

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, Mexico, siendo las 18:00 Horas del dia 11 de abril de 1986, se reunieron en el aula Didáctica del Departamento de Matemáticas de la universidad de Sonora los Señores:

- RUBEN FLORES ESPINOZA
- OSCAR MARIO RODRIGUEZ SANCHEZ
- JACOBO G. NUÑEZ URIAS

bajo la presidencia del primero y fungiendo como secretario el último para efectuar el examen profesional de la Carrera de Licenciado en Matemáticas al Señor

JESUS FRANCISCO HERNANDEZ AGUILAR.

Después de haber presentado su tesis intitulada "TEORIA DE CATASTROFE"

la cual fue previamente aprobada por el jurado

Los Señores Sinodales replicaron al sustentante y después de debatir entre sí reseñada y libremente lo declararon

APROBADO POR UNANIMIDAD.

Acto Continuo el presidente del jurado le hizo saber el resultado de su examen y para Constancia se levanta la presente que firman los que han intervenido.

Ruben Flores E
Presidente

Jacobo Nuñez U.

[Signature]



Acta N° 28
foja 27
Libro 01

752084

[Signature]
Firma del
Sustentante.

Michoacan y Valeroso 111
14 de Abril

B. ET

Ileis Fco Hernandez
Dir. do. Dr. Ruben

INTRODUCCION

Flore E.
teoria de catastrofe
1986.

Existen en la naturaleza una inmensa cantidad de fenómenos que presentan cambios bruscos en su comportamiento. Por ejemplo tomemos un fenómeno que ^{da} en la economía de un sistema competitivo donde aparecen varios centros de actividad económica con actitudes distintas entre ellas a los cuales llamaremos competidores y a un grupo de consumidores al que nombraremos demanda.

En la configuración del mercado donde la demanda y el número de competidores se mantiene fija el precio tiende a ser estable y puede ser considerado como punto crítico de una función $f(x,u,v)$.

Pero si únicamente el número de competidores se mantiene fijo y la demanda crece o disminuye, el precio del producto tiende a subir o a bajar de una manera suave, de otra manera si la demanda es lo que se mantiene fijo y el número de competidores es el que varía el precio también varía dependiendo si el No. de consumidores crece o disminuye, es decir el precio bajará si el No. de competidores aumenta y subirá si el número de consumidores disminuye y también de una manera suave. Ahora si variamos tanto la demanda como el número de competidores se tendrá lo siguiente: Si la demanda disminuye y el número de competidores aumenta el precio del producto baja y si la demanda crece y el número de competidores baja el precio sube pero esta alza y baja de precios se hace de una forma brusca.

El modelo matemático que asemeja en cierta medida a un fenómeno bajo esas condiciones esta dada por una función de la forma $f(x,u,v) = x^4 + ux^2 + vx$. El ~~valor crítico del~~ precio se obtiene precisamente donde $f(x,u,v)$ tiene sus puntos críticos, es decir donde $\frac{df}{dx} = 4x^3 + 2ux + v = 0$ por

$$\text{lo que } p(u,v) = \sqrt[3]{-\frac{v}{8} + \frac{v^2}{64} + \frac{u^3}{216}} + \sqrt[3]{-\frac{v}{8} - \frac{v}{8} + \frac{u^3}{216}}$$

Se puede decir que en aquellas situaciones en las que el precio baja o sube de una manera estable es en los puntos críticos no degenerados de $f(x,u,v)$ mientras que si el cambio es dado bruscamente este corresponde a los puntos críticos degenerados.

La teoría de la catástrofe estudia precisamente aquellas situaciones en las que movimientos suaves en los parámetros de control (demanda y número de competidores en el ejemplo) originan cambios bruscos en los parámetros de comportamiento (precio), es decir el comportamiento de funciones alrededor de puntos críticos degenerados.

En el capítulo I se estudia el comportamiento de las funciones alrededor de puntos críticos no degenerados y degenerados. Para el estudio de los primeros se hará uso la teoría de Morse la cual prueba que aquellas funciones cuyos puntos críticos son no degenerados son estables y el que el conjunto formado por tales funciones es denso. En el estudio de los segundos es decir en puntos críticos degenerados se utiliza el lema de Separación el cual permite a una función separarla en dos una de Morse y una degenerada y esta última nos da el comportamiento de la función alrededor del punto.

~~En el capítulo II nos concentraremos al estudio de familia de fun~~
~~ciones estables que nos da las herramientas necesarias para comprender~~
 el concepto de despliegue. Concepto que será definido en el capítulo III y el cual nos permite conocer todas las definiciones posibles que puede tener una función cuando se analiza alrededor de un punto crítico degenerado y concluir el capítulo III con el teorema de clasificación de Thom que nos dice que si tiene una función k -determinada es decir una función en que su comportamiento topológico pueda ser determinado por su polinomio de Taylor hasta de grado k y de codimensión ≤ 4 existen siete

despliegues universales es decir despliegues en los que intervienen un mínimo de parámetros. Cualquier fenómeno en la naturaleza que presente cambios bruscos en su comportamiento puede ser analizado utilizando cualquiera de los siete despliegues universales catástrofe, dependiendo este del número de variables de control y variables de comportamiento.

Finalmente en el capítulo IV se dará la interpretación geométrica de los siete modelos, haciendo énfasis en los dos primeros dado que es más fácil la visualización de dichos modelos.

CAPITULO 1

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función potencial y considérese $X = \nabla f(x)$ el gradiente de la función. Se dice que un punto es punto de equilibrio de una función cuando $\Delta f(x) = 0$. Trataremos de estudiar el comportamiento de la función en tales puntos conocidos como singularidades de las cuales se tienen dos tipos:

- a) Los puntos críticos no degenerados que son aquellos en los que $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \neq 0$.
- b) Los puntos críticos degenerados es decir aquellos en los que $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = 0$.

Si lo que se tiene son puntos críticos no degenerados, se puede hacer un cambio local de coordenadas de tal manera que la función tome la forma $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2$ (1). A r se le conoce como el índice de la función y existe un tipo básico para cada $r = 0, 1, \dots, n$. Todas las funciones que toman la forma (1) se les conoce como funciones de Morse y dan el comportamiento de la función alrededor de un punto crítico no degenerado. También una propiedad que guardan las funciones de Morse es la estabilidad, es decir si tomamos g

una pequeña perturbación suficientemente cercana a un punto y derivadas de f , entonces g toma la forma (1).

Por otro lado si se tienen puntos críticos degenerados, se puede utilizar el lema de Separación que permite separar a función en dos funciones, una de morse y una no de morse, la primera contiene variables llamadas no esenciales y la otra esenciales. Estas últimas nos dicen como es el comportamiento de la función para puntos críticos degenerados.

La propiedad de estabilidad referida anteriormente puede ser vista algebraicamente, pero se hace más clara si se formula como una propiedad geométrica transversal. Esto nos lleva a una discusión de transversalidad, concepto que introducido por Rene Thom ya que ayudó en gran medida a crear la teoría de la catástrofe.

1.1 PUNTOS CRITICOS Y EL LEMA DE MORSE

Definición 1.1. Sea f un mapeo diferenciable de M a N , donde M y N son variedades diferenciables. Un punto $X_0 \in M$ es un *punto singular* de f si el rango $Df(X_0) < \min \{ \dim M, \dim N \}$. De otra manera, X_0 es llamado un *punto regular* de f . Para funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a los puntos singulares se les llama puntos críticos.

EJEMPLOS:

- (1.1) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dado que $Df(x)$ tiene matriz $(2x)$ la cual tiene rango 1 si y sólo si $x \neq 0$, entonces el único punto singular de f es 0.
- (1.2) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$. Entonces la matriz jacobiana es $(4x, 6y)$ la cual tiene rango 1 a menos que $x = y = 0$, por lo cual $(0,0)$ es un punto singular.
- (1.3) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (xy, xz)$. El jacobiano de f es $\begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & x \end{pmatrix}$ el cual tiene rango 2 a menos que todos los menores 2×2 sean cero, es decir que $xz = xy = x^2 = 0$ lo cual es equivalente a $x=0$ por lo que $(0,y,z)$ es un punto singular.

Definición 1.2. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Un punto \bar{x}_0 en \mathbb{R}^n es un punto crítico no degenerado si x_0 es un punto singular de f y el Hessiano es no singular es decir, el determinante de la matriz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad i, j \in n$$

evaluado en \bar{x}_0 , es diferente de cero.

EJEMPLOS:

(1.4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$ tiene un punto crítico no degenerado en $x = -1$.

(1.5) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^4$ tiene un punto crítico degenerado en $x = 0$.

(1.6) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = x^2 + 4xy + xy^2$ tiene un punto crítico no degenerado en $(x, y) = (0, 0)$.

Definición 1.3. Una función suave $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse si todos sus puntos singulares son puntos críticos no degenerados.

~~Ahora que se han definido las funciones de Morse, se puede dar un resultado importante de la teoría de Morse, el lema que lleva su nombre, el cual nos dice como es el comportamiento de una función alrededor de un punto crítico no degenerado, pero antes veamos el siguiente lema.~~

Lema 1.1. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave en una vecindad de 0 con $f(0) = 0$. Entonces en una posible pequeña vecindad, existen funciones $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f: \sum_{i=1}^n x_i g_i$$

donde cada g_i es suave y

$$g_i(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0$$

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx_1, \dots, tx_n)) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{(tx_1, \dots, tx_n)} \cdot x_i dt \end{aligned}$$

Si de aquí se define

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{(tx_1, \dots, tx_n)} dt$$

diferenciando parcialmente con respecto a x_i se muestra que

$$g_i(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0$$

Q.E.D.

TEOREMA 1.1, (Lema de Morse). Sea u un punto crítico no degenerado de una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces existe un sistema local de coordenadas (y_1, y_2, \dots, y_n) en una vecindad U de u , con $y_i(u) = 0$ para toda i , tal que

$$f = f(u) - y_1^2 - \dots - y_\ell^2 + y_{\ell+1}^2 + \dots + y_n^2$$

para toda $y \in U$.

PRUEBA: Se puede trasladar el origen a u y de aquí suponer que $u=0$ y $f(u) = f(0) = 0$. Por el lema 1, se puede entonces escribir

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

en alguna vecindad de 0 . Dado que 0 es un punto crítico, se tiene que

$$g_i(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = 0$$

De aquí usando el lema 1 de nuevo, existen funciones suaves h_{ij} tal que

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x)$$

y $f(x)$ se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x)$$

si reemplaza h_{ij} por

$$\hat{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$$

la ecuación sigue siendo verdadera y además $\hat{h}_{ij} = \hat{h}_{ji}$.

Derivando parcialmente (1) dos veces, se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 = 2 \hat{h}_{ij}(0)$$

y que la matriz

$$[h_{ij}(0)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

es no singular dado que 0 es un punto crítico no degenerado.

Supóngase inductivamente que existen coordenadas locales u_1, u_2, \dots, u_n en una vecindad U_1 de 0 tal que

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n)$$

donde $H_{ij} = H_{ji}$. Por un cambio lineal en las r coordenadas finales, se puede suponer que $H_{rr}(0) \neq 0$. Sea

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sqrt{|H_{rr}(u_1, u_2, \dots, u_n)|}$$

Por el teorema de la función inversa, esta es suave en alguna vecindad U_2 de 0 contenida en U_1 .

Cambiando coordenadas a V_1, \dots, V_n definida por

$$\begin{aligned} V_i &= U_i \quad (i \neq r) \\ V_r &= g(U_1, \dots, U_n) \left(U_r + \sum_{i > r} \frac{u_i H_{ir}(U_1, \dots, U_n)}{H_{rr}(U_1, \dots, U_n)} \right) \end{aligned}$$

la cual, de nuevo usando el teorema de la función inversa, es un difeomorfismo local. Ahora

$$f(v_1, \dots, v_n) = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2 + \sum_{i,j=r+1}^n v_i v_j H_{ij}^1, (v_1, \dots, v_n)$$

una fórmula semejante como para las u_i , pero con r sustituido por $r+j$. De aquí por inducción se obtiene la conclusión del teorema.

Una función de la forma

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-l}^2 - z_{n-l+1}^2 \dots - z_n^2$$

es llamada una l -silla de morse. De aquí el lema de Morse implica que cada punto crítico no degenerado puede ser transformado por un difeomorfismo a una l -silla de Morse para algún l . Cuando $l=n$ se tiene un máximo, cuando $l=0$ un mínimo.

1.2 ESTABILIDAD DE FUNCIONES

Existen funciones las cuales con pequeñas perturbaciones que se le hagan alrededor de un punto crítico, el comportamiento cualitativo de dichas funciones variará notablemente, a este tipo de funciones se les dice inestables.

Considérese por ejemplo la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y sumémosle el término $2\epsilon x$ para ϵ suficientemente pequeño y obtendremos una nueva función

$$F(x) = f(x) + 2\epsilon x = x^2 + 2\epsilon x$$

véase que $F(x)$ no varía no importa como se tome (fig. 8), el comportamiento de $F(x)$ y $f(x)$ alrededor de $x = -\epsilon$ (punto crítico no degenerado) será cualitativamente el mismo

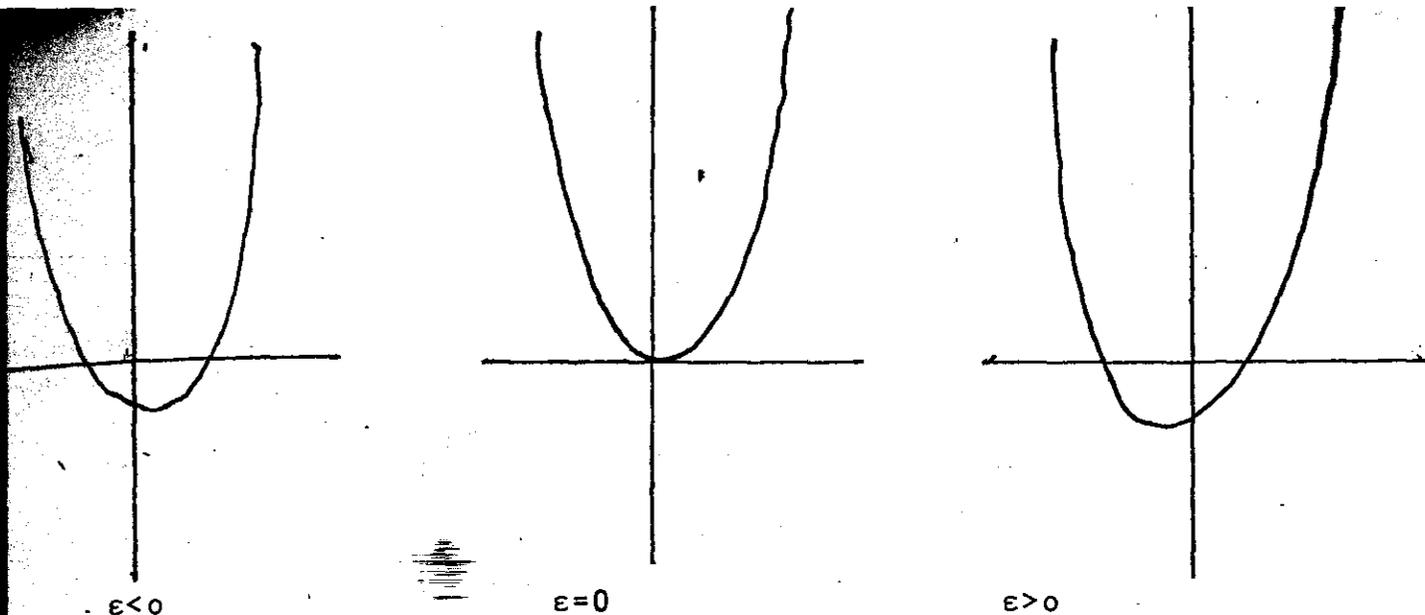


Fig. 8

Por lo que $f(x)=x^2$ es estable.

Por otra parte veamos $g:R \rightarrow R$, $g(x)=x^3$.

Hagamos lo mismo que en ejemplo anterior pero sumando ϵx , obtendremos $G(x)=g(x)+\epsilon x = x^3+\epsilon x$ la cual asume diferentes tipos topológicos para $\epsilon < 0$, $\epsilon > 0$ y $\epsilon = 0$.

Para $\epsilon < 0$ se obtienen dos puntos críticos un máximo y un mínimo en una pequeña vecindad de $0 \in R$, mientras que para $\epsilon > 0$ ninguno se obtiene, de ahí que $g(x)=x^3$ es inestable.

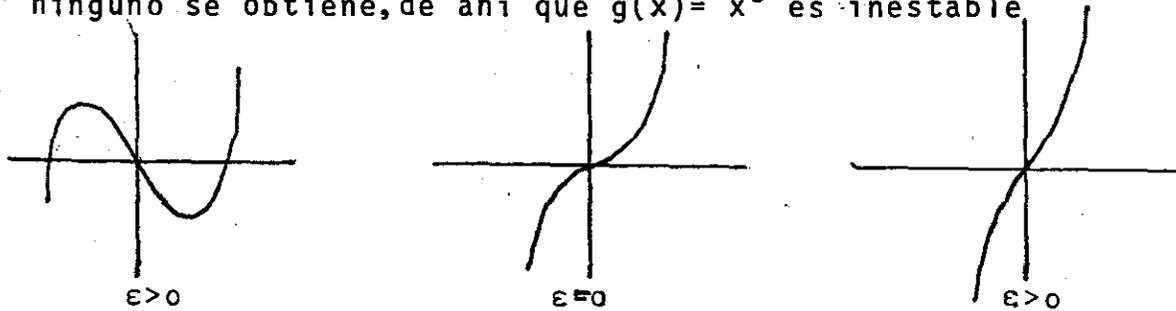


Fig. 9

Intuitivamente diremos que una función f es *estable* si para todas las funciones suficientemente pequeñas p , los puntos críticos de f y $f+p$ son del mismo tipo; o en otras palabras si f y $f+p$ son equivalentes después de una apropiada translación del origen.

El ejemplo estandar de una función inestable es $f(x)=x^3$, dado que para cualquier $\epsilon \neq 0$, pequeño, $g(x)=x^3+\epsilon x$ es cercano pero no equivalente a $f(x)$ (fig. 9)

Definición 1.2.1. Dos mapeos f y g en $C^k(M,N)$ son equivalentes (o estrictamente hablando C^k - equivalentes) $f \sim g$, si existen C^k -difeomorfismos (en el caso de $k=0$ son homeomorfismos)

$h_1: M \rightarrow M$ y $h_2: N \rightarrow N$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\
 M & \xrightarrow{g} & N
 \end{array}$$

conmuta. Así f es estable (en el sentido global) si la clase de equivalencia de f contiene una vecindad de f en la C^k -topología.

Definición de estabilidad local 1.2.2. Un C^k -mapeo $f: R^n \rightarrow R^m$ es estable en un punto p si existe una vecindad U de p con la si-

guiente propiedad: para cualquier vecindad U' de p con $u \in CU$ y para cualquier pequeña C^k -perturbación g de f , existe un punto $p' \in U'$ y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (R^n, p) & \xrightarrow{f} & (R^m, f(p)) \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\
 (R^n, p') & \xrightarrow{g} & (R^m, g(p'))
 \end{array}$$

donde h_1, h_2 son C^k -difeomorfismos locales, en p y $f(p)$ respectivamente.

El resultado principal de la teoría de Morse es que las funciones de Morse son *localmente estable*. Específicamente si f tiene una singularidad no degenerada en $X_0 \in R^n$ y si g es suficientemente cercano a f , entonces g se mira como f cercano a X_0 ; ~~esta también tiene una singularidad no degenerada en~~ algún punto X_0' cercano a X_0 .

La importancia de este resultado depende por supuesto de cuantas funciones de Morse existan. La respuesta es simple y fortuita "al menos cada" función es una función de Morse.

Resumamos estos dos conceptos de la teoría de Morse con el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2:

- (1) Las funciones de Morse sobre R^n son (localmente) estables en sus puntos críticos no degenerados.
- (2) El conjunto de las funciones de Morse es denso en $C^\infty(R^n, R)$.

La demostración puede verse en [10]

La importancia de este teorema estriba que al menos todas las funciones son de Morse y de ahí estables (localmente). Entonces para conocer si una función es estable o no, basta con saber si es de Morse; es decir conocer de que tipo son sus singularidades.

1.3 LEMA DE SEPARACIÓN

Una mejor versión del lema de Morse que permite algo más es el lema de separación (o lema de reducción) el cual bajo ciertas circunstancias permite una reducción en el número de variables en el problema. En otras palabras el lema de sepa-

ración nos permite "separar" una función alrededor de un punto crítico degenerado en una pieza de Morse sobre un conjunto de "variables no esenciales" y una pieza degenerada sobre un conjunto de "variables esenciales" que envuelven la inestabilidad estructural, por lo tanto nos concentramos en las segundas e ignoramos las primeras, de ahí la reducción.

TEOREMA 1.3. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, con $Df(0)=0$ cuyo Hessiano en 0 tiene rango r (y corango $n-r$). Entonces f es equivalente, alrededor de 0 a una función de la forma

$$\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 + \hat{f}(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

donde

$$\hat{f}: \mathbb{R}^{n-r} \rightarrow \mathbb{R}$$

es suave.

PRUEBA: Por un cambio lineal de coordenadas $u=u(x)$ podemos transformar el Hessiano de f en 0 a la forma

$$\phi(u_1, \dots, u_n) = (u_1 + g_1(u_{r+1}, \dots, u_n), \dots$$

$$\dots, u_r + g_r(u_{r+1}, \dots, u_n); u_{r+1}, \dots, u_n).$$

Sea $F = f \circ \phi$. Localmente cada función

$$F(u_{r+1}, \dots, u_n): \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_1, \dots, u_r) \rightarrow F(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

tiene un punto crítico de Morse en el origen de \mathbb{R}^r , aunque no necesariamente toma el valor de cero en ese punto. Escribamos

$$\hat{f}(u_{r+1}, \dots, u_n) = F(0, \dots, 0, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

Ahora ~~el argumento que aparece en la primera parte de~~ la prueba del lema de Morse (después de generalizar el lema al caso donde f se anula a lo largo de un multieje) para escribir:

$$F(U) = \hat{f}(u_{r+1}, \dots, u_n) + \sum_{k, m < r} u_k u_m h_{km}^{(u_{r+1}, \dots, u_n)}(u_1, \dots, u_r).$$

donde para cada elección de u_{r+1}, \dots, u_n la función

$$h_{km}^{(u_{r+1}, \dots, u_n)} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$$

es suave. El resto de la prueba del lema de Morse, se aplica en una manera (u_{r+1}, \dots, u_n) - dependiente para esta expresión, reduce F a la forma

$$\hat{f}(u_{r+1}, \dots, u_n) \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2$$

y prueba el teorema. En esencia, el proceso entero de reducción a la forma usada para probar el lema de Morse dependen suavemente sobre u_{r+1}, \dots, u_n , de nuevo el arreglo inicial ha sido hecho. Q.E.D.

Este teorema dice en un sentido fuerte, que el comportamiento de una función cercano a un punto crítico degenerado se puede encontrar, estudiando una función que envuelva un número de variables igual al corango del Hessiano. Así un punto crítico de una función de 2001 variables de corango 3, requiere únicamente del estudio de una función de tres variables.

Esta reducción a un número pequeño de variables, es lo que hace al Lema de Separación útil y sorprendente.

1.4 TRANSVERSALIDAD

Los puntos críticos de Morse tienen una importante propiedad de estabilidad, lo cual puede ser establecida simplemente como "la preservación topológica bajo pequeñas perturbaciones". Esta propiedad puede mirarse de una forma algebraica, pero se hace más clara si se formula como una propiedad geométrica transversal. Esto lleva a una discusión general de transversalidad, la cual es discutida primero para espacios vectoriales y generalizado para variedades suaves.

Dos subespacios U, V de R^n son transversos si se intersectan en un subespacio cuya dimensión es lo más pequeña posible. Si $\dim U = s$ y $\dim V = t$ entonces su dimensión mínima es

$$\max(0, s+t-n)$$

por ejemplo, dos planos en R^3 son transversos si se unen en una línea (o equivalentemente, no coinciden), porque

$$\max(0, 2+2-3) = 1$$

un subespacio de 4 dimensiones y un subespacio de dimensión 6 de R^7 son transversos si se unen en un subespacio de dimensión

$$\max(0, 4+6-7) = 3$$

por otra parte dos subespacios unidimensionales de R^3 son transversos si se unen en un subespacio de dimensión

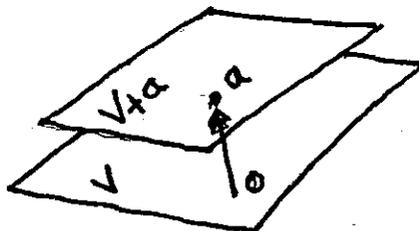
$$\max(0, 1+1-3) = 0$$

esto es un punto (propriadamente el origen). Equivalentemente U y V son transverso si y sólo si U y V conjuntamente generan a \mathbb{R}^n .

Ahora se generalizará para subespacios afin; los subespacios vectoriales trasladados lejos del origen. Específicamente, un subespacio afin de \mathbb{R}^n es un subconjunto de la forma

$$X = V+a = \{v+a \mid v \in V\}$$

donde a es un elemento fijo de \mathbb{R}^n y V es un subespacio (fig. 1). La dimensión de X se define como la de V



(Fig. 1)

Sean X y Y subespacios afin de \mathbb{R}^n de dimensiones s, t respectivamente. Ellos se unen transversalmente si

a) Su intersección $X \cap Y$ es vacía o

b) $s+t > n$ y $\dim X \cap Y = s+t-n$

La figura 2 muestra algunas intersecciones típicas en \mathbb{R}^3 , estableciendo cuales son transversas

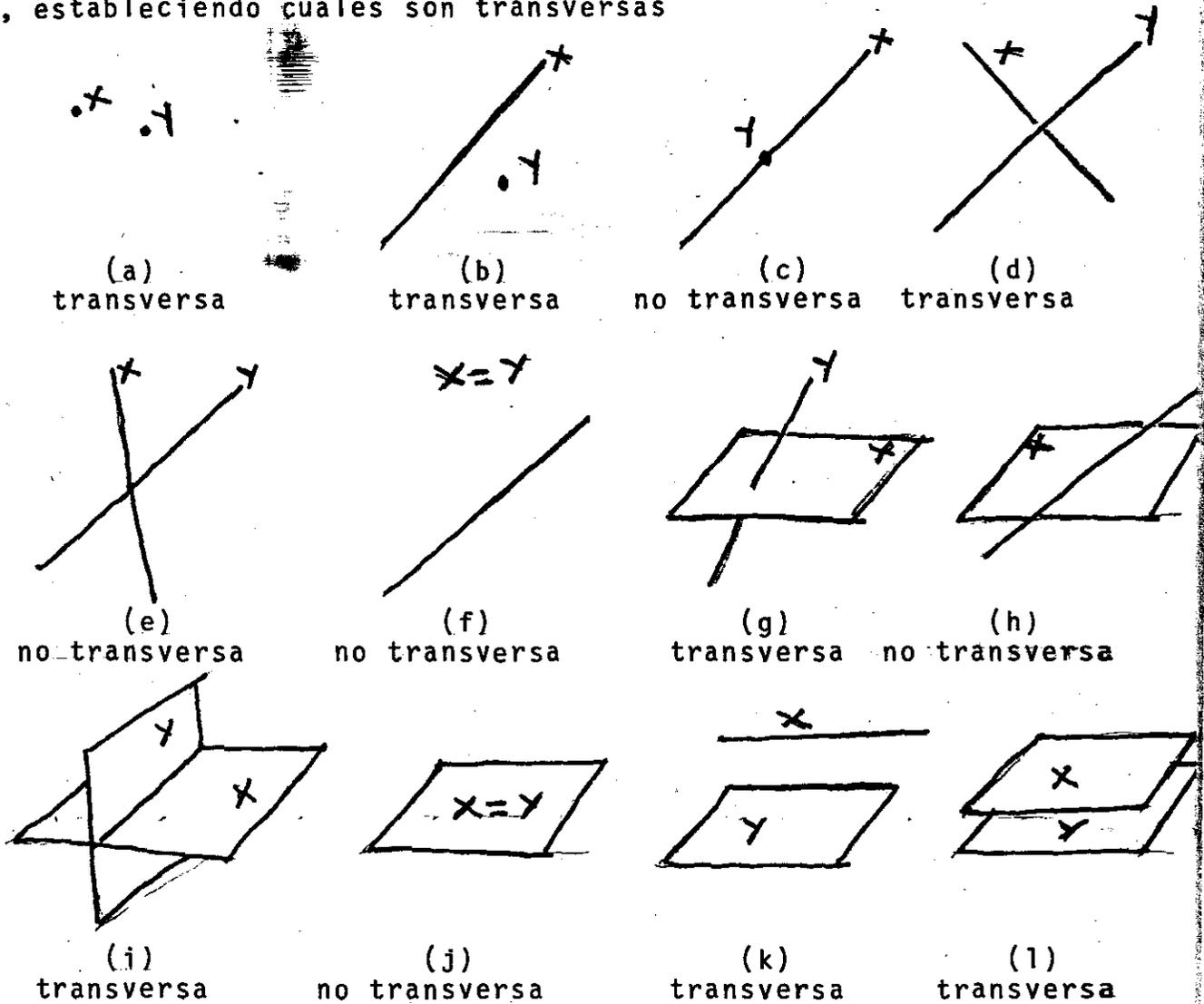


Fig. 2

Nótese que la transversalidad depende de la dimensión del espacio circundante, por ejemplo las figuras 4.5(a), (h) y (j) podrían ser intersecciones transversas en \mathbb{R}^2 .

Ahora véase la definición para variedades. Dos subvariedades de \mathbb{R}^n se unen transversalmente en un punto dado a condición de que no se intersectan o sus hiperplanos tangentes afin se intersectan transversalmente. A diferencia de aquellos subespacios afin, estas tangentes pueden coincidir para variedades las cuales se unen en puntos aislados.

Por ejemplo las curvas (j-variedades) $y=0$ y $y=x^3$ en \mathbb{R}^2 no son transversa en cero, aún cuando este sea un punto aislado de intersección, dada que ambos tienen el eje X como tangente (Fig. 3)

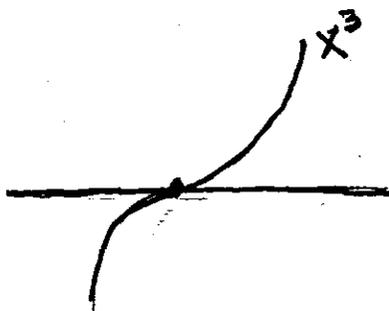


Fig. 3

La figura 4 muestra las correspondientes imágenes de la fig. 2 para variedades.

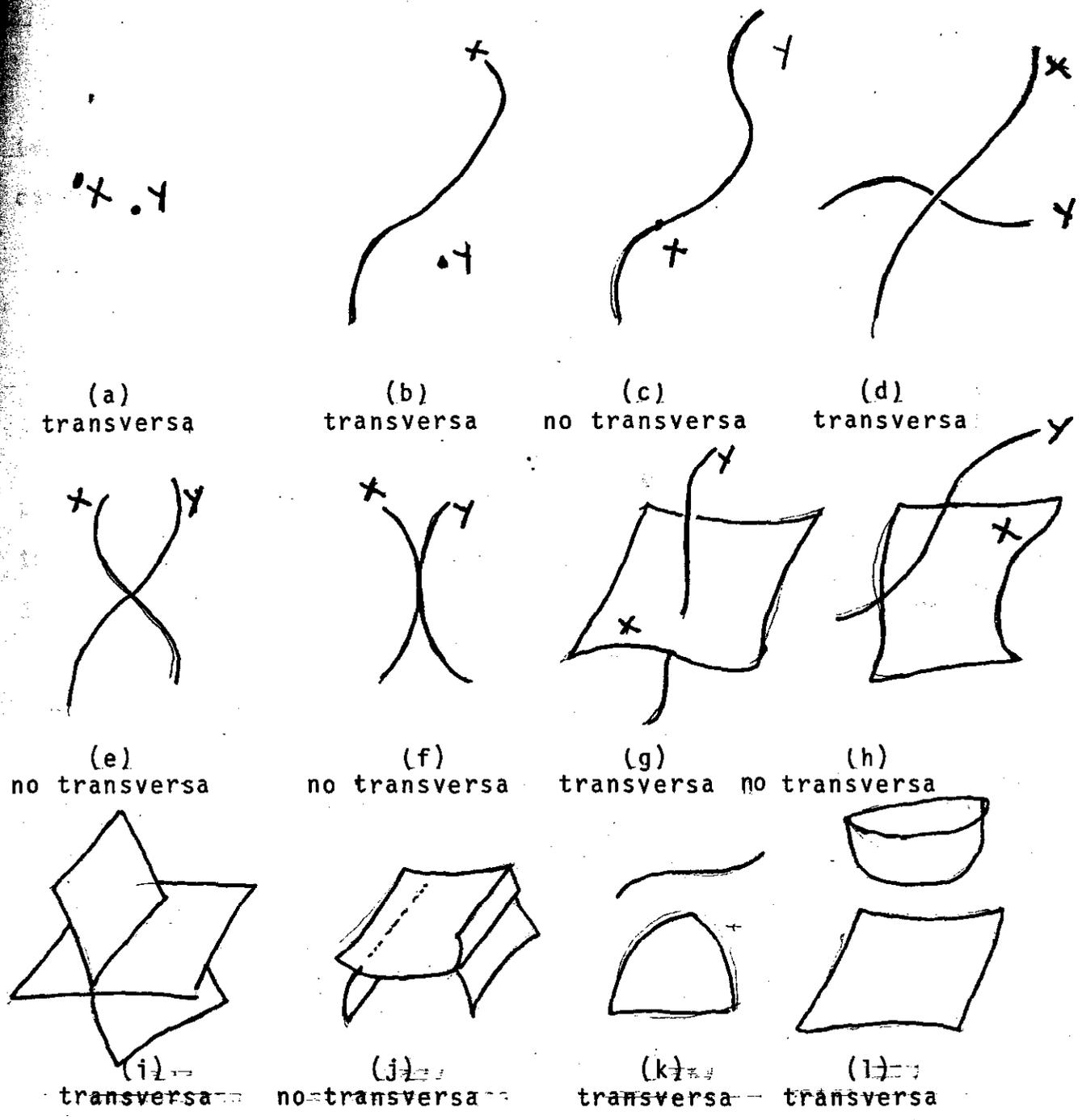


Fig. 4

Cercano a un punto de intersección transversal las dos variables son cercanamente aproximadas por sus tangentes. Esto

implica que la naturaleza local de la intersección depende únicamente de la dimensión de las variedades.

Ahora daremos la definición formal de transversalidad

Definición 1.4.1. Sean X y Y variedades suaves y $f: X \rightarrow Y$ un mapeo suave. Sea W una subvariedad de Y y x un punto de X . Entonces f intersecciona a W transversalmente en X (denotado por $f \pitchfork W$ en X) si

a) $f(x) \notin W$ ó

b) $f(x) \in W$ y $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + (df)_x(T_xX)$, donde T_xX es el espacio tangente a X en x .

Definición 1.4.2. Sean X , Y y W como en la definición 4.

Sea A un subconjunto de X , entonces f intersecciona a W transversalmente sobre A (denotado por $f \pitchfork W$ sobre A) si $f \pitchfork W$ en x para todo $x \in A$. Finalmente f intersecciona a W transversalmente (denotado por $f \pitchfork W$) si $f \pitchfork W$ sobre X .

EJEMPLOS:

(1) Sea $x = \mathbb{R} = W$, $Y = \mathbb{R}^2$ y $f(x) = (x, x^2)$. Entonces $f \pitchfork W$ en toda $x \neq 0$ (véase fig. 5)

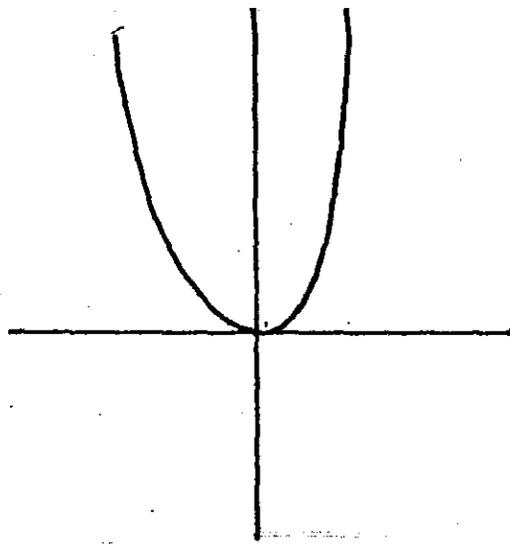


Fig. 5

Nótese que f puede ser perturbada ligeramente para que sea transversal a W (fig. 6)

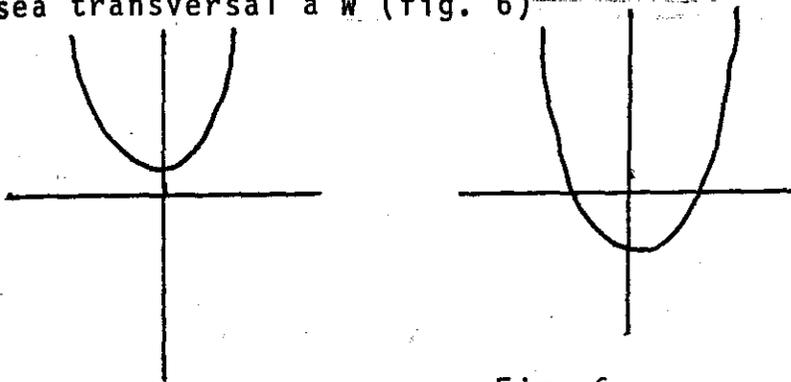


Fig. 6

(a) Sea $X = W = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$. Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f(x) = (x, x^3)$. Entonces f no se intersecta con W en $(0,0)$.

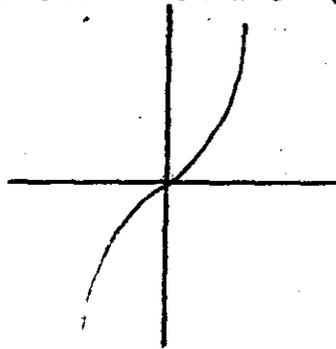


Fig. 7

Y finalmente se dará la definición de transversalidad
pero entre variedades.

Definición 1.4.3. Sean M y S subvariedades de una variedad Y .

Entonces $M \pitchfork S$ si

- i) $M \cap S = \emptyset$ ó
- ii) $T_x M + T_x S = T_x Y$ para todo $x \in M \cap S$.

CAPITULO 2

En el capítulo anterior estuvimos manejando estabilidad para funciones y vimos que las únicas funciones estables corresponden a aquellas cuyos puntos críticos son no degenerados. Para familia de funciones la estabilidad no radica en el hecho de tener o no puntos críticos no degenerados, porque puede suceder que familia de funciones incluyan funciones inestables aunque la familia sea estable.

El propósito principal de este capítulo es el tratamiento de estabilidad para funciones así como los lemas de Morse y de Separación. Otro de los conceptos que se maneja en el capítulo 1 y que extendremos a familias es el de transversalidad y veremos una serie de lemas sin demostrarlo que están relacionados con la transversalidad para familias.

~~2.1 EQUIVALENCIA DE FAMILIAS~~

Antes de dar la definición de equivalencia para familias, daremos una noción de equivalencia para funciones algo distinta a la que se dió en el capítulo 1.

Se dice que dos funciones $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son equivalentes alrededor de cero, si existe un difeomorfismo local $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un término constante γ tal que

$$g(x) = f(y(x)) + \gamma$$

en una vecindad de cero. Para familia de funciones $f, g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ se requiere una mezcla apropiada de equivalencia. El difeomorfismo Y se transforma en una familia de difeomorfismo $Y_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para ser $s \in \mathbb{R}^r$, la cual *varia suavemente con s*; la constante γ se transforma en una "familia de constantes", que varían suavemente con s , o lo que es lo mismo una función suave $\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$. Finalmente se permite también un difeomorfismo $\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$.

Formulando estos requerimientos de una manera clara, lleva a demandar que:

a) un difeomorfismo

$$e: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$$

b) un mapeo suave

$$y: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que para cada $s \in \mathbb{R}^r$, el mapeo

$$y_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y_s(x) = y(x, s)$$

sea un difeomorfismo

c) un mapeo suave

$$\gamma: \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Entonces f y g son *equivalentes* si existen e, γ , definidos en una vecindad de 0, tal que

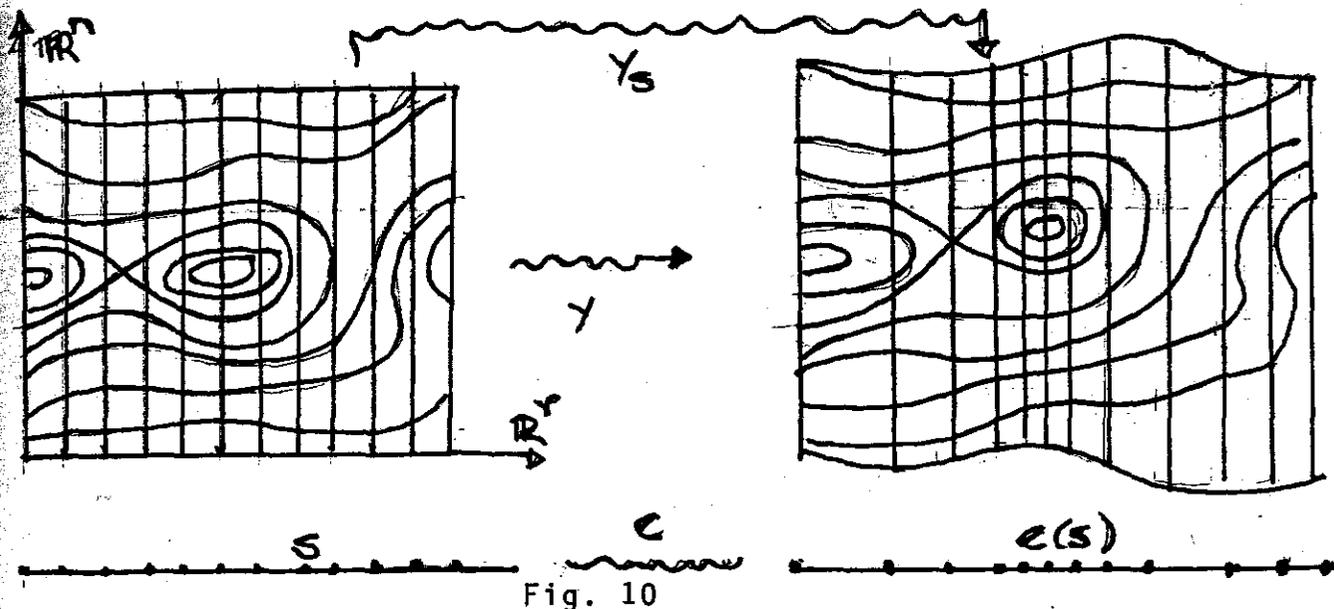
$$g(x, s) = f(y_s(x), e(s)) + \gamma(s)$$

para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ en esa vecindad.

El significado geométrico se ve ilustrado en la figura 10, la cual representa a \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^r por líneas. Para cualquier $s \in \mathbb{R}^r$ fijo, el conjunto de puntos (x, s) para $x \in \mathbb{R}^n$ representado por la línea vertical arriba de s , es deformado de acuerdo a Y_s y colocado verticalmente arriba de $e(s)$. Así la descomposición por líneas verticales es preservado, aunque las líneas individuales sean deformadas y movidas casi a lo largo de \mathbb{R}^r . Finalmente se puede trasladar el origen en cada línea vertical utilizando γ .

Las líneas de contorno en la figura 10 son dibujadas para ilustrar el efecto de este sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$: este es deformado suavemente en forma tal que preserva las características topológicas

cas de la proyección $R^n \times R^n \rightarrow R^n$, $(x,s) \rightarrow s$. Así un contorno el cual es "multivariado" arriba de R^S , así continua y de una forma cualitativamente similar.



2.2 ESTABILIDAD ESTRUCTURAL PARA FAMILIAS

El concepto de estabilidad estructural se extiende ahora para familias en una forma natural. Si $f: R^n \times R^r \rightarrow R$ es equivalente en el sentido anterior, para cualquier familia $f+p: R^n \times R^r \rightarrow R$ donde p es una familia suficientemente pequeña $R^n \times R^r \rightarrow R$, entonces f es estructuralmente estable.

Es de alguna manera más ilustrativa mirar lo de inestabilidad, dado que se puede ver más fácilmente lo que no se busca y entonces decir que "estabilidad es cuando esta clase

de cosa no sucede".

Por ejemplo, supóngase que se tiene la familia de funciones

$$W_a(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2} x^2 \text{ - - - - - (1)}$$

los puntos críticos serán dados por,

$$0 = \frac{d}{dx} W_a(x) = x^3 + ax$$

esto es por la línea $x=0$ y la parábola $x^2+a=0$, como se muestra en la figura 11(a). Para varios propósitos se puede hacer una descripción completa de lo que sucede. Sin embargo esta no es estructuralmente estable y no siempre captura el comportamiento total. Por ejemplo en la fig. 11 (a) no existen brincos repentinos.

En efecto, si perturbamos la familia de funciones (1) por un pequeño término ϵx , se obtiene

$$\tilde{W}_a(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2} x^2 + \epsilon x$$

Ahora los puntos críticos están dados por

$$0 = x^3 + ax + \epsilon$$

y la gráfica (para ϵ pequeño diferente de cero) se asemeja mucho a la fig. 11 (b). La topología de esta gráfica es bastante diferente: por ejemplo es discontinua y tiene puntos que no se autointersectan; esto es cierto no importa que tan pequeño sea ϵ

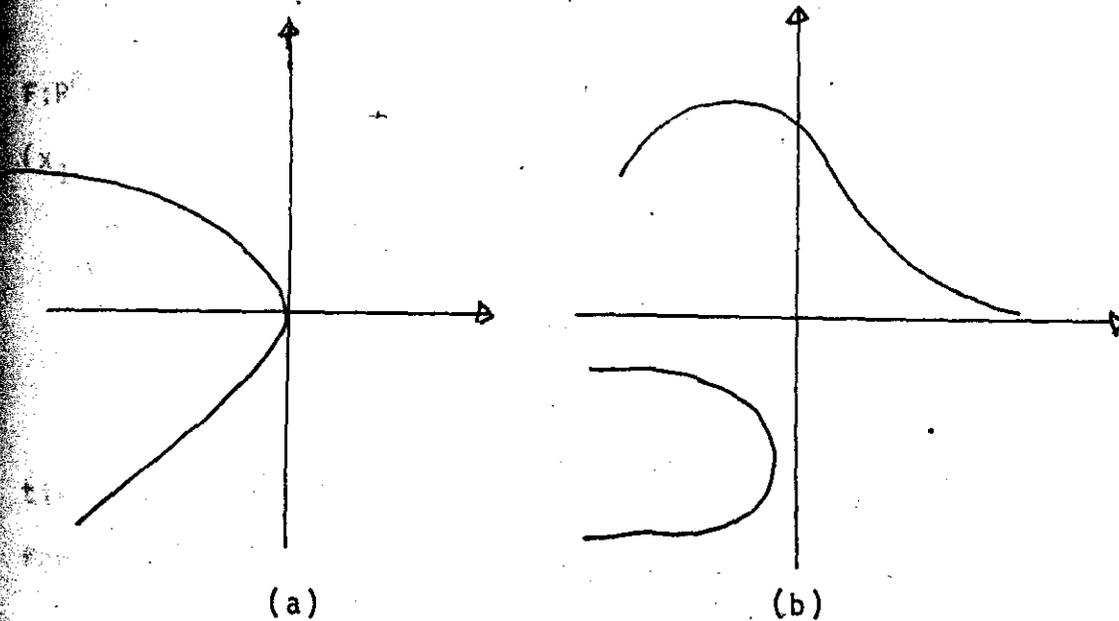


Fig. 11.

2.3 LOS LEMAS DE MORSE Y SEPARACION PARA FAMILIAS

Los lemas de Morse y Separación se extienden para familias en un sentido más fuerte, haciendo uso del teorema de la función implícita.

TEOREMA 2.3.1. (Lema de Separación para familias). Sea $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Denótese un punto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ por $(x, c) = (x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_r)$. Supóngase que el Hessiano

$$H = \left[\begin{array}{c} \partial^2 \\ \partial x_i \partial x_j \end{array} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

tiene corango m en $(x, c) = 0$. Entonces F es equivalente a una familia de la forma

$$F(y_1(x, c), \dots, y_m(x, c), c) \pm y_{m+1}^2 \pm \dots \pm y_n^2.$$

PRUEBA: Encuéntrese un menor no degenerado $(n-m) \times (n-m)$ de H y renumérese las coordenadas para hacer

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n-m}$$

Ahora definase

$$G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

$$(x, c) \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, c), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-m}}(x, c) \right)$$

Este es el rango máximo $n-m$ o $\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\}$, por hipótesis. De aquí por el teorema de la función implícita existe una función local (definida sobre una vecindad U de 0 en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$)

$$g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

tal que

$$G(f(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), x_{n-m+1}, \dots, x_n, c) = 0$$

$$g(0) = 0$$

Por continuidad se puede poner

$$Z = (g(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), x_{n-m+1}, \dots, x_n, c),$$

la matriz

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (Z) \right]_{1 \leq i, j \leq n-m}$$

es no degenerada para todo $c \in U$. Defínase

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \\ (x, c) &\rightarrow (x_1 + g_1(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), \dots, \\ &\dots, x_{n-m} + g_{n-m}(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), x_{n-m+1}, \dots, x_n, c) \end{aligned}$$

Este es claramente un difeomorfismo el cual preserva los conjuntos $c = \text{constante}$. Sea $F = F \circ \phi$. Entonces alrededor de 0,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(0, \dots, 0, x_{n-m+1}, \dots, x_n, c) &= 0 \quad 1 \leq i \leq n-m \\ \det \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(0, \dots, 0, x_{n-m+1}, \dots, x_n, c) \right]_{1 \leq i, j \leq n-m} &\neq 0 \end{aligned}$$

Ahora se puede proceder como en la prueba del lema de Morse, excepto que h_{ij}, H_{ij}, g , etc. (para $1 \leq i, j \leq n-m$) tiene a $(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c)$ como parámetros. Para valores de parámetro fijo solo se cambia x_1, \dots, x_{n-m} en el proceso. El valor crítico de cada $F|_{\mathbb{R}^{n-m} \times \{(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c)\}}$ es inalterado y

defina la función $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ en la exposición del teorema.

COROLARIO 2.3.2. (Lema de Morse para familias). Sea $\hat{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Supóngase que el Hessiano

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

es no degenerado en $(x, c) = 0$. Entonces F es equivalente a una familia de la forma

$$\pm Y_1^2 \pm \dots \pm Y_n$$

PRUEBA: Hágase $m=0$ en el teorema anterior.

Para una familia de funciones expresada en la forma dada en el lema de separación se dice que Y_1, \dots, Y_n son las variables esenciales y Y_{m+1}, \dots, Y_n las variables inesenciales. Esto refleja el hecho de que para varios propósitos se puede olvidar el efecto de Y_{m+1}, \dots, Y_n .

El corolario da la estabilidad de funciones de Morse en una forma particularmente fuerte. No sólo puede cualquier pequeña perturbación de una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con una singularidad de Morse en $0 \in \mathbb{R}^n$ ser anulada alrededor de $0 \in \mathbb{R}^n$ por una parametrización de \mathbb{R}^n y la adición de una constante, permaneciendo la forma original, sino que se puede hacer esto *uniformemente* para una familia suave de perturbaciones $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$, donde $F|_{\mathbb{R}^n \times \{c\}}$ son pequeñas perturbaciones de f cuando c es pequeño, sin embargo "pequeño" es medido por la continuidad y suavidad de F .

2.4 TRANSVERSALIDAD PARA FAMILIA DE FUNCIONES

Veremos aquí una serie de lemas sin dar su demostración que se refieren al concepto de transversalidad pero referente a familia de funciones. Dado un C^s -mapeo local $f = (f_1, \dots, f_p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $f(\bar{0}) = \bar{0}$, podemos expandir cada f_i en un desarrollo de Taylor alrededor del origen. Si omitimos todos los términos de grado $\geq r+1$ ($r < s$), lo que resta es una p -ada de polinomios de grado r , lo cual aproxima a f . A tal p -ada se le llama un r -jet. Esta es la definición intuitiva de un r -jet que depende de la elección de un sistema de coordenadas. Ahora daremos la definición pero en el cual el r -jet no depende de la elección del sistema de coordenadas.

Definición 2.4.1. Sea $C^s(n, p)$ el conjunto de todos los mapeos s -veces diferenciables $f = (f_1, \dots, f_p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, con $f(\bar{0}) = \bar{0}$. Llamamos $f, g \in C^s(n, p)$ *equivalentes de orden r* en $\bar{0}$, si en $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$, sus desarrollos de Taylor hasta incluir los términos de grado $\leq r$ son idénticos. El r -jet de f , denotado por $J^r(f)$ (también puede ser denotado por $J^r(f)(\bar{0})$) es la clase de equivalencia de f ; y f es llamada una realización del jet $J^r(f)$.

El conjunto de todos los r -jets es denotado por $J^r(n, p)$. Tomando los valores de las derivadas parciales en $\bar{0}$ como las

coordenadas de un jet, $J^r(n,p)$ se convierte en un espacio euclideo. Así un r -jet puede ser realizado en un espacio conjunto de polinomios truncados de grado $\leq r$ o por una N -ada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ para algún N en el espacio euclideo $J^r(n,p)$.

Para un C^S -mapeo $f: U \rightarrow R^p$, donde U es un subconjunto abierto de R^n , $f(0) = \bar{0}$, la r -extensión de f

$$J^r(f): U \rightarrow J^r(n,p)$$

es definido como sigue: para $x_0 \in U$ traslademos los orígenes de R^n y R^p a x_0 y $f(x_0)$ respectivamente, entonces $J^r(f)(x_0)$ es el desarrollo de Taylor de f en x_0 hasta incluir los términos de grado $\leq r$.

EJEMPLO 1.- Sean $f, g: R \rightarrow R$ definidas por $f(t) = e^{(1+t^2)}$ y $g(t) = \text{sen}(e^t - 1)$ entonces $J^4(f) = et^2 + \frac{1}{2}$ y $J^4(g) = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{24}t^4$ corresponden a los 4-jets en 0 de f x g respectivamente.

EJEMPLO 2.- Sea $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^3$ cercano a x_0 en R .

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - x_0 + x_0) = (x - x_0 + x_0)^3 \\ &= x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3 \end{aligned}$$

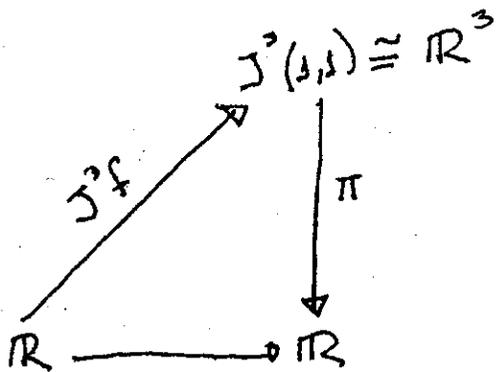
Por definición

$$J^3 f(x_0) = 3x_0^2 x + 3x_0 x^2 + x^3 \in J^3(1,1)$$

donde $J^3(1,1)$ puede ser identificado con \mathbb{R}^3 con la correspondencia

$$ax + bx^2 + cx^3 \longrightarrow (a, b, c)$$

Así, es claro que $J^3 f$, donde $f(x) = x^3$, mapeo \mathbb{R}^1 sobre la parábola $a = 3x_0^2$, $b = 3x_0$, $c = 1$ en \mathbb{R}^3 . Utilizando un diagrama esto puede verse de la siguiente manera



donde π es la proyección sobre el eje C.

Sea $f: N \times S \rightarrow P$ un mapeo suave. Podemos pensar de este como una familia de mapeos suaves $f_s: N \rightarrow P$ donde $f_s(x) = F(x, s)$ parametrizado por los elementos $s \in S$. Supóngase que $F \cap Q$, donde Q es una subvariedad suave de P . Preguntamos si $f_s \cap Q$ para todos los parámetros? La respuesta puede ser negativa como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.- Tómese $N = \mathbb{R}^2$, $S = \mathbb{R}$, $P = \mathbb{R}^3$ y considérese la familia suave $F: N \times S \rightarrow P$ definida por la fórmula $F((x, y), s) = (x, y, s)$. Así f_s mapea \mathbb{R}^2 sobre el plano horizontal $Z = s$ en \mathbb{R}^3 . y Tomando Q la r -esfera S^2 , F es un difeomorfismo, así $F \cap Q$. De otra manera $f_s \cap Q$ con tal de que evitemos dos parámetros excepcionales $s = \pm 1$, cuando el plano $Z = s$ es tangente a Q .

Sin embargo es claro en este ejemplo que cualquier valor del parámetro s puede ser aproximado tan cercano como se quiera por valores "buenos", es decir aquellos para los cuales $f_s \cap Q$. Que esto sea cierto generalmente es el contenido del lema de Transversalidad Básico; por razones técnicas preferimos reemplazar la única variedad suave Q por varias variedades suaves Q_1, \dots, Q_t . La herramienta crucial aquí es el Teorema de Sard, el cual establecemos en la siguiente forma.

TEOREMA 2.4.1. Sea $f_i: N_i \rightarrow P$ una familia numerable de mapeos suaves. El conjunto de valores regulares comunes de f_i es denso en P .

El Lema de Transversalidad Básico es

Lema 2.4.1. Sea $F: N \times S \rightarrow P$ una familia suave de mapeos suaves transverso a subvariedades suaves Q_1, \dots, Q_t de P : entonces existe un conjunto denso de parámetros s para lo cual f_s es transverso para todo Q_1, \dots, Q_t .

Ahora dado un mapeo suave $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ y una variedad suave $Q \subset \mathbb{R}^p$, podemos encontrar un mapeo suave $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ el cual es transverso a Q , y tan "cercano" como queramos a f . Por supuesto el primer problema es decir precisamente que significa que los mapeos suaves sean "cercanos", hablando intuitivamente tomaremos esto diciendo que sus valores son "cercanos" y que para cada entero $k \geq 1$ sus derivadas de orden k son "cercanos".

Haremos esto más preciso como sigue. $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ denota el conjunto de todos los mapeos $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ y sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ un mapeo suave dado. Dado un número real positivo (pequeño) ϵ un número real positivo (grande) R y un entero $k > 0$, asociamos a f una *vecindad fundamental* en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ abarcando todos aquellos mapeos suaves $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ para lo cual, para toda $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| < R$ se tiene que

$$\|J^k f(x) - J^k g(x)\| < \epsilon$$

con $\| \cdot \|$ una norma fija sobre el espacio-jet $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Y llamamos un subconjunto $X \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *denso* aquí cuando dado cualquier mapeo suave $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ y cualquier vecindad fundamental V de f , uno puede encontrar un mapeo suave $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ en X con $g \in V$; intuitivamente, cualquier mapeo puede ser aproximado tan cercanamente como se quiera por mapeos en X .

Teorema de Transversalidad Elemental 2.4.2.- El conjunto de mapeo suaves $R^n \rightarrow R^p$ transverso a subvariedades suaves dadas Q_1, \dots, Q_t de R^p es denso en $C^\infty(R^n \rightarrow R^p)$.

Nuestro siguiente teorema de transversalidad es algo más útil que el teorema 2.4.2.

Teorema de Transversalidad de Thom 2.4.3.- Sean Q_1, \dots, Q_t subvariedades suaves del espacio-jet $J^k(n, p)$. El conjunto de todos los mapeos suaves $f: R^n \rightarrow R^p$ para lo cual $J^k f: R^n \rightarrow J^k(n, p)$ es transverso a Q_1, \dots, Q_t es denso en $C^\infty(R^n, R^p)$.

Es esencial que se aprecie la diferencia entre el teorema 2.4.1 y el teorema 2.4.2. En el resultado previo se maneja que para hacer f transverso a una subvariedad se usará una deformación constante. Pero en la situación presente es $J^k f$, no f el cual deseamos hacer transverso a una subvariedad. Aquí no se trabaja con una deformación constante dado que no altera las derivadas de f . Lo que se hace en lugar de esto es usar de formación polinomial.

CAPITULO 3

3. 1. GERMENES DE MAPEOS

Definición 3.1.1. Sea S el conjunto de todos los c^0 -mapeos suaves-continuos: $R^n \rightarrow R^p$ definidos en una vecindad del origen. Se dice que dos de tales c^0 -mapeos $f, g \in S$ determinan el mismo *germen-mapeo* (o simplemente *germen*) si estos concuerdan en alguna vecindad del origen, de modo que un germen de un c^0 -mapeos, estrictamente hablando es una clase de equivalencia de c^0 -mapeos.

Dado que la teoría es enteramente local, se permitirá hablar de valores de un germen \tilde{f} y escribir $f(x)$, $x \in R^n$, aunque sea más correcto escoger un representante f de la clase de equivalencia \tilde{f} . Se puede hablar también de gérmenes: $R^n \rightarrow R^p$ en puntos $x \in R^n$ diferentes del origen. Nótese aquí que se puede escribir $\tilde{f} = [f]$, la clase de equivalencia de f , y algunas veces no se distingue el germen \tilde{f} y sus representantes.

Un germen \tilde{f} en x es *suave* o C^∞ (analítico o C^ω) si tiene un representante el cual es suave (respectivamente analítico) en una vecindad de x .

Los gérmenes se comportan de la misma forma que los mapeos, i.e. si $\tilde{f}: R^n \rightarrow R^p$ es un germen en $x \in R^n$ y $\tilde{g}: R^p \rightarrow R^n$ es

un germen en $f(x) \in \mathbb{R}^p$, el germen de \tilde{g} o \tilde{f} en x se puede definir en una forma natural tomando las clases de equivalencia de los representantes de \tilde{f} y \tilde{g} .

Definición 3.1.2. Denótese por $\epsilon(n, p)$ el conjunto de gérmenes en $\bar{o} \in \mathbb{R}^n$ de mapeos suaves $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si $p=1$. Se escribe $\epsilon(n, 1)$ para denotar $\epsilon(n, 1)$.

Es claro que $\epsilon(n)$ es anillo con identidad, donde la identidad es el germen en \bar{o} de la función constante que toma el valor de $1 \in \mathbb{R}$. La adición y la multiplicación en $\epsilon(n)$ son inducidos por la estructura \mathbb{R} -álgebra de \mathbb{R} .

Definamos $m(n) = \{f \in \epsilon(n) \mid f(0) = 0\}$, que es un ideal de $\epsilon(n)$. Dados $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r \in \epsilon(n)$, se adopta la siguiente notación $\langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r \rangle_{\epsilon(n)}$ es el ideal en $\epsilon(n)$ generado por $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$ i.e. el conjunto de gérmenes expresable en la forma $\sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{f}_i$ donde $\alpha_i \in \epsilon(n)$.

Ahora denótese por $m(n)^k$ el conjunto de aquellos gérmenes que se anulan en \bar{o} junto con sus derivadas de orden menor que k . En otras palabras

$$m(n)^k = \{f \in m(n) \mid J_{f=0}^{k-1} f \in \tilde{f}\}$$

claramente si $f \sim m(n)^2$ entonces f es singular (en \bar{o}), si $f \sim m(n)^3$ f se dice degenerado.

Definición 3.1.3. Denótese $L(n) = \{\phi \in \varepsilon(n, n) \mid \phi(\bar{o}) = \bar{o} \text{ y } \phi \text{ no singular en } \bar{o}\}$ por el grupo de gérmenes de difeomorfismos locales de \mathbb{R}^n de \bar{o} bajo la operación composición.

Definición 3.1.4. Sean f y g gérmenes de $\varepsilon(n)$. Se dice que f y g son *derecho-equivalentes* y escribimos $f \sim_r g$ si existe un $\phi \in L(n)$ tal que $f = g \circ \phi$. Se dice que f x g son *derecho-izquierdo equivalente* $f \sim_{rl} g$ si existen $\phi \in L(n)$ $\psi \in L(1)$ tal que $f = \psi \circ g \circ \phi$.

Es claro que derecho equivalente y derecho-izquierdo equivalente son relaciones de equivalencia.

Definición 3.1.5. Sea $f \in m(n)$ y sea k un entero no negativo. Entonces f es derecho (o derecho-izquierdo)-determinado por su k -jet o simplemente derecho (o derecho-izquierdo) k -determinado si para cada $g \in m(n)$ tal que $J^k(f) = J^k(g)$ entonces $f \sim_r g$ (respectivamente $f \sim_{rl} g$).

De aquí en adelante k -determinado indicará derecho k -determinado.

EJEMPLO 1.- Si $f(x)=x$ y $g(x)$ con $J'g=x$, entonces $J'f= x$ como $g'(0)=1 \exists g^{-1}$ en $V(0)$. Eligamos $\phi(x)= g^{-1}$ encontramos que

$$g \circ \phi = g \circ g^{-1} = x = f(x)$$

~~por lo que f es k-determinado.~~

Si suponemos que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones con $f(0)=g(0)=0$ y $J'f \neq 0, J'g \neq 0$. Entonces el teorema de la función implícita garantiza que $f(x)=g(y(x))$, dado que ambas f y g pueden ser transformadas a la misma forma canónicas. En efecto siempre se puede elegir un cambio lineal y suave de coordenadas tal que

$$J'g(y(x)) = J'f(x)$$

Por ejemplo sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = x_2$ como la derivada en 0 de f es diferente de 0, cero es un punto singular. Tomemos $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x_1, x_2) = x_2 + x_1^2$ claramente $J'g = J'f$, podemos tomar $\phi(y_1, y_2) = (y_1, y_2)$ donde $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_2 - x_1^2$ por lo que

$$g \circ \phi = g(y_1, y_2) = x_2 = f(x_1, x_2)$$

como se requería, la menor k para lo cual f es k -determinado

en 0 es la determinación de f y se denota por $\sigma(f)$.

Definición 3.1.6. Un germe $\tilde{f} \in m(n)$ se dice *finitamente-determinado* si existe un entero no negativo k tal que f es k -determinado.

~~Los ejemplos 1 y 2 son gérmenes finitamente-determinados.~~ Un ejemplo de un germe que no es finitamente determinado es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ya que si tomamos el germe $g(x)=0$, es claro que $J^k f_0 = J^k g_0 = 0$ pero $f(x)$ no es equivalente a $g(x)$.

Por conveniencia X denotará un elemento $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas estandar. Si $\tilde{f} \in m(n)^2$, entonces sus derivadas parciales $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$ $i=1, \dots, n$ pertenecen a $m(n)$ y denotaremos $\langle \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \rangle$ el ideal generado por las $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$ o

$$\langle \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} \rangle \in m(n)$$

es claro que $\langle \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \rangle \subset m(n)$ si $\tilde{f} \in m(n)^2$.

En lo que sigue enunciaremos (sin probarlo) un importantísimo teorema debido a Mather que es de gran ayuda para conocer la k -determinancia de un germen.

TEOREMA 3.1.1 (Mather) sea $f \in m(n)$. Sea k un entero no negativo. Si $m(n)^{k+1} \subset m^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$ entonces f es k -determinado.

EJEMPLO 1. Sea $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1^3 + x_1 x_2^3 = x_1 \left(\frac{1}{3} x_1^2 + x_2^3 \right)$
 $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \left\langle x_1^2 + x_2^3, x_1 x_2^2 \right\rangle$ y $m(2)^2 = \left\langle x_1^2, x_1 x_2, x_2^2 \right\rangle$.

Por consiguiente

$$m(2)^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \left\langle x_1^4 + x_1^2 x_2^3, x_1^3 x_2 + x_1 x_2^4, x_1^2 x_2^2 + x_2^5, x_1^3 x_2^2, x_1^2 x_2^3, x_1 x_2^4 \right\rangle$$

dado que $x_2^5 \notin m(2)^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$ implica que $m(2)^5 \not\subset m(2)^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$ aunque f es 4-determinado. Puesto que $x_1^6 = x_1^2 (x_1^4 + x_1^2 x_2^3) - x_1^2 (x_1^2 x_2^3)$

$$x_1^5 x_2 = x_1 x_2 (x_1^4 + x_1^2 x_2^3) - x_1 x_2 (x_1^2 x_2^3), \quad x_1^4 x_2^4 = x_1 (x_1^3 x_2^2) \text{ etc. es}$$

fácil ver que $m(2)^6 \subset m(2)^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$ así por el teorema 1 f es 5-determinada.

EJEMPLO 2. El germen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ es 3-determinado. En efecto $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \left\langle x_1^2, x_2^2 \right\rangle$

$$m^2(2)^2 = \langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle y$$

$$m(2)^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \langle x_1^4, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_2^4 \rangle$$

$$m^4(2) = \langle x_1^4, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_2^4 \rangle m^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$$

por lo que f es 3-determinado.

El siguiente teorema da la condición necesaria para que un germen sea k -determinado.

TEOREMA 3.1.2. Si $f \in m(n)$ y f es k -determinado entonces $m(n)^{k+1} \subset m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$.

Para la prueba del teorema véase []. La condición de este teorema no es una condición de suficiencia para la k -determinancia.

Por ejemplo el germen $f(x,y) = x^2$ no es 1-determinado aunque $m(1)^2 \subset m(1) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$, ya que para cualquier entero positivo k y $2N > k$ el germen $g(x,y) = x^2 - y^{2N}$ no es equivalente a $f(x,y)$ aunque $J^k f = J^k g$ por lo que $f(x,y)$ no es k -determinado.

Poniendo juntos los teoremas 1 y 2 generan el siguiente interesante corolario.

Corolario 3. f es finitamente determinado si y solo si $m(n)^k \subset \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$ para alguna k .

Prueba: Si f es finitamente determinado, es decir k de terminado entonces

$$m(n)^{k+1} \subset m(n) \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle \subset \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$$

y si existe una k tal que

$$m(n)^k \subset \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$$

y

$$m(n)^{k+2} \subset m(n)^2 \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$$

por el teorema J f es $(k+1)$ -determinado.

Definición 3.1.7. Si $f \in m(n)^2$, la codimensión de f , denotada por $\text{cod } f$, es definida por el entero $\dim_{\mathbb{R}} m(n) / \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$.

EJEMPLO 3. $f = x^k$, $\text{cod } f = \dim_{\mathbb{R}} \langle x \rangle / \langle x^{k-1} \rangle = k-2$ con bases $\{x_1, x^2, \dots, x^{k-2}\}$

EJEMPLO 4. $\tilde{f} = x^2 y \in m(2)$, $\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = \langle 2xy, y^2 \rangle$. En este caso las clases de y, y^2, y^3, \dots nunca serán cero. Así $\text{cod } \tilde{f} = \infty = \dim_{\mathbb{R}} \langle x, y \rangle / \langle 2xy, y^2 \rangle$.

EJEMPLO 5. $\tilde{f} = x^3 + y^3 \in m(2)$ $\text{cod } \tilde{f} = \dim_{\mathbb{R}} \langle x, y \rangle / \langle x^2, y^2 \rangle = 3$ con base $\{x, y, xy\}$.

EJEMPLO 6. $\tilde{f} = x^4 + y^4 \in m(2)$, $\text{cod } \tilde{f} = \dim_{\mathbb{R}} \langle x, y \rangle / \langle x^3, y^3 \rangle = 8$ con bases $\{x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$.

3. 2.- DESPLIEGUES

Definición 3.2.1. Un r -despliegue de una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función

$$F: \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Frecuentemente denotamos $F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_r)$ por $F_{t_1, \dots, t_r}(x_1, \dots, x_n)$ y pensar de F como una familia de funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ parametrizada por t . Llamamos a x_1, \dots, x_n las variables internas t_1, \dots, t_r las variables despliegues, r la codimensión del despliegue y \mathbb{R}^r el espacio despliegue, podemos

escribir (F, r) para enfatizar la codimensión de F .

Por ejemplo $F(x, u) = x^3 + ux$ es un despliegue uniparametrizado de x^3 , mientras que $F(x, u) = x^3 + \text{sen}(u_1)x + u_2x^2$ es un 2-despliegue de x^3 . Así un germen dado tiene en general infinitamente muchos despliegues.

Para cualquier $f \in \mathfrak{m}(n)$, el *despliegue constante* F de codimensión r es definido por

$$F(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \bar{u} \in \mathbb{R}^r$$

EJEMPLO 2.1.- Sea $b \in \mathfrak{m}(n)$, $\bar{u} = (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r$. Entonces

$$F(\bar{x}, \bar{u}_1) = f(\bar{x}) + b(\bar{x})\bar{u}_1$$

es un despliegue de $f \in \mathfrak{m}(n)$ de codimensión 1, más generalmente sean $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{m}(n)$. Entonces

$$G(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^r b_i(\bar{x})u_i$$

es un despliegue de $f \in \mathfrak{m}(n)$ de codimensión r .

Este ejemplo sugiere implícitamente la noción de la suma de dos despliegues de $f(\bar{x})$.

Definición 3.2.2. Sean (F,r) y (G,s) dos despliegues de $f \in \mathfrak{m}(n)$. Definimos la *suma* de (F,r) y (G,s) como

$$(F,r)+(G,s) = (H,r+s)$$

donde

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = F(\bar{x}, \bar{u}) + G(\bar{x}, \bar{v}) - f(\bar{x})$$

donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^s$.

Véase (ejemplo 2.1) que $F(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x}) + \sum b_i(\bar{x})u_i$ es la suma de despliegues de codimensión 1, $f(\bar{x}) + b_i(\bar{x})u_i$. En general la codimensión es aditiva con respecto a la suma de despliegues.

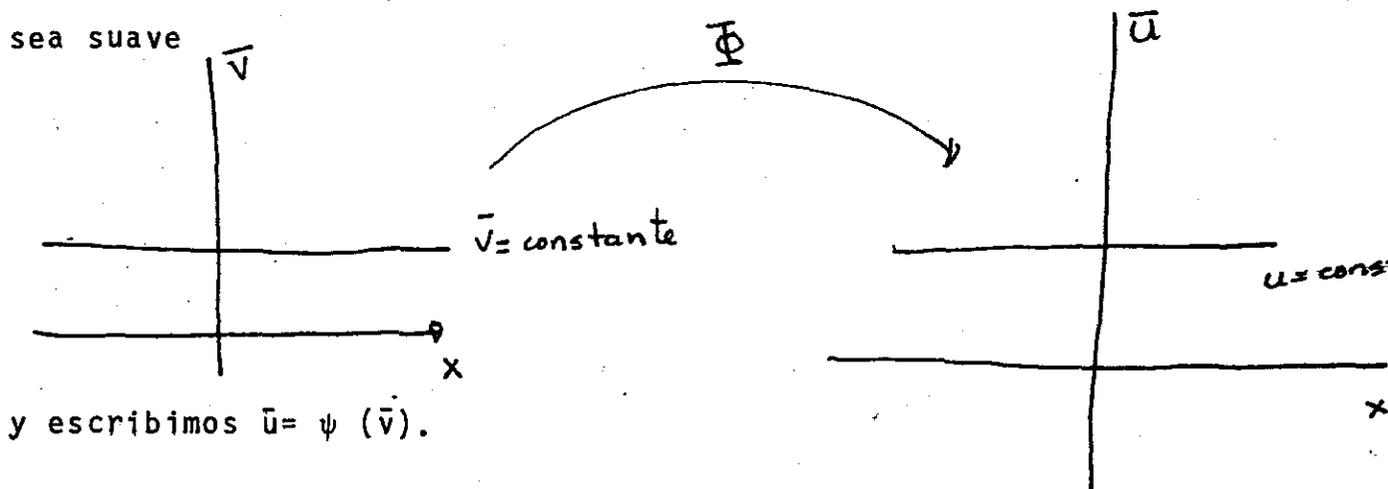
EJEMPLO 2.2. Sea $f \in \mathfrak{m}(1)$ definido por $f(x) = x^3$. $F(x,u) = x^3 + u^2$ es un despliegue de f . $G(x,u) = x^3 + ux$ es también un despliegue de f . Intuitivamente G dará todas las deformaciones de f cuando variamos el parámetro u . Este es desde el punto de vista intuitivo el *despliegue versal* el cual se definirá después. Similarmente $H(x,w,v) = x^3 + wx + vx$ y $k(x,v) = x^3 + 3vx^2$ son también despliegues de f .

Una pregunta natural surge de nuestro segundo ejemplo:

¿Como podemos distinguir (o asociar) dos despliegues? Empezamos con una discusión informal. Sea $f \in \mathcal{M}(n)$ y sean (F, r) y (G, s) dos despliegues de f . Entonces F y G se dicen *asociados* si existe un C^∞ - mapeo $\bar{\phi}: (R^n \times R^s, \bar{o}) \rightarrow (R^n \times R^r, \bar{o})$ donde $\bar{o} \in R^n$ que tiene las siguientes propiedades:

$$(1) \quad \bar{\phi} \Big|_{R^n \times \{0\}} = \text{id} \Big|_{R^n} \quad \text{i.e.} \quad \bar{\phi}(x, \bar{o}) = (x, \bar{o})$$

(2) $\bar{\phi}$ es una *fibra* en el sentido de que si mantenemos $\bar{v} \in R^s$ constante, entonces $\bar{\phi}$ mapeará $R^n \times \{\bar{v}\}$ dentro de algún $R^n \times \{\bar{u}\}$ donde $\bar{u} \in R^r$ depende únicamente de \bar{v} . Se requiere que este mapeo sea suave



(3) La gráfica de G sobre $R^n \times \{\bar{v}\}$ cuando $\bar{v} = \text{constante}$ y la gráfica de F sobre $R^n \times \{\bar{u}\}$ cuando $\bar{u} = \text{constante}$, donde $\bar{u} = \psi(\bar{v})$ difieren únicamente por una translación. Esas translaciones pueden depender de \bar{v} , i.e. podemos tener diferentes translaciones para diferentes \bar{v} 's, este mapeo sobre R^s se requiere

que sea también C^∞ .

EJEMPLO 2.3. Refiriéndonos al ejemplo 2.2..

i) $G(x,u) = x^3 + ux$ es asociado a $H(x,w,v) = x^3 + wx + vx$.

Definimos $\bar{\phi}: R^1 \times R^2 \rightarrow R^1 \times R^1$ por $\bar{\phi}(x,w,v) = (x,u)$. En este caso si mantenemos w, v constante, obtenemos una línea paralela al eje x en el espacio (x,w,v) . Entonces la gráfica de H para w, v manteniéndose constante es la misma que la gráfica de G donde $u = w + v$. Nótese que no se hizo una translación para este caso.

ii) $G(x,u)$ es asociado a $k(x,v) = x^3 + 3vx^2$. Definimos $\bar{\phi}: R^1 \times R^1 \rightarrow R^1 \times R^1$ por $\bar{\phi}(x,v) = (x+v, u)$. Dado que $k(x,v) = x^3 + 3vx^2 = (x+v)^3 - 3v^2(x+v) + 2v^3$, es claro que u será definido como $-3v^2$ de modo que $k(x,v) = G\bar{\phi}(x,v) + 2v^3$, necesitamos una translación

$$\lambda: R^1 \times R^1 \rightarrow R$$

dada por

$$\lambda(t,v) = t - 2v^3$$

o escrita de otra manera

$$\lambda(t,v) = t + \alpha(v)$$

donde $\alpha(v) = -2v^3$.

Ahora la formal definición de *asociación* de dos despliegues (F,r) y (G,s) de un germen $f \in \mathfrak{m}(n)$ puede ser dada como sigue:

Definición 3.2.3. (F,r) y (G,s) son asociados si existe un morfismo $(\bar{\phi}, \psi, \lambda): (G,s) \rightarrow (F,r)$ donde $\bar{\phi}$ es un germen: $(\mathbb{R}^{n+s}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+r}, 0)$, ψ es un germen $(\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ y una translación $\lambda: (\mathbb{R}^{1+s}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ con $\lambda(t, \bar{v}) = t + \alpha(\bar{v})$ donde $\alpha: (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que

$$1.- \bar{\phi} \Big|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = \text{id} \Big|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{i.e.} \quad \bar{\phi}(\bar{x}, 0) = (\bar{x}, 0) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$2.- \Pi_r \bar{\phi} = \psi \Pi_s \quad \text{donde } \Pi_r, \Pi_s \text{ son proyecciones naturales}$$

$$3.- G = \lambda(F\bar{\phi}, \Pi_s) = F\bar{\phi} + \alpha\Pi_s$$

Algunas veces denotamos un morfismo $(\bar{\phi}, \psi, \lambda)$ simplemente por $(\bar{\phi}, \bar{\psi}, \alpha)$.

Para ser consistente con la noción de equivalencia (de recha) de gérmenes requeriremos que $\lambda_{\bar{v}} \in \varepsilon(1)$, $\lambda_{\bar{v}}(t) = \lambda(t, \bar{v})$ sea el mapeo identidad para cada \bar{v} en lugar de permitir que λ sea una translación.

Es posible reemplazar esta translación por transformaciones más generales.

Definición 3.2.4. (F, r) y (G, s) son derecha-izquierda asociado si existe un morfismo derecho-izquierdo (ϕ, ψ, λ) donde ϕ, ψ son igual que antes pero $\lambda \in \epsilon(1+s)$, $\lambda|_R = \text{id}|_R$ y $G = \lambda(F\phi, \Pi_S)$.

Nótese que el mapeo λ mencionado en la definición no se requiere que sea una translación en contraste con la λ dada en la definición 2.4.

Ahora dado un morfismo $(\phi_1, \psi_1, \lambda_1): (F_1, r_1) \rightarrow (F, r)$ y un morfismo $(\phi_2, \psi_2, \lambda_2): (F_2, r_2) \rightarrow (F_1, r_1)$, podemos componer estos morfismos como sigue

$$(\phi_2, \psi_2, \lambda_2) \circ (\phi_1, \psi_1, \lambda_1) = (\phi, \psi, \lambda)$$

donde $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$, $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ y $\alpha = \alpha_1 \psi_2 + \alpha_2$ con $\lambda_1(t, \bar{v}) = t + \alpha_1(\bar{v})$, $\lambda_2(t, \bar{u}) = t + \alpha_2(\bar{u})$ y $\lambda(t, \bar{w}) = t + \alpha(\bar{w})$. Claramente $(\phi_1 \psi_1 \lambda)$ es un morfismo $(F_2, r_2) \rightarrow (F, r)$. En esta forma obtenemos una categoría de despliegues de f . Para la categoría derecha-izquierda la única diferencia es que debemos escribir λ por la regla más general

$$\lambda(t, \bar{w}) = \lambda_2(\lambda_1(t, \psi_2(\bar{w}), \bar{w}), \bar{w}) \text{ para } \bar{w} \in \mathbb{R}^{r^2}$$

¿Cuando dos despliegues se consideran los mismos?. La respuesta a esta pregunta nos la da la siguiente definición

Definición 3.2.5. Dos despliegues (F, r) y (G, s) de $f \in \mathcal{M}(n)$ son equivalentes (o isomorfos) si son objetos equivalentes en la categoría de despliegues de f .

Geométricamente (F, r) es equivalente a (G, s) si

- i) $r = s$
- ii) Existe un morfismo de (G, s) a (F, r) donde ψ es una reparametrización de \mathbb{R}^r (o $\psi \in L(r)$) y $\phi: \bar{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una reparametrización de \mathbb{R}^n . Así (ϕ, ψ, α) , tiene una inversa $(\phi^{-1}, \psi^{-1}, \alpha\phi^{-1})$.

Vayamos ahora a la definición de despliegue versal que ya se dió intuitivamente.

Definición 3.2.6. Un despliegue (F, r) de $f \in \mathcal{M}(n)$ es versal (o estable) si para cualquier despliegue (G, s) de f , existe un morfismo (ϕ, ψ, α) de (G, s) a (F, r) .

a

Definición 3.2.7. Un despliegue (F, r) es universal si este es estable y r es la codimensión mínima de F .

Definición 3.2.8. Sea $F: U(\text{abierto en } \mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ y $(\bar{x}, \bar{u}) \in U$.

Definimos $F_{(\bar{x}, \bar{u})}$ el germen en $m(n)$ del mapeo representativo denotado también por $F_{(\bar{x}, \bar{u})}$ el cual es definido sobre una pequeña vecindad de x en \mathbb{R}^n como sigue:

$$F_{(\bar{x}, \bar{u})}(\bar{y}) \equiv F(\bar{x} + \bar{y}, \bar{u}) - f(\bar{x}, \bar{u})$$

Entonces sea $\hat{F} = J^k F: U \rightarrow J^k(n, 1)$ el jet extensión de F definido por $\hat{F}(x, u) = J^k F(x, u) = \Pi_k(F_{(\bar{x}, \bar{u})})$. Aquí $\Pi_k: \epsilon(n, 1) \rightarrow J^k(n, 1) = \epsilon(n, 1)/m(n)^{k+1}$ es el mapeo proyección natural y un elemento canónico de la clase de $F_{(\bar{x}, \bar{u})}$ es su expansión de Taylor evaluada en 0, hasta de orden k .

Definición 3.2.9. Sea (F, r) un despliegue de $f \in m(n)$. Sea $z = \Pi_k(f) \in J^k(n, 1)$. Entonces F es k -transversal (derecha-izquierda) k -transversal, o r k -transversal) si el k -jet de $F(\bar{x}, \bar{u})$ esto es, $\hat{F}(\bar{x}, \bar{u})$ es transversal en \bar{o} a $ZL^k(n)$ ($L^k(1) \times L^k(n)$ respectivamente), para \bar{u} fijo.

Aquí $ZL^k(n)$ es la orbita de z en $K^k(n, 1)$ bajo el grupo de k -jets de difeomorfismo la cual fija $\bar{o} \in \mathbb{R}^n$. La acción es dada por $z \cdot \mu = \Pi_k(f \circ g)$ donde $g: (\mathbb{R}^n, \bar{o}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \bar{o})$ es un difeomorfismo local de \mathbb{R}^n con $J^k(g) = \mu$

Veamos ahora que condiciones debe cumplir un despliegue para que sea k -transversal.

Sea F un despliegue de f , $F \in \epsilon(n+r)$. Sea $\alpha_i(F) = \frac{\partial F}{\partial u_i} \Big|_{(R^n, \bar{0})} \in \epsilon(n)$, $i=1, \dots, r$, donde $\{u_1, \dots, u_r\}$ es el sistema coordinado de R^n , sea $V_F = \{ \sum_{i=1}^r a_i \alpha_i(F) + a_0 1 : a_0, a_1, \dots, a_r \in R \}$ y $W_F = \{ \sum_{i=1}^r a_i \alpha_i(F) : a_1, \dots, a_r \in R \}$.

TEOREMA 3.2.2.

i) Un despliegue (F, r) de f es k -transversal si y solo

$$\text{si } \epsilon(n) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\epsilon(n)} + V_F + m(n)^{k+1}$$

ii) F es r - k -transversal si y sólo si

$$\epsilon(n) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\epsilon(n)} + f\epsilon(1) + W_F + m(n)^{k+1}$$

Para probar el teorema necesitamos el siguiente lema el cual es esencialmente una reinterpretación del espacio tangente z de $zL^k(n)$ o $L^k(1)zL^n(n)$ en $J^n(n,1)$. Para la prueba de este lema remitase a [4].

Lema Sea $f \in m(n)$, sea k un entero no negativo y sea $z = \Pi_k(f) \in J^k(n,1)$. Entonces

$$(a) \Pi_k^{-1} \left[T_z(z L^k(n)) \right] = m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + m(n)^{k+1}$$

y

$$(b) \Pi_k^{-1} \left[T_z(L^k(1)z L^k(n)) \right] = m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + f^{k_{m(1)+m(n)} k+1}$$

Ahora se probará la parte i) del teorema, se necesita mostrar que $d\hat{F}(\bar{0}, \bar{0})(T(\bar{0}, \bar{0})R^{n+r}) + T_2(z L^k(n)) = J^k(n, 1)$. Así es necesario encontrar la diferencial de \hat{F} en $\bar{0}$:

$$d\hat{F}(\bar{0}, \bar{0}) = \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x_j} \right) (\bar{0}, \bar{0})$$

donde $1 \leq i, j \leq n$. Ahora

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j}(\bar{0}, \bar{0}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_k(F(\bar{x}, \bar{u})(\bar{y})) \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})=(\bar{0}, \bar{0})} = \Pi_k \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (F(\bar{x}, \bar{u})(\bar{y})) \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})=(\bar{0}, \bar{0})} \right]$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{u})(\bar{y}) \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})=(\bar{0}, \bar{0})} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (F(\bar{y}, \bar{0}) - F(\bar{0}, \bar{0})) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{y}, \bar{0}) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{0}, \bar{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{0}), \end{aligned}$$

$$\Pi_k \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (F(\bar{x}, \bar{u})(\bar{y})) \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})=(\bar{0}, \bar{0})} \right] = \Pi_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{0}) \right) = \Pi_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{y}) \right).$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \Pi_k \left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha} (F(\bar{x}, \bar{u})(\bar{y})) \Big|_{(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{0}, \bar{0})} \right] &= \Pi_k \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (F(\bar{0} + \bar{y}, \bar{0}) - F(\bar{0}, \bar{0})) \right] \\ &= \Pi_k \left[\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(\bar{y}, \bar{0}) - \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(\bar{0}, \bar{0}) = \Pi_k \left(\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(\bar{y}, \bar{0}) \right). \end{aligned}$$

Así $\hat{d}F(\bar{0}, \bar{0}) (T_{(\bar{0}, \bar{0})} R)^{n+r}$ es generado por

$$\left\{ \Pi_k \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{y}), \dots, \Pi_k \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{y}), \Pi_k \frac{\partial F}{\partial u_1}(\bar{y}, \bar{0}), \dots, \Pi_k \frac{\partial F}{\partial u_r}(\bar{y}, \bar{0}) \right\}$$

sobre R . De aquí \hat{F} es transversal a $z L^k(n)$ en $\bar{0}$ si y sólo si

$$\Pi_k (m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \langle 1, \Pi_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right), \dots, \Pi_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \Pi_k \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \right), \dots, \Pi_k \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \right) \rangle_{R=J^k(n,1)})$$

o equivalentemente

$$\epsilon(n) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m(n)} + \langle 1, \frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle_R + m(n)^{k+1}$$

dado que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_R \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m(n)}$$

Un argumento similar prueba la parte (ii).

A la luz del siguiente teorema se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 2.4. El despliegue (F, r) de f es k -transversal si $m(n) / \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle + V_F + m(n)^{k+1}$, es derecho-izquierdo k -transversal si

$$m(n) / \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle + V_F + m(n)^{k+1} + f^k_m(1)$$

Corolario 2.5. Sea b_1, b_2, \dots, b_r elementos de $m(n)$ los cuales proyectan una base para $m(n) / \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle + m(n)^{k+1}$. Entonces el despliegue $F(\bar{x}, u) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^r b_i(\bar{x})u_i$ donde $u = (u_1, \dots, u_r)$, es k -transversal.

Corolario 2.6. La suma de cualquier despliegue y un despliegue k -transversal es k -transversal.

Como una consecuencia del teorema 2.1 se tienen los siguientes dos resultados importantes.

TEOREMA 3.2.7. Sea $f \in m(n)$. Entonces para cada entero no negativo k , existe un despliegue F de f el cual es k -transversal (y de aquí r k -transversal).

Prueba: Sea k un entero no negativo. Dado que $\epsilon(n)/(\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle + m(n)^{k+1})$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre R , podemos elegir $b_1, \dots, b_r \in \epsilon(n)$ cuyo coset modulo $\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle + m(n)^{k+1}$ genera este espacio vectorial sobre R . Definase $F \in \epsilon(n+r)$ por $F(\bar{x}, u) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^r u_i b_i(\bar{x})$. Entonces

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u_i} \right|_{R^n \times \bar{0}} = b_i \text{ para } 1 \leq i \leq r. \text{ De aquí } b_i \text{ genera } W_f \cap V_f. \text{ Del teo}$$

rema 4.1 es claro que F es k -transversal, además es también inmediato que cualquier despliegue k -transversal de f es también derecho izquierdo k -transversal.

TEOREMA 3.2.8. Para $f \in m(n)^2$, sea (F, r) un despliegue versal de f . Entonces F es k -transversal para cualquier entero no negativo k .

Para su demostración véase Yung-chen Lu.

~~La siguiente cuestión a considerar es concerniente a identificar un criterio para que una función tenga un despliegue versal. Observaremos que la existencia de un despliegue es equivalente a una condición algebraica la cual es facilitada por la condición de transversalidad formulada anteriormente.~~

Ahora estableceremos sin probarlo el siguiente *teorema fundamental* y entonces aplicarlo a la noción de determinación finita para mostrar el recíproco del teorema 2.8.

TEOREMA 3.2.9. Sea k un entero no negativo. Si $f_{em}(n)$ es k -determinado, entonces cualesquiera dos k -transversal despliegue de f de la misma condimensión son equivalentes.

TEOREMA 3.2.10. Sea $f_{em}(n)^2$ k -determinado. Entonces un despliegue (F,r) de f es versal si y sólo si este es k -transversal.

PRUEBA: "solo si" es claro del teorema 2.7. Ahora sea (G,s) cualquier despliegue de F . Se puede mostrar que (G,s) es asociado con (F,r) . Es fácil verse que, en la categoría de despliegues de cualquier germen f , existen siempre morfismo

$$(G,s) \rightarrow (G,s) + (F,r)$$

$$(F,r) + \text{constante} \rightarrow (F,r)$$

Además $(F,r) + (G,s)$ es obviamente un despliegue k -transversal de f , dado que (F,r) lo es. Por la misma razón $(F,r) + \text{constante}$ es también k -transversal. Entonces por el teorema

4.8 se tiene una equivalencia de despliegues.

$$(F,r) + \text{constante} \approx (F,r) + (G,s)$$

donde, del lado izquierdo se toma el despliegue constante de dimensión s . Así se tiene que

$$(G,s) \rightarrow (G,s) + (F,r) \approx (F,r) + \text{constante} \rightarrow (F,r)$$

mostrando que (F,r) es versal.

Corolario 2.11. Si para cada k , el despliegue (F,r) de $f \in m(n)^2$ es k -transversal, entonces

- a) F es versal
- b) f es finitamente determinado.

PRUEBA: Por el teorema 2.9 lo único que se tiene que mostrar ~~bajo la hipótesis que f es finitamente determinado.~~ Pero si F es k -transversal, entonces F es derecho-izquierdo k -transversal, así por el Teorema 4.1., se tiene que para cada entero no negativo k

$$\epsilon(n) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle + f^* \epsilon(1) + W_F + m(n)^{k+1}$$

y de aquí $\dim_R \varepsilon(n) / \langle \frac{\partial f}{\partial X} \rangle + f^* \varepsilon(1) + m(n)^{k+1} < \dim_R W_F < r$, de lo cual es fácil ver que f es finitamente determinado.

TEOREMA 3.2.12. (Existencia de despliegues versales). El germen $f \in m(n)^2$ tiene un despliegue versal si y sólo si este es finitamente determinado.

PRUEBA: "Si" es una consecuencia inmediata del teorema 2.9 y 2.6 "solo si" se puede concluir del teorema 2.7 y el corolario 2.10 en una forma obvia.

TEOREMA 3.2.13. Sea $f \in m(n)^2$ y sea (F, r) un despliegue de f . Entonces F es versal si y sólo si $\varepsilon(n) = \langle \frac{\partial f}{\partial X} \rangle + V_F$.

Como resultado de este teorema, se puede también calcular el mínimo número de parámetros que un despliegue universal de un germen finitamente determinado debe tener.

Recordemos que si $f \in m(n)^2$ es finitamente determinado, entonces

$$\text{cod } f = \dim_R m(n) / \langle \frac{\partial f}{\partial X} \rangle m(n)$$

TEOREMA 3.2.14. Para $f \in m(n)^2$ finitamente determinado, el mínimo número de parámetros aparecen en un despliegue universal, i.e. la codimensión de un despliegue es la codimensión de f .

Además sabemos como construir un despliegue universal de f . La idea es la misma como la prueba del Teorema 4.6; elegimos $b_1, b_2, \dots, b_r \in m(n)$ como sus cosets en $m(n)/\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$ forman una base para este espacio R -vectorial y entonces $F(\bar{x}, u_1, \dots, u_r) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^r u_i b_i(\bar{x})$ es un despliegue universal de f .

Esta información y el teorema 4.13 dan lugar a una respuesta positiva a la siguiente pregunta. Sea k un entero no negativo y sea $f \in m(n)^2$ k -determinado. Si se tienen dos despliegues (F, r) y (G, r) de f y F, G son k -transversal, ¿es F asociada con G ? y si así es, ¿es G asociado con F ? Esto es podemos inducir F de G y *viceversa* con morfismos compuestos como la identidad. Además si se puede, entonces para un despliegue de dimensión mínima (igual a $\dim_R m(n)/\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$), podemos hablar de un despliegue universal de f (la respuesta positiva a esta cuestión es por supuesto el Teorema 4.8). Si no nos contentaremos con la existencia de un despliegue versal de f .

3.3. TEOREMA DE CLASIFICACION DE THOM

En esta sección la siguiente idea será formalizada: Dado un "despliegue canónico" (G,r) (en un sentido que se hará más preciso después), y un despliegue arbitrario (F,k) , $k \leq r$ del mismo germen $f \in \mathcal{M}(n)$ ³, nos gustaría expresar el hecho de que el máximo y el mínimo de F puedan ser esencialmente obtenidos del máximo y mínimo de G (por supuesto como función de \mathbb{R}^n), esto es máximo y mínimo de $F_{\bar{u}}|_{\mathbb{R}^n}$ para cada $\bar{u} \in \mathbb{R}^k$ se pueda obtener esencialmente del máximo y mínimo de $G_{\bar{v}}|_{\mathbb{R}^n}$ para cada $\bar{v} \in \mathbb{R}^r$. En esta forma F es un despliegue universal de f , entonces no sólo contendrá la reparametrización de todos los despliegues de f , sino que también contendrá la configuración en tera de extremos para despliegues de f . Definimos el *sitio singular* del germen F en $\bar{0}$ el subconjunto de \mathbb{R}^{n+k} que consiste de ~~todos los puntos singulares~~ de la función $F|_{\mathbb{R}^n \times \{\bar{u}\}}$ para todo \bar{u} y $\bar{0}$ en \mathbb{R}^k . Claramente esta definición es independiente de la elección de los representantes del germen F . Esto es porque no se hace distinción entre el germen y sus representantes. Es también obvio que el sitio singular de F no cambia esencialmente si sumamos una forma cuadrática no degenerada $-y_1^2 - \dots - y_u^2 + y_{u+1}^2 + \dots + y_q^2$ a un despliegue F ni aún si se toma un despliegue constante de F . Esto nos lleva a las siguientes definiciones.

Definición 3.3.1. Sea (G, r) un despliegue de $\text{gem}(n)$. Sea $(F, r+s)$ un despliegue de $\text{fem}(n+q)$ y μ un entero $0 \leq \mu \leq q$. F reduce a G con índice μ si F es equivalente como un despliegue $r+s$ al despliegue $(\hat{G}, n+q+r+s)$ donde

$$\hat{G}(x, y, u, v) = G(x, u) - y_1^2 - \dots - y_\mu^2 + y_{\mu+1}^2 + \dots + y_q^2 \quad 5.1$$

para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^q$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^s$.

Definición 3.3.2. F reduce a G *propriadamente* si $q+s$ es positivo en la definición 5.1 y G será llamada una *reducción propia* de F . Si un despliegue F no tiene reducción propia, entonces F se dirá *irreducible*.

Observe que en el caso de que f y g sean singulares y un despliegue $(F, r+s)$ de $\text{fem}(n+q)$ reduce a un despliegue (G, r) de $\text{gem}(n)$, entonces existe un isomorfismo (ϕ, ψ, α) donde $\psi \in L(r+s)$ $\phi \in L(n+q+r+s)$ tal que

$$F = G\phi + \alpha\pi_{r+s}$$

donde G es de la forma 5.1. Así μ es únicamente determinado, dado que μ en este caso es igual al índice de la forma del Hessiano de f menos el índice de la forma del Hessiano de f .

Correspondiente a despliegues, se tiene también una noción de reducción para germenos:

Definición 3.3.3 Sea $g \in \mathfrak{m}(n)$, $f \in \mathfrak{m}(n+q)$, μ un entero $0 \leq \mu \leq q$, f reduce a g con índice μ si f es equivalente al germen \hat{g} donde \hat{g} está definido por

$$\hat{g}(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}) - y_1^2 - \dots - y_\mu^2 + y_{\mu+1}^2 + \dots + y_q^2 \quad 5.3$$

con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^q$.

Llamamos a g una *reducción* de f con índice μ si f reduce a g , con índice μ . Dado que el índice μ no jugará un importante rol en la discusión, decimos que g es una *reducción* de f si para algún μ , $0 \leq \mu \leq q$, f reduce a g con índice μ .

Definición 3.3.4. f reduce propiamente a g si $q > 0$, en tal caso ~~decimos que g es una reducción propia de f . f es irreducible~~ si f no tiene reducción propia.

Antes de establecer el Teorema de Clasificación de Thom veremos la noción correcta de vecindad comparada con la reducción de germenos de sus despliegues.

Definición 3.3.5. Si (G, r) es un despliegue de $gem(n)$ y existe un entero $0 \leq v \leq n$, G tiene una *singularidad simple* con índice v an \bar{o} si g es equivalente a $Q_v \in m(n)$ donde

$$Q_v(\bar{x}) = -x_1^2 - \dots - x_v^2 + x_{v+1}^2 + \dots + x_n^2 \dots \quad 5.4.$$

Definición 3.3.6. G tiene un *mínimo simple* si $v=0$ y tiene un *máximo simple* si $v=n$.

Porque es esta una vacio?, g equivalente a Q_v significa

$\langle \frac{\partial g}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial Q_v}{\partial x} \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = m(n)$. De aquí g es un despliegue universal de sí mismo con codimensión cero. Así, G es isomorfo a un despliegue constante de g y de aquí G reduce a un despliegue trivial $0 \in m(0)$. Esto es, G es equivalente a $0 + \sum_{i=1}^{q-\mu} y_i^2 - \sum_{i=1}^u y_i^2$, el cual no produce catástrofe. De aquí debemos excluir este caso cuando establecemos el teorema de Thom.

Además si f tiene un mínimo (máximo) local en 0 , el índice del punto crítico debe ser claramente 0 (n respectivamente).

Definición 3.3.7. Sea (F, r) un despliegue de $f \in \mathcal{M}(n)$. F tiene un *mínimo local* $\bar{0} \in \mathbb{R}^{n+r}$ si para cada vecindad W de 0 en \mathbb{R}^{n+r} existe un punto $(\bar{x}, \bar{u}) \in W$ tal que $F|_{(\mathbb{R}^n \times \{\bar{u}\}) \cap W}$ tiene un mínimo local en (\bar{x}, \bar{u}) .

Es importante señalar que si F tiene un mínimo local en $\bar{0}$, entonces F tiene un mínimo local cercano a $\bar{0}$. Sin embargo F puede tener un mínimo local cercano a $\bar{0}$ aunque f no tenga un mínimo en 0 . El ejemplo obvio para este caso es $f(x) = x^3$ y $F(x, u) = x^3 + \mu x$.

TEOREMA 3.3.11. (Teorema de Clasificación de Thom). Sea $f \in \mathcal{M}(n)^2$ finitamente determinado, (F, r) un despliegue estable de f y que tiene un mínimo local cercano a $\bar{0}$, y $r \leq 4$. Entonces F tiene un mínimo simple o F se reduce con índice 0 a uno de los siguientes siete despliegues irreducibles (canónicas) G_i de germes g_i

NOMBRE	g_i	G_i	CODIMENSION DEL DESPLIEGUE
DOBLES	$g_1(x) = x^3$	$G_1(x, u) = x^3 + ux$	1
CUSPIDE	$g_2(x) = x^4$	$G_2(x, u, v) = x^4 + ux^2 + vx$	2
COLA DE GOLONDRINA	$g_3(x) = x^5$	$G_3(x, u, v, w) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	3
MARIPOSA	$g_4(x) = x^6$	$G_4(x, u, v, w, t) = x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$	4
OMBLIGO HIPERBOLICO	$g_5(x, y) = x^3 + y^3$	$G_5(x, y, u, v, w) = x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$	3
OMBLIGO ELIPTICO	$g_6(x, y) = x^3 - xy^2$	$G_6(x, y, u, v, w) = x^3 + xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy$	3
OMBLIGO PARABOLICO	$g_7(x, y) = x^2y + y^4$	$G_7(x, y, u, v, w, t) = x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$	4

Para la demostración remitase a Bröcker y Lander.

CAPITULO 4

1. LA GEOMETRIA DE LAS SIETE CATASTROFES ELEMENTALES.

Ahora que se tienen la lista de las siete catástrofes elementales descubriremos sus propiedades.

Dado un potencial V , definimos la *superficie de equilibrio* M , por la ecuación

$$\nabla_x V = 0$$

donde el índice x indica que el gradiente es con respecto únicamente a las variables estado. Esta superficie es construida con todos los puntos críticos de V , i.e. con todos los puntos de equilibrio (o estables) del sistema.

Ahora encontremos el *conjunto singularidad* S , el cual es el subconjunto de M el cual consiste de todos los puntos críticos degenerados de V . ~~Estos son los puntos los cuales~~ $\nabla_x V = 0$ y también

$$\Delta \equiv \det\{H(V)\} = 0$$

donde $H(V)$ es el Hessiano de V . Entonces proyectamos S hacia

abajo en el espacio de control C (eliminando las variables estados de las ecuaciones del cual se definió) para obtener el conjunto de bifurcación B , el cual es el conjunto de todos los puntos en C en el cual los cambios en la forma de que V ocurren. Finalmente determinemos la forma de V en cada punto C .

LAS DOBLES

La gráfica de la catástrofe dobles representa el comportamiento de todos los sistemas que dependen de una sola condición de variación o factor de control.

El potencial de la catástrofe dobles esta dada por

$$V(x) = x^3 + ux$$

(algunos autores utilizan el potencial $V(x) = \frac{x^3}{3} + ux$ para simplificar los cálculos).

Así el espacio estado es de dos dimensiones. La superficie de equilibrio M es la curva

$$3x^2 + u = 0 \quad - - - - \quad 1$$

El conjunto singularidad S es el subconjunto de M para lo cual la ecuación

$$6x = 0 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 2$$

es también satisfecha, e.i. el único punto $(0,0)$. El conjunto bifurcación B es la proyección de este sobre el espacio control (i.e. sobre la línea $x=0$) y es por consiguiente el punto $u=0$ véase figura 1

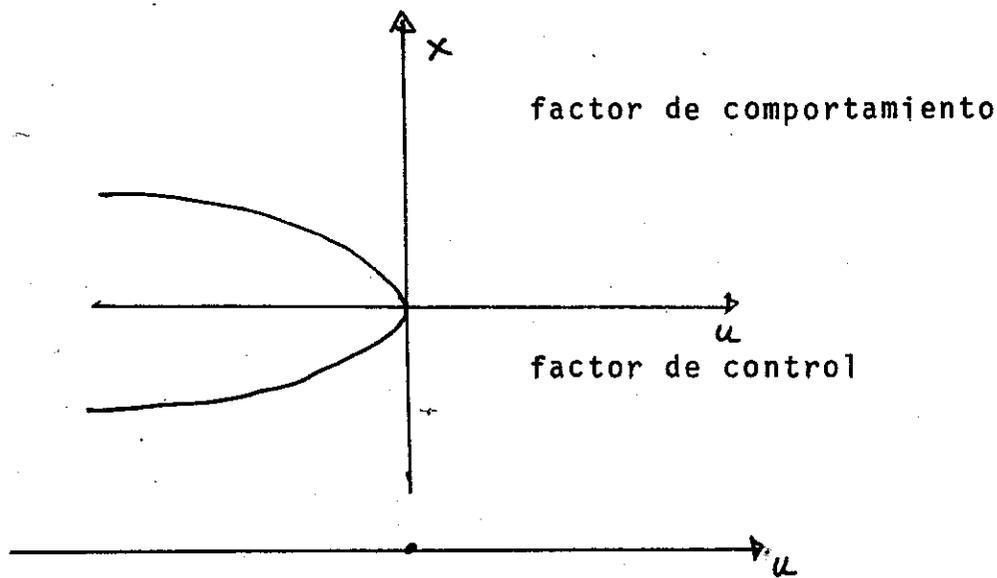


Fig. 1. La superficie equilibrio y el conjunto bifurcación de la catástrofe dobles.

El conjunto bifurcación divide el espacio control en dos regiones, el eje positivo y el eje negativo. Si $u > 0$, la ecuación (1) no tiene soluciones reales y V no tiene puntos

críticos. Si $u < 0$, V tiene dos puntos críticos un máximo y un mínimo y por consiguiente dos puntos de equilibrio uno estable y otro inestable. Sobre B (i.e. cuando $u=0$) estas se convierten en un punto de inflexión es decir un estado semiestable.

Un ejemplo de un sistema tal es una liga, en el cual el factor control es la fuerza aplicada al estirarla y el comportamiento es su tensión. Hasta un nivel crítico de fuerza, la liga esta tiesa y derecha esto es, minimiza la tensión siendo tan corta como se pueda. Sobre este nivel crítico, la liga se rompe y la tensión desaparece. La posición de las piezas sueltas es estable.

LA CUSPIDE (O RIEMANN-HUGONIOT)

La catástrofe cúspide ocurre en sistemas cuyo comportamiento depende de dos factores de control. Su gráfica (Fig. 2) es tridimensional, una superficie curva con un pliegue. De nuevo cada punto de la superficie representa un estado de equilibrio. Todos los puntos en la parte de abajo del pliegue son máximo inestable. Todos los puntos a lo largo de la línea dobles, los cuales forman el "labio" del pliegue son puntos de inflexión inestables. El resto de los puntos son mínimo es

tables.

Para ciertas combinaciones de valores de los factores de control, existen solo dos estados positivos, uno sobre la superficie superior del pliegue y otro sobre la superficie inferior abajo del pliegue. El comportamiento del sistema bajo esas condiciones es llamado "bimodal", es decir que las mismas condiciones permiten cualesquiera de los dos estados estables. (Existe una tercera posibilidad, el máximo inestable sobre la parte de abajo del pliegue, pero este es generalmente inaccesible: si el sistema ocupa este estado, cualquier perturbación lo forzará a un punto estable arriba o abajo.

El potencial para la catástrofe cúspide está dado por

$$V(x) = x^4 + ux^2 + vx$$

La superficie de equilibrio M está dada por

$$4x^3 + 2ux + v = 0 \quad (1)$$

y el conjunto singularidad es el subconjunto de M para lo cual la ecuación

$$12x^2 + 2u = 0 \quad (2)$$

es también satisfecha. Encontramos el conjunto bifurcación eliminando x de (1) y (2) y obtenemos

$$8u^3 + 27v^2 = 0$$

Para la cúspide, como realmente para todas las catástrofes elementales no existe una notación generalmente aceptada. Diferentes autores usan diferentes símbolos para los parámetros despliegues, algunos prefieren escribir V como $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ux^2 + vx$ para evitar factores numéricos en M . De otra manera algunos autores siguen a Zeeman y se refieren a los coeficientes de x y x^2 como los factores *normal* y *separación* respectivamente. Estos nombres reflejan el hecho de que cuando $u > 0$, el cambio en v sólo produce cambios suaves en x , el cual podemos llamar el comportamiento "normal" pero cuando u decrece a valores negativos "parte" a M y las discontinuidades en x pueden ocurrir

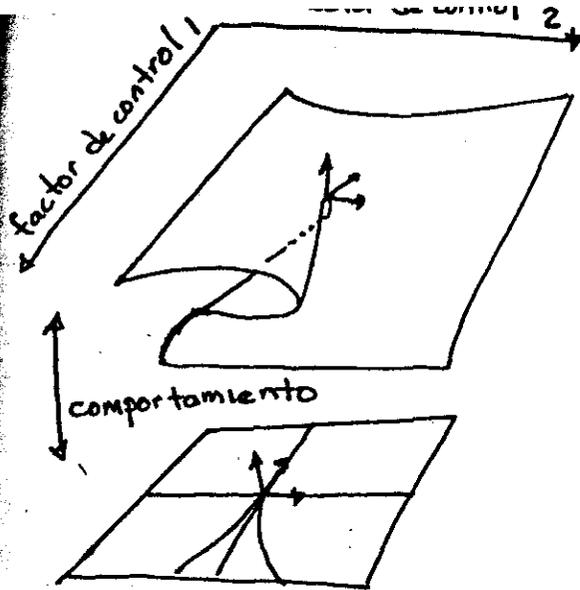
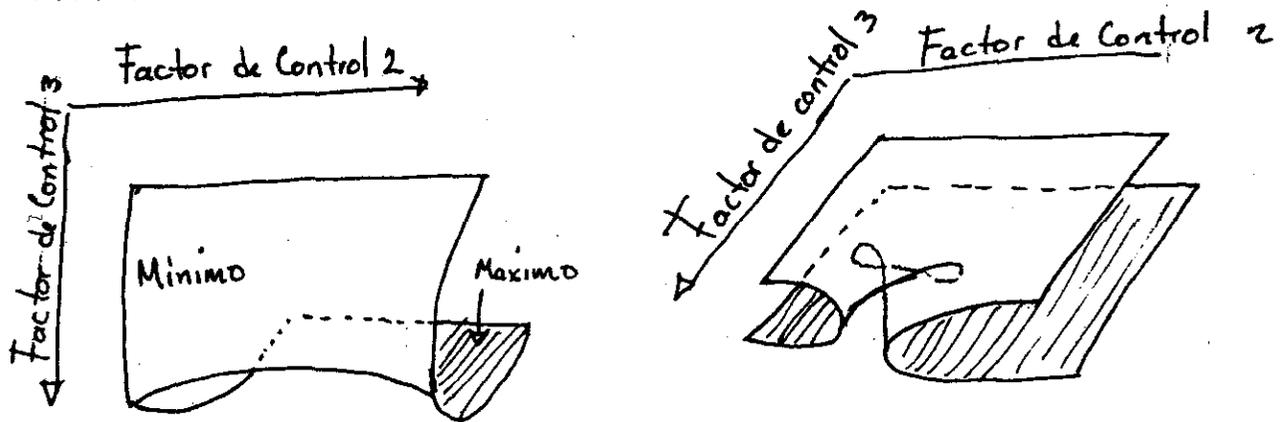


Fig. 2. La superficie de equilibrio y el conjunto bifurcación de la catástrofe cúspide.

LA COLA DE GOLONDRINA

La catástrofe cola de golondrina puede ser usada para modelar procesos en sistemas cuyo comportamiento depende de tres factores de control. Su gráfica es de cuatro dimensiones, así que un modelo tridimensional es inadecuado. Pero un corte tridimensional de la gráfica se puede obtener fijando el valor de uno de los factores de control como se muestra en la figura 3. En la parte de su rango (3a) la superficie es simplemente una hoja doblada. En la otra parte (3b) se desenvuelve un enrosque interno que se asemeja al trazo de una cola de pájaro. Fuera del enrosque, la cola de

golondrina tiene un estado estable para cada conjunto de condiciones. Dentro de la cola de golondrina se tienen dos: una línea recta a través del enrosque pasará a través de la superficie cuatro veces, dos veces un máximo y dos veces un mínimo. En un modelo de la cola de golondrina, la catástrofe ocurre cuando un sistema deja la superficie, si este es otra capa de la superficie o la posición no está sobre la superficie.



Factor de control 1 fijo

Factor de control fijo en un valor diferente.

3.a. Una vista tridimensional de ~~la cola de golondrina.~~

3.b. Otra vista de la misma gráfica.

El potencial de la cola de golondrina se da por

$$V(x) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$$

La superficie de equilibrio M es la hipersuperficie

$$5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0 \quad (1)$$

y el conjunto singularidad es el subconjunto de M para lo cual la ecuación

$$20x^3 + 6ux + 2v = 0 \quad (2)$$

también es cierta.

Es posible eliminar x directamente de (1) y (2) y de aquí encontrar la ecuación del conjunto bifurcación B , el cual es una superficie en el espacio de control tri-dimensional C . Dado que estamos interesados únicamente con el comportamiento cualitativo del sistema y por consiguiente queremos primeramente ser capaces de dibujar B , una diferente aproximación resulta ser más efectiva. Sea C_u un plano $u = \text{constante}$ en C , y sea B_u la intersección de C_u con B . Entonces B_u será una curva en C y si podemos dibujar esta curva para todos los valores de u podemos construir completamente la superficie B .

Aún con u siendo constante es mejor no eliminar x de las ecuaciones si no considerarlo como parámetro a lo largo de B_u .

Entonces observamos que (2) implica que v es una fun-

ción impar de X y esto junto con (1) implica que ω es una función par de X . De aquí ω es una función par de y y así para cualquier u la curva B_u es simétrica con respecto al eje ω .

Diferenciando (1) y (2) obtenemos

$$\frac{d\omega}{dx} = -2x \frac{dy}{dx} \quad (5)$$

y

$$\frac{dy}{dx} = -(30x^2 + 3u) \quad (4)$$

el resto de los términos en (3) se han eliminado a causa de (2). Ahora se tienen que considerar los casos $u > 0$ y $u < 0$ separadamente.

Si u es positivo, entonces $\frac{dy}{dx}$ no se anula. De aquí v es una función estrictamente monótona de x y la ecuación

$$\frac{d\omega}{dv} = -2x \quad (5)$$

es válida donde quiera. Además la ecuación (2) implica que $xv < 0$, con igualdad sólo cuando $x=y=0$ en la cual el punto ω también se anula. Se sigue que B_u es suave, que ω es grande cuando $|x|$ es grande y que el signo de $\frac{d\omega}{dv}$ es el mismo que

el de v , anulándose sólo en el origen. Esto nos permite tener la fig. 4.a.

Si u es negativo, entonces la situación es más complicada. Véase de (4) que $\frac{dy}{dx}$ se anula para dos valores reales de x , $\pm\sqrt{(-0,1)u}$. Consecuentemente $\frac{d\omega}{dx}$ se anula para 3 valores de x , estos dos junto con $x=0$ como antes, y se sigue que B_u tiene un punto crítico en $x=0$ y cúspide en los otros dos puntos.

Para determinar el tipo de punto crítico, nótese que la ecuación (2) implica que $|x| \leq \sqrt{(-0,3u)}$ el producto xv no puede ser negativo. Dado que X y v se anulan juntamente, se sigue que si v es pequeño y positivo también x lo es, y $\frac{d\omega}{dx}$ es entonces negativa. Así, juntamente con el hecho de que B_u es simétrica con respecto al eje ω se establece que el punto crítico es mínimo relativo.

~~Finalmente nótese que si $v=0$, entonces $x=0$ o $x=\pm\sqrt{(-0,3u)}$.~~
Se ha visto que $x=0$ corresponde un máximo en el origen y sustituyendo dentro de la ecuación (1), se encuentra que las otras raíces dan $\omega=9u^2/20$. De aquí B_u tiene un punto de interés sección propia, sobre el eje positivo ω . Entonces se checa que $|x|$ grande implica que $|v|$ y ω son también grandes

y entonces usando los valores del parámetro x nos lleva a que el orden de los puntos que se ha encontrado es: intersección propia, cúspide, máximo, cúspide, intersección propia, podemos dibujar fig. 4(b). Y dado que la ecuación de la línea de puntos de intersección propia es la parábola.

$$\omega = \frac{9u^2}{20} \quad v=0$$

podemos poner las curvas B_u juntas para formar la superficie B mostrado en la fig. 5. El origen del nombre "cola de golondrina" es ahora aparente.

Para encontrar la forma del potencial en cada una de las tres regiones dentro del cual B divide a C, es suficiente considerar puntos para los cuales $v=0$ y $u < 0$. Entonces la solución de la ecuación (1) es

$$x^2 = \frac{1}{10} (-3u + \sqrt{(9u^2 - 20\omega)})$$

Existen tres casos:

- a) $\omega > \frac{9u^2}{20}$ La ecuación (1) no tiene raíces reales y V no tiene puntos críticos.

b) $0 < \omega < \frac{9u^2}{20}$ Dado que $\sqrt{(9u^2 - 20\omega)}$ es menor que el real y positivo $-3u$, ambas soluciones para x^2 son reales y positivas y V tiene 4 puntos críticos, dos máximo y dos mínimos.

c) $\omega < 0$ Ambas soluciones para x^2 son reales pero una es negativa. Consecuentemente V tiene únicamente dos puntos críticos uno máximo y uno mínimo.

Así en la figura 5 no existen equilibrios estables posibles sobre la superficie, un equilibrio estable algo de la superficie, y dos dentro de la cola de golondrina

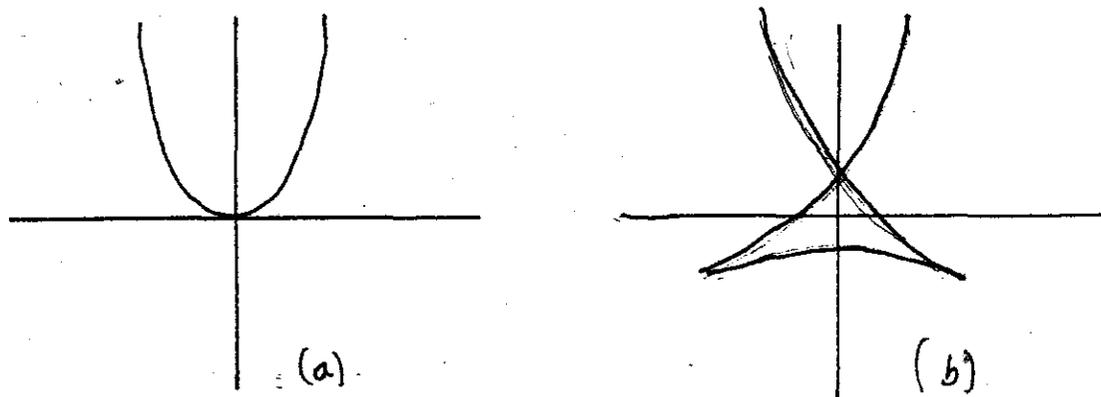


Fig. 4. Secciones transversales del conjunto bifurcación de la cola de golondrina (a) $u > 0$, (b) $u < 0$.

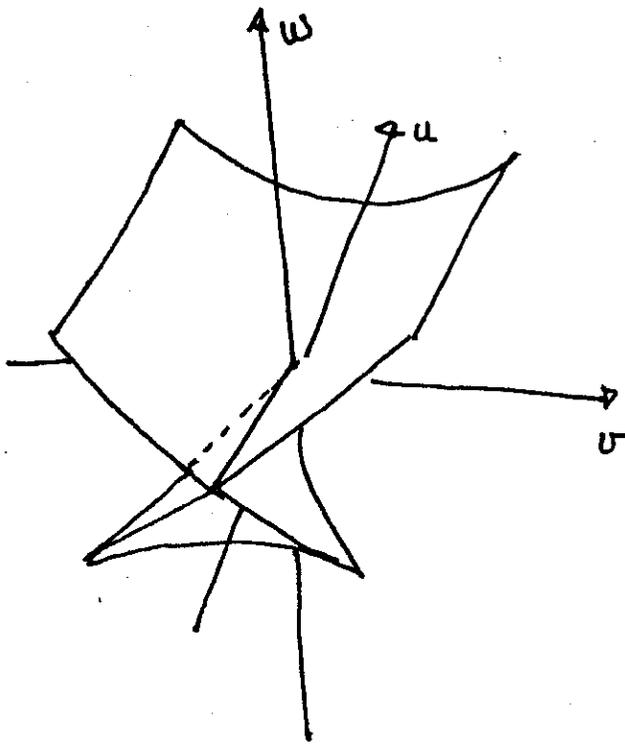


Fig. 5. El conjunto bifurcación de la cola de golondrina.

EL OMBLIGO ELIPTICO

El potencial es

$$V(x,y) = \frac{1}{3} x^3 - xy^2 + \omega(x^2 + y^2) - ux + vy$$

Hemos introducido un factor $\frac{1}{3}$ en el primer término ya ~~que esto hace los cálculos mejor, los resultados cualitati-~~ vos no son afectados por esto. El espacio estado es ahora de cinco dimensiones, es decir tres factores de control y dos de comportamiento. La superficie de equilibrio M es una hipersuperficie tri-dimensional cuyas ecuaciones son

$$x^2 - y^2 + 2\omega x - u = 0 \quad (1.a)$$

$$-2xy + 2\omega y + v = 0 \quad (1.b)$$

y el conjunto singularidad S es el subconjunto de M para lo cual

$$\begin{vmatrix} 2x+zw & -2y \\ -2y & -2x+2w \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$\Delta = 4 (\omega^2 - x^2 - y^2) = 0$$

Ahora procederemos casi de la misma forma que antes. En lugar de encontrar la ecuación de B directamente, eliminando X y Y de las ecuaciones de S, consideremos planos $\omega = \text{constante}$ y tratemos de dibujar las curvas B_ω . De la ecuación (2) véase que si ω es una constante podemos escribir

$$X = \omega \cos \theta, \quad Y = \omega \sin \theta$$

las cuales cuando se sustituyen dentro de las ecuaciones (1) nos llevan a las ecuaciones para u y v en términos de un só lo parámetro, θ :

$$u = \omega^2 (\cos 2\theta + 2\cos\theta)$$

$$v = \omega^2 (\sin 2\theta - 2\sin\theta)$$

Si $\omega=0$, entonces B_ω es un sólo punto $u=v=0$. Si $\omega \neq 0$, entonces escribimos

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \quad \text{cuando} \quad \theta = 0, \pi, \pm 2\pi/3$$

y

$$\frac{dv}{d\theta} = 0 \quad \text{cuando} \quad \theta = 0, \pm 2\pi/3$$

De aquí que existen cúspides en

$$(3\omega^2, 0), \left(-\frac{3}{2}\omega^2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\omega^2\right), \left(-\frac{3}{2}\omega^2, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\omega^2\right)$$

y una tangente vertical en $(-\omega^2, 0)$. Ahora es fácil dibujar B_ω (fig. 6), y dado que las líneas de las cúspides son claramente parábolas se puede dibujar el conjunto de la bifurcación completo (fig. 7).

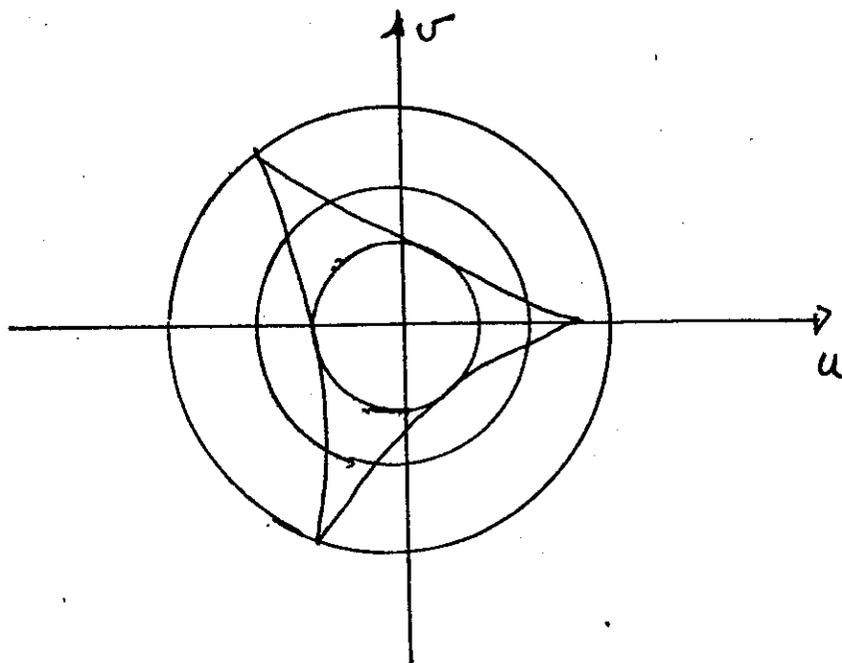


Fig. 6. Sección transversal del conjunto bifurcación del ombligo eléptico.

EL OMBLIGO HIPERBOLICO

El potencial es

$$V(x,y) = x^3 + y^3 + \omega xy - ux - vy$$

se tiene de nuevo que el espacio estado es de cinco dimensiones y el espacio de control tridimensional. ~~Nótese que~~ se han cambiado los signos de u y v para hacer los cálculos mejor. Las ecuaciones de M son

$$3x^2 + \omega y - u = 0 \quad (1.a)$$

$$3y^2 + \omega x - v = 0 \quad (1.b)$$

y el conjunto singularidad de S es el subconjunto de M para lo cual

$$\begin{vmatrix} 6x & \omega \\ \omega & 6y \end{vmatrix} = 0$$

i.e.

$$\Delta = 36xy - \omega^2 = 0 \quad (2).$$

De nuevo, la forma más simple es considerada secciones $\omega = \text{constante}$. Observemos primero que si $\omega = 0$ entonces X o Y se pueden anular. Si $x = 0$, entonces (1a) implica que $u = 0$ mientras que (1,b) requiere que v sea positivo. De esto y del resultado similar para $Y = 0$, vemos que B_0 consiste de los ejes positivos u y v .

Supóngase ahora que $\omega \neq 0$. Usemos la ecuación (2) para ~~expresar y en términos de X y sustituirlo en (1) para obtener~~ ecuaciones paramétricas para u y v :

$$u = 3x^2 + \frac{\omega^3}{36x} \quad (3,a)$$

$$v = \frac{3\omega^4}{36^2 x^2} + \omega x \quad (3,b)$$

Si $|x|$ es muy pequeña, entonces $|u|$ y $|v|$ son muy grandes. Por otra parte, v es positivo si x es pequeño y positivo o pequeño y negativo, mientras u cambia de signo (dado que este tiene el mismo que x si $\omega > 0$ y el signo opuesto si $\omega < 0$). Consecuentemente B_ω no es una curva continua, este se hace de dos piezas disjuntas.

Diferenciando la ecuación (3) con respecto a x :

$$\frac{du}{dx} = 6x - \omega^3/36x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-6\omega^4}{36^2 x^3} + \omega.$$

Ambas derivadas se anulan si y sólo si $x = \frac{\omega}{6}$, así que B_ω no tiene máximo o mínimo relativo únicamente una cúspide, la cual es localizada en $(\frac{1}{4} \omega^2, \frac{1}{4} \omega^2)$.

Si $\omega > 0$, la porción de B_ω correspondiente a $x < 0$ es suave y no tiene puntos estacionarios. Este cruzan el eje u cuando $x = \frac{-\omega}{3,4^{1/3}}$, i.e. cuando

$$v = \frac{1}{3} \omega^2 \left(\frac{1}{16^{4/3}} - \frac{1}{4^{1/3}} \right) < 0$$

La porción de la curva correspondiente a $x > 0$ tiene una cúspide pero ningún punto estacionario ni intersecciones con los ejes. De esto junto con el hecho de que la simetría de V con respecto a X y Y implica simetría de B_ω con respecto a la línea $u=v$, podemos dibujar la fig. 8.

Si $\omega < 0$, la figura es la misma, excepto que esta es la misma porción de la curva que ahora corresponde a $X > 0$. Las líneas de intersección de B con $u=v$ son de nuevo parábolas, así podemos inmediatamente dibujar B mismo (fig. 9).

El conjunto bifurcación divide al espacio control dentro de cuatro regiones y podemos examinar tres de estas considerando puntos sobre la línea

$$u=v, \omega=1$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (1) nos da

$$3x^2 + y = 3y^2 + x$$

i.e.

$$(x-y)(x+y-\frac{1}{3}) = 0$$

de modo que

$$x=y \text{ o } x+y=1/3$$

Estas son satisfechas simultáneamente únicamente en los puntos cúspide, y no hacemos consideración de aquellos que están sobre B mismo.

Si $x=y$, la ecuación (1.a) da

$$3x^2 + x - u = 0$$

la cual tiene dos raíces reales si y sólo si $u > -1/2$. Si $x+y=1/3$, entonces la ecuación (1.a) da

$$3x^2 - x + 1/3 - u = 0$$

la cual tiene dos raíces si y sólo si $u > 1/4$. Dado que $u=v=-1/12$ está sobre la porción suave de B_1 y $u=v=1/4$ es su punto cúspide, véase que existen cuatro puntos críticos en la región 1, dos en la región 2 y ninguno en la región 3. Eligiendo al azar puntos apropiados sobre la línea es fácil mostrar que en la región 1 el potencial tiene un mínimo, un máximo y dos puntos silla, mientras en la región 2

este tiene un máximo y un punto silla. Todo lo que resta está en la región 4, la cual incluye el eje negativo ω , y calculando como ya se ha hecho, podemos mostrar que el potencial tiene un punto silla y un mínimo.

Así el potencial para el ombligo hiperbólico como para el ombligo elíptico, pueden tener más de un equilibrio estable

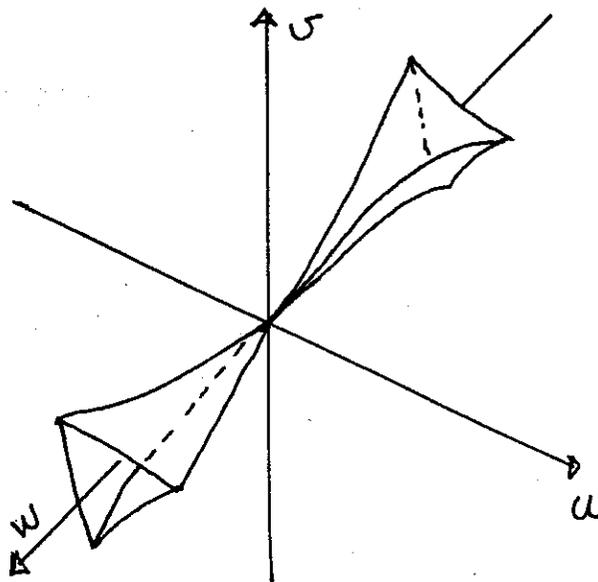


Fig. 7. El conjunto bifurcación del ombligo elíptico.

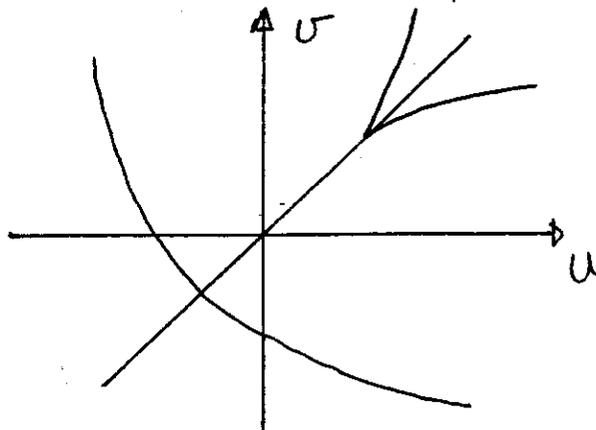


Fig. 8. Sección transversal del conjunto bifurcación del ombligo hiperbólico.

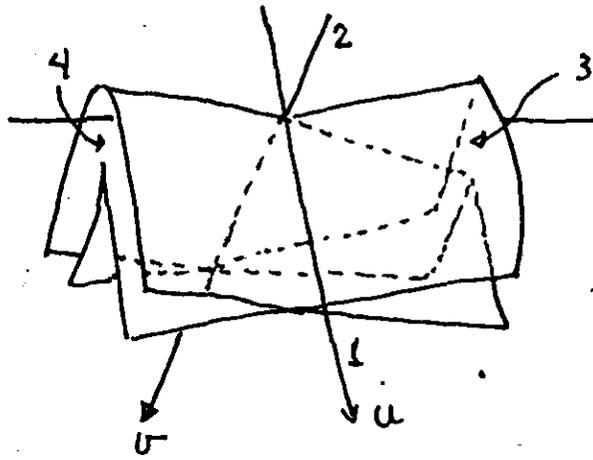


Fig. 9. El conjunto bifurcación del ombligo hiperbólico.

LA MARIPOSA

El potencial es

$$V(x) = x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + \omega x$$

tenemos de nuevo el espacio estado es de cinco dimensiones, pero el espacio de control es de cuatro dimensiones, por lo que ~~no podemos dibujar el conjunto bifurcación la más útil~~ aproximación aparece dibujando las curvas B_{tu} , i.e. las secciones de B por el plano $t = \text{constante}$ y $u = \text{constante}$ para valores diferentes de t y u (recuérdese que en \mathbb{R}^4 un plano tiene códimensión 2 y por consiguiente especificado por dos ecuaciones). En efecto hacemos los cálculos explícitamente para $u=0$, y esto es suficiente para demostrar las características

de la catástrofe mariposa.

La superficie de equilibrio M es la hipersuperficie

$$6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2vx + \omega = 0 \quad (1)$$

y el conjunto singularidad S es el subconjunto de M para lo cual

$$30x^4 + 12x^2t + 6ux + 2v = 0 \quad (2)$$

Teniendo t y u fijos y usando x como un parámetro a lo largo de B_{tu}

$$-v = 15x^4 + 6tx^2 + 3ux \quad (3)$$

$$\omega = 24x^5 + 8tx^3 + 3ux^2 \quad (4)$$

Si $t=u=0$, podemos eliminar x :

$$-(v/15)^5 = (\omega/24)^4$$

así B_{00} es una simple cúspide. Para ver que sucede para otros valores de t y u diferenciamos (3) y (4)

$$-\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 12tx + 3u \quad (5)$$

$$\frac{d\omega}{dx} = 120x^4 + 24tx^2 + 6ux \quad (6)$$

Nótese que $\frac{d\omega}{dx}$ sólo se anula si $x=0$ y que ambas derivadas se anulan si

$$20x^3 + 4tx + u = 0 \quad (7)$$

Las ecuaciones (5) y (6) no tienen otros ceros, así B_{tu} puede tener una tangente vertical (la cual debe estar en el origen) o cúspide, pero no tangentes horizontales.

Dado que la ecuación (7) es cúbica debe siempre tener al menos una raíz real, y B_{tu} debe tener por consiguiente siempre, al menos una cúspide. Existirán tres cúspides si todas las raíces de (7) son reales, y la condición para esto es que

$$u^2 + 4\left(\frac{4t}{3}\right)^3 < 0$$

Esta condición no puede ser satisfecha si t es positivo, y así t es llamado el factor "mariposa" para recordarnos que este es esencial cambiando esta variable, progresando de una simple curva cúspide a una con forma como de mariposa. La va

riable u es llamada el factor "bias" dado que B_{tu} es simétrica con respecto al eje v sólo si $u=0$ (por un argumento similar que se usa para establecer la simetría de la cola de golondrina). Y ω y v son llamadas las variables "normal" y "separación" respectivamente, ya que estas juegan el mismo papel que las variables normal y separación de la cúspide ca-tástrofe.

Ahora poniendo $u=0$, las ecuaciones (3)-(6) se transforman en

$$-v = 15x^4 + 6tx^2 \quad (8)$$

$$\omega = 24x^5 + 6tx^3 \quad (9)$$

$$-\frac{dv}{dx} = 60x^3 + 12tx \quad (10)$$

$$\frac{d\omega}{dx} = 120x^4 + 24tx^2 \quad (11)$$

Si $t > 0$, se ve fácilmente que v es siempre negativo, que ~~existe una cúspide en el origen~~ y que B_{tu} es una curva cúspide simple.

Si $t < 0$, las dos derivadas se anulan en $x=0$ y $x = \pm\sqrt{-t/5}$ así existen tres cúspides. Sustituyendo directamente en (8) y (9) se puede mostrar que las dos cúspides que no están en el origen se encuentran en la mitad del plano superior.

Finalmente localizemos las intersecciones con los ejes:

$$v=0 \text{ implica que } x=0 \text{ o } x^2 = -6t/15$$

$$\omega=0 \text{ implica que } x=0 \text{ o } x^2 = -t/3$$

Aparte del origen, encontramos que existen dos intersecciones con el eje ω y sólo una con el eje v , casi los dos valores $\pm\sqrt{-t/3}$ da el mismo valor (positivo) de v a saber $t^2/3$. De aquí que existe un punto de intersección propia sobre el eje v . Después de checar que v y ω tienen el comportamiento indicado para grandes valores de $|x|$ podemos dibujar la fig. 10.

Para encontrar las formas del potencial para diferentes regiones podemos empezar tomando $u=\omega=0$ de modo que la ecuación de M se convierte en

$$6x^5 + 4tx^3 + 2vx = 0$$

Una raíz es obviamente $x=0$ y las otras cuatro están dadas por

$$x^2 = \frac{1}{3} (-t \pm \sqrt{t^2 - 3v})$$

Si $t > 0$, entonces x^2 tiene un sólo valor real positivo si y sólo si $v < 0$. De aquí que existen tres equilibrios (dos estables y uno inestable) dentro de la cúspide, pero sólo un equilibrio (estable) fuera de este, exactamente como para la cúspide catástrofe.

Si $t < 0$, existen tres casos

- (a) $v < 0$ tres equilibrios, dos estables y uno inestable.
- (b) $0 < v < t^2/3$ cinco equilibrios, tres estables y dos inestables.
- (c) $v > t^2/3$ un equilibrio estable.

Estos resultados son fácilmente establecidos por argumentos exactamente similares a aquellos empleados en la discusión de la cola de golondrina. Podemos tratar con las dos regiones restantes sin hacer ningún cálculo, notando que cuando cruzamos el conjunto bifurcación de una cúspide, entonces en general (lo cual significa que no cruzamos un punto especial tal como un punto de intersección propia) sumamos o substraemos un par de equilibrios uno estable y otro inestables.

Finalmente en la fig. 11 se muestra la superficie de equilibrio M como una función de x, v, ω para $u=0$ y $t < 0$. Esto ilustra la similitud entre la mariposa y la cúspide y por supuesto para $t > 0$ las superficies son equivalentes.

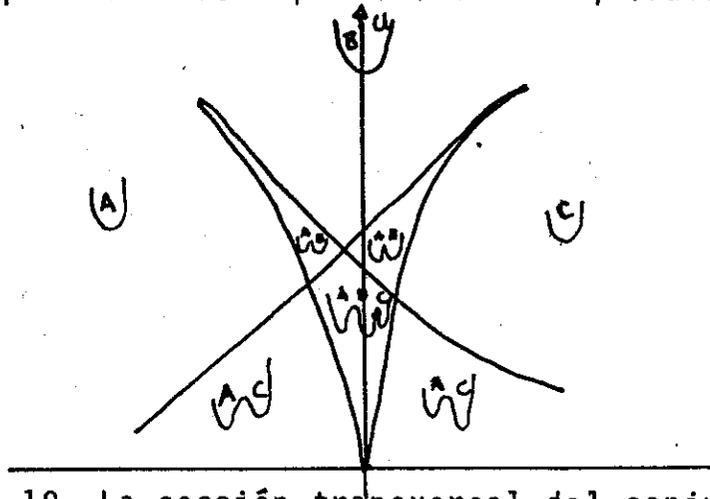


Fig. 10. La sección transversal del conjunto bifurcación de la mariposa con $u=0$ y $t < 0$.

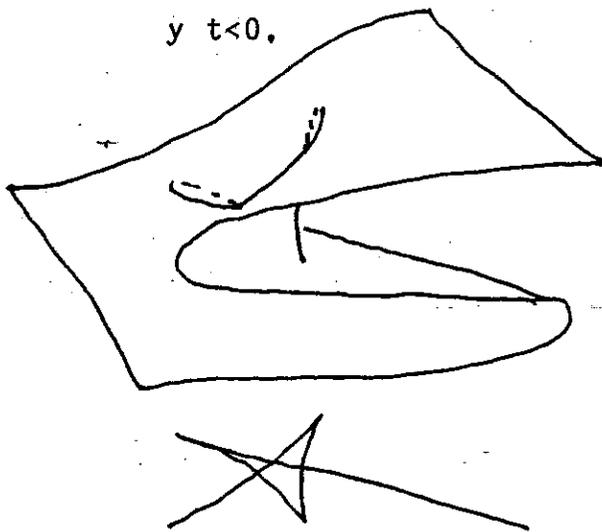


Fig. 11. La superficie de equilibrio de la mariposa con $u=0$ y $t < 0$.

EL OMBLIGO PARABOLICO

Tomando el potencial como

$$V(x,y) = y^4 + x^2 + \omega x^2 + ty^2 - ux - vy$$

La superficie de equilibrio M esta dada por las ecuaciones

$$2xy + 2\omega x - \omega = 0 \quad (1,a)$$

$$x^2 + 4y^3 + 2ty - v = 0 \quad (1,b)$$

y el conjunto singularidad S es el subconjunto de M para lo cual

$$\begin{vmatrix} 2y+2 & 2x\omega \\ 2x & 12y^2+2t \end{vmatrix} = 0$$

i.e.,

$$(y+\omega)(6y^2+t) = x^2 \quad (2)$$

El espacio estado es de seis dimensiones, cuatro factores de control y dos de comportamiento por lo que tratar de dibujar el conjunto bifurcación es algo más difícil que los anteriores. Para ver esto de una forma detallada remítase a Pastor y Ian Stewart.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Arnold V.I. Critical points of smooth functions and their normal forms. Russian Math Surveys 30 I-75, 1975.
- [2] T. Bröcker and Lander. Differentiable Germens and Catastrophes. London Math. Society Lectures Notes Series 17, Cambridge Univ. Press 1975.
- [3] Chillingworth D.R.J. Elementary Catastrophe theory. Bull, Inst. Math. Applic. II 155-159, 1975.
- [4] Gibson C. G. Singular Points of smooth mappings Lecture Notes in Math. 563. Springer-Verlag, Berlin and New York 1979.
- [5] Gilmore Robert. Catastrophe Theory for Scientists and Engineers, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons. 1981.
- [6] M. Golubitsky and Guillemin. Stable Mappings and their Singularities. Springer Verlag, Graduate ~~texts in Math. 14 (1973).~~
- [7] Lu, Y.-C. Singularity theory an Introduction to Catastrophe theory. Springer Verlag New York inc. 1976.
- [8] Mather, J. Stability of C^∞ - mappings Infinitely determined map germs. Publ. Math. I Hes 35, 1968.

- [9] Mather, J. Stability of C^∞ -mappings V. Transversality
adv. Math. 4 1970.
- [10] J. Milnor. Morse Theory. Ann. of Math. Studies 51,
Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1963.
- [11] T. Poston and N. Stewart. Taylor expansions and Ca-
tastrophes. Research Notes in Math. 7. Pitman. Publis
hing, London 1976.
- [12] Tim Poston and Ian Stewart. Catastrophe Theory and
its applications.
- [13] P.T. Saunders. An introducción to Catastrophe Teory
Lecturer in Mathematics, Queen Elizabeth College Uni
versity of London. Cambridge Universite Press 1980.
- [14] Thom R. Structural Stability and Morphogenesis. New
York Benjamin 1975.
- [15] Trotman, D.J.A. and Zeeman E.C. Clasificación of ele
mentary catastrophes of codimension ≤ 5 . In Structural
Stability, the theory of Catastrophes, and aplications
in the Sciences. Lecture Notes in Mathematic 525.
Spring-Verlag Berlin and New York 1976.
- [16] Woodcock and Davis. Catastrophes theory. Avon, Publis
hers of Bard, Camelot and Discus Books 1980.
- [17] Wasserman G. Stability of Unfoldings. Lecture Notes
in Math. 393. Springer-Verlag and New York 1974.
- [18] Zeeman E.C. Catastrophe theory: Selected Papers (1972-
1977). Addison-Wesley Reading, Mass., 1977.