

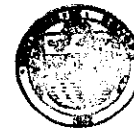


UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

**TRANSFORMACIONES BILINEALES
DE UNA VARIABLE COMPLEJA**

TESIS



**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

**EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA**

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presenta

Marina Salazar Antúnez

Hermosillo, Sonora

Mayo de 1985

DEDICATORIAS.

A mis papás,
con todo mi amor.

A la memoria de Ma. Antonieta

A Silvia Elena.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Michael Porter Kamlin, la amabilidad que tuvo al brindarme su asesoría, tiempo y paciencia durante la elaboración de esta tesis.

Agradezco al Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N., por permitirme utilizar su biblioteca y por brindarme un lugar para estudiar.

Y por último, quiero agradecer también a todas aquellas personas, que de alguna u otra forma me ayudaron a realizar este trabajo; en particular a Irma Flor Córdova González, por su trabajo tan eficaz al mecanografiar éste.

TRANSFORMACIONES BILINEALES
DE UNA
VARIABLE COMPLEJA.

INDICE

Introducción	I
CAPITULO 0:	
EL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO $\mathbb{CP}^N$	
0.1 Espacio Proyectivo Complejo $\mathbb{CP}^N$	1
0.2 Transformaciones proyectivas de $\mathbb{CP}^N$	2
0.3 $\mathbb{CP}^1$	4
0.4 Representación de las Transformaciones Proyectivas de $\mathbb{CP}^1$	6
0.5 Topología de $\hat{\mathbb{C}}$	8
CAPITULO I:	
ACCIONES DE GRUPOS	
1.1 Acciones de Grupos	14
1.2 Propiedades de Acciones	16
1.3 Ejemplos	22
1.4 Acciones Equivalentes	29
1.5 Ejemplos de Acciones Equivalentes	35
CAPITULO II:	
TRANSFORMACIONES BILINEALES	
2.1 Funciones Racionales	37
2.2 Transformaciones Bilineales	47
2.3 Las Transformaciones Bilineales son Mapeos Conformes	50
2.4 Propiedad Homocíclica	56
2.5 Puntos Fijos	60
2.6 Razón Cruzada	63
2.7 Puntos Simétricos	66
2.8 Proyección Estereográfica	71

CAPITULO III:

CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

3.1	Multiplicador	80
3.2	Transformaciones Hiperbólicas	84
3.3	Transformaciones Elípticas	86
3.4	Transformaciones Loxodrómicas	88
3.5	Transformaciones Parabólicas	90
3.6	Clasificación de elementos de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$	92
3.7	Círculo Isométrico	98

CAPITULO IV:

GRUPOS FINITOS DE TRANSFORMACIONES BILINEALES

4.1	Región Fundamental	103
4.2	Aristas y Vértices de la Frontera de R	109
4.3	Ciclos de Vértices	113
4.4	Funciones Automorfas	118
4.5	Polos y Ceros en la Región R	121
4.6	Grupos de Rotaciones de Sólidos Regulares	127
4.7	Estudio de un Sólido Regular General	134
4.8	Determinación de todos los Grupos Finitos (Parte I)	138
4.9	Determinación de todos los Grupos Finitos (Parte II)	145

APENDICE:

GEOMETRÍAS NO-EUCLIDEANAS	153
---------------------------	-----

Bibliografía	158
--------------	-----

INTRODUCCION

Las funciones bilineales (transformaciones de Möbius), son el tipo más elemental de las funciones racionales de una variable compleja.

Por la existencia de una fórmula explícita para la transformación inversa, la colección de dichas funciones forma un grupo topológico de automorfismos de la esfera de Riemann. Estas transformaciones fueron investigadas por Möbius, quien las caracterizó como las transformaciones de la esfera, bajo las cuales los círculos corresponden nuevamente a círculos. Dentro del grupo de Möbius quedan representados, todos los grupos de rotaciones de los poliedros platónicos.

En el capítulo 0, presentamos al Espacio Proyectivo Complejo CP^N y como ejemplo CP^1 , el espacio isomorfo a la esfera de Riemann, que es donde se desarrolla este trabajo; en su última sección, presentamos la topología de $\hat{C}$, de la cual hacemos uso en el presente trabajo.

En el capítulo I, exponemos algunos conceptos de algebra moderna, a los que haremos referencia posteriormente. En particular, supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos elementales de la teoría de grupos, como son: grupo, subgrupo, homomorfismo, kernel, etc.

Escribiremos $S(X)$ para el grupo de las aplicaciones biyectivas de X en X , (con la operación de composición de funciones) cuando X es cualquier conjunto.

El capítulo II es una presentación sistemática de las propiedades básicas de las transformaciones bilineales, en cuanto a su acción topológica y geométrica sobre la esfera; en la última sección del capítulo presentamos la proyección estereográfica, que es de gran utilidad en los capítulos posteriores.

En el capítulo III se hace la clasificación de las transformaciones bilineales, según su descripción algebraica (traza) y su acción geométrica (puntos fijos).

El capítulo IV es un estudio de los grupos finitos de transformaciones bilineales, y su correspondencia con las rotaciones de los sólidos regulares inscritos en la esfera.

Y por último presentamos un apéndice sobre las distintas geometrías (euclídeana, elíptica e hiperbólica).

CAPITULO 0

EL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO $\mathbb{CP}^N$ 0.1 ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO $\mathbb{CP}^N$.

En el presente texto $\mathbb{C}$ denotará el campo de los números complejos. Considérese un entero $N \geq 1$. Introducimos una relación de equivalencia en $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$, donde $0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$, de la siguiente manera.

Sean $z = (z_0, z_1, \dots, z_N)$, $w = (w_0, w_1, \dots, w_N)$ elementos de $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$. Entonces z es equivalente a w , (en símbolo $z \sim w$), si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que

$$w_i = \lambda z_i \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (1)$$

Escribiremos para la clase de equivalencias de $z \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$

$$[z] = \{ w \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} : w \sim z \} \quad (2)$$

Al espacio cociente $\mathbb{CP}^N = (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}) / \sim$ lo llamamos el *Espacio Projectivo Complejo de Dimensión N* , así tenemos

$$\mathbb{CP}^N = \{ [z] : z \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \} \quad (3)$$

Claramente los elementos de $\mathbb{CP}^N$ son las líneas rectas complejas de $\mathbb{C}^{N+1}$, que pasan por el origen 0 , privadas de él.

0.2 TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS DE $\mathbb{CP}^N$.

Sea $\hat{T}: \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ una función que satisfaga para toda $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para toda $z \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$, la relación

$$\hat{T}(\lambda z) = \lambda \hat{T}(z) \quad (4)$$

Por (1) tenemos que si $z \sim w$, entonces $\hat{T}(z) \sim \hat{T}(w)$, por lo tanto $\hat{T}$ induce una función $T: \mathbb{CP}^N \longrightarrow \mathbb{CP}^N$, dada por:

$$T([z]) = [T(z)] \quad (5)$$

La función T inducida por $\lambda \hat{T}$, es la misma que la función inducida por $\hat{T}$, puesto que $\lambda \hat{T}(z) \sim \hat{T}(z)$. Y entonces tenemos que las funciones T, S correspondientes a $\hat{T}, \hat{S}$, de $\mathbb{CP}^N$ en sí mismo son iguales, cuando existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\hat{T} = \lambda \hat{S}$.

El caso que nos interesa es cuando $\hat{T} \in GL(N+1, \mathbb{C})$ donde

Definición 0.2.1. $GL(N, \mathbb{C}) = \{ \hat{T} = (T_{ij}), 1 \leq i, j \leq N: T_{ij} \in \mathbb{C}, \det(\hat{T}) \neq 0 \}$

Definición 0.2.2. $SL(N, \mathbb{C}) = \{ \hat{T} \in GL(N, \mathbb{C}): \det(\hat{T}) = 1 \}$.

Para conveniencia de notación identificaremos la matriz $T \in GL(N, \mathbb{C})$ con la función lineal $T: \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ asociada

también con su restricción a $\mathbb{C}^N - \{0\}$.

Se hace mención que el conjunto $GL(N, \mathbb{C})$ forma un grupo bajo la multiplicación de matrices, y su subconjunto $SL(N, \mathbb{C})$ es un subgrupo, bajo la misma operación.

Definición 0.2.3. $[T] = \{ \hat{S} : \hat{S} \sim \hat{T} \}$, donde se define $\hat{S} \sim \hat{T}$ si, y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ con $\hat{S} = \lambda \hat{T}$.

Definición 0.2.4. $PGL(N, \mathbb{C}) = \{ [\hat{T}] : \hat{T} \in GL(N, \mathbb{C}) \}$

Definición 0.2.5. $PSL(N, \mathbb{C}) = \{ [\hat{T}] : \hat{T} \in SL(N, \mathbb{C}) \}$

Cuando $\hat{T} \in GL(N+1, \mathbb{C})$ es inmediato que se cumple (4), y la función T asociada por (5), se llama una *Transformación Projectiva de $\mathbb{CP}^N$* .

0.3 CP^1 .

Veamos el ejemplo de espacio proyectivo complejo - de dimensión uno, ($N = 1$), en el cual desarrollaremos nuestro trabajo.

Por (3) tenemos

$$CP^1 = \{[(z_0, z_1)] : (z_0, z_1) \in C^2 - \{0\}\} \quad (6)$$

Aquí tenemos que hay dos tipos de puntos de $C^2 - \{0\}$ a saber para los cuales

$$a) \quad z_1 = 0 \quad \text{o bien} \quad b) \quad z_1 \neq 0$$

Sean $w = (w_0, w_1) \in C^2 - \{0\}$, $z = (z_0, z_1) \in C^2 - \{0\}$. Como se vió en la sección 0.1, $w \sim z$ si, y sólo si existe $\lambda \in C - \{0\}$ tal que (1) es válido.

Estudiemos primero el caso en que (z_0, z_1) sea del tipo a). Tenemos $z_1 = 0$, por lo tanto $z_0 \neq 0$.

Si $(w_0, w_1) \sim (z_0, z_1)$ tenemos por (1) que existe λ tal que $w_1 = \lambda z_1 = 0$, por lo que (w_0, w_1) también es del tipo a). Recíprocamente, si (w_0, w_1) es del tipo a), ponemos $\lambda = w_0/z_0$ y se satisface (1), luego $(w_0, w_1) \sim (z_0, z_1)$. Por lo que los puntos del tipo a), forman una sola clase de equivalencia.

Ahora consideremos el caso de los puntos del tipo b)

tomando $\lambda = z_1$, tenemos por (1) que $(z_0, z_1) \sim (z_0 | z_1, 1)$ y por lo tanto, todo punto del tipo b) es equivalente a uno de la forma $(z, 1)$ con $z \in C$.

Con lo anterior podemos considerar a CP' , como la unión de subconjuntos

$$CP' = \{ [1, 0] \} \cup \{ [(z, 1)] : z \in C \}$$

Si relacionamos a $\hat{C} = C \cup \{ \infty \}$ con CP' , por medio de

$$z \longrightarrow [(z, 1)] \quad y \quad \infty \longrightarrow [(1, 0)] \quad (7)$$

tenemos una correspondencia biunívoca entre $\hat{C}$ y CP' .

El símbolo ∞ indica cualquier objeto fijo que no sea elemento de C .

A $\hat{C}$ lo llamamos *plano extendido complejo*.

Por la correspondencia establecida en (7), hemos justificado que será lo mismo trabajar en $\hat{C}$ que en CP'

0.4. REPRESENTACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS DE $\mathbb{CP}^1$.

Sea $\hat{T} \in GL(2, \mathbb{C})$, y escribábase con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (8)$$

con $ad - bc \neq 0$. (9)

Luego considérese $[\hat{T}] \in PGL(2, \mathbb{C})$, así tenemos:

$$[\hat{T}] \left(\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a z_0 + b z_1 \\ c z_0 + d z_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Así con $z = z_0 | z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ y por (5) tenemos $T(z) \in \hat{\mathbb{C}}$, dada por la fórmula

$$T(z) = \frac{a z + b}{c z + d} \quad (11)$$

Si $z = -d|c$, entonces $c z + d = 0$, por lo que $T(-d|c) = \infty$.
Definiendo a $T(\infty)$ como el límite de $T(z)$ cuando $z \longrightarrow \infty$, tenemos que $T(\infty) = a/c$.

Definición 0.4.1. Las transformaciones $T: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

de la forma (11) con $ad - bc \neq 0$ les llamamos *transformaciones bilineales* o *Automorfismos* de $\hat{C}$.

Ahora definimos

$$\text{Aut}(\hat{C}) = \{ \text{transformaciones bilineales de } \hat{C} \}$$

Si $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ es dada por la fórmula (11), entonces

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} \quad (12)$$

satisface $T(T^{-1}(z)) = T^{-1}(T(z)) = z$, ésto es $T^{-1} \in \text{Aut}(\hat{C})$ es la inversa de T . Si S y T son transformaciones bilineales, entonces $S \circ T$ lo es también, por lo que $\text{Aut}(\hat{C})$ es un grupo bajo la composición, y de hecho la función

$$[\hat{T}] \longrightarrow T \quad (13)$$

es un isomorfismo de $\text{PGL}(2, C)$ en $\text{Aut}(\hat{C})$.

0.5 TOPOLOGÍA DE $\hat{C}$.

En esta sección presentamos las definiciones básicas de la topología de $\hat{C}$, las cuales pueden estudiarse en cualquier libro de topología general, o bien en [1], [2].

La función $d: C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(z, w) = |z - w|$$

tiene las siguientes propiedades:

- a) $d(z, w) \geq 0$
- b) $d(z, w) = 0$ si, y sólo si $z = w$
- c) $d(z, w) = d(w, z)$
- d) $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$

A una función que cumple con a), b), c) y d) le llamamos *distancia*.

A un par (X, d) , donde d es una función distancia definida en el conjunto X , se llama *Espacio Métrico*. Entonces (C, d) es un espacio métrico.

Daremos los conceptos topológicos básicos en la referente al plano complejo.

Definición 0.5.1. Llamaremos *Bola Abierta* de centro en z_0 y radio $r > 0$ al conjunto

$$B(z_0, r) = \{ z \in C : d(z_0, z) < r \}$$

y diremos *bola cerrada* al conjunto

$$\bar{B}(z_0, r) = \{ z \in C : d(z_0, z) \leq r \}$$

Definición 0.5.2. Un punto z_0 se llama *punto interior* de un conjunto $X \subseteq C$, si existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset X$.

Definición 0.5.3. Un conjunto $X \subseteq C$, decimos que es *abierto* si, y sólo si todo punto x , es un punto interior de X .

Definición 0.5.4. Si $V \subseteq C$ contiene algún conjunto -abierto A , tal que $z \in A$, decimos que V es una *vecindad* de z .

Definición 0.5.5. Un conjunto $X \subseteq C$ decimos que es *cerrado* si su complemento, $C - X$ es abierto.

Definición 0.5.6. Un punto $z \in X \subseteq C$ se llama *punto frontera* de X si, y sólo si toda vecindad con centro en z , contiene puntos de X y de $C - X$.

Definición 0.5.7. Un punto $z \in X \subseteq C$ es *adherente* a X si, y sólo si toda vecindad de z , centrado en z , contiene al menos un punto de X . Al conjunto de puntos adhe-

rentes de X , se le llama *adherencia* de X ó *cerradura* de X y la denotamos $\bar{X}$.

Definición 0.5.8. Un punto $z \in X \subseteq C$ se llama *punto de acumulación* de X si, y sólo si es adherente a $X - \{z\}$.

Definición 0.5.9. Sea (X, d) y (X', d') dos espacios métricos y sea $f: X \rightarrow X'$ una función. Sean $x_0 \in X$, $x'_0 \in X'$, decimos que " $\lim f(x) = x'_0$ " si, para toda vecindad V' de x'_0 existe una vecindad V de x_0 tal que $f(V) \subset V'$.

Definición 0.5.10. Sea (X, d) y (X', d') dos espacios métricos y sea $f: X \rightarrow X'$ una función. Decimos que f es *continua* en el punto $x_0 \in X$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si f es continua en todo $x \in X$, decimos que f es continua de X en X' .

Definición 0.5.11. Sea X un conjunto, se llama una *topología* τ sobre X , a una colección de subconjuntos de X que satisface lo siguiente:

- i) La unión de toda familia de elementos de τ , pertenece a τ .
- ii) La intersección de toda familia finita de elementos de τ es un elemento de τ .

Como consecuencia de i) tenemos que el vacío está en τ , y como consecuencia de ii) que X está en τ . A

los elementos de τ los llamamos conjuntos *abiertos*.

A un par (X, τ) , donde τ es una topología definida en el conjunto X , decimos que es un *Espacio Topológico*. Como ejemplo tenemos al espacio topológico (C, τ) , donde τ es el conjunto de los abiertos definidos en 0.5.3.

Otro ejemplo de espacio topológico que nos interesa conocer es: $(\hat{C}, \hat{\tau})$, donde $\hat{\tau}$ consiste en los conjuntos siguientes:

- i) Cada conjunto de la topología τ de C .
- ii) Los complementos, respecto a $\hat{C}$, de todos los conjuntos cerrados y acotados de C .

Definición 0.5.12. Llamaremos *vecindad del infinito*, al complemento de cualquier conjunto acotado de C .

Las definiciones de conjunto cerrado, punto frontera, punto de acumulación, etc., son análogos a las definiciones dadas para C , en términos del concepto de "vecindad".

Definición 0.5.13. Dados dos espacios topológicos X y X' , y sea $f: X \rightarrow X'$ una función, decimos que f es un *homeomorfismo* ó *aplicación topológica* de X sobre X' , si f es una biyección de X sobre X' , f manda cada abierto de X en un abierto de X' , y f^{-1} hace lo mismo.

De lo precedente si sigue sin más:

Sea $f: X \longrightarrow X'$, f es un homeomorfismo de X sobre X' si, y sólo si

- a) f es una biyección de X en X'
- b) f es continua en X .
- c) f^{-1} es continua en X' .

Definición 0.5.14. Sea X un espacio topológico. Una función compleja $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow X$ definida y continua en algún intervalo $[\alpha, \beta]$ real, es una *curva* en X .

Definición 0.5.15. Una curva $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow X$, decimos que es una *curva cerrada* si, y sólo si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Definición 0.5.16. Sean $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$, dos curvas cerradas, entonces decimos que γ_0 es *homotópica* a γ_1 en X , si existe una función continua

$$\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \text{ tal que}$$

$$\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) \quad \text{y} \quad \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s) \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Definición 0.5.17. Si γ es una curva cerrada en X , entonces decimos que γ es *homotópica a cero*, si γ es homotópica a una curva constante.

Definición 0.5.18. X es *arco conexo* si para toda $x_0, x_1 \in X$, hay una curva $\gamma: [0, 1] \longrightarrow X$, tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$.

Definición 0.5.19. Un conjunto abierto X es *simplemente conexo*, si es arco conexo y si cada curva cerrada en X es homotópica a cero.

Y como ejemplo de conjuntos simplemente conexos tenemos a $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$, $B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$, etc..

CAPITULO 1

ACCIONES DE GRUPOS

1.1 ACCIONES DE GRUPOS.

Sea X un conjunto no vacío y G un grupo, donde 1 denota la identidad de G .

Definición 1.1.1. Una acción de G en X es una función $\varphi: G \times X \rightarrow X$ tal que:

- a) $\varphi(1, x) = x$ para toda $x \in X$
- b) $\varphi(g_1 g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$ para todo $g_1, g_2 \in G, x \in X$.

Dada una acción φ de G en X , hay un homomorfismo de grupos $\tau: G \rightarrow S(X)$, tal que para cada $g \in G$ corresponde $\tau_g: X \rightarrow X$ dada por $\tau_g(x) = \varphi(g, x)$. τ es un homomorfismo de grupos, puesto que las condiciones de arriba son equivalentes a

- a) $\tau_1 = 1$
- b) $\tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}$

Cualquier τ que satisfice estas condiciones, proviene de una única acción φ .

Utilizaremos la siguiente notación:

$$\varphi(g, x) = g \cdot x \text{ ó } gx. \quad (1)$$

Por lo tanto escribiremos

- a) $1 \cdot x = x$
- b) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$

Generalmente se dirá "G actúa en X" sin mencionar , cuando ésta es sobre entendida.

Definición 1.1.2. Si G actúa en X siendo X un espacio topológico, y si cada τ_g es un homeomorfismo de X, la acción es *topológica*.

Observemos que si H es un subgrupo de G, y G actúa en X, entonces evidentemente H actúa en X, por medio de la restricción de φ a $H \times X$; el homomorfismo $\hat{\tau}: H \longrightarrow S(X)$ correspondiente, es la restricción de τ a H.

1.2 PROPIEDADES DE ACCIONES.

Daremos una serie de definiciones, dado que G es un grupo que actúa en X .

Definición 1.2.1. La *órbita* del elemento $x \in X$, la definimos como el conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$.

Dos puntos de la misma órbita se llaman *congruentes* con respecto a G .

Definición 1.2.2. Un conjunto $Y \subseteq X$ es un *conjunto fundamental* para la acción de G , cuando está formado por un elemento de cada órbita. Este conjunto no es único en general, puesto que se puede cambiar $x \in Y$ por cualquier otro elemento de $G \cdot x$.

Definición 1.2.3. Un conjunto $Y \subseteq X$ es *invariante* bajo $g \in G$ si $g(Y) = Y$ donde $g(Y) = \{g(y) : y \in Y\}$.

Y se dirá que Y es invariante bajo G , si lo es para toda $g \in G$.

Definición 1.2.4. El elemento $x \in X$ es un *punto fijo* de $g \in G$, si $\{x\}$ es invariante bajo g , y escribimos

$$\text{Fij}(g) = \{x : x \text{ es punto fijo de } g\}$$

Definición 1.2.5. El elemento $x \in X$ es un *punto periódico* de g , si para algún $n > 0$ se cumple

$$g^n \cdot x = x \quad (2)$$

Definición 1.2.6. Al mínimo $n > 1$, tal que $g^n = 1$, le llamamos *orden o período* de g .

Definición 1.2.7. El conjunto de las $g \in G$, tal que dejan fijo a $x \in X$, forman un subgrupo de G llamado *subgrupo de isotropía o estabilizador* de x .

Lo escribimos así

$$\text{Est}_G(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

Definición 1.2.8. Un punto fijo $x \in X$, tal que $\text{Est}_G(x)$ es un grupo generado por un elemento de orden n , se llamará *punto fijo de orden n* .

Sea G que actúa en X , definimos la siguiente relación de equivalencia en X : $x \sim y$ si, y sólo si existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$, es decir si, y sólo si, $y \in G \cdot x$.

Verifiquemos que es una relación de equivalencia:

- a) Es reflexiva : $1 \cdot x = x$, por tanto $x \in G \cdot x$
- b) Es simétrica : $y \in G \cdot x$ implica que existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$; como $g^{-1} \in G$ tenemos que $x \in G \cdot y$.
- c) Es transitiva : $(y \in G \cdot x, z \in G \cdot y)$ implica que existen g y g' tales que $g \cdot x = y$, $g' \cdot y = z$ de donde $(g'g)(x) = z$; por lo tanto $z \in G \cdot x$.

Ahora podemos decir que una órbita de x , es lo mismo que una clase de equivalencia, pues

$$G \cdot x = \{y \in X : x \sim y\}$$

Definición 1.2.9. Al espacio cociente $X/\sim$ ó X/G , lo llamamos *Espacios de órbitas de G en X* , y sus elementos son las órbitas de la acción.

Un ejemplo de espacio de órbitas es, con $G = \mathbb{C} - \{0\}$ como el grupo multiplicativo y con $X = \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$, entonces G actúa en X por homotecia

$$g \cdot x = (g \cdot x_0, \dots, g \cdot x_n) \quad (3)$$

Las órbitas $G \cdot x$ son las rectas complejas, generadas por $x \in X - \{0\}$, que pasan por el origen privadas de él. Entonces X/G es el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^N$, visto en el capítulo anterior.

Sea G un grupo que actúa en X , y sea $Y \subseteq X$ un conjunto fundamental para la acción, es claro que existe una biyección entre éste y el espacio de órbitas $Y \rightarrow X/G$, que asocia $y \in Y$ con $G \cdot y \in Y/G$:

Definición 1.2.10. Una función $f: X \rightarrow Y$ donde G actúa en X , se dice que es G -equivariante si para toda $g \in G$ y para toda $x \in X$, tenemos que

$$f(g \cdot x) = f(x) \quad (4)$$

PROPOSICION 1.2.1: Sea G_0 un subconjunto generador de G , que actúa en X , tenemos:

- a) Si $Y \subseteq X$ y para toda $g \in G_0$, $g(Y) = Y$ entonces Y es G -invariante.
- b) Si $f: X \rightarrow \hat{C}$ y para toda $g \in G_0$ se cumple (4), entonces f es G -equivariante.

DEMOSTRACION:

- a) Sea $g \in G_0$, tenemos que $g^{-1}(y) = y$ puesto que

$$g^{-1}(y) = g^{-1}(g(y)) = g^{-1}g(y) = y.$$

Sea $g \in G$, luego g es de la forma

$$g = g_1 g_2 \dots g_n \quad (5)$$

con $g_1 \in G_0$ o bien $g_1^{-1} \in G_0$, entonces

$$\begin{aligned} g(Y) &= g_1 g_2 \dots g_n(Y) \\ &= g_1 g_2 \dots g_{n-1}(Y) \\ &= \dots \\ &= g_1(Y) \\ &= Y \end{aligned}$$

b) tenemos que para toda $g \in G_0$ y para toda $x \in X$,
 $f(g^{-1} \cdot x) = f(x)$ puesto que

$$f(x) = f(gg^{-1} \cdot x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

Sea $g \in G$, luego g es de la forma (5), y se con
cluye la demostración de igual forma que la anterior.

Definición 1.2.11. Se dice que la acción de G en X
 es *transitiva* si para todo $x_1, x_2 \in X$, existe $g \in G$, -
 tal que $g \cdot x_1 = x_2$, es decir cuando $G \cdot x = X$, o sea el númer
 o de órbitas es uno.

Definición 1.2.12. Se dice que la acción de G en X
 es *efectiva* si para todo $g \in G$ y $x \in X$, $g \cdot x = x$ implica
 g es la identidad, lo cual es lo mismo a decir que el kernel
 del homomorfismo τ es la identidad

PROPOSICION 1.2.2 Si G actúa en X y si $\tau: G \rightarrow S(X)$ es el homomorfismo asociado, entonces $\ker(\tau) = \bigcap_{x \in X} \text{Est}_G(x)$.

DEMOSTRACION:

Sea $g \in G$. Entonces

$$g \in \ker(\tau) \Leftrightarrow \forall x \in X, \tau_g(x) = g \cdot x = x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, g \in \text{Est}_G(x)$$

$$\Leftrightarrow g \in \bigcap_{x \in X} \text{Est}_G(x).$$

1.3 EJEMPLOS.

EJEMPLO 1.

TEOREMA DE CAYLEY .- Para cada grupo G existe un conjunto X , donde G actúa efectivamente sobre X .

DEMOSTRACION:

Tomemos $X = G$ y $\varphi(g, x) = gx$ (acción de traslación por la izquierda con el producto del grupo).

Sea $x \in X$ y $g \in \text{Est}_G(x)$, luego $g \cdot x = x$ implica $g = 1$, por lo tanto $\text{Est}_G(x) = \{1\}$ y por definición la acción es efectiva.

EJEMPLO 2.

Decimos que G actúa *trivialmente* en X , dada la acción definida por

$$g \cdot x = x \quad \text{para toda } x \in X$$

Y por lo tanto el espacio de órbitas $X|G$ tiene una correspondencia biunívoca con X .

EJEMPLO 3.

Decimos que $G = S(X)$ actúa *naturalmente* en X ,
dada la acción definida por

$$g \cdot x = g(x) \quad \text{para toda } g \in S(X), x \in X$$

De igual manera si X es un espacio topológico y
 $G = H(X) = \{g | g \text{ es homeomorfismo de } X\}$, $H(X)$ es un sub-
grupo de $S(X)$ que actúa en X , así mismo cualquier sub-
grupo de $H(X)$ lo hace también y actúa topológicamente.

EJEMPLO 4.

Decimos que G actúa en si mismo *por conjugación*
cuando la acción es dada por

$$g \cdot x = gxg^{-1} \quad \text{para toda } g \in G, x \in X = G$$

Demostremos que ésta es una acción

$$a) \quad 1 \cdot x = 1 \cdot x \cdot 1^{-1} = x$$

$$b) \quad (g_1 g_2) \cdot x = \cancel{(g_1 g_2)^{-1}} = g_1 \cdot (g_2 x g_2^{-1}) g_1^{-1} = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$$

$$(g_1 g_2) \cdot x \cdot (g_1 g_2)^{-1}$$

pero la acción no es siempre efectiva, pues para que ésto
suceda necesitaríamos que $g \cdot x$ fuera diferente de x para

$g \neq 1$, y ésto sucede si, y sólo si $gx \neq xg$ lo cual no se cumple para un grupo conmutativo.

EJEMPLO 5.

Sea H un subgrupo de G , H actúa en G por traslación; luego hay un espacio cociente G/H , y es sabido que cuando H es subgrupo normal, G/H es un grupo.

Sea X cualquier conjunto en el cual actúa G . Entonces G/H actúa en el espacio de órbitas X/H , dada la acción definida por

$$(gH)(Hx) = Hgx \text{ donde } gH \in G/H, Hx \in X/H$$

Demostremos que ésta es una acción:

- a) $(1H)(Hx) = Hx$
- b) $(g_1H)(g_2H) \cdot Hx = (g_1g_2H)(Hx)$

$$= Hg_1g_2x$$

$$= (g_1H)(Hg_2x)$$

$$= (g_1H)[(g_2H)(Hx)]$$

Supongamos en particular que $H = \ker(\tau)$, donde τ es el homomorfismo correspondiente a la acción de G en X .

Entonces veremos a continuación que el grupo G/H

actúa efectivamente en $X|H$. Debido a la correspondencia que existe entre $X|H$ y X dada por $\{x_i\} \rightarrow x_i$ para toda $x_i \in X$, tenemos que $G|H$ actúa efectivamente en X , cuyo homomorfismo correspondiente es $\tau_1 : G|H \rightarrow S(X)$.

Para probar que la acción de $G|H$ en X es efectiva, hay que ver que el $\ker(\tau_1)$ es la identidad, es decir -- que $\ker(\tau_1) = \{H\}$. Veamos:

$$\ker(\tau_1) = \{gH \in G|H : gH \cdot x = x \text{ para toda } x \in X\}$$

Obviamente $H \in \ker(\tau_1)$, por ser H la identidad en $G|H$. Sea $gH \in \ker(\tau_1)$, entonces $gH \cdot x = Hgx = x$ de donde $g \cdot x = x$ por lo que $g \in \ker \tau = H$, luego $gH = H$.

Por lo tanto $\ker(\tau_1) = \{H\}$.

EJEMPLO 6.

Daremos un ejemplo de acción topológica. Tomemos al grupo $GL(N+1, \mathbb{C})$ y al espacio topológico $\mathbb{C}^{N+1}$. Definimos a $\hat{I} \in GL(N+1, \mathbb{C})$ como

En efecto:

$$\tau(c\hat{I})([z]) = c\hat{I} \cdot [z] = [cz] = [z]$$

para todo $[z] \in \mathbb{CP}^N$, $c \in \mathbb{C} - \{0\}$. Por lo que

$$(\mathbb{C} - \{0\})\hat{I} \subset \ker(\tau)$$

Por otra parte, sea $g \in \ker(\tau)$, luego para todo $[z] \in \mathbb{CP}^N$ tenemos que

$$g \cdot [z] = [z]$$

es decir que para toda $[z] \in \mathbb{CP}^N$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N g_{1,i} z_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N g_{N+1,i} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Ahora, para toda $z \in \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$, existe $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N g_{1,i} z_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N g_{N+1,i} z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c z_0 \\ \vdots \\ c z_N \end{pmatrix}$$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

por lo que $[\hat{I}] = (C - \{0\})\hat{I} = \{c\hat{I} : c \in C - \{0\}\}$

La acción de $GL(N+1, C)$ en C^{N+1} está dada por:
 $g \cdot z = gz$, para todo $g \in GL(N+1, C)$, $z \in C^{N+1}$ (la multiplicación común de una matriz por un vector).

Se comprueba que esta es una acción por la asociatividad de matrices. Como $SL(N+1, C)$ es subgrupo de $GL(N+1, C)$ tenemos que también actúa en C^{N+1} . Las acciones descritas son topológicas puesto que la multiplicación de matrices es continua.

Ahora bien, por lo visto en el capítulo 0, el grupo $GL(N+1, C)$ también actúa en CP^N , con la acción dada por

$$g \cdot [z] = [g \cdot z]$$

para todo $g \in GL(N+1, C)$, $[z] \in CP^N$.

Si la función $\tau : GL(N+1, C) \longrightarrow S(CP^N)$ es el homomorfismo correspondiente a dicha acción demostraremos que

$$\ker(\tau) = (C - \{0\})\hat{I} \quad (7)$$

En efecto:

$$\tau(c\hat{I})([z]) = c\hat{I} \cdot [z] = [cz] = [z]$$

para todo $[z] \in \mathbb{CP}^N$, $c \in \mathbb{C} - \{0\}$. Por lo que

$$(\mathbb{C} - \{0\})\hat{I} \subset \ker(\tau)$$

Por otra parte, sea $g \in \ker(\tau)$, luego para todo $[z] \in \mathbb{CP}^N$ tenemos que

$$g \cdot [z] = [z]$$

es decir que para toda $[z] \in \mathbb{CP}^N$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N g_{0,i} z_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N g_{N,i} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Ahora, para toda $z \in \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$, existe $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal

que

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N g_{0,i} z_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N g_{N,i} z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c z_0 \\ \vdots \\ c z_N \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos expresiones válidas para toda $z \in \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$, de la siguiente forma

$$\sum_{i=0}^N g_{ji} z_i = cz_j \quad \text{para toda } j \quad (8)$$

donde c puede depender de z .

Si sustituimos en (8) los elementos de la forma

$$z_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

obtenemos que $g_{jj} \neq 0$ y que $g_{ij} = 0$ para toda $i \neq j$.

Y si escogemos $z_i = 1$ para $i = 0, 1, \dots, N$, obtenemos de (8) que

$$g_{00} = g_{22} = \dots = g_{N,N} \neq 0$$

y así vemos que si $g \in \ker(\tau)$ entonces $g \in (\mathbb{C} - \{0\})\hat{I}$, de donde deducimos (7).

Habiendo demostrado (7) y por lo visto en el ejemplo 5, aseguramos que el grupo $GL(N+1, \mathbb{C})|(\mathbb{C} - \{0\})\hat{I}$ $PGL(N+1, \mathbb{C})$ actúa efectivamente en $\mathbb{CP}^N$.

1.4 ACCIONES EQUIVALENTES.

Sea $\varphi_1: G_1 \times X_1 \rightarrow X_1$ una acción de un grupo G_1 en un conjunto X_1 , sea $\tau_1: G_1 \rightarrow S(X_1)$ el homomorfismo correspondiente. Considérese una biyección f de X_1 en cualquier conjunto X_2 y un isomorfismo h de G_1 en un grupo G_2 . Entonces tenemos una acción φ_2 de G_2 en X_2 , inducida por f y h , dada por:

$$\varphi_2(h(g_1), f(x_1)) = f(\varphi_1(g_1, x_1)) \quad (9)$$

Escribiremos $h(g_1) = g_2$ y $f(x_1) = x_2$. El homomorfismo asociado τ_2 está descrito por

$$\tau_2(g_2) = f \circ \tau_1(g_1) \circ f^{-1} \quad g_1 \in G_1 \quad (10)$$

En un diagrama las fórmulas (9) y (10) se expresan

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\tau_1(g_1)} & X_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ X_2 & \xrightarrow{\tau_2(g_2)} & X_2 \end{array}$$

FIG. (1)

Decimos que φ_1 y φ_2 son acciones equivalentes

cuando φ_2 es inducida de la manera descrita.

Hacemos la aclaración que ésta relación es de hecho, una relación de equivalencia en el conjunto de todas las acciones, en efecto:

Sean τ_1, τ_2, τ_3 , los homomorfismos correspondientes a las acciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ respectivamente.

a) Reflexiva:

Dada la biyección $f: X_1 \rightarrow X_1$ y el isomorfismo $h: G_1 \rightarrow G_1$, (con f y h como la identidad), tenemos que $\tau_1(g_1) = f \circ \tau_1(g_1) \circ f^{-1}$ es decir, $\varphi_1 \sim \varphi_1$.

b) Simetría:

De $\varphi_1 \sim \varphi_2$ tenemos $\tau_2(g_2) = f \circ \tau_1(g_1) \circ f^{-1}$ con una biyección $f: X_1 \rightarrow X_2$ y un isomorfismo $h: G_1 \rightarrow G_2$, de donde tenemos $f^{-1}: X_2 \rightarrow X_1$ y $h^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ por lo que $\tau_1(g_1) = f^{-1} \circ \tau_2(g_2) \circ f$ es decir, $\varphi_2 \sim \varphi_1$.

c) Transitividad:

De $\varphi_1 \sim \varphi_2$ y $\varphi_2 \sim \varphi_3$ tenemos $\tau_2(g_2) = f_1 \circ \tau_1(g_1) \circ f_1^{-1}$ con $f_1: X_1 \rightarrow X_2$ y con el isomorfismo $h_1: G_1 \rightarrow G_2$, y $\tau_3(g_3) = f_2 \circ \tau_2(g_2) \circ f_2^{-1}$ con $f_2: X_2 \rightarrow X_3$ y con el isomorfismo $h_2: G_2 \rightarrow G_3$.

Sea $f_3 = f_2 \circ f_1^{-1}$, f_3 es una biyección de X_1 en X_3 ;
y sea $h_3 = h_2 \circ h_1$, h_3 es un isomorfismo de G_1 en G_3 , por
lo que $\tau_3(g_3) = f_3 \circ \tau_1(g_1) \circ f_3^{-1}$ es decir, $\varphi_1 \sim \varphi_3$.

Tenemos los siguientes resultados:

PROPOSICION 1.4.1. Sean φ_1, φ_2 acciones equivalentes
de G_1 en X_1 , G_2 en X_2 respectivamente. Escribase
 $x_2 = f(x_1)$ y $g_2 = h(g_1)$. Entonces tenemos las siguientes
afirmaciones:

a) φ_2 es efectiva si, y sólo si φ_1 es efectiva.

Demostración:

Supongamos que φ_2 es efectiva, luego
 $\varphi_2(g_2, x_2) = x_2$ para toda $x_2 \in X_2$ implica $g_2 =$ identidad.
Por otro lado tenemos que

$\varphi_2(g_2, x_2) = f(\varphi_1(g_1, f^{-1}(x_2))) = f(\varphi_1(g_1, x_1)) = x_2$ si, y sólo
si $\varphi_1(g_1, x_1) = x_1$, puesto que f es una biyección y
como h es isomorfismo, g_1 es la identidad.

La suficiencia se demuestra por la simetría.

b) Sea $Y_1 \subseteq X_1$ y sea $f(Y_1) = Y_2 \subseteq X_2$. Entonces Y_2 es
 G_2 -invariante si, y sólo si Y_1 es G_1 -invariante.

La demostración tiene el mismo razonamiento que a).

- c) x_2 es punto fijo de g_2 si, y sólo si x_1 es punto fijo de g_1 .

La demostración se sigue de b), haciendo $Y_1 = \{x_1\}$

- d) x_2 es punto periódico de g_2 si, y sólo si x_1 es punto periódico de g_1 , y cuando esto se tiene, son puntos fijos de elementos del mismo orden.

Demostración:

x_1 es punto fijo de g_1^n si, y sólo si x_2 es punto fijo de g_2^n .

- e) $\text{Orden } (g_2) = \text{Orden } (g_1)$

Demostración:

Sea n el orden de g_1 y sea m el orden de g_2 .
 $g_2^n = h(g_1)^n = h(g_1^n) = h(\text{id}) = \text{id}$, por lo que

$$m \leq n \quad (11)$$

Por simetría tenemos que $m \geq n$ y por (11) concluimos que $m = n$.

Omitimos las demostraciones de las siguientes equivalencias, ref [5], [6], [7].

$$f) \quad \text{Fij}(g_2) = f(\text{Fij}(g_1))$$

$$g) \quad \text{Est}_{G_2}(x_2) = h(\text{Est}_{G_1}(x_1))$$

$$h) \quad G_2 \cdot x_2 = f(G_1 \cdot x_1)$$

i) φ_2 es transitiva si, y sólo si φ_1 es transitiva.

j) Existe una biyección $X_1|G_1 \rightarrow X_2|G_2$ entre los espacios de órbitas dada por $G_1 \cdot x_1 \rightarrow G_2 \cdot x_2$. Como consecuencia de esto tenemos que si $Y \subseteq X_1$ es un conjunto fundamental, entonces $f(Y) \subseteq X_2$ es un conjunto fundamental. Cuando las acciones son topológicas y h es un homeomorfismo, esta biyección de $X_1|G_1$ en $X_2|G_2$ es un homeomorfismo también.

Si tomamos $X_1 = X_2 = X$, $G_1 = G_2 = G$ y $f = g \in G$ podemos deducir lo siguiente:

PROPOSICION 1.4.2. Sea G un grupo que actúa en X ,

entonces

1.- $Y \subseteq X$ es h -invariante, $h \in G$ si, y sólo si $G(Y)$ es ghg^{-1} -invariante, $g \in G$.

2.- x es punto fijo de $h \in G$ si, y sólo si $g \cdot x$ es punto fijo de ghg^{-1} , $g \in G$.

3.- $\text{Fij}(ghg^{-1}) = g \text{ Fij}(h)$ $g, h \in G$

4.- $\text{Est}_G(gx) = g \text{ Est}_G(x) g^{-1}$.

5.- Si $ghg^{-1} = h$, entonces $\text{Fij}(h)$ es g -invariante y $\text{Fij}(g)$ es h -invariante.

5.- Y es conjunto fundamental si, y sólo si $g(Y)$ es un conjunto fundamental.

Ref.[5], [6], [7]:

PROPOSICION 1.4.3: Puntos fijos congruentes son del mismo orden.

Demostración:

La demostración se sigue de la prop. 1.4.1. a) .

1.5 EJEMPLOS DE ACCIONES EQUIVALENTES

EJEMPLO 7.

Del ejemplo 6 anterior, tenemos que $\text{PGL}(N+1, \mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{CP}^N$, por medio de la acción definida por

$$[\hat{T}] \cdot [z] = [\hat{T} \cdot z]$$

para todo $[\hat{T}] \in \text{PGL}(N+1, \mathbb{C})$, $[z] \in \mathbb{CP}^N$.

Sabemos que $\text{PGL}(N+1, \mathbb{C})$ y $\text{PSL}(N+1, \mathbb{C})$ son isomorfos dada la correspondencia biunívoca

$$[\hat{T}] \longleftrightarrow [\det(\hat{T})^{-1/(N+1)} \hat{T}]$$

Por medio de éste isomorfismo, dicha acción y la biyección identidad de $\mathbb{CP}^N$ en sí mismo, se induce una acción equivalente de $\text{PSL}(N+1, \mathbb{C})$ en $\mathbb{CP}^N$ dada por

$$[\hat{T}] \cdot [z] = [\hat{T} \cdot z]$$

para todo $[\hat{T}] \in \text{PSL}(N+1, \mathbb{C})$, $[z] \in \mathbb{CP}^N$.

EJEMPLO 8.

En el ejemplo 6 (con $N=1$) vimos que $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ actúa efectivamente en $\mathbb{CP}^1$. En la sección 0.4 (13), damos un isomorfismo entre $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ y $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, dada la biyección

de $CP' \rightarrow \hat{C}$, deducimos que el grupo $\text{Aut}(\hat{C})$ actúa en $\hat{C}$ de una manera equivalente a $\text{PGL}(2, C)$ en CP' .

EJEMPLO 9.

Sea G un grupo que actúa en X y sea $T \in G$.

Sea G_0 un subgrupo de G . Definimos el siguiente conjunto.

$$TG_0T^{-1} = \{TgT^{-1} : g \in G_0\}$$

Es fácil ver que TG_0T^{-1} es un subgrupo de G al que llamaremos el *Conjugado de G_0 por T* .

Ahora bien, como G_0 y TG_0T^{-1} actúan en X , tenemos que debido al isomorfismo $h = G_0 \rightarrow TG_0T^{-1}$ dado por

$$h(g) = TgT^{-1}$$

y a la biyección $f : X \rightarrow X$, dada por

$$f(x) = Tx$$

las acciones de G_0 y TG_0T^{-1} en X son equivalentes.

CAPITULO II.

TRANSFORMACIONES BILINEALES

2.1 FUNCIONES RACIONALES.

Definición 2.1.1. Diremos que $f: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ es una *función racional*, cuando pueda expresarse en la forma de una razón de dos polinomios

$$f(z) = P(z)/Q(z) \quad (1)$$

con $Q \neq 0$.

Supongamos que P y Q no tienen factores comunes de grado positivo. El grado de P es p y el de Q es q .

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ las raíces de $P(z) = 0$ y $k_1, k_2, \dots, k_r$ sus órdenes de multiplicidad.

Sean $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ las raíces de $Q(z) = 0$ y $m_1, m_2, \dots, m_s$ sus órdenes de multiplicidad.

Podemos escribir (1) como

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p}{b_0 + b_1 z + \dots + b_q z^q}$$

$$= \frac{a_p (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_r)^{k_r}}{b_q (z - \beta_1)^{m_1} \dots (z - \beta_s)^{m_s}}$$

con $a_p \neq 0$ y $b_q \neq 0$.

Notemos que $k_1 + k_2 + \dots + k_r = p$, $m_1 + m_2 + \dots + m_s = q$ y que los α_i son distintos de los β_j para toda i, j , pues si sucediera lo contrario P y Q tendrían factores no triviales en común.

Nótese también que $f(\alpha_i) = 0$. A los α_i los llamamos *ceros* de $f(z)$.

Además $f(\beta_j) = \infty$. A los β_j los llamamos *polos* de $f(z)$.

Si el orden de multiplicidad ℓ_i o k_i es igual a uno, decimos que β_j o α_i es un polo simple ó un cero simple, respectivamente.

Definición 2.1.2. El valor de una función racional en el punto al infinito, es la siguiente:

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$$

el cual es siempre un punto de $\hat{\mathbb{C}}$. Esta definición dice que:

$$f(\infty) = 0 \quad \text{si} \quad p < q ;$$

$$f(\infty) = \infty \quad \text{si} \quad p > q ;$$

$$f(\infty) = a_p | b_q \quad \text{si} \quad p = q ;$$

Veamos ahora el orden de multiplicidad de la función racional f en el ∞ ; con éste fin se efectuará la sustitución $z = 1/\rho$

$$\begin{aligned} f(1/\rho) &= \frac{a_0 + a_1(1/\rho) + \dots + a_p(1/\rho)^p}{b_0 + b_1(1/\rho) + \dots + b_q(1/\rho)^q} \\ &= \frac{\rho^q}{\rho^p} \cdot \frac{a_0\rho^p + a_1\rho^{p-1} + \dots + a_p}{b_0\rho^q + b_1\rho^{q-1} + \dots + b_q} \\ &= \rho^{q-p} \cdot f_1(\rho) \end{aligned}$$

donde f_1 es una función racional, que no tiene ni un cero ni un polo en $\rho = 0$.

Ahora bien, si $p < q$ entonces la función que envía ρ en $f(1/\rho)$ tiene un cero de orden $q - p$, y decimos que $f(z)$ tiene un cero en el infinito de orden $q - p$.

Si $p > q$ entonces la función que envía ρ en $f(1/\rho)$ tiene un polo de orden $p - q$ y decimos que $f(z)$

tiene un polo en el infinito de orden $p - q$.

Observemos que un cero de f es un polo de $1/f$, conservando su orden de multiplicidad y viceversa.

Determinemos el número de polos y de ceros, que tiene una función racional, en el plano extendido $\hat{C}$, contando sus órdenes de multiplicidad. Para ésto damos la siguiente definición.

Definición 2.1.3. El *orden total* de la función racional f , dada por (1), es el número

$$\text{orden}(f) = N = \max(p, q)$$

Veamos:

Si $p \geq q$, $f(z)$ tiene p ceros y todos ellos finitos, no hay cero en el infinito, por lo tanto el número de ceros de $f(z)$ en $\hat{C}$ es $p = N$.

Si $p < q$, vimos anteriormente que hay un cero en el infinito de orden $q - p$, en total $f(z)$ tendría $p + (q - p) = q = N$ ceros en $\hat{C}$, que nuevamente es igual al orden (f) .

Por el mismo razonamiento el número total de polos en $\hat{C}$, también es igual a N .

Observemos que si f toma el valor $a \neq 0, \infty$ en z_0 , entonces z_0 es un cero de F con $F = (P-aQ)/Q$.

Si $p > q$, entonces $\text{gr}(P-aQ) = \bar{p}$, luego $\text{orden}(F) = P$, y recordando que $\text{orden}(f) = p$ tenemos que

$$\text{Orden}(F) = \text{orden}(f) \quad (2)$$

Si $p = q$, entonces $\text{gr}(P-aQ) < p$ y como $\text{gr}(Q) = q = p$, tenemos que se cumple la igualdad (2).

Si $p < q$, entonces $\text{gr}((P-aQ)) = q = \text{gr}(Q)$ por lo que también se cumple (2).

Entonces debido a (2), podemos concluir que toda -- función racional en $\hat{C}$ toma un valor determinado $a \neq 0, \infty$ tantas veces como número de polos o de ceros tenga, es decir N veces, donde N es el orden de función.

TEOREMA 2.1.1. Toda función racional de $\hat{C}$ en $\hat{C}$, es continua.

DEMOSTRACION:

Por la definición (0.5.10), tenemos que f es continua en z_0 si

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Sea $f : \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ dada por (1). Sabemos que toda función polinomial es continua, y por la continuidad de cocientes aseguramos que f es continua con $Q \neq 0$.

Veamos entonces que pasa en los polos de f .

Sea $z_0 \in \hat{C}$ tal que $Q(z_0) = 0$; entonces $f(z_0) = \infty$ pero tenemos que el $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, puesto que el $\lim_{z \rightarrow z_0} Q(z) = 0$ y el $\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0) \neq 0$ ya que P y Q no tienen factores en común, de donde f es continua en z_0 .

Por lo tanto si $f : \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ es racional, es continua en todo $z \in \hat{C}$.

Definición 2.1.4. Una función f definida en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, es *complejo - diferenciable* en el punto $z_0 \in D$, cuando el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))}{(z - z_0)}$$

existe.

El valor de éste límite lo denotamos $f'(z_0)$ y es llamado la *derivada* de f en z_0 . Si además f' es continua decimos que f es *continuamente diferenciable*.

Definición 2.1.5. Una función definida en un dominio

$D \subseteq \mathbb{C}$, se dice que es *analítica* en D , cuando es continuamente diferenciable en todo punto de D .

Si f es analítica en $D \subseteq \mathbb{C}$, excepto en un punto z_0 , z_0 es una *singularidad aislada* de f , luego podemos dibujar dos círculos concéntricos con centro en z_0 , dentro de D ; en la región anular, f admite un desarrollo llamado *expansión de Laurent*, de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

y la parte $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$ le llamamos *parte principal* de f en z_0 . Si sucede que $b_n \neq 0$, mientras $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = 0$, la singularidad z_0 es llamada *polo* de orden n .

El comportamiento de f en $z = \infty$, es considerado por la sustitución $z = 1/\rho$ y examinando $f(1/\rho)$ en $\rho = 0$.

Si $f(1/\rho)$ tiene un polo de orden n en $\rho = 0$, tenemos

$$f(1/\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m + \frac{b_1}{\rho} + \frac{b_2}{\rho^2} + \dots + \frac{b_n}{\rho^n}, \quad 0 < |\rho| < \epsilon,$$

y por lo tanto cerca de $z = \infty$, tenemos

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m} + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n, \quad |z| > 1/\epsilon.$$

Para f en $z = \infty$, tenemos la siguiente expansión de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > 1/\varepsilon \quad (3)$$

y decimos que:

- a) f es analítica en ∞ , si no aparecen potencias positivas en (3) y $f(\infty) = a_0$
- b) f tiene un polo de orden n en ∞ , si solo hay un número finito de potencias positivas en (3), donde a_n es el último término con $n \geq 1$.

Definición 2.1.6. Una función definida en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, se dice que es *meromorfa* cuando es analítica en todo D , excepto en sus polos.

TEOREMA 2.1.2. Toda función meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, es racional.

Demostración:

Sea f una función meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$. En particular f es meromorfa en el punto al infinito, por lo que podemos formar una región que contiene al ∞ , en la cual f es analítica o tiene al punto al infinito, como su única singularidad. Es decir dibujamos un círculo con centro en el -

origen, tal que el punto al infinito es la única singularidad fuera de él. Luego tenemos que hay un número finito de singularidades dentro del círculo, puesto que los polos son singularidades aisladas.

Supongamos que los polos son $z_1, z_2, \dots, z_n$.

En un polo z_i , la función tiene un desarrollo de Laurent cuya parte principal es

$$\sum \frac{b_{1i}}{z-z_i} + \frac{b_{2i}}{(z-z_i)^2} + \dots + \frac{b_{mi}}{(z-z_i)^m} ;$$

donde m es el orden del polo z_i .

La parte principal en el infinito es de la forma

$$A_1 \bar{z} + A_2 \bar{z}^2 + \dots + A_k \bar{z}^k$$

Consideramos la función

$$F(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_{1i}}{(z-z_i)} + \frac{b_{2i}}{(z-z_i)^2} + \dots + \frac{b_{mi}}{(z-z_i)^m} \right) -$$

$$(A_1 \bar{z} + A_2 \bar{z}^2 + \dots + A_k \bar{z}^k)$$

La función $F(z)$ es analítica en todo el plano incluyendo al infinito. Por lo que $F(z)$ es acotada y por el teorema de Liouville, F es constante, digamos $F(z) = c$.

Por lo tanto

$$f(z) = c + \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_{1i}}{(z-z_i)} + \dots + \frac{b_{mi}}{(z-z_i)^m} \right) + A z + \dots + A_k z^k.$$

y así $f(z)$ es una función racional de z .

2.2 TRANSFORMACIONES BILINEALES.

A las transformaciones bilineales definidas en la sección 0.4, se les llama algunas veces, dependiendo de lo que se esté tratando, transformaciones de Möbius, homográficas, fracciones lineales, etc, o como dijimos en la definición 0.4.1., automorfismos de $\hat{C}$.

Proposición 2.2.1. Todo elemento de $\text{Aut}(\hat{C})$ es un homeomorfismo de $\hat{C}$.

Demostración:

Sea $T \in \text{Aut}(\hat{C})$, por lo que es de la forma (11) de 0.4 con $ad-bc \neq 0$. Es claro ver que T es biyectiva.

Por el teorema 2.1.1., tenemos que T es continua lo mismo que T^{-1} . Y con esto se cumple con las condiciones dadas en la definición 0.5.13, es decir T es un homeomorfismo de $\hat{C}$. Por lo que la proposición queda demostrada.

¿ Cuando corresponden dos elementos de $GL(2, C)$ al mismo elemento de $\text{Aut}(\hat{C})$?

Sabemos que el grupo $PGL(2, C)$ es isomorfo a $\text{Aut}(\hat{C})$, por la función dada en (13) de 0.4., es decir que si los

elementos de

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ matriz asociada a } T_1 \in \text{Aut}(\hat{C})$$

son proporcionales con los elementos de la matriz

$$\hat{T}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \text{ asociada a } T_2 \in \text{Aut}(\hat{C})$$

tenemos que $T_1 = T_2 \in \text{Aut}(\hat{C})$, y reciprocamente.

Definición 2.2.1. La *traza Normalizada cuadrada* de una transformación T de Möbius, dada por la fórmula (11) de 0.4., es la cantidad

$$\text{tr}^2(T) = (a+d)^2 / (ad-bc) \quad (4)$$

Por lo que acabamos de notar, la cantidad (4) no depende de la matriz $\hat{T}$ que representa a T .

En el caso de que

$$ad-bc = 1 \quad (5)$$

se tiene $\text{tr}^2(T) = (a+d)^2$. Además podemos escribir

$\text{tr}(T) = \pm(a+d)$, la cual presenta ambigüedad en el signo.

Todo $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ corresponde a dos matrices $\pm \hat{T} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ tales que $\pm \hat{T} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ por lo visto en el ejemplo 7 de 1.5

Una de las propiedades de la traza es la siguiente:

Si $\hat{S}, \hat{T} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ entonces

$$\text{tr}(\hat{S}\hat{T}\hat{S}^{-1}) = \text{tr}(\hat{T}).$$

La cual se justifica por un teorema conocido de álgebra lineal, sobre matrices semejantes. ref. [6]

Por lo tanto tenemos

$$\text{tr}^2(STS^{-1}) = \text{tr}^2(T)$$

para cualquier $S, T \in \text{Aut}(\hat{C})$.

2.3 LAS TRANSFORMACIONES BILINEALES SON MAPEOS CONFORMES.

Definición 2.3.1 Una curva γ en $\mathbb{C}$ es *diferenciable* si escribimos $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ donde x, y son funciones diferenciables.

Definición 2.3.2. La curva diferenciable γ es *no-singular* si $\gamma'(t) \neq 0$ para toda t . La *tangente* de una curva no-singular γ , en el punto t_0 , es la recta que pasa por $\gamma(t_0)$ y tiene como pendiente $\arg(\gamma'(t_0))$.

Definición 2.3.3. El *ángulo* que forman dos curvas no-singulares $\gamma_1, \gamma_2: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ al intersectarse, es el ángulo que forman las tangentes de cada curva, en el punto de intersección.

Definición 2.3.4. Decimos que una transformación T *preserva ángulos*, cuando el ángulo entre todo par de curvas no-singulares γ_1 y γ_2 que se intersectan es igual al ángulo entre $T(\gamma_1)$ y $T(\gamma_2)$.

Definición 2.3.5. Una función inyectiva y continuamente diferenciable, que preserva ángulos la llamamos *conforme*.

Si la función preserva únicamente el valor del ángulo, y el sentido de su dirección cambia por el contrario, diremos que es *anticonforme*.

El siguiente resultado es bien conocido de la teoría -

de variable compleja.

PROPOSICION 2.3.1: Toda función conforme en un dominio C , es analítica en dicho dominio.

ref [1], [2], [9]

TEOREMA 2.3.1. Si la derivada de una función analítica f , es distinta de cero en todo punto, entonces f es conforme.

DEMOSTRACION:

Sea $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ y sea $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow C$ una curva - tal que $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Sea f una función analítica en un dominio que contiene a γ , tal que $f'(z_0)$ diferente de 0. Veremos que la -- tangente a la curva $f(\gamma)$ en $f(z_0)$ existe y no es cero.

Defínase la curva μ por

$$\mu(t) = f(\gamma(t)) = f(z) \quad (6)$$

Si $\gamma'(t) \neq 0$ y $f'(\gamma(t)) \neq 0$, entonces

$$\mu'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \neq 0 \quad (7)$$

Luego se admite hablar de $\arg(\mu'(t))$

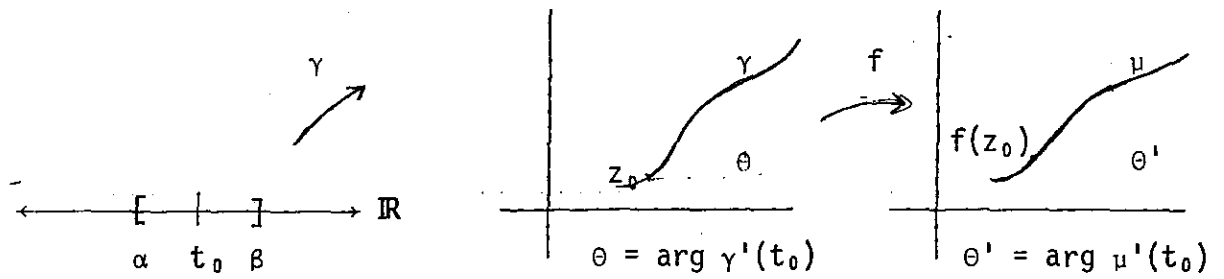


Fig (2)

pero $\arg(\mu'(t_0)) = \arg(f \circ \gamma)'(t_0) = \arg(f'(z_0)\gamma'(t_0))$

$$= \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0))$$

por lo que

$$\arg(f'(z_0)) = \arg(\mu'(t_0)) - \arg(\gamma'(t_0)) \quad (8)$$

Sean γ_1 y γ_2 dos curvas no-singulares que se intersectan en z_0 , formando un ángulo θ , o sea

$$\theta = \arg(\gamma_1'(t_0)) - \arg(\gamma_2'(t_0))$$

y considérese las dos curvas no-singulares $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$ que se intersectan en $f(z_0)$ formando un ángulo θ' , o sea

$$\theta' = \arg(\mu_1'(t_0)) - \arg(\mu_2'(t_0)) ;$$

entonces por (8) se tiene que

$$\theta = \theta'$$

Con lo que queda terminada la demostración del teorema.

Ya con este resultado, para llegar a la conclusión de que cada $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ es conforme, basta probar que $T'(z) \neq 0$ para toda $z \in C$. Esto excluye el caso en que z ó $T(z)$ es el punto al infinito, caso que tendrá que tratarse aparte.

Demostremoslo:

Sea $T \in \text{Aut}(\hat{C})$, por la fórmula (11) de 0.4, se tiene

$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

para toda $z \neq -d|c$, ∞ por lo que T es conforme en todos -- los puntos finitos, distintos de $-d|c$.

Veamos qué pasa en los casos en que z es el punto al infinito, y en que $z = -d|c$. Para hablar del concepto de función conforme en $\hat{C}$, hace falta la definición siguiente:

Definición 2.3.6. Dos curvas continuas γ_1 y γ_2 del plano ampliado, que pasan por el infinito forman un ángulo θ en el ∞ si, y sólo si, las imágenes de éstas curvas, bajo la transformación $\rho(z) = 1|z$ forman en el origen de coordenadas un ángulo θ .

Veamos primero que pasa en $z = \infty$, en el dominio de una transformación bilineal T . Por la definición 2.1.2 tenemos que $T(\infty) = a|c$. Supondremos primero que $c \neq 0$, ó sea que $T(\infty) \neq \infty$.

Sean dos curvas continuas γ_1 y γ_2 que forman un ángulo

θ en el infinito y sean μ_1 y μ_2 sus imágenes bajo T . Hay que demostrar que μ_1 y μ_2 forman un ángulo θ en $a|c$.

Por la definición 2.3.6., las curvas Γ_1 y Γ_2 imágenes de γ_1 y γ_2 bajo ρ , respectivamente, forman un ángulo θ en el origen

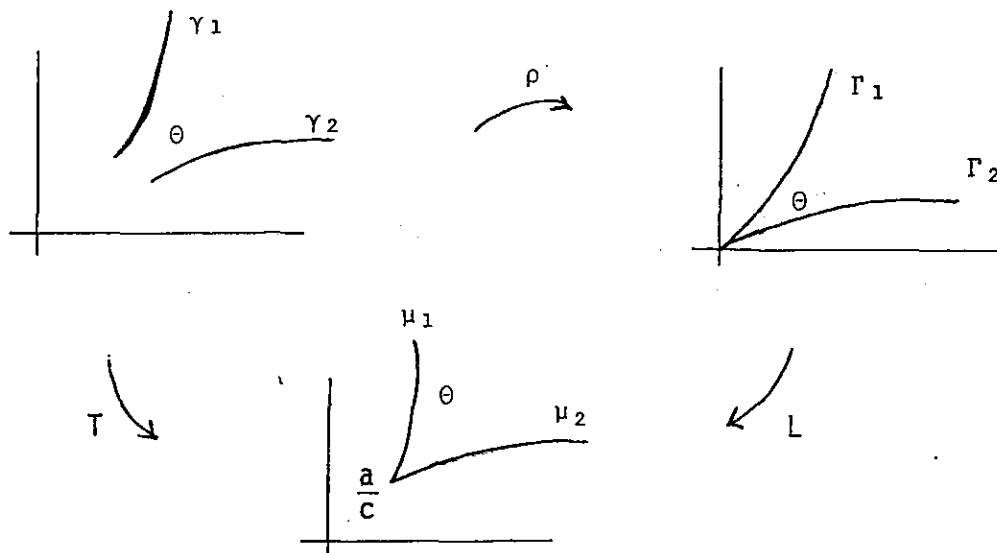


Fig.(3)

Sea $L = T \circ \rho^{-1}$, luego $\mu_1 = L(\Gamma_1)$ y $\mu_2 = L(\Gamma_2)$.

$$\text{Ya que } L'(z) = \frac{cb-ad}{(c+dz)^2} \neq 0$$

para $z = 0$, tenemos por el teorema 2.3.1., que L es conforme en $z = 0$, entonces el ángulo entre μ_1 y μ_2 en $a|c$ es θ , y así T es conforme en $z = \infty$. Es decir que para toda $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y para cualesquier par de curvas γ_1, γ_2 que se intersectan en ∞ , tenemos que:

" El ángulo en el ∞ de γ_1, γ_2 es igual al ángulo en $a|c$ de μ_1, μ_2 " (9)

Para demostrar que T es conforme en $-d|c$, observemos que como $T(-d|c) = \infty$ y $T^{-1} \in \text{Aut}(\hat{C})$ tenemos por (9) que:

"El ángulo en el ∞ de μ_1, μ_2 es igual al ángulo en $-d|c$ de γ_1, γ_2 "; por lo que T es conforme en $-d|c$.

El caso de que $T(\infty) = \infty$ es tratado de manera similar por medio de la función auxiliar $L = \rho \circ T \circ \rho^{-1}$.

COROLARIO 2.3.1. Toda función en $\text{Aut}(\hat{C})$ es conforme.

Este corloario junto con la proposición siguiente justifican el término " $\text{Aut}(\hat{C})$ ".

PROPOSICION 2.3.2. Toda biyección conforme de $\hat{C}$ en $\hat{C}$ es elemento de $\text{Aut}(\hat{C})$.

DEMOSTRACION:

Sea T biyectiva y conforme. Por ser T biyectiva sólo hay un punto z_0 , tal que $T(z_0) = \infty$, es decir admite -- únicamente un polo. Además por la proposición 2.3.1. tenemos que T es analítica en cualquier punto distinto de z_0 , es decir T es meromorfa. Por el teorema 2.1.2., T es racional, luego por tener un sólo polo, su orden total es uno, de finición 2.1.3. De donde concluimos que $T \in \text{Aut}(\hat{C})$.

2.4 PROPIEDAD HOMOCÍCLICA.

Como vimos anteriormente toda $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ transforma el plano extendido complejo en si mismo homeomorficamente. En particular, demostraremos que $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ transforma círculos en círculos, considerando a las rectas como círculos que pasan por el infinito. A esta propiedad que tienen las transformaciones de Möbius le llamamos *propiedad homocíclica*.

Consideremos unas transformaciones de tipo especial, dadas las siguientes definiciones:

Definición 2.4.1. Si $T(z) = z+b$ con $b \neq 0$, entonces T es llamada una *traslación*.

Bajo estas transformaciones cada punto del plano es trasladado paralelamente a la línea que contiene a $\underline{0}$ ($0 = \text{origen}$) y a $\underline{b}$, una distancia igual a $|b|$.

Definición 2.4.2. Si $T(z) = az$ con $a > 0$, T es llamada una *homotecia*.

Las homotecias envían cada punto del plano en otro con el mismo argumento, pero el módulo multiplicado por $\underline{a}$.

Definición 2.4.3. Si $T(z) = e^{i\theta} z$ con $\theta \in \mathbb{R}$, T es -- llamada una *rotación*.

Estas transformaciones rotan cada punto del plano un ángulo θ alrededor del origen.

Definición 2.4.4. Si $T(z) = 1/z$, T es llamada una *reciprocidad*. Esta transformación manda cada punto en su re cíproco.

Proposición 2.4.1. Si T es una transformación de Möbius, entonces T es la composición de traslaciones homotecias y reciprocidades, pudiendo omitir alguna de estas.

Demostración:

Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, supongamos primero que $c = 0$, entonces $T(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$ y así $T = T_2 \circ T_1$ donde $T_1(z) = \frac{a}{d} z$ es una homotecia y $T_2(z) = z + \frac{b}{d}$ es una tras lación.

Ahora supongamos que $c \neq 0$. Sean $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $T_2(z) = \frac{1}{z}$, $T_3(z) = \frac{(bc-ad)}{c^3} z$ y $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$, entonces $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ con lo que concluimos la demos-- tración.

TEOREMA 2.4.1. Toda transformación de Möbius manda círcu
los en círculos.

Demostración :

Todo círculo o recta es descrito por una ecuación de
la forma

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (10)$$

con A, B, C y D reales.

Si $A = 0$ con B y C no ambos cero, entonces (10)
representa una recta.

Si $A \neq 0$, $B^2 + C^2 - 4AD > 0$, entonces (10) represent
ta una circunferencia.

Como vamos a trabajar con números complejos, es conve--
niente expresar (10) en términos de $z = x+iy$.

Tenemos que

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad ; \quad z + \bar{z} = 2x \quad ; \quad -i(z - \bar{z}) = 2y .$$

Sustituyendo estas igualdades en (10) tenemos lo -
siguiente:

$$Az\bar{z} + (B-iC)z + (B+iC)\bar{z} + D = 0 ,$$

si escribimos $B + iC = E$, obtenemos

$$Az\bar{z} + Ez + \bar{E}\bar{z} + D = 0 \quad (11)$$

con A y D reales.

Si $A = 0$ y $E \neq 0$, entonces (11) nos representa una recta.

Si $A \neq 0$ y $EE - AD > 0$, entonces (11) nos representa una circunferencia.

Considérese la inversión $T(z) = 1/\bar{z}$, y sustituimos $z = T(z')$ en (11), lo que nos da

$$A + \bar{E}z' + Ez' + Dz'\bar{z}' = 0 \quad (12)$$

Ahora bien (12) es de la misma forma que (11), por lo que representa una recta o una circunferencia.

Si $T \in \text{Aut}(\hat{C})$, es una traslación o una homotecia de las definiciones (2.4.1., 2.4.2.) es fácil observar que la propiedad homocíclica se cumple para T .

Con ayuda de la proposición 2.4.1. concluimos la demostración del teorema, y así vemos que se satisface la propiedad homocíclica de las transformaciones de Möbius.

Es claro que $\text{Aut}(\hat{C})$ actúa en $\text{Circ} = \{\text{círculos y rectas } U\{\infty\} \text{ en } \hat{C}\}$, donde $T(Q)$ es la imagen de $Q \in \text{Circ}$ bajo $T \in \text{Aut}(\hat{C})$. Es fácil ver que esta acción es transitiva, y es efectiva.

2.5 PUNTOS FIJOS

En esta sección estudiaremos lo referente a los puntos fijos de la transformación $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Para lo cual resolveremos la ecuación $T(z) = z$, que satisfacen dichos puntos.

Supondremos primero que $c \neq 0$. Como $T(\infty) = a/c \neq \infty$ tenemos en este caso que ∞ no es punto fijo.

Busquemos entonces las soluciones finitas a

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

obtenemos que ésto es equivalente a :

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad (13)$$

que tiene la solución siguiente:

$$z = \frac{-(d-a) \pm ((d-a)^2 + 4bc)^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

con ésto vemos $T(z)$ tiene a lo más dos puntos fijos. Si $ad-bc = 1$, entonces los puntos fijos pueden expresarse como

$$z = \frac{(a-d) \pm ((a+d)^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

y si el radical es cero, es decir si

$$a+d = \pm 2 \quad (14)$$

entonces existe solamente un punto fijo

$$z = \frac{a-d}{2c}$$

Ahora supongamos que $c = 0$, entonces $z = \infty$ es punto fijo, y resolviendo (13) tenemos, aparte del ∞ , la solución

$$z = \frac{b}{d-a} \quad (15)$$

como el otro punto fijo.

Si $b = 0$, entonces por (15), $z = 0$. Luego $\text{Fij}(T) = \{0, \infty\}$. En este caso $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ tiene la forma

$$T(z) = (a/d)z \quad (16)$$

Si $a = d$, entonces por (15), $z = \infty$. Luego $\text{Fij}(T) = \{\infty\}$. En este caso $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ tiene la forma

$$T(z) = z+b \quad (17)$$

COROLARIO 2.5.1. *La única transformación de Möbius que tiene más de dos puntos fijos, es la identidad.*

TEOREMA 2.5.1.

- (a) *Una transformación de Möbius está determinada únicamente por la aplicación de tres puntos distintos de $\hat{C}$.*
- (b) *Los valores en estos tres puntos pueden escogerse arbitrariamente en $\hat{C}$, con tal que sean distintos.*

DEMOSTRACION DE (a).

Sea $T \in \text{Aut}(\hat{C})$, sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{C}$ distintos.

Defínase $z'_1 = T(z_1)$, $z'_2 = T(z_2)$ y $z'_3 = T(z_3)$.

Supongamos que existe $S \in \text{Aut}(\hat{C})$ que transforma a z_1, z_2, z_3 de igual manera que T , entonces

$$\text{Fij}(T^{-1} \circ S) = \{z_1, z_2, z_3\}$$

y por el corolario 2.5.1., tenemos que $T^{-1} \circ S = I$ de donde $T = S$.

Con ésto queda demostrada la parte (a) del teorema, en la siguiente sección demostraremos la parte (b).

2.6 RAZÓN CRUZADA.

Con el fin de definir la razón cruzada encontraremos la transformación bilineal, que manda tres puntos distintos z_2, z_3, z_4 en $1, 0, \infty$ respectivamente.

Supongamos primero que $z_1, z_2, z_3, z_4 \neq \infty$; para que T tome el valor 0 en z_3 y el valor ∞ en z_4 , es necesario y suficiente que T sea de la forma

$$T(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z-z_3}{z-z_4}$$

pero T toma el valor 1 en z_2 , de donde

$$1 = \frac{a}{c} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

luego

$$\frac{a}{c} = \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$$

y la transformación que cumple con lo dicho anteriormente, es

$$T(z) = \frac{(z-z_3)(z_2-z_4)}{(z-z_4)(z_2-z_3)} \quad (18)$$

Definición 2.6.1. La *razón cruzada* de los cuatro puntos (z, z_2, z_3, z_4) , es la imagen de z en $\hat{C}$ bajo la única transformación bilineal, que a z_2 le corresponde el 1 , a z_3 el 0 y a z_4 el ∞ .

En el caso en que z, z_2, z_3, z_4 sean finitos la razón cru

zada de z, z_2, z_3, z_4 , debido a (18), es la siguiente:

$$(z, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z-z_3)(z_2-z_4)}{(z-z_4)(z_2-z_3)} \quad (19)$$

Supongamos ahora que uno de los puntos es infinito; en base a la definición 2.6.1., escribimos la forma que toma (z, z_2, z_3, z_4) :

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = (z_2 - z_4) / (z_2 - z_3)$$

$$(z, \infty, z_3, z_4) = (z - z_3) / (z - z_4)$$

$$(z, z_2, \infty, z_4) = (z_2 - z_4) / (z - z_4)$$

$$(z, z_2, z_3, \infty) = (z - z_3) / (z_2 - z_3)$$

TEOREMA 2.6.1. *La razón cruzada es invariante bajo cualquier transformación T de Möbius. Es decir*

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \quad (20)$$

DEMOSTRACION:

Sea $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$. Entonces $S \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y S satisface $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0, S(z_4) = \infty$.

Sea $M = ST^{-1} \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Veamos fácilmente que:
 $M(T(z_2)) = S(z_2) = 1; \quad M(T(z_3)) = S(z_3) = 0; \quad M(T(z_4)) = S(z_4) = \infty$;
 de donde $M(z) = (z, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

En particular con $T(z)$ en lugar de z , por el teorema

2.5.1 (a) tenemos (20).

Pasemos a demostrar la parte pendiente (b) del teorema 2.5.1.

DEMOSTRACION DE (b):

Sea $M(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ y $T(z') = (z', z'_2, z'_3, z'_4)$

Sea $S = T^{-1} \circ M$; tenemos que $S \in \text{Aut}(\hat{C})$ manda los tres puntos distintos z_2, z_3, z_4 , en otros tres puntos arbitrarios distintos z'_2, z'_3, z'_4 .

PROPOSICION 2.6.1. Si $G \subseteq \text{Aut}(\hat{C})$ y G tiene un conjunto E invariante finito con más de tres puntos fijos, entonces G es finito.

DEMOSTRACION:

Sea f una función tal que $f: G \rightarrow S(E)$, es decir que para $T \in G$, $f(T) = T|_E$.

Si $T_1, T_2 \in G$ y $f(T_1) = f(T_2)$ entonces $T_1|_E = T_2|_E$

como E tiene por lo menos tres puntos, por el teorema 2.5.1.

(a), $T_1 = T_2$, luego f es inyectiva.

Como E es finito, el grupo $S(E)$ es finito, luego G es finito.

2.7 PUNTOS SIMÉTRICOS.

Sea Q una circunferencia en C , con centro en z_0 y radio r . Sea $z \neq z_0, \infty$, cualquier punto del plano, colocado a una distancia d de z_0 , y sea $z' \neq z_0, \infty$ un punto sobre el radio que parte de z_0 hacia z , colocado a una distancia d' de z_0 . Si tenemos que

$$dd' = r^2 \quad (21)$$

entonces decimos que z y z' son *inversos* o *simétricos* respecto a Q . Note que cada punto de Q es su propio inverso en Q .

Decimos que ∞ es *inverso* de z_0 , y recíprocamente.

Sea Q una recta; luego divide a C en dos semiplanos. Sean z, z' dos puntos de C colocados en semiplanos distintos y a una distancia d, d' de Q , respectivamente. Sea L cualquier recta perpendicular a Q , si $z, z' \in L$ y si $d = d'$, entonces decimos que z y z' son *simétricos* respecto a Q .

Diremos que todo punto de $Q \cup \{\infty\}$ es su propio *inverso* en Q .

Sea $Q \in \text{Circ}$. Definimos $\rho_Q: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ como la transformación de simetría o de inversión en Q , que manda a z en su inverso

$$\rho_Q(z) = z' \quad (22)$$

con respecto a Q .

Encontremos la expresión analítica de (22). En base a la definición de puntos inversos sabemos que:

$$|(z' - z_0)(z - z_0)| = r^2 \quad \text{y} \quad \arg(z' - z_0) = \arg(z - z_0)$$

Como $\arg(z - z_0) = -\arg(\overline{z - z_0})$, las ecuaciones anteriores se cumplen si, y sólo si

$$(z' - z_0)(\overline{z - z_0}) = r^2 \quad (23)$$

y así (23) es equivalente a (22).

Ahora si Q es la circunferencia representada por una ecuación de la forma (11), con centro en $-\overline{E}/A$ y radio $((E\overline{E} - AD)/A^2)^{\frac{1}{2}}$, sustituyendo en (23), obtenemos:

$$(z' + \overline{E}/A)(\overline{z} + E/A) = (E\overline{E} - AD)/A^2$$

resolviendo el producto y simplificando nos queda:

$$Az'z + Ez' + \overline{Ez} + D = 0 \quad (24)$$

donde z' es el inverso de z con respecto a Q .

Si despejamos z' de (24) obtenemos la forma explícita de la transformación

$$\rho_Q(z) = \frac{-\overline{Ez} - D}{A\overline{z} + E} = z' \quad \text{cuando } A \neq 0 \quad (25)$$

Si $A = 0$, entonces Q es recta y

$$z' = \frac{-\overline{Ez} - D}{B} \quad (26)$$

Es fácil ver que en este caso z y z' están colocados de tal manera, que todos los puntos de Q equidistan de z y z' .

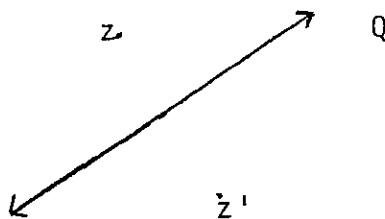


Fig. 4

PROPOSICION 2.7.1. Las transformaciones de inversión son mapeos anticonformes.

DEMOSTRACION:

La transformación (25) la podemos escribir como una composición, es decir

$$z' = \frac{-\bar{E}z_1 - D}{Az_1 + E} \quad \text{donde } z_1 = \bar{z}$$

Ahora bien, z_1 es el conjugado de z , o sea una reflexión con respecto al eje real, que preserva la distancia pero invierte el signo del ángulo. Por lo que p_Q es anticonforme.

TEOREMA 2.7.1. Sean z y z_1 puntos inversos con respecto a $Q \in \text{Circ}$, y sea $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Entonces $T(z)$ y $T(z_1)$ son puntos inversos con respecto a $T(Q) \in \text{Circ}$.

DEMOSTRACION:

Escribamos $T(z) = z'$ y $T(z_1) = z'_1$. Según (11) de 0.4, tenemos

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}$$

y

$$z_1 = \frac{-dz'_1 + b}{cz'_1 - a};$$

sustituyendo en (24) obtenemos:

$$\frac{A(-dz'_1 + b)(-\overline{dz'_1} + \overline{b})}{(cz'_1 - a)(\overline{cz'_1} - \overline{a})} + \frac{E(-dz' + b)}{cz'_1 - a} + \frac{\overline{E}(-\overline{dz'} + \overline{b})}{\overline{cz'_1} - \overline{a}} + D = 0$$

simplificando obtenemos otra ecuación de la forma (24), con lo que demostramos que z'_1 y z' son inversos con respecto a la circunferencia o recta transformada.

PROPOSICION 2.7.2. Sea Q e $Circ$ y sean z, z' puntos inversos respecto a Q . Entonces todo círculo o recta que pasa por z, z' es ortogonal a Q .

DEMOSTRACION:

Sean z y z' dos puntos inversos respecto a la recta R . Entonces el centro de cualquier circunferencia que pase por z y z' , estará en R , por lo que dicha circunferencia será ortogonal a R . De la definición se sigue que cualquier

recta que pase por z y z' es ortogonal a $\mathbb{R}$.

Transformamos a la recta $\mathbb{R}$, por medio de una transformación de Möbius T , en la circunferencia Q , T existe por el teorema 2.4.1. . . Por la propiedad homocíclica todas las rectas y circunferencias que pasen por z y z' , son transformadas en rectas o circunferencias que pasen por $T(z)$ y $T(z')$; por el teorema 2.7.1., sabemos que $T(z)$ y $T(z')$ son inversos en Q , y por ser T un mapeo conforme (corolario 2.3.1), concluimos que las rectas y circunferencias que pasan por $T(z)$ y $T(z')$ son ortogonales a Q .

2.8 PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.

Dejando un poco las transformaciones bilineales, en esta sección nos ocuparemos de la representación geométrica de $\hat{C}$. Veremos que existe una correspondencia biunívoca entre la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ y el plano extendido $\hat{C}$. A esta correspondencia le llamamos *proyección estereográfica*.

Consideremos la esfera Σ_0 definida por

$$\Sigma_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Tomemos a C como el plano $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ que corta a Σ_0 por su centro. Sea $N = (0, 0, 1) \in \Sigma_0$, podemos decir que N es el "polo norte de Σ_0 ".

Ahora para $z \in C$, tracemos la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por z y N , ésta intersectará a la esfera en un único punto $Z = (x_1, x_2, x_3) \neq N$.

Observemos lo siguiente:

Si $|z| > 1$, entonces Z está en "el hemisferio norte de Σ_0 " es decir $x_3 > 0$. Si $|z| < 1$, entonces Z está en "el hemisferio sur de Σ_0 ", es decir que $x_3 < 0$. Si $|z| = 1$, entonces $x_3 = 0$ y $Z = z$. Si $|z|$ tiende a ∞ , entonces Z tiende a N , por lo que al punto $\infty \in \hat{C}$ le corresponde N de Σ_0 . Así $\hat{C}$ está representado en Σ_0 . Z se llama la proyección estereográfica de z .

La proyección estereográfica que va de $\hat{C}$ en Σ_0 es un homeomorfismo, es decir $\hat{C}$ y Σ_0 son homeomorfos.

Ahora encontremos la expresión algebraica de la proyección estereográfica:

Sea $Z \in \Sigma_0$, $Z = (x_1, x_2, x_3)$; y sea $z = x + iy \in C$ el punto que corresponde a Z .

La recta que pasa por z y N está dada paramétricamente como el conjunto de los puntos de la forma

$$((1 - t)x, (1 - t)y, t) \quad \text{con } -\infty < t < \infty,$$

entonces encontramos el valor de t que corresponde a Z . Para ésto tenemos; como este punto está en Σ_0 ,

$$((1 - t)x)^2 + ((1 - t)y)^2 + t^2 = 1$$

y recordando que $|z|^2 = x^2 + y^2$, tenemos

$$(1 - t)^2 |z|^2 = 1 - t^2$$

luego

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Obsérvese que como $z \in C$, tenemos $z \neq \infty$ luego $t \neq 1$. Ahora es fácil encontrar las fórmulas para las coordenadas de Z :

$$x_1 = (1 - t)x = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \quad (27)$$

$$x_2 = (1 - t)y = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1} \quad (28)$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

por lo que

$$Z = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \quad \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \quad (29)$$

Calculemos la inversa, es decir encontremos el punto $z \in \hat{C}$ que se proyecta en $Z \in \Sigma_0$. Ya que $z = x + iy$ de (27) tenemos que

$$x = [x_1(|z|^2 + 1)]/2$$

y de (28) que

$$y = [x_2(|z|^2 + 1)]/2$$

Entonces

$$z = [x_1(|z|^2 + 1)]/2 + i[x_2(|z|^2 + 1)]/2$$

$$= [(|z|^2 + 1)/2](x_1 + ix_2)$$

y como

$$x_3 = (|z|^2 - 1)/(|z|^2 + 1)$$

tenemos

$$1 - x_3 = 2/(|z|^2 + 1)$$

de donde

$$z = (x_1 + ix_2)/(1 - x_3) \quad (30)$$

TEOREMA 2.8.1. La proyección estereográfica cumple con la propiedad homocíclica.

DEMOSTRACION:

Una circunferencia en la esfera se obtiene de la intersección de ésta con cierto plano

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \quad (31)$$

y sustituimos el valor de x_1, x_2, x_3 en términos de x , obteniendo:

$$\frac{A(2x)}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{B(2y)}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{C(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} + D = 0$$

lo que es equivalente a

$$[(C+D)(x^2+y^2)]/2 + Ax + By + (D-C)/2 = 0,$$

ésta última es la ecuación de una circunferencia si $C+D \neq 0$ y una recta si $C+D = 0$.

Notemos que si $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ en la ecuación (31) aparece precisamente $C+D = 0$, por lo que si la circunferencia pasa por N , al proyectarla le corresponde una recta.

Así hemos probado que la proyección estereográfica transforma círculos de Σ_0 en círculos o rectas de $\hat{C}$.

TEOREMA 2.8.2. La proyección estereográfica es un mapeo conforme.

DEMOSTRACION:

En esta demostración utilizaremos la siguiente notación para los puntos de Σ_0 ,

$$(x_1, x_2, x_3) = (\xi, \eta, \zeta)$$

ésto se hace debido a la confusión que puede surgir en los subíndices.

Sea $Z_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \neq N$, $Z_0 \in \Sigma_0$, y sea Γ una curva continua que pase por el punto Z_0 y que tenga tangente en el mismo. Una representación paramétrica de la curva Γ es:

$$\xi = \xi(t), \eta = \eta(t), \zeta = \zeta(t)$$

observando que

$$\xi(t)^2 + \eta(t)^2 + \zeta(t)^2 = 1$$

y tal que las funciones ξ, η, ζ , son diferenciables en $t = t_0$

y

$$\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2 + \zeta'(t)^2 \neq 0$$

La imagen de Z_0 , bajo la proyección estereográfica es z_0 y la imagen de la curva Γ es γ , tal que

$$x = \xi/(1-\zeta) \quad y = \eta/(1-\zeta)$$

Para los números $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ que caracterizan la dirección de la tangente en el punto z_0 , se tiene:

$$x' = [\xi'(1-\zeta_0) + \zeta'\xi_0]/(1-\zeta_0)^2 \quad (33)$$

$$y' = [\eta'(1-\zeta_0) + \zeta'\eta_0]/(1-\zeta_0)^2 \quad (34)$$

$$x'^2 + y'^2 = [(\xi'^2 + \eta'^2)(1-\zeta_0)^2 + 2(\xi_0\xi' + \eta_0\eta') \cdot \zeta'(1-\zeta_0) + \zeta'^2(\xi_0^2 + \eta_0^2)]/(1-\zeta_0)^4 \quad (35)$$

pero observando que:

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1 \quad (36)$$

$$\xi_0\xi' + \eta_0\eta' + \zeta_0\zeta' = 0 \quad (37)$$

tenemos por las igualdades (36) y (37), que (35) se puede escribir como

$$x'^2 + y'^2 = (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)/(1-\zeta_0)^2 \quad (38)$$

Consideremos las dos curvas Γ y Γ_1 en Σ_0 , que pasan Z_0 , formando un ángulo θ , y sus imágenes bajo la proyección estereográfica, las curvas γ y γ_1 en el plano, las cuales se intersectan en z_0 formando un ángulo de θ . Hay que demostrar que $\theta = \theta$ y para esto calculamos el coseno de θ , en donde x_1, y_1 denota una representación paramétrica de γ_1 , y ξ_1, η_1, ζ_1 , de Γ_1 , veamos:

$$\cos \theta = \frac{x'_1 x_1' + y'_1 y_1'}{[(x'^2 + y'^2)(x_1'^2 + y_1'^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (39)$$

sustituyendo (33), (34), y (38) en (39), tenemos

$$\cos \theta = \frac{[\xi'(1-\zeta_0) + \zeta'\xi_0][\xi'_1(1-\zeta_0) + \zeta'_1\xi_0] + [\eta'(1-\zeta_0) + \zeta'\eta_0][\eta'_1(1-\zeta_0) + \zeta'_1\eta_0]}{(1-\zeta_0)^2 [(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (40)$$

pero

$$\xi_0\xi'_1 + \eta_0\eta'_1 + \zeta_0\zeta'_1 = 0 \quad (41)$$

recordando (36) y (37), además de (40), (41) nos queda:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\xi'\xi'_1 + \eta'\eta'_1)(1-\zeta_0)^2 - \zeta'\zeta'_1(\zeta_0 - \zeta_1^2) - \zeta'\zeta'_1(\zeta_1 - \zeta_0^2) + \zeta'\zeta'_1(1-\zeta_1^2)}{(1-\zeta_0)^2 [(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\xi'\xi'_1 + \eta'\eta'_1 + \zeta'\zeta'_1}{[(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

y con eso queda demostrado el teorema.

Definición 2.8.1. Diremos que $z_1, z_2 \in \hat{C}$ son puntos opuestos, cuando sus proyecciones estereográficas $Z_1, Z_2 \in \Sigma_0$ son puntos diametralmente opuestos, es decir $Z_1 = -Z_2$.

PROPOSICION 2.8.1. Sean Z_1, Z_2 puntos diametralmente opuestos de Σ_0 , y $z_1, z_2 \neq 0, \infty$ sus proyecciones en $\hat{C}$, entonces $z_1 \bar{z}_2 = -1$.

DEMOSTRACION:

$$\text{Sean } Z_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \quad \text{y} \quad Z_2 = (-\xi_1, -\eta_1, -\zeta_1)$$

tenemos por (30) que

$$z_1 = (\xi_1 + i\eta_1)/(1 - \zeta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = (-\xi_1 - i\eta_1)/(1 + \zeta_1)$$

luego

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 &= [\xi_1/(1 - \zeta_1) + i\eta_1/(1 - \zeta_1)][-\xi_1/(1 + \zeta_1) + i\eta_1/(1 + \zeta_1)] \\ &= (-\xi_1^2 - \eta_1^2)/(1 - \zeta_1^2) \end{aligned} \quad (42)$$

recordando que $\xi_1^2 + \eta_1^2 = 1 - \zeta_1^2$, (42) nos queda:

$$z_1 \bar{z}_2 = -1 \quad (43)$$

CAPITULO III

CLASIFICACION DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

Sabemos por el corolario 2.5.1., que la identidad es la única de las transformaciones de Möbius que tiene más de dos puntos fijos, por lo tanto haremos la clasificación excluyendo dicha transformación.

Considerando el número de puntos fijos, diremos que hay dos clases de transformaciones: las que tienen dos puntos fijos y las que tienen un punto fijo.

Veremos en las primeras cuatro secciones el caso en que $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, tiene dos puntos fijos, después en la sección 3.5. viene el caso en que la transformación tiene única mente un punto fijo.

3.1 MULTIPLICADOR.

Sea $T \in \text{Aut}(\hat{C})$, cuya forma está dada en (11) de 0.4. tal que $\text{Fij}(T) = \{p_1, p_2\}$ con $p_1 \neq p_2$.

Supongamos primero que $c \neq 0$, entonces $p_1, p_2 \neq \infty$. En base al teorema 2.6.1. de razón cruzada, tenemos:

$$(z, \infty, p_1, p_2) = (T(z), a|c, p_1, p_2)$$

es decir debido a (18) de 2.6, que

$$\frac{T(z)-p_1}{T(z)-p_2} = K \frac{z-p_1}{z-p_2} \quad (1)$$

$$\text{con } K = \frac{a-cp_1}{a-cp_2}$$

A $K^{\pm 1}$ le llamamos el *multiplicador de T*, y es quien nos determina el carácter de la transformación, como veremos más adelante. Nótese que si intercambiamos p_1 con p_2 , cambiamos K por $1/K$.

Obtendremos una expresión de K en términos de los coeficientes de $\hat{T}$, bajo la normalización de que $ad-bc = 1$, lo cual es lícito por lo visto en la sección 2.2, veamos:

$$K + \frac{1}{K} = \frac{2a^2 - 2ac(p_1 + p_2) + c^2(p_1^2 + p_2^2)}{a^2 - ac(p_1 + p_2) + c^2p_1p_2} \quad (2)$$

Como p_1, p_2 son raíces de la ecuación (13) de 2.5.

obtenemos facilmente las siguientes igualdades:

$$p_1 + p_2 = \frac{a-d}{c},$$

$$p_1 p_2 = \frac{-b}{c}$$

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{(a-d)^2 + 2bc}{c^2}$$

Sustituyendo éstas en (2), tenemos:

$$K + \frac{1}{K} = (a+d)^2 - 2 \quad (3)$$

Supongamos ahora que $c=0$, es decir

$$T(z) = \frac{az+b}{d}, \quad ad = 1$$

En este caso un punto fijo es ∞ y otro $p_1 = \frac{b}{d-a}$

De manera análoga a la anterior obtenemos:

$$T(z) - p_1 = K(z - p_1) \quad (4)$$

con $K = \frac{a}{d}$, y tenemos que esta K satisface (3) pues

$$K + \frac{1}{K} = \frac{a}{d} + \frac{d}{a} = \frac{(a+d)^2 - 2ad}{ad} = (a+d)^2 - 2.$$

Hacemos la observación que la clasificación de las transformaciones de Möbius con dos puntos fijos, que se verá en las siguientes secciones, está hecha en base a su multi--

jos p_1, p_2 en común, entonces $T_1 = T_2$ ó bien $T_1 = T_2^{-1}$..

DEMOSTRACION:

Sea $L(z) = (z-p_1)/(z-p_2)$. Por (1) tenemos

$$LT_1L^{-1}(z) = k^{\pm 1}z \quad \text{y} \quad LT_2L^{-1}(z) = k^{\pm 1}z$$

Estos claramente son iguales o inversos, por lo tanto se tiene lo mismo para T_1, T_2 .

3.2 TRANSFORMACIONES HIPERBÓLICAS.

Supondremos que el multiplicador k satisface $0 < k \neq 1$.

Por lo que

$$K + \frac{1}{K} > 2$$

y por (3) tenemos que

$$\text{tr}^2(T) > 4$$

de donde $a+d \in \mathbb{R}$

Definimos a $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ como una transformación hiper
bólica cuando $a+d \in \mathbb{R}$ y $|a+d| > 2$.

Pasemos al estudio del comportamiento geométrico de una transformación hiperbólica.

Recordando que a T podemos escribirla de la forma (6) donde $H(z) = kz$; primero notemos unas propiedades de la homotecia H :

- a) Toda línea recta que pasa por el origen es transformada por H en sí misma.
- b) Una recta que pasa por el origen divide al plano en dos conjuntos conexos de puntos, estos conjuntos son invariantes bajo H .
- c) Todo círculo con centro en el origen es transformado por H , en otro círculo con la misma propiedad.
- d) Los puntos $\{0, \infty\} = \text{Fij}(H)$, son inversos respecto a cualquier círculo de c).

Ahora pasemos a T . Sea Q un círculo que pasa por los puntos fijos $\{p_1, p_2\}$. Recordando que $L(p_1) = 0$ y $L(p_2) = \infty$, L transforma a Q en una recta que pasa por el origen, luego H la deja invariante (por a), después L^{-1} la regresa a Q , por lo que aseguramos:

A: Cualquier círculo que pasa por los puntos fijos es transformado en si mismo.

Con el mismo razonamiento anterior podemos deducir lo siguiente:

B: Un círculo que pasa por los puntos fijos divide al plano en dos conjuntos conexos de puntos, estos conjuntos permanecen invariantes bajo T .

C: Cualquier círculo ortogonal a los círculos que pasan por los puntos fijos es transformado en otro círculo con la misma propiedad.

D: Los puntos fijos son inversos respecto a cualquier círculo de C .

3.3 TRANSFORMACIONES ELÍPTICAS

Supongamos ahora que el multiplicador k tiene la forma

$$k = e^{i\theta} \quad \text{con} \quad \theta \neq 2n\pi \quad (7)$$

Entonces por (3), tenemos que

$$\text{tr}^2(T) = 2 + 2 \cos \theta$$

de donde

$$0 \leq \text{tr}^2(T) < 4$$

por lo que $a+d \in \mathbb{R}$

Definimos que $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ es *elíptica* si $a+d \in \mathbb{R}$ y $|a+d| < 2$.

Para conocer el comportamiento geométrico de una transformación elíptica, veamos primero las propiedades de H , ya que T es de la forma $L^{-1}HL$ donde en este caso $H(z) = e^{i\theta}z$ y H es una rotación.

- a) Toda recta que pasa por el origen es transformada por H en otra recta que pasa por el origen, y forma un ángulo θ con la primera.
- b) Todo círculo con centro en el origen es transformado en sí mismo.
- c) El conjunto de puntos interiores de los círculos anteriores permanecen invariantes.

d) $\text{Fij}(H) = \{0, \infty\}$ son puntos inversos con respecto a los círculos de b)

Ahora veamos el comportamiento de T e $\text{Aut}(\hat{C})$, elíptica. Sea Q un círculo que pasa tanto por p_1 como por p_2 , y recordando que $L(p_1) = 0$ y $L(p_2) = \infty$ tenemos que Q , bajo L , se transforma en una recta ℓ , que pasa por el origen, luego $H(\ell) = \ell'$ tal que el ángulo entre ℓ y ℓ' es θ (por b)), por último L^{-1} regresa a la recta a un círculo que pasa por p_1 y p_2 , pero que forma un ángulo θ con Q . Concluimos:

A: Un círculo que pasa por los puntos fijos es transformado en otro círculo con la misma propiedad y formando un ángulo θ con el primero.

Con el mismo razonamiento anterior concluimos:

B: Cualquier círculo ortogonal a los círculos que pasan por los puntos fijos, es transformado en sí mismo.

C: El conjunto de puntos interiores a un círculo de B, es invariante bajo T .

D: $\text{Fij}(T) = \{p_1, p_2\}$ son inversos respecto a los círculos de B.

Un ejemplo de transformación elíptica de período dos, es la siguiente:

Pongamos $\theta = \pi$ en la fórmula (7), luego $K = -1$, así $H(z) = -z$ y recordando que $T = L^{-1}HL$, es fácil ver que cada punto es regresado a su posición original, en la segunda aplicación. Aquí la traza es $\text{tr}(T) = \pm 2 \cos \pi/2 = 0$.

3.4 TRANSFORMACIONES LOXODRÓMICAS

Por último consideremos el caso de que

$$K = ae^{i\theta} \quad \text{con } 0 < A \neq 1 \quad \text{y} \quad \theta \neq 2n\pi$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}^2(T) &= Ae^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{A} + 2 \\ &= 2+(A + 1/A) \cos \theta + i(A - 1/A) \sin \theta \quad (8) \end{aligned}$$

Supongamos que $\text{tr}(T) \in \mathbb{R}$: ésto implicaría que el término imaginario en (8) desaparece, luego θ es un múltiplo de π , entonces

$$\text{tr}^2(T) = 2 \pm (A + 1/A)$$

recordando que $\theta \neq 2n\pi$, nos queda

$$\text{tr}^2(T) = 2 - (A + 1/A)$$

y como $A + 1/A > 2$, tenemos que $\text{tr}^2 T < 0$, lo que es una contradicción, luego entonces $\text{tr}(T) \notin \mathbb{R}$.

Definimos a $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, como *loxodrómica* si $a+d \notin \mathbb{R}$.

Como $K = Ae^{i\theta}$, entonces H toma la forma $H(z) = Ae^{i\theta}z$, que podemos escribirla como la composición de dos transformaciones $z_1 = Az_2$ y $z_2 = e^{i\theta}z$ donde una es hiperbólica y la otra elíptica. Así H es una combinación de homotecia con rotación por lo que H transforma:

- a) Todo círculo que pasa por el origen en otro círculo centrado en el origen.

- b) Toda recta que pasa por el origen en otra recta que pasa por el origen, formando un ángulo θ con la primera.

Veamos el comportamiento de T , basándonos en

$$T = L^{-1}HL:$$

- A: Cada arco que une los puntos fijos es transformado en otro arco con la misma propiedad, y formando un ángulo θ con el primero.
- B: Cada círculo ortogonal a los círculos que pasan por los puntos fijos, son transformados en otros círculos con la misma propiedad.

En general este tipo de transformaciones (loxodrómicas) no dejan invariantes tales conjuntos de puntos, como vimos en A y B con la excepción de que en la observación A, si $\theta = \pi$ entonces un círculo es transformado en si mismo pues cada arco forma un ángulo π con el otro, pero la diferencia de esta observación en este caso, que parece ser igual al de las elípticas, es que el conjunto de puntos interiores del círculo no es invariante bajo T , si $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ es loxodrómica.

3.5 TRANSFORMACIONES PARABÓLICAS

Pasemos finalmente al caso en que $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tiene un solo punto fijo. Vimos en la sección 2.5 que en este caso $\text{tr}(T) = \pm 2$.

Definimos a $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) - \{\text{id}\}$, como una transformación *parabólica* si $a+d = \pm 2$.

Sea $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) - \{\text{id}\}$, tal que $\text{Fij}(T) = \{p_1\}$, observe--mos, como se vió en 2.5 que: si $c \neq 0$, entonces $p_1 = (a-d)/2c$
si $c = 0$, entonces $p_1 = \infty$

Tomemos a $L \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, tal que $L(p_1) = \infty$, no dudamos de la existencia de L , ya que la transformación $\frac{1}{z-p}$ cumple con la condición deseada.

Considerando la acción de $L(\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})L^{-1})$ en $L(\hat{\mathbb{C}})$, tenemos de la misma forma que antes que:

$$\text{Fij}(LTL^{-1}) = L \text{Fij}(T) = \{\infty\}$$

Sea $H = LTL^{-1} \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Sabemos que si $\text{Fij}(H) = \{\infty\}$ entonces H es de la forma $H(z) = z+b$ (sec. 2.5 (17)), y el comportamiento de la traslación H ya es conocido.

- a) Cualquier línea recta es transformada por H en una línea paralela a ella.
- b) Cualquier línea paralela a la línea que une el origen con b , es transformada en sí misma.
- c) La mitad del plano formado al dividir éste, por una línea que permanece fija, es transformado en sí mismo.

Como $H = LTL^{-1}$ de igual manera que en las secciones anteriores, hacemos $T = L^{-1}HL$ y conozcamos su comportamiento geométrico,

Veamos que es lo que hace T con Q , si Q es un círculo que pasa por p_1 , empecemos con L , L transforma a Q en una línea recta, después H transforma a esta recta en otra paralela (a), y por último L^{-1} manda a esa recta en un círculo que pasa por p_1 , por lo que resumimos:

- A: Cualquier círculo que pase por el punto fijo, es transformado en un círculo tangente al primero en el punto fijo.
- B: Hay una recta que pasa por el punto fijo, tal que todo círculo tangente a dicha recta en dicho punto, es transformado en otro tal círculo o en la recta.
- C: El conjunto de puntos interiores a cualquiera de los círculos invariantes, es invariante bajo T .

3.6 CLASIFICACIÓN DE ELEMENTOS DE $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ (RESUMEN).

TEOREMA 3.6.1. Sea $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, es decir

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{donde} \quad ad-bc = 1$$

entonces T es o la identidad o hiperbólica o elíptica o loxodrómica o parabólica.

DEMOSTRACION:

Sea $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, es decir, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc = 1$

Si $a+d \notin \mathbb{R}$ entonces T es loxodrómica. Si $a+d \in \mathbb{R}$, - tenemos tres cosas: $|a+d| > 2$; o $|a+d| < 2$; o $a+d = \pm 2$; de - donde T es hiperbólica; o elíptica; o parabólica, o la identidad, respectivamente. Como no hay más posibilidades para $a+d$, termina la demostración.

El siguiente resultado servirá en las investigaciones de capítulos posteriores.

TEOREMA 3.6.2. Si un grupo contiene dos transformaciones no-parabólicas, las cuales tienen un punto fijo en común, y los otros puntos fijos son diferentes, entonces el grupo - contiene transformaciones parabólicas con dicho punto común como el punto fijo.

DEMOSTRACION:

Sean A y B dos transformaciones no-parabólicas tales que:

$$A(p_1) = p_1, A(p_2) = p_2, \quad B(p_1) = p_1, B(p_3) = p_3, \text{ con } p_2 \neq p_3.$$

Sea $L \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $L(p_1) = \infty$, $L(p_2) = 0$, $L(p_3) = 1$

luego tenemos que

$$\begin{aligned} LAL^{-1}(\infty) &= \infty & LBL^{-1}(\infty) &= \infty \\ LAL^{-1}(0) &= 0 & LBL^{-1}(1) &= 1 \end{aligned}$$

Como $\text{Fij}(LAL^{-1}) = \{0, \infty\}$ entonces $LAL^{-1}(z) = az$ con $a \neq 0, 1$ y $(LAL^{-1})^{-1}(z) = z/a$.

Como $\text{Fij}(LBL^{-1})(z) = \{1, \infty\}$ entonces

$$\begin{aligned} LBL^{-1}(z) &= b(z-1) + 1 \text{ con } b \neq 0, 1 \text{ y} \\ (LBL^{-1})^{-1}(z) &= (z-1+b)/b \text{ entonces} \end{aligned}$$

$$(LAL^{-1})^{-1}(LBL^{-1})(LAL^{-1})(LBL^{-1})^{-1}(z) = z + [(b-1)(a-1)]/a$$

observando que $(b-1)(a-1)/a \neq 0$; de donde

$$LA^{-1}BAB^{-1}L^{-1}(z) = z + (b-1)(a-1)/a \quad (9)$$

luego (9) es parabólica cuyo punto fijo es ∞ , y así $A^{-1}BAB^{-1}$ es parabólica con el punto fijo $z = p_1$.

PROPOSICION 3.6.1. Las rotaciones de la esfera, equivalen bajo la proyección estereográfica a transformaciones elípticas en el plano.

DEMOSTRACION:

Debido a que la proyección estereográfica es conforme (teorema 2.8.2) y biyectiva, tenemos por la proposición 2.3.2, que a las rotaciones en la esfera le corresponden -- transformaciones bilineales. Ahora pasemos a demostrar que éstas son elípticas.

Supongamos que el ángulo de rotación de la esfera Σ_0 es θ , y el eje la recta que pasa por $\pm Z_1$ y 0, con $\pm Z_1 \in \Sigma_0$.

Entonces observemos que:

- a) $\pm Z_1$ son puntos fijos de la rotación;
- b) Un círculo que pasa por $\pm Z_1$, es transformado en otro con la misma propiedad, y formando un ángulo θ con el primero;
- c) Un círculo ortogonal al eje o a los círculos de b), permanece fijo.

Considerando que la proyección de Z_1 es z_1 y de Z_2 es z_2 , tenemos las siguientes observaciones:

- A: z_1 y z_2 son puntos fijos;
- B: Un círculo que pasa por z_1 y z_2 es transformado en otro que pasa por z_1 y z_2 formando un ángulo θ con el primero;
- C: Los círculos ortogonales a los de B, permanecen fijos.

El comportamiento anterior es precisamente el que -- tiene una transformación elíptica y ninguna otra, ver sección 3.3.

PROPOSICION 3.6.2. Si $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ corresponde a una rotación en Σ_0 , entonces T es de la forma

$$T(z) = \frac{az - \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad |a|^2 + |c|^2 = 1$$

DEMOSTRACION:

Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc = 1$, una transformación que corresponde a una rotación en Σ_0 , a través de un eje cuyos extremos son Z_1, Z_2 ; sean z_1, z_2 las proyecciones de Z_1, Z_2 , por lo que z_1, z_2 son los puntos fijos de T . Por la proposición 2.8.1. tenemos que

$$z_2 = -1/\bar{z}_1$$

o sea

$$\frac{az_2+b}{cz_2+d} = \frac{-\bar{c}z_1+\bar{d}}{a\bar{z}_1+\bar{b}}$$

sustituyendo $\bar{z}_1 = -1/z_2$

tenemos que

$$\frac{az_2+b}{cz_2+d} = \frac{\bar{d}z_2-\bar{c}}{-\bar{b}z_2+\bar{a}}$$

de donde por lo visto en la sección 2.2, tenemos

$$a = \lambda \bar{d}, \quad b = -\lambda \bar{c}, \quad c = -\lambda \bar{b}, \quad d = \lambda \bar{a}$$

de aquí que

$$1 = ad-bc = \lambda^2(\bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{c}) = \lambda(|a|^2+|c|^2)$$

luego $\lambda = 1$

de donde T es de la forma deseada.

PROPOSICION 3.6.3. Sea $T \in \text{Aut}(\hat{C})$, sean z_1 y z_2 , z_3 y z_4 pares de puntos opuestos. Si $T(z_1)$ y $T(z_2)$, $T(z_3)$ y $T(z_4)$ también lo son, entonces, T corresponde a una rotación de Σ_0 por la proyección estereográfica.

DEMOSTRACION:

Sea $T_1 \in \text{Aut}(\hat{C})$ una transformación que corresponde a una rotación, tal que $T_1(z_3) = 0$ y $T_1(z_4) = \infty$

Sea $T_2 \in \text{Aut}(\hat{C})$ una transformación que corresponde a una rotación tal que $T_2(T(z_3)) = 0$ y $T_2(T(z_4)) = \infty$.

Luego $\text{Fij}(T_2 T_1^{-1}) = \{0, \infty\}$ y por lo visto en la sección 2.5. tenemos que $T_2 T_1^{-1}$ es de la forma

$$T_2 T_1^{-1} = kz$$

Por otro lado tenemos que:

- a) $T_1(z_1) = z_1^1$; $T_1(z_2) = z_2^1$ son puntos opuestos;
- b) $T_2(T(z_1)) = w_1^1$, $T_2(T(z_2)) = w_2^1$ son puntos opuestos;
- c) $z_1^1, z_2^1, w_1^1, w_2^1 \notin \{0, \infty\}$.

$$\text{Así } w_1^1 = T_2 T_1^{-1}(z_1^1) = kz_1^1$$

y como $w_1^1 \bar{w}_2^1 = -1$

tenemos que

$$-1 = (kz_1^1)(\overline{kz_2^1}) = |k|^2 z_1^1 \bar{z}_2^1 = -|k|^2$$

de donde $|k| = 1$. Por lo tanto $T_2 T T_1^{-1}$ corresponde a una rotación, y dado que T_2, T_1 también corresponde a una rotación, tenemos que T corresponde a una rotación.

3.7. CÍRCULO ISOMÉTRICO.

Definición 3.7.1. Sea $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, y defínase

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} : |T'(z)| = 1\}$$

a $I(T)$ le llamamos el *círculo isométrico* de la transformación T .

Si c es cero, la definición no tiene sentido, y por lo tanto no se habla de $I(T)$ en dicho caso.

Sea γ una curva (sección 2.3) y recordando que

$$\text{long}_{\gamma} = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

Hacemos la observación de que si $\gamma \subseteq I(T)$ entonces

$$\text{long}_{\gamma} = \text{long}_{T(\gamma)} \quad (10)$$

TEOREMA 3.7.1. Todo $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ transforma su círculo isométrico en el círculo isométrico de su transformación inversa T^{-1} , invirtiendo su orientación.

DEMOSTRACION:

Sea $z \in I(T)$ por lo que $|T'(z)| = 1$, luego
 $|((T^{-1})'(T(z)))| = 1/|T'(z)| = 1$ de donde $T(z) \in I(T^{-1})$.

Debido a que $I(T)$ e $I(T^{-1})$ son del mismo radio, podemos definir una transformación T_1 , compuesta por una traslación y una rotación, tal que

$T_1: I(T) \rightarrow I(T^{-1})$ y con $z_1 \in I(T)$ tenemos que $T_1(z_1) = T(z_1)$; T_1 preserva la orientación, es isometría y por ser conforme $T_1 \in \text{Aut}(\hat{C})$.

Supongamos que $T: I(T) \rightarrow I(T^{-1})$ preservando la orientación natural de estos círculos, y recordando que es isometría tenemos que si $z_2, z_3 \in I(T)$, $z_2 \neq z_3$ entonces $T(z_2) = T_1(z_2)$ y $T(z_3) = T_1(z_3)$ luego por el teorema 2.5.1 a) afirmamos que

$$T_1(z) = T(z) \text{ para todo } z \in \hat{C}$$

pero T_1 fija al ∞ , contradicción! Luego T no preserva la orientación al enviar su propio círculo isométrico en el de su inversa.

Una interpretación geométrica de T con relación a su círculo isométrico es la siguiente.

Sea $p \in I(T)$ y por el teorema anterior $T(p) \in I(T^{-1})$; sea L la bisectriz perpendicular al segmento L' que une los centros de $I(T)$ e $I(T^{-1})$. Si aplicamos una inversión (sec. 2.7) respecto a $I(T)$, p queda fijo, y luego una reflexión respecto a L , entonces p cae sobre un punto p_1 , que pertenece a $I(T^{-1})$, y por último mandamos p_1 a $T(p)$, por medio de una rotación con centro en $a|c$. Luego si denotamos a la composición de las dos inversiones con la rotación, por la transformación T_1 , tenemos que $T_1: I(T) \rightarrow I(T^{-1})$ y $T_1(p) = T(p)$. Por el mismo razonamiento que utilizamos en la demostración anterior, vemos que $T_1 = T$.

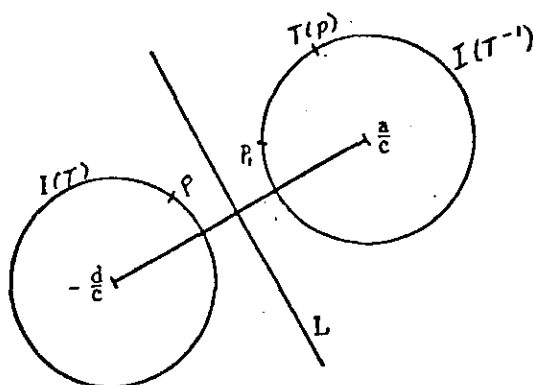


Fig. 5

Hacemos la observación que los círculos isométricos $I(T)$, $I(T^{-1})$ se intersectan, se tocan o son ajenos dependiendo del tipo de transformación (de la sección anterior) que sea, veamos:

$$I(T) : |cz+d| = 1 \text{ con centro } -d/c \text{ y radio } 1/|c| ;$$

$$I(T^{-1}) : |cz-a| = 1 \text{ con centro } a/c \text{ y radio } 1/|c| ;$$

$$\text{la distancia entre los centros : } |a/c + d/c| ;$$

$$\text{La suma de los radios : } 2/|c|$$

Entonces $I(T)$ e $I(T^{-1})$ se intersectarán si

$|\frac{a}{c} + \frac{d}{c}| < 2/|c|$ es decir si $|a+d| < 2$ o sea si T es elíptica, de igual manera; si T es hiperbólica $I(T)$ e $I(T^{-1})$ son ajenos; si T es parabólica $I(T)$ e $I(T^{-1})$ son tangentes; si T es loxodrómica puede suceder cualesquiera de los casos anteriores, excepto la coincidencia.

TEOREMA 3.7.2. Las longitudes de una curva γ en $D(T)$ son aumentadas en magnitud, y las longitudes de γ en $E(T)$ -- son disminuidas en magnitud bajo la aplicación de T .

DEMOSTRACION:

Si $z \in \gamma \subseteq D(T)$, entonces $|cz+d| < 1$ y como

$$|T'(z)| = 1/|cz+d|^2$$

tenemos que

$$|T'(z)| > 1$$

Analogamente vemos que si $z \in \gamma \subseteq E(T)$ entonces

$$|T'(z)| < 1.$$

CAPITULO IV

GRUPOS FINITOS DE TRANSFORMACIONES BILINEALES

Antes de iniciar este capítulo hacemos la aclaración que el grupo G de transformaciones de Möbius en el cual trabajaremos, es finito.

Notar que si $T \in G$ es hiperbólica, loxodrómica o parabólica, las transformaciones T^n ($n \in \mathbb{Z}$) son distintas. Luego tal T no puede ser elemento de G , de donde concluimos que G contiene únicamente transformaciones elípticas y la identidad. Además cada elíptica de G tiene traza $= \pm 2 \cos \theta$ donde θ/π es racional.

El grupo por tener un número finito de puntos fijos, puede ser transformado, por una conjugación (ejem. 9, 1.5), de tal manera que ∞ no sea punto fijo de ningún elemento de $G - \{\text{id}\}$, por lo que supondremos, sin pérdida de generalidad, que ∞ no es punto fijo de $T \in G$. Y así toda $T \in G$, con excepción de la identidad, posee su círculo isométrico, ya que de lo contrario si $c = 0$ entonces $T(\infty) = \infty$.

4.1 REGIÓN FUNDAMENTAL.

Definición 4.1.1. La región abierta R es una *región fundamental* del grupo G , si,

- i) Para toda $T \in G - \{id\}$, $T(R) \cap R = \emptyset$
- ii) Para toda $z \in \hat{C}$, existe $T \in G$ tal que $T(z) \in \bar{R}$

(aquí $\bar{R}$ denota la cerradura de R)

Nótese que si R es una región fundamental, existe un conjunto fundamental Y tal que $R \subseteq Y \subseteq \bar{R}$.

Veamos unos ejemplos de regiones fundamentales

1.- Tenemos el grupo de rotaciones

$$G_1 = \{T_n(z) = e^{2n\pi i/6} z \quad (0 \leq n \leq 5)\}$$

y $R_1 = \{z : 0 < \arg(z) < \pi/3\}$ es una región fundamental para G_1 . La vecindad de cualquier punto de la frontera de R contiene puntos que son transformados en puntos interiores de R_1 , por una rotación de un ángulo de $\pm\pi/3$.

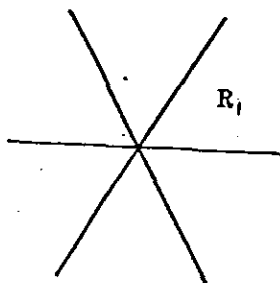


Fig. (6)

2.- El grupo de traslaciones

$$G_2 = \{T_m(z) = z+m, m \in \mathbb{Z}\}$$

Sea $R_2 = \{z : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$

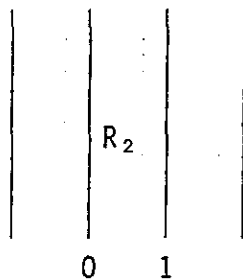


Fig. (7)

R_2 es una región fundamental para el grupo G_2 .

Hacemos la observación de que en los ejemplos anteriores la frontera de R consta de dos curvas congruentes y notamos que en el ejemplo 1, el $\{0\}$ es punto fijo.

Notamos además que la región fundamental no es única, cualquier región congruente a ella, es otra región fundamental.

TEOREMA 4.1.1. *Sí una región no contiene dos puntos congruentes bajo G , las imágenes de esta región bajo dos transformaciones distintas de G , son disjuntos.*

DEMOSTRACION:

Sea A una región que no tiene dos puntos congruentes

bajo G . Sean $S, T \in G$ dos transformaciones distintas tales que $S(A) \cap T(A) \neq \emptyset$.

Ya que $S(A) \cap T(A)$ es abierto tomamos tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in S(A) \cap T(A)$. Como $S^{-1}(z_i), T^{-1}(z_i) \in A$ $i = 1, 2, 3$ y son puntos congruentes pues, $T^{-1}(z_i) = (T^{-1}S)(S^{-1}(z_i))$ y $T^{-1}S \in G$, tienen que ser el mismo punto:

$$S^{-1}(z_i) = T^{-1}(z_i) \quad i = 1, 2, 3$$

luego cada z_i es punto fijo de TS^{-1} . Y por el corolario 2.5.1., tenemos que

$$TS^{-1} = \text{id} \quad \text{luego } T = S$$

Esta contradicción concluye la demostración.

Llamaremos a R , la *región fundamental de Ford* para G , a la región

$$R = \bigcap_{T \in G} E(T) \quad (1)$$

Como G es finito, la unión de los círculos isométricos de sus transformaciones son acotadas, luego $\infty \in E(T)$, para toda $T \in G$, de donde $\infty \in R$ de ahí que $R \neq \emptyset$.

TEOREMA 4.1.2. R es una *región fundamental* para G .

DEMOSTRACION:

Primero demostraremos la condición i) de la definición 4.1.1., recordando que R es abierto. Sea $z \in R$, entonces $z \notin \overline{D(T)}$ para cualquier $T \in G$; por lo tanto, por el teo-

rema 3.7.2, tenemos que $|T'(z)|$ es menor que 1. Ahora bien, como $z = (T^{-1} \circ T)(z)$, derivando tenemos que:

$$1 = (T^{-1})'(T(z))T'(z)$$

luego

$$1/|T'(z)| = |(T^{-1})'(T(z))| > 1;$$

y nuevamente por el teorema 3.7.2. concluimos que $T(z) \in D(T^{-1})$. Entonces $T(z) \notin R$ y la afirmación i) queda verificada.

Ahora verificaremos ii), es decir que $C = \bigcup_{T \in G} UT(\bar{R})$, (usando T en lugar de T^{-1} , sin afectar lo afirmado).

Pero como es una unión finita, tenemos que $UT(\bar{R}) = \overline{UT(R)}$ es cerrado.

Si ii) no fuera válida, tendríamos un $z_0 \notin \bigcup_{T \in G} UT(\bar{R})$ y por ser $\bigcup_{T \in G} UT(\bar{R})$ cerrado, tendríamos un disco Q con centro en z_0 y radio r_0 tal que $Q \cap \bigcup_{T \in G} UT(\bar{R}) = \emptyset$, lo cual quiere decir que Q no contiene puntos de R ni puntos congruentes a R . A continuación construiremos una sucesión de discos $Q, T_1(Q), T_2(Q), \dots$ arbitrariamente grandes, lo cual es una contradicción por ser G un grupo finito, luego quedaría probado que R es una región fundamental.

Como $z_0 \notin \bigcup_{T \in G} UT(\bar{R})$, entonces $z_0 \in D(T_1)UI(T_1)$ para algún $T_1 \in G$. Consideremos $T_1(Q)$, T_1 es equivalente a una inversión en $I(T_1)$ seguida de una reflexión en una recta y una posible rotación. La magnitud de $T_1(Q)$ está determinada por la inversión en $I(T_1)$.

Supongamos primero que $z_0 \in I(T_1)$ cuyo radio es r_I y cuyo centro z_I es exterior a Q . Encontremos el radio de $T_1(Q)$, que denotaremos por r_1 , veamos :

Sean p y q puntos de Q , que se encuentran a una distancia $r_I - r_0$ y $r_I + r_0$ respectivamente de z_I . Y sean x , y las distancias de z_I , a los puntos inversos de p , q con respecto a $I(T_1)$, respectivamente.

Por lo que

$$r_I^2 = (r_I + r_0) \cdot y \quad \text{y} \quad r_I^2 = (r_I - r_0) \cdot x$$

luego

$$r_1 = (x-y)/2 = r_0 / (1 - r_0^2 / r_I^2) \quad (2)$$

Si $z_0 \in \overline{D(T_1)}$ entonces

$$r_1 \geq k r_0 \quad (3)$$

con $k = 1 / (1 - r_0^2 / M)$

siendo M un número real mayor que todos los radios de los círculos isométricos de los elementos de G .

Si aplicamos a este nuevo disco una transformación de G , con las mismas condiciones que la anterior, obtendremos un disco de radio r_2 , tal que

$$r_2 > r_1 / (1 - r_1^2 / r_I^2) > k r_1 > k^2 r_0$$

Continuando este proceso encontramos para cada n un círculo Q_n de radio r_n , congruente con Q , tal que

$$r_n > k^n r_0 \quad (4)$$

lo que conduce a la contradicción ya mencionada, y termina -
la demostración.

4.2 ARISTAS Y VÉRTICES DE LA FRONTERA DE R .

Denotaremos a la frontera de R por ∂R . Nótese que $\partial R \subseteq \bigcup_{T \in G} I(T)$; luego ∂R es unión de arcos circulares puesto que G es finito.

Definición 4.2.1. Un punto frontera por el cual pasa más de un círculo isométrico, le llamamos *vértice*. En el caso que el punto frontera descansa sobre un sólo círculo isométrico, y además sea punto fijo de una transformación elíptica de período dos, le llamamos también *vértice*.

Definición 4.2.2. Llamaremos *arista* ó *lado* de ∂R , a cada componente conexa de $\partial R - \{\text{vértices}\}$.

Cada arista es un arco abierto de un $I(T)$, $T \in G$ tal que cada uno de sus dos extremos es vértice.

TEOREMA 4.2.1. Las aristas de ∂R , forman un conjunto de arcos congruentes bajo G por pares, y cada dos arcos congruentes son de la misma longitud.

DEMOSTRACION:

Sea p un punto frontera que no es vértice, $p \in I(T)$ para alguna $T \in G$, sea $p' = T(p)$ luego $p' \in I(T^{-1})$, por el teorema 3.7.1. Supongamos que p' estuviera en $D(S)$ para

alguna $S \in G$, por el teorema 3.7.2., S magnifica longitudes en la vecindad de p' , luego ST magnifica longitudes en la vecindad de p ; de donde $p \in D(ST)$, lo que contradice el hecho de que p es un punto frontera. Asi p' no está en $D(S)$ para ningún $S \in G$, luego p' es punto frontera. Nos falta probar que no es vértice.

Considerando que no hay círculos isométricos en la vecindad de p , con excepción de $I(T)$, los puntos de $I(T)$ en la vecindad de p son puntos frontera no-vértices. Asi hemos visto que el arco frontera de $I(T)$ que contiene p , es congruente bajo T con el de $I(T^{-1})$ que contiene p' . Y por la fórmula (10) de la sección 3.7., tenemos que dichos arcos son de la misma longitud.

PROPOSICION 4.2.1. Si p es un vértice de ∂R y T una transformación de G tal que $p' = T(p) \in \partial R$, entonces p' es un vértice.

DEMOSTRACION:

Sea p un vértice por el cual pasan los círculos isométricos $I(T)$, $I(S)$. Entonces los círculos isométricos $I(T^{-1})$ y $I(ST^{-1})$ pasan por p' , pues S manda a p en algún punto sin alterar longitudes, luego ST^{-1} manda a p' sin alterar longitudes. Asi el mismo número de círculos isométricos que pasan por p , pasarán por p' , luego p' es un vértice.

Veamos un ejemplo.

Sea G el grupo cuyos elementos son:

$$T_0(z) = z, \quad T_1(z) = \frac{2z-1}{3z-2}, \quad T_2(z) = \frac{z}{5z-1}, \quad T_3(z) = \frac{3z-1}{7z-2}$$

$$T_4(z) = \frac{2z-1}{7z-3}, \quad T_5(z) = \frac{3z-1}{8z-3}.$$

Los respectivos círculos isométricos son:

$$I(T_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2/3| = 1/3\}$$

$$I(T_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1/5| = 1/5\}$$

$$I(T_3) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2/7| = 1/7\}$$

$$I(T_4) = \{z \in \mathbb{C} : |z-3/7| = 1/7\}$$

$$I(T_5) = \{z \in \mathbb{C} : |z-3/8| = 1/8\}$$

σ : arista

$$I_i = I(T_i)$$

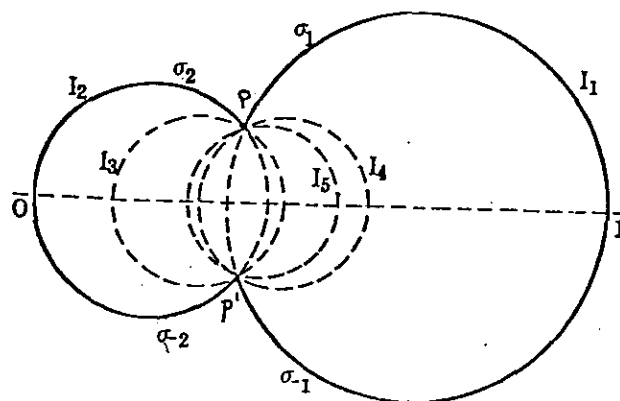


Fig. (8)

Notamos de estas fórmulas y de la figura (8), los --
siguientes hechos; que son ilustrativos de las proposiciones
anteriores.

- a) La región fundamental R de (1) está acotada por arcos
de los círculos $I(T_1)$, $I(T_2)$.
- b) T_1 y T_2 son elípticas por tener traza $0, \pm 1$ respectiva-
mente.
- c) T_1 deja fijo al 1 y al $1/3$; T_2 deja fijo al 0 y al $2/5$.
- d) p y p' son vértices y $T_1(p) = T_2(p) = p'$.
- e) Por el teorema 4.2.1., $T_1(\sigma_1) = \sigma_{-1}$ y $T_2(\sigma_2) = \sigma_{-2}$.
- f) 0 y 1 son vértices de ∂R , por ser puntos fijos de T_1 y
 T_2 que son transformaciones elípticas de período dos.

4.3. CICLOS DE VÉRTICES

Sea A_1 un vértice de ∂R , y sean $\sigma(S)$, $\sigma(T)$ los lados que se intersectan en A_1 , los cuales están orientados de tal manera que R está a su izquierda y tal que $\sigma(T)$ sigue de $\sigma(S)$, es decir A_1 es el punto final de $\sigma(S)$ y el comienzo de $\sigma(T)$. Estos lados son llevados por S y T en sus lados congruentes $\sigma(S^{-1})$ y $\sigma(T^{-1})$ de R . Ahora nos fijamos en la segunda de las transformaciones mencionadas, o sea T , que corresponde al lado que comienza en A_1 . A_1 es llevado por T en un vértice A_2 colocado al final de $\sigma(T^{-1})$, ésto está justificado por el teorema 3.7.1.

Ponemos $T_1 = T$, $\sigma_1 = \sigma(T)$ y el proceso se puede repetir ahora con A_2 , dando un elemento $T_2 \in G$ que lleve a la arista $\sigma_2 \subseteq I(T_2)$, que empieza en A_2 , en la arista $T_2(\sigma_2) \subseteq I(T_2^{-1})$ que termina en un vértice A_3 . Continuamos de esta manera, hasta que un vértice es llevado de vuelta a A_1 , lo cual además es inevitable, pues el número de vértices de ∂R es finito ya que G es finito.

Veamos la siguiente figura como una ilustración sencilla:

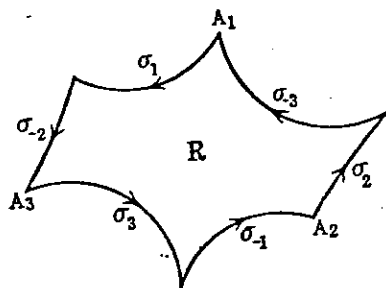


Fig. (9)

En este ejemplo tenemos que:

$T_1, T_2, T_3 \in G$; $\sigma_{\pm 1}, \sigma_{\pm 2}, \sigma_{\pm 3} \in \partial R$ tal que $\sigma_i \subseteq I(T_i)$, $\sigma_{-i} \subseteq I(T_i^{-1})$ y $T_i(\sigma_i) = \sigma_{-i}$. Sea A_1 un vértice de ∂R , que está al comienzo de σ_1 y

$$a) \quad T_1(A_1) = A_2$$

$$b) \quad T_2(A_2) = A_3$$

$$c) \quad T_3(A_3) = A_1$$

Aquí tenemos que A_1, A_2, A_3 son vértices congruentes.

Definición 4.3.1. Un ciclo es un conjunto de vértices congruentes, $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m = A_1$, llevados de uno en otro por el proceso descrito anteriormente.

Veamos que no hay vértices de ∂R congruentes con A_1 , más que los del ciclo.

Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ un ciclo y sean $T_1, T_2, \dots, T_m$ las transformaciones de G , que llevan a A_1 en A_2 , A_2 en A_3 , ... y A_m en A_1 , respectivamente, como ya se describió.

Consideremos la manera en que las imágenes de R , bajo ciertos elementos de G que indicaremos a continuación, se acomodan junto a A_1 . Las transformaciones $T_m, T_m T_{m-1}, \dots, T_m T_{m-1} \dots T_2 T_1$ llevan $A_m, A_{m-1}, \dots, A_1$ respectivamente en A_1 , y a R en regiones que llamaremos $R_m, R_{m-1}, \dots, R$ respectivamente.

Observemos primero que $T_m(A_m) = A_1$ y que $T_m(R) = R_m$.

luego R_m es adyacente a R , a lo largo de la arista σ_m , que termina en A_1 .

En general $T_i(A_i)$ es igual a A_{i+1} y $T_i(R) = R'_i$, donde R'_i es una región que se junta con R a lo largo de un lado que termina en A_{i+1} . Entonces $T_m \dots T_{i+1}(R) = R_{i+1}$ y $T_m \dots T_{i+1} T_i(R) = R_i$ son adyacentes a lo largo de un arco que surge de A_1 .

El ángulo de las aristas de ∂R en A_n , se preservan - debido a que las T_i son de Möbius (conformes), es decir es el mismo ángulo que el ángulo de las aristas de R_n en A_1 .

Con relación a la figura (9) las regiones nos quedarían así; cerca del vértice A_1 :

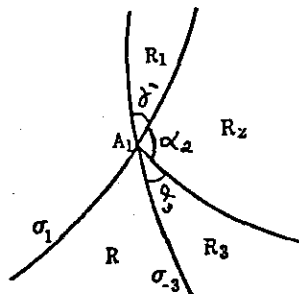


Fig. (10)

Como las regiones congruentes no se traslapan (Teorema 4.1.) tenemos dos posibilidades, que son éstas:

- $R_1 = R$, y por lo tanto las regiones $R_m, R_{m-1}, \dots, R_2, R$ llenan completamente el ángulo alrededor de A_1 , concluimos que la suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ de los ángulos de R en los vértices de ciclo es de 2π .
- $R_1 \neq R$, entonces $S = T_m T_{m-1} \dots T_2 T_1$ es una transformación

elíptica, tal que $S(A_1) = A_1$. Su multiplicador es $K = e^{i\theta}$ donde θ es el ángulo que S rota las curvas que pasan por A_1 ; como $S(R) = R$ entonces θ es la suma de los ángulos de los vértices del ciclo. Pero después de un número finito k , de aplicaciones de S , la región alrededor de A_1 se llena completamente y $S^k(R) = R$. Por lo tanto

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 2\pi/k \quad (5)$$

Ahora podemos ver claro que no hay vértices congruentes con A_1 , más que los del ciclo. Pues si suponemos lo contrario, la transformación de G , que lleva a algún vértice no perteneciente al ciclo, a A_1 ; lleva a R en una región que forzosamente se traslapa con alguna de las anteriores, lo cual no puede ser.

Resumimos lo anterior en los siguientes teoremas:

TEOREMA 4.3.1. *No hay vértices, fuera de un ciclo, congruentes con algún vértice perteneciente al ciclo. La suma de los ángulos en los vértices de un ciclo, es $2\pi/k$, donde k es un entero. Si k es mayor que 1, cada vértice del ciclo es punto fijo de una transformación elíptica de período k .*

TEOREMA 4.3.2. *Cada ciclo determina una relación de la forma $(T_m T_{m-1} \dots T_2 T_1)^k = id$, satisfecha por las transformaciones que unen los lados congruentes de R . Aquí k está determinada por (5).*

Volviendo al ejemplo de la sección 4.2, observamos - que en la figura (8):

- a) La arista σ_1 comienza en el vértice p , y es llevado - por T_1 en la arista σ_{-1} que finaliza en p' . El lado σ_{-2} que empieza en p' es llevado por T_2^{-1} en σ_{-2} , que finaliza en p . Entonces podemos decir que $\{p, p'\}$ es un ciclo.
- b) La transformación $S = T_2^{-1}T_1$ no es la identidad, puesto que la suma de los ángulos en p y p' es menor que 2π , entonces S es elíptica con p como punto fijo, y encontramos que $S^3 = \text{id}$, y por el teorema 4.3.1 la suma de los ángulos del ciclo $\{p, p'\}$ es de $2\pi/3$.
- c) El conjunto $\{0\}$ constituye un ciclo pues $T_2(\sigma_2) = \sigma_{-2}$ y $T_2^{-1}(\sigma_{-2}) = \sigma_2$, el ángulo es π y por el teorema 4.3.2, $T_2^2 = \text{id}$.
- d) El conjunto $\{1\}$ constituye un ciclo, $T_1(\sigma_1) = \sigma_{-1}$ y $T_1^{-1}(\sigma_{-1}) = \sigma_1$, su ángulo es π , por lo tanto $T_1^2 = \text{id}$.

En este ejemplo ∂R tiene tres ciclos.

4.4. FUNCIONES AUTOMORFAS.

Definición 4.4.1. El dominio de existencia de una función analítica univaluada f , es el conjunto de puntos para los cuales f es analítica o tiene polos.

Definición 4.4.2. Diremos que una función f es automorfa respecto a un grupo G de transformaciones si se cumple lo siguiente:

1. f es función analítica univaluada.
2. El dominio de f es invariante bajo G .
3. f es G -equivariante: $f \circ T = f$ para toda $T \in G$.

TEOREMA 4.4.1. Una función automorfa no constante toma su valor con multiplicidad k , o un múltiplo de k , en un vértice perteneciente a un ciclo cuya suma de sus ángulos es $2\pi/k$.

con respecto a un grupo G .

DEMOSTRACION:

Si $k = 1$ no hay nada que probar.

Sea $k > 1$ y sea z_0 un vértice que pertenece a un ciclo cuyos ángulos suman $2\pi/k$. Luego por el teorema 4.3.1. tenemos que z_0 es un punto fijo de una transformación elíptica de período k .

Recordamos que una función f analítica en z_0 , decimos que tiene multiplicidad s en z_0 ó que toma su valor s veces en z_0 , si podemos escribir en una vecindad de z_0 ,

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^s \varphi(z) \quad (6)$$

donde $\varphi(z_0) \neq 0$ y φ es analítica en z_0 .

Sea z_0 un punto fijo de una transformación elíptica S de período k . Supondremos primero que z_0 es finito. Entonces debido a (1) en 3.1., S satisface la fórmula

$$\frac{S(z)-z_0}{S(z)-z'_0} = e^{2\pi i/k} \cdot \frac{z-z_0}{z-z'_0} \quad (7)$$

donde z'_0 es el otro punto fijo de S . Ahora bien tenemos por (6)

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)^s}{(z-z'_0)^s} \psi(z) \quad (8)$$

para z suficientemente cerca de z_0 , con $\psi(z) = (z-z'_0)^s \varphi(z)$ analítica y distinta de cero en z_0 .

Consideremos una vecindad circular U de z_0 , invariante bajo S (sección 1.2), en la cual se tiene (8). Si $z \in U$, como z_0 es un punto fijo de S , tenemos que el punto $S(z)$ está en U , y por la fórmula (8)

$$f(S(z)) = f(z_0) + \frac{(S(z)-z_0)^s}{(S(z)-z'_0)^s} \psi(S(z))$$

y por (7) tenemos que

$$f(S(z)) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)^s}{(z-z'_0)^s} e^{2\pi i s/k} \psi(S(z)) \quad (9)$$

como $f \circ S = f$ igualamos (8) y (9), obteniendo

$$e^{2\pi i s/k} = \frac{\psi(z)}{\psi(S(z))} ;$$

ya que $S(z) \rightarrow z_0$ cuando $z \rightarrow z_0$, tenemos

$$e^{2\pi i s/k} = 1$$

de donde concluimos que s es múltiplo de k .

Si f tiene un polo en z_0 , $1/f$ es una función automorfa con un cero en z_0 , cuyo orden es múltiplo de k , entonces f tiene un polo de orden múltiplo de k .

Supongamos ahora que z_0 es el punto al infinito. Para demostrar el teorema en este caso, únicamente sustituimos a $z - z_0$ por $1/z$ en (6) y la demostración es igual al caso anterior.

4.5. POLOS Y CEROS EN LA REGIÓN R

Para contar los ceros y los polos de una función automorfa que se encuentran en la región fundamental, es necesario establecer ciertos convenios para el conteo de los polos y ceros que descansan en la frontera de R . Los convenios son estos:

- 1) Si hay un polo o un cero en una arista $\sigma \subseteq I(T)$, hay un polo o un cero en el punto congruente en $T(\sigma) \subseteq I(T^{-1})$. Sólo uno de éstos lo contaremos como perteneciente a R .
- 2) El orden verdadero (s) de un polo o de un cero en un vértice, será dividido por una cantidad igual al número de regiones que ahí se encuentra, (ver la descripción en la sección 4.3). Si hay m vértices en el ciclo y la suma de sus ángulos en los vértices es de $2\pi/k$, entonces km regiones se encuentran en cada vértice, y tenemos s/km polos o ceros en cada vértice, por lo que se contarán s/k polos o ceros en todos los vértices del ciclo.

TEOREMA 4.5.1. Una función automorfa respecto a un grupo finito de transformaciones, la cual no es idénticamente cero, tiene igual número de ceros y de polos en la región fundamental.

DEMOSTRACION:

Por el principio del argumento tenemos

$$N - M = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} d \log(f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (10)$$

recordemos que (10) se satisface solo cuando $f(z)$ no tiene polos ni ceros en ∂R . En (10) N denota el número de ceros y M el número de polos, en el interior de la región fundamental.

Supongamos primero que f no tiene ni polos, ni ceros sobre la frontera de R . Consideremos las partes de la integral que comprenden un par de aristas congruentes, sean éstas σ y $T(\sigma)$. Su contribución a la integral total (10) es,

$$\int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{T(\sigma)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \quad (11)$$

pero tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{T(\sigma)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw &= - \int_{\sigma} \frac{f'(T(z))T'(z)}{f(T(z))} dz \\ &= - \int_{\sigma} \frac{(f \circ T)'(z)}{(f \circ T)(z)} dz \end{aligned} \quad (12)$$

como f es automorfa, tenemos que (12) es igual a

$$- \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

por lo que (11) se cancela y tenemos $N-M = 0$; es decir $N = M$ y el teorema queda demostrado para este caso.

Supongamos ahora que hay un cero o un polo en el punto $z_0 \in \sigma$, por lo que también lo hay en $T(z_0) \in T(\sigma)$, para este caso deformamos la arista σ , de tal manera que la curva sobre la que integramos no pase por z_0 . Demos una bola $B(z_0, \epsilon)$ con centro en z_0 y radio suficientemente pequeño; y sea $R' = R \cup B(z_0, \epsilon) - T(B(z_0, \epsilon))$, así podemos integrar sobre las partes de $B(z_0, \epsilon)$ y su imagen bajo T , que nos interesa.

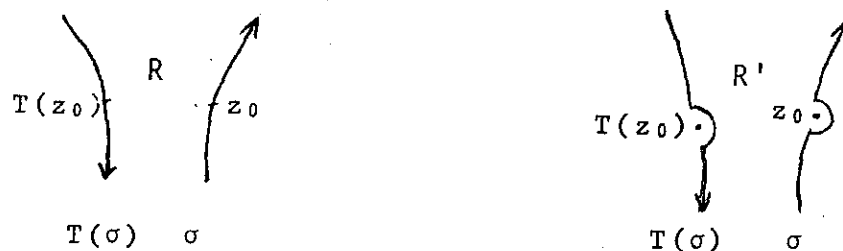


Fig. (11)

Solamente un cero o un polo queda en la nueva región fundamental R' ; y el teorema se mantiene pues las integrales de los lados congruentes se cancelan como en el caso anterior.

Por último supondremos que $f(z)$ tiene un cero o un polo en un vértice. Empecemos estudiando qué sucede si f tiene un cero de orden s , en un vértice A_n . Para integrar alteramos la trayectoria para que excluya a A_n , de la siguiente manera:

Sean dos aristas σ_0 que va de B a A_n y σ_1 que va de A_m a C , como vemos en la fig.(12). Sea el punto B_m que pertenece a σ_0

y que está a una distancia r , de A_m ; sea también el punto C_m que está en σ_1 , a la misma distancia r de A_m . Trazamos una curva γ de B_m a C_m e integramos sobre ella

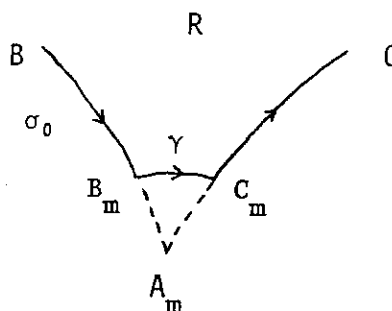


Fig. (12).

Las partes que restan de las curvas, por estar emparejadas por elementos de G en cuyos círculos isométricos yacen, son congruentes por pares, por lo que las integrales se cancelan como en los casos anteriores.

La función f es meromorfa en A_m , entonces

$$f(z) = (z - A_m)^s \varphi(z)$$

con $\varphi(z)$ analítica y distinta de cero en A_m , tenemos que

$$\begin{aligned} \log f(z) &= \log(z - A_m)^s \varphi(z) + 2n\pi i \\ &= s \log(z - A_m) + \log(\varphi(z)) + 2n\pi i \end{aligned}$$

algún $n \in \mathbb{Z}$;

y su diferencial correspondiente es

$$d \log f(z) = \frac{s}{z - A_m} dz + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$$

luego

$$\int_{\gamma} d \log f(z) = s \int_{\gamma} \frac{dz}{z-A_m} dz + \int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz \quad (13)$$

pero tenemos que $\int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$ tiende a cero, cuando r tiende a cero, ésto es debido a que $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ es analítica; la otra.- integral la resolvemos.

$$s \int_{\gamma} \frac{dz}{z-A_m} = s \log (z-A_m) \Big|_{\gamma} = -is (\chi A_m)$$

por lo que (13) tiende a $-is \chi A_m$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d \log f(z) \longrightarrow -\frac{s}{2\pi} (\chi A_m)$$

sumando para todos los vértices del ciclo, tenemos

$$N-M = \frac{-s}{2\pi} \sum \chi A_m = -s/k$$

de donde $N + s/k = M$.

Como N es el número de ceros en R y s/k el número de los que hay en los vértices (contando los polos negativamente), demostremos que el número de ceros es igual al número de polos. Y así el teorema queda demostrado.

TEOREMA 4.5.2. Una función automorfa, la cual no tiene polos en la región fundamental, es una constante.

DEMOSTRACION:

Sea f automorfa que no tiene polos en la región fundamental R , sea $z_0 \in R$ y escribáse $c = f(z_0)$.

Entonces la función que envía z en $f(z)-c$, es una función automorfa con un cero en z_0 y no tiene polos. Esto es posible únicamente si $f(z)-c \equiv 0$, por el teorema anterior. De donde deducimos que $f(z) = c$ para toda z .

TEOREMA 4.5.3. Una función automorfa no-constante toma cada valor, el mismo número de veces en la región fundamental.

DEMOSTRACION:

Sea f una función automorfa no-constante.

La función f tiene un número finito de polos en la región fundamental. Y la función que envía z en $f(z)-c$, donde c es cualquier constante, tiene el mismo número de polos que f , y por el teorema 4.5.1., tenemos que $f(z)$ es igual a c , tantas veces como el número de polos de f .

4.6. GRUPOS DE ROTACIONES DE SÓLIDOS REGULARES

Construiremos grupos finitos de transformaciones de $\hat{C}$, formando grupos finitos de rotaciones en la esfera Σ_0 en $\mathbb{R}^3$, y proyectándolas estereográficamente sobre el plano complejo, como en la sección 2.8. Daremos un nombre a la proyección estereográfica.

$$\psi: \Sigma_0 \longrightarrow \hat{C}$$

Procederemos como sigue:

Sea $\bar{X}$ un sólido regular inscrito en Σ_0 , necesariamente con su centro de Σ_0 . Existen ciertos movimientos rígidos del espacio los cuales llevan a $\bar{X}$ en sí mismo. Estos movimientos que intercambian las caras de $\bar{X}$, dejan fijo el centro de la figura, pero que cada movimiento es una rotación - alrededor de un eje que pasa por el centro. Es claro que el conjunto de todas estas rotaciones, que llevan a $\bar{X}$ en sí mismo y que llamaremos $\text{Rot}(\bar{X})$, es un grupo, pues la composición de dos de ellas, así como las inversas dejan a $\bar{X}$ invariante y son restricciones de isometrías de $\mathbb{R}^3$, y por lo tanto pertenecen a $\text{Rot}(\bar{X})$. Por estos movimientos la esfera Σ_0 rota - alrededor de sus ejes diametrales, y aplicando ψ a dichas rotaciones de $\text{Rot}(\Sigma_0)$, obtenemos transformaciones bilineales elípticas correspondientes; como lo demostramos en la proposición 3.6.1.

Observamos que el grupo $\text{Rot}(\bar{X})$ es finito, puesto que tanto el número c de caras como el número μ de aristas en cada cara del sólido, son finitas; y es claro ver que el número N de rotaciones que llevan a $\bar{X}$ en sí mismo es $N = c\mu$, luego $\text{Rot}(\bar{X})$ es finito. Y así tenemos que las correspondientes transformaciones bilineales forman un subgrupo finito de $\text{Aut}(\hat{C})$.

Sea $G^* \subseteq \text{Rot}(\Sigma_0)$ y sea $G \subseteq \text{Aut}(\hat{C})$ el grupo de las transformaciones bilineales correspondientes. Por medio de la relación dada por

$$T = \psi T^* \psi^{-1} \quad T \in G, T^* \in G^*$$

tenemos que G y G^* son isomorfos. Recordando que G actúa en $\hat{C}$ y que G^* actúa en Σ_0 , observamos que por medio de la biyección $\psi: \Sigma_0 \rightarrow \hat{C}$, estas acciones son equivalentes.

UN ESTUDIO DEL OCTAHEDRO

Ilustraremos lo anterior construyendo el grupo de transformaciones, que llevan al octaedro en sí mismo.

Supondremos que el octaedro $\bar{X}$ está inscrito en Σ_0 , con su centro en el origen (ver figura 13). Estudiemos los ejes alrededor de los cuales el octaedro es rotado en sí mismo. De éstos hay tres clases a saber:

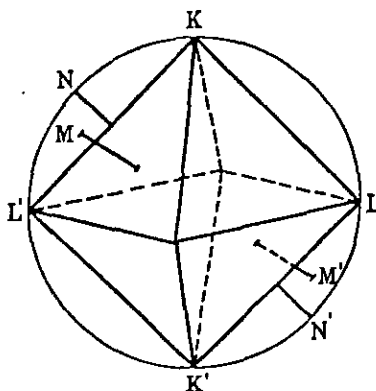


Fig. (13)

Primero tenemos tres ejes que unen los pares de vértices opuestos, como por ejemplo KK' ; estos ejes rotan un ángulo $\pi/2$, de π o de $3\pi/2$ y $\bar{X}$ es llevado en sí mismo por lo que en este caso tenemos nueve rotaciones, tomando en cuenta los tres ejes de este tipo, dos de período cuatro y una de período dos.

Luego están los cuatro ejes que unen los puntos medios de pares de caras opuestas, como por ejemplo MM' , y en este caso $\bar{X}$ necesita ser rotado un ángulo de $2\pi/3$ o de $4\pi/3$, para ser llevado en sí mismo, por lo que aquí tenemos ocho rotaciones de este tipo, las cuales son de período tres.

Finalmente están los seis ejes que unen los puntos medios de pares de aristas opuestas, ejemplo NN' , que al hacer una rotación de π , llevan a $\bar{X}$ en sí mismo, de aquí que tengamos seis rotaciones más de período dos.

De estos tres tipos de ejes tenemos 23 rotaciones y agregando la identidad, concluimos que el grupo de rotaciones, los cuales llevan a $\bar{X}$ en sí mismo consiste en 24 transformaciones. Y el grupo correspondiente en el plano complejo extendido, consiste de 24 transformaciones bilineales.

Para determinar cuales son las transformaciones del grupo, encontramos primero los puntos fijos de las rotaciones, o sea los puntos donde los ejes de rotación intersectan a Σ_0 ; después los proyectamos en el plano complejo, y como sabemos por la proposición 3.6.1. que las rotaciones de la esfera corresponden a transformaciones elípticas, tenemos que T (la transformación elíptica correspondiente a la rotación Σ_0) está dada por

$$\frac{T(z)-z_1}{T(z)-z_2} = e^{i\theta} \frac{z-z_1}{z-z_2} \quad (14)$$

donde θ es el ángulo de rotación y z_1, z_2 las proyecciones en $\hat{C}$ de los puntos fijos en Σ_0 .

Conozcamos algunas transformaciones de dicho grupo:

Sean los puntos $L = (1, 0, 0)$. Proyectamos L y L' estereográficamente por medio de la ecuación (30) en 2.8 y obtenemos $\psi(L) = 1, \psi(L') = -1$. Los ángulos de rotación por el eje LL' son $\pi/2, \pi$ ó $3\pi/2$, por lo que $e^{i\theta}$ es igual a $i, -1, -i$ respectivamente. Entonces las transformaciones bilineales correspondientes a las rotaciones no triviales -- del octaedro, alrededor del eje LL' son estas:

$$\frac{T(z)-1}{T(z)+1} = k \frac{z-1}{z+1} \quad k = i, -1, i$$

Consideremos ahora los puntos $N = (-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$
 $N' = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ y sus proyecciones en el plano - - -
 $\psi(N) = -(\sqrt{2}+1)$, $\psi(N') = \sqrt{2}-1$. El ángulo de rotación por el
eje NN' es π , por lo que $e^{i\theta}$ es -1 , sustituyendo en (14) ob-
tenemos

$$S(z) = -\frac{z-1}{z+1} \quad (15)$$

Finalmente consideremos los puntos $M = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; $M' = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ y sus proyecciones $\psi(M) = -$
 $-(1+i)/(\sqrt{3}-1)$, $\psi(M') = (1+i)/(\sqrt{3}+1)$. El ángulo de rotación -
alrededor del eje MM' es de $2\pi/3$ o de $4\pi/3$, por lo que $e^{i\theta}$
es igual a $(-1+i\sqrt{3})/2$ ó $(-1-i\sqrt{3})/2$ respectivamente; sustitu-
yendo esto en (14) obtenemos las transformaciones bilineales
correspondientes, que denotaremos por W .

Como K puede ser llevado en K' , o en cualquiera de -
los cuatro vértices restantes de $\bar{X}$, por medio de las rotacion
es que llevan a $\bar{X}$ en sí mismo, tenemos que las proyecciones
de esos seis puntos son congruentes, relativo al grupo de -
 $\text{Aut}(\hat{C})$ que corresponde a $\text{Rot}(\bar{X})$. De igual manera las proyecc
ciones de los puntos medios de las caras de $\bar{X}$, son congruen-
tes y lo mismo sucede con las proyecciones de los puntos me-
dios de las aristas de $\bar{X}$. Por este hecho los puntos fijos -
ya mencionado de las transformaciones elípticas, que forman
el grupo, son divididos en tres conjuntos, donde todos los

puntos fijos dentro de cada conjunto son congruentes. Notemos que un vértice no puede ser llevado, por una rotación - que lleve a $\bar{X}$ en sí mismo, en un punto medio de una cara o una arista.

Podríamos formar una región fundamental del grupo, - por medio de los círculos isométricos, pero lo haremos aquí de una manera distinta.

Considérese el triángulo KPL' , en la superficie del octaedro, formado por la unión de los vértices KL' en los extremos de una arista, y el punto medio p de una cara adyacente.

Si rotamos el eje MM' , el cual pasa por p (ya que M es la proyección en la esfera de $p \in \bar{X}$), el triángulo es llevado en otro triángulo que colinda con el lado $L'P$ y éste -- triángulo es llevado en otro que colinda con el lado KP . Si aplicamos algún otro elemento de $\text{Rot}(\bar{X})$ al triángulo KPL' , - éste es llevado a otra cara, luego KPL' cubre esa cara por otros elementos de $\text{Rot}(\bar{X})$; si proseguimos así tenemos que, - el triángulo KPL' junto con sus imágenes (que no se traslapan entre sí) cubren todo $\bar{X}$. Por lo que el triángulo KPL' - es una región fundamental para el grupo $\text{Rot}(\bar{X})$. Si proyectamos dicho triángulo sobre la superficie de la esfera, siendo el origen el centro de proyección, tendremos un triángulo esférico formado por los arcos MK , ML' y $L'NK$, que debido a la proposición 1.4.1.(j) es la región fundamental para el grupo $\text{Rot}(\bar{X})$ actuando en Σ_0 , y su proyección estereográfica en el

plano complejo nos da la región fundamental $R \subseteq \hat{C}$, para el grupo de transformaciones bilineales correspondientes; y vemos que su frontera consta de tres arcos circulares o partes de rectas.

Hay precisamente un elemento de G , para cada trasladado de la región fundamental. Está claro que para el grupo $\text{Rot}(\bar{X})$ tenemos 23 triángulos más sobre $\bar{X}$, congruentes con $\triangle KPL'$. Si éstos 23 triángulos son proyectados sobre la esfera, y éstos proyectados estereográficamente sobre $\hat{C}$, tenemos 23 regiones congruentes a la región fundamental anteriormente descrita, las cuales llenan $\hat{C}$.

4.7 ESTUDIO DE UN SÓLIDO REGULAR GENERAL.

Nos serviremos de la siguiente notación:

- c: número de caras del sólido
- V: número de sus vértices
- A: número de sus aristas
- μ : número de aristas que rodean cada cara
- ν : número de caras que se encuentran en cada vértice.

Definición 4.7.1. Un *diámetro* del sólido $\bar{X}$ es un eje - por el cual el sólido $\bar{X}$ puede ser rotado en sí mismo.

Si un diámetro de la esfera, es un diámetro de $\bar{X}$, - entonces cada mitad de dicho eje (radio de Σ_0), pasa por

- a) un vértice; o bien
- b) el punto medio de alguna arista; o bien
- c) el punto medio de alguna cara.

Las rotaciones minimales alrededor de un diámetro del tipo

- a) son de período ν ; del tipo
- b) son de período 2; del tipo
- c) son de período μ .

El único caso en que las dos mitades de un diámetro no son del mismo tipo, ocurre en el tetraedro, en donde a--fortunadamente $\mu = \nu$.

Es claro ver, que los puntos fijos de las transformaciones en el plano, son las proyecciones de los extremos de los diámetros de la rotación correspondiente.

Los extremos de los diámetros de $\bar{X}$ se proyectan en puntos de $\hat{C}$, que se llamarán de tipo a), b), c).

Los elementos del grupo con estos tipos de puntos fijos tienen los períodos indicados. Entonces tenemos que un grupo finito de transformaciones tiene $c+V+A$ puntos fijos.

Un punto medio de una cara, admite ser llevado, por medio de una rotación que transforma al sólido en sí mismo, en otro punto medio de cualquier otra cara, un vértice en cualquier otro vértice y un punto medio de una arista, en el punto medio de cualquier otra arista. Por lo que tenemos, igual que en el ejemplo del octaedro, tres conjuntos de puntos fijos congruentes, que constan de c , V y A puntos fijos congruentes.

La región fundamental del grupo, puede ser construida de igual manera que en la sección anterior, uniendo los extremos de una arista al punto medio de la cara adyacente, este triángulo se proyecta a la esfera, y éste se proyecta estereográficamente sobre el plano, obteniendo así la región fundamental del grupo de transformaciones.

De igual manera que en la sección anterior, tenemos tantas copias de la región fundamental, como elementos tiene

el grupo.

En el siguiente cuadro, presentamos una lista de todos los sólidos regulares con su número de vértices, caras, etc., y el número N de transformaciones que forman al grupo

CUADRO I

	C	V	A	μ	ν	N
Tetrahedro	4	4	6	3	3	12
Cubo	6	8	12	4	3	24
Octahedro	8	6	12	3	4	24
Dodecahedro	12	20	30	5	3	60
Icosahedro	20	12	30	3	5	60
Dihedro	2	n	n	n	2	$2n$

El último sólido que aparece en el cuadro, el dihedro, es un sólido ideal de volúmen cero, podemos verlo como un sólido regular de n lados, inscrito en la circunferencia "ecuador de la esfera". La recta que une los puntos KK' - (de la fig. (13)), es un eje alrededor del cual la figura -- puede ser rotada en si misma, a traves de múltiplos del ángulo de $2\pi/n$. Las rectas que unen los vértices opuestos, o los puntos medios de las aristas opuestas, son diámetros los cuales llevan a la figura en si misma con un ángulo π .

Tenemos para $n = 2$ en el grupo dihédrico, el grupo - de transformaciones llamado, *el grupo cuatro*, que comprende las cuatro rotaciones que llevan al eje real y al eje imagi-

nario cada uno en si mismos.

Otro grupo no incluido en el cuadro, el más simple - de los grupos finitos, llamado *el grupo cíclico elíptico*, el cual tiene dos puntos fijos no-congruentes, pues consiste en el grupo de rotaciones que llevan a una pirámide regular en sí misma.

Observemos en el cuadro I, que si intercambiamos los números c y V y los números μ y v del cubo, obtenemos los datos del octahedro; también si intercambiamos los datos c y V μ y v del dodecahedro obtenemos los del icosaedro. Los datos del tetrahedro se vuelven en si mismos, por el intercambio mencionado.

Hemos encontrado cinco tipos de grupos finitos de transformaciones bilineales, el grupo cíclico elíptico, el grupo dihédrico, grupo tetrahédrico, octahédrico y por último el icosaédrico. Cada uno de estos grupos puede ser transformado, como en el ejem. 9 de 1.5, y obtener otros subgrupos.

En las últimas dos secciones siguientes, veremos que los grupos finitos mencionados son *los únicos* subgrupos finitos de $\text{Aut}(\hat{C})$.

Definición 4.7.2. Llamaremos *Grupos Poliédricos*, a los grupos finitos de transformaciones bilineales de $\text{Aut}(\hat{C})$, que corresponden bajo la proyección estereográfica, a las rotaciones de Σ_0 , que llevan al dihedro, tetrahedro, octahedro y al icosaedro, estando éstos inscritos en Σ_0 , en sí mismos.

4.8. DETERMINACIÓN DE TODOS LOS GRUPOS FINITOS (PARTE I)

Sea G un grupo finito de $N > 1$ transformaciones bilineales, donde ∞ no es punto fijo.

PROPOSICION 4.8.1. Cada punto fijo de orden k de G , es congruente a un vértice de R (región fundamental) que pertenece a un ciclo de ángulo total $2\pi/k$.

DEMOSTRACION:

Sea z_0 un punto fijo de orden k ; hacemos la observación que las k transformaciones que satisfacen $S(z_0) = z_0$ son potencias de una transformación elíptica con multiplicador $e^{2\pi i/k}$.

Por la definición de región fundamental sabemos que existe un punto $T(z_0)$, congruente con z_0 , dentro de R o en la frontera de R , y por la proposición 1.4.3. $T(z_0)$ es un punto fijo de orden k y por lo tanto tenemos k puntos congruentes en la vecindad de $T(z_0)$, de donde deducimos que $T(z_0) \in \partial R$ y por el mismo argumento $T(z_0)$ tiene que ser vértice. Por la observación hecha anteriormente y el teorema 4.3.1, concluimos que $T(z_0)$ pertenece a un ciclo de ángulo $2\pi/k$.

Construiremos ahora la función $f: \hat{C} \longrightarrow \hat{C}$ definida por

$$f(z) = \prod_{T \in G} \frac{T(z)-a}{T(z)-b} \quad (16)$$

donde a y b son puntos distintos interiores de R .

Es fácil ver que f es automorfa respecto al grupo G , comprobémoslo:

Primero, f es meromorfa por ser una función racional, y su dominio de existencia $\hat{C}$ es invariante bajo G .

Finalmente, la equivariancia sigue de

$$f(S(z)) = \prod_{T \in G} \frac{T(S(z))-a}{T(S(z))-b}$$

$$= \prod_{U \in G} \frac{U(z)-a}{U(z)-b}$$

$$= f(z)$$

ya que la correspondencia $T \longrightarrow U \circ S$ es biyección de G .

Por el teorema 4.3.1. aseguramos que por (16), como f tiene un polo simple en R (a saber en b), entonces f toma cada valor de $\hat{C}$ una sola vez en R . Ese mismo teorema nos ha obligado a contar los valores, que la función toma en los -

vértices, de una manera especial, que ahora se manifiesta de la siguiente forma.

Sea z_0 un vértice que pertenece a un ciclo de ángulo $2\pi/k$ tal que $f(z_0) = A$, supongamos que f toma en el sentido ordinario, r veces el valor A en z_0 ; el valor A es tomado r/k veces en los vértices del ciclo (sección 4.5, 2)) y como en este caso r/k es igual a 1, deducimos que f toma el valor A exactamente k veces en z_0 , es decir que

$$f(z) = A + c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots$$

De esto vemos que $f'(z)$ tiene $k-1$ ceros en z_0 , observación - de la cual nos serviremos en un momento.

Veamos ahora a (16) como una función racional en todo el plano, observamos que tiene N polos, por lo que toma cada valor N veces. Toma el valor A , solamente en el vértice z_0 , y en sus puntos congruentes k veces en cada uno. De aquí que z_0 y sus puntos congruentes forman un conjunto de N/k puntos congruentes. Con este resultado y con ayuda de la proposición 4.8.1., hemos establecido la siguiente proposición,

PROPOSICION 4.8.2. *Un punto fijo de orden k , pertenece a un ciclo de N/k puntos fijos congruentes. El orden del punto fijo es submúltiplo de N .*

Analicemos la derivada de (16); como f tiene N polos simples, su derivada f' tiene N polos de orden dos, y por lo

tanto $2N$ ceros también. Nos damos cuenta que $f'(z)$ no puede anularse en un punto finito que no sea punto fijo, ya que de otra manera $f(z)$ tomaría dos veces su valor en el punto, lo cual no es posible.

En el punto al infinito tenemos que f es de la forma

$$f(z) = c_0 + c_1/z + \dots$$

con $c_1 \neq 0$ puesto que $f(z)$ toma el valor c_0 una sola vez en el infinito, luego su derivada es de la forma

$$f'(z) = -c_1/z^2 + \dots$$

de esto vemos que $f'(z)$ tiene un cero de orden dos en el infinito, los ceros restantes son los puntos fijos, por lo tanto $2N-2$ en número.

Tenemos r conjuntos de puntos fijos congruentes, por la proposición 4.8.2. estos conjuntos consisten de $N/s_1, N/s_2, \dots, N/s_r$ puntos fijos congruentes de orden $s_1, s_2, \dots, s_r$ respectivamente.

Contando los ceros de f' e igualando a $2N-2$, tenemos

$$\sum_{i=1}^r \frac{N}{s_i} (s_i - 1) = 2N - 2$$

sea

$$\sum_{i=1}^r (1 - 1/s_i) = 2 - 2/N \quad (17)$$

Los enteros N y s_i de cualquier grupo finito deben satisfacer (17), aquí tenemos que tanto N como s_i son mayores o iguales que 2; recordamos que N/s_i es entero.

Observamos que $r > 1$, pues de lo contrario si $r = 1$,

el primer miembro de (17) es menor que uno y el segundo es mayor o igual que uno. Observamos también que $r < 4$, ya que se cumple

$$1 - \frac{1}{s_i} \geq \frac{1}{2}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^r (1 - 1/s_i) \geq r/2 \quad (18)$$

y tenemos que si $r \geq 4$ entonces (17) no se cumple para ningún $N > 1$, por lo que solamente nos queda considerar dos valores para r , los cuales son éstos:

1) $r = 2$. De (17) tenemos

$$1 - 1/s_1 + 1 - 1/s_2 = 2 - 2/N$$

luego

$$N/s_1 + N/s_2 = 2$$

de donde

$$N/s_1 = N/s_2 = 1 \quad (19)$$

En este caso N puede ser cualquier entero, los órdenes de los puntos fijos es igual a N , y los dos conjuntos de puntos fijos congruentes contienen un solo punto, (por (19)). Es claro que de entre los grupos enumerados en la sección 4.7, que satisfacen lo anterior son los grupos cíclicos de N transformaciones.

2) $r = 3$. De (17) tenemos que

$$1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 = 1 + 2/N \quad (20)$$

Para analizar este caso ordenamos los s_i de la forma $s_1 \leq s_2 \leq s_3$.

El primer miembro de (20) es mayor que 1, de donde $s_1 = 2$, de ahí que

$$1/s_2 + 1/s_3 = 1/2 + 2/N \quad (21)$$

el primer miembro de (21) es mayor que $1/2$, por lo que s_2 puede ser 2 ó 3. Si $s_2 = 2$, entonces $s_3 = N/2$. La ecuación es satisfecha sólo si N es par. Si $s_2 = 3$, entonces (21) nos queda

$$1/s_3 = 1/6 + 2/N$$

de donde $s_3 > 6$. Concluimos que s_3 puede tomar los tres valores 3, 4 ó 5, que nos dan valores enteros de N , 12, 24 y 60 respectivamente.

Encontramos que todos los subgrupos finitos de $\text{Aut}(\hat{C})$, exceptuando los grupos cíclicos, tienen tres conjuntos de puntos fijos congruentes. Resumimos la información obtenida del análisis anterior, en el siguiente cuadro

CUADRO II

s_1	s_2	s_3	N/s_1	N/s_2	N/s_3	N
2	2	n	n	n	2	$2n$
2	3	3	6	4	4	12
2	3	4	12	8	6	24
2	3	5	30	20	12	60

Si comparamos el cuadro I con el cuadro II, vemos la correspondencia que existe entre ellos. La primera posibilidad del cuadro II es la realizada en el grupo dihédrico, la

segunda, en el grupo tetrahédrico, la tercera en tanto el oc
tahédrico como el del cubo, y la última en tanto el dodecahé
drico como el icosahédrico.

4.9. DETERMINACIÓN DE TODOS LOS GRUPOS FINITOS (PARTE II)

Esta sección se concreta a demostrar el último teorema de nuestro trabajo para lo cual necesitamos saber ciertas definiciones y resultados, que damos a continuación.

Definición 4.9.1. Una *cadena* es una sucesión finita de dominios $D_0, D_1, \dots, D_n$ tal que $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Definición 4.9.2. Un *elemento de función* es un par (f, D) donde D es una región y f una función meromorfa en D .

Definición 4.9.3. Dos elementos de función (f_0, D_0) y (f_1, D_1) son *continuaciones directas* uno del otro, si $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ y si $f_0(z) = f_1(z)$ para toda $z \in D_0 \cap D_1$.

Definición 4.9.4. Sea $D_0, D_1, \dots, D_n$ una cadena que cubre a la curva γ , sean $\{f_i, D_i\}_0^n$ elementos de función tal que (f_i, D_i) es continuación directa de (f_{i-1}, D_{i-1}) para $i = 1, 2, \dots, n$ y si existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ tal que $\gamma(t_i) \in D_{i-1} \cap D_i$ y $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq D_i$, decimos que (f_n, D_n) es *continuación meromorfa* de (f_0, D_0) a lo largo de la curva γ .

Las demostraciones de los siguientes teoremas (4.9.1 y 4.9.2.) se omiten, para las cuales recomendamos ver [1], [2], [9].

TEOREMA 4.9.1. TEOREMA DE LA IDENTIDAD. Si dos funciones meromorfas f y g coinciden en una vecindad de un punto de un conjunto abierto conexo D , entonces $f = g$ en todo $D \subseteq \hat{C}$.

TEOREMA 4.9.2. TEOREMA DE MONODROMIA. Sea $D \subseteq \hat{C}$ un dominio simplemente conexo, o sea f_0 una función meromorfa en un cierto dominio abierto $D_0 \subseteq D$. Si es posible continuar meromórficamente el elemento de función (f_0, D_0) a lo largo de cualquier curva contenida en D , entonces la continuación meromorfa determina una función univaluada en D , que coincide con f_0 en D_0 .

TEOREMA 4.9.3. Los únicos grupos finitos de transformaciones bilineales que existen, son los grupos cíclicos - elípticos y los conjugados en $\text{Aut}(\hat{C})$ de los grupos poliédricos.

DEMOSTRACION:

En la sección anterior vimos que todos los grupos finitos, tienen dos o tres órbitas de puntos fijos. Vimos también que si el grupo tiene dos órbitas de puntos fijos, es un grupo cíclico elíptico, por lo que en este caso la conclusión queda demostrada, pasemos a estudiar el caso en que el grupo tiene tres órbitas de puntos fijos.

Para demostrar que cualquier grupo con tres órbitas

de puntos fijos, es el conjugado de algún grupo poliédrico, probaremos que si dos grupos tienen los mismos órdenes s_1, s_2, s_3 de los puntos fijos congruentes, uno es conjugado del otro bajo una transformación bilineal. Esto logrará demostrar lo deseado, pues todo grupo tiene los valores de s_1, s_2, s_3 expuestos en el cuadro II, y éstos corresponden a la vez a los grupos poliédricos, por la relación que hay entre el cuadro II y el cuadro I.

Sean G y G^* dos grupos finitos con tres órbitas de puntos fijos cuyos órdenes son s_1, s_2, s_3 ; ésto determina, por lo visto en el cuadro II, que G y G^* tienen el mismo número N de elementos.

Sea $E = \text{Fij}(G) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, donde E_i tiene N/s_i elementos de orden s_i , $i = 1, 2, 3$. Sea $E^* = \text{Fij}(G^*) = E_1^* \cup E_2^* \cup E_3^*$ donde E_i^* tiene N/s_i elementos de orden s_i , $i = 1, 2, 3$.

Busquemos $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ tal que $TG^*T^{-1} = G$.

Representaremos al grupo G en la esfera z y al grupo G^* en la esfera z^* , y trataremos de establecer una correspondencia entre los puntos de las dos esferas. Para ésto demos una función automorfa para cada grupo; tenemos en la sección 4.8., que G admite una función automorfa f , que toma cada valor una vez en una región fundamental. Demos f de la forma (16) donde las constantes a y b son distintas de los puntos fijos y sea $\{v_i\} = f(E_i)$ donde los v_i son distintos. Por

otra parte, sea f^* una tal función para G^* con $f^*(E_i^*) = \{v_i^*\}$ donde los v_i^* son distintos. Así por el teorema 2.5.1., sabemos que existe una transformación bilineal $L \in \text{Aut}(\hat{C})$, que lleva v_i^* en v_i , $i = 1, 2, 3$. Luego

$$L \circ f^*(E_i^*) = v_i \quad i = 1, 2, 3$$

Como f^* tiene N polos, $L \circ f^*$ tiene N polos también, por lo que f y $L \circ f^*$ toman cualquier valor de $\hat{C}$, N veces contando su multiplicidad.

Para un $z \in \hat{C}$ dado, f determina un valor en $\hat{C}$, y este valor $f(z)$, es tomado por $L \circ f^*$ en N puntos $z^* \in \hat{C}$, contando su multiplicidad. Es decir que, a cada punto de la esfera z , le corresponden N puntos de la esfera z^* , y de igual manera a cada z^* le corresponden N valores de la esfera z . Por lo que, la correspondencia que queremos establecer entre las dos esferas, la haremos resolviendo la ecuación

$$f(z) = L \circ f^*(z^*) \quad (22)$$

con $z = T(z^*)$ como una solución a (22).

En un diagrama lo anterior queda así

$$\begin{array}{ccccc} z \in \hat{C} & \xleftarrow{T} & \hat{C} & \rightarrow & z^* \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ v_i \in \hat{C} & \xleftarrow{L} & \hat{C} & \rightarrow & v_i^* \end{array}$$

Fig. (14)

Ahora chequeemos las multiplicidades con que f , f^* toman sus valores .

Si $z \notin E_i$ entonces $f(z) \neq v_i$, $i = 1, 2, 3$ y $(L \circ f^*)^{-1}(f(z))$ contiene N puntos que no están en E^* .

Si $e \in E_i$ entonces $f(e) = v_i$ para algún $i = 1, 2, 3$, los N valores correspondientes de $(L \circ f^*)^{-1}(f(e))$ caen en un conjunto de N/s_i puntos, donde cada punto toma el valor v_i , s_i veces, siendo éstos puntos los $z^* \in E_i^*$, ya que $(L \circ f^*)(E_i^*) = v_i$. De igual manera $e^* \in E_i^*$, tenemos que $(L \circ f^*)(e^*) = v_i$ y los N valores correspondientes de $f^{-1}(L \circ f^*)(e^*)$ caen en un conjunto de N/s_i puntos, donde cada uno es de multiplicidad s_i .

Puesto si f y $L \circ f^*$ están ramificados de orden s_i en los puntos de E_i , E_i^* , tenemos los siguientes desarrollos, en las vecindades de dichos puntos.

$$f(z) = v_i + c(z-e)^{s_i} + \dots \quad c \neq 0 \quad (23)$$

$$L \circ f^*(z^*) = v_i + c^*(z^*-e^*)^{s_i} + \dots \quad c^* \neq 0 \quad (24)$$

Ahora por la ecuación (22) igualamos (23) con (24) y nos queda:

$$(z-e)^{s_i} [c + \dots] = (z^*-e^*)^{s_i} [c^* + \dots];$$

extrayendo la s_i -ésima raíz obtenemos:

$$(z-e)[c^{1/s_i} + \dots] = \varepsilon_\delta (z^*-e^*)[c^{*1/s_i} + \dots]$$

con $\delta = 1, 2, \dots, s_i$, donde los ε_δ son las s_i raíces de la unidad, de aquí que tengamos s_i desarrollos en la vecindad -

de e^* .

$$z = e + \varepsilon_0 (c^*/c)^{1/s_i} (z^* - e^*) + \dots \quad (25)$$

Entonces aunque los s_i valores que toma z son iguales cuando $z^* = e^*$, pertenecen a distintos elementos de función $z^* \rightarrow z$, que satisfacen (22) cerca de e^* .

Luego tenemos que la ecuación (22) nos da en una vecindad U^* de cualquier punto $z^* \in \hat{C}$, N distintos elementos de función; es decir N funciones meromorfas $T_1, T_2, \dots, T_N$: $U^* \rightarrow \hat{C}$ tales que para toda $\zeta \in U^*$

$$f \circ T_j(\zeta) = L \circ f^*(\zeta)$$

Queremos escoger uno de éstos N elementos de función para cada z^* , de tal suerte que sean restricciones de una $T: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$, para lo cual procederemos como sigue:

Fijamos un elemento $z_0^* \in \hat{C} - E^*$ por lo que le corresponden N valores distintos de z , escogemos un z_0 de éstos, arbitrario. Fijamos un elemento de función T_0 en una vecindad U_0^* de z_0^* tal que $T_0(z_0^*) = z_0$. Tomamos cualquier $z^* \in \hat{C}$ y cualquier curva γ^* que una z_0^* con z^* , veremos que T_0 admite continuación meromorfa por cualquier curva $\gamma^* \subset \hat{C}$, que empiece en z_0^* :

Como γ^* es compacta (cerrada y acotada), podemos cubrir la por una cadena $U_0^*, U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*$ donde están definidos los N elementos de función (25), tal que $z_0^* \in U_0^*$ y $z^* = z_n^* \in U_n^*$ y que satisface $\gamma^*(t_j) \in U_{j-1}^* \cap U_j^*$ y $\gamma^*([t_j, t_{j+1}]) \cap U_j^*$.

Sea $z_1^* = \gamma^*(t_1)$. Los N elementos de función que son soluciones de (22) en una vecindad de z_1^* , son restricciones de los N tales elementos con dominio en U_0^* , por lo tanto uno de ellos es restricción de (T_0, U_0^*) a la vecindad de z_1^* . Por otra parte, ésta restricción es exactamente uno de los elementos correspondientes a U_1^* , dicho elemento lo llamaremos (T_1, U_1^*) que es continuación meromorfa directa de (T_0, U_0^*) . Luego se escoge (T_2, U_2^*) que sea continuación meromorfa directa de (T_1, U_1^*) , y continuamos extendiendo de esa manera a lo largo de γ^* , es decir que (T_j, U_j^*) es continuación directa de (T_{j-1}, U_{j-1}^*) , y por lo tanto (T_0, U_0^*) admite continuación meromorfa a lo largo de γ^* .

Ahora bien, como $\hat{C}$ es simplemente conexo (sección 0.5) y (T_0, U_0^*) , $U_0^* \subseteq \hat{C}$, admite continuación meromorfa a lo largo de γ^* , por el teorema de monodromía existe una función meromorfa $T: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$, a la cual a cada z^* le corresponde un z .

Notemos que T_0 es invertible y aplicando lo anterior a su inversa T_0^{-1} , que está definida en $U_0 = T_0(U_0^*)$, obtenemos por el teorema de monodromía una extensión $\hat{T}$ de T_0^{-1} con $\hat{T} \circ T|_{U_0^*} = (T_0^{-1})(T_0) = \text{identidad}$, luego por el teorema 4.9.1. $\hat{T} \circ T = \text{identidad}$ en todo $\hat{C}$. O sea T es invertible.

Como T es meromorfa, por el teorema 2.1.2., tenemos que T es racional, y por ser biyectiva tiene un solo polo y un solo cero, por lo que es de la forma (11) en 0.4., o sea $T \in \text{Aut}(\hat{C})$.

Por su construcción la transformación T , lleva los puntos fijos de G^* en los puntos de G : es más $T(E_\lambda^*) = E_\lambda$. Si conjugamos el grupo G^* (ejemplo 9 de 1.5) obtenemos un grupo $G' = TG^*T^{-1}$ tal que $\text{Fij}(G') = E = \text{Fij}(G)$.

Probaremos que $G' = G$, con lo que el teorema queda de mostrado, en efecto:

Sea $e \in E$ un punto fijo común de $g \in G$ y $g' \in G'$, - sea e_1 el otro punto fijo de g . Combinamos de todas las maneras posibles los elementos g, g' , y formamos un grupo r que deja a E invariante (proposición 1.2.1 a)), luego por la proposición 2.6.1. r es finito, y por el teorema 3.6.2. tenemos que g' fija a e_1 también.

Así todo elemento de G' que fija a e , fija a e_1 también por lo que

$$\text{Est}_G(e) = \text{Est}_G(e_1) \quad \text{y} \quad \text{Est}_{G'}(e) = \text{Est}_{G'}(e_1)$$

Estos estabilizadores son cíclicos del mismo orden s y tienen los mismos multiplicadores $K_j^{\pm 1} = e^{j2\pi i/s}$ por lo tanto por la proposición 3.1.1 afirmamos que

$$\text{Est}_G(e) = \text{Est}_{G'}(e)$$

luego

$$G = \bigcup_{e \in E} \text{Est}_G(e) = \bigcup_{e \in E} \text{Est}_{G'}(e) = G'.$$

APENDICE

GEOMETRIAS NO-EUCLIDEANAS

1). En la *Geometría Euclídeana* estudiamos a C y sus isometrías, es decir las transformaciones T , tales que $d(z_1, z_2) = d(Tz_1, Tz_2)$, (donde d está definida en la sección 0.5.), dichas isometrías pertenecen al grupo $\text{Aut}(\hat{C})$, y pueden ser representadas como producto de traslaciones y rotaciones, la forma analítica de éstas isometrías en el plano euclídeano es

$$T(z) = az + b \quad \text{con} \quad |a| = 1$$

y si la isometría no preserva la orientación

$$T(z) = a\bar{z} + b \quad \text{con} \quad |a| = 1$$

Es claro ver que cualquier isometría del plano manda líneas euclídeanas en líneas euclídeanas.

Por costumbre se ha reservado el nombre de *geometrías no-euclídeanas*, para las que conservan todos los postulados de Euclides menos uno de ellos, el quinto, el llamado postulado de las paralelas.

Como el quinto postulado, en la forma dada por Euclides u otra equivalente, como:

" Por un punto exterior a una recta, pasa una y sólo una paralela";

no se deduce de los otros, el hecho de negarlo aceptando los

demás, no debe conducir a contradicción alguna. Esta fué la idea que maduró en la primera mitad del siglo XIX, y que dió por resultado el nacimiento de las geometrías no-euclídeanas, como ejemplo tenemos las siguientes.

2). La *geometría no-euclídeana elíptica*, la cual resulta de sustituir el postulado de las paralelas por el siguiente:

" Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela";

es la geometría sobre la esfera de Riemann, donde se consideran como rectas las circunferencias máximas. Solamente hay que convenir, para evitar que dos rectas se corten en dos - puntos diferentes, que los puntos diametralmente opuestos - sean un solo punto; y donde se tiene una definición natural de longitud, junto con el hecho de que la longitud de una línea es finita.

El grupo $\text{Aut}(\hat{C})$ contiene al grupo $\text{Rot}(\Sigma_0)$ de movi- - mientos rígidos, definidos en ésta geometría, que son las rotaciones de la esfera y que como vimos anteriormente, (prop. 3.6.1.), son las $T \in \text{Aut}(\hat{C})$, tal que T es elíptica, y donde sus puntos fijos van a los extremos de un diámetro bajo la proyección estereográfica.

En el espacio elíptico, nuestro último teorema (4.9.3) aparece de una forma más completa, a saber:

TEOREMA: *Todo grupo finito G de isometrías del espacio elíptico, es cíclico o poliédrico.*

DEMOSTRACION:

Buscamos un poliedro $\bar{X}$ inscrito en Σ_0 , tal que G sea la colección de rotaciones de $\bar{X}$.

Debido que a las rotaciones de la esfera corresponden, bajo la proyección estereográfica, transformaciones bilineales del plano, tenemos que G corresponde a un $G_0 \subset \text{Aut}(\hat{C})$ y sabemos por el teorema 4.9.3. que, G ó es cíclico ó - - $G_0 = TG'_0T^{-1}$, donde $T \in \text{Aut}(\hat{C})$ y donde G' comprende los elementos de $\text{Aut}(\hat{C})$ que corresponden a las rotaciones de algún poliedro $\bar{X}'$.

Tomamos dos ejes de rotación de $\bar{X}'$, T manda sus extremos en pares de puntos opuestos, por la proposición 3.6.3, T corresponde a una rotación $\hat{T}$ bajo la proyección estereográfica, luego $G = \text{Rot}(\bar{X})$ con $\bar{X} = \hat{T}(\bar{X}')$.

3). La más rica de las tres geometrías en la geometría no-euclídeana hiperbólica, la cual resulta de sustituir el postulado de las paralelas por el siguiente:

" Por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas".

El grupo $\text{Aut}(\hat{C})$ abarca también al grupo de movimientos rígidos definidos en esta geometría cuyas características son:

a) El plano hiperbólico H^2 :

$$H^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$$

b) Las rectas serán las semicircunferencias cuyo centro está en $\mathbb{R}$, y como caso límite las rectas perpendiculares a $\mathbb{R}$. Las rectas en H^2 serán llamadas *geodésicas*, para no confundirlas con las rectas de $\mathbb{C}$.

c) $\text{Aut}(H^2) = \{T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : T(H^2) = H^2\}$, es decir que cada $T \in \text{Aut}(H^2)$ es de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad-bc = 1, \quad a, b, c, d, \in \mathbb{R}.$$

De la propiedad homocíclica y la conformidad de las transformaciones de Möbius deducimos que cada $T \in \text{Aut}(H^2)$ -- manda geodésicas en geodésicas, puesto que la imagen de una geodésica es a la vez un arco circular y una curva ortogonal a $\mathbb{R}$.

d) La distancia entre dos puntos z_1, z_2 en H^2 está dada -- por la fórmula

$$d(z_1, z_2) = \log(z_1^*, z_1, z_2, z_2^*)$$

donde los puntos $z_1^*, z_2^* \in \mathbb{R}$, son los extremos de la geodésica que pasa por z_1, z_2 , y donde z_1^*, z_1, z_2, z_2^* están dados cíclicamente sobre un círculo. Probaremos que $d(z_1, z_2) \geq 0$. En secc. 2.6 vimos que:

$$(z_1^*, z_1, z_2, z_2^*) = (A(z_1^*), 1, 0, \infty)$$

donde $A \in \text{Aut}(\hat{C})$ satisface $A(z_1) = 1$, $A(z_2) = 0$, $A(z_2^*) =$

Notemos que si $w_1 = T(z_1)$, $w_2 = T(z_2)$ entonces $w_1^* = T(z_1^*)$, $w_2^* = T(z_2^*)$. Esto se justifica debido a que: $T \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ luego $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, por lo que $T(z_1^*)$, $T(z_2^*) \in \hat{\mathbb{R}}$, y por ser T un mapeo conforme el semicírculo que contiene a z_1^* , z_1 , z_2 , z_2^* es enviado en el semicírculo que contiene a $T(z_1^*) = w_1^*$ y $T(z_2^*) = w_2^*$.

Sea $r = A(z_1^*)$. Luego

$$\begin{aligned} \log(z_1^*, z_1, z_2, z_2^*) &= \log(r, 1, 0, \infty) \\ &= \log(r). \end{aligned}$$

Como z_1^* , z_1 , z_2 , z_2^* están acomodados cíclicamente, tenemos que $r > 1$, por lo que $d(z_1, z_2) > 0$.

Por la invariancia de la razón cruzada y el hecho de que $T \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ envía los extremos de la geodésica que contiene a z_1 , z_2 en los extremos de la geodésica que contiene $T(z_1)$, $T(z_2)$, justificamos la siguiente propiedad de la distancia:

$$d(z_1, z_2) = d(Tz_1, Tz_2)$$

Con esto vimos que el grupo $\text{Aut}(\hat{C})$, nos es de gran utilidad para el estudio de las geometrías.

ref. [10], [11].

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ahlfors, Lars Valerian Complex Analysis. 3a. ed. New York. McGraw-Hill Book Company, 1979.
- [2] Conway, John B. Functions of one Complex Variable. 2nd. ed. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1978.
- [3] Ford, Lester R. Automorphic Functions. 2nd. ed. New York, Chelsea Publishing, Co., 1951.
- [4] Gallo, Daniel Geometrías No-Euclideanas. México, Depto. de Matemáticas, CINVESTAV, 1983.
- [5] Hernan, O'Brien Estructuras algebraicas III, Monografía # 14, Depto. de Asuntos Científicos de la Sria. Gral. de la OEA, Washington, D.C., 1973.
- [6] Heirstein, I.N. Algebra Moderna. 1a. ed. México, Trillas, 1979.
- [7] Jacobson, Natan Basic Algebra. San Fco. W.H. Freeman and Co., 1974.
- [8] Lehner, Joseph Discontinuous Groups and Automorphic Functions. Providence, Rhode Island American Mathematical Society, 1964.

- [9] Markushevich, A. Teoría de las Funciones Analíticas. Tomo I. Segunda Edición. Editorial MIR, Moscú, 1978.
- [10] Sansone Giovanni Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable. Vol. I y II. Netherland, Wolters-Noordhoff, 1969.
- [11] Santaló, Luis A. Geometrías No-Euclidianas. 3a. Ed. 45 Cuadernos de Eudeba. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1966.