = (x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1} - \phi_{p+1}(x) \dots, x_m - \phi_m(x))$$

la diferencial de v^{-1} está dada por:

$$Dv^{-1}(x)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & ? & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]$$

que tiene determinante $\neq 0$ y por el teorema de la función inversa existe $v: I^m \to V \in R^n$ que es difeomorfismo, y se puede obtener facilmente el resultado del teorema.

Teorema 2.1.2. Si b es un punto regular de $F: R^n \to R^p$ entonces el germen de F en b es analíticamente (topológicamente) equivalente a dF_b el cual a su vez es equivalente a los mapeos lineales.

$$n \geq p \qquad y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2, \ldots \; y_p = x_p$$

$$n < p \qquad y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n, \; y_{n+1} = 0, \ldots, \; y_p = 0$$

Demostración: Supongamos $n \geq p$; entonces tenemos que el rango de F en b es p.

Traduciendo el teorema del rango tenemos: $b \in R^n$ $A \subset R^n$, $V \subset R^p$

Existen: U, V; μ ∋

$F(x) = (V \circ F_0 \circ \mu)(x)$ donde $F_0(x_1, x_p; x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ es decir $F(x)$ y $F_0(x)$ son C^∞-equivalentes.

$$\begin{tikzcd} U \ni b,\; A \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mu"] & f(b)\; V \subset \mathbb{R}^p \\ I^n \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_0"] & I^p \subset \mathbb{R}^p \arrow[u, "\nu"] \end{tikzcd}$$

Ahora, por la expresión de $F_0(x)$ lo podemos representar por la matriz

$$B=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

Sea $A=(a_{ij})$ de rango p que representa a la diferencial de F en b por un resultado de algebra lineal. Tenemos que

$A \simeq B \Longleftrightarrow A = PBQ$ donde P,Q son regulares

es decir, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{F_0=B} & I^m \\ u_1=Q \downarrow & & \uparrow V_1=P \\ R^n & \xrightarrow[DF_0=A]{} & R^n \end{array}$$

$F_0(x) = (V_1 \circ DF_0 \circ u_1)(x)$

donde u_1 y V_1 son difeomorfismos representados por las matrices Q, P regulares, es decir que F_0 y DF_0 son C^∞-equivalentes.

Así: hemos demostrado que F y F_0 son C^∞-equivalentes por el teorema del rango y F_0 y DF_b son C^∞-equivalentes por algebra lineal

$\therefore$ F y DF_b son C^∞-equivalentes cuando b es punto regular.

En el caso n<p, la demostración es similar; aquí

$$F_0(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_1, x_2, \ldots x_n, 0, \ldots, 0)$$

y la matriz que representa a F_0 es de la forma:

$$p\left\{\begin{array}{c} \overbrace{}^{n} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \end{array}\right] \end{array}\right\} n$$

y el rango de F en b es mín $\{n,p\} = n$

y todo el desarrollo es semejante.

Proposición 2.1.2. Sea $(F,0,0)$ y $(g,0,0)$ C equivalentes entonces si 0 es una singularidad tipo S_k de F, entonces g tambien tiene singularidad tipo S_k en 0.

Como $(F,0,0)$ y $(g,0,0)$ son C^∞ equivalentes, existen gérmenes de difeomorfismos de clase C^∞

$$\phi: U_2 \rightarrow U \qquad y \qquad \psi: V_2 \rightarrow V_1$$
$$\text{con } \phi(0)=0 \qquad \psi(0)=0$$

tal que

$$(F o \phi)(x)=(\psi o g)(x) \qquad x \in U_2$$

derivando

$$F^1(\phi(x))\phi^1(x)=\psi^1(g(x)g^1(x)$$

tomando x=0

$$F^1(0).\phi^1(0)=\psi^1(0)g^1(0)$$

y como $\phi^1(0)$ y $\psi^1(0)$ son difeomorfismos; están representados por matrices no singulares, llamémosles Q^{-1} y P respectivamente. $F^1(0)$ está representada por una matríz de rango: min $\{n,p\}$ $-k$ llamémosle A.
Y $g^1(0)$ está representada por una matríz B. Así A=P.B.Q donde P y Q son no-singulares es decir A y B son equivalentes, es decir que el rango de A= rango de B (véase número 6 de la bibliografía indicada); y esto significa que F y g tienen el mismo tipo de singularidad S_k en 0.

2.- *FORMAS CUADRATICAS Y CLASIFICACIONES DE* $F:R^n \to R$ *EN PUNTOS CRITICOS NO-DEGENERADOS.*

Proposición 2.2.1. Sea $F: R^n \to R$ de clase C^∞ en una vecindad de

$V(0)$ y $F(0)=0$ entonces

$$F(x)= \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$$

para algunas funciones g_i de clase C^∞ definidas en $V(0)$ con

$$g\ (0)= \frac{\partial F}{\partial x_i}\ (0)$$

Demostración: Sea $g(t)=F(tx)$ $\quad g(1)=F(x) \quad g(0)=F(0)=0$
derivando y usando la regla de la cadena

$$g^1(t)=\nabla F(tx).x$$

o en términos de los componentes:

$$g^1(t)= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(tx), \frac{\partial F}{\partial x_2}(tx), \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\ (tx)\right)(x_1,x_2,\ldots x_n)$$

así

$$g^1(t)= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx)$$

integrando

$$g(1)-g(0)=\int_0^1 g^1(t)dt=\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial F}{\partial x_i}(tx)dt=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 x_i\frac{\partial F}{\partial x_i}(tx)dt$$

$$F(x)-F(0)= \sum_{i=1}^{n} x_i\int_0^1\frac{\partial F}{\partial x_i}(tx)dt$$

definimos

$$g_i(x)= \int_0^1\frac{\partial F}{\partial x_i}\ (tx)dt$$

y obtenemos

$$F(x)= \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$$

Proposición 2.2.2. Sea $F: R^n \to R$ con $F(0)=0$ y 0 un punto crítico no degenerado de F, entonces

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)x_i x_j = \qquad x \varepsilon V(0)$$

donde

$$a_{ij}(x)=\int_0^1 (1-t)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\ (tx)dt$$

es decir

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\ (tx)dt\right)x_i x_j$$

Demostración: Sea $F_1(t)=F(tx)$ $\quad F: R \to R \quad$ $F_1'(t)=\nabla F(tx).x$

$F_1(1)=F(x)$ $\qquad F''(t)=F''(tx).x.x$

$F_1(0)=F(0)=0$

Aplicando el *Teorema de Taylor* a F_1 alrededor de 0 con t=1 yx=0 hasta wl orden 2, tenemos:

$$F_1(1)-F_1(0)-1/1!F_1'(0)-1/2!F_1''(0)=\frac{1}{(2-1)!}\int_0^1 (1-t)^{2-1}\left|F''(t)-F''(0)\right|dt$$

y como $F_1(1)=F(x)$ $\quad F(0)=0$ $\quad F_1'(0)=\nabla F(0).x\ 0$

$$F_1''(0)=\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\ (0)x_i x_j$$

sustituyendo obtenemos:

$$F(x)-1/2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(tx)x_i x_j - \Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j\right)dt$$

$$=\int_0^1 (1-t)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(tx)x_i x_j dt-\int_0^1 (1-t)\Sigma\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j\ dt$$

Es decir:

$$F(x)-1/2\Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(0)x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_0^1(1-t)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(tx)dt\right)x_ix_j-\Sigma\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(0)x_ix_j\int_0^1(1-t)dt$$

pero

$$\int_0^1(1-t)dt=1/2$$

$$F(x)-1/2\Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(0)x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_0^1(1-t)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(tx)dt\right)x_ix_j-\ 1/2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(0)x_ix_j$$

de donde

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_0^1(1-t)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(tx)dt\right)x_ix_j$$

es decir

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)x_ix_j$$

Dado que una función en un punto crítico no degenerado toma la forma anterior, veremos un procedimiento para poderla expresar como una suma de cuadrados o forma diagonalizada.

Definición 2.2.1. Una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de 2do. grado en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y siempre se puede representar como:

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad \text{donde } a_{ij}=a_{ij} \quad i,j=1,2,\ldots n$$

donde $A=(a_{ij})$ es una matríz simétrica

$$F(x)=x^tAx$$

Observación 2.2.1. Estamos suponiendo que la matríz A que representa a la forma cuadrática, es simétrica, ya que dada una expresión de la forma x^tBx, donde B no es simétrica, siempre es posible expresarla como x^tAx donde A es simétrica $A= 1/2(B+B^t)$

Demostración: Como $x^tBx \in R \Rightarrow (x^tBx)^t = x^tBx$ (1)
además $(x^tBx)^t = x^tB^tx$ (2)

Así:

$$X^tBx = 1/2(x^tBx)+ 1/2(x^tBx) \text{ usando (1)}$$

$$= 1/2(x^tBx)+ 1/2(x^tBx)^t \text{ usando (2)}$$

$$= 1/2(x^tBx) + 1/2(x^tB^tx)$$

$$= 1/2(x^tBx+ x^tB^tx)$$

$$= 1/2(x^t(B+B^t)x)$$

$$= x^t\left|1/2(B+B^t)\right|x$$

$$= x^tAx$$

Y claramente A es simétrica.

Si $x_i = \sum_{k=1}^{n} T_{ik}y_k$ $i=1,2,\ldots n$ es decir

$$x= Ty$$

donde

$$x=(x_1,x_2,\ldots x_n) \qquad y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

y T la matríz de transformación: $T=(t_{ik})$ $i,k=1,2,\ldots n$

Sustituyendo en la expresión para x $F(x)=x^tAx$, tenemos:

$$F(x)= y^tT^tATy= y^t\tilde{A}y= F(y)$$

donde $\tilde{A}= T^tAT$

Esta fórmula expresa los coeficientes de $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ik})$ de la forma transformada en término de la matríz original

$$F(y)=\sum_{i,k=1}^{n}\tilde{a}_{ik}y_iy_k$$

que es una forma equivalente de escribir a la forma cuadrática, ya que recordemos que A y B son congruentes si $B=P^tAP$, donde P es una matríz no singular.

En nuestro caso A y $\tilde{A}$ son congruentes porque $\tilde{A}=T^tAT$ y T es no singular.

Definición 2.2.2. El rango de la forma cuadrática es el rango de A.

Sea

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

veamos el procedimiento para diagonalizarla. Consideremos dos casos:

a) $a_{ii}=0\ \forall i$, es decir, no contiene términos al cuadrado, y como F no es identicamente cero, existirá algún $a_{ii}=0$ $a_{jj}=0$ pero $a_{ij}\neq 0$

Por simplicidad supongamos que $a_{12}\neq 0$ y tomemos

$$x_1=Z_1+Z_2$$
$$x_2=Z_1-Z_2$$
$$x_i=Z_i \quad i=3,..n$$

Así en la expresión $F(x)=2\sum_{i<j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ donde $2a_{ij}=b_{ij}$

$$=b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+\ldots+b_{1n}x_1x_n+b_{23}x_2x_3+\ldots+b_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$$

$$=b_{12}(Z_1^2-Z_2^2)+b_{13}(Z_1+Z_2)Z_3+\ldots+b_{n-1\,n}Z_{n-1}Z_n$$

F(Z) es una expresión que sí tiene términos al cuadrado .

Veamos ahora el caso en el que:

b) $F(x)=\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ si tiene términos al cuadrado

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^2 + 2 \sum_{i<j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$=a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots 2a_{1n}x_1x_n$$

$$+2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

Supongamos que $a_{ii} \neq 0$ para algún $1 \leq i \leq n$. Por simplicidad tomemos $a_n \neq 0$ $a_n > 0$. Así:

$$F(x)=a_{11}\left| x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}} x_1x_2 + \ldots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}} x_1x_n \right| + F_1(x_2,\ldots x_n)$$

donde F_1 es una forma cuadrática en las variables $x_2,\ldots,x_n$

Si tomamos

$$Z_1 = \sqrt{a_{11}}\, x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}\, xj$$

$$Z_i = x_i \qquad i=2,3,\ldots n$$

tenemos:

$$F(x)=F(z)= Z^2 + F_1'(Z_2,\ldots,Z_n)$$

ya que:

$$F(x)=a_{11}x_1\left| x_1 + \frac{2a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}} x_n \right| + F_1(x_2,\ldots,x_n)$$

y sustituyendo

$$x_1 = 1/\sqrt{a_n}\left| Z_1 - \frac{a_{1j}}{a_{11}} Z_j \right| = \frac{Z_1}{\sqrt{a_{11}}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} Z_j$$

Obtenemos:

$$F(Z)=a_{11}\left[\frac{Z_1}{\sqrt{a_{11}}}-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}Z_j}{a_{11}}\right]\left[\frac{Z_1}{\sqrt{a_{11}}}-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}Z_j}{a_{11}}+2\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}Z_j}{a_{11}}Z_j\right]+F_1(Z_1,..Z_n$$

$$=a_{11}\left[\frac{Z_1}{\sqrt{a_{11}}}-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}Z_j\right]\left[\frac{Z_1}{\sqrt{a_{11}}}+\sum_{J=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}Z_j\right]+F_1(Z_2,..Z_n)$$

$$=a_{11}\left\{\frac{Z_1^2}{a_{11}}-\left[\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}Z_j\right]^2\right\}+F_1(Z_2,...,Z_n)$$

$$=Z_1^2-\frac{1}{a_{11}}\left[\sum_{j=2}^{n}a_{1j}Z_j\right]^2+F_1(Z_2,...Z_n)$$

y reordenando términos tenemos:

$$F(Z)=Z_1^2+F_1'(Z_2,...Z_n)$$

Podemos repetir el procedimiento a la forma cuadrática residual que solo depende de las variables $Z_1,...,Z_n$ como forma cuadrática, si ésta contiene términos al cuadrado, si no, podemos repetir el procedimiento del inciso a) y lograr que aparezcan en la forma cuadrática resultante términos al cuadrado.

Supongamos pués que existen $Z_1,..., Z_n$ tal que

$$F(Z)=\pm Z_1^2\pm Z_2^2\pm...\pm Z_{r-1}^2+\sum_{i,j}{}_r H_{ij}(Z_1,..Z_n)Z_iZ_j$$

donde H_{ij} es simétrica y que después de n-r+1 cambios, $H_{rr}(0)\neq 0$
sea $g(Z_1,...Z_n)= H_{rr}(Z)$ y tomemos $V_i=Z_i \quad i\neq r$ y

$$Vr=\sqrt{H_{rr}(Z)}\;Z_r+\sum_{i>r}\frac{H_{ir}(Z)}{H_{rr}(Z)}Z_i$$

Por el procedimiento anterior obtendremos:

$$F(V)= \sum_{i\leq r} \pm (V_i)+ \sum_{i,j>r}^{n} H'_{ij}(V,\ldots V_n)\, V_i V_j$$

Así, por alternaciones de los dos procedimientos, el proceso terminará cuando después de haber completado algún cuadrado, no haya residuo alguno, y es de esperarse ya que los residuos o formas cuadráticas residuales en cada paso se reducen el número de variables.

De esta forma llegamos a:

$$F(y)= y_1^2 + y_2^2 +\ldots+ y_p^2 -(y_{p+1}^2)-(y_{p+2}^2)- \ldots-(y^2)$$

Sólo nos falta probar:

Proposición 2.2.3. El rango de la forma escrita en forma diagonal es el mismo que rango de la forma escrita en la forma original.

Proposición 2.2.3. El número de términos positivos en la diagonal es el mismo independientemente de cuántas maneras pueda diagonalizarse.

Demostremos la proposición 2.2.3. Si $F(x)= x^t Ax$ y es transformada en una matríz no singular T como en la introducción tenemos:

$$F(y)= y^t \tilde{A} y$$

donde

$$\tilde{A}= T^t AT$$

$$\text{Si det } \tilde{A}=|\tilde{A}| \quad \text{y det } T=|T|\neq 0 \quad \text{y det } A=|A|$$

tenemos

$$\det \tilde{A}=\det(T^t AT)$$

$$=(\det T)(\det A)(\det T^t)$$

$$|\tilde{A}|=|T|^2|A|$$

Es decir que el rango $\tilde{A}$= rango de A

Además si $F(x)=F(y)=\sum_{i=1}^{r} a_i y_i$ expresión en forma diagonal.

tendremos que:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} a & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots 0 \end{bmatrix}$$

rango de $\tilde{A}$= número de cuadrados de la forma cuadrática en su forma diagonalizada.

Demostremos la proposición 2.2.4. (*Ley de la inercia para formas cuadráticas*).

Una forma cuadrática real reducida a una suma de cuadrados:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{r} a_i x_i$$

el número de cuadrados positivos o negativos es independiente de la elección de la representación.

Demostración: Supongamos lo contrario, que una forma cuadrática real

$$a_1 x_1^2+a_2 x_2^2+\ldots+a_s x_s^2-a_{s+1} x_{s+1}^2-\ldots-a_r x_r \qquad a_i>0$$

se transforma mediante un cambio de variables

$$x_i=\sum_{i=1}^{r} T_{ki} y_i$$

a la forma diagonal

$$b_1 y_1^2+\ldots+b_t y_t^2-b_{t+1} y_{t+1}^2-\ldots-b_r y_r^2 \qquad b_i>0$$

pero con $s<t$. Entonces:

$$a_1 x_1^2+a_2 x_2^2+\ldots+a_s x_s-a_{s+1} x_{s+2}^2-\ldots-a_r x_r^2=b_1 y_1^2+\ldots+b_t y_t^2-\ldots b_r y_r^2$$

que podemos escribir:

$$a_1x_1^2+\ldots+a_sx_s^2+b_{t+1}y_{t+1}^2+\ldots+b_ry_r^2=b_1y_1^2+\ldots+b_ty_t^2+a_{s+1}x_{s+1}^2+\ldots+a_rx_r^2 \quad (*)$$

y tomemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ll} x_1=\Sigma T_{k_1}y_k=0 & y_{t+1}=0\\ x_2=\Sigma T_{k_2}y_k=0 & y_{t+2}=0\\ \vdots & \vdots\\ x_s=\Sigma T_{ks}y_k=0 & y_n=0 \end{array}$$

es un sistema en las variables $y_1, y_2, \ldots y_n$ donde el número de ecuaciones es:

$$s+(n-t)=n-(t-s)$$

menor que el número de variables ya que s t.

De esta manera el sistema debe tener al menos una solución no trivial (no cero), digamos:

$$y_1=\alpha_1, \ldots y_t=\alpha_t \qquad y_{t+1}=0, \ldots, y_n=0$$

y sustituyéndola en (*) tenemos

$$b_1\alpha_1^2+\ldots+b_t\alpha_t^2+a_{s+1}x_{s+1}^2+\ldots+a_rx_r^2=0 \qquad (1)$$

los $b_i \geq 0$ y $a_j > 0$ y α_i^2, x_j son no negativos; pero de (1) resulta que $\alpha_i=0$ esto contradice que no era solución trivial

$$\therefore \quad s=t$$

Definición: La diferencia entre p= cuadrados positivos y n=cuadrados negativos. en la representación de la forma cuadrática en forma diagonal, se llama la *signatura* s =p-n

Observación: El rango r y la signatura s determinan unívocamente a p y n, ya que

$$r = p+n \qquad s = p-n$$

y a partir del resultado anterior tenemos: toda matríz real simétrica A es congruente a la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots\ 0 \end{bmatrix}$$

(con unos, menos unos y cero en la diagonal.)

Teorema 2.2.1. Si b es punto crítico no degenerado de índice r para $F: R^n \to R$ entonces $(F,b,F(b)$ es analíticamente equivalente a $(H_bF,b,H_bF(b))$ el cual a su vez es analíticamente equivalente a la forma normal.

$$F(Z) = -Z_1^2 - Z_2^2 - \ldots - Z_r^2 + Z_{r+1}^2 + \ldots + Z_n^2$$

Demostración: Supongamos $b=0 \varepsilon R^n$ y $F(b)=0$, como $F \varepsilon C^\infty$ por la proposición 2.2.1.

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(x) \qquad \forall\ x \varepsilon V(0)$$

y como suponemos que 0 es punto crítico

$$g_j(0) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(0) = 0$$

aplicando la misma proposición a g_j para cada j tenemos que existen $h_{ij}(x)$ tal que

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij}(x) \quad \text{para ciertas funciones } h_{ij}.$$

Podemos suponer que $h_{ij} = h_{ji}$ y podemos escribir

$$\overline{h}_{ij} = 1/2(h_{ij} + h_{ji})$$

y tenemos $\overline{h}_{ij}=\overline{h}_{ji}$ y

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \overline{h}_{ij}(x)$$

donde

$$\overline{h}_{ij}(0)=1/2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$$

que por ser0 no degenerado la matríz es no singular.

Así, tenemos que F está expresada como una forma cuadrática en las variables $x_1,\ldots,x_n$. Haciendo uso de transformación en las variables, podemos usar el método de Lagrange para reducirla a una suma de cuadrados, y dado que tanto el rango como la signatura se conservan (Ley de inercia para formas cuadráticas), obtenemos:

$$F(Z)=-Z_1^2,-Z_2^2-\ldots-Z_r^2+Z_{r+1}^2+\ldots+Z_n^2$$

Para ver que

$$H_b F(x)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)$$

es equivalente a la última expresión de F, observemos que la matríz que define a la forma cuadrática del Hessian es simétrica y como 0 es punto crítico no degenerado $\Rightarrow$ la matriz es invertible $\Rightarrow$, existe un cambio de variables que transforma a A a la forma

$$I=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

donde λ_i son los eigenvalores y como se preserva el índice y la signatura, esta es equivalente a $\begin{bmatrix}-1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}$ así: $H_b F(Z) \simeq F(Z)$.

CAPITULO III

1. PRELIMINARES.

Para funciones F: $R^2 \to R^2$ si

$$F(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$$

si

$$V=(V_1,V_2) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x}(p)=u_x \quad \frac{\partial v}{\partial y}(p)=v_y$$

y usando la notación de la definición 2.1.1. y la observación 2.1.1. tenemos que:

$$\nabla_V F(p)=V_1(u_x,v_x)+V_2(u_y,v_y)$$

$$=(V_1u_x+V_2u_y,\ V_1v_x+V_2v_y)$$

$$=\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Definición 3.1.1. Si consideramos para cada p fijo a $\nabla_V F(p)$ como una función $F(p): R^2 \to R^2$

$$_V F(p)=(V_1u_x+V_2u_y\ ,\ V_1v_x+V_2v_y)$$

podemos hablar de la derivada respecto a $W=(w_1,w_2)$ definiéndola como:

$$\nabla_W\nabla_V F(p)=w_1\left[(V_1u_x+V_2u_y)_x\ ,(V_1v_x+V_2v_y)_x\right]+w_2\left[(V_1u_x+V_2u_x)_y\ ,(V_1v_x+V_2v_y)_y\right]$$

Observación 3.1.1. Si $\phi: R \to R^2$ es una parametrización de una curva en R^2, el vector tangente está dado por

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \nabla\phi(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h)_1 - \phi(t)}{h} = (\phi_1^1(t), \phi_2^1(t))$$

Observación 3.1.2. Si $F: R^2 \to R^2$ es C^2 y $\phi: R \to R^2$ una parametrización de una curva en R^2 con

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = V \neq 0$$

entonces, para

$$g(t) = F(\phi(t)) = (F\phi)(t)$$

tenemos por la regla de la cadena

$$g^1(t) = \nabla F(\phi(t))\phi^1(t)$$

es decir

$$\frac{d(F\phi)(t)}{dt} = \nabla_V F(p)$$

y $\qquad\qquad$ si $p = \phi(t)$.

$$\frac{d^2}{dt^2}(F\phi)(t) = \nabla_V \nabla_V F(p)$$

LAS SINGULARIDADES

Definición 3.1.2. Sea $F: R^2 \to R^2$ de clase C^r decimos que p es un punto regular de F si $\forall$ $V \neq (0,0)$

$$\nabla_V F(p) \neq (0,0)$$

y p es un punto singular si $\exists V\neq 0$ tal que

$$\nabla_V F(p)=(0,0)$$

así, si $F(x,y)=(u,V)$ y $V=(V_1,V_2)\neq(0,0)$ arbitrario

tenemos que: $$\nabla_V F(p)=V_1(u_x,V_x)+V_2(u_y,V_y)\neq (0,0)$$

entonces p es regular

y si $\exists\ V=(V_1,V_2)\neq(0,0)$ para V, en alguna dirección

se tiene que $$\nabla_V F(p)=V_1(u_x,V_x)+V_2(u_y,V_y)=(0,0)$$

$$=(V_1u_x+V_2u_y\ ,V_1V_x+V_2V_y)=(0,0)$$

significa que

$$V_1u_x+V_2u_y=0$$

$$V_1V_x+V_2V_y=0 \qquad (1)$$

que escrito en otra forma:

$$\nabla_V F(p)=\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ V_x & V_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces p es singular.

pero veamos otra forma de distinguir el punto regular del singular.

Si consideramos la función

$$J(p):\ R^2\to R \qquad J(p)=\ u_xV_y-u_yV_x$$

$J(p)$ es la función determinante. Si $J(p)\neq 0$ el sistema (1) tiene la solución $(V_1,V_2)=(0,0)$ es decir:

$$\nabla_V F(p)=(0,0)\Longleftrightarrow\ (V_1,V_2)=(0,0)$$

a) si $J(p)=0$ y en p sucede que

$$u_x=V_x=u_y=V_y=0 \Rightarrow \forall (V_1,V_2)\varepsilon\ R^2$$

es la solución del sistema (1);

b) si no todas las parciales se anulan en p

$$\Longrightarrow \quad (u_x,\ V_x)(u_y,\ V_y) \text{ son L.D.}$$

es decir, que existen V_1, V_2 no idénticamente cero ambos, tal que

$$V_1(u_x,V_x)+V_2(u_y,V_y)=(0,0)$$

De cualquier forma, si $J(p)=0$

$$\Longrightarrow \quad (V_1V_2)\neq(0,0)$$

tal que

$$\nabla_V F(p)=(0,0)$$

Así, podemos caracterizar a los puntos regulares o singulares a través de la función determinante.

Observación 3.1.3. Para $F: R^2\rightarrow R^2$ sea $J(p): R^2\rightarrow R$ la función determinante

$$J(p)=u_xV_y-u_xV_x$$

Entonces

un punto p es regular si $J(p)\neq 0$

y es punto singular si $J(p)=0$

Definición 3.1.3. Sea $F\varepsilon C^2$; p es un punto bueno si

$$J(p)\neq 0 \quad ó \quad \nabla J(p)\neq 0$$

donde

$$\nabla J(p)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(u_x V_y - u_y V_x),\ \frac{\partial}{\partial y}(u_x V_y - u_y V_x)\right)$$

Observación 3.1.4. Si llamamos a $\frac{\partial}{\partial x}(u_x \cdot V_y - u_y V_x) = J_x(p)$ y a

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x \cdot V_y - u_y V_x) = J_y(p)$$

$$\nabla J(p) \neq 0 \Longleftrightarrow J_x(p) \neq 0 \text{ ó } J_y(p) \neq 0$$

Observación 3.1.5. p es bueno si p es punto regular ó $\nabla J(p) \neq (0,0)$

Definición 3.1.4. F es buena si $\forall$ $p \varepsilon D_F$, p es bueno.

Proposición 3.1.1. Sea F buena en R entonces $\forall$ $p \varepsilon R$ el espacio imagen H(p) de $\nabla F(p)$, es de dimensión 2 o 1 dependiendo de si p es regular o singular, respectivamente.

Demostración: Si p es punto regular, como $J(p) \neq 0$ tenemos

$$\nabla_V F(p) = (0,0) \Longleftrightarrow (V_1, V_2) = (0,0)$$

por un resultado de álgebra lineal para espacios de dimensión finita, tenemos:

$$\dim\ R^2 = \dim(\text{kernel}) + \dim(H(p))$$

es decir

$$2 = 0 + \dim\ (H(p))$$

así

$$\dim(H(p)) = 2$$

Ahora, Si p es punto singular, $J(p)=0$

$$\nabla_V F(p) = (0,0)$$

para algún $V\neq 0 \Longrightarrow \dim(\text{Kernel})>0$ y como

$$2=\dim(\text{kemel})+\dim H(p)$$

$$2=1 \text{ ó } 2+\dim(H(p))$$

así

$$\dim(H(p))\leq 1$$

si suponemos $\dim(H(p))=0 \quad \dim(\text{Kernel})=2$

es decir el sistema (1) tiene por solución todo R^2

$$\Longrightarrow u_x=V_x=V_y=u_y=0 \text{ en } p, \text{ \underline{pero} como}$$

$$J(p)=0$$

al calcular

$$\nabla J(p)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(u_xV_y-u_yV_x),\ \frac{\partial}{\partial y}(u_xV_y-u_yV_x)\right)$$

tendríamos que

$$\nabla J(p)=0 \quad \text{es decir}$$

$$J_x(p)=0 \qquad J_y(p)=0$$

lo cual contradice que F es buena; así $\dim(H(p))=1$.

Proposición 3.1.2. Sea F buena en R, entonces los puntos singulares de F forman una curva analítica en R.

Demostración: Como F es buena

$$J(p)\neq 0 \text{ ó } \nabla J(p)\neq 0$$

si p es punto singular

$$J(p)=0 \Longrightarrow \nabla J(p)\neq 0$$

como $J: R^2 \to R$ $J: R \times R$ R diferenciable en $p \varepsilon R^2$ y $\nabla J(p) \neq 0$ por el teorema de la función implícita

existe $A \subset R$ y $B \subset R$ tal que

$\forall$ $x \varepsilon A$ existe $g(x) \varepsilon B$ tal que

$J(x,g(x))=0$

y $g(x)$ es diferenciable.

Definición 3.1.5. A la curva analítica C dada por $g(x)$ le llamaremos el dobles general de F (la curva pasa por p)

Definición 3.1.6. Sea $F: R^2 \to R^2$ buena, de clase C^3, tomemos p punto singular y sea $\phi(t)$ una parametrización 2-analítica de el doblés general C de F que pasa por p, con $\phi(0)=p$

Decimos que p es un punto doblés de F si

$$\frac{d(F.\phi)(t)}{dt} \neq 0 \text{ en } p$$

Decimos que p es un punto cúspide de F si

$$\frac{d(F\phi)(t)}{dt} = 0 \quad y \quad \frac{d^2(F.\phi)(t)}{dt^2} \neq 0 \quad \text{en } p.$$

Observación 3.1.6. Si la parametrización $\phi(t)$ de el doblés general de F cumple con

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = V \neq 0$$

y suponiendo F buena, por la observación 3.1.2.

$$p \text{ es un punto doblés} \Leftrightarrow \nabla_V F(p) \neq (0,0) \text{ y}$$

$$p \text{ es un punto cúspide} \Longleftrightarrow \nabla_V F(p) = (0,0) \text{ y } \nabla_V \nabla_V F(p) \neq (0,0)$$

Observación 3.1.7. Para $F: R^2 \to R^2$ $\quad F(x,y)=(u,v)$

como

$$\nabla_V F(p) = V_1 \frac{\partial F}{\partial x}(p) + V_2 \frac{\partial F}{\partial y}(p)$$

si consideramos

$$J(p) = u_x v_y - u_y v_x$$

$$\nabla J(p) = (J_x(p),\ J_y(p))$$

Si tomamos

$$V(p) = (-J_y(p),\ J_x(p))$$

$$\nabla_{V(p)} J(p) = -J_y(p) \cdot J_x(p) + J_x(p)\ J_y(p) = 0$$

en cada punto singular; aquí en todos los puntos del doblés general, V(p) es tangente al doblés general.

Definición 3.1.7. Un punto p es excelente si es punto regular, punto doblés ó punto cúspide.

Definición 3.1.8. Una función es excelente si $\forall\ p \in D_F$ p es excelente.

2. ALGUNOS SISTEMAS DE COORDENADAS ESPECIALES.

Sea $F: R^2 \to R^2$ bueno, y p un punto singular de F, entonces existe un vector V_1 que es mapeado a 0 por $\nabla F(p)$; sea el eje x la dirección de éste vector, los vectores unitarios en la dirección del eje y son mapeados en un vector$\neq(0,0)$Sea éste vector unitario en la V-dirección. Entonces tenemos:

$$J(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ya que si

$$V_1=(x,0) \qquad \nabla_{V_1} F(p)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y si

$$V_2=(0,y) \qquad \nabla_{V_2} F(p)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \neq (0,0)$$

Estas ecuaciones: $u_x=V_x=u_y=0$ y $V_y=1$ caracterizan el sistema de coordenas con las propiedades antes descritas. Sea $V=(-J_y(p),\ J_x(p))$ veremos condiciones bajo las cuales p es un punto dobles o un punto cúspide.

Sean $F(x,y)=(u,V) \qquad J(p)=u_xV_y - u_yV_x$

Si $u_x=0=V_x=u_y \quad V_y=1 \quad V=(-J_y,J_x)$

$$\nabla J(p)=(u_{xx}V_y+u_xV_{yx}-u_{yx}V_x-u_yV_{xx},\ u_{xy}V_y+u_xV_{yy}-u_{yy}V_x-u_yV_{xy})$$

$$=(J_x,\ J_y)=(u_{xx},\ u_{xy})$$

$$\nabla_V F(p)= -J_y(u_x,V_x)+J_x(u_y,\ V_y)$$

$$\nabla_V F(p)= (-J_yu_x+J_xu_y,\ -J_yV_x+J_xV_y)$$

$$\nabla_V\nabla_V F(p) = -J_y\left[(-J_y u_x + J_x u_y)_x, (-J_y V_x + J_x V_y)_x\right] + J_x\left[(-J_y u_x + J_x u_Y)_y, (-J_y V_x + J_x V_y)_y\right]$$

$$= \Big((-J_y(-J_y u_x + J_x u_y)_x + J_x(-J_y u_x + J_x u_y)_y,\ -J_y(-J_y V_x + J_x V_y)_x + J_x(-J_y V_x + J_x V_y)_y\Big)$$

$$\nabla_V F(p) = (-u_{xy}u_x + u_{xx}u_y,\ -u_{xy}V_x + u_{xx}V_y) = (0, u_{xx});$$ así tenemos:

<u>p es un punto dobles, si $(0,u_{xx}) \neq (0,0)$ ie $J_x(p) = u_{xx} \neq 0$</u>

Ahora supongamos que $\nabla_V F(p) = 0 \Longrightarrow u_{xx} = 0 = J_x(p)$

$$\nabla_V\nabla_V F(p) \neq (0,0)$$

$$\nabla_V\nabla_V F(p) = (-J_y(-J_y u_x + J_x u_y)_x,\ -J_y(-J_y V_x + J_x V_y)_x\ )$$

Observamos que:

$$-J_y(-J_y u_x + J_x u_y)_x = -J_y\left[-J_{yx}u_x - J_y u_{xx} + J_{xx}u_y + J_x u_{yx}\right]$$

Pero $u_x = u_{xx} = u_y = J_x = 0$ en p , así

$$= (-J_y)(0) \equiv 0$$

es decir

$$\nabla_V\nabla_V u \equiv 0 \text{ en p.}$$

ahora

$$-J_y(-J_y V_x + J_x V_y)_x = -J_y\left[-J_{yx}V_x - J_y V_{xx} + J_{xx}V_y + J_x V_{yx}\right]$$

y como $V_x = J_x = 0$ en p y $V_y = 1$, tenemos

$$(-J_y)(-J_y V_{xx} + J_{xx}V_y) = \nabla_V\nabla_V V$$

$$J_{xx}(p) = (u_{xxx}V_y + u_{xx}V_{yx} + u_{xx}V_{yx} + u_x V_{yxx} - u_{yxx}V_x - u_{yx}V_{xx} - u_y V_{xxx})$$

$$J_{xx}(p)= u_{xxx}- 2u_{yx}V_{xx}= u_{xxx}- 2u_{xy}V_{xx}$$

$$-J_y\, V_{xx}= -u_{xy}V_{xx}$$

así

$$\nabla_V\nabla_V V= -u_{xy}(-u_{xy}V_{xx}+ u_{xxx}- 2u_{xy}V_{xx})$$

$$\nabla_V\nabla_V V= -u_{xy}(u_{xxx}- 3u_{xy}V_{xx}).$$

Si $\nabla_V F(p)=(0,0)$ y $\nabla_V\nabla_V F(p)=(0, -u_{xy}(u_{xxx}- 3u_{xy}V_{xx}))\neq(0.0)$ de donde concluimos:

<u>Las condiciones para que p sea un punto cúspide son: $u_{xx}=0$, $u_{xy}\neq 0$ y</u>

<u>$u_{xxx}- 3u_{xy}V_{xx}\neq 0$ en p.</u>

Observaciones 3.2.1. Si $F(x,y)=(xy- x^3, y)=(u,V)$

con $p=(0,0)$ $u_x(p)=V_x=u_y=0$ en p

$u_x= y-3x^2$ y $V_y(p)=1$

$V_x= 0$ además $u_{xx}= 0$

$u_y= x$ $u_{xy}= 1$ en $p=(0,0)$

$V_y= 1$ $u_{xxx}= -6$

$u_{xx}= -6x$ $V_{xx}= 0$

$u_{xy}= 1$ cumple con las condiciones arriba mencionadas, por lo tanto:

$u_{xxx}= -6$ p es un punto cúspide de F

$V_{xx}= 0$

$J(p)=y-3x^2$ $\quad \{(x,y)|y=3x^2\}$ dobles general de F que pasa por (0,0)

$\{(x,y)|y\neq 3x^2\}$ son puntos regulares.

Si $V=(-J_y,J_x)=(-1,-6x)$

$\nabla_V F(p)\neq 0$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $y=3x^2$

así son puntos doblés.

Si $(x,y)=(0,0)$

$\nabla_V F(p)=0$ y $\nabla_V\nabla_V F(p)=(0,6)$ en $(0,0)$

p es punto cúspide.

Como $J(p)=0$, si $(x,y)=(x,3x^2)$ ó $(0,0)$; si $(x,y)=(x,3x^2)$

$\nabla_V J(p)\neq 0$ es punto bueno.

Y si $P=(0,0)$ $\quad J(p)=0$ $\quad$ y $\nabla J(p)=(-6x,1)$

$\nabla J(p)=(0,1)\neq(0,0)$ es punto bueno.

Y si $(x,y)\neq(x,3x\ )$ $J(p)\neq 0$ así son puntos buenos

$\therefore$ F es buena.

y como cada punto ó es regular, ó es doblés, ó es cúspide

$\Longrightarrow$ F es excelente.

3. TOPICOS RELACIONADOS CON EL TEOREMA DE TAYLOR.

Para una función $g: R \to R$ en derivadas contínuas hasta s en una vecindad V de a, para $x \in V(a)$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{s-1} \frac{g^k(a)}{k!} (x-a)^k + R_{s-1}(x)$$

donde

$$R_{s-1}(x)= \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} g^s(t)dt, \text{ Con } a=0$$

tenemos:

$$g(x)= \frac{g(0)}{0!} x^0 + \frac{g'(0)}{1!} x^1 + \frac{g''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{g^{s-1}(0)}{(s-1)!} x_1{}^{s-1} + \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} g^s(t)dt$$

$$x \in V(0).$$

que podemos escribir como:

$$g(x)= \frac{g(0)}{0!} x^0 + \frac{g'(0)}{1!} x + \ldots + \frac{g^{s-1}(0)}{(s-1)!} x^{s-1} + \frac{x^s}{s!} g_s(x) \quad (*)$$

donde

$$g_s(x)= \frac{s}{x_1^s} \int_0^x (x-t)^{s-1} g^{(s)}(t)dt.$$

Sea $F: R^2 \to R$ de clase C^r en una vecindad de $(0,0)$ y supongamos $1 \leq s \leq r$

Definimos

$$g(x)=F(x_1,x_2)$$

$$g'(x)= F'(x_1,x_2)= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 x_2)$$

$$g^i(x)= \frac{\partial^i F}{\partial x_1^i} (x_1,x_2)$$

$$g(0)=F(0,x_2)=\psi^0(x_2)$$

$$g^1(0)=\frac{\partial F}{\partial x_1}(0,x_2)=\psi^1(x_2)$$

$$g^i(0)=\frac{\partial^i F}{\partial x_1^i}(0,x_2)=\psi^i(x_2) \qquad i=0,1,\ldots s-1 \quad y$$

$$g^s(t)=\frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(t,x_2) \qquad\qquad g_s(x)=\psi^s(x_1,x_2)$$

y sustituyendo en (*) tenemos:

$$F(x_1,x_2)=\psi^0(x_2)+\frac{x_1}{1!}\psi^1(x_2)+\frac{x_1^2}{2!}\psi^2(x_2)+\ldots+\frac{x_1^{s-1}}{(s-1)!}\psi^{s-1}(x_2)+\frac{x_1^s}{s!}\psi^s(x_1,x_2)$$

donde

$$\psi^s(x_1,x_2)=\frac{s}{x_1^s}\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}\frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(t,x_2)\,dt \qquad x_1\neq 0$$

Observación 3.3.1. $\psi^s(0,x\ )=\frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(0,x_2)$

demostración: como $\psi^s(x_1,x_2)=\frac{s}{x_1^s}\int_0^x \frac{(x_1-t)^{s-1}}{1}\frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(t,x_2)\,dt \quad x_1\neq 0$

por el teorema del valor medio ponderado:
Si f,g son contínuas en $[a,b]$ y g no cambia de signo en $[a,b]$ entonces existe $C\varepsilon[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b F(x)g(k)dx=F(c)\int_a^b g(x)dx$$

Véase No. 5 de la bibliografía.

$$\psi^s(x_1,x_2)=\frac{s}{x_1^s}\frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(c,x_2)\int_0^x(x_1-t)^{s-1}dt \quad c\varepsilon|0,x_1|$$

tomando:

$$u=x_1-t \qquad \text{si } t=0 \quad u=x_1$$
$$du=-dt \qquad \text{si } t=x \quad u=0$$

tenemos:

$$\psi^{s}(x_1,x_2)=\frac{\partial^{s}F}{\partial x_1^{s}}(c,x_2)\left[-\frac{s}{x_1^{s}}\int_{x_1}^{0}u^{s-1}\,du\right]$$

$$=\frac{\partial^{s}F}{\partial x_1^{s}}(c,x_2)\left[-\frac{s}{x_1^{s}}(1/s\ u^{s}\Big|_{x_1}^{0})\right]$$

$$=\frac{\partial^{s}F}{\partial x_1^{s}}(c,x_2)\left[-\frac{s}{x_1^{s}}(0-\frac{x_1^{s}}{s})\right]=\frac{\partial^{s}F}{\partial x_1^{s}}(c,x_2).\ 1$$

$$\psi^{s}(x_1,x_2)=\frac{\partial^{s}F}{\partial x^{s}}(c,x_2)\quad \text{tomando límite}$$

$$\lim_{x\to 0}\psi^{s}(x_1,x_2)=\lim_{x\to 0}\frac{\partial^{s}F}{\partial x_1^{s}}(c,x_2)$$

y como c $[0,x_1]$

$$\psi^{s}(o,x_2)=\frac{\partial^{s}F}{\partial x_1^{s}}(0,x_2)$$

Así podemos afirmar que ψ^{i} es C^{r-i} $i=0,1,\ldots,s$

Notación: $F_{\lambda_1\lambda_2}(x_1,x_2)=\dfrac{\partial^{\sigma_\lambda}F}{x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}(x_1,x_2)$ $\qquad \sigma_\lambda=\lambda_1+\lambda_2$

Proposición 3.3.1. $\psi_{\lambda_1\lambda_2}(x_1,x_2)=\dfrac{s}{x_1^{s+\lambda_1}}\displaystyle\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda_1}\frac{\partial^{\sigma_\lambda}F}{x_1^{s+\lambda_1}x_2^{\lambda_2}}(t,x_2)\,dt$

$x\neq 0$

para $\sigma_\lambda\leq r-s$ y $x_1\neq 0$

Proposición 3.3.2.

Demostración: Sea $\psi^{s}_{\lambda_1\lambda_2}(x\ ,x\ )=\dfrac{s}{x_1^{s+\lambda_1}}\displaystyle\int_0^{x}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda_1}\frac{\partial^{\sigma_\lambda}F}{\partial x_1^{s+\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}(t,x_2)\,dt$

$x_1\neq 0$

como en la proposición anterior; entonces tenemos:

$$\psi^{s}_{\lambda_1\lambda_2}(0,x_2)=\frac{s!\ \lambda_1}{(s+\lambda_1)!}\ \frac{\partial^{\sigma_\lambda} F}{\partial x_1^{s+\lambda_1} x_2^{\lambda_2}}(0,x_2)$$

Demostración: tomando $g(x)=(x-t)^{s-1}t^{\lambda_1}$ que no cambia de signo en $[0,x]$ y

$$\frac{\partial^{\sigma_\lambda} F}{\partial x_1^{s+\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}(t,x\ )=F(x)$$

aplicando el teorema del valor medio ponderado, tenemos:

$$\frac{s}{x_1^{s+\lambda_1}}\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda_1}\frac{\partial^{\sigma_\lambda} F}{\partial x_1^{s+\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}(t,x\ )dt=\frac{s}{x_1^{s+\lambda_1}}\ \frac{\partial^{\sigma_\lambda} F}{\partial x_1^{s+\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}(c,x_2)\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda_1}dt$$

donde $c\varepsilon\left[0,x_1\right]$; integrando por partes

$$\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda}dt=\left|\frac{(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right|_0^{x}+\int_0^{x}\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}(s-1)(x-t)^{s-2}dt$$

tomando $u=(x-t)^{s-1}$ $\qquad dV=t^{\lambda}dt$

$du=(s-1)(x-t)^{s-2}(-dt)$ $\qquad V=\dfrac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}$

Así:

$$\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda}dt=\frac{s-1}{\lambda+1}\int_0^{x}t^{\lambda+1}(x-t)^{s-2}dt$$

haciendo el cambio

$u=(x_1-t)^{s-2}$ $\qquad dV=t^{\lambda+1}dt$

$du=(s-2)(x_1-t)^{s-3}(-dt)$ $\qquad V=\dfrac{t^{\lambda+2}}{\lambda+2}$

$$\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda}dt=\frac{s-1}{\lambda+1}\left[\left.\frac{(x_1-t)^{s-2}t^{\lambda+2}}{\lambda+2}\right|_0^{x_1}+\int_0^{x_1}\frac{(s-2)}{\lambda+2}\,t^{\lambda+2}(x_1-t)^{s-3}dt\right]$$

$$=\frac{(s-1)(s-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\int_0^{x_1}t^{\lambda+2}(x-t)^{s-3}dt$$

haciendo semejante cambio de variable e iterando éste proceso obtenemos:

$$\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}t^{\lambda}dt=\frac{(s-1)(s-2)(s-3)\ldots s-(s-2)}{(\ +1)(\ +2)(\ +3)\ldots\ +(s-2)}\int_0 t^{\lambda+(s-2)}(x-t)dt$$

$$=\frac{(s-1)(s-2)\ldots s-(s-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\lambda+(s-2)}\left[\left.\frac{(x_1-t)t^{\lambda+(s-1)}}{\lambda+(s-1)}\right|_0^{x}+\int_0^{x}\frac{t^{\lambda+(s-1)}}{\lambda+(s-1)}dt\right]$$

$$=\frac{(s-1)(s-2)\ldots 1}{(\lambda+1)\ldots\lambda+(s-1)}\int_0^{x}t^{\lambda+(s-1)}dt=\frac{(s-1)\ldots 1}{(\lambda+1)\ldots\lambda+(s-1)}\left[\left.\frac{t^{\lambda+s}}{\lambda+s}\right|_0^{x}\right]$$

$$=\frac{(s-1)!\ \lambda!}{(\lambda+s)!}\cdot x^{\lambda+s}$$

De esta forma obtenemos que:

$$\psi^{s}_{\lambda_1\lambda_2}(x_1,x_2)=\frac{s}{x_1^{s+\lambda_1}}\left[\frac{(s-1)!\lambda_1!\ x_1^{\lambda+s}}{(\lambda+s)!}\right]\frac{\partial^{\sigma_\lambda}F}{\partial x_1^{s+\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}(c,x_2)$$

Tomando límite a ambos lados cuando $x_1\to 0$ dado que $c\in[0,x_1]$ concluimos que:

$$\psi^{s}_{\lambda_1\lambda_2}(0,x_2)=\frac{s!\ \lambda_1!}{(\lambda_1+s)!}\frac{\partial^{\sigma_\lambda}F}{\partial x_1^{s+\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}(0,x_2)$$

Proposición 3.3.3. $x^{s-i}\psi^{s}_{\lambda_1\lambda_2}(x_1,x_2)$ es contínua si $0\le i\le r-\lambda_{\lambda}\le s$.

Observación 3.3.2. Supongamos $1\leq s\leq r$ y $F(x_1,x_2)$ es C^r y

$$\frac{\partial^i F}{\partial x_1^i}(0,x_2)=0 \qquad i=0,1,\dots s-1$$

tenemos que la expresión:

$$F(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{x_1^i}{i!}\frac{\partial^i F}{\partial x_1^i}(0,x_2)+\frac{x_1^s}{s!}\left[\frac{s}{x_1^s}\int_0^{x_1}(x_1-t)^{s-1}\frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(t_1,x_2)dt\right]$$

nos queda:

$$F(x_1,x_2)=x_1^s\,\Phi(x_1,x_2)$$

donde Φ es C^{r-s}, como hemos visto anteriormente.

Definición 3.3.1. Sea F C^r decimos que F es de orden $\geq s$, si F y todas sus derivadas parciales hasta orden $<s$, se anulan en el origen.

Observación 3.3.3. Si F es C^s y orden $F\geq s$ y $\sigma_\lambda\leq s \Longrightarrow F_{\lambda_1\lambda_2}(x_1 x_2)$ es de orden $\geq s-\sigma_\lambda$

Proposición 3.3.4. Si F es C^{s+1} y orden de $F\geq s$, entonces

$$F'(x_1,x_2)=x_1F(x_1,x_2) \text{ es de orden } \geq s+1$$

Demostración: Se sigue de:

$$\frac{\partial^n F'}{\partial x^n}(x_1,x_2)=n\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}F(x_1,x_2)+x_1\frac{\partial^n F}{\partial x_1^n}(x_1,x_2)$$

$$\frac{\partial^s F}{\partial x_1}(x_1,x_2)=0 \qquad y \qquad \frac{\partial^{s+1} F}{\partial x_1^{1+1}}(x_1,x_2)\neq 0$$

Proposición 3.3.5. Sea F de clase C^r y orden $F\geq s$, y si

$$F(0,x_2)=0 \qquad \forall\ x_2$$

entonces existe Φ de clase C^{r-1} y orden $\geq s-1$ tal que

$$F(x_1,x_2)=x_1\Phi(x_1,x_2)$$

Demostración: Se sigue de

$$F(x_1,x_2)=F(0,x_2)+x_1\left[\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,x_2)dt\right]$$

Proposición 3.3.6. Sean $F(x_1,y)$ y $\phi(x_1)$ de clase C^r y orden $F\geq s$ y supongamos que

$$\phi(0)=0 \quad F(x,\phi(x))=0=\frac{\partial F}{\partial y}(x,\phi(x)) \qquad \forall\ x.$$

entonces existe ψ de clase C^{r-2} y orden $\psi\geq s-2$ tal que

$$F(x,y)=\left[y-\phi(x)\right]^2\psi(x_1,y).$$

Demostración: Sea $\phi'(x\ ,y)=F(x,y+\phi(x))$ entonces

$$\phi'(x,o)=\frac{\partial\phi^1}{\partial y}(x,0)=0$$

aplicando 2 veces la proposición anterior en la variable y encontramos que:

$$\phi'(x_1,y)=y^2\Phi^*(x_1,x_2)$$

donde Φ^* es C^{r-2}; si tomamos:

$$\psi(x,y)=\Phi^*(x,y-\phi(x))$$

obtenemos

$$F(x,y)=\left[y-\phi(x)\right]^2\psi(x,y)$$

claramente ϕ' es de orden $\geq s$ y tanto Φ^* como ψ son de orden $\geq s-2$.

Proposición 3.3.7. Supongamos F es C^r en una vecindad de $(0,0)$ $2\leq s\leq r$ y $x_1'=\phi(x_1,x_2)= x_1+R(x_1,x_2)$ ord $R\geq s$

Entonces podemos resolver x_1 en términos de x_1',x_2 cercana al origen, dando

$$x_1=x_1'+R'(x_1',x_2)$$

donde orden $R'\geq s$ y R' es C^r

Demostración: Sea $H(x_1',x_1,x_2)= x_1'-x_1-R(x_1,x_2)$

$$H(x_1',x_1,x_2)=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1',x_1,x_2)= -1\neq 0$$

por el teorema de la función implícita, existe ϕ tal que $x_1=\phi(x_1',x_2)$

$$x_1 = x_1'-R(x_1,x_2)$$

$$= x_1'-R(\phi(x_1',x_2),x_2)$$

tomando

$$R'(x_1',x_2)= -R(\phi(x_1',x_2),x_2)$$

tenemos:

$$x_1 = x_1' + R'(x_1', x_2)$$

y por la expresión de R' claramente orden $R' \geq s$ y de clase C^r .

Proposición 3.3.8. Sea F de clase C^{2r} y par en x_1, es decir

$$F(-x_1, x_2) = F(x_1, x_2)$$

entonces existe $\psi(x_1, x_2)$ de clase C^r tal que

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$$

Demostración: En la expansión del *Teorema de Taylor* en una variable alrededor de 0, tenemos:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + R_{s-1}(x)$$

donde

$$R_{s-1}(x) = \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} g^{(s)}(t)dt$$

que también $R_{s-1}(x)$ se puede calcular:

$$R_{s-1}(x) = \frac{g^{(s)}(c)}{s!}(x-0)^s \quad \text{donde } c\varepsilon \left|0,x\right| . \qquad (1)$$

$$F(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x_1^i}{i!} \frac{\partial^i F}{\partial x_1^i}(0, x_2) + \frac{x_1^s}{s!} \left[\frac{s}{x_1^s} \int_0^x (x_1 - t)^{s-1} \frac{\partial^s F}{\partial x^s} (t, x_2) dt \right]$$

$$F(-x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(-1)^i x_1^i}{i!} \frac{\partial^i F}{\partial x_1^i}(0, x_2) + \frac{x_1^s}{s!} \left[\frac{s}{x^s} \int_0^x (x_1 - t)^{s-1} \frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(t, x_2) dt \right]$$

para s par $s=2r$

Si

$$F(x_1,x_2)= F(-x_1,x_2) \Longrightarrow F(-x_1,x_2)- F(x_1,x_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$F(-x_1,x_2)-F(x_1,x_2)= -2 \sum_{k=0}^{\frac{s-2}{2}} \frac{(x_1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1} F}{\partial x^{2k+1}} (0,x_2)=0$$

Así:

$$F(x_1,x_2)= \sum_{k=0}^{\frac{j-2}{2}} \frac{(x_1)^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}F}{\partial x_1^{2k}} (0,x_2)+ \frac{x_1^s}{s!} \left[\frac{s}{x_1^s} \int_0^x (x_1-t)^{s-1} \frac{\partial^s F}{\partial x^s}(t,x_2)dt \right]$$

que tambien puede escribirse como:

$$F(x_1,x_2)= \sum_{k=0}^{\frac{s-2}{2}} \frac{(x_1)^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}F}{\partial x^{2k}} (0,x_2)+ \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x_1-t)^{s-1} \frac{\partial^s F}{\partial x_i^s}(t,x_2)dt$$

y usando (1) en la expresión del residuo; tenemos:

$$F(x_1,x_2)= \sum_{k=0}^{\frac{s-2}{2}} \frac{(x_1)^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}F}{\partial x_1^{2k}}(0,x_2)+ \frac{1}{s!} \frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(c,x_2)(x)^s \qquad s \text{ par}$$

es decir

$$F(x_1,x_2)=\psi(x_1^2,x_2) \text{ donde } \psi \text{ es } C^r.$$

Proposición 3.3.9. Sea F de clase C^{2r+1} e impar en x_1, es decir

$$F(-x_1,x_2)= -F(x_1,x_2)$$

entonces existe una función ψ de clase C^r tal que

$$F(x_1,x_2)= x_1\psi(x_1^2,x_2)$$

Demostración:

$$F(x_1,x_2)= \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x_1^i}{i!} \frac{\partial^i F}{\partial x_1^i} (0,x_2)+ \frac{x_1^s}{s!} \left[\frac{s}{x_1^i} \int_0^x (x_1-t)^{s-1} \frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(t,x_2)dt \right]$$

$$F(-x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{(-1)^i x_1^i}{i!}\ \frac{\partial^i F}{\partial x_1^i}(0,x_2)-\frac{x_1^s}{s!}\left[\frac{s}{x_1^s}\int_0^x (x_1-t)^{s-1}\ \frac{\partial^s F}{\partial x_1^s}(t,x_2)dt\right]$$

donde $s=2r+1$ impar

Como:

$$F(-x_1,x_2)=-F(x_1,x_2)\Longrightarrow F(x_1,x_2)+F(-x_1,x_2)=0$$

pero

$$F(x_1,x_2)+F(-x_1,x_2)=2\sum_{k=0}^{\frac{s-1}{2}}\frac{x_1^{2k}}{(\partial k)!}\ \frac{\partial^{2k}F}{\partial x_1^{2k}}(0,x_2)=0$$

así

$$F(x_1,x_2)=x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(0,x_2)+\frac{x_1^3}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}(0,x_2)+\ldots+\frac{x_1^{2r+1}}{(2r+1)!}\left[\frac{2r+1}{x_1^{2r+1}}\int_0^x (x_1-t)^{2r}\frac{\partial^{2r+1}}{\partial x_1^{2r+1}}F(t,x_2)dt\right]$$

que podemos escribir:

$$F(x_1,x_2)=x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(0,x_2)+\frac{x_1^3}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}(0,x_2)+\ldots+\frac{1}{(\partial r)!}\int_0^x (x_1-t)^{2r}\ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial x_1^{2r+1}}F(t,x_2)dt$$

y usando (1) de la proposición anterior en el residuo:

$$F(x_1,x_2)=x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(0,x_2)+\ldots+\frac{1}{(\partial r+1)!}\ \frac{\partial^{r+1}F}{\partial x_1^{2r+1}}(c,x_2)x_1^{2r+1}$$

$$c\in\left[0,x_1\right]$$

$$=x_1\left[\frac{\partial F}{\partial x}(0,x_2)+\frac{x_1^2}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}(0,x_2)+\ldots+\frac{x_1^{2r-2}}{(\partial r-1)!}(0,x_2)+\frac{x_1^{2r}}{(\partial r+1)!}\ \frac{\partial^{2r+1}F}{\partial x^{2r+1}}(c,x_2)\right]$$

$$F(x_1,x_2)=x_1\ \psi(x_1^2,x_2)\ \text{ donde } \psi \text{ es } C^r.$$

$$\psi(x_1^2,x_2)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{x_1^{2k}}{(\partial k+1)!}\ \frac{\partial^{2k+1}F}{\partial x^{2r+1}}(0,x_2)+\frac{x_1^{2r}}{(r+1)!}\ \frac{\partial^{2r+1}F}{\partial x^{2r+1}}(c,x_2)\ .$$

Ahora veamos los teoremas de caracterización en puntos dobles y puntos cúspides:

4. TEOREMAS DE CLASIFICACION

Teorema 3.4.1. Sea p un punto doblés de una función F: $R^2 \to R^2$ de clase C^r con $r \geq 3$, entonces existen transformación en coordenadas de Clase C^{r-3} alrededor de p y F(p) ; (x,y) y (u,v) en términos de los cuales F(x,y)=(u,v) toma la forma $F(x,y)=(x^2,y)$

Demostración: Introduzcamos el sistema de coordenas tal que p=0=F(p) como p es punto crítico, existe V $\nabla_V F(p)=0$

Sea la dirección x de éste vector además como p es un punto doblés existe una dirección $\nabla_V F(p) \neq 0$; sea V en la doreccíón del eje y su imagen en la dirección del eje v.

Así

$$F(x,y)=(u,v)$$

tenemos que

$$u_x=0=u_y=V_x \quad y \quad V_y=1 \text{ en } p. \qquad (1)$$

es el sistema que caracteriza las propiedades anteriores como:

$$u:\ R^2 \to R \qquad y \qquad v:\ R^2 \to R$$

expandiendo estas funciones alrededor de p tenemos

$$u(x,y)= u(0,0)+ xu_x(0,0)+ yu_y(0,0)+ R(x,y) \quad \text{ord } R \geq 2$$

$$v(x,y)= v(0,0)+ xv_x(0,0)+ v_y(0,0)y+ S(x,y) \quad \text{ord } S \geq 2$$

y por (1) obtenemos que:

$$u(x,y)= R(x,y)$$

$$v(x,y)= y + S(x,y)$$

Sea la transformación $T(x,y)=(x',y')=(x,y + S(x,y))$

$$J_T= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es invertible

Así:

$$x'=x$$

$$y'=y+S(x,y) \quad \text{donde ord } S\geq 2$$

Podemos resolver y en términos de x',y' según la proposición 3.3.7, y obtenemos:

$$y=y'+S'(x',y') \text{ donde ord } S'\geq 2$$

Ahora

$$u(x,y)=\mathcal{R}(x,y)=(x',y'+S'(x',y'))=\mathcal{R}'(x',y') \text{ ord}\mathcal{R}'\geq 2$$

eliminándo primas, tenemos:

$$u=\mathcal{R}(x,y) \qquad v=y \quad \text{donde ord } \mathcal{R}\geq 2$$

es decir,

$$F(x,y)=(\mathcal{R}(x,y),y)=(u,v)$$

además

$$v_x=0 \quad \forall(x,y)$$

$$J_F(x,y)=\begin{bmatrix} u_X & ? \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$J_F=u_x \quad \text{como p es un punto doblés } J_x(0,0)\neq 0$$

por el teorema de la función implícita podemos resolver

$$J=0 \text{ cercana al origen:}$$

$$J=u_x=0 \text{ está dada por una función } \phi \text{ de clase } C^{r-1}$$

tal que

$$x=\phi(y) \text{ cercana a } (0,0)$$

Teníamos que

$$F(x,y)=(\mathcal{R}(x,y),y)=(u,v)$$

tomemos la transformación de el plano xy en el x'y' tal que

$$T: \begin{matrix} x'=x-\phi(y) \\ y'=y \end{matrix} \qquad J_T=\begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos:

$$F(x',y')=F(x'+\phi(y'),y')=(\mathcal{R}(x'+\phi(y'),y'),y')=(u,v)$$

ahora, tomemos la transformación

$$T_1 \begin{matrix} u'=u-\mathcal{R}(\phi(v),v) \\ v'=v \end{matrix} \qquad J_{T_1}=\begin{bmatrix} 1 & ? \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tenemos que:

$$u'=\mathcal{R}(x'+\phi(y'),y')-\mathcal{R}(\phi(y'),y')$$

$$u'(x',y')=\mathcal{R}(x'+\phi(y'),y')-\mathcal{R}(\phi(y'),y')$$

aquí

$$u'(0,y')=\mathcal{R}(\phi(y'),y')-\mathcal{R}(\phi(y'),y')=0$$

además

$$u'_{x'}=\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}(x'+\phi(y'),y')(1)+\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial y}(x'+\phi(y'),y')(0)=\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}(x'+\phi(y')(0)+\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial y}(x'+\phi(y'),y')(0)$$

$$u'_{x'}(0,y')=\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}(\phi(y'),y')=u_x(\phi(y'),y')=0$$

también sabemos que:

$$u_{xx}(0,0)=J_x(0,0)\neq 0$$

(por ser p punto doblés), y

$$u'_{x'x'}=\mathcal{R}_{xx}(x'+\phi(y'),y')1+\mathcal{R}_{xy}(x'+\phi(y'),y')(0)$$

$$u'_{x'x'}(0,0)=\mathcal{R}_{xx}(\phi(0),0)=\mathcal{R}_{xx}(0,0)=u_{xx}(0,0)\neq 0$$

Recordemos que:

$$F(x',y')=(\mathcal{R}(x'+\phi(y'),y')-\mathcal{R}(\phi(y'),y'),y')=(u'(x',y'),v'(x',y'))$$

Tomemos $u''(x',y'): R^2 \to R$ en una vecindad de $(0,0)$ y expandiéndola como función de la variable y' y usando los resultados vistos en "Tópicos relacionados con el teorema de T.

$$u'_y(x')=u'(x',y')$$

obtenemos

$$u'(x',y')=u'(0,y)+\frac{\partial u'_y}{\partial x'}(0,y')x'+1/2!\,\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}(0,y')x'^2+1/3!\,\frac{\partial^3 u'}{\partial x'^3}(0,y')x'^3+..$$

$$=0+u'_{x'}(0)x+1/2!\,u_{x'x'}(0,y)x'^2+\ldots$$

$$=x'^2\Phi(x',y') \quad \text{donde } \Phi \text{ es de clase } C^{r-3}$$

es decir:

$$F(x',y')=(x'^2\Phi(x',y'),y')=(u'(x',y'),v'(x',y'))$$

además, como

$$u'(x',y')=x'^2\Phi(x',y')$$

$$u'_{x'}(x',y')=2x'\Phi(x',y')+x'^2\Phi_{x'}(x',y')$$

$$u'_{x'x'}(x',y')=2\Phi(x',y')+2x'\Phi_{x'}(x',y')+2x'\Phi_{x'}(x',y')+x'^2\Phi_{x'x'}(x',y')$$

de donde:

$$u'_{x'x'}(0,0)= 2\Phi(0,0)$$

pero

$$u'_{x'x'}(0,0)\neq 0 \Rightarrow\Phi(0,0)\neq 0.$$

Así, podemos definir la función C^{r-3}

$$\psi(x',y')=\left[\Phi(x',y')\right]^{1/2} \text{ cercana al origen.}$$

que sabemos $\psi(0,0)\neq 0$

En la expresión

$$F(x',y')=(x'^2\Phi(x',y'),y')=(u',v')$$

y auxiliándose de la función

$$\psi(x',y')=\left[\Phi(x',y')\right]^{1/2}$$

tomemos la transformación de clase C^{r-3}

$$T:\ \begin{array}{l} x^*=x'\ \psi \\ y^*=y' \end{array} \qquad J_T=\begin{bmatrix} \psi(x',y')+ x'\ \frac{\partial\psi}{\partial x'}(x',y') & ? \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es invertible ya que $\frac{\partial x^*}{\partial x'}=\psi(0,0)\neq 0$

Así

$$x'= x^*\left[\psi(x',y')\right]^{-1}$$

$$y'= y^*$$

$$u(x^*,y^*)= (x^*)^2\left[\psi(x',y')\right]^{-2}\Phi(x',y')= x^{*2}\ \psi^{-2}.\ \psi^2= x^{*2}$$

$$v(x^*,y^*)=y^*$$

obteniendo la expresión para F deseada:

$$F(x,y)=(x^2,y)$$

Lema 3.4.1. Supongamos $m=3$ y $u(x,y)=\left[x+S(x,y)\right]y-x^3+kx^m+T(x,y)$ donde ord $S\geq m-1$ y ord $T\geq m+1$ con S y T de clase C^s, entonces la transformación

$$x' = x + S(x,y)$$

da

$$u(x',y)=x'y-x'^3+kx'^m+U(x',y)$$

donde ord $U\geq m+1$

Demostración: Como $x' = x + S(x,y)$ ord $S\geq m-1$, por la proposición 3.3.7. tenemos que

$$x = x' + S'(x',y) \text{ donde ord } S'\geq m-1$$

sustituyendo x tenemos

$$x^3=(x'+S'(x',y))^3$$

$$u(x,y)=x'y-\left[x'^3+3x'^2S'(x',y)+3x'\left[S'(x',y)\right]^2+\left[S'(x',y)\right]^3\right]$$
$$+k\left[x'+S'(x',y)\right]^m+T(x'+S'(x',y),y)$$

y como si ϕ es C^{s+1} y ord $\phi\geq s \Rightarrow x\,\phi$ es de orden $\geq s+1$

$$u(x',y)=x'y-x'^3-\left[3x'^2S'(x',y)+\ldots\right]+kx'^m+k\left|\begin{matrix}\text{términos de}\\ \text{orden } \geq m+1\end{matrix}\right|$$

$$u(x',y)=x'y-x'^3+kx'^m+U(x',y) \quad \text{donde ord } U\geq m+1.$$

Teorema 3.4.2. Sea p un punto cúspide de una función $F\colon R^2\to R^2$ de clase C^r donde $r\geq 12$, entonces podemos introducir un sistema de coordenadas de clase $C^{(r/2-5)}$ alrededor de p y F(p), tal que F toma la forma:

$$F(x,y)=(xy-x^3,y)$$

Demostración: Podemos empezar introduciendo sistema de coordenadas alrededor de p y F(p) como en el teorema anterior y siguiendo el mismo desarrollo llegamos a

$$F(x,y)=(u(x,y),v(x,y))=(\mathcal{R}(x,y),y) \text{ donde ord } \mathcal{R}\geq 2$$

expandiendo $\mathcal{R}$, por el teorema de Taylor tenemos:

$$\mathcal{R}(x,y)=Ax^2+ Bxy+ Cy^2+ \mathcal{R}'(x,y) \text{ donde ord } \mathcal{R}'\geq 3$$

y como el sistema de coordenadas satisface

$$u_x=0=u_y=v_x \quad \text{en p} \qquad \text{y} \quad v_y=1$$

y como p es punto cúspide $\Rightarrow A= 1/2\, u_{xxx}(0,0)=0$ y $B=u_{xy}(0,0)\neq 0$, consideremos el cambio

$$T: \quad x=x' \qquad y= {y'}/_B \qquad u=u' \qquad v= {v'}/_B$$

$$J_T: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \neq 0$$

$$F(x',y')=(B(x')(y'/B)+ C(y'/B)^2+ \mathcal{R}'(x',y'/B),y')$$

$$=(x'\, y'+ \frac{C}{B^2}y'^2+ \mathcal{R}'(x',y'/B),y') \text{ donde ord } \mathcal{R}'\geq 3$$

que, eliminando primas se puede escribir como:

$$F(x,y)=(xy+ Ey^2+ \mathcal{R}(x,y),y) \text{ con ord } \mathcal{R}\geq 3$$

expandiendo de nuevo $\mathcal{R}$; y sustituyendo en u(x,y) tenemos:

$$u(x,y)= xy+ Ey^2+ Ax^3+ Bx^2 y + Cxy^2+ Dy^3+ \mathcal{R}' \text{ donde ord } \mathcal{R}'\geq 4.$$

Si queremos eliminar el término y^2, y encontrar una expresión más simple para u, veamos qué cambio debemos tomar:

Consideremos $u'=u-$ Polinomio en u,v

$$u'=u-(a_0u+b_0v+c_0u^2+d_0uv+e_0v^2+f_0v^3+\dots)$$

que podemos representar como:

$$u'=A'u+B'v+C'u^2+D'uv+E'v^2+F'v^3+\dots \qquad (1)$$

sustituyendo:

$$u=xy+Ey^2+Ax^3+Bx^2y+Cy^2+Dy^3+R'$$

$$v=y$$

tenemos:

$$u'(x,y)=A'(xy+Ey^2+Ax^3+\dots)+B'y+C'(xy+Ey^2+\dots)$$
$$+D'(xy^2+Ey^3+\dots)+E'y^2+Fy^3+\text{ etc.}$$

$$u'(x,y)=A'xy+B'y+(E+E')y^2+Ax^3+Bx^2y+(C+D')xy^2+(D+D'E+F')y^3$$
$$+\text{ Polinomio de grado }\geq 4.$$

de donde

$$A'=1 \quad B'=0 \quad E+E'=0 \quad C+D'=0 \quad D+D'E+F'=0$$

así:

$$u'(x,y)=xy+Ax^3+Bx^2y+\text{ Polinomio de grado }\geq 4$$

de la expresión (1) obtenemos que con

$$A'=1 \quad B'=0 \quad C'=0 \quad D'=-C \quad E'=-E \quad F'=-(D-CE)$$

se tiene que:

$$u'=u-Cuv-Ev^2-(D-CE)v^3$$

y esto simplifica la expresión para F.

De esta manera, tomando $u'=u-Ev^2-Cuv-(D-EC)U^3$ $\quad v'=U$ tenemos:

$$u'(x,y)=xy+Ey^2+Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+R'$$
$$-Ey^2-C(xy+Ey^2+Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+R')y$$
$$-(D-EC)y^3$$

$$u'(x,y)=xy+Ax^3+Bx^2y+R(x,y) \qquad \text{donde ord } R\geq 4$$

es decir:

$$F(x,y)=(xy+Ax^3+Bx^2y+R(x,y),y) \quad \text{ord } R\geq 4$$

necesitamos un cambio de la forma:

$$x= \text{Polinomio en } x',y'$$

$$y=y' \quad \text{(paro no alterar } v=y)$$

y obtener una expresión de u' en términos de x'y' en donde el término x^2y desaparezca; analicemos éste cambio:

Sea

$$x=ax'+by'+cx'^2+dx'y'+ey'^2+\ldots$$

$$y=y'$$

de donde

$$u'(x',y')=(ax'+by'+cx'^2+\ldots)y'+A(ax'+by'+cy'^2+\ldots)+B(ax'+by'+\ldots)^2y'+R(x'y')$$

$$= ax'y'+by'^2+cx'^2y'+dx'y'^2+ey'^3+ \text{ términos de orden } \geq 4$$

$$+Aa^3x'^3+Ab^3y'^3+3Aax'b^2y'^2+ \text{ términos de orden } \geq 4$$

$$+Ba^2x'^2y +Bb^2y'^3+2Bax'by'^2+ \text{ términos de orden } \geq 4+R(x',y')$$

$$u'(x',y')= ax'y'+by'^2+(C+Ba^2)x'^2y'+\left|d+3Aab^2+ 2Bab\right| x'y'^2$$

$$+ Aa^3x'^3+(Ab^3+Bb^2+ e)y'^3+R'(x',y') \text{ donde ord } R'\geq 4$$

Como vemos, si queremos una simplificación de u' en términos de x'y' tenemos que:

$$a=1 \qquad b=0 \qquad C+B=0 \Rightarrow C= -B \qquad d=0 \qquad e=0$$

es decir, la transformación:

$$x= x'-B(x')^2$$

$$y= y'$$

sustituyendo

$$u'(x',y')=(x'-Bx'^2)y'+A(x'-Bx'^2)^3+B(x'-Bx'^2)^2y'+R(x',y')$$

donde ord $R\geq 4$

realizando operaciones y simplificando obtenemos:

$$u'(x',y') = x'y' + Ax'^3 + R'(x',y') \quad \text{donde} \quad R' \geq 4$$

$$v'(x',y') = y'$$

y eliminando primas obtenemos:

$$F(x,y) = (xy + Ax^3 + R(x,y), y) \qquad \text{donde ord } R \geq 4$$

además $A = 1/6\, u_{xxx}(0,0) \neq 0$ puesto que p es punto cúspide

Sea

$$a = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \qquad \sigma = \frac{-A}{|A|} \Rightarrow \sigma a = -Aa^3$$

tomemos la transformación:

$$T: \begin{array}{l} x = ax \\ y = \sigma y' \end{array} \qquad J_T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \neq 0$$

$$u(x,y) = u(ax', \sigma y') = (ax')\sigma y' + A(ax')^3 + R(ax', \sigma y')$$

$$u(x,y) = a\sigma x'y' + a^3Ax'^3 + R(ax', \sigma y')$$

y usando $a\sigma = -Aa^3$

tenemos:

$$u(x',y') = a\sigma(x'y' - x'^3) + R'(x',y')$$

ahora, transformemos u y v en términos de u'v' a través de:

$$T: \begin{array}{l} u = \sigma a u' \\ v = \sigma v' \end{array} \qquad J_T: \begin{bmatrix} \sigma a & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \neq 0$$

así

$$u' = \frac{1}{\sigma a} u \qquad v' = \frac{1}{\sigma} v$$

$$u'(x',y') = \frac{1}{a\sigma} u(x',y') = \frac{1}{a\sigma}\left[\sigma a \;(x'y' - x'^3) + R'(x',y')\right]$$

$$u'(x',y') = x'y' - x'^3 + R''(x',y') \text{ donde ord } R'' \geq 4$$

Veamos

$$v(x,y)=v(ax',\sigma y')=\sigma y'$$

$$v'(x',y')=\frac{1}{\sigma}v(x',y')=\frac{1}{\sigma}\sigma y'=y'$$

y eliminando primas, conseguimos:

$$F(x,y)=(xy-x^3+R(x,y),y) \text{ donde ord } R\geq 4$$

expandiendo R, tenemos:

$$R(x,y)=2Ax^4+Bx^3y+Cx^2y^2+Dxy^3+Ey^4+R'(x,y) \quad \text{ord } R'\geq 5$$

$$=2Ax^4+(Bx^3+Cx^2y+Dxy^2)+Ey^3)y+R'(x,y)$$

sustituyendo en u

$$u(x,y)=xy-x^3+2Ax^4+(Bx^3+Cx^2y+Dxy^2+Ey^3)y+R'(x,y)$$

de donde

$$u(x,y)=\left[x+(Bx^3+Cx^2y+Dxy^2+Ey^3)\right]y-x^3+2Ax^4+R'(x,y) \quad \text{ord } R'\geq 5$$

aplicando el lema anterior con m=4

$$u(x',y)=x'y-x'^3+2Ax'^4+R'(x',y) \text{ donde ord } R'\geq 5$$

y eliminando primas tenemos:

$$F(x,y)=(xy-x^3+2Ax^4+R(x,y),y) \quad \text{ord } R\geq 5$$

si tomamos $x'=\frac{x}{1+Ax}$ $\quad y'=(1+Ax)y-A\left[x^3-2Ax^4-R(x,y)\right]$

Observación: 1) $(1+Ax)y=y'+A(x^3-2Ax^4-R(x,y))$

$x'(1+Ax)y=x'y'+Ax'(x^3-2Ax^4-R(x,y))$ y como $x'=\frac{x}{1+Ax}$

$xy=x'y'+Ax'(x^3-2Ax^4-R(x,y))$

Observación 2) $y'=(1+Ax)y-A\left[x^3-2Ax^4-R(x,y)\right]$

$$y'=y+Axy-Ax^3+2A^2x^4+AR(x,y)$$

$$y'=y+S(x,y) \text{ donde ord } S\geq 2,$$

aplicando la proposición 3.3.7

$$y=y'+S'(x,y') \text{ pero como } x=\frac{x'}{1-Ax'}$$

$$y=y'+S'(x',y') \text{ donde orden } S'\geq 2$$

y si consideramos $u'=u(x,y)$ $v'=v+Au$

$$v'(x,y)=y+A(xy-x^3+2Ax^4+R(x,y))=y+Axy-A(x^3-2Ax^4-R(x,y))$$

$$v'(x,y)=(1+Ax)y-A(x^3-2Ax^4-R(x,y))$$

$$v'(x',y')=y'$$

$$u(x,y)=xy-x^3+2Ax^4+R(x,y)$$

usando la observación 1) y 2) tenemos:

$$u'=u(x',y')=x'y'+Ax'(x^3-2Ax^4-R(x,y))$$

$$= =x'y'+Ax'\left[\left(\frac{x'}{1-Ax'}\right)^3-2A\left(\frac{x'}{1-Ax'}\right)^4-R\left(\frac{x'}{1-Ax'},\ y'+S'(x',y'\right)\right]$$

usando además que

$$\frac{x'}{1-Ax'}=x'+Ax'^2+A^2x'^3+\ldots$$

$$u'(x',y')=x'y'+Ax'\left[(x'+Ax'^2+\ldots)^3-2A(x'+Ax'^2+\ldots)^4-R(x'+Ax'^2+\ldots),y'+S'(x',y')\right]$$

$$-(x'+Ax'^2+\ldots)^3+2A(x'+Ax'^2+\ldots)^4+R((x'+ax'^2+\ldots),y'+S'(x',y'))$$

$=x'y'+Ax'^4+$ términos de orden ≥ 5 $-x'^3-3Ax'^4-$términos de orden≥ 5

$+\ 2Ax'^4+$ términos de orden ≥ 5

$$u'(x',y')=x'y'-x'^3+\mathcal{R}'(x',y') \text{ donde ord } \mathcal{R}'\geq 5$$

$$v'(x',y')=y'$$

eliminando primas tenemos:

$$F(x,y)=(xy-x^3+\mathcal{R}(x,y),y) \text{ donde ord } \mathcal{R}\geq 5$$

expandiendo $\mathcal{R}(x,y)=Ax^5+S(x,y)y+\mathcal{R}'(x,y)$ donde ord $\mathcal{R}'\geq 6$ y ord $S\geq 4$

sustituyendo en

$$u(x,y)= xy-x^3+Ax^5+S(x,y)y+\mathcal{R}'(x,y)$$

$$u(x,y)=(x+ S(x,y))y-x^3+Ax^5+\mathcal{R}'(x,y)$$

aplicando el lema anterior con m=5

$$u(x',y)= x'y-x'^3+Ax'^5+\mathcal{R}''(x',y)$$

eliminando primas

$$u(x,y)=xy-x^3+Ax^5+\mathcal{R}(x,y) \text{ donde ord } \mathcal{R}\geq 6$$

es decir:

$$F(x,y)=(xy-x^3+Ax^5+\mathcal{R}(x,y),y) \text{ ord } \mathcal{R}\geq 6$$

Sea

$$u'=u - \frac{A}{6} uv$$
$$v'=v$$

$$u'(x,y)= xy-x^3+Ax^5+\mathcal{R}(x,y)- \frac{A}{6} (xy-x^3+Ax^5+\mathcal{R}(x,y))y$$

$$= xy-x^3+Ax^5+\mathcal{R}(x,y)- \frac{A}{6} xy^2+ \frac{A}{6} x^3y- \frac{A^2}{6} x^5y+\mathcal{R}(x,y)y$$

$$u'(x,y)= (x- \frac{A}{6} xy+ \frac{A}{6} x^3)y-x^3+Ax^5+\mathcal{R}^*(x,y) \text{ donde ord } \mathcal{R}^*\geq 6$$

$$v'(x,y)=y \qquad F(x,y)=(u',v')$$

Si tomamos:

$$x'=x- \frac{A}{6} xy- \frac{A}{3} x^3+ \frac{A^2}{12} + x^3y$$

$$y'=y$$

Observamos que:

$$x'y'-x'^3=(x-\frac{A}{6}xy+\frac{A}{6}x^3)y-x^3+Ax^5+\mathcal{R}'(x,y)$$

es decir

$$u'(x',y')=x'y'-x'^3+\mathcal{R}'(x',y')+\mathcal{R}^*(x',y')$$

$$u'(x',y')=x'y'-x'^3+\mathcal{R}(x',y')$$

$$v'=(x',y')=y'$$

y eliminando las primas tenemos:

$$F(x,y)=(xy-x^3+\mathcal{R}(x,y),y) \quad \text{donde ord } \mathcal{R}\geq 6$$

expandiendo

$$\mathcal{R}(x,y)=4Ax^6+S(x,y)y+\mathcal{R}'(x,y) \quad \text{donde ord } \mathcal{R}'\geq 7, \quad S\geq 5$$

y sustituyendo en

$$u(x,y)=xy-x^3+4Ax^6+S(x,y)y+\mathcal{R}'(x,y)$$

$$u(x,y)=(x+S(x,y)y-x^3+4Ax^6+\mathcal{R}'(x,y)$$

usando el lema anterior con m=6

$$u(x',y)=x'y-x'^3+4Ax'^6+\mathcal{R}'(x',y) \quad \text{donde ord } \mathcal{R}'\geq 7$$

y eliminando primas:

$$F(x,y)=(xy-x^3+4Ax^6+\mathcal{R}(x,y),y) \quad \text{donde ord } \mathcal{R}\geq 7$$

Si tomamos

$$u'=u-Au^2$$
$$v'=v$$

tenemos:

$$u'(x,y)=(xy-x^3+4Ax^6+\mathcal{R})-A(xy-x^3+4Ax^6+\mathcal{R})^2$$
$$=xy-x^3+4Ax^6+\mathcal{R}-Ax^2y^2+2Ax^4y-Ax^6+\mathcal{R}'(x,y)$$
$$\text{donde } \mathcal{R}'\geq 7$$

que podemos escribir como:

$$u'(x,y)=xy-x^3+3Ax^6-Ax^2y^2+2Ax^4y+\mathcal{R}^*(x,y)$$
$$=(x-Ax^2y-Ax^4)y+3Ax^4y+3Ax^6+\mathcal{R}^*(x,y)$$
$$v'(x,y)= y$$

Si tomamos

$$x'=x-Ax^2y-Ax^4$$
$$y'=y$$

observamos que:

$$x'y'-x'^3=(x-Ax^2y-Ax^4)y-x^3+3Ax^2y+3Ax^6+\mathcal{R}'(x,y)$$

es decir:

$$u'(x',y')= x'y'-x'^3+\mathcal{R}^*(x',y')+\mathcal{R}'(x',y')$$

que podemos escribir como:

$$u'(x',y')=x'y'-x'^3+\mathcal{R}(x',y') \qquad v'(x',y')=y'$$

y eliminando primas tenemos:

$$F(x,y)=(xy-x^3+\mathcal{R}(x,y),y) \text{ donde ord } \mathcal{R}\geq 7$$

TRANSFORMACION DE LA CURVA $J(p)=0$

Como $u(x,y)= xy-x^3+R(x,y) \qquad v(x,y)=y$

de donde

$$J(p)=\begin{bmatrix} y-3x^2+R_x & ? \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J(p)= y-3x^2+R_x(x,y) \text{ donde ord } R \geq 7$$

como J y R_x son C^{r-1} podemos resolver $J(p)=0$ en una vecindad $(0,0)$ obteniendo por el teorema de la función implícita

$$\phi(x)=y \quad \text{donde } \phi \text{ es } C^{r-1}$$

de donde:

$$\phi(x)-3x^2+ R_x(x,\phi(x))=0$$

lo que significa que

$$\phi(0)=0=\phi_x(0) \qquad \phi_{xx}(0)=6$$

y

$$\frac{d^k\phi}{dx^k}(0)=0 \qquad \text{para } k=3,4,5$$

expandiendo ϕ alrededor de 0, podemos expresar:

$$\phi(x)=3x^2H(x) \text{ donde H es } C^{r-3}$$

y diferenciando ϕ obtenemos que $\phi_{xx}(0)=6 \Rightarrow H(0)=1$ y

$$H_x(0)=H_{xx}(0)=H_{xxx}(0)=0 \qquad (**)$$

Podemos definir K(x) como:

$$H(x)=\left[K(x)\right]^2$$

y de (**) obtenemos que

$$K_x(0)=K_{xx}(0)=K_{xxx}(0)=0 \quad \text{y} \quad K(0)=1$$

Así, si expandemos K obtenemos:

$$K(x)=1+\text{Polinomio de grado} \geq 4$$

de donde

$$xK(x)=x+L(x) \text{ donde ord } L\geq 5 \text{ y L es } C^{r-3}$$

Si tomamos el cambio de coordenadas (que es C^{r-3})

$$x'=x+L(x) \qquad y'=y$$

por la proposición 3.3.7

$$x=x'+M(x') \quad \text{donde ord } M\geq 5$$

sustituyendo en $u(x,y)=xy-x^3+R(x,y)$ tenemos:

$$u(x,y)=(x'+M(x'))y'-(x'+M(x'))^3+R(x'+M(x'),y')$$

$$=x'y'+M(x')y'-x'^3-3x'^2M(x')-3x'(M(x'))^2+R(x'+M(x'),y')$$

$$=x'y'-x'^3+S(x',y') \qquad \text{donde ord } S\geq 6$$

Así

$$u(x',y')= x'y'-x'^3+ S(x',y')$$

además como

$$\phi(x)=3x^2H(x)=3x^2\left[K(x)\right]^2=3\left[xk(x)\right]^2$$

$$=3(x+L(x))=3x'^2$$

$$\phi(x)= 3x'^2$$

Ahora, si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{como} \qquad \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x'} = 0 \qquad \text{pero} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{si} \quad y'=\phi(x)=3x'^2$$

además

$$u(x',y')= x'y'-x'^3+S(x',y')$$

de donde:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = y'-3x'^2+S_{x'}(x',y') \Longrightarrow S_{x'}(x',3x'^2)=0$$

así pues, cambiando la notación obtenemos que:

$$u(x,y)= xy-x^3+R(x,y) \quad \text{donde ord } R\geq 6$$

$$\text{y } R_x(x,3x^2)=0$$

MOVIENDO LA IMAGEN DE $J(p)=0$

Como ord $R\geq 6$ y R es C^{r-3} expandiendo R en una vecindad de $(0,0)$ tenemos:

$$R(x,y)= \frac{\partial^6 R}{\partial x^6}(0,0)x^6+ \frac{\partial^6 R}{\partial x^5\partial y}(0,0)x^5y+\ldots$$

$$R(x,y)= a_1x^6+a_2x^5y+ a_3x^4y^2+\ldots$$

$$R(x,3x^2)=a_1x^6+a_2x^5(3x^2)+a_3(x^4)(3x^2)^2+\ldots \text{factorizando } x^2$$

$$R(x,3x^2)=x^2R'(x) \text{ donde } R' \text{ es } C^{r-5} \text{ y ord } R'\geq 4$$

descomponiendo R' en su parte par e impar tenemos:

$$S'(x)= 1/2\left[R'(x)+R'(-x)\right] \qquad \text{parte par}$$

$$T'(x)= 1/2\left[R'(x)-R'(-x)\right] \qquad \text{parte impar}$$

$$R'(x)=S'(x)+ T'(x)$$

ahora,usando las proposiciones 3.3.8 y 3.3.9. tenemos que existen funciones de clase $C^{\frac{r}{2}-3}$ S y T tal que

$$S'(x)=S(x^2) \quad \text{y} \quad T'(x)=xT(x^2)$$

y como

$$R'(x)=S'(x)+ T'(x) \text{ y ord } R'\geq 4$$

derivando obtenemos que:

$$R_{xxx}(0)\neq 0 \Rightarrow S_{xx}(0)\neq 0$$

de donde ord $S\geq 2$ y tambien ord $T\geq 1$. (*)

Para t cercana a t=0 podemos definir

$$\beta(3t)= \frac{-2tS(t)}{2+ T(t)} \qquad \gamma 3(t)= \frac{-T(t)}{2+T(t)}$$

y por (*), diferenciando obtenemos que ord $\beta\geq 3$ y ord $\gamma\geq 1$
además como

$$R(x,3x^2)= x^2\left[S(x^2)+ xT(x^2)\right]$$

observamos que:

$$\beta(3x^2)+ \left[2x^3+R(x,3x^2)\right] \gamma(3x^2)= \frac{-2x^2S(x^2)+\left[2x^3+R(x,3x^2)\right] (-T(x^2)}{2+ T(x^2)}$$

$$= \frac{-2x^2(S(x^2)-2x^3T(x^2)-T(x^2)R(x,3x^2)}{2 +T(x^2)}$$

$$= \frac{-2x^2 S(x^2) - 2x^3 T(x^2) - T(x^2)\{x^2 [S(x^2) + xT(x^2)]\}}{2 + T(x^2)}$$

$$= \frac{-2x^2 S(x^2) - 2x^3 T(x^2) - x^2 T(x^2) S(x^2) - x^3 [T(x^2)]^2}{2 + T(x^2)}$$

$$= \frac{S(x^2)[-2x^2 - x^2 T(x^2)] + x\ T(x^2)[-\ 2x^2 - x^2 T(x^2)]}{2 + T(x^2)}$$

$$= \frac{(S(x^2) + xT(x^2))(-2x^2 - x^2 T(x^2))}{2 + T(x^2)} = \frac{(S(x^2) + x^2 T(x^2))(2 + T(x^2))(-x^2)}{2 + T(x^2)}$$

$$= -x^2 [S(x^2) + x\ T(x^2)] = -R(x, 3x^2)$$

es decir:

$$\beta(3x^2) + [2x^3 + R(x, 3x^2)]\gamma(3x^2) = -R(x, 3x^2)$$

así, si consideramos el cambio

$$u' = u\ [1 + \gamma(v)] + \beta(v) \qquad y \qquad v' = v$$

el valor de u' sobre la curva J(p)=0 es:

$$u'(x, 3x^2) = [2x^3 + R(x, 3x^2)]\ [1 + \gamma(3x^2)] + \beta(3x^2) =$$

$$= 2x^3 + R(x, 3x^2) + [2x^3 + R(x, 3x^2)]\gamma(3x^2) + \beta(3x^2)$$

usando el desarrollo anterior

$$u'(x, 3x^2) = 2x^3 + R(x, 3x^2) - R(x, 3x^2) = 2x^3$$

definamos R* por

$$u'(x, y) = xy - x^3 + R^*(x, y)$$

entonces:

$$R^*(x, y) = R(x, y) + [xy - x^3 + R(x, y)]\gamma(y) + \beta(y)$$

el cual es de orden ≥ 3 y como $u'(x, 3x^2) = 2x^3 \Rightarrow R^*(x, 3x^2) = 0$

También como $u(x,y)=xy-x^3+R(x,y)$ ord $R\geq 6$ y $R_x(x,3x^2)=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)= y-3x^2+R_x(x,y) \qquad \text{si } y=3x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,3x^2)= R_x(x,3x^2)=0$$

por la expresión de

$$u'(x,y)=u(x,y)\left[1+\gamma(y)\right]+\beta(y), \quad \text{si } y=3x^2$$

tenemos que:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}(x,3x^2)= \left[1+\gamma(3x^2)\right] \frac{\partial u}{\partial x}(x,3x^2)=0$$

y de la expresión de $R^*(x,y)$

$$R^*(x,y)=R(x,y)+u(x,y)\gamma(y)+\beta(y)$$

$$R^*_x(x,y)=R_x(x,y)+ u_x(x,y)\gamma(y)$$

$$\Rightarrow R^*_x(x,3x^2)=0 \quad \text{y como} \quad R^*(x,3x^2)=0$$

si definimos:

$$F(x)=R^*(x,3x^2)=0$$

$$F'(x)=0=R^*_x(x,3x^2)+R^*_y(x,3x^2)6x$$

$$R^*_y(x,3x^2)=0$$

así, cambiando la notación obtuvimos que:

$$u(x,y)=xy-x^3+R(x,y) \quad \text{ord } R\geq 3 \quad \text{y}$$

$$R(x,3x^2)=R_y(x,3x^2)=0$$

donde R y el sistema de coordenadas son $C^{\frac{r}{2}-3}$

Como R satisface las condiciones de la proposición 3.3.6. existe S tal que

$$R(x,y)=\left[y-3x^2\right]^2 S(x,y) \qquad S \text{ es } C^{\frac{r}{2}-5}$$

donde ord S=1, lo que significa que S(0,0)=0, y por el teorema de la función implícita, existe $\alpha(x,y)$ cercana a (0,0), tal que S toma la forma :

$$S(x,y)=\left[1-3x\alpha(x,y)-(y-3x^2)\alpha^2(x,y)\right]\alpha(x,y)$$

observamos que:

$$u(x,y)= xy- x^2+R(x,y) \text{ sustituyendo la expresión de R}$$

$$= xy-x^3+\left[y-3x^2\right]^2 S(x,y) \text{ sustituyendo la expresión de S.}$$

$$=xy-x^3+\left[y-3x^2\right]^2\left[1-3x\alpha-(y-3x^2)\alpha^2\right]\alpha$$

$$=xy-x^3+(y-3x^2)^2\left[\alpha-3x^2 \;-(y-3x^2)\alpha^3\right]$$

$$=xy-x^3+(y-3x^2)^2\alpha \;-3x\alpha^2 \;(y-3x^2)^2-(y-3x^2)^3\alpha^3$$

$$=xy-x^3+\alpha(y-3x^2)(y-3x^2)-3x\,\alpha^2(y-3x^2)^2-(y-3x^2)^3\alpha^3$$
$$=xy-x^3+(y-3x^2)(\alpha y-3x^2\alpha)-3x\alpha^2(y-3x^2)^2-(y-3x^2)^3\alpha^3$$
$$=xy-x^3+(y-3x^2)\alpha y-3x^2\alpha(y-3x^2)-3x\alpha^2(y-3x^2)^2-(y-3x^2)^3\alpha^3$$

$$= xy + (y-3x^2)\alpha y-(x+(y-3x^2)\alpha)^3$$

$$u(x,y)=(x+(y-3x^2)\alpha)y-(x+(y-3x^2)\alpha)^3$$

Si tomamos el cambio de clase $C^{\frac{r}{2}-5}$:

$$x'=x+(y-3x^2)\alpha(x,y) \qquad y'=y$$

obtenemos que:

$$u(x',y')=x'y'-x'^3 \qquad y \;\; v(x',y')=y$$

y eliminando primas tenemos que:

5. *ALGUNOS RESULTADOS GENERALES.*

En realidad la Teoría de Singularidades de Mapeos diferenciables está íntimamente relacionada con las propiedades locales de mapeos diferenciables sobre variedades diferenciables, escrita y desarrollada en un lenguaje mucho más general y que requiere una mayor una mayor preparación teorica para abordar su estudio desde el punto de vista a la topología diferencial. Daremos pues, un breve esboso del marco teórico general en el que está inscrito éste trabajo, presentando algunos resultados sin demostración y dando la referencia donde pueden ser encontrados.

Se establece que para una función $F:N \to P$ diferenciable, donde N y p son variedades de dimensión n y p respectivamente, toda vecindad de un punto $x \in N$ tiene una sub-vecindad difeomórfica en R^n; y el difeomorfismo se puede escoger mandando x a 0; lo mismo se puede hacer para cualquier punto $y \in P$.

Consecuentemente, todo gérmen $(F,x,y):N,x \to P,y$ tiene un representante diferenciable (llamémoslo tambien F) $F: R^n,0 \to R^p,0$ de aquí que los resultados que hemos dado siempre hemos supuesto que $p=0=F(p)$ (independientemente de que sea punto regular o singular).

Por $C^\infty(N,P)$ se entiende la colección de funciones de clase C^∞, $F:N \to P$; en particular $C^\infty(R^n, R^p)$ es un espacio vectorial. Para cualquier m=0,1,.. la C^m topología uniforme sobre $C^\infty(R^n, R^p)$ es la definida por las vecindades en el origen.

Los conjuntos básicos son:

$$B(E)= \{F \in C^\infty \mid \max \left| \frac{\partial^q F_i(x)}{\partial x_1^{q} \ldots x_n^{q_n}} \right| < \varepsilon\}$$

$E>0$; aquí F_i son las funciones coordenas de F y $q=q_1+q_2+\ldots+q_n$; el máximo está tomado $x \in R^n$ i $1 \leq i \leq p$ y todas las derivadas parciales de orden $q \leq m$ la C^m topología ordinaria sobre $C^\infty(R^n, R^p)$ es la topología de la convergencia sobre conjuntos compactos, usando la C^m topología uniforme. Estas topologías pueden llevarse a $C^{\infty}(N,P)$, esencialmente cada función F en $C^{\infty}(N,P)$ tiene una vecindad parecida en $C^{\infty}(R^n, R^p)$ así podemos suponer que el espacio de funciones $C^{\infty}(N,P)$ y $C^{\infty}(R^n, R^p)$ estan dotados de la C^{∞}-topología.

Definición 3.5.1. Una función $F:N\to P$ es estable(topológicamente estable) si todo mapeo suficientemente cercana a F en $C^{\infty}(N,P)$ es analíticamente (topológicamente) equivalente a F.

Definición 3.5.2. Sea $b\in R^n$, una función $F: R^n \to R^p$ es estable en b si, para toda función g suficientemente cercana a F, existe un punto b_g, para el cual los gérmenes $(F,b,F(b))$ y $(g,b_g g(b_g))$ son analíticamente (topológicamente) equivalentes.

La teoría global de estabilidad es bastante extensa, nos concentraremos en la estabilidad local.

Teorema 3.5.1. La siguiente tabla es una lista exhaustiva de los tipos estables de funciones $F:R^n \to R^p$ con $F(0)=0$ y en cada caso, los tipos estables son densos en el conjunto de funciones C^{∞}.

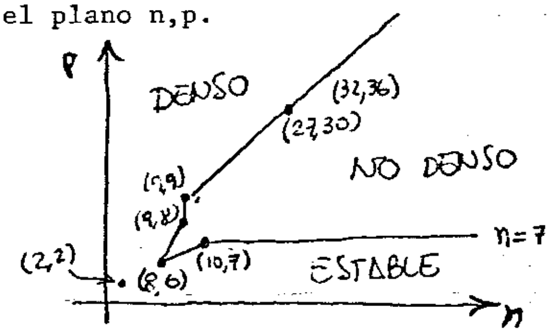
CASO			TIPO	FORMAL NORMAL
$2n\leq p$	Whitney	|13|	punto regular	$y_i=x_i$ $i=1,2,\ldots n$ $y_i=0$ $i=n+1,\ldots,p$
$p=1$	Morse	|11|	punto regular	$y=x_1$
			punto crítico no degenerado de índice r.	$y=-x_1^2-\ldots-x_r^2+x_{r+1}^2+\ldots+x_n^2$
$n=p=2$	Whitney	|3|	punto regular	$y_1=x_1$ $y_2=x_2$
			punto doblés	$y_1=x_1^2$ $y_1=x_2$
			punto cúspide	$y_1=x_1x_2-x_2^3$ $y_2=x_2$

Whitney en |13| extiende la clasificación de gérmenes a las dimensiones para $n,p\leq 5$ así para $p=2n-1$ y $p=2n-2$ los tipos estables son densos.

R. Thom en |12| demuestra que para $n=p=k^2$ donde $k\geq 3$ los tipos estables son no densos: enunciemos el resultado

Teorema 3.5.2. El conjunto de funciones estables $F: R^{n^2} \to R^{n^2}$ no es denso en el espacio de funciones C^∞ para $n\geq 3$.

J. Mather en |4| un artículo apropiadamente titulado "Las dimensiones suaves" ha determinado todos los casos para los cuales los gérmenes estables son densos; la siguiente figura está tomada de ése artículo, tomándolos como puntos en el plano n,p.



Para el caso de singularidades tipo S_k la clasificación es incompleta; para perfeccionar tal situación se puede optar por:

1) Usar derivadas de orden superior y hacer la distinción más fina entre singularidades como la hace Morse para funciones $F: R^n \to R$ y Whitney en el caso $F: R^2 \to R^2$

2) Eliminar algunos tipos como inestables. Es decir eliminar las singularidades inestables, aquellas que son singularidades de funciones que a su vez son inestables. Por ejemplo: $F(x)=x^3$ que tiene una singularidad degenerada en el origen; la función es inestable en el sentido que la singularidad puede hacerse desaparecer alterando la función por una de la forma $F(x)=x^3+Ex$ que en el caso $E<0$ tiene dos singularidades no degeneradas, y en el caso $E>0$ no tiene singularidades.

Así para funciones inestables, tenemos el siguiente teorema dado por R. Thom.

Teorema 3.5.3 Para $n \geq q$, existen funciones $F: R^n \to R^n$ inestables en 0 tal que, para cualquier función suficientemente cercana a F es inestable.

Así para $n \geq q$ los mapeos estables no forman un conjunto denso en el espacio de funciones $F: R^n \to R^n$, pero éstos resultados rebasan el objetivo de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1) THEODORE S. BOLIS, DEGENERATE CRITICAL POINTS, Mathematics Magazine Vol.53 No.5 Noviembre 1980.

2) JAMES CALLAHAN, SINGULARITIES AND PLANG MAPS American Mathematical Montly March 1974.

3) HASSLER WHITNEY, ON SINGULARITIES OF MAPPINGS OF EUCLIDEAN SPACES

Mapping of the plane into the plane

Annals of Mathematics Vol.62 No.3 Noviembre 1955.

4) V.I. ARNOLD, SINGULARITIES OF SMOOTH MAPPINGS, RUSSIAN MATH.SURVEY 1969.

5) TOM M. APOSTOL, CALCULUS VOL.I,II SECOND EDITION W. CLEY INTERATIONAL EDITION.

6) G. BIRKHOFF AND S. MACLANE, A SURVEY OF MODERN ALGEBRA 4th EDITION.

7) WILLIAMSON, CROWEL, TROTTER, CALCULO DE FUNCIONES VECTORIALES.

8) A.I. MALTSEV, FUNDAMENTOS DE ALGEBRA LINEAL, 3a EDICION, EDITORIAL MIR MOSCU.

9) M. SPIVAK, CALCULO EN VARIEDADES ED. REVERTE

10) SAMUEL GITLER H. y ENRIQUE ANTONIANO, TOPOLOGIA DIFERENCIAL,

Notas del ler. Coloquio del Depto. de Matemâticas del C.I.E.A. del I.P.N. 1979

11) J. MILNOR, MORSE THEORY, PRINCETON 1963.

12) R. THOM AND H. LEVINE, SINGULARITIES OF DIFFERENTIABLE MAPPINGS I, BONN 1959

13) H. WHITNEY, ON SINGULARITIER OF MAPPINGS OF EUCLIDEAN SPACES, Symposium Internacional de Topología Algebraica, México 1958.