BIBLIOTECA CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
QA312
.H83
15/T874

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

"DOS ALTERNATIVAS A LA INTEGRAL DE RIEMANN:
LA INTEGRAL B-RIEMANN Y LA INTEGRAL DE LEBESGUE"

TESIS

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presenta

Enrique Hugues Galindo

Hermosillo, Sonora Enero de 1985

A MIS PADRES:

Que continuamente me motivaron y apoyaron durante mis estudios.

A MI ESPOSA E HIJOS:

A quienes les he quitado tiempo para invertirlo en mi formación y particularmente en este trabajo.

INDICE

INTRODUCCION.

Una teoría de integración surge en respuesta a problemas como la determinación de áreas y volúmenes. Nuevos problemas, de probabilidad y física por ejemplo, han tenido respuesta usando alguna teoría de integración. Por esto se considera necesario que un futuro matemático conozca algunas de las teorías de integración de mayor aplicación, así como sus alcances y diferencias. Una de estas, es la teoria iniciada por Lebesgue en 1902.

Para el estudio de la integral de Lebesgue, algunos autores de textos tratan medidas en espacios abstractos, con una discusión previa sin mucha extensión de teoría de la medida en algún espacio euclidiano, para despues ver teoría de integración (ver [8] capítulos 7 y 8). Otros autores prefieren obtener la integral y sus propiedades rápidamente. Inician con una teoría de "integración elemental" para extenderla después a una clase mas amplia de funciones, después de lo cual ellos obtienen una teoría de integración deseada de la cual inducen una medida (ver [1] capítulo 10).

Combinando un poco las posturas anteriores, en este trabajo se pretende presentar una opción didáctica para la preparación de aquellos estudiantes que se introducirán al estudio de la teoría general de integración de Lebesgue, así como también hacer algo de análisis fino.

Tradicionalmente, quizá con el fin de suavizar el paso de la integral de Riemann a la integral de Lebesgue, se prepara al estudiante mediante: un detallado respaso de la integral de Riemann (sobre la cual los estudiantes tienen antecedentes), pasando luego a la integral de Riemann-Stieljes y, finalmente, al estudio de teoría de la medida.

Confiando en que el estudiar y comparar entre si varias teorías de integración prepara al estudiante para introducirse en teorías de integración abstractas, aquí se presentan dos teorías de integración adicionales como alternativas para su estudio, en el cual se recomienda poner énfasis en la omisión de detalles repetitivos. Estas teorías han sido llamadas: La integral B-Riemann y la "integral de Lebesgue".

En el primer capítulo se presenta la integral de Riemann. Se parte de su definición constructiva pasando a caracterizar la clase de funciones Riemann integrables. Dos criterios de caracterización son debidos a Riemann y se basan aparentemente en el tipo de discontinuidades de las funciones. Un tercer criterio es debido a Lebesgue y este se basa en la "cantidad" de discontinuidades de las funciones, siendo de aplicación mas directa que los de Riemann. Cabe señalar, que la diferencia cualitativa entre los criterios de Riemann y Lebesgue es grande, lo cual en parte es razonable por su sepración en el tiempo en una época de desarrollo explosivo del análisis.

La integral B-Riemann, desarrollada en el capítulo 3, es sugerida en el artículo "La alternativa de Bourbaki para la integral de Riemann" [2], por lo cual se le ha dado tal nombre. Esta es definida en forma descriptiva, en oposición a lo hecho en la integral de Riemann, motivada en el estudio de una subclase de funciones Riemann integrables, las funciones regulares; a lo cual se dedica el capítulo 2.

La "integral de Lebesgue" es en realidad una restricción de la integral general de Lebesgue a intervalos cerrados y acotados, razón por la cual ha sido escrita entre comillas. Es en el capítulo 4 donde se presenta esta integral, se evita al máximo el uso de conceptos y propiedades de teoría de la medida (únicamente se utiliza el de medida cero). Su definición, que evoca al teorema fundamental de Lebesgue, es un tanto descriptiva y está sustentada, principalmente, en que toda función continua y monótona sobre un intervalo cerrado tiene derivada finita casi dondequiera en él. Esta teoría de integración resulta ser un buen acercamiento a la general de Lebesgue. En esta última, se encuentra la justificación a que las funciones "Lebesgue integrables" coinciden con las Lebesgue integrables para un intervalo fijo y, así, tambien tienen la virtud de poseer fuertes propiedades de convergencia sin requerir tantas restricciones como en la integral de Riemann, detalle muy apreciable de una teoría de integración.

En el capítulo 5, y último, se hacen las comparaciones entre las clases de funciones integrables entre las teorías de integración presentadas en los capítulos anteriores. También se resaltan algunos de los resultados del análisis fino aquí hecho, presentando como algo intermedio al que se hace en la teoría de integración de Riemann y la de Lebesgue.

I. LA INTEGRAL DE RIEMANN.

En este capítulo y los siguientes $[a,b]$ denota un intervalo fijo no degenerado de números reales; $\varepsilon, \delta, \sigma, \ldots$, son números reales y $f, g, F. G, \ldots$, son funciones reales definidas sobre $[a,b]$, supuestas acotadas cuando sea necesario.

Previo a la definición de integral de Riemann y dar algunas propiedades de esta, se introduce terminología y notación que será utilizada.

Una partición del intervalo $[a,b]$ es cualquier subconjunto $P=\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ tal que $t_0=a<t_1<t_2<\ldots<t_1=b$ y la longitud de los intervalos $[t_{k-1}, t_k]$, $(k=1,2,\ldots,n)$ es denotada por Δ_k.

Para una función f y una partición P de $[a,b]$ se adopta la notación
$M_k(f)= \sup\{f(x)/x\varepsilon[t_{k-1},t_k]\}$ y $m_k(f)= \inf\{f(x)/x\varepsilon[t_{k-1},t_k]\}$

para $k=1,2,\ldots,n$; así como
$M(f)= \sup\{f(x)/x\varepsilon[a,b]\}$ y $m(f)= \inf\{f(x)/x\varepsilon[a,b]\}$.

DEFINICION 1.1.- Sea f una función acotada sobre $[a,b]$ y sea $P=\{a=t_0, t_1, \ldots, t_n=b\}$ una partición de $[a,b]$. Una suma de Riemann de f asociada con la partición P es una suma de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta_k \qquad \text{donde} \quad x_k\varepsilon[t_{k-1},t_k],\ (k=1,2,\ldots,n)$$

y denotada por $S(f,P)$.

Se observa que la elección de x_k es arbitraria, por lo que, para una partición dada, habrá un número infinito de sumas de Riemann.

DEFINICION 1.2.- Sea f una función acotada sobre $[a,b]$. La función f es Riemman integrable sobre $[a,b]$ si existe un número r con la propiedad de que, dado $\varepsilon>0$, existe una partición P_ε tal que

$$|S(f,P)-r| < \varepsilon \quad \text{si} \quad P\supseteq P_\varepsilon.$$

El número r es la integral de Riemann de f sobre $[a,b]$ y denotado por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)dx$.

La clase de funciones que satisfacen esta definición es muy amplia. Sin embargo no toda función acotada es Riemann integrable, como será visto.

DEFINICION 1.3.- La suma superior de Riemann U(f,P) de f respecto a la partición P es

$$U(f,P)= \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta_k$$

y la suma inferior de Riemann L(f,P) es

$$L(f,P)= \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta k$$

De la definición se sigue que para cualquier partición P de $[a,b]$

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

como también

$$U(f,P) \leq \sum_{k=1}^{n} M(f).\Delta_k = M(f).(b-a)$$

y

$$L(f,P) \leq \sum_{k=1}^{n} m(f).\Delta = m(f).(b-a).$$

Así tanto el inf como el sup de las sumas superiores e inferiores existe por estar acotadas, es decir, porque

$$m(f).(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(f).(b-a)$$

Lo que aquí se ha llamado sumas superiores e inferiores de Riemann, a veces es llamado de Darboux, que al parecer es su nombre original. Observese que comparando estas sumas con la suma de Riemann se tiene

$$L(f,P) \leq S(f,P) \leq U(f,P)$$

independientemente de la partición P y la elección de los x_k. Hay una comparación mas importante dada en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.4.- Una función f acotada sobre $[a,b]$ es Riemann integrable si y solo si para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P tal que

$$U(f,P)- L(f,P) < \varepsilon \quad \text{si} \quad P \supseteq P_\varepsilon$$

Demostración:

Si f es Riemann integrable y $r=\int_a^b f$, dado $\varepsilon>0$ existe una partición de $[a,b]$ P_ε tal que si $P=\{a=t_0,t_1,\ldots,t_n=b\}$ es otra partición con $P\supseteq P_\varepsilon$ entonces para cualquier elección de x_k y x'_k en $[t_{k-1},t_k]$

$$\left|\sum_{k=}^{n} f(x_k).\Delta_k - r\right|<\varepsilon/3 \quad y \quad \left|\sum_{k=}^{n} f(x'_k).\Delta_k - r\right|<\varepsilon/3.$$

De donde

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)-f(x'_k)\right].\Delta_k\right| < 2\varepsilon/3.$$

Como $M_k(f)-m_k(f)=\sup\{f(x)-f(x')/\ x,x'\varepsilon[t_{k-1},t_k]\}$
se sigue que para todo $\rho>0$ se pueden elegir x_k y x'_k en $[t_{k-1},t_k]$ tales que
$f(x_k)-f(x'_k)>M_k(f)-m_k(f)-\rho$.

Haciendo la elección correspondiente a $\rho=\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, se tiene

$$\begin{aligned} U(P,f)-L(P,f) &= \sum_{k=1}^{n}\left|M_k(f)-m_k(f)\right|.\Delta_k \\ &< \sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x'_k)\right|.\Delta_k + \sum_{k=1}^{n}\Delta_k.\rho \\ &< \varepsilon . \end{aligned}$$

Lo cual demuestra la condición de necesidad. Para la condición de suficiencia, supóngase ahora que para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε tal que

$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$ si $P\supseteq P_\varepsilon$

Sean $U(f)=\inf\{U(f,P)\}$ y $L(f)=\sup\{L(f,P)\}$ tomados sobre todas las particiones P de $[a,b]$. Se tiene que $L(f)\leq U(f)$, por la definición de estos y que $L(f,P)\leq U(f,P)$ para toda partición P de $[a,b]$. Luego

$$\begin{aligned} L(f,P) &= L(f,P)-U(f,P)+U(f,P) > -\varepsilon+U(f,P) \\ &\geq -\varepsilon+U(f) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U(f,P) &= U(f,P)-L(f,P)+L(f,P) < \varepsilon+L(f,P) \\ &\leq \varepsilon+L(f) \end{aligned}$$

como ε es arbitrario $U(f)\leq L(f)$. Por tanto $U(F)=L(f)$; además llamando r al valor $U(f)=L(f)$

$-\varepsilon+r<S(f,P)<\varepsilon+r$, es decir, que dado $\varepsilon>0$ existe P_ε tal que
$|S(f,P)-r|<\varepsilon$ si $P\supseteq P_\varepsilon$

Por tanto f es Riemann integrable. ∇

En el siguiente ejemplo se utiliza el teorema anterior para confirmar una afirmación hecha:

Ejemplo 1: Para el intervalo $[a,b]$ sea $f(x)=1$ si x es racional en $[a,b]$ y sea $f(x)=0$ si x es irracional. Para cualquier partición $P=\{a=t_0,t_1,\ldots,t_n=b\}$ de $[a,b]$ se tiene

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 1.\Delta_k=b-a$$

y

$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 0.\Delta_k=0$$

Por tanto f no es Riemann integrable, a pesar de ser acotada.

Después de casos como estos, cabe preguntarse:

¿Bajo qué condiciones una función acotada es Riemann integrable?

La respuesta definitiva a esta pregunta la da el criterio de Lebesgue, pero antes de establecerlo se da un acercamiento a esta respuesta dada por Riemann el cual puede ser de interés por ser poco conocido.

Para una partición P del intervalo $[a,b]$, Riemann define $D_k= M_k - m_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ como la oscilación de f en el intervalo $[t_{k-1},t_k]$ y dado $\sigma>0$ denota por $\Sigma(\sigma,P)$ a la suma de las longitudes de aquellos intervalos en que $D_k> \sigma$

TEOREMA 1.5.- Caracterización de Riemann. Si f es una función acotada sobre $[a,b]$ entonces: f es Riemann integrable si y solo si dados $\sigma>0$ y $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε tal que

$$\Sigma(\sigma,P)<\varepsilon \qquad \text{si} \quad P \supseteq P_\varepsilon$$

Demostración:

Si f es integrable, dado $\sigma>0$ y $\varepsilon>0$, existe una partición P_ε tal que

$$U(f,P) - L(f(P) < \sigma\ \varepsilon$$

para toda partición P de $[a,b]$ con $P \supseteq P_\varepsilon$.

Luego

$$\begin{aligned}U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta_k - \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[M_k(f) - m_k(f) \right].\Delta_k \\ &= D_1\Delta_1 + D_2\Delta_2 + \ldots + D_n\Delta_n \\ &= \sum_{j=1}^{i} D_{kj}\, \Delta_{kj} + \sum_{j=i+1}^{n} D_{kj}\Delta_{kj} \\ &\geq \sum_{j=1}^{i} D_{kj}\, \Delta_{kj} > \sigma\Big(\sum_{j=1}^{i} \Delta_{kj}\Big) = \sigma\, \Sigma(\sigma,P)\end{aligned}$$

[donde $k_1,k_2,\ldots,k_n$ es una reordenación de los índices $1,2,\ldots n$ de tal forma que $D_{kj}>\sigma$ solo para $j=1,2,\ldots,i$]

por tanto

$$\Sigma(\sigma,P) < \frac{U(f,P) - L(f,P)}{\sigma} < \varepsilon \quad \text{si} \quad P \supseteq P_\varepsilon.$$

En la otra dirección, sea $D= \max\{1, \sup\{f(x)-f(y)/x,y\varepsilon[a,b]\}\}$ dados $\sigma>0$ y $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε tal que

$$\Sigma(\sigma,P) < \varepsilon/2D \qquad \text{si} \qquad P \supseteq P_\varepsilon.$$

se tiene

$$\begin{aligned}U(f,P) - L(f,P) &= D_1\Delta_1 + D_2\Delta_2 + \ldots + D_n\Delta_n = \sum_{j=1}^{i} D_{kj}\Delta_{kj} + \sum_{j=i+1}^{n} D_{kj}\Delta_{kj} \\ &\leqslant D \sum_{j=1}^{i} \Delta_{kj} + \sigma \sum_{j=i+1}^{n} \Delta_{kj} \\ &\leqslant D\Sigma(\sigma,P) + \sigma.(b-a) < \varepsilon\end{aligned}$$

escogiendo $\sigma = \varepsilon/ 2(b-a)$, si $P \supseteq P_\varepsilon$ ∇

Como será visto el criterio de Lebesgue da mayor claridad a la cuestión de integrabilidad, aunque en el fondo es equivalente a la caracterización de Riemann. Un concepto básico que se requiere es el de conjunto de medida cero.

DEFINCION 1.6.- Un conjunto S de números reales tiene medidad cero si, para todo $\varepsilon>0$, hay una cubierta numerable de intervalos abiertos cuya unión contiene a S y la suma total de sus longitudes es menor que ε.

Si los intervalos son denotados por (a_k,b_k), la definición requiere que

$$S \subset \bigcup_k (a_k,b_k) \qquad \text{y} \qquad \sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon$$

donde k corre sobre un conjunto finito o sobre todos los naturales según la familia $\{(a_k,b_k)\}$ sea finita o infinita.

Una propiedad de los conjuntos de medida cero es que la unión de una cantidad numerable de ellos es de medida cero lo cual se sigue de la definición sin grandes dificultades. Así dado que un conjunto que consiste de un punto tiene medida cero se sigue que todo conjunto numerable es de medida cero.

DEFINICION 1.7.- Sea f una función definida y acotada sobre un intervalo S. Si $T\subseteq S$, el número $\Omega_f(T)=\sup\{f(x)-f(y)/x\varepsilon T, y\varepsilon T\}$ es llamado la oscilación de f sobre T. La oscilación de f alrededor de x es definida como el número

$$W_f(x)=\lim_{h\to 0+}\Omega_f((x-h,x+h)\cap S).$$

Obsérvese que este límite siempre existe, dado que $\Omega_f((x-h,x+h)\cap S)$ es una función decreciente de h. De hecho, $T_1\subseteq T_2$ implica $\Omega_f(T_1)\leq\Omega_f(T_2)$. También que, $W_f(x)=0$ si y solamente f es continua en x, como fácilmente se puede mostrar.

TEOREMA 1.8.- Sea f una función definida y acotada sobre $[a,b]$, y sea $\varepsilon>0$ dado. Si se tiene $W_f(x)<\varepsilon$ para todo x en $[a,b]$, entonces hay un $h>0$ (dependiento únicamente de ε) tal que para todo subintervalo cerrado $T\subseteq[a,b]$, se tiene que $\Omega_f(T)<\varepsilon$ siempre que la longitud de T sea menor que h.

Demostración:

Para cada x en $[a,b]$ hay un número positivo h_x tal que
$\Omega_f((x-h_x,\ x+h_x)\cap[a,b])<W_f(x)+[\varepsilon-W_f(x)]=\varepsilon.$

El conjunto de intervalos $\{(x-h_x/2,\ x+h_x/2)\}$forman una cubierta abierta de $[a,b]$. Por compacidad, un número finito de estos (digamos k) cubren $[a,b]$. Sean sus longitudes $h_1, h_2,\dots,h_k$ y sea h el mas pequeño de estos números. Cuando el intervalo T tiene longitud menor que h, entonces T esta parcialmente cubierto por al menos uno de estos intervalos, digamos por $(x_p-h_p/2,x_p+h_p/2)$. Sin emabrgo, el intervalo (x_p-h_p,x_p+h_p) cubre completamente T (dado que $h_p>2\ h$). Además, en $(x_p-h_p,x_p+h_p)\cap[a,b]$ la oscilación de f es menor que ε. Esto implica que $\Omega_f(T)<\varepsilon$.

∇

TEOREMA 1.9.- Criterio de Lebesgue. Sea f una función acotada sobre $[a,b]$ y sea E el conjunto de discontinuidades de f en $[a,b]$. Entonce f es Riemann integrable sobre $[a,b]$ si y solo E tiene medida cero.

Demostración:

Suponiendo primero que el conjunto E de discontinuidades no tiene medida cero. Entonces el conjunto E puede ser escrito como la unión numerable

$$E=\bigcup_{r=1}^{\infty} Er \qquad \text{donde} \qquad E_r=\{ x \in [a,b] \ / \ W_f(x) \geq 1/r\}$$

Luego, si E no tiene medida cero entonces algún conjunto E_r tampoco es de medida cero. Por lo tanto, hay algún $\varepsilon>0$ tal que toda colección de intervalos abiertos que cubren E_r tienen suma total de longitudes mayor o igual que $\varepsilon.r$. Si para cualquier partición P de $[a,b]$, $U'(f,P)$ y $L'(f,P)$ denotan las porciones de las sumas superior e inferior de Riemann extendidas sobre los subintervalos de P conteniendo puntos de E_r y $U''(f,P)$ y $L''(f,P)$ denotan las porciones restantes se tiene

$$U(f,P) - L(f,P)= U'(f,P) - L'(f,P)+U''(f,P) - L''(f,P)$$
$$\geq U'(f,P) - L'(f,P)$$

Los intervalos sobre los que se toma $U'(f,P) - L'(f,P)$ cubren E_r, así la suma total de sus longitudes es a lo menos $\varepsilon.r$. Además en estos intervalos se tiene $M_k(f) - m_k(f) \geq 1/r$, de aquí que $U'(f,P) - L'(f,P) \geq\varepsilon$, para toda partición P. Por tanto, de acuerdo al Teorema 1.4, f no es integrable. En otras palabras, si f es Riemann integrable entonces E tiene medida cero.

Ahora suponiendo que E tiene medida cero, se mostrará que la condición del Teorema 1.4 es satisfecha. Otra vez se escribe $E=\bigcup_{r=1}^{\infty}E_r$, donde E_r es el conjunto de puntos x en los cuales $W_f(x)\geq 1/r$. Dado que $E_r\subseteq E$, cada E_r tiene medida cero, así E_r puede ser cubierto por intervalos abiertos cuya suma total de longitudes es menor que $1/r$. Dado que E_r es compacto, como puede probarse facilmente, un número finito de estos intervalos cubren E_r. La unión de estos intervalos es un conjunto abierto el cual se denotará por A_r. El complemento $B_r= [a,b] - A_r$ es la unión de un número finito de subintervalos cerrados de $[a,b]$. Sea I un subintervalo de B_r. Si $x\in I$, entonces $W_f(x)< 1/r$ así, por el Teorema 1.8, hay un $h> 0$ (dependiendo solamente de r) tal que I puede ser además subdividido en un número finito de subintervalos T de longitud menor que h en los cuales $\Omega_f(T)< 1/r$. Los puntos finales de todos estos subintervalos determinan una partición P_r de $[a,b]$. Si P es otra partición de $[a,b]$ con $P \supseteq P_r$ se puede escribir

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f)- m_k(f)]\Delta x_k$$

$$= [U'(f,P) - L'(f,P)] + [U''(f,P) - L''(f,P)]$$

donde la primera diferencia consta de los términos que provienen de los subintervalos conteniendo los puntos E_r, y la segunda diferencia los términos restantes. En el k-ésimo término de la segunda diferencia se tiene $M_k(f)- m_k(f)< \frac{1}{r}$ y de aquí $U''(f,P) - L''(f,P)< \frac{b-a}{r}$. Dado que A_r cubre todos los intervalos que contribuyen a $U'(f,P) - L'(f,P)$, se tiene

$$U'(f,P) - L'(f,P)\leq \frac{M(f)-m(f)}{r}$$

por tanto

$$U(f,P) - L(f,P)< \frac{M(f)-m(f)+b-a}{r}$$

dado que esto se cumple para todo $r\geq 1$, la condición se cumple. ∇

Del criterio de Lebesgue se sigue que las funciones continuas y las monótonas son Riemann integrables. También se sigue que las funciones Riemann integrables forman un algebra lineal cerrada bajo límites uniformes. Esto es

PROPOSICION 1.10.- Si $f,g,fn(n\in \mathbb{N})$ son funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ y $\alpha,\beta \in R$ entonces:

i) $\alpha f + \beta g$ es Riemann-integrable

ii) $f.g$ es Riemann integrable

iii) $\lim_{n\to\infty} fn$ es Riemann integrable cuando fn converge uniformemente.

Si f es una función Riemann integrable sobre $[a,b]$, tambien se sigue del criterio de Lebesgue que f es Riemann integrable sobre $[a,x]$ para todo $x\in[a,b]$. Por otra parte, si $F(x)= \int_a^x f$ la función F resulta continua, satisface una condición de Lipschitz y existe $F'(x)$ en cada punto de continuidad de f en (a,b), con $F'(x)=f(x)$ (como se verá posteriormente).

TEOREMA 1.11.- Del valor intermedio para integrales. Si f es una función Riemann integrable sobre $[a,b]$ entonces existe $C\in[m(f), M(f)]$ tal que $\int_x^y f= C(x-y)$ para $x,y\in [a,b]$.

Este es un resultado elemental que se sigue de las propiedades de las integrales y la continuidad de los números reales. Un resultado mas fino relacionado con este es el siguiente.

LEMA 1.12.- Si f es una función Riemann integrable sobre $[a,b]$ y C es un número real tal que $\int_x^y f = C(y-x)$ para $x,y \in [a,b]$ entonces $\lim_{y \to x} C = f(x)$ si x es punto de continuidad de f.

Demostración:

Nótese que C depende de (x,y) y que $C \in [m,M]$, donde m y M representan el inf y el sup, respectivamente, del conjunto $S = \{S \in R /\ S = f(t)$ para algún $t \in [x,y]\}$,

Para un x fijo la igualdad $\int_x^y f = C(y-x)$ depende solo de y, así como m y M; esto es

$$m(y) \leq C(y) \leq M(y) \qquad (1)$$

Luego, si x es un punto de continuidad de f, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad |x-t| < \delta$$

o bien

$$f(t) - \varepsilon/2 < f(x) < f(t) + \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad t \in (x-\delta, x+\delta);$$

por la definición de m(y) y M(y) se tiene

$$m(y) - \varepsilon/2 \leq f(x) \leq m(y) + \varepsilon/2$$

y

$$M(y) - \varepsilon/2 \leq f(x) \leq M(y) + \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad y \in (x-\delta, x+\delta).$$

Así

$$|f(x) - m(y)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x) - M(y)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

si

$y \in (x-\delta, x+\delta)$. De donde

$$\lim_{y \to x} m(y) = \lim_{y \to x} M(y) = f(x)$$

y junto con (1)

$$\lim_{y \to x} C(y) = f(x)$$

∇

DEFINICION 1.13.- Una función f sobre $[a,b]$ satisface una condición de Lipschitz si hay un número positivo A tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq A\ |x-y|$$

para todos los puntos $x,y \in [a,b]$.

TEOREMA 1.14.- Si f es una función Riemann integrable sobre $[a,b]$ y F se define por la ecuación

$$F(x) = \int_a^x f \quad \text{para} \quad x \in [a,b]$$

entonces

i) F es continua en $[a,b]$

ii) F satisface una condición de Lipschitz

iii) La derivada de F existe en cada punto $x \in (a,b)$ en que f es continua y $F'(x)=f(x)$ en esos puntos.

Demostración:

De acuerdo con el teorema 1.11 se tiene que

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f = C\ (x-y) \qquad (2)$$

donde $m(f) \leq C \leq M(f)$. Así la primera afirmación se sigue de aquí, pues

$m(f).(y-x) \leq F(y) - F(x) \leq M(f).(y-x) \quad x,y \in [a,b]$ y al hacer tender y a x se obtiene

$$\lim_{y \to x} F(y) = F(x)$$

Para la segunda afirmación sea $A = \max\{|m(f)|, |M(f)|\}$ entonces

$$|F(y) - F(x)| = |C\ .\ (y-x)| \leq A\ .\ |x-y|$$

La última afirmación se deduce de la ecuación (2) dividida por y-x y del Lema 1.12

$$F'(x) = \lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y-x} = \lim_{y \to x} C = f(x)$$

∇

Las funciones F que son la integral de alguna función acotada sobre $[a,x]$, para cada $x \in [a,b]$, son llamadas "primitivas". Los resultados anteriores permiten concluir que, en la Teoría de Integración de Riemann, la clase de primitivas son las funciones F tales que

1) F es Lipschitz
2) Hay una función acotada $f: [a,b] \to R$, continua excepto en un conjunto de medida cero, tal que $F'(x)=f(x)$ excepto en un conjunto de medida cero.

Por último, obsérvese que si f es Riemann integrable y g=f c.f.e. (c.f.e. significa con finitas excepciones) se sigue que g es Riemann integrable, con la misma primitiva de f. Aquí la condición "c.f.e." no puede ser debilitada a c.n.e. (c.n.e. significa con numerables excepciones) como lo muestra el ejemplo 1, donde se da una función igual a la indénticamente nula, excepto en puntos racionales.

2. HACIA UNA TEORIA DE INTEGRACION.

En el capítulo 1 se ha dicho que la clase de funciones Riemann integrables contiene las funciones continuas y a las monótonas. Hay una propiedad que comparten estas dos clases especiales de funciones: en todo punto de su dominio poseen límites laterales finitos. Esto es evidente para las funciones continuas y en lo que respecta a las funciones monótonas, se establece enseguida.

PROPOSICION 2.1.- Toda función monótona sobre $[a,b]$ posee límites laterales finitos en todo punto.

Demostración:

Considerando una función creciente se demostrará la existencia del límite por la izquierda en todo punto (cualquier otro caso puede ser demostrado en forma análoga). Siendo f creciente, el conjunto

$$I_x = \{y \in R \ / \ y=f(t), \text{ para algún } t\varepsilon(a,x)\}$$

con $x\varepsilon\ (a,b]$ esta acotado por el número $f(x)$. Por tanto tiene una mínima cota superior que será denotada por A. Evidentemente $A \leq f(x)$.

Dado $\varepsilon>0$, por la definición de A como mínima cota superior, existe $\delta>0$ tal que

$$0 < x - \delta < x \qquad y \qquad A - \varepsilon < f(x-\delta) \leq A \qquad (1)$$

Por la monotonía $f(x-\delta)\leq f(t) \leq A$ para todo $t\ \varepsilon(x-\delta,x)$, lo cual combinado con (1) lleva a:

$$|f(t) - A| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad t\varepsilon(x-\delta,x).$$

De aquí que $A=f(x-)$ y como x es arbitrario, f posee límites laterales por la izquierda en todo punto de $(a,b]$.

∇

Disponiendo de este resultado se puede demostrar que una función monótona efectivamente es Riemann integrable sobre $[a,b]$, lo cual se seguirá del criterio de Lebesgue.

PROPOSICION 2.2.- Si f es una función monótona sobre $[a,b]$ entonces el conjunto E de discontinuidades de f en $[a,b]$ es numerable.

Demostración:

De la proposición anterior se tiene que f posee límites laterales en todo punto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que f es creciente, en cuyo caso $f(x-)\leq f(x+)$ para todo $x\varepsilon (a,b)$. Luego $E=\{ x\varepsilon[a,b] / f(x-)< f(x+), f(x)<f(x+)$ si $x=a$ o $f(x)> f(x-)$ si $x=b\}$. Como para cada $x\varepsilon E$ podemos asignar un número racional $r(x)$ tal que

$f(x-)< r(x)< f(x+)$, $f(x)< r(x)< f(x+)$ si $x=a\varepsilon E$ o

$f(x-)< r(x)< f(x)$ si $x= b\varepsilon E$

la función $r:E\to Q$ es uno a uno. Por tanto E es numerable. ∇

En este capítulo interesa estudiar las funciones con límites laterales finitos en todo punto. Estas funciones de interes con llamadas regulares.

DEFINICION 2.3.- Una función $f:[a,b]\to R$ se llama regular si tiene límites laterales finitos en todo punto.

Es obvio que en la clase de funciones regulares hay funciones que no son continuas ni monótonas. Algo que facilmente puede ser establecido es que las funciones regulares forman un álgebra de funciones respecto a las operaciones puntuales "+" y "." (por las propiedades aritméticas de los límites), es decir:

PROPOSICION 2.4.- Sea L el conjunto de funciones regulares de $[a,b]$ en R. Entonces:

i) $f,g\varepsilon L;\ \alpha,\beta\ \varepsilon R \Rightarrow \alpha f + \beta g\ \varepsilon L$

ii) $f,g\varepsilon L \Rightarrow f.g\varepsilon L$.

Así como se establece en los siguientes resultados, las funciones regulares tienen algunas propiedades interesantes adicionales.

PROPOSICION 2.5.- Toda función regular es acotada.

Demostración:

Supongamos que f es regular y no acotada. Entonces para cada $n\varepsilon \mathbb{N}$ existe al menos un $x_n\varepsilon[a,b]$ tal que $f(x_n)\geq n$. Sea $A=\{x_n\}$, al ser $A\subset[a,b]$, esta acotado, es infinito y según el teorema de Bolzano-Weirstrass existe al menos un punto de acumulación $x_A \in [a,b]$ de A. Por definición de punto de acumulación, existe en A una sucesión x'_n que converge a x_A. Sin pérdida de generalidad se puede suponer $x'_n < x_A, \forall n \in \mathbb{N}$.

Así que $x'_n \uparrow x_A$. Luego como $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \infty$ se ha encontrado una contradicción a la hipótesis de que f es regular, pues $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{x\to A-} f(x) = f(x-)$ existe y es finito. Por tanto f es acotada. ∇

PROPOSICION 2.6.- El límite uniforme de funciones regulares es regular.

Demostración:

Sean $f_n, f: [a,b] \to R$ funciones tales que $f_n \to f$ uniformemente y f_n es regular $\forall n \in \mathbb{N}$. Se mostrará que $f(x+)$ existe y es finito $\forall x \in [a,b)$ (análogamente se podrá mostrar que $f(x-)$ existe y es finito $\forall x \in (a,b]$.

Sea $x \in [a,b)$ entonces $f_n(x+)$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$.

Denótese $A_n := \lim_{t\to x+} f_n(t) = f_n(x+)$, $(n=1,2,\ldots)$ (2)

como $f_n \to f$, en particular para $t \in [x,b]$ se tiene que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq N$ entonces

$$| f_n(t) - f_m(t) | \leq \varepsilon/2 \quad , \text{ esto es,}$$

$$-\varepsilon/2 \leq f_n(t) - f_m(t) \leq \varepsilon/2 \text{ para } n,m \geq N \text{ y } t \in [x,b) \quad (3)$$

Haciendo tender t a x en (3), por (2), se tiene que

$$-\varepsilon/2 \leq A_n - A_m \leq \varepsilon/2 \quad \text{o bien que}$$

$$| A_n - A_m | \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N.$$

De aquí que A_n forma una sucesión de Cauchy y por ser R espacio completo A_n converge a un número A ($A_n \to A$).

Luego por las convergencias con que se cuenta, puede ser elegido $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$| f(t) - f_n(t) | < \varepsilon/3$$

para todo $t \in [a,b]$ y

$$|A_n - A| < \varepsilon/3$$

Si $n \geq M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ puede ser elegido $\delta n > 0$ tal que

$$|f_n(t) - A_n| < \varepsilon/3 \quad \text{si} \quad t \in (x, x+\delta n).$$

De donde, si $n \geq M$,

$$|f(t)-A| \leq |f(t)-f_n(t)| + |f_n(t)- A_n| + | A_n-A| < \varepsilon$$

para $t\varepsilon(x,x+ \delta n)$; esto equivale a que $f(x +)=A$

∇

Desde el punto de vista de toda teoría de integración el ejemplo mas elemental de funciones integrables son las escalonadas, que son las que toman un número finito de valores, cada uno sobre uno o mas intervalos, posiblemente degenerados (en otras palabras, una combinación lineal de funciones características de intervalos, posiblemente degenerados). Se sigue directamente de las definiciones que toda función escalonada es regular, como también un resultado, un poco mas fino, acerca de estas funciones que es establecido de la siguiente forma.

COROLARIO 2.7.- Todo límite uniforme de funciones escalonadas es regular.

Y como se ve en el siguiente resultado, no hay otro tipo de funciones regulares; por lo que el corolario da una definición alternativa de regularidad.

TEOREMA 2.8.- Una función f es regular si y solo si es el límite uniforme de funciones escalonadas.

Demostración:

i) Condición de suficiencia. Suponiendo que existe una sucesión de funciones escalonadas $\{f_n\}$ que convergen uniformemente a f ($f_n \xrightarrow{u} f$), f_n es regular para todo $n\varepsilon\mathbb{N}$ y, en consecuencia de la proposición 2.6, f es regular.

ii) Condición de necesidad. Suponiendo que f es regular, entonces para cada natural n y cada $x\varepsilon[a,b]$ existe un intervalo abierto $V(x)=(y(x),z(x))$ conteniendo a x tal que

$$|f(s)-f(t)| < 1/n \quad \text{si } s \text{ y } t \text{ están (ambos) en}$$
$$(y(x),x) \cap [a,b] \quad \text{o en } (x,z(x)) \cap [a,b]$$

Los $V(x)$ forman una cubierta abierta de $[a,b]$, por tanto existe una subcubierta finita de intervalos $V(x_i)$. Sea $\{C_j\}_{0\leq j\leq m}$ la sucesión estrictamente creciente que consiste de los puntos $a,b,x_i,y(x_i)$ y $z(x_i)$. Como cada C_j está en algún $V(x_i)$, C_{j+1} está en el mismo $V(x_i)$ o se tendrá $C_{j+1}= z(x_i)$, para $j<m-1$; Así si s,t estan en el mismo intervalo (C_j,C_{j+1}) entonces $|f(s)-f(t)| < 1/n$. Luego definiendo g_n como la función

$$g_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x=C_j \ , \quad j=0,1,\ldots,m \\ f\left(\frac{C_j + C_{j+1}}{2}\right) & \text{si } x \ (C_j,C_{j+1}), \ j=0,1,\ldots,m- \end{cases}$$

se tiene que g_n es escalonada y que

$$||f-g_n||= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)- g_n(x)| < \frac{1}{n}$$

Por tanto g_n converge uniformemente a f. ∇

Puede demostrarse que para toda función escalonada f existe una función continua F (lineal por pedazos) cuya derivada existe y es igual a f(x) excepto en los puntos de discontinuidad de f, un conjunto finito, por lo tanto se puede escribir $F'(x)=f(x)$ c.f.e. Esto último puede ser extendido a funciones regulares como se muestra a continuación.

De acuerdo con el criterio de Lebesgue toda función escalonada es Riemann integrable y toda función regular al ser límite uniforme de funciones escalonadas tambien lo es. Su conjunto de discontinuidades es a lo mas numerable, por lo que apoyándose además en el Teorema 1.12, se concluye:

TEOREMA 2.9.- Para toda función regular f sobre un intervalo $[a,b]$ hay un función continua F cuya derivada existe y es igual a f(x) excepto en un conjunto a lo mas numerable de valores, esto es $F'(x)=f(x)$ c.n.e.

3. UNA TEORIA ELEMENTAL DE INTEGRACION.

Lo expuesto anteriormente permite una definición especial de primitiva de una función:

DEFINICION 3.1.- Una función F es una "primitiva c.n.e" de una función f sobre $[a,b]$ si: i) F es continua y ii) La derivada de F existe y $F'(x)=f(x)$ con numerable excepciones (c.n.e).

Si el conjunto de excepciones es vacío F es una "primitiva estricta" de f.

Así toda función regular tendrá una primitiva en este sentido pero, como será expuesto posteriormente, hay un superconjunto de las funciones regulares que admiten este tipo de primitivas. Bajo estas circunstancias se está tentando a definir un tipo especial de integral que llamaremos de B-Riemann (B por Bourbaki).

DEFINICION 3.2.- Una función f definida sobre $[a,b]$ es B-Riemann integrable sobre $[a,b]$ si tiene una primitiva c.n.e F y el número $B=\int_a^b f=F(b)-F(a)$ es su integral B-Riemann.

Para una función f B-Riemann integrable la primitiva c.n.e no es única pero B resulta ser único, es decir, la integral está bien definida como se puede establecer a partir de los siguientes resultados.

LEMA 3.3.- Sean f y g funciones continuas sobre $I=[a,b]$ y además, g creciente en I. Si f y g admiten derivada en todo punto de I fuera de un subconjunto numerable A de este intervalo ($g'(x)$ puede ser infinita en algunos de estos puntos) y si en cada uno de estos puntos $|f'(x)| \leq g'(x)$ (1)
entonces $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$. (2)

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario y (a_n) una ordenación de los puntos de A. Sea J el subconjunto de puntos $y \in I$ tales que, para todo $x \in [a,y]$, se tiene

$$|f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n} \quad (3).$$

será mostrado que J=I. Primero observesé que J es no vacío pués $a \in J$ y como $y \in J$ implica que si $y'<y$ entonces $y' \in J$ (de acuerdo a la definición), J será un intervalo de origen a; si c es extremo superior, se tiene que $c \in J$; en efecto, para todo $x<c$, se tiene la relación (3) y forzosamente

$$|f(x) - f(a)| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \sum_{a_n<c} \frac{1}{2^n}$$

pues al reemplazar x por c en el miembro derecho de (3) obtenemos algo mayor. De donde haciendo tender x a c en la desigualdad, por la continuidad de f, resulta que c satisface (3).

Ahora será mostrado que necesariamente se tiene c=b. Suponiendo que $c<b$, se tiene que, $c \notin A$ o $c \in A$; para la primera de estas posibilidades $f'(c)$ y $g'(c)$ existen. Si $g'(c)$ es finita entonces se puede escribir $f'(c)=u\, g'(c)$ con $|u| \leq 1$; la función $f-ug$ tiene en el punto c una derivada nula y existirá un y tal que $c<y\leq b$ para el cual si $x \in [c,y]$ se tiene

$$|f(x)-f(c)-u(g(x)-g(c))| \leq \varepsilon\,(x-c)$$

de aquí que

$|f(x)-f(c)| \leq g(x)-g(c) + \varepsilon(x-c)$ y teniendo en cuenta (3), en la cual se ha reemplazado x por c

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &= |f(x)-f(c) + f(c)-f(a)| \leq |f(x)-f(c)|+|f(c)-f(a)| \\ &\leq g(x)-g(c)+ \,(x-c)+g(c)-g(a)+ \,(c-a)+ \varepsilon \sum_{a_n<c} \frac{1}{2^n} \\ &\leq g(x)-g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Se tiene $y \in J$, lo cual es una contradicción con las propiedades de c. Si $g'(c)=\infty$, existe entonces un y tal que $c< y\leq b$ para el que si $x \in [c,y]$ se tiene, por una parte

$$|f(x) - f(c)| \leq (|f'(c)|+ 1)(x-c)$$

y por otra

$$g(x) - g(c) \geq (|f'(c)|+ 1)\,(x-c)$$

de donde

$$|f(x) - f(c)| \leq g(x)-g(c) \leq g(x) - g(c) +\varepsilon\,(x-c)$$

y concluimos como antes.

Por último si se tiene $c=a_k$ para algún índice k, como f es continua en el punto a_k, existe un y tal que $c<y\leq b$ para el que si $x\varepsilon[c,y]$ se tiene

$$|f(x) - f(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

de donde tomando en cuenta (3) en la que se ha reemplazado x por c

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &= |f(x)-f(c)+f(c)-f(a)| \leq |f(x)-f(c)| + |f(c)-f(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^k} + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \sum_{a_n<c} \frac{1}{2^n} \\ &\leq g(x)-g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

lo cual es una nueva contradicción. Por tanto J=I y como ε en (3) es arbitrario se tiene que

$$|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)$$

∇

TEOREMA 3.4.- Para que una función continua f sobre un intervalo $I=[a,b]$ sea constante, es suficiente que ella tenga una derivada nula en todos los puntos de I excepto en un conjunto a lo mas numerable.

Demostración:

Se sigue del lema previo tomando $g(x)=c$ para todo $x\ \varepsilon[a,b]$.

∇

De aquí que si F y K son dos primitivas c.n.e de f entonces H=F-K es continua y existe $H'(x)=0$ c.n.e , por lo que H será constante. Esto último lleva al establecimiento del siguiente resultado.

TEOREMA 3.5.- Si F y K son dos primitivas c.n.e de f sobre el intervalo $I=[a,b]$ entonces:

$$B = \int_a^b f = F(b) - F(a) = K(b) - K(a).$$

No es dificil mostrar que el conjunto de funciones B-Riemann integrables sobre un intervalo $[a,b]$, I_a^b, forman un espacio lineal, es decir, que si $f,g\varepsilon\ I_a^b$ y $\alpha,\beta\varepsilon$ R entonces $\alpha f+\beta g\varepsilon\ I_a^b$.

Otra característica de I_a^b es que es cerrado para límites uniformes, esto es:

TEOREMA 3.6.- Sea h_n una función B-Riemann integrable sobre $[a,b]$ para $n \varepsilon \mathbb{N}$. Si $h_n \to h$ uniformemente sobre $[a,b]$, entonces h es B-Riemann sobre $[a,b]$.

Demostración:

Para cada $n \varepsilon \mathbb{N}$, al ser h_n B-Riemann integrable existe una función H_n continua sobre $[a,b]$ tal que $H_n'(x) = h_n(x)$ c.n.e . Si $G_n(x) = H_n(x) - H_n(x_0)$ con $x_0 \varepsilon [a,b]$ entonces $G_n(x)$ es continua, $G_n'(x) = H_n'(x) = h_n(x)$ c.n.e y además $G_n(x_0) \to 0$.

Sea ε un número positivo dado. Por la convergencia uniforme de h_n se puede elegir N tal que si $n,m \geq N$ entonces

$|h_n(t) - h_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $(a \leq t \leq b)$. Luego aplicando el lema 3.3 a las funciones $f(x) = G_n(x) - G_m(x)$ y $g(x) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} x$ se obtiene que

$$|G_n(x) - G_m(x) - G_n(t) + G_m(t)| \leq \frac{|x-t|\ \varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

para cualesquier x y t sobre $[a,b]$ si $n,m \geq N$. Así la desigualdad

$$|G_n(x) - G_m(x)| \leq |G_n(x) - G_m(x) - G_n(x_0) + G_m(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$$(a \leq x \leq b;\ n,\ m \geq N)$$

lleva a que $\{G_n\}$ converge uniformemente. Sea $G(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(x)$ para $x \varepsilon [a,b]$. Fijando x se define

$$\Phi_n(t) = \frac{G_n(t) - G_n(x)}{t - x} \quad , \quad \Phi(t) = \frac{G(t) - G(x)}{t - x} \qquad (10)$$

para $a \leq t \leq b$, $t \neq x$ y $n \varepsilon \mathbb{N}$. Si $D = \{x \varepsilon [a,b] /\ G_n'(x)$ no existe o $G_n'(x) \neq h_n(x)$ para algún $n \varepsilon \mathbb{N}\}$ entonces D es numerable y

$$\lim_{t\to x} \Phi_n(t) = G_n'(x) \quad \text{para} \quad x \varepsilon [a,b] - D \quad \text{y todo } n \varepsilon \mathbb{N}.$$

De la primera parte de la desigualdad (9) se tiene

$$|\Phi_n(t) - \Phi_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (n,m \geq N)$$

así que $\{\Phi_n\}$ converge uniformemente, para $t \neq x$. Dado que $\{G_n\}$ converge a G concluimos de (10) que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = \Phi(t)$$

uniformemente para $a \leq t \leq b$, $t \neq x$.

Si se aplica ahora el teorema de límites iterados [11 ,p.149,T7.11] a $\{\Phi_n\}$ resultará

$$G'(x)=\lim_{t\to x}\Phi(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}\Phi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}\Phi_n(t)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}G_n'(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(x)=h(x),\ \text{para } x\in[a,b]-D$$

Como además G es continua (límite uniforme de funciones continuas) se tiene que h es B-Riemann integrable, pues G es una primitiva c.n.e de h.

∇

En esta teoría de integración la caracterización de la clase de "primitivas" es dado por la definición pero se puede preguntar que funciones cumplen estas condiciones. Una respuesta completa a esto no se tiene, sin embargo, se puede mencionar que las funciones continuas y convexas son ejemplos de "primitivas" en esta teoría de integración, como quedará establecido mas adelante.

A continuación se da la definición de función convexa y algunas propiedades de estas que ayudarán a establecer que toda función sobre un intervalo cerrado $[a,b]$, continua y convexa, tiene derivada en todo punto de $[a,b]$ excepto en un conjunto numerable.

DEFINICION 3.7.- Una función ψ definida sobre un intervalo I es convexa si para cada $x,y\in I$ y cada $\lambda\in[0,1]$ se tiene

$$\psi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda\psi(x)+(1-\lambda)\psi(y).$$

Una propiedad importante de las funciones convexas es:

LEMA 3.8.- Si ψ es una función convexa sobre un intervalo I y si x,y,z son puntos de I con $x<y<z$, entonces

i) $\dfrac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x}\leq\dfrac{\psi(z)-\psi(y)}{z-y}$

ii) $\dfrac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x}\leq\dfrac{\psi(z)-\psi(x)}{z-x}$.

Demostración:

Para i), tomando $\lambda=\dfrac{y-x}{z-x}$ se tiene que

$y = \lambda z + (1-\lambda)x$, y de la definición de función convexa

$$\psi(y) \leq \frac{y-x}{z-x}\,\psi(z) + \left(1 - \frac{y-x}{z-x}\right)\psi(x)$$

$$\psi(y) \leq \frac{y-x}{z-x}\,\psi(z) + \frac{z-y}{z-x}\,\psi(x)$$

$$(z-x)\psi(y) \leq (y-x)\psi(z) + (z-y)\psi(x) \qquad (11)$$

$$(z-y)\psi(y) + (y-x)\psi(y) \leq (y-x)\psi(z) + (z-y)\psi(x)$$

$$(z-y)\left[\psi(y) - \psi(x)\right] \leq (y-x)\left[\psi(z) - \psi(y)\right]$$

$$\frac{\psi(y) - \psi(x)}{y-x} \leq \frac{\psi(z) - \psi(y)}{z-y}$$

La demostración de ii) es análoga partiendo de (11). ∇

TEOREMA 3.9.- Si ψ es una función convexa sobre un intervalo I, entonces las derivadas laterales de ψ existen en todo punto de I y son iguales excepto en un conjunto numerable.

Demostración:

Si $x_0 \varepsilon$ I entonces $[\psi(x) - \psi(x_0)]/(x-x_0)$ es una función creciente por el Lema 3.8, y así su límite cuando x tiende a x_0 por la derecha y por la izquierda existen y son finitos por la proposición 2.1. Estos límites son la derivada izquierda y la derivada derecha, respectivamente, en x_0 y así las derivadas laterales de ψ existen y son finitas en todo punto de I.

La derivada izquierda es menor o igual que la derivada derecha en cada punto x_0 de I, como se puede deducir, de que si $x < x_0 < y$ entonces

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{\psi(y) - \psi(x_0)}{y-x_0}$$

tomando límites cuando $x \to x_0$ y $y \to x_0$. Luego, sea E el conjunto de puntos en que no son iguales las derivadas laterales de ψ , es decir, $E = \{x \varepsilon I / \psi'_{\ell}(x) < \psi'_{d}(x)\}$. Como $\psi'_{\ell}(x) \leq \psi'_{d}(x)$ para todo $x \;\varepsilon I$, demostrar que E es numerable es equivalente a demostrar que las derivadas laterales de ψ son iguales excepto en un conjunto numerable y para eso, se tiene:

Existe una función $r:E\to Q$ pués si $x \in E$, $\psi'_\ell(x) < \psi'_d(x)$ y existirá un racional, $r(x)$, tal que $\psi'_\ell(x) < r(x) < \psi'_d(x)$. Luego si $y \in E$ con $y \neq x$, $r(x) \neq r(y)$ pues

$$r(y) < \psi'_d(y) \leq \frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x} \leq \psi'_\ell(x) \leq r(x)$$

$$\text{o } r(x) < \psi'_d(x) \leq \frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x} \leq \psi'_\ell(y) < r(y)$$

segun $y<x$ o $x<y$.

Por tanto r es uno-o-uno y E será numerable. ∇

Las funciones convexas tienen algunas propiedades mas que aquí no se mencionan, pero, las anteriores propiedades permiten afirmar que si F es una función continua y convexa es una "primitiva" en esta teoría de integración. En esta misma dirección, se puede afirmar que toda primitiva de una función monótona es convexa como se establece a continuación.

TEOREMA 3.10.- Si una función f es monótona (por lo tanto B-Riemann integrable), entonces toda primitiva de f es convexa.

Demostración:

Supóngase que $f:[a,b]\to R$ es una función creciente con primitiva F no convexa. Entonces existen puntos r,s,t en $[a,b]$ tales que $r<s<t$ y

$$\frac{F(s) - F(r)}{s - r} > \frac{F(t) - F(r)}{t - r}$$

de la Def. 3.7. Luego si $A=\{x\in [a,b] / F'(x)=f(x)\}$ se tiene que, al ser f monótona en $[a,b]$,

$G(x)= x\, f(s)$ y $H(x)= x\, f(s)$ son funciones continuas sobre $[a,b]$ tales que

$$|F'(x)| \leq G'(x) \quad \text{para toda} \quad x\in A\cap[r,s] \quad \text{y}$$
$$|H'(x)| \leq F'(x) \quad \text{para toda} \quad x\in A\cap[s,t].$$

Del Lema 3.3 se concluye que

$$\frac{F(s) - F(r)}{s - r} \leq f(s) \leq \frac{F(t) - F(s)}{t - s} .$$

lo cual es una contradicción. Por tanto F es convexa.

∇

Sería deseable conocer una clase mas amplia de funciones "primitivas" en esta teoría de integración. Sk Barberian [2] afirma que ejemplos de esta son las funciones continuas y monótonas, y que mas generalmente continuas y de variación acotada. Pero hay una función continua y monótona que no tiene derivada finita en un subconjunto no numerable de su dominio, por lo que no podrá ser "primitiva". Esta es la función de Cantor.

El conjunto de Cantor, C, consta de todos aquellos números reales en el $[0,1]$ que tienen una expresión ternaria $< a_n >$ con dígitos distintos de 1, es decir, $x \in C$ si existe $< a_n >$ tal que $a_n=0$ ó 2 y $x=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^k}$. Sabiendo que hay números con dos expresiones ternarias, por ejemplo

$5/27 = \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \ldots = \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \ldots$, se puede decir que un número no está en el conjunto de Cantor si todas sus expresiones ternarias tienen al menos un 1. Hay un proceso mediante el cual el conjunto de Cantor puede ser construido.

Sea F, el conjunto obtenido eliminando, del intervalo $[0,1]$, el intervalo abierto que es su tercio intermedio:

$$F_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] .$$

Sea F_2 el conjunto obtenido eliminando de F_1 los intervalos abiertos que son tercios intermedios de los dos intervalos que forman F_1.

$$F_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

Sea F_3 el conjunto obtenido eliminando de F_2 los intervalos abiertos que son tercios intermedios de los cuatro intervalos que forman F_2. En general si F_n ha sido contruido, consiste de la unión de 2^n intervalos cerrados de la forma $[k/3^n, k+1/3^n]$, se obtiene F_{n+1} eliminando los intervalos abiertos que son tercios intermedios de cada uno de estos intervalos. El conjunto de Cantor es lo que resta después de haber realizado el proceso para cada natural. Es decir:

DEFINICION 3.11.- El conjunto C de Cantor es la intersección de los conjuntos F_n, $n \in \mathbb{N}$, obtenidos eliminando sucesivamente los intervalos abiertos que son tercios intermedios.

El conjunto de Cantor tiene algunas propiedades interesantes como: Tiene la cardinalidad del continuo, es cerrado, perfecto y de medida cero.

La función de Cantor es:

DEFINICION 3.12.- La función $\Phi:[0,1] \to [0,1]$ con regla de correspondencia

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} & \text{si } x \in C \\ \Phi(a) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

donde a es el extremo inferior del intervalo abierto eliminado del $[0,1]$ al construir C, al cual pertenece x, se llama función de Cantor.

La función de Cantor tiene muchas propiedades, algunas de ellas son presentadas en los siguientes resultados.

LEMA 3.13.- La función Φ de Cantor es: i) no constante, ii) no decreciente, iii) $\Phi(C)= [0,1]$, y iv) contínua.

Demostración:

i) Se tiene que $\Phi(0)=0$ y $\Phi(1/3)= 1/2$ por la definición.

ii) Suponiendo que $x_1< x_2$. Si $x_1,x_2 \varepsilon C$ para ambos existe una expansión ternaria, digamos $<a_n>$ y $<c_n>$ respectivamente, las cuales tienen los primeros N-1 dígitos iguales, $a_n=0$ y $C_n=2$, para algún $N\varepsilon \mathbb{N}$. De donde las expresiones binarias de sus respectivas imágenes bajo Φ, $<b_n>$ y $<d_n>$, tendran los primeros N-1 dígitos iguales, $b_N=0$ y $d_N=1$. Por tanto $\Phi(x\ )< \Phi(x\ )$. Si $x_1,x_2 \notin C$ se tendrá que pertenecen a un mismo intervalo eliminado (a,b), en cuyo caso $\Phi(x_1)=\Phi(a)=\Phi(x_2)$, o pertenecen a distintos intervalos eliminados (a,b) y (c,d), en cuyo caso $\phi(x_1)=\Phi(a) <\Phi(c)=\Phi(x_2)$. Finalmente si solo uno de ellos no está en C comparamos la imagen del extremo inferior del intervalo eliminado al cual pertenece con la imagen del otro; esto es, si $x_1 \varepsilon C$, $x_2 \notin C$ y x_2 pertenece al intervalo eliminado (a,b) $\Phi(x_1) \leq \Phi(a)=\Phi(x_2)$.

iii) De la definición es claro que $\Phi(C)\subset[0,1]$. En el otro sentido sea y un número en $[0,1]$ y $\langle b_n\rangle$una expansión binaria de y. Entonces el número x con expansión ternaria $<2b_n>$ esta en C y $\phi(x)=y$.

iv) Dado $x_0 \varepsilon [0,1]$ y $\varepsilon>0$. De iii) se tiene que Φ es sobre. Si $\Phi(x_0)\neq 0$ existen $n>1$, $y'\varepsilon [0,1]$ con $y'= \Phi(x_0)-\varepsilon/n$ y $x' \varepsilon[0,1]$ tal que $\Phi(x')=y'$. Análogamente, si $\Phi(x_0)\neq 1$ existen $m>1$, $y''\varepsilon[0,1]$ con $y''=\Phi(x_0)+\varepsilon/m$ y $x''\varepsilon [0,1]$ tal que $\Phi(x'')=y''$.

Sea $\delta = \min\{(x_0 - x^1), (x''-x_0)\}$ entonces

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [0,1]$$

puesto que

$$\Phi(x_0) - \varepsilon < \Phi(x_0) - \varepsilon/n = \Phi(x') \leq \Phi(x) \leq \Phi(x'') = \Phi(x_0) + \varepsilon/m < \Phi(x_0) + \varepsilon$$

en tales casos por ser Φ no decreciente.

∇

TEOREMA 3.14.- La función de Cantor no tiene derivada finita en el conjunto C - Q.

Demostración:

Sea $x_0 \in C - Q$. Entonces la expansión ternaria de x_0, $\langle a_n \rangle$, es única, no periódica y formada con 0 ó 2. Definiendo L_k como la sucesión de índices n tales que $a_n=0$, por la no periodicidad de $\langle a_n \rangle$, $L_k \to \infty$ y si

$$x_k = \sum_{n=1}^{L_k-1} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

entonces

$$0 < x_k - x_0 = \sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{2}{3^n} - \sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} < 2\sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{L_k-1}}$$

y

$$\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k - x_0} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{L_k-1} \frac{a_n}{2^n} + \sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{L_k-1} \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}}{x_k - x_0}$$

$$= \frac{\sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=L_k}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}{x_k - x_0} > \left(\frac{1}{2^{L_k}} - \frac{1}{2}\frac{a_{L_k}}{2^{L_k}}\right) 3^{L_k-1}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{L_k} \frac{1}{3}$$

Por tanto la derivada de f en x no existe o es $+\infty$ pues se ha encontrado una sucesión $\{x_k\}$ que converge a x_0 tal que $\dfrac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k - x_0}$ diverge a ∞ .

∇

Así, la función de Cantor es un contraejemplo a la afirmación que hace Barberian. Una propiedad de integrabilidad que se sigue de la definición de integrabilidad es la siguiente.

PROPOSICION 3.15.- Si f es una función B-Riemann integrable y g es una función tal que g = f c.n.e entonces g es B-Riemann integrable con la misma primitiva de f.

4. LA INTEGRAL DE LEBESGUE.

La integral de Lebesgue suele ser construida usando Teoría de la medida en un proceso que inicia definiendo la integral para funciones características de conjuntos y que culmina con la definición general de función Lebesgue integrable. Las funciones que resultan integrables no necesariamente estan acotadas ni su dominio es un intervalo cerrado. La presentación que aquí será dada es descriptiva y está restringida a funciones con dominio un intervalo cerrado.

En el capítulo 2, se mostró que si una función es monótona tiene una cantidad numerable de discontinuidades y límites laterales en todo punto; pero ¿Qué se puede decir acerca de su derivabilidad? La respuesta a esta pregunta la da un teorema debido a Lebesgue que es uno de los mas finos e importantes en teoría de funciones reales de variable real. El teorema afirma que toda función monótona f posee derivada finita excepto en un conjunto de medida cero, o, como es expresado frecuentemente, "casi dondequiera" (esto es abreviado por $\exists f'(x)$ c.d.). Aquí no es presentada la demostración de este teorema, pero será demostrado un caso particular de este agregando la hipótesis de continuidad, antes de lo cual se da el siguiente resultado auxiliar.

LEMA 4.1.- Sea $g(x)$ una función continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, y sea $E=\{\, x\in(a,b) \;/\; \exists\, \xi\in [x,b] \ni g(\xi) > g(x) \,\}$. Entonces E es vacío o abierto y si $E= \cup(a_k,b_k)$ con $\{(a_k,b_k)\}$ ajenos dos a dos, entonces $g(a_k)\leq g(b_k)$.

Demostración:

Primero, observesè que el conjunto E es abierto dado que si $\xi> x_0$ y $g(\xi)> g(x_0)$, entonces, por la continuidad, para $\varepsilon=g(\xi)-g(x_0) > 0$ existe $\delta> 0$, menor que $\xi- x_0$, tal que $|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon \;\; \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap (a,b)$ o bien

$$- \varepsilon < g(x) - g(x_0) <\varepsilon = g(\xi) -g(x_0)$$

de donde $g(x)< g(\xi)$ para puntos x en una vecindad de x_0.

Siendo E abierto, sea (a_k,b_k) cualquiera de los intervalos en que E es descompuesto; el punto b_k no pertenece a E. Sea x un punto en (a_k,b_k) entonces $g(x) \leq g(b_k)$. Pues considerando a x_1 como el mayor número entre x y b_k

tal que $g(x_1) \geq g(x)$, si x_1 no es b_k, los puntos ξ que corresponden a x_1 en la hipótesis del lema estan a la derecha de b_k (en otro caso x_1 no será el mayor) y dado que b_k no pertenece a E

$$g(x_1) < g(\xi_1) \leq g(b_k)$$

que combinando con

$$g(b_k) < g(x) \leq g(x_1)$$

sería una contradicción por tanto $g(x) \leq g(b_k)$ y tomando el límite cuando x tiende a a_k, por la continuidad,

$$g(a_k) \leq g(b_k)$$

∇

Un exámen de la diferenciabilidad de una función en un punto puede ser hecho comparando sus números derivados. Los números derivados superior e inferior derecho son respectivamente el límite superior o inferior del cociente $[f(x+h) - f(x)]/h$ para $h>0$ cuando h tiende a cero y son denotados por Λ_r y λ_r. Los números derivados izquierdos, Λ_l y λ_l, son definidos de una manera análoga. Admitiendo valores infinitos, los números derivados siempre existen. Así una derivada existe y es finita en todo punto x donde los cuatro números derivados tienen el mismo valor finito.

Para probar el teorema de Lebesgue, con la hipótesis adicional de continuidad de f, tomando a f creciente, solo es necesario probar

i) $\Lambda_r < \infty$ y ii) $\Lambda_r \leq \lambda_l$; c.d.

De hecho, aplicando ii) a la función $-f(-x)$, se sigue que

$$\Lambda_l \leq \lambda_r \text{ c.d.}$$

y combinada con i) y ii) se obtiene

$$\Lambda_r \leq \lambda_l \leq \Lambda_l \leq \lambda_r \leq \Lambda_r < \infty$$

de aquí la igualdad de los números, queda probada y son finitos.

Para verificar la afirmación i), que el conjunto E_∞ de puntos para los cuales $\Lambda_r = \infty$ es de medida cero, obsérvese que este conjunto esta contenido en el conjunto E_C para el cual $\Lambda_r > C$, donde C denota una cantidad elegida tan grande como sea necesario. Pero la relación implica la existencia de un $\xi > x$ tal que

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > C ,$$

es decir que $g(\xi) > g(x)$, donde $g(x) = f(x) - C\,x$. De aquí el conjunto E_C esta contenido en los intervalos (a_k, b_k) del lema y de acuerdo con este

$$f(b_k) - C\, b_k \geq f(a_k) - C\, a_k ,$$

esto es,

$$C(b_k - a_k) \leq f(b_k) - f(a_k).$$

Sumando sobre todas las k

$$C\ \Sigma(b_k - a_k) \leq \Sigma[f(b_k) - f(a_k)] \leq f(b) - f(a),$$

lo cual muestra que, para C suficientemente grande, la longitud total de los intervalos es tan pequeña como se quiera. De aquí, el conjunto $E\,\infty$ es de medida cero.

La segunda afirmación se verifica mediante razonamientos análogos los cuales son repetidos alternativamente bajo dos formas distintas. Sea $\tau < C$ dos números positivos. Tomando primero la función $g(x) = f(-x) + \tau x$ definida sobre $[-b, -a]$ y sea Σ_1 la reflexión sobre el origen de los intervalos correspondientes al lema; entonces, por razones similares a las antes utilizadas, Σ_1 contiene a los puntos x de (a,b) para las cuales $\lambda_l < \tau$. Esto, por que $x \varepsilon \Sigma_1$ si existe $\xi < x$ tal que

$$f(\xi) - \tau\xi = g(-\xi) > g(-x) = f(x) - \tau x$$

de donde

$$\tau(x - \xi) > f(x) - f(\xi)$$

$$\tau > \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Luego, sea Σ_2 el sistema formado por los intervalos (a_{k_l}, b_{k_l}) los cuales corresponde a la función $g(x) = f(x) - C\,x$, pero considera separadamente en los intervalos $[a_k, b_k]$. Entonces para estos intervalos se tiene

$$f(b_k) - f(a_k) \leq \tau(b_k - a_k) \quad , \quad C(b_{k_l} - a_{k_l}) \leq f(b_{k_l}) - f(a_{k_l})$$

de lo cual se sigue

$$C\ \Sigma_2 \leq V_2 \leq V_1 \leq \tau\ \Sigma_1$$

esto es,

$$\Sigma_2 \leq \frac{\tau}{C}\ \Sigma_1 \quad ,$$

donde se ha denotado por Σ_1, Σ_2 las longitudes totales de los sistemas de intervalos y por V_1, V_2 la suma de las variaciones correspondientes de la función f(x).

Repitiendo los dos métodos alternativamente, se obtiene una sucesión $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, de sistemas de intervalos, cada uno contenido en el anterior y, en general, se tiene

$$\Sigma_{2n} \leq \frac{\tau}{C} \Sigma_{2n-1}$$

y como
$$\Sigma_{n+1} \leq \Sigma_n$$

se sigue que
$$\Sigma_{2n} \leq \left(\frac{\tau}{C}\right)^n \Sigma_1$$

por lo que Σ_n tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Pero los puntos x para los cuales $\Lambda_r > C$ y $\lambda_l < \tau$ simultaneamente, estan obviamente contenidas en todos los sistemas Σ_n; esto es, ellos forman un conjunto $E_{\tau C}$ de medida cero. Finalmente cada punto x tal que $\Lambda_r > \lambda_l$ pertenece a un conjunto $E_{\tau C}$ y. se puede suponer que τ y C son números racionales, debido a que entre dos números reales diferentes se puede siempre introducir dos números racionales. Esto es, si se forman los conjuntos $E_{\tau C}$ para toda pareja de racionales, su unión E* contendrá todos los x tales que $\Lambda_r > \lambda_l$. Pero hay solamente una cantidad numerable de parejas de números racionales; de aquí el conjunto E* es la unión de una cantidad numerable de conjuntos de medida cero y consecuentemente E*, y todos los subconjuntos de él, son de medida cero. Con esto queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 4.2.- Si f es una función continua y monótona sobre $[a,b]$ entonces su derivada existe y es finita excepto en un conjunto de medida cero.

Usando este resultado se puede ver que para algunas clases de funciones se tiene la misma conclusión. A una de estas clase se aborda observando por un lado que, si dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son diferenciables casi dondequiera entonces así es su diferencia $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ y que, por otro lado, cuando $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con funciones crecientes se tiene obviamente que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq f_1(b)-f_1(a)+ f_2(b)-f_2(a)$$

para toda partición $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b\}$ de $[a,b]$. Las funciones que cumplen la última condición son llamadas de variación acotada, es decir:

DEFINICION 4.3.- Sea f una función sobre $[a,b]$. Si para toda partición $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b\}$ existe un número positivo M tal que

$$\sum_{k=1}^{n} | f(x_k)- f(x_{k-1}) | \leq M$$

entonces f es de variación acotada sobre $[a,b]$.

Se ha visto que toda diferencia de funciones crecientes es de variación acotada. No es difícil ver que las funciones monótonas son de variación acotada y que toda función de variación acotada es acotada. Pero aquí se abordan solo ciertos conceptos y propiedades relacionadas con funciones de variación acotada.

DEFINICION 4.4.- Sea f una función de variación acotada sobre $[a,b]$ y sea $\Sigma ab(P)$ la suma $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$ correspondiente a la partición $P=\{a=x_0,x_1,\ldots,x_n=b\}$ de $[a,b]$. El número $V_f(a,b)=\sup\{\Sigma ab(P)/P$ es una partición de $[a,b]\}$ es llamado la variación total de f sobre $[a,b]$.

La variación total tiene una propiedad aditiva. Esta es, si $c\ \varepsilon[a,b]$, la función $f(x)$ es de variación acotada si y solo si es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$, y entonces

$$V_f(a.b)=V_f(a,c)+V_f(c,b)$$

Para establecer esta propiedad obsérvese, dado que la suma $\Sigma ab(P)$ no puede decrecer al insertar un nuevo punto de descomposición (por la desigualdad del triángulo), que es suficiente considerar solo las particiones de $[a,b]$ que surgen de una partición de $[a,c]$ y una partición de $[c,b]$; entonces $\Sigma ab(P)=\Sigma ac(P')+\Sigma cb(P'')$ y la propiedad se verifica tomando las mínimas cotas superiores. Una consecuencia importante de esta propiedad es el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5.- Toda función f de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes.

Demostración:

Introduciendo la función $V(x)=V_f(a,x)$ para $x\ \varepsilon[a,b]$, se tiene que $V(x)$ y $V(x)-f(x)$ son funciones no decrecientes y satisfacen la descomposición requerida

$$f(x)=V(x)-[V(x)-f(x)]$$

Para $V(x)$, si $a\leq x\leq \xi\leq b$, se tiene

$$V_f(a,\xi)= V_f(a,x)+ V_f(x,\xi)$$

de aquí

$$V(\xi)-V(x)= V_f(x,\xi)\geq 0.$$

Luego, para mostrar que

$$V(x)-f(x) \leq V(\xi)-f(\xi)$$

obsérvese que esto es equivalente a

$$f(\xi)-f(x) \leq V(\xi)-V(x)=V_f(x,\xi)$$

y que $|f(\xi)-f(x)|$ es una suma particular del tipo $\Sigma_{xy}(P)$, de aquí que

$$|f(\xi)-f(x)| \leq V_f(x,\xi)$$

∇

La descomposición que menciona el teorema anterior no es única, pero la proposición 2.2 combinada con el teorema 4.5 permiten afirmar que: si f es una función de variación acotada su conjunto de discontinuidades es numerable. Por otro lado si una función f puede ser descompuesta en la diferencia de dos funciones continuas y monótonas, esta es continua y tiene derivada casi dondequiera. Para una función continua y de variación acotada se tiene algo análogo, como lo establecen los siguientes resultados.

TEOREMA 4.6.- Sea f una función de variación acotada sobre $[a,b]$. Entonces f es continua sobre $[a,b]$ si y solo si $V(x)$ lo es.

Demostración:

Primero obsérvese que tanto f como V tienen límites laterales en todo punto, por el teorema 4.5 y la proposición 2.1

Si $a \leq x < y \leq b$ entonces

$$0 \leq |f(y)-f(x)| \leq V_f(x,y)= V(y)-V(x)$$

y tomando el límite cuando y tiende a x

$$0 \leq |f(x+)-f(x)| \leq V(x+)- V(x) \quad \text{para todo } x\in[a,b)$$

similarmente

$$0 \leq |f(x)-f(x-)| \leq V(x)-V(x-) \quad \text{para todo } x\in(a,b].$$

Estas desigualdades implican que siendo V continua sobre $[a,b]$ f lo es.

Para probar lo inverso, sea f continua y c un punto de $[a,b)$. Entonces dado $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que $x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ implica $|f(x)-f(c)| <\varepsilon/2$. Para esta misma ε, existe una partición P de $[c,b]$, $P= \{ c= x_0,x_1,\ldots,x_n=b\}$, tal que

$$V_f(c,b)- \varepsilon/2 < \Sigma_{cb}(P)$$

Agregar mas puntos a la partición P puede solo incrementar la suma Σ_{cb}, como ya se mencionó, y de aquí que se puede suponer $0< x_1-x_0<\delta$. Pero esto lleva a que

$$|f(x_1)-f(c)| <\varepsilon/2 ,$$

de lo cual

$$V_f(c,b)-\varepsilon/2 <\varepsilon/2 + \sum_{k=2}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$<\varepsilon/2 + V_f(x_1,b)$$

dado que $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ es una partición de $[x_1,b]$. Por tanto se tiene

$$V_f(c,b)- V_f(x_1,b) <\varepsilon.$$

Pero

$$0 \leq V(x_1)-V(c) = V_f(a,x_1) - V_f(a,c)$$

$$= V_f(c,x_1) = V_f(c,b)-V_f(x_1,b_1)<\varepsilon .$$

Así pues, se ha mostrado que

$$0 <x_1- c <\delta \quad \text{implica} \quad 0 \leq V(x_1)- V(c) < \varepsilon$$

o bien, que $V(c+)=V(c)$. Un argumento similar lleva a que $V(c-)=V(c)$ para todo $c \in [a,b]$.

∇

TEOREMA 4.7.- Sea f una función continua y de variación acotada sobre $[a,b]$. Entonces la derivada de f existe y es finita casi dondequiera.

Demostración:

La demostración es una aplicación de los teoremas 4.6 y 4.2 a la función f.

∇

Otra clase de funciones a las que se puede extender la conclusión del teorema 4.2 son las absolutamente continuas.

DEFINICION 4.8.- Sea f una función sobre $[a,b]$. Si para cada $\varepsilon >0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$$

para todo sistema (a_k,b_k) de subintervalos de $[a,b]$, abiertos y ajenos (n= 1, 2,...), cuya suma total de longitudes $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$ es menor que δ entonces f es absolutamente continua sobre $[a,b]$.

Se puede ver facilmente que si f y g son funciones absolutamente continuas lo son tambien: $|f|$, cf (c constante), f+g, f.g. También para f/g si g esta acotada inferiormente por un número positivo.

TEOREMA 4.9.- Toda función absolutamente continua sobre $[a,b]$ es continua y de variación acotada.

Demostración:

Si f es absolutamente continua sobre $[a,b]$ y $c\in [a,b]$ entonces f es absolutamente continua sobre $[a,c]$ y $[c,b]$. En particular dado $\varepsilon>0$ existen $\delta_1, \delta_2>0$ tal que

$$|f(c)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{si} \quad x\in (c-\delta_1,c)\cap [a,c]$$

(por ser f absolutamente continua sobre $[a,c]$) y

$$|f(x)-f(c)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad x\in (c,c+\delta_2)\cap [c,b]$$

(por ser f absolutamente continua sobre $[c,d]$). Esto es, $f(c-)=f(c)$ para todo $c\in [a,b]$ y $f(c+)=f(c)$ para todo $c\in [a,b]$. Así f es continua en $c\in [a,b]$ y por lo tanto, dado que c es arbitrario, f es continua en $[a,b]$.

Luego, dado $\varepsilon>0$, sea δ el número que provee la definición 4.8 y $P=\{a=x_0,x_1,\ldots x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$. Si la partición no cumple con que $x_k-x_{k-1}<\delta/2$ $(k=1,2,\ldots,n)$, pueden ser introducidos puntos para esto y la variación de f en la nueva partición no resultará menor que en la original. Así, considere que P cumple tal condición y la expresión

$$\Sigma\, ab(P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| .$$

Obviamente, se puede partir esta suma en m grupos con

$$m\leq \frac{2(b-a)}{\delta}+1 ,$$

tales que en cada grupo la longitud total de los intervalos (x_{k-1},x_k) es menor que δ y así, la contribución de cada grupo a la suma $\Sigma\, ab(P)$ es menor que ε. Por tanto

$$\Sigma_{ab(P)} < \varepsilon\left(\frac{2(b-a)}{\delta}+1\right)$$

y f es de variación acotada.

∇

TEOREMA 4.10.- Sea f una función absolutamente continua sobre $[a,b]$. Entonces la derivada de f existe y es finita casi dondequiera.

Demostración:

La demostración es una aplicación de los teoremas 4.7 y 4.9 a la función f.

∇

Con los resultados anteriores al alcance, se puede dar una definición de función Lebesgue integrable sobre un intervalo $[a,b]$. Las funciones que resulten integrables coinciden con las que resultarían con la definición clásica.

DEFINICION 4.11.- Una función F es una "primitiva c.d."de una función f sobre $[a,b]$ si:

i) F es absolutamente continua sobre $[a,b]$

ii) $F'(x)= f(x)$ c.d.

Como toda función que satisface una condición de Lipschitz es absolutamente continua toda función Riemann integrable será Lebesgue integrable según la siguiente definición.

DEFINICION 4.12.- Si $f:[a,b]\to R$ tiene una primitiva c.d. F, el número $L= \int_a^b f= F(b)-F(a)$ se llama integral de Lebesgue de f y f será Lebesgue integrable.

Al igual que en otras teorías de integración, la primitiva no es única. Los siguientes resultados permitirán demostrar que la integral de Lebesgue esta bien definida.

Sea $\mathcal{J}$ una colección de intervalos. Entonces decimos que $\mathcal{J}$ cubre un conjunto E en el sentido de Vitali, si para cada $\varepsilon >0$ y cualquier x en E hay un intervalo $I \in \mathcal{J}$ tal que $x \in I$ y $\ell(I)<\varepsilon$.

LEMA 4.13.- Sea E un subconjunto del intervalo $[a,b]$ e $\mathcal{J}$ una colección de intervalos los cuales cubren E en el sentido de Vitali. Entonces dado $\varepsilon>0$ existe una colección finita $\{I_1,I_2,\ldots I_n\}$ de intervalos ajenos en $\mathcal{J}$ y una colección numerable de intervalos abiertos $\{J_n\}$ tal que

$$(E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i) \subset \bigcup J_n$$

y

$$\Sigma\, \ell(J_n) <\varepsilon .$$

Demostración:

Es suficiente probar el lema para el caso en que cada intervalo de $\mathcal{J}$ es cerrado, pues en otro caso se puede reemplazar cada intervalo por su cerradura observando que el conjunto de puntos formado por los límites de $I_1,I_2,\ldots,I_n$

tiene medida cero.

Dado que $\mathcal{I}$ es una cubierta de Vitali de E, se puede suponer sin pérdida de generalidad que cada I de $\mathcal{I}$ esta contenido en $[a,b]$. Se elige una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos ajenos de $\mathcal{I}$ por inducción como sigue: Sea I_1 cualquier intervalo en $\mathcal{I}$ y supuesto que $I_1, I_2, \ldots I_n$ han sido elegidos. Sea k_n el supremo de las longitudes de los intervalos de $\mathcal{I}$ sin intersección con I_1, $I_2, \ldots, I_n$. Dado que cada I está contenido en $[a,b]$, se tiene que $k_n \leq b-a < +\infty$. A menos que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, se puede encontrar I_{n+1} en $\mathcal{I}$ con $\ell(I_{n+1}) > \frac{1}{2} k_n$ y I_{n+1} ajeno de $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Así se tiene una sucesión de intervalos ajenos de $\mathcal{I}$, y dado que $\bigcup I_n \subset [a,b]$, se tiene que $\Sigma \ell(I_n) \leq b-a < \infty$. De aquí que se puede encontrar un entero N tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon/5.$$

Sea $R = E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n$. Sea x un punto arbitrario de R. Dado que $\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ es un conjunto cerrado que no contiene a x, se puede encontrar un intervalo I en $\mathcal{I}$ el cual contiene a x y cuya longitud es tan pequeña que I no intersecta a alguno de los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_N$. Si ahora $I \cap I_i = \phi$ para $i \leq n$, se debe tener $\ell(I) \leq k_n < 2\ell(I_{n+1})$. Dado que $\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) = 0$, el intervalo I de debe intersectar a al menos uno de los intervalos I_n. Sea n el menor entero tal que I intersecta a I_n. Se tiene que $n > N$, y $\ell(I) \leq k_{n-1} \leq 2\ell(I_n)$. Dado que x está en I, e I tiene un punto en común con I_n, se sigue que la distancia de x a el punto medio de I_n es a lo mas $\ell(I) + \frac{1}{2}\ell(I_n) \leq \frac{5}{2}\ell(I_n)$. Así x pertenece a el intervalo J_n teniendo el mismo punto medio que I_n y cinco veces su longitud. Así se tiene demostrado que

$$E - \bigcup_{i=1}^{N} I_i = R \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$$

con

$$\sum_{N+1}^{\infty} \ell(J_n) \leq 5 \sum_{N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$$

∇

TEOREMA 4.14.- Si f es absolutamente continua sobre $[a,b]$ y $f'(x)=0$ c.d., entonces f es constante.

Demostración:

Se debe mostrar que $f(a)=f(c)$ para cualquier $c \in [a,b]$. Sea $E \subset (a,c)$ el conjunto en el cuál $f'(x)=0$. Sean ε y η números positivos arbitrarios. Para cada x en E hay un intervalo arbitrariamente pequeño $[x\ x+h]$ contenido en $[a,c]$ tal que $|f(x+h)-f(x)|< \eta h$. La colección $\{[x,x+h] / x \in E$ y $|f(x+h)-f(x)|< \eta h\}$ forma una cubierta de Vitali para el conjunto E. Sean $\{[x_k,y_k]\}$ y $\{J_n\}$, la colección finita de intervalos de la clase anterior y la colección numerable de intervalos abiertos, de acuerdo con el lema 4.13 para el número positivo $\delta/2$, donde δ es el número correspondiente a ε en la definición de continuidad absoluta para f. Como $[a,c]$ -E es de medida cero existe una colección numerable de intervalos abiertos $\{M_r\}$ que lo cubre tal que $\Sigma\ell(M_r)< \delta/2$. Así, si se reordenan los x_k de tal forma que $x_k < x_{k+1}$, se tiene

$$y_0 \leq a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq c = x_{n+1},$$

por ser ajenos los intervalos $[x_k,y_k]$, y

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+} - y_k| \leq \Sigma\ell(J_n) + \Sigma\,\ell(M_r) < \delta, \text{ pués}$$

$$\bigcup_{k=0}^{n} (y_k,x_{k+1}) \subset (\cup J_n) \cup (\cup M_r).$$

Ahora

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k)-f(x_k)| \leq \eta\Sigma(y_k-x_k) < \eta(c-a).$$

por la forma en que los intervalos $\{[x_k,y_k]\}$ fueron construidos, y

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon$$

por la continuidad absoluta de f. Así

$$|f(c)-f(a)| = \left|\sum_{k=1}^{n} [f(x_{k+1})-f(y_k)] + \sum_{k=1}^{n} [f(y_k)-f(x_k)]\right|$$
$$\leq \varepsilon + \eta(b-a).$$

Dado que ε y η son números positivos arbitrarios, $f(c)-f(a)=0$

∇

TEOREMA 4.15.- Si F y K son dos primitivas c.d. de f sobre $[a,b]$ entonces:

$$L = \int_a^b f = F(b)-F(a) = K(b)-K(a).$$

Demostración:

Si F y K son dos primitivas c.d. en f sobre $[a,b]$, la función H= F-K es absolutamente continua y $H'(x)=0$ c.d., entonces F= K + c (c constante)

∇

De la definición y los resultados anteriores se sigue que las funciones Lebesgue integrables forman un espacio lineal y que si para una función g existe una función f Lebesgue integrable tal que f=g c.d., entonces g es Lebesgue integrable con las mismas primitivas c.d. que f.

En general, si F es una función continua sobre $[a,b]$ tal que $F'(x)$ existe con numerables excepciones y es finita, entonces F es absolutamente continua. Aquí es presentado un resultado particular que será utilizado mas adelante.

LEMA 4.16.- Sea F una función continua cuya derivada existe c.n.e. sobre $[a,b]$. Si en el conjunto de puntos x de $[a,b]$ en que $F'(x)$ existe está acotada entonces F es absolutamente continua sobre $[a,b]$.

Demostración:

Sea A el conjunto numerable tal que $F'(x)$ existe para $x \varepsilon [a,b]-A$ y M una cota de $F'(x)$. Si se considera la función $G(x)=Mx$, entonces, siendo G una función continua creciente en $[a,b]$ tal que $|F'(x)| \leq G'(x) \quad \forall \; x \varepsilon |a,b|-A$, de acuerdo con el Lema 3.3

$$| F(b_k)-F(a_k) | \leq G(b_k)-G(a_k)= M(b_k-a_k)$$

para todo $a_k, b_k \; \varepsilon [a,b]$ con $a_k < b_k$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{E}{M} > 0$ tal que si $\sum_{k=1}^{n} (b_k-a_k) < \delta$ entonces $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k)-F(a_k)| < \varepsilon$ y así F es absolutamente continua.

∇

5. EPILOGO.

En los capítulos anteriores han sido presentadas tres teorías de integración y algunos aspectos que las caracterizan. A continuación se hacen algunas comparaciones entre éstas a manera de conclusiones.

Un conjunto E se dice "insignificante", si para que una función g tenga una propiedad que tiene una función f, es suficiente que cumpla algunas condiciones respecto a f excepto, quizás, en E.

La teoría B-Riemann rescata ciertas propiedades para las cuales los conjuntos insignificantes son numerables. Por ejemplo la propiedad de integrabilidad.

Respecto a la propiedad de integración los conjuntos insignificantes en la teoría de Riemann son los finitos y en la de Lebesgue los de medida cero. En este sentido puede ser dicho que: la teoría B-Riemann es mas flexible que la Riemann y la de Lebesgue mas que la B-Riemann.

La clase de funciones integrables en la teoría de Riemann se condiciona a ser acotadas; en la B-Riemann y en la de Lebesgue no. Incluso en la teoría general de integración de Lebesgue el dominio de una función integrable no tiene que se un intervalo.

Claramente, las tres teorías tienen muchas diferencias aunque compartan algo en común. Sea C la clase de funciones continuas sobre $[a,b]$, VA las de variación acotada, L las regulares, $\mathcal{R}$ las Riemann integrables, $\mathcal{B}$ las B-Riemann integrables y $\mathcal{L}$ las Lebesgue integrables. El siguiente diagrama muestra algunas relaciones existentes, donde las flechas respresentan relación de inclusión, las cuales son propias.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L} & \\
 & \mathcal{R} \arrow[u] & \mathcal{B} \\
 & L \arrow[u] \arrow[ur] & \\
C \arrow[ur] & & VA \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Las contensiones, explícitamente o implícitamente, son justificadas en los capítulos anteriores. Obviamente las contensiones $C \subsetneq L$ y $VA \subset L$ son propias; respecto a que las restantes son propias o que no existe relación de inclusión son suficientes los siguientes ejemplos y observaciones.

Ejemplo 1: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $[a,b]$, $a < x_n \leq b$, tal que $x_n \to a$ y sea f la función sobre $[a,b]$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\varepsilon\ S=\{\ x_n\ /\ n\varepsilon\ \mathbb{N}\ \} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El conjunto de discontinuidades de f es S, así $f\ \varepsilon\mathcal{R}$; sin embargo $f(a+)$ no existe, por tanto $f \notin L$ y la inclusión $L \subset \mathcal{R}$ es propia.

Ejemplo 2: Sea f la función sobre $[0,1]$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si x es racional.} \\ 0 & \text{si x es irracional.} \end{cases}$$

La función es discontinua en todas partes por lo que $f \notin \mathcal{R}$, pero la función $F(x)= c$ ($c\varepsilon\ \mathbb{R}$ fijo) es una primitiva de f en el sentido del capítulo 4 por lo que $f\ \varepsilon\ \mathcal{L}$ y la inclusión $\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$ es propia.

Ejemplo 3: Considerando la función $F:[-1,1] \to R$ con

$$F(x)=\begin{cases} x^2\ \text{sen}\ (1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

se tiene que F es derivable en $[-1,1]$ con

$$F'(x)=\begin{cases} 2x\ \text{sen}(\ /x^2) - (\ /x)\text{Cos}(\ /x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Así la función f sobre $[-1,1]$ con $f(x)=F'(x)$ tiene primitiva estricta en el sentido del capítulo 3, pero no está acotada. Es de decir $f\ \varepsilon\beta$ pero $f \notin\mathcal{R}$
Por tanto $\beta \not\subset \mathcal{R}$

De la observación anterior se sigue que $L \subset\beta$ solo propiamente pues la igualdad sería contradictoria, dado que $L \subset \mathcal{R}$

Ejemplo 4: Sea f una función sobre $[0,1]$ con $f(x)=1$ si $x \in C$, conjunto de Cantor, y $f(x)=0$ en otro caso.

Su conjunto de discontinuidades es el conjunto de Cantor, de donde $f \in \mathcal{R}$. Sin embargo $f \notin \mathcal{B}$. Si f fuese B-Riemann integrable, su primitiva c.n.e. F sería tal que su derivada existe y es igual a f c.n.e., de donde (al estar f acotada) de acuerdo con el Lema 4.16 F resultaría absolutamente continua y $F'(x)=0$ c.d. Así F sería constante y su derivada cero en $[a,b]$. Una contradicción con que $F'(x)=f(x)$ c.n.e. al valer f uno para una infinidad no numerable de valores x en $[a,b]$. Por tanto $f \notin \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{B}$ y consecuentemente $\mathcal{L} \not\subset \mathcal{B}$.

Ejemplo 5: Considerando la función F del ejemplo 3 restringida al intervalo $[0,1]$, tiene derivada en él.

La función f sobre $[0,1]$ con $f(x)=F'(x)$, tiene primitiva estricta en el sentido del capítulo 3. Así $f \in \mathcal{B}$. De acuerdo con el Lema 4.16 F es absolutamente continua sobre $[a,1]$ para todo $a \in (0,1)$ pues su derivada está acotada. Si $f \in \mathcal{L}$ sobre $[0,1]$ su primitiva G, en el sentido del capítulo 4, lo es también sobre $[a,1]$ y $(F-G)'(x)=0$ c.d.; de aquí $F(x)=G(x)+cte.$ para todo $a \in (0,1)$ y $x \in [a,1]$ o bien para todo $x \in (0,1]$. De la continuidad de F y G se llega a que $F(0)=G(0)+cte.$ De donde F es absolutamente continua, lo cual es contradictorio según el Teorema 4.9 pues F no es de variación acotada como lo ilustra la siguiente partición

$$P=\{x_0=0, x_1=\sqrt{\frac{2}{\pi(2n-1)}},\ x_2=\sqrt{\frac{2}{\pi(2n-2)}}, \dots, x_{2n-2}=\sqrt{\frac{2}{2\pi}}, x_{2n-1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}, x_{2n}=1\}$$

para la cual

$$\Sigma_{01}(P)=\frac{2}{\pi(2n-1)}+\frac{2}{\pi(2n-1)}+\frac{2}{\pi(2n-3)}+\frac{2}{\pi(2n-3)}+\dots+\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}+\text{Sen } 1$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}+\dots+\frac{1}{3}\right)+\text{Sen } 1.$$

$$>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\text{Sen } 1$$

puede ser arbitrariamente grande. Por lo tanto $f \notin \mathcal{L}$ y $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{L}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Apostol, T.M., MATHEMATICAL ANALYSIS, Addison-Wesley (1974).

[2] Barberian S.K., REGULATED FUNCTIONS: BOURBAKI'S ALTERNATIVE TO THE RIEMANN INTEGRAL, American Mathematical Montly (March 1979)

[3] Bartle, R.G., THE ELEMENTS OF REAL ANALYSIS, Willey (New York, 1964).

[4] Bourbakí, N.,FONCTIONS D'UNE VARIABLE RELLE, Herman (París, 1976).

[5] Dieudonné, J., FONDATIONS OF MODERN ANALYSIS, Academic (New York, 1960).

[6] Gelbaun, B.R. and Olmstead, J.M.H., COUNTEREXAMPLES IN ANALYSIS, Holden Day (San Fco. 1964).

[7] Hewitt, E. and Strombag, K., REAL AND ABSTRACT ANALYSIS, Springer (New York, 1965).

[8] Kolmogorov, A.N., and Fomin, S.U., INTRODUCTORY REAL ANALYSIS, Dover (New York, 1975).

[9] Riesz, F. and Nagy, B, FUNCTIONAL ANALYSIS, Ungar (New York, 1956)

[10] Royden, H.L., REAL ANALYSIS, Collier Mc Millan, (New York, 1968).

[11] Rudin, W., PRINCIPES OF MATHEMATICAL ANALYSIS, Mac Graw Hill (New York, 1976).