Tesis # 47

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

DINAMICA DE POBLACIONES

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

OMAR CUEVAS SALAZAR

HERMOSILLO, SONORA JULIO DE 1986.

INDICE

CAPITULO IV

P R E S E N T A C I O N

El presente trabajo tiene por objetivo discutir y analizar algunos modelos matemáticos que recientemente se han desarrollado para estudiar el comportamiento de poblaciones, asi como para el diseño de políticas para el aprovechamiento óptimo de distintos tipos de recursos bióticos.

En este trabajo desarrollaremos varios modelos para la dinámica de poblaciones tanto de carácter continuo como discreto.

En el capítulo I, se mencionan algunos modelos de tiempo continuo para determinar el tamaño de una población a futuro, en las cuales las tasas de crecimiento dependen del estado - presente. Se examinan primero distintos casos sin considerar limitantes (de alimento, espacio, etc.), y enseguida se imponen algunas restricciones.

Se discute en particular una aplicación a problemas derivados de la pesca y se demuestra que bajo leyes de crecimiento de la forma $\frac{dy}{dt} = rx(1- \frac{x}{k})$ y retiro $h= qEx$ donde E es el esfuerzo pesquero, que es la relación existente entre la producción por unidad de pesca y el rendimiento por área en un lapso determinado de tiempo y q es una constante llamada coeficiente de capturabilidad, se tiene un equilibrio único $x_1 = k(1 - E/r)$ para cualquier $E<r$. Además, el "rendimiento sostenible" llegará a su nivel máximo cuando $E = r/2 (x_1 = k/2)$ y declinará a cero si $E = r(x_1 = 0)$.

Para terminar el primer capítulo, se ve el caso de 2 poblaciones interactuando, el modelo que se desarrolla es el modelo de Lotka-Volterra para un sistema presa rapaz. Las ecuaciones que se analizan en este modelo no tienen solución por medio de integración, pero se analiza el sistema por un método que se debe a Volterra.

En el capítulo II, se analiza el modelo matricial de Leslie para poblaciones estratificadas. Este modelo de tiempo discreto sirve para determinar la distribución de edad de una población humana, animal o vegetal a futuro, con la suposición de que los porcentajes de nacimiento y supervivencia permanecen siempre constantes. Además, se desarrollan 2 ejemplos para ver cuál es el comportamiento de las potencias de las matrices. Estos 2 ejemplos indican que el conocimiento de valores propios y vectores propios ayudan a entender ese comportamiento.

En el capítulo III, se estudia el problema de la estabilidad de la estructura de una población estratificada y se demuestra el teorema de Perron Froebenius para matrices de Leslie. De esto se concluye que la matriz de Leslie tiene un único valor propio real positivo (λ_1) y un vector propio correspondiente con todas sus entradas positivas. Otra cosa que se puede decir es que $|\lambda_1| \geq |\lambda_j|$, donde λ_j es cualquier otro valor propio de la matriz de Leslie, y la desigualdad estricta se cumple bajo ciertas condiciones para la matriz de Leslie que mostramos en el teorema III. Es importante que se cumpla la desigualdad estricta porque de otra manera, la población oscilará con un período de n unidades de tiempo, un ejemplo en el capítulo II ilustra el hecho.

Por último, se concluye que el comportamiento a futuro del vector de la distribución de edades depende del valor propio y del vector propio correspondiente, y para cualquier vector de la distribución inicial de edades que se tome, el vector de la distribución $x^{(k)}$ para k grandes se aproxima a una distribución límite y ese límite se conoce como la distribución de edad estable.

El programa en FORTRAN IV para encontrar valores propios y vectores propios de una matriz cuadrada se muestra también en esta unidad.

En el capítulo IV, se muestra una aplicación a la administración de rebaños que se refiere al diseño de políticas de retiro para distintos problemas de control sobre el tamaño y la estructura de la población a futuro. De una manada con determinado número de cabezas, se "retiran" un cierto número de cabeza adultas cada año y la manada restante se deja para que se reproduzca con sus propias crías. Se analizan algunos casos en los que se quiere establecer la cantidad y estructura de una manada inicial de tal manera que el siguiente año se pueda retirar lo que se desee y tener una manada en el "año 1" igual a la del "año 0" o tener una manada que aumente durante los primeros 2 años en un 30%. También se analizan algunos casos en los que se quiere establecer el retiro que debe de tomarse de una manada inicial, si el tamaño de la manada debe conservarse en el futuro o si se quiere doblar en 10 años.

Los puntajes de nacimiento y supervivencia, fueron obtenidos (hace 4 años) de la experiencia del ingeniero especialista en zootecnia Rodrigo Preciado Torres, quien fungía en aquel entonces como técnico en ganadería de la SARH en la región Río Sonora.

Se anexa un programa para computadora (apéndice C), en el cuál se obtiene la distribución de la clase de edad y el tamaño total de la población de cada año, durante 20 años, también se obtienen los porcentajes de cada una de las clases de edad. Este programa se corrió varias veces con diferentes porcentajes de retiro, y en algunos se observa (en el 5to. año) que un retiro no adecuado guía a la población a la desaparición.

En el ejemplo III, se analiza un modelo para la administración de un bosque, en el que la distribución de las clases se toma por diferentes alturas de los árboles y diferentes costos. Se comienza con una distribución de árboles de diferentes tamaños y se dejan crecer un cierto período, después se cortan algunos y los que no se cortan deben de guardar la misma configuración de alturas del bosque original para que así la explotación sea racional y duradera, y significa que el rendimiento obtenido al término de cada período es el mismo y la configuración del bosque se conserva al cortar los árboles cada período. En este modelo se trata de encontrar el rendimiento óptimo duradero (YLd) del bosque y es el máximo rendimiento continuo del bosque sin que se agote, y para esto se utiliza un resultado de la programación lineal que es básico para el desarrollo del modelo, y es que el YLd se logra cortando todos los árboles de una misma clase y ninguno de las demás -

clases. En este ejemplo en realidad la mátriz de transición no se opera, nada más se obtienen los porcentajes de supervi vencia de una clase a otra, para con esto en contra el YLd. Pero como quiera que sea, es un ejemplo de una población estratificada y si se quiere conocer la distribución de las clases, solo hay que operar la matriz de transición.

Es claro que estos modelos son solo modelos. No previenen fenómenos naturales tales como catástrofes, sequías, terremotos, etc. que no son difíciles de ocurrir.

Así finalmente también se incluyen dos programas en BASIC, uno de ellos para calcular las potencias de una matriz cuadrada y se corren para encontrar las potencias de la matriz A y B del capítulo II. El otro programa calcula la inversa de una matriz cuadrada y se calcula la matriz inversa de M para el ejemplo I del capítulo IV.

CAPITULO I

MODELOS DE TIEMPO CONTINUO

1.1 INTRODUCCION

Analizaremos algunos modelos matemáticos para la explotación de recursos biológicos. Estos modelos se basan en una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) - h(t) \qquad (1.1)$$

x(t): Denota el tamaño del recurso de la población en el tiempo t.

f(x): Es una función dada que representa la tasa de crecimiento natural de la población, que depende de la población presente

h(t): Representa la tasa de "retirados", "removidos" o "cosechados". En este caso es una función que solo depende del tiempo y no de la población presente.

Cuando la tasa de "retiro" h(t) excede la tasa de crecimiento natural f(x(t)), ec. (1.1) indica que el nivel de la población decrecerá; esto significa que $\frac{dx}{dt}(t)<0$, y viceversa. Si h(t)= f(x(t)) para algún tiempo t entonces, la población permanecerá en un nivel constante para ese tiempo t.

1.2 MODELO DE CRECIMIENTO LOGISTICO:

Supóngase que,en una cierta población, la tasa de crecimiento b y la tasa de mortandad m, son proporcionales al tamaño de la población x. Sea r= b-m la tasa de crecimiento proporcional neta entonces, se obtiene la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = rx$ (1.2)

Como un modelo de tiempo continuo de crecimiento de población. La solución de la ecuación (1.2) es

$$x(t) = x(0)e^{rt},$$

que crece exponencialmente a infinito si $r>0$ y decrece exponencialmente a 0 si $r<0$.

Bajo condiciones ideales, donde la disponibilidad de espacio y otros recursos no impiden el crecimiento, muchas poblaciones biológicas crecen en un principio con una tasa - aproximadamente exponencial. Tal proceso no puede seguir indefinidamente. Como el nivel de población x aumenta, algunas limitaciones ambientales deben obligar a la tasa de crecimiento proporcional a declinar. Un elemento es rechazado cuando la demanda hecha por la población existente impide más crecimiento y la población se encuentra entonces en su "nivel de saturación" o "capacidad de carga".

1.3 MODELO LOGISTICO DEPENDIENTE DE LA DENSIDAD

Con el efecto descrito anteriormente, el modelo se modifica a la forma:

$$\frac{dx}{dt}(t) = r(x)x \qquad (1.3)$$

$r(x)$: Es alguna función decreciente de x.

La tasa de crecimiento proporcional $r(x) = \frac{f(x)}{x}$ ahora depende del nivel de la población x. Si $r(x)$ es una función decreciente de x, este modelo se dice describir un proceso de compensación que controla el crecimiento de la población a medida que su nivel aumenta.

La ecuación logística, propuesta primero por Verhulst en 1838, como un modelo de población es obtenida cuando $r(x) = r(1 - \frac{x}{k})$, así que la ecuación (1.3) se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) = f(x) \qquad (1.4)$$

$\dot{x} =$

donde r, supuesta positiva, es llamada tasa de crecimiento intrínseco. La tasa de crecimiento proporcional para x pequeñas es aproximadamente igual a r. La constante positiva k es llamada nivel de saturación o capacidad de carga.

Obsérvese que la ecuación (1.4) tiene 2 soluciones de equilibrio, en x=0 y en x=k. Además si $0<x<k$, se tiene $\frac{dx}{dt}(t)>0$, y si $x>k$, entonces $\frac{dx}{dt}<0$. K es un equilibrio estable, para $x>0$, además, es asintóticamente estable, en el sentido que $\lim_{t\to\infty} x(t)= K$, siempre que $x(0)>0$. ?

Este hecho se ilustra en las siguientes figuras

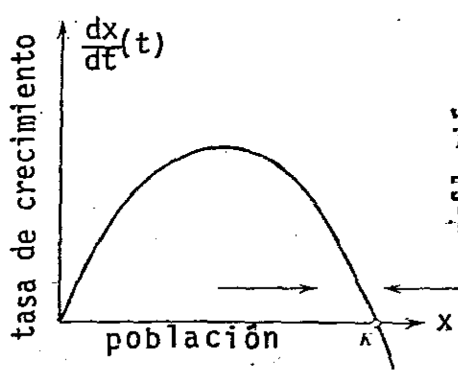

Figura 1

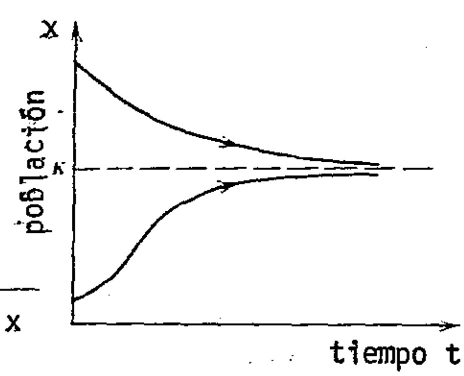

Figura 2

FIGURAS: La Ecuación Logística:

Fig. 1.- La función de crecimiento logístico $f(x)= rx(1- \frac{x}{k})$.

Fig. 2.- Típicas curvas de solución.

La figura 1 muestra la función de crecimiento - $f(x)= rx(1- \frac{x}{k})$ y las flechas indican la dirección de cambio de $x(t)$ con incremento t.

La figura 2 ilustra 2 curvas de solución $x(t)$ aproximándose al equilibrio k por arriba y por abajo. La cruva de abajo es llamada curva de crecimiento logístico.

La ecuación diferencial (1.4) se resuelve por separación de variables, y su solución es

$$x(t)= \frac{k}{1+ce^{-rt}}$$

donde $c= \frac{k-x_0}{x_0}$ y $x_0 = x(0)$.

Aquí se ve claramente que cuando $t\to\infty$, $x(t)$ converge a k.

1.4 MODELOS DE POBLACIONES CON RETIRO.

Supóngase que la población descrita por la ecuación logística (1.4) está sujeta a "retiro" con una tasa $h(t)$. Entonces la ecuación (1.4) queda

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))- h(t) \qquad (1.5)$$

Estudiemos el comportamiento dinámico de la población. Un caso aparece cuando el "retiro" es constante, o sea $h(t)= h=$ constante:

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) - h \qquad (1.6)$$

cuando h es menor que el $\max f(x(t))= rk/4$, la ecuación (1.6) posee dos equilibrios x_1 y x_2, como lo indica la figura 3.

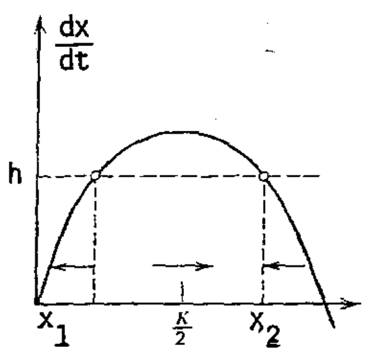

Figura 3

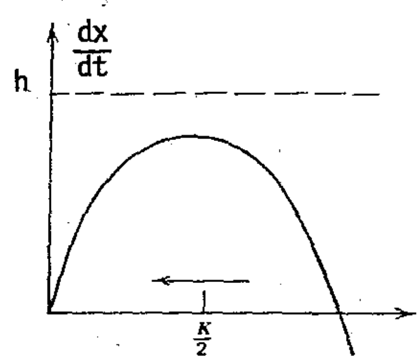

Figura 4

FIGURAS: Modelo logístico con tasa de retiro constante h:

Fig. 3.- $h<\max F(x(t))$

Fig. 4.- $h>\max F(x(t))$

Aquí se observa que $\frac{dx}{dt}(t)>0$ cuando $x_1<\frac{dx}{dt}(t)<x_2$ y que $\frac{dx}{dt}(t)<0$ en las otras partes. Así, x_2 es un equilibrio estable y x_1 un equilibrio no estable. O sea, cuando $x>x_1$ entonces,

$x(t)$ convergerá asintóticamente bajo "retiro" constante, al equilibrio x_2. Si $x<x_1$, $x(t) \rightarrow 0$, pero no asintóticamente. Entonces, $x(t)$ es reducido a cero en un tiempo finito.

Otro caso sería cuando $h>\max f(x(t))$, como lo indica la figura 4, la población tiende a cero para cualquier nivel inicial $x(0)$.

Finalmente, en el caso cuando $h=\max f(x(t))$, hay un equilibrio único en $x_1= k/2$, el cual es "semiestable" en el sentido que $x(t) \longrightarrow x_1$ cuando $x(0)>x_1$ y $x(t) \longrightarrow 0$ cuando $x(0) < x_1$.

A pesar de las restricciones del modelo, de la ecuación (1.6) surgen varias predicciones. Primero, existe un "máximo rendimiento sostenible" (MRS) tal que $h_{MRS}= \max f(x(t))$ con la condición de que cualquier tasa de retiro grande guiará a la desaparición a la población. Segundo, el nivel de la población $x= x_{MRS}$ en el cuál la productividad del recurso es maximizado, no es el nivel de equilibrio k; en este modelo, es solamente la mitad del nivel. Realmente, no hay "rendimiento sostenible" en el nivel de población $x=k$.

1.5 ESFUERZO PESQUERO.

La razón de pesca dividida por el esfuerzo es casi siempre tomada como una indicación del nivel patrón de la población de peces. Se usará la siguiente frase para suponer que pesca-por-unidad- de esfuerzo es proporcional al nivel patrón, o que

$$h= qEx \qquad (1.7)$$

donde E: denota esfuerzo y q: es una constante llamada coeficiente de capturabilidad.

Ya que para los fines que se quiere llegar no es necesario unidades de esfuerzo, se puede normalizar unidades por conveniencia: q=1 entonces, sustituyendo la ecuación (1.7) en la ecuación (1.5) queda:

$$\frac{dx}{dt}(t)= f(x(t))- Ex = rx\,(1-x/k)- Ex \qquad (1.8)$$

Unicamente se considerará el caso cuando E sea constante. Para saber cuál es el equilibrio de la ecuación (1.8), determinaremos cuando $\frac{dx}{dt}(t)= 0$ entonces:

$$rx(1- x/k)- Ex= 0$$

así $$1-x/k = E/r$$

por lo que $$x_1= k(1-E/r)$$

Para cualquier $E<r$ se observa que x_1 es un equilibrio único diferente de cero.

Además, este equilibrio es asintoticamente estable:

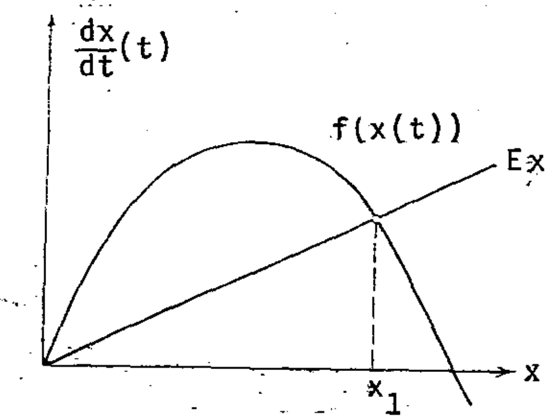

Figura 5

Figura 5.- Modelo logístico con tasa de esfuerzo constante E.

El equilibrio "retiro" o "rendimiento sostenible" $Y=\bar{h}$ correspondiente a E está dado por la ecuación $Y=Ex_1= KE(1-E/r)$ siempre y cuando E sea mayor que r. La gráfica de esta ecuación es una parábola (ver figura 6), graficando E contra y queda:

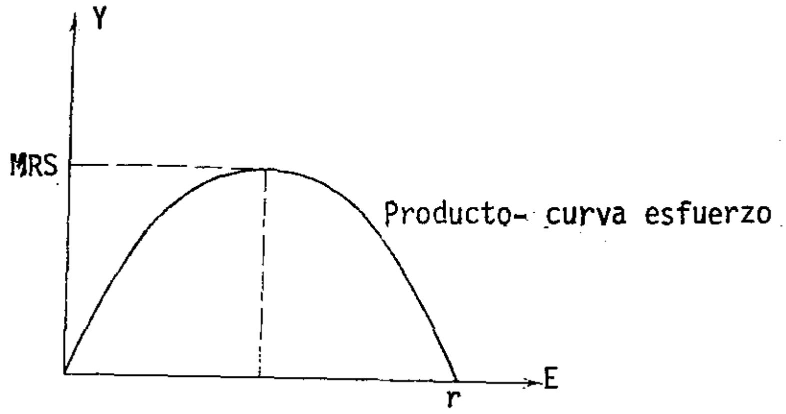

Figura 6

Este modelo es llamado modelo "Schaefer" en honor al biólogo M.B. Schaefer.

Cuando el esfuerzo aumenta, el rendimiento sostenible se elevará a un nivel máximo en $E=r/2$ ($x_1=k/2$) y declinará uniformemente hacia cero en $E=r$ ($x_1=0$).

1.6 MODELO PARA SISTEMAS DE POBLACION.

Cuando dos tipos de poblaciones viven en un mismo sistema ecológico pueden interactuar de diferentes maneras; algunas se resumen a continuación:

i) Depredación: Si la población A es depredadora de B entonces la población B alimenta a la población A. Cuando la población A tiene como única fuente de alimento la población B entonces, la depredación se dice ser absoluta. Y si la población B es una de tantas fuentes de alimento entonces, la depredación se dice ser relativa.

ii) Competencia: Cuando las poblaciones A y B tienen que recurrir al mismo recurso natural entonces, se dice que las poblaciones están compitiendo. Por ejemplo, las poblaciones A y B puede competir por alimento, por espacio físico habitable, etc.

iii) Simbiosis: Cuando la población A depende en cierto modo de la población B, y al mismo tiempo A estimula el crecimiento de la población B entonces, se dice que A y B viven en Simbiosis.

El caso general de dos poblaciones que interactúan puede expresarse por medio del sistema de ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_2(x,y)$$

donde x indica el número de elementos de la población A e y el número de elementos de la población B.

Aquí se analizará un ejemplo para el caso i).

1.7 ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA PARA UN SISTEMA PRESA-RAPAZ.

En el mundo hay una lucha por subsistir entre los diferentes animales que se desenvuelven en el mismo medio. Un ejemplo clásico es el de los zorros y los conejos. Los zorros tratan de comerse a los conejos y éstos tratan de esconderse para evitar se devorados por los zorros.

Este sistema dinámico fué propúesto por Lotka (1925) y Volterra (1931) como un modelo de interacción presa-rapaz.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -sy + \beta xy \end{aligned} \qquad (1.9)$$

donde r,s,α,β son constantes positivas, $x=x(t)$ representa la población de la presa e $y=y(t)$ representa la población rapaz.

Estas ecuaciones (1.9) constituyen un modelo de un sistema ecológicamente aislado presa-rapaz en el sentido, que la población rapaz es la única que controla la presa y la población de la presa es el único alimento para la población rapaz.

Si $y=0$ la población de la presa crece exponencialmente, y si $x=0$ la población rapaz muere con tendencia exponencial.

Este sistema no se puede resolver en términos de funciones elementales, pero se hará lo siguiente:

Se elimina dt en (1.9) y resolviendo la ecuación diferencial que queda, se tiene:

$$\frac{dx}{x(r-\alpha y)} = \frac{dy}{-y(s-\beta x)}$$

separando variables

$$-\frac{(s-\beta x)}{x}dx = \frac{(r-\alpha y)}{y}dy$$

así $\quad y e^{r-\alpha y} = x^{-s} e^{\beta x} c \qquad (1.10)$

de donde $\quad c = x_0^s \, y_0^r \, e^{-\beta x_0} \, e^{-\alpha y_0}$

donde x_0, y_0 son las condiciones iniciales.

La ecuación (1.10) no se puede resolver para ninguna variable x o y, pero se puede determinar puntos en la curva por el método propuesto por Volterra.

Se igualan el lado derecho e izquierdo de la ecuación (1.10) con nuevas variables $U=y^r e^{-\alpha y}$, $V= x^{-s} e^{\beta x} c$ (1.11)

Con un poco de cálculo, se puede obtener de la primera función un máximo en $y=r/\alpha$, dos puntos de inflexión en Y= $x=\frac{r\pm\sqrt{r}}{\alpha}$, y cuando y=0, U=0. La segunda función tiene un mínimo en $x=s/\beta$. Trazaremos las 2 gráficas como lo indica la Fig. 7.

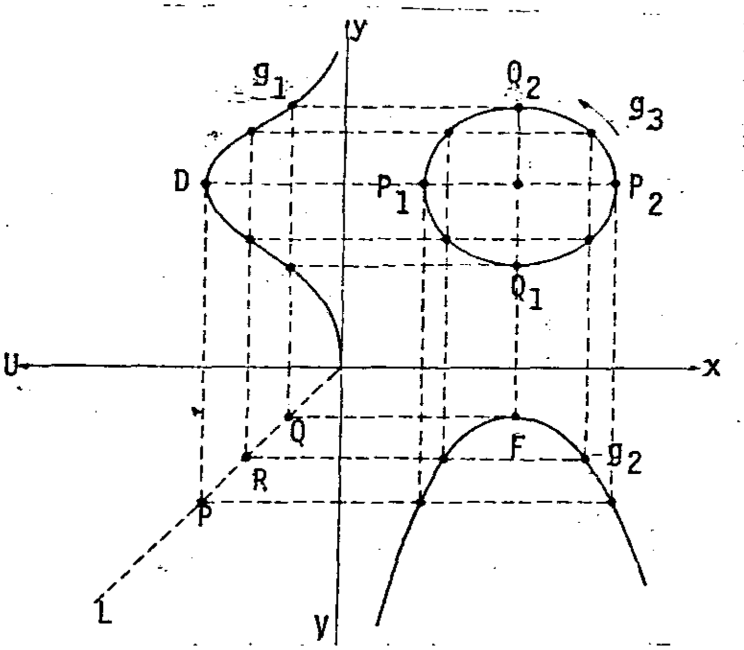

Figura 7

Como U=V, en el III cuadrante de la gráfica que se tiene es la recta a 45°. Trazando paralelos y perpendiculares a los ejes que pasen por los puntos graficados en el segundo y cuarto cuadrante, se obtiene la gráfica que está en el I cuadrante. O sea, el punto D que es el máximo de la curva g_1 le corresponde dos x y una y, que son los límites donde x varía, por medio del punto P que está sobre la recta L. Del mismo modo, al punto F que es el mínimo de la curva g_2, le corresponde una x y dos y, que son los límites donde varía y, por medio del punto Q que está sobre la recta L. Graficando puntos sobre la recta L, entre P y Q, se pueden encontrar otros puntos de la curva g_3, proyectándolos a las curvas g_1 y g_2, y luego a la curva g_3.

Para diferentes valores de C, el punto F se eleva o desciende y esto hace que la curva g_3 se agrande o se contraiga. Cuando C toma varios valores, se obtiene una familia de óvalos con centro en S, que es todo lo que queda de g_3 cuando el máximo de u coincide con el mínimo de V.

CAPITULO II

EL MODELO DE LESLIE PARA LA DINAMICA DE POBLACIONES ESTRATIFICADAS.

2.1 *EL MODELO.*

Uno de los modelos que utilizan los demógrafos para predecir el crecimiento de una población es el modelo de Leslie. Este modelo se desarrolló alrededor de 1940.

El modelo describe el crecimiento numérico de una población humana, animal o vegetal, la cuál es dividida en clases que se definen tomando en cuenta rangos de edad, de peso, de altura, o de otros parámetros.

Dividiendo la población inicial en n clases, se forma un vector columna, llamado *vector de la distribución inicial de clases.*

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

donde los $x_i^{(0)}$ $i=1,2,...,n$ son el número de elementos en cada clase, en un tiempo inicial $t=0$.

Conforme transcurre el tiempo y debido a los procesos naturales (nacimiento, envegecimiento y muerte), cambia el número de elementos de cada una de las n clases. Describiendo los procesos naturales cuantitativamente, el vector de la distribución inicial de clases puede proyectarse hacia el futuro.

Denotemos al vector de la distribución de clases en cualquier tiempo t_k, como:

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

donde los $x_i^{(k)}$ $i=1,...,n$ son el número de elementos de la clase de orden i en el tiempo t_k.

Como hipótesis tendremos que la duración entre dos tiempos sucesivos de observación, sea igual a la duración de la clase. Así, todos los elementos de la clase de orden $(i+1)$ en el tiempo t_{k+1}, estaban en la clase de orden i en el tiempo t_k.

Los procesos naturales pueden describirse con los siguientes parámetros:

a_i: Es el número promedio de hijas que tiene una hembra de la clase de orden i.

b_i: Es la probabilidad de que un elemento de la clase de orden i sobreviva y pase a la clase siguiente (i+1).

De lo anterior

$$a_i \geq 0 \qquad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$0 \leq b_i \leq 1 \qquad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

En el tiempo t_k, el número de elementos de la primera clase, serán únicamente los elementos nacidos entre los tiempos t_{k-1} y t_k. Esto lo podemos describir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \text{El \# de elementos} \\ \text{de la clase 1 en} \\ \text{el tiempo } t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{al número de hijas de las hembras de la} \\ \text{clase 1 + clase 2 + clase 3+...+ clase n} \\ \text{entre los tiempos } t_{k-1} \text{ y } t_k \end{bmatrix}$$

Matemáticamente

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \ldots + a_n x_n^{(k-1)} \qquad (2.1)$$

Ahora, el número de elementos de la clase de orden (i+1), en el tiempo t_k, es igual al número de elementos de la clase de orden i en el tiempo t_{k-1}, que todavía viven en el tiempo t_k. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{l}\text{El \# de elementos}\\ \text{de la clase i+1 en}\\ \text{el tiempo } t_k\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{al porcentaje de elementos}\\ \text{de la clase i que sobrevi-}\\ \text{ven y pasan a la clase i+1}\end{array}\right] \left[\begin{array}{l}\text{El número de elementos}\\ \text{de la clase i en el}\\ \text{tiempo } t_{k-1}.\end{array}\right]$$

Matemáticamente

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)} \quad \text{para } i=1,2,\ldots,n-1 \qquad (2.2)$$

utilizando la notación matricial, (2.1) y (2.2) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

O en forma más compacta:

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)} \quad k=1,2,\ldots \qquad (2.3)$$

donde L es la llamada *Matriz de Leslie.*

Así, el número de integrantes de las clases al paso del tiempo viene dada por una función de transición, que para cada unidad de tiempo nos proporciona el estado resultante como producto de la función de transición al actuar sobre el estado anterior.

Ejecutando (2.3) se puede encontrar la distribución de las edades después de un año.

$$x^{(1)} = Lx^{(0)}$$

Si se supone que las tazas de nacimiento y supervivencia *permanecieran constantes* entonces, se puede encontrar $x^{(2)}$, esta vez usando $x^{(1)}$ como distribución inicial, así

$$x^{(2)} = Lx^{(1)} = L(Lx^{(0)}) = L^2(x^{(0)})$$

Siguiendo con el proceso

$$x^{(3)} = Lx^{(2)} = L(L^2x^{(0)}) = L^3x^{(0)}$$

más generalmente, si los parámetros de nacimiento y supervivencia *permanecen constantes*, se puede encontrar el vector de la distribución de edades después de k unidades de tiempo

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)} = L^kx^{(0)} \qquad (2.4)$$

La distribución inicial de edades $x^{(0)}$ y la matriz de Leslie se conocen, por lo tanto, puede determinarse la distri_ bución de los elementos en cada clase en un tiempo futuro.

2.2 *POTENCIAS DE LA MATRIZ DE LESLIE.*

A continuación se desarrollan 2 ejemplos para observar como se comporta una matriz de Leslie cuando se calculan sus potencias.

EJEMPLO 1.- Considérese una población animal (exclusivamente hembras) ficticia que consiste de 1000 animales con edad entre 0 y 1, 800 animales con edad entre 1 y 2 y 600 con edad entre 2 y 3. Se supone que ninguno de los animales vive más de tres años.

Así el vector de la distribución inicial es:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \\ 600 \end{bmatrix}$$

La mitad de los animales de la clase 1 sobrevivirán para estar en la clase 2 el próximo año, la mitad de los animales de la clase 2 sobrevivirán para estar en la clase 3 el próximo año. Los animales de la clase 1 no producen hijos, cada animal de la clase 2 produce 1 hijo en promedio, y cada animal de la clase 3 produce 2 hijos en promedio. Con estos datos se forma la matriz de Leslie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la distribución en las clases después de un año?

$$x^{(1)} = Ax^{(0)}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 500 \\ 400 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la distribución de edades después de 2 años?

Retomando lo dicho anteriormente, si las tasas de nacimiento y supervivencia permanecen constantes entonces,

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 500 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1350 \\ 1000 \\ 250 \end{bmatrix}$$

aquí se observa que una clase no guarda la proporción del vector inicial. Y si se toma otro vector de distribución inicial sucederá lo mismo.

Es fácil obtener $x^{(3)}$ operando $Ax^{(2)}$, pero si se quiere encontrar $x^{(3)}$ primero operando A^3 y luego operando $A^3x^{(0)}$ sería más complicado. Calculemos algunas potencias de A. El programa para calcular las potencias de A se encuentra en el apéndice A.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\end{bmatrix} \quad A^2=\begin{bmatrix}.5 & 1 & 0\\ 0 & .5 & 0\\ .25 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix}.25 & 1 & 1\\ .25 & .25 & .5\\ .125 & .25 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^8=\begin{bmatrix}.4375 & .75 & .75\\ .1875 & .4375 & .375\\ .09375 & .1875 & .25\end{bmatrix} \quad A^{16}=\begin{bmatrix}.402344 & .79687 & .796875\\ .199219 & .402344 & .398438\\ .099609 & .199219 & .203125\end{bmatrix}$$

$$A^{32}=\begin{bmatrix}.400009 & .799988 & .799988\\ .199997 & .400009 & .399994\\ .09999 & .199997 & .200012\end{bmatrix} \quad A^{64}=\begin{bmatrix}.4 & .8 & .8\\ .2 & .4 & .4\\ .1 & .2 & .2\end{bmatrix}$$

Se puede observar que las grandes potencias de A se parecen mucho. Con este resultado, ¿qué se puede decir acerca del vector de distribución $x^{(k)}$?

Supóngase que $x^{(0)}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$, y si K es grande entonces, $x^{(k)}$ es aproximadamente:

$$x^{(k)}=\begin{bmatrix}.4 & .8 & .8\\ .2 & .4 & .4\\ .1 & .2 & .2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.4a+.8b+.8c\\ .2a+.4b+.4c\\ .1a+.2b+.2c\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}.4\\ .2\\ .1\end{bmatrix}$$

donde $\alpha=a+2b+2c$.

El tamaño total de la población depende de los valores iniciales a,b y c, la proporción relativa de los animales en las 3 clases de edad, se aproxima a una relación fija de 4:2:1 cuando $k\to\infty$. Y estas proporciones no dependen de la distribución inicial de edades de la población.

Si la población alcanza estas proporciones en algún tiempo m entonces, el vector de distribución de edades no cambiará en los próximos períodos de tiempo. Por ejemplo:

$$\text{Si } x^{(m)} = \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} \text{ entonces, } x^{(m+1)} = Ax^{m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} = x^{(m)}$$

De aquí obtenemos que $Ax^{(m)} = x^{(m)}$, que matemáticamente quiere decir que, $x^{(m)}$ es un vector propio correspondiente al valor propio 1. Recordando que un vector diferente de cero V es un vector propio de una matriz cuadrada A si existe λ, llamado valor propio tal que $AV=\lambda V$.

Las proporciones 4:2:1 que se obtienen en el vector propio, también se obtienen aproximadamente en las columnas de

A^k, cuando k es un número grande.

EJEMPLO 2.- Consideremos la siguiente matriz de Leslie:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Algunas potencias calculadas de B, son:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ .5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^4 = \begin{bmatrix} 11 & 20 \\ 2.5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^8 = \begin{bmatrix} 171 & 340 \\ 42.5 & 86 \end{bmatrix} \qquad B^{16} = \begin{bmatrix} 43691 & 87380 \\ 10922.5 & 21846 \end{bmatrix}$$

De aquí se ve que los valores de B^{16} son bastante grandes y da lugar a una explosión demográfica. Si se observa B^8 y B^{16}, se puede ver que la proporción que guarda de la primera fila a la segunda es de 4:1. Así como el ejemplo anterior, tendremos un vector con una razón de 4:1, que es un vector propio de B. Multiplicando $Bx^{(m)}$, tenemos:

$$Bx^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aquí se tiene un valor propio de 2, que dice el porqué de la explosión demográfica. Aunque la proporción en el vector de la distribución de edades se estabilice en una razón de 4:1, la población crecerá y se doblará en cada unidad de tiempo. Para evitar la tendencia de doblamiento de la población en las potencias de B, dividiremos a B^2 por 2^2, aB^4 por 2^4, y así sucesivamente. Esto es lo que resulta:

$$1/2^2\ B^2 = \begin{bmatrix} .75 & 1 \\ .125 & .5 \end{bmatrix} \qquad 1/2^4\ B^4 = \begin{bmatrix} .6875 & 1.25 \\ .15625 & .275 \end{bmatrix}$$

$$1/2^8\ B^8 = \begin{bmatrix} .667969 & 1.328125 \\ .166016 & .335938 \end{bmatrix} \qquad 1/2^{16} B^{16} = \begin{bmatrix} .666672 & 1.333313 \\ .166664 & .333344 \end{bmatrix}$$

De lo anterior se puede suponer que:

$$\lim_{k\to\infty} 1/2^k\ B^k = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Es posible analizar el comportamiento y predecir la última forma de A^k (ejemplo 1) y $1/2^k\ B^k$, sin calcular las potencias. Los ejemplos indican que el conocimiento de valores propios y vectores propios son de mucha utilidad en el análisis.

Los valores propios de B son las raíces del polinomio característico $|\lambda I-B|$:

$$|\lambda I-B| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -1/2 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Los vectores propios de B, se encuentran resolviendo la ecuación $(\lambda_j I-B)V_j=0$. El vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 2$ es $V_1=\binom{4}{1}$, el vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 1$ es $V_2=\binom{2}{-1}$.

Con los vectores V_1 y V_2, se forma una matriz P, la cuál es invertible y $PDP^{-1} = B$ (2.5), donde

$$P= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La igualdad (2.5) es de utilidad en los cálculos de las potencias de B, por el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} B &= PDP^{-1} \\ B^2 &= PDP^{-1}\,PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ B^3 &= PD^2\,P^{-1}\,PDP^{-1} = PD^3P^{-1} \\ &\vdots \\ B^k &= PD^k\,P^{-1} \end{aligned}$$

Lo anterior es de bastante ayuda porque las potencias de una matriz diagonal se calculan fácilmente:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$B^k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$B^k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Dividiendo por el valor propio elevado a la k, tenemos:

$$1/2^k\ B^k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -2/3 \end{bmatrix}$$

tomando límites:

$$\lim_{k\to\infty} 1/2^k\ B^k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

El cual es el mismo resultado que el de la suposición hecha anteriormente. Una vez hecho este cálculo, se puede encontrar el vector de la distribución de edades $x^{(k)}$, y decir cuál es la proporción que hay entre las clases de edades. Sea $x^{(0)} = \binom{a}{b}$ el vector de la distribución inicial, y $(1/2)^k \, x^{(k)} = (1/2)^k \, (B^k x^{(0)})$ entonces,

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a+2b) \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Cuando $k \to \infty$. $x^{(k)}$ se aproxima a $2^k (a+2b) \begin{bmatrix} 4/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$ cuando k es grande.

La proporción de 4:1 en las clases de edades es casi constante. Esta proporción también se obtiene en el vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 2$. En este ejemplo, el crecimiento total de la población se ve afectado por un factor de 2 cada unidad de tiempo.

CAPITULO III

EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

3.1 EL POLINOMIO CARACTERISTICO Y SU INTERPRETACION GEOMETRICA.

Los dos ejemplos anteriores muestran que es importante el estudio de valores propios y vectores propios de la matriz de Leslie. Como ya se vió antes, los valores propios son las raíces del polinomio característico correspondiente;

$$P(\lambda)=|\lambda I-L|$$
$$= \lambda^n-a_1\lambda^{n-1}-a_2b_1\lambda^{n-2}-a_3b_1b_2\,\lambda^{n-3}-\ldots-a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}=0$$

analizando sus raíces:

$$\lambda^n= a_1\lambda^{n-1}+ a_2b_1\lambda^{n-2}+\ldots+ a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}$$

dividiendo por λ^n, tenemos:

$$1= a_1/\lambda + a_2b_1/\lambda^2+\ldots+ a_nb_1b_2 \ldots b_{n-1}/\lambda^n$$

para $\lambda\neq 0$ definimos

$$q(\lambda)= a_1/\lambda + a_2b_1/\lambda^2+\ldots+ a_nb_1b_2 \ldots b_{n-1}/\lambda^n,$$

entonces $P(\lambda)= 0 \Longleftrightarrow q(\lambda)= 1.$

Como los valores a_i y b_i son no negativos, $q(\lambda)$ decrece en forma monótona para valores de $\lambda>0$. $q(\lambda)$ tiene una asíntota vertical en $\lambda=0$ y $q(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.
Lo anterior se muestra en la siguiente figura:

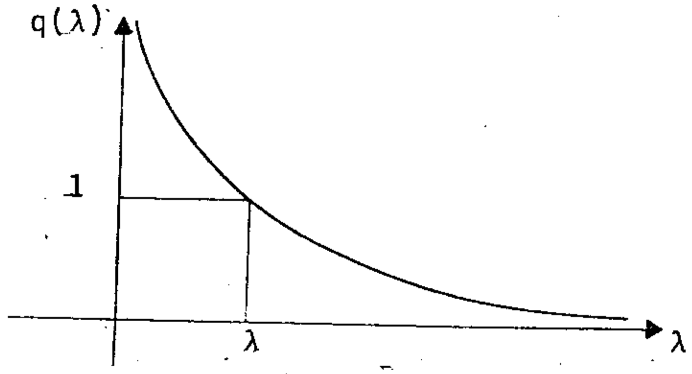

Fig. 8

De esto se deduce que existe un solo valor λ(llamémosle λ_1) para el cual $q(\lambda)= 1$; es decir, una matriz L tiene un valor propio único positivo que es simple, o sea tiene multiplicidad uno, por lo que el espacio propio correspondiente es unidimensional y por tanto, cualquier vector propio de λ_1 es múltiplo constante de V_1.

3.2 *EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS.*

Parece ser que todas las matrices de Leslie tienen un valor propio positivo, el cual es más grande que los otros valo res propios y, además se puede encontrar un vector propio no negativo correspondiente a ese valor propio. El teorema de Perron-Frobenius [1] dice en que términos es verdadero lo anterior. En este trabajo no se demuestra el teorema de Perron-Frobenius en general, pero se demuestra el teorema de Perron-Frobenius para la matriz de Leslie. Para esto debemos suponer que $a_i \geq 0$, y que $0 < b_i \leq 1$. También es necesario suponer que a_n es estrictamente positivo, esto asegura que la matriz de Leslie es Irreducible [2].

TEOREMA 1.- Una matriz de Leslie, tiene un valor propio único λ_1, este valor propio es simple y tiene un vector propio V_1 cuyas entradas son todas positivas.

Demostración 1era: Basta con demostrar que $q(\lambda_1)= 0$, para ver que λ_1 es simple.

Sea $q(\lambda)= a_1/\lambda + a_2b_2/\lambda^2 + a_3b_1b_2\lambda^3 - \ldots - na_nb_1b_2\ldots b_{n-1}/\lambda^n$

entonces:

$$q'(\lambda)= -a_1/\lambda^2-2a_2b_1/\lambda^3-3a_3b_1b_2/\lambda^4 -\ldots- na_nb_1b_2\ldots b_{n-1}/\lambda^{n+1}$$

como los a_i son no negativos y los b_i son positivos,

$$q'(\lambda_1) \neq 0.$$

Al menos una a_i tiene que ser positiva, para asegurar que ocurren nacimientos.

2do: Para ver que V_1 tiene todas sus componentes positi vas, sólo hay que resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.- Si λ_1 es el valor propio único positivo de una matriz de Leslie L y si λ_j es cualquier otro valor propio real o complejo de L, entonces, $|\lambda_j| < \lambda_1$.

Demostración:

Sea $\lambda_j = re^{i\theta}$ y $q(\lambda) = a_1/\lambda + a_2 b_1/\lambda^2 + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}/\lambda^n$

así $q(\lambda_j) = \dfrac{a_1 e^{-i\theta}}{r} + \dfrac{a_1 b_1 e^{-2i\theta}}{r^2} + \dfrac{a_3 b_1 b_2 e^{-3i\theta}}{r^3} + \ldots + \dfrac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{r^n} e^{-ni\theta}$

Sustituyendo $q(\lambda_j)$ por 1 y $e^{-in\theta}$ por $\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$

$$1 = \frac{a_1}{r}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) + \frac{a_2 b_1}{r^2}(\cos 2\theta - i\operatorname{sen}\theta) + \ldots + \frac{a_n b_1 \ldots b_{n-1}}{r^n}(\cos\theta - i\operatorname{sen} n\theta)$$

tomando partes reales se tiene

$$1 = \frac{a_1}{r} \cos + \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos 2\theta + \ldots + \frac{a_n b_1 \ldots b_{n-1}}{r^n} \cos n\theta$$

aplicando valor absoluto

$$1 = \left| \frac{a_1}{r} \cos\theta + \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos 2\theta + \ldots + \frac{a_n b_1 \ldots b_{n-1}}{r^n} \cos n\theta \right|$$

$$1 \leqslant \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 b_1}{r^2} + \ldots + \frac{a_n b_1 \ldots b_{n-1}}{r^n}$$

Por lo que $1 \leqslant q(r)$, entonces $1 = q(\lambda_1) \leqslant q(r)$, pero como $q(\lambda)$ es monótona decreciente se tiene que $r = |\lambda_i| \leqslant \lambda_1$.

LQQD.

A λ_1 comúnmente se le llama valor propio dominante de L. Cuando $|\lambda_j| < \lambda_1$, entonces se dice que λ_1 es un valor propio estrictamente dominante de L. No todas las matrices de Leslie cumplen con esa condición. El siguiente teorema, nos dice bajo que condiciones se cumple la desigualdad estricta.

TEOREMA 3.- Si 2 entradas sucesivas a_i y a_{i+1} de la primera fila de una matriz de Leslie L son diferentes de cero, el valor propio positivo de L es estrictamente dominante.

Demostración: Como hay un único valor propio positivo, si $\lambda_j = re^{i\theta}$ es un valor propio entonces, $\theta \neq 2k\pi$ por lo que $\cos m\theta$ y $\cos(m+1)\theta$ no puede ser ambos 1 y como existen 2 F_i consecutivas positivos, se tiene:

$$1 = q(\lambda_j) = \left| \frac{a_1}{r}\cos\theta + \frac{a_2 b_1}{r^2}\cos 2\theta + \ldots + \frac{a_n b_1 \ldots b_{n-1}}{r^n}\cos n\theta \right|$$

$$< \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 b_1}{r^2} + \ldots + \frac{a_n b_1 \ldots b_{n-1}}{r^n} = q(r)$$

$\therefore \quad r = |\lambda_j| < \lambda_1.$ LQQD.

3.3 *COMPORTAMIENTO EN EL LIMITE DE LA DISTRIBUCION DE CLASES UTILIZANDO VECTORES PROPIOS IZQUIERDOS Y VECTORES PROPIOS DERECHOS.*

A continuación se verá que el comportamiento a largo plazo de la distribución de las clases de edad de la población está determinada por el valor propio positivo λ_1 y el vector propio correspondiente V_1. Esto se verá, utilizando vectores propios izquierdos y vectores propios derechos.

Una de las cosas que se debe tener presente es que la matriz L y L^t, tienen los mismos valores propios pero no los mismos vectores propios. Sea λ_1 el valor propio de las matrices L y L^t y sea V_1 y U_1 (vector propio izquierdo) los vectores propios de L y L^t respectivamente correspondientes a λ_1.

Supóngase que L se puede diagnolizar [3]. Esto en realidad no es necesario que se cumpla, pero facilita los cálculos; entonces L tiene n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no necesariamente distintos y n vectores propios linealmente independientes $V_1, V_2, \ldots, V_n$ correspondientes.

Sea P la matriz cuadrada en la cual, las columnas están formadas por los vectores propios de L:

$$P = (V_1 : V_2 : \ldots : V_n)$$

Ahora

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}P = P^{-1}(V_1 \vdots V_2 \vdots \ldots \vdots V_n)$$

Así

$$P^{-1} V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

Por otro lado tenemos que

$$P^{-1}\,LP= \begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Aplicando transpuesta (ya que la transpuesta de una matriz diagonal es ella misma), tenemos:

$$P^{-1}\,LP= (P^{-1}LP)^t = P^tL^t(P^{-1})^t= \begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

De aquí que $(P^{-1})^t= (\bar{U}_1,\bar{U}_2,\dots,\bar{U}_n)$ $\bar{U}_i$ es un vector propio de A^t. U_1 tal vez no sea igual que $\bar{U}_1$ pero es un múl tiplo de éste, $U_1= \alpha\bar{U}_1$.

Entonces

$$P^t(p^{-1})^t= P^t(\bar{U}_1,\bar{U}_2,\dots,\bar{U}_n)= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Así

$$P^t(D_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Por tanto } P^tU_1 = \alpha P^tD_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando transpuesta tenemos $U_1^t\ P = (\alpha\ 0 \ldots 0)$ (3.2)

multiplicando (3.1) y (3.2) se obtiene

$$P^{-1}V_1U_1^t\ P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. (\alpha\ 0 \ldots 0) = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\text{pero } U_1^tV_I = U_1^t\ PP^{-1}V_1 = (\alpha\ 0 \ldots 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \quad (3.4)$$

Dividiendo (3.3) y (3.4) se tiene

$$\frac{P^{-1}\ V_1U_1^tP}{U_1^t\ V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$\frac{V_1\ U_1^t}{U_1^t\ V_1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \qquad (3.5)$$

Por otro lado

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + P$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

dividiendo por λ_1^k

$$\frac{A^k}{\lambda_1^k} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2/\lambda_1)^k & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & (\lambda_n/\lambda_1) \end{bmatrix} P^{-1} \tag{3.6}$$

sustituyendo (3.5) en (3.6)

$$\frac{A^k}{\lambda_1^k} = \frac{V_1 U_1^t}{U_1^t V_1} + P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2/\lambda_1)^k & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n/\lambda_1)^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

Entonces $\lim\limits_{k} \dfrac{A^k}{\lambda_1^k} = \dfrac{V_1 U_1^t}{U_1^t V_1}$. (3.7)

$$\text{Así } x^{(k)} = A^k x^{(0)} \cong \lambda_1^k \frac{V_1 U_1^t}{U_1^t V_1} x^{(0)} = \lambda_1^k V_1 \frac{U_1^t x^{(0)}}{U_1^t V_1} \quad (3.8)$$

De esto se concluye que $x^{(k)}$ es como un escalar múltiplo del vector propio V_1 y se tiene una fórmula para calcular ese escalar, pra K grandes. Entonces, no importando cuál sea el vector de distribución inicial, $x^{(k)}$ se aproxima a una distribución límite cuando K es grande. Este límite es conocido como la *la distribución de edad estable.* Y a V_1 se le conoce como el *vector de edad estable.*

Retomando la ecuación (3.8) para valores grandes de K, se obtienen 3 casos que dependen del valor propio positivo λ_1:

i) La población crece si $\lambda_1 > 1$.
ii) La población decrece si $\lambda_1 < 1$.
iii) La población se estabiliza si $\lambda_1 = 1$.

El caso iii) es importante porque determina una población de crecimiento nulo; cuando esto pasa, la población se dice ser estacionaria.

Una forma de encontrar el valor propio dominante λ_1, es por el método de la potencia de Mises [4]. Un programa para computadora utilizando este método para encontrar valores propios y vectores propios, se propone a continuación.

```
C PROGRAMA PARA CALCULAR VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 L,LCERO,LAMBDA,IDENT
      DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10),D(10,10),IDENT(10,10),U(10,10
     *),LAMBDA(10),V(10),VCERO(10),Y(10)
C             ****   LEER  Y  VERIFICAR  DATOS  ****
    1 READ(1,*)N,MMAX,MFREQ,EMP,  (VCERO(I),I=1,N)
      WRITE(1,200)N,MMAX,MFREQ,EMP
      WRITE(1,207) (VCERO(I),I=1,N)
      READ(1,*) ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
      WRITE(1,201)
      DO 15 I=1,N
   15 WRITE(1,207) (A(I,J),J=1,N)
C              IGUALAR B A LA MATRIZ IDENTIDAD
      DO 2 I=1,N
      DO 2 J=1,N
    2 IDENT(I,J)=0.
      DO 3 I=1,N
    3 IDENT(I,I)=1.
      CALL MATEQ(IDENT,B,N,N)
C              EJECUTAR EL METODO DE LA POTENCIA
C              PARA LOS N VALORES PROPIOS
      DO 11 I=1,N
C              MODIFICAR EL VECTOR COMIENZO TAL QUE  ES ORTOGONAL
C              A TODOS LOS VECTORES PROPIOS CALCULADOS PREVIAMENTE
      CALL MATVEC(B,VCERO,V,N,N)
      CALL VECLEN(V,LCERO,N)
C              EJECUTAR LAS OPERACIONES DEL METODO DE LA POTENCIA
      DO 5 M=1,MMAX
C              PERIODICAMENTE REORTOGONALIZAR EL VECTOR V
      IF((M/MFREQ)*MFREQ.NE.M)GO TO 4
      CALL MATVEC(B,V,Y,N,N)
      CALL VECLEN(Y,L,N)
      CALL SCAVEC(1.0/L,Y,V,N)
C            CALCULAR EL NUEVO VECTOR V Y SU LONGITUD
    4 CALL MATVEC(A,V,Y,N,N)
      CALL VECLEN(Y,L,N)
      CALL SCAVEC(1.0/L,Y,V,N)
C            VERIFICAL LA CONVERGENCIA
      IF(DABS((L-LCERO)/LCERO).LT.EMP)GO TO 7
    5 LCERO=L
C            SALVAR LOS RESULTADOS PARCIALES SI EL METODO NO CONVERGE
      IM1=I-1
      WRITE(1,202)I,M,(LAMBDA(K),K=1,IM1)
      WRITE(1,203)
      DO 6 K=1,N
    6 WRITE(1,207) (U(K,J),J=1,IM1)
      GO TO 1
C            ESTABLECER EL SIGNO DEL VALOR PROPIO
    7 CALL MATVEC(A,V,Y,N,N)
      DO 8 K=1,N
      IF(DABS(V(K)).LT.1.0D-3)GO TO 8
      IF((V(K)*Y(K)).LT.0.0)L=-L
      GO TO 9
    8 CONTINUE
C        ALMACENAMIENTO GENERAL DE VALORES Y VECTORES PROPIOS
```

```
 LAMBDA(I)=L
 DO 10 K=1,N
0 U(K,I)=V(K)
 WRITE(1,204)I,M,L
     MOFIFICAR LA MATRIZ B
 IF(I.GE.N)GO TO 11
 CALL SCAMAT(L,IDENT,C,N,N)
 CALL MATSUB(A,C,D,N,N)
 CALL MATMLT(D,B,C,N,N,N)
 CALL MATEQ(C,B,N,N)
1 CONTINUE
        IMPRIMIR VALORES Y VECTORES PROPIOS
 WRITE(1,205) (LAMBDA(I),I=1,N)
 WRITE(1,206)
 DO 12 I=1,N
2 WRITE(1,207) (U(I,J),J=1,N)
 GO TO 1
        FORMATOS  PARA  LEER  E  IMPRIMIR
0 FORMAT(1H1,4X,61H METODO DE LA POTENCIA PARA DETERMINAR VALORES PR
 *OPIOS, CON  /1HO,6X,10H N        = ,I4/7X,10H MMAX    = ,I4/7X,10H MF
 *REQ  = ,I4/7X,10H EMP     = ,E12.3/1HO,4X,39H VECTOR COMIENZO VCERO
 *(1)...VCERO(N) ES)
1 FORMAT(1HO,4X,' LA MATRIZ COMIENZO A(1,1)...A(N,N) ES')
2 FORMAT(1HO,4X,' NO CONVERGE. LOS RESULTADOS PARCIALES SON'/1HO,6X
 *,6H I  = ,I2,10X,9H M      = ,I3/1HO,6X,27H LAMBDA(1)...LAMBDA(I-1)
 * = / (10F8.5))
3 FORMAT(1HO,4X,' LOS PRIMEROS I-1 VECTORES PROPIOS SON')
4 FORMAT(1HO,6X,6H I  = ,I2,5X,9H M      = ,I3,5X,6H L  = ,F11.6)
5 FORMAT(1HO,4X,' LOS VALORES PROPIOS LAMBDA(1)...LAMBDA(N) SON '(7
 *X,10F11.6))
6 FORMAT(1HO,4X,' LOS VECTORES PROPIOS ESTAN POR COLUMNAS')
7 FORMAT(10F8.5)
  END
        ***  SUBRUTINAS  PARA  CALCULO  DE  MATRICES  Y VECTORES ***
  SUBROUTINE MATMLT(A,U,T,M,N,P)
        ***  MULTIPLICACION  DE  MATRICES  ***
  REAL*8 A,T,U
  INTEGER P
  DIMENSION A(10,10),T(10,10),U(10,10)
  DO 1 I=1,M
  DO 1 J=1,P
1 T(I,J)=0.
  DO 2 I=1,M
  DO 2 J=1,P
  DO 2 K=1,N
2 T(I,J)=A(I,K)*U(K,J)+T(I,J)
  RETURN
  END
        ***  RESTA  DE  MATRICES    ***
  SUBROUTINE MATSUB(A,B,C,M,N)
  REAL*8 A,B,C
  DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10)
  DO 3 I=1,M
  DO 3 J=1,N
3 C(I,J)=A(I,J)-B(I,J)
  RETURN
```

```
      END
            ***  MULTIPLICACION  DE  UNA  MATRIZ  POR  UN  VECTOR  ***
      SUBROUTINE MATVEC(A,X,Z,M,N)
      REAL*8 A,X,Z
      DIMENSION A(10,10),X(10),Z(10)
      DO 4 I=1,M
    4 Z(I)=0.
      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,N
    5 Z(I)=A(I,J)*X(J)+Z(I)
      RETURN
      END
            ***  MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UN VECTOR  ***
      SUBROUTINE SCAVEC(S,X,Y,N)
      REAL*8 X,Y,S
      DIMENSION X(10),Y(10)
      DO 6 I=1,N
    6 Y(I)=S*X(I)
      RETURN
      END
            ***  MULTIPLICACION  DE  UN  ESCALAR  POR  UNA  MATRIZ  ***
      SUBROUTINE SCAMAT(S,A,B,M,N)
      REAL*8 A,B,S
      DIMENSION A(10,10),B(10,10)
      DO 7 I=1,M
      DO 7 J=1,N
    7 B(I,J)=S*A(I,J)
      RETURN
      END
            ***  IGUALAR  UNA  MATRIZ  A  OTRA   ***
      SUBROUTINE MATEQ(A,B,M,N)
      REAL*8 A,B
      DIMENSION A(10,10),B(10,10)
      DO 8 I=1,M
      DO 8 J=1,N
    8 B(I,J)=A(I,J)
      RETURN
      END
            ***  NORMA  DE  UN  VECTOR  ***
      SUBROUTINE VECLEN(X,S,N)
      REAL*8 X,S,SUMSQX
      DIMENSION X(10)
      SUMSQX=0.
      DO 9 I=1,N
    9 SUMSQX=SUMSQX+X(I)*X(I)
      S=DSQRT(SUMSQX)
      RETURN
      END
```

CAPITULO IV
ALGUNAS APLICACIONES QUE ILUSTRAN EL MODELO DE LESLIE.

I) EJEMPLO DE POBLACION ESTRATIFICADA CON RETIRO CONSTANTE.

4.1 INTRODUCCION

Supóngase que se tiene un rancho de vacunos, con una manada de cierto número de cabezas y cada año se "retira" un número de vacas adultas para la producción de carne. Se deja la manada restante, para que el próximo año se reproduzca con sus propias crías. La manada tiene una característica conocida, definida por una proporción dada de cabezas adultas contra no adultas, de hembras machos.

Dependiendo de cuales sean las condiciones del rancho, se pueden plantear varios tipos de política:

1ero. ¿Cuál es el sistema que seguiríamos de tal manera que el siguiente año la producción y las proporciones de la manada fueran las mismas que las de este año?

2do. ¿Qué método sería conveniente utilizar para que el crecimiento de la manada estuviera controlado?

3ero. ¿Qué producción anual permitiría dejar crecer a la manada progresivamente, de manera que en 10 años la producción se duplicara, conservando la misma proporción de la manada que se deja para cría?

Supóngase que se planea dedicar ese rancho para la industrialización de carne. Se fijan las metas (basadas en costos, capital, ingresos, etc.) para retirar lo deseado.

La elección como un ~~parámetro~~ básico para el negocio será retirar únicamente animales adultos cada año.

Una de las cosas que se debe tener presente es:

1ero. ¿Qué tamaño y condiciones debe tener la manada inicial de manera que permita "retirar" lo que se desea?

2do. ¿Qué cantidad se debe poner de machos y hembras para lograr tener una producción constante de becerros año con año?

4.2 LAS COMPONENTES DE LA MANADA Y CONDICIONES DE SUPERVIVENCIA

Las clases de vacunos en la manada son: Los becerros en su primer año de crecimiento, los novillos en su segun do año, y todos los vacunos más grandes serán considerados adultos. Cada clase se dividen dos categorías de hembras y machos.

Cada centenar de hembras adultas parirá aproximadamente 46 becerros machos y 44 becerros hembras cada año, a fines de la primavera.

Los vacunos por naturaleza tienen diferentes causas de mortandad en las diferentes clases. Unas de las causas de muerte de los vacunos son: rentención placentaria, por deficencias nutricionales, moquillo, mal de paleta, fiebre de embarque, etc.

El 95% de los becerros sobreviven y llegan al segundo año de su crecimiento, de ese 95% el 96% llega a ser adulto. Una vez que los vacunos han llegado a su madurez, están prácticamente a salvo. El 98% de los adultos sobreviven de un año a otro. Tomaremos estos porcentajes tanto para los machos como para las hembras, y los mismos año tras año.

4.3 ECUACIONES DEL MODELO.

Se utilizará la siguiente notación para las diferentes clases de vacunos:

AM= # de adultos machos

AH= # de adultos hembras

NM, NH= # de novillos machos, # de novillos hembras

BM, BH= # de becerros machos, # de becerros hembras,

tomaremos estos números, como el número de vacunos al final de un año, justamente antes del retiro. Digamos AM', AH',..., BH' serán el número de vacunos en cada clase de la manada para el siguiente año. Para la constante de "retiro" utilizamos la siguiente notación:

QM'= # de adultos machos "retirados" en el siguiente año.

QH'= # de adultos hembras"retirados" en el siguiente año.

Entonces el proceso de cría, seguido de la "retirada", está contenido en las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
AM' &= .98AM + .96NM - QM' \\
AH' &= .98AH + .96NH - QH' \qquad (4.1) \\
NM' &= .95\,BM \\
NH' &= .95\,BH \\
BM' &= .46\,AM \\
BH' &= .44\,AH
\end{aligned}
$$

4.4 EL MODELO DESPUES DE LA RETIRADA EN FORMA DE VECTOR Y MATRIZ.

Llamaremos a "este año" como "año 0", el siguiente "año 1" y así sucesivamente. Definimos el vector G_j= la estructura de la manada después del retiro en el año j(j=0,1,2,...).

Lo primeros 2 vectores son:

$$G_o = \begin{bmatrix} AM \\ AH \\ NM \\ NH \\ BM \\ BH \end{bmatrix} \qquad G_1 = \begin{bmatrix} AM' \\ AH' \\ NM' \\ NH' \\ BM' \\ BH' \end{bmatrix}$$

El vector de "retiro" es:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} QM' \\ QH' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde Q_1 se obtiene de Q_j= # de "retirados" en cada clase en el año j.

Con esta notación establecida, reescribimos (4.1) como:

$$\begin{array}{c} AM' \\ AH' \\ NM' \\ NH' \\ BM' \\ BH' \end{array} = \begin{bmatrix} .98 & 0 & .96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .98 & 0 & .96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .95 \\ 0 & .46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .44 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AM \\ AH \\ NM \\ NH \\ BM \\ BH \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QM' \\ QH' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o en forma más compacta

$$G_1 = MG_o - Q_1 \qquad (4.2)$$

donde M es la matriz 6x6. El proceso de año a año está dado más generalmente así:

$$G_j = MG_j - Q_{j+1} \qquad j=0,1,2,....$$

Supóngase que la cantidad de vacunos que el rancho tenía una semana antes de la "retirada" del año pasado era la siguiente

AM= 200	NM= 300	BM= 520
AH= 1000	NH= 300	BH= 500

La política de retiro a seguir será de 100 adultos machos y 200 adultos hembras cada año.

4.5 OPERANDO EL MODELO.

¿Cuál es la estructura de la manada?

i) Después del retiro del año pasado

$$\begin{bmatrix} AM' \\ AH' \\ NM' \\ NH' \\ BM' \\ BH' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 1000 \\ 300 \\ 300 \\ 520 \\ 500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 800 \\ 300 \\ 300 \\ 520 \\ 500 \end{bmatrix}$$

ii) Antes del retiro de este año

$$\begin{bmatrix} AM \\ AH \\ NM \\ NH \\ BM \\ BH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .98 & 0 & .96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .98 & 0 & .96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & .95 \\ 0 & .46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .44 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 800 \\ 300 \\ 300 \\ 520 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 368 \\ 1072 \\ 494 \\ 475 \\ 368 \\ 352 \end{bmatrix}$$

iii) Después del retiro de este año

$$\begin{bmatrix} AM' \\ AH' \\ NM' \\ NH' \\ BM' \\ BH' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 386 \\ 1072 \\ 494 \\ 475 \\ 368 \\ 352 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 286 \\ 872 \\ 494 \\ 475 \\ 368 \\ 352 \end{bmatrix}$$

iv) Después del retiro del próximo año

$$\begin{bmatrix} AM' \\ AH' \\ NM' \\ NH' \\ BM' \\ BH' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .98 & 0 & .96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .95 \\ 0 & .46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .44 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 286 \\ 872 \\ 494 \\ 475 \\ 386 \\ 352 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 654 \\ 1110 \\ 350 \\ 334 \\ 401 \\ 383 \end{bmatrix}$$

4.6 ESTABLECIENDO UNA MANADA.

a) ¿Qué cantidad y estructura de manada inicial G_o se debe tener este año, de tal manera que el año siguiente, se pueda tener una "retirada" Q_1, y entonces tener una manada G_1 de modo que $G_1 = G_o$?

Si Hacemos $G_1 = G_o$, y se reemplaza en la ecuación (4.2), tenemos:

$$G_o = MG_o - Q_1 \qquad (4.3)$$

Despejando G_o queda:

$$G_o = (M-I)^{-1} Q_1 \qquad (4.4)$$

Así (4.4) sería la manada que hay que tomar, para que la manada del "año 0" sea igual a la manada en el "año 1" ($G_o = G_1$).

Un programa de computadora para encontrar la inversa de la matriz (M-I) se encuentra en el apéndice B.

b) Ahora lo que el rancho quiere, es una manada que produzca un "retiro" Q el siguiente año (y cada año igual), al mismo tiempo que aumente en un 30% durante los primeros 2 años. Se presenta el mismo problema que el inciso a), conociendo Q y M se encuentra la manada inicial G_o.

Después del primer año de crecimiento junto con el "retiro", la manada inicial G_o será:

$$G_1 = MG_o - Q \qquad (4.5)$$

En el año siguiente de crecimiento con "retiro", la manada será:

$$G_2 = MG_1 - Q = M(MG_o - Q) - Q$$
$$G_2 = M^2G_o - MQ - Q \qquad (4.6)$$

recordando que el rancho quiere el 30% de crecimiento (aparte el retiro) después de 2 años, esto se puede expresar:

$$G_2 = (1.3)G_o \qquad (4.7)$$

Sustituyendo (4.7) en (4.6), se tiene:

$$M^2G_o - MQ - Q = (1.3)G_o$$

reordenando

$$(M^2 - (1.3)I)G_o = (M+I)Q$$

despejando $\qquad G_o = (M^2 - 1.3I)^{-1} (M+I)\, Q.$

4.7 CALCULANDO EL RETIRO.

c) Ahora se quiere saber qué retiro debe ser tomado de una manada que se tiene, si debe de conservarse del mismo tamaño en el futuro.

Si $\vec{H}_o$ es una manada de este año, ¿qué retiro $\vec{Q}_o$ deberá ser tomado de manera que la manada H_1 del año siguiente, tenga el mismo tamaño y estructura que la de este año?, es decir $\vec{H}_1 = \vec{H}_o$.

(Este proceso puede seguir por muchos años, produciendo un retiro y una manada, estable y uniforme).

Es claro que esta pregunta se tiene que contestar antes de que se "retire".

Sea H_j= la manada antes del retiro en el año j-ésimo (j=0,1,2,...) entonces

$G_j = H_j - Q_j \qquad$ y $\qquad H_{j+1} = MG_j \qquad (j=0,1,\dots.)$

por lo que $\qquad H_{j+1} = M(H_j - Q_j)$

así $\qquad H_1 = M(H_o - Q_o) \qquad (4.8)$

pero si hacemos $H=H_o= H_1$, $Q=Q_o$ y un poco de álgebra se llega a:

$$MQ= (M-I)H \tag{4.9}$$

Aquí obtendríamos la respuesta correcta si multiplicamos por M^{-1}, pero desgraciadamente M^{-1} no existe (ver apéndice B). Hasta el momento, se ha trabajado con las matrices como si fueran enteros, pero nunca se ha trabajado con las entradas de ellas. Analicemos sus entradas, para saber hasta donde se puede llegar en este problema.

Observemos las ecuaciones (4.9). (El lado derecho es conocido). Ahí aparentemente hay 6 ecuaciones con 6 incógnitas de $\vec{Q}$. Pero como 4 de las 6 entradas de $\vec{Q}$ son cero, entonces en las ecuaciones (4.9) hay 6 ecuaciones con 2 incógnitas, QM y QF.

Por lo general, 2 ecuaciones bastan para determinar 2 incógnitas. Pero habrá solución para todas las ecuaciones, solamente que para las cuatro ecuaciones extras no haya contradicción para QM y QF. Las ecuaciones siguientes dicen - cuando habrá contradicción.

$$.98QM = -.02AM + .96NM \iff AM = .98(AM-QM) + .96NM$$
$$.98QH = -.02AH + .96NH \iff AF = .98(AH-QH) + .96NH \qquad (4.10a)$$

$$0 = -NM + .95BM \iff NM = .95BM$$
$$0 = -NH + .95BH \iff NH = .95BH \qquad (4.10b)$$

$$.46QH = .46AH - BM \iff BM = .46\,(AH - QH)$$
$$.44QH = .44AH - BH \iff BH = .44\,(AH - QH)$$

Los valores AM, AH, NM, NH, BM, BH, son conocidos, así que se puede conocer las incógnitas QM y QF de las ecuaciones (4.10a). Las ecuaciones (4.10b,c) llevan a una contradicción, a menos que AM, AH, NM, NH, BM, BH, QM y QH satisfagan (4.10b y c). Cualesquier manada que se tome para la cuál estas 4 ecuaciones (4.10 b,c) no se satisfagan, no podrá reproducirse por si misma de un año a otro, no importando que retiro se tome. (recordando que se pide con exactitud, $H_1 = H_o$).

4.8 RETIRO CONSTANTE DE UNA MANADA CRECIENTE.

d) Se desea un retiro $\vec{Q}$, de manera que retirando la misma cantidad cada año la manada se doble en 10 años, al mismo tiempo que mantenga su estructura proporcional. Es decir, si $\vec{H}_o$ es la manada inicial antes del retiro de este año entonces, al final de 10 años se quiere tener $2H_o$ como manada estructural.

Otra vez se tiene que resolver el problema antes de retirar.

Sea H_j= la manada antes del retiro en el j-ésimo año (j=0,1,2,...,10) retomando la ecuación (4.8)

$$\vec{H}_1 = M(\vec{H}_o - \vec{Q}_o)$$

Así

$$\vec{H}_2 = M(\vec{H}_1-\vec{Q}_o)= M\vec{H}_1 - M\vec{Q}_o= M^2(\vec{H}_o-\vec{Q}_o)- M\vec{Q}_o= M^2\vec{H}_o- M\vec{Q}_o-MQ$$

$$\vec{H}_3 = M\vec{H}_2 -\vec{Q}_o = M^3\vec{H}_o- M^3\vec{Q}_o - M^2\vec{Q}_o - M\vec{Q}_o$$

$$\vdots$$

$$2\vec{H}_o = \vec{H}_{10} = M^{10}\vec{H}_o - M^{10}\vec{Q}_o - M^9\vec{Q}_o-\cdots- M\vec{Q}_o$$

Factorizando y haciendo $\vec{Q}=\vec{Q}_o$ entonces

$$2\vec{H}_o = M^{10}\vec{H}_{10} - (I+M+M^2+\ldots+M^9)M\vec{Q}$$

$$(I+M+M^2+\ldots+M^9)M\vec{Q} = (M^{10}-2I)\vec{H}_o \qquad (4.11)$$

Lo único desconocido de (4.11) es Q. La expresión $I+M+\ldots+M^9$ se puede trabajar como una serie geométrica.

$$
\begin{array}{rl}
S= & I+M+M^2+ \; .... \; +M^9 \\
MS= & M+M^2+M^3+ \; ... \; +M^{10} \\
\hline
S-MS= & I-M^{10}
\end{array}
$$

$$(I-M)S= I-M^{10} \quad \Longrightarrow \quad S=(I-M)^{-1}\,(I-M^{10}) \qquad (4.12)$$

sustituyendo (4.12) en (4.11), tenemos

$$(I-M)^{-1}\,(I-M^{10})M\vec{Q} \quad = \quad (M^{10}-2I)\,\vec{H}_o$$

(De hecho, $(I-M)^{-1}$ existen para la matriz M 6x6, ver apéndice B).

De lo anterior se tiene que:

$$MQ= (I-M^{10})^{-1}\,(I-M)\,(M^{10}-2I)\vec{H}_o \qquad (4.13)$$

(aquí también $(I-M^{10})^{-1}$ existe, y esto se puede ver de los apéndices A y B).

Hasta aquí se puede llegar, ya que M^{-1} no existe. El lado derecho de (4.13) es conocido.

La manada se puede duplicar aproximadamente, y para eso nos podemos ayudar de (4.13), examinando las condiciones en las que precisamente se puede hacerlo.

II. EJEMPLO DE UNA POBLACION HUMANA.

Consideremos la población femenina de los EEUU en 1967. Dividamos a la población en 10 clases de edades; de 0-5, 5-10, 10-15,....,45-50. Ya que son pocas las mujeres que se embarazan a partir de los 50 años tomaremos solamente la población femenina de edad entre los 0 y 50 años.

Los parâmetros de nacimiento y supervivencia se dan a conocer en la tabla #1.

TABLA # 1

Intervalo de edades	a_i	b_i
[0,5)	.00000	.99694
[5,10)	.00105	.99842
[10,15)	.08203	.99783
[15,20)	.28849	.99671
[20,25)	.37780	.99614
[25,30)	.26478	.99496
[30,35)	.14055	.99247
[35,40)	.05857	.98875
[40,45)	.01344	.98305
[45,50)	.0081	-

Utilizando el programa para computadoras del Capítulo III, para encontrar valores propios y vectores propios, se obtiene que el valor propio $\lambda_1 = 1.03859$ y que el vector propio correspondiente es:

$$V_1 = \begin{bmatrix} .37591 \\ .36084 \\ .34688 \\ .33326 \\ .31982 \\ .30675 \\ .29386 \\ .28081 \\ .26734 \\ .25304 \end{bmatrix}$$

De esto se puede decir, que el tamaño de la población total aumentará en un 3.85% cada 5 años, si la taza de nacimiento y supervivencia permanecieran constantes. Además, se obtiene que en el límite, habrá aproximadamente, por cada 100,000 hembras cuya edad esta comprendida entre 0 y 5 años, 95,991 cuya edad esta comprendida en 5 y 10 años, 92,277 que tienen una edad entre los 10 y 15 años, y así sucesivamente.

III. CASO DISCRETO CON RETIRO

4.9 INTRODUCCION

Analizaremos un modelo simplificado para la administración de un bosque cuyos árboles se clasifican por rangos de altura. La política a seguir para el bosque, es la de *explotación racional duradera* y significa que, el rendimiento que se obtiene al térmio de cada período es el mismo y la configuración del bosque se conserva al cortar los árboles en cada período.

La altura del árbol determinará su valor económico al corte y a la venta.

Se comenzará con una cierta distribución de árboles de diferentes tamaños y luego se dejan crecer durante un cierto período; después se cortan algunos de ciertos tamaños y los que se dejan sin cortar deben tener la misma configuración de alturas del bosque original para que la explotación sea racional y duradera.

La política a seguir de este problema, sería que el costo económico de los árboles cortados sea el máximo posible. Esto determinará el rendimiento óptimo duradero del bosque y es el máximo rendimiento posible de explotación continuo del bosque sin que se acabe.

4.10 EL MODELO.

En este modelo se supondrá que el bosque se desea explotar y vender sus árboles como arbolitos para navidad, año con año. Para que el bosque tenga la misma cantidad de árboles, por cada árbol cortado, se plantará en el mismo lugar otro arbolito. No se tomará en cuenta, árboles que mueran durante 2 temporadas de corte, se supondrá que todos los árboles plantados, sobrevivirán y crecerán hasta que se corten.

Los árboles de diferentes alturas tienen diferentes costos. Se supondrá que hay n precios diferentes para los diferentes rangos de altura, como se muestra abajo:

CLASE	VALOR EN DOLARES	INT. DE ALTURAS
1	ninguno	$[0, h_1)$
2	P_2	$[h_1, h_2)$
3	P_3	$[h_2, h_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-1	P_{n-1}	$[h_{n-2}, h_{n-1})$
n	P_n	$[h_{n-1}, \infty)$

Sea $x_i(i=1,2,...,n)$ el número de árboles plantados en la clase de orden i, después de la temporada de corte. Así denotamos al *vector de árboles no cortados como:*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ya que el número total de árboles del bosque es fijo, tenemos

$$x_1+x_2+...+x_n= S \qquad (4.14)$$

donde S depende del terreno con que se cuenta y del espacio requerido para plantar cada árbol.

Consideremos el crecimiento de los árboles entre 2 temporadas de corte. En este período, un árbol de la clase de orden i puede pasar a una clase de mayor altura o bien, por alguna razón, puede tener un crecimiento retardado y quedarse en la misma clase. Por lo que definiremos los siguientes parámetros de crecimiento, $g_i(i=1,2,...,n-1)$:

g_i= La fracción de árboles de la clase de orden i que crecen y pasan a la clase de orden (i+1) durante un período de crecimiento.

. Se supondrá también que, en un período de crecimiento, un árbol solo puede pasar a la siguiente clase, o sea, de la clase i no puede pasar a la clase i+2, o más adelante. Con esto, sea

$1-g_i$= La fracción de árboles de la clase de orden i que permanecen en la misma clase durante un período de crecimiento.

Con estos parámetros se forma la matriz nxn de crecimiento:

$$G = \begin{bmatrix} 1-g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1-g_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

Ya que las componentes del vector x, son el número de árboles del bosque hay en cada una de las n clases antes del período de crecimiento; las componentes del vector G_x,

$$G_x = \begin{bmatrix} (1-g_1)x_1 \\ g_1x_1 + (1-g_2)x_2 \\ g_2x_2 + (1-g_3)x_3 \\ \vdots \\ g_{n-2}x_{n-2} + (1-g_{n-1})x_{n-1} \\ g_{n-1}x_{n-1}+x_n \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

son el número de árboles que hay en cada una de las n clases, después del período del crecimiento.

Se supondrá que en una temporada se cortan y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ árboles de la clase de orden i. Así, definimos al *vector de árboles cortados* como:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

En cada temporada de corte, el número de árboles cortados será

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n.$$

Este número de árboles son los que se agregan a la primera clase después de cada temporada de corte.

Definiendo la matriz de reforestación nxn como:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

entonces el vector columna R_Y,

$$R_Y = \begin{bmatrix} Y_1+Y_2+\ldots+Y_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

serán los árboles plantados después de cada temporada de corte.

Entonces, la ecuación que determina una política de explotación racional duradera es:

$$\begin{bmatrix}\text{Configuración al}\\ \text{terminar el perio}\\ \text{do de crecimiento}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{árboles}\\ \\ \text{cortados}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{representación}\\ \text{con nuevos}\\ \text{arbolitos}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{configuracion al}\\ \text{inicio de un perio}\\ \text{do de crecimiento}\end{bmatrix}$$

en forma matemáticas: $Gx - Y + Ry = x$

la cual podemos reescribir: $(I-R)Y = (G-I)x \qquad (4.19)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

A la ecuación (4.19) se le conoce como la condición de explotación racional duradera. Si $y_1>0$ entonces, se cortarían árboles que no tienen valor económico y se reemplazarían por otros nuevos. Por lo que se supondrá que

$$Y_1 = 0 \qquad (4.20)$$

Así sustituyendo (4.20) en (4.19) se llega al sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
y_2+y_3+\dots+y_n &= g_1x_1\\
y_2 &= g_1x_1 - g_2x_2\\
y_3 &= g_2x_2 - g_3x_3\\
&\vdots\\
y_{n-1} &= g_{n-2}x_{n-2} - g_{n-1}x_{n-1}\\
y_n &= g_{n-1}x_{n-1}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (4.21) se puede observar que la primera es la suma de las n-1 ecuaciones restantes.

Ya que $y_i \geq 0$ $(i=2,3,\dots,n)$, las ecuaciones deben cumplir las condiciones siguientes:

$$g_1x_1 \geq g_2x_2 \geq g_3x_3 \geq \dots \geq g_{n-1}\,x_{n-1} \geq 0 \qquad (4.22)$$

Si x es un vector columna con componente no negativos que satisface la desigualdad (4.22), las ecuaciones (4.20) y (4.21) definen un vector columna Y con componentes no negativos. Por lo que x e y cumplen con la condición de explotación racional y duradera (ecuación 4.19). O sea, una condición necesaria y suficiente para que un vector columna x determine una configuración del bosque que permita una explotación racional y duradera es que sus componentes satisfagan la desigualdad (4.22).

4.11 RENDIMIENTO OPTIMO Y DURADERO.

Si se cortan y_i $(i=2,3,\ldots,n)$ árboles y cada árbol tiene un costo P_i entonces, el rendimiento YLd en una temporada de corte es

$$YLd = P_2Y_2 + P_3Y_3 + \ldots + P_n \; Y_n \tag{4.23}$$

sustituyendo las ecuaciones (4.21) en (4.23) se obtiene

$$YLd= P_2(g_1x_1-g_2x_2)+ P_3(g_2x_2-g_3x_3)+\ldots+ P_n(g_{n-1}x_{n-1})$$

$$YLd= P_2g_1x_1 -P_2g_2x_2+ P_3g_2x_2-P_3g_3x_3+\ldots+P_ng_{n-1}x_{n-1}$$

$$YLd= P_2g_1x_1+(P_3-P_2)g_2x_2+\ldots+(P_n-P_{n-1})g_{n-1}x_{n-1} \tag{4.24}$$

Así, se puede enunciar el problema de maximización del rendimiento del bosque para todas las posibles políticas de explotación que sean racionales y duraderas, con la ayuda de las ecuaciones (4.24), (4.14) y (4.22):

Encontrar los valores no negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que hagan máxima la expresión

$$YLd = P_2 g_1 x_1 + (P_3 - P_2) g_2 x_2 + \ldots + (P_n - P_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1}$$

con las condiciones

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S \quad y \quad g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \ldots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0$$

Este problema así enunciado, se resuelve con programación lineal. Pero, solo se útiliza el siguiente resultado de la programación lineal y aplicado a este problema dice que:

"*El rendimiento óptimo duradero se logra cortando todos los árboles de una misma clase y ninguno de las demás clases*".

Utilizando el resultado anterior, se verá como se obtiene el rendimiento óptimo y duradero.

Supongamos que

YLd_k=El rendimiento que se obtiene de cortar todos los árboles de la clase de orden K y ninguno de las otras clases.

El máximo valor de $YLd_k (k=2,3,\ldots,n)$ será el rendimiento óptimo duradero sostenido y k determinará la clase que debe cortarse totalmente para obtener el rendimiento deseado. Como los únicos árboles que pueden ser cortados son los de la clase de orden K, entonces

$$Y_2=Y_3= \ldots = Y_{k-1} = Y_{k+1} = \ldots = Y_{n=0} \qquad (4.25)$$

además, como se cortan los árboles de la clase de orden K totalmente, no podrá haber árboles más altos que los de esa clase. Por lo que:

$$x_k = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0 \qquad (4.26)$$

sustituyendo (4.26) y (4.25) en las ecuaciones (4.21), se obtiene

$$\begin{aligned}
Y_k &= g_1 x_1 \\
0 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\
0 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \qquad (4.27) \\
&\vdots \\
0 &= g_{k-2} x_{k-2} - g_{k-1} x_{k-1} \\
Y_k &= g_{k-1} x_{k-1}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (4.27) se pueden reescribir de la siguiente manera

$$Y_k = g_1x_1 = g_2x_2 = \ldots = g_{k-2}x_{k-2} = g_{k-1}x_{k-1} \quad (4.28)$$

de donde

$$\begin{aligned} x_2 &= g_1x_1/g_2 \\ x_3 &= g_1x_1/g_3 \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= g_1\,x_1/g_{k-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

sustituyendo (4.26) y (4.29) en (4.14) y despejando x_1, se tiene

$$x_1 = \frac{S}{1+\frac{g_1}{g_2}+\frac{g_1}{g_3}+\ldots+\frac{g_1}{g_{k-1}}} \quad (4.30)$$

combinando las ecuaciones (4.23), (4.25), (4.28) y (4.30) se obtiene el rendimiento YLd_k

$$YLd_k = P_2Y_2 + P_3Y_3 + \ldots + P_nY_n$$

$$YLd_k = P_k Y_k$$

$$YLd_k = P_k g_1 x_1$$

$$YLd_k = P_k g_1 \frac{S}{1+ \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1}{g_3} + \ldots + \frac{g_1}{g_{n-1}}}$$

por lo tanto

$$YLd_k = \frac{P_k S}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} + \ldots + \frac{1}{g_{k-1}}} \qquad (4.31)$$

para cualquiera que sea el valor de k ($k=2,3,\ldots,n$). La ecuación (4.31) determina YLd_k en función de los parámetros de crecimiento y del costo económico.

El vector de árboles no cortados x en el rendimiento óptimo duradero, es

$$x = \frac{S}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \ldots + \frac{1}{g_{k-1}}} \begin{bmatrix} 1/g_1 \\ 1/g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1/g_{k-1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

No necesariamente los árboles de la clase con el precio más alto son los que deban cortarse, también, hay que tomar en cuenta los parámetros de crecimiento, g_i, para determinar el rendimiento.

4.12 APLICANDO EL METODO

A continuación desarrollaremos y analizaremos el método para un bosque de pinos en Escocia, en el que se determinará cuál es la clase que debe cortarse totalmente para obtener un rendimiento óptimo duradero y cuál es ese rendimiento. El período de crecimiento se toma de 6 años, encontrándose la siguiente matriz de crecimiento:

$$G = \begin{bmatrix} .72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .28 & .69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .31 & .75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .25 & .77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .23 & .63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .37 & 1.0 \end{bmatrix}$$

los costos de cada árbol de las cinco clases de mayor altura son:

$P_2 = \$50.00$, $P_3 = \$100.00$, $P_4 = \$150.00$

$P_5 = \$200.00$, $P_6 = \$250.00$

Solución: Para calcular el rendimiento óptimo duradero, necesitamos los valores de g_i $(i=1,2,3,4,5)$, y estos los obtenemos de la matriz G.

$G_1 = .28$, $G_2 = .31$, $G_3 = .25$, $G_4 = .23$, $G_5 = .37$

para saber cuál es la clase que hace que el rendimiento sea máximo, se tiene que calcular YLd_k para $k=2,3,4,5,6$

$$YLd_2 = 50S/(.28^{-1}) = 14.0S$$
$$YLd_3 = 100S/(.28^{-1} + .31^{-1}) = 14.7S$$
$$YLd_4 = 150S/(.28^{-1} + .31^{-1} + .25^{-1}) = 13.9S$$
$$YLd_5 = 200S/(.28^{-1} + .31^{-1} + .25^{-1} + .23^{-1}) = 13.2S$$
$$YLd_6 = 250S/(.28^{-1} + .31^{-1} + .25^{-1} + .23^{-1} + .37^{-1}) = 14.0S$$

de aquí se concluye que la clase que debe cortarse por completo cada seis años, es la tercera clase, para obtener un rendimiento óptimo y máximo. Así, el rendimiento óptimo duradero es de \$14.7S donde S es el número total de árboles que hay en el bosque.

a) Ahora, se quiere conocer el precio de los árboles de la quinta clase para que sea ésta, la que deba cortarse totalmente y lograr así el rendimiento óptimo duradero sostenible.

Solución: Para que la quinta clase deba cortarse totalmente, debe cumplirse que $YLd_5 > 14.7S$, entonces

$$YLd_5 = \frac{P_5 S}{g_1^{-1} + g_2^{-1} + g_3^{-1} + g_4^{-1} + g_5^{-1}} > 14.7S$$

$$\frac{P_5 S}{15.145} > 14.7S$$

$$P_5 > (14.7)(15.145)$$

$$P_5 > 222.64$$

∴ El precio de cada árbol de la quinta clase tiene que ser por lo menos #222.64.

b) Si los parámetros de crecimiento $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ son todos iguales ¿cuál debe ser la relación entre los precios $P_2, \ldots, P_n$, para que cualquier política de explotación racional y duradera sea óptima?

Solución:

$$\frac{P_2 S}{g_1^{-1}} = \frac{P_3 S}{g_1^{-1} + g_2^{-1}} = \frac{P_4 S}{g_1^{-1}+g_2^{-1}+g_3^{-1}} = \frac{P_5 S}{g_1^{-1}+g_2^{-1}+g_3^{-1}+g_4^{-1}} = \frac{P_6 S}{g_1^{-1}+g_2^{-1}+g_3^{-1}+g_4^{-1}+}$$

como $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5$, entonces

$$\frac{P_2}{g_1^{-1}} = \frac{P_3}{2g_1^{-1}} = \frac{P_4}{3g_1^{-1}} = \frac{P_5}{4g_1^{-1}} = \frac{P_6}{5g_1^{-1}}$$

$$\therefore \boxed{P_2 = \frac{1}{2} P_3 = \frac{1}{3} P_4 = \frac{1}{4} P_5 = \frac{1}{5} P_6}$$

IV. EJEMPLO CON OSCILACIONES

Consideremos la matriz de Leslie siguiente:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

con el vector de distribución de edad inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

calculamos $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\ldots, x^{(6)}$, para ver que sucede:

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80\\ 5\end{bmatrix};\qquad x^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40\\ 40\end{bmatrix}$$

$$x^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40\\ 40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}320\\ 20\end{bmatrix};\qquad x^{(4)}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}320\\ 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}160\\ 160\end{bmatrix}$$

$$x^{(5)}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}160\\ 160\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1280\\ 80\end{bmatrix};\qquad x^{(6)}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1280\\ 80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}640\\ 640\end{bmatrix}$$

Se puede observar que unos vectores de distribución tienen una razón de 16:1 y otros una razón de 1:1. Cada 2 unidades de tiempo el tamaño total de la población crece en un factor de 4.

Veamos que pasa con los valores propios de esta matriz de Leslie. El polinomio característico de la matriz es $P(\lambda)=\lambda^2-4$ y por tanto, los valores propiós de L son las soluciones de $\lambda^2-4=0$, entonces

$$\lambda_1=2 \quad y \quad \lambda_2=-2$$

el valor absoluto de los dos valores propios es 2, por lo tanto, el valor propio único positivo $\lambda_1=2$ no es estrictamente dominante. Y es por esto, que el vector de distribución se com porta así, de manera oscilatoria. Esta matriz tiene la propiedad de que $L^2 = 2^2 I$, y para cualquiera que sea la distribución de edades inicial $x^{(0)}$, se tendrá

$$x^{(0)} = 2^2 x^{(2)} = 2^4 x^{(4)} = \ldots = 2^{2k}\ x^{(2k)} = \ldots .$$

V. EJEMPLO UTILIZANDO VECTORES PROPIOS IZQUIERDOS Y DERECHOS.

Sea una población, la cuál está gobernada por la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

encontrar cuál es el $\lim_{k\to\infty} A^k/\lambda_1^k$ y describir al vector $x^{(k)}$ de la distribución de la población cuando $k\to\infty$.

El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)-2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

los valores propios de A son:

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -1$$

El vector propio V_1 correspondiente a λ_1 de la matriz A es:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector propio U_1 correspondiente a λ_1 de la matriz A^t es:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Recordando la ecuación (3.7)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{\lambda_1 k} = \frac{V_1 U_1^T}{U_1^T V_1}$$

Así
$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{\lambda_1 k} = \frac{\binom{6}{1}(1 \quad 3)}{(1 \ 3)\binom{6}{1}} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}{9}$$

$$\therefore \quad \lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{\lambda_1 k} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, si $x^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ es el vector de la distribución de edades inicial, entonces

$$x^{(k)} = 2^k \begin{bmatrix} 6/9 & 18/9 \\ 1/9 & 3/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2^k \begin{bmatrix} 6/9a + 18/9b \\ 1/9a + 3/9b \end{bmatrix}$$

$$x^{(k)} = 2^k(a+3b) \begin{bmatrix} 6/9 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

Por lo que el vector $x^{(k)}$ se comporta parecido a un múltiplo del vector $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$. Cada unidad de tiempo, las entradas del vector de la distribución de edades son multiplicadas por 2, aproximadamente.

VI. EJEMPLO.

Con este ejemplo se tratará de ver que las raíces complejas del polinomio característico de una matriz de Leslie, influyen para que la población tarde más o menos en estabilizarse. Considerense 2 matrices de Leslie con el mismo valor propio λ_1 y el mismo vector propio, pero difieren en algunos de sus elementos diferentes de cero. Entonces, difieren también en sus otras raíces $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

Sea $\begin{bmatrix} 0.3 & 1.6 & 6.0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.9 & 1.5 \\ .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

Ambas tienen el mismo valor propio estrictamente dominante, $\lambda_1 = 1.5$, y el mismo vector propio $V_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Las otras raíces de A son $\lambda_2 = -0.6 + 0.8i$,

$\lambda_3 = -0.6 - 0.8i$. El módulo de estas raíces es 1.0.

Las otras raíces de B son $\lambda_2 = -0.4 + 0.3i$,

$\lambda_3 = -0.4 - 0.3i$. Cuyo modelo es 0.5.

Supóngase que se tienen 2 poblaciones, una con crecimiento gobernado por A y la otra gobernado por B. Ambas poblaciones principian con la misma distribución de edad inicial

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Los vectores de la distribución de edad en los tiempos 0,1,...7 son mostrados en la Fig. #9. En esta figura se ve claramente que la población que tiene raíces complejas con módulo más pequeño (B), logra estabilizarse más rápido que la población que tiene raíces complejas con módulo mayor. (A).

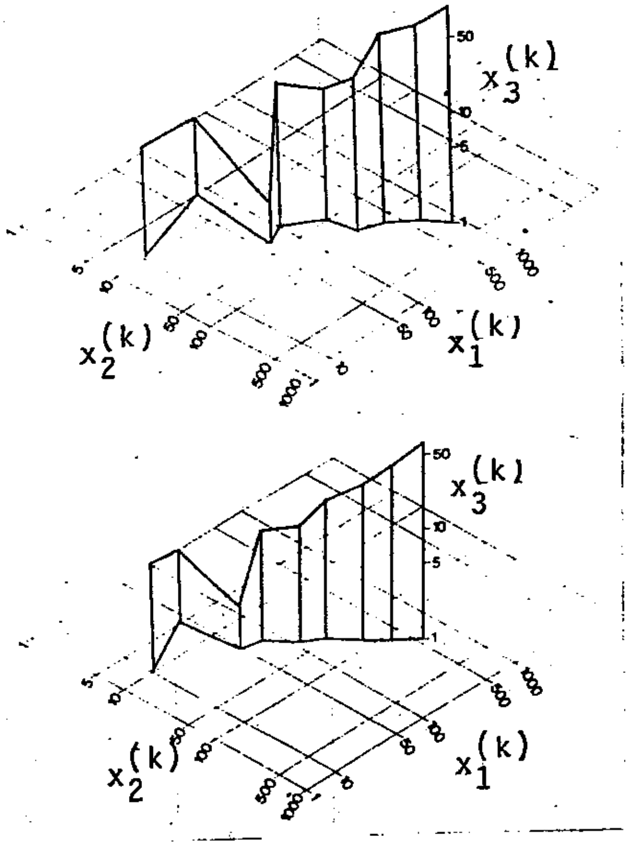

Fig. # 9

Crecimiento de poblaciones cuyas matrices de proyección son A(arriba) y B(abajo). La trayectoria de cada población es la sucesión de puntos de la parte de arriba de cada gráfica. Las coordenadas de los puntos están en escala logarítmica en las 3 clases de edad.

APENDICE A

```
REM POTENCIAS DE UNA MATRIZ
DIM A(10,10),B(10,10)
INPUT '# DE RENGLONES Y/O COLUMNAS';N
PRINT 'VALORES DE LA MATRIZ A'
MAT INPUT A(N,N)
PRINT
PRINT 'MATRIZ A'
PRINT
MAT PRINT A
FOR I=1 TO 6
MAT B=A*A
PRINT 'MATRIZ A' :2**I
PRINT
MAT PRINT B
MAT A=B
NEXT I
END
```

POTENCIAS DE LA MATRIZ A

:NGLONES Y/O COLUMNAS 3

; DE LA MATRIZ A

0,1,2,..5,0,0,0,.5,0

A

	1	2
	0	0
	.5	0

A 2

	1	0
	.5	1
	0	0

A 4

	1	1
	.25	.5
	.25	0

A 8

	.75	.75
	.4375	.375
	.1875	.25

A 16

375	.796875	.796875
375	.40234375	.3984375
7375	.19921875	.203125

A 32

71552734	.7999877929688	.7999877929688
59482422	.4000091552734	.3999938964844
347412109	.1999969482422	.2000122070313

A 64

00001397	.7999999998137	.7999999998137
99999534	.4000000001397	.3999999999069
999997672	.1999999999534	.2000000001863

POTENCIAS DE LA MATRIZ B

RENGLONES Y/O COLUMNAS 2
:S DE LA MATRIZ A

1, 4, . 5, 0

: A

4
0

: A 2

4
2

: A 4

20
6

Z A 8

340
86

Z A 16

87380
.5 21846

Z A 32

11531	5726623060
7882.5	1431655766

Z A 64

782938247E+19	2.459565876495E+19
457345618E+18	6.148914691237E+18

APENDICE B

```
REM INVERSA DE UNA MATRIZ
DIM A(10,10),B(10,10),C(10,10)
INPUT "# DE COLUMNAS Y/O RENGLONES ";N
PRINT "VALORES DE LA MATRIZ"
MAT INPUT A(N,N)
PRINT
PRINT ' MATRIZ A '
PRINT
MAT PRINT A
MAT B=INV(A)
REM COMPROBAR QUE ES SU INVERSA
MAT C=A*B
Y1=DET(A)
PRINT "MATRIZ INVERSA"
MAT PRINT B
PRINT "MATRIZ IDENTIDAD"
MAT PRINT C
PRINT 'DETERMINANTE=':Y1
END
```

INVERSA DE LA MATRIZ M

LUMNAS Y/O RENGLONES 6
DE LA MATRIZ
,.96,0,0,0,0,.98,0,.96,0,0,0,0,0,0,.95,0,0,0,0,0,0,.95,0,.646,0,0,0,0,0,
0,0,0,

A

0	.96	0
0		
.98	0	.96
0		
0	0	0
0		
0	0	0
.95		
.46	0	0
0		
.44	0	0
0		

TRIX IS SINGULAR AT LINE 60

APENDICE C

```
**    PROGRAMA  QUE  ACOMPANA  LA  APLICACION  DE  LA  *****
**       ADMINISTRACION  DE  UNA  MANADA  DE  VACUNOS  *****


 DIMENSION H(6),Q(6),GUARDA(50,7)
 READ(1,*)H,Q(1),Q(2),LARGO
 IF(H(1).LT.0) GO TO 208
 WRITE(1,101)
 FORMAT(1H1,26X,'MILES DE VACUNOS')
 WRITE(1,102)
 FORMAT(2X,'ANO',4X,'TOTAL',7X,'AM',8X,'AH',8X,'NM',8X,'NH',
*8X,'BM',8X,'BH')
  CALCULAR EL TOTAL DE VACUNOS DEL ANO CERO.
 NANO=0
 TOTAL=0.0
 DO 5 L=1,6
 TOTAL=TOTAL+H(L)
 WRITE(1,103)NANO,TOTAL,H
 FORMAT(2X,I2,3X,F8.3,6(3X,F7.3))
  CONVERTIR A PORCENTAJES Y GUARDAR LA IMPRESION PARA DESPUES
 GUARDA(1,1)=0
 DO 10 L=2,7
 LL=L-1

  PORCENTAJE DE  AM,AH,BM,BH, DEL ANO CERO.
 GUARDA(1,L)=H(LL)/TOTAL*100
  PORCENTAJE TOTAL DE VACUNOS DEL ANO CERO.
 GUARDA(1,1)=GUARDA(1,1)+GUARDA(1,L)
  CALCULO DE CADA UNA DE LAS CLASES DE LA MANADA,DEL ANO 1 AL 20.
 DO 25 K=1,LARGO
 NANO=K
  TEMPO SE USA PARA GUARDAR EL VALOR DE H(2),PARA NO CALCULAR MAL
                        H(5) Y H(6).
 TEMPO=H(2)
 H(1)=.98*H(1)+.96*H(3)-Q(1)
 H(2)=.98*H(2)+.96*H(4)-Q(2)
 H(3)=.95*H(5)
 H(4)=.95*H(6)
 H(5)=.46*TEMPO
 H(6)=.44*TEMPO
  CALCULAR EL TOTAL DE VACUNOS DE CADA ANO
 TOTAL=0.0
 DO 15 L=1,6
 TOTAL=TOTAL+H(L)
 WRITE(1,103)NANO,TOTAL,H
 KK=K+1
 GUARDA(KK,1)=0
 DO 20 L=2,7
 LL=L-1
  CALCULO DEL PORCENTAJE DE LAS CLASES DE VACUNOS DE CADA ANO
```

```
    GUARDA(KK,L)=H(LL)/TOTAL*100
     CALCULO DEL PORCENTAJE TOTAL DE VACUNOS DE CADA ANO.
 20 GUARDA(KK,1)=GUARDA(KK,1)+GUARDA(KK,L)
 25 CONTINUE
     IMPRIMIR PORCENTAJES Y TOTALES DE PORCENTAJES.
    WRITE(1,104)
 04 FORMAT(1H0,15X,'PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA')
    WRITE(1,102)
    LL=LARGO+1
    DO 30 K=1,LL
    NANO=K-1
    WRITE(1,105)NANO,(GUARDA(K,J),J=1,7)
 05 FORMAT(2X,I2,5X,F5.1,6X,6(F4.1,6X))
 30 CONTINUE
    WRITE(1,106)Q(1),Q(2)
 )6 FORMAT(1H0,2X,'LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES',2X,F6.2,2X,'MACHOS
   *',2X,F6.2,2X,'HEMBRAS (MILES)')
    GO TO 1
 )8 CALL EXIT
    END
```

```
10. 2.3 2.1 3.6 3.15
1. 20
```

MILES DE VACUNOS

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	26.150	5.000	10.000	2.300	2.100	3.600	3.150
1	31.336	5.108	10.816	3.420	2.992	4.600	4.400
2	37.046	6.289	12.472	4.370	4.180	4.975	4.759
3	44.067	8.358	15.236	4.727	4.521	5.737	5.488
4	53.376	10.729	18.271	5.450	5.213	7.008	6.704
5	65.128	13.747	21.911	6.658	6.369	8.405	8.039
6	79.792	17.863	26.586	7.985	7.637	10.079	9.641
7	98.220	23.171	32.387	9.575	9.159	12.230	11.692
8	121.311	29.900	39.531	11.618	11.113	14.898	14.250
9	150.134	38.456	48.409	14.153	13.538	18.184	17.394
10	186.078	49.273	59.437	17.275	16.524	22.268	21.300
11	230.867	62.872	73.112	21.155	20.235	27.341	26.152

2	286.617	79.923	90.075	25.974	24.845	33.631	32.169
3	355.962	101.260	111.124	31.950	30.561	41.434	39.633
4	442.172	127.906	137.240	39.363	37.651	51.117	48.895
5	549.304	161.136	169.641	48.561	46.450	63.130	60.386
16	682.389	202.533	209.840	59.974	57.366	78.035	74.642
17	847.669	254.057	259.715	74.133	70.910	96.526	92.329
18	1052.892	318.143	321.594	91.700	87.713	119.469	114.274
19	1307.668	397.812	398.366	113.495	108.561	147.933	141.501
20	1623.920	496.811	493.617	140.536	134.426	183.248	175.281

PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	100.0	19.1	38.2	8.8	8.0	13.8	12.0
1	100.0	16.3	34.5	10.9	9.5	14.7	14.0
2	100.0	17.0	33.7	11.8	11.3	13.4	12.8
3	100.0	19.0	34.6	10.7	10.3	13.0	12.5
4	100.0	20.1	34.2	10.2	9.8	13.1	12.6
5	100.0	21.1	33.6	10.2	9.8	12.9	12.3
6	100.0	22.4	33.3	10.0	9.6	12.6	12.1
7	100.0	23.6	33.0	9.7	9.3	12.5	11.9
8	100.0	24.6	32.6	9.6	9.2	12.3	11.7
9	100.0	25.6	32.2	9.4	9.0	12.1	11.6
10	100.0	26.5	31.9	9.3	8.9	12.0	11.4
11	100.0	27.2	31.7	9.2	8.8	11.8	11.3
12	100.0	27.9	31.4	9.1	8.7	11.7	11.2
13	100.0	28.4	31.2	9.0	8.6	11.6	11.1
14	100.0	28.9	31.0	8.9	8.5	11.6	11.1
15	100.0	29.3	30.9	8.8	8.5	11.5	11.0
16	100.0	29.7	30.8	8.8	8.4	11.4	10.9
17	100.0	30.0	30.6	8.7	8.4	11.4	10.9
18	100.0	30.2	30.5	8.7	8.3	11.3	10.9
19	100.0	30.4	30.5	8.7	8.3	11.3	10.8
20	100.0	30.6	30.4	8.7	8.3	11.3	10.8

LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES 2.00 MACHOS 1.00 HEMBRAS (MILES)

****

10. 2.3 2.1 3.6 3.15
2. 20

MILES DE VACUNOS

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	26.150	5.000	10.000	2.300	2.100	3.600	3.150
1	31.336	6.108	9.816	3.420	2.992	4.600	4.400
2	36.146	8.269	10.492	4.370	4.180	4.515	4.319
3	41.430	11.299	12.295	4.290	4.103	4.827	4.617
4	48.216	14.191	13.988	4.585	4.386	5.656	5.410
5	56.330	17.309	15.919	5.373	5.139	6.435	6.155
6	65.943	21.121	18.535	6.113	5.847	7.323	7.004
7	77.636	25.567	21.777	6.957	6.654	8.526	8.155
8	91.910	30.734	25.730	8.100	7.747	10.018	9.582
9	109.324	36.895	30.653	9.517	9.103	11.836	11.321
10	130.658	44.293	36.778	11.244	10.755	14.100	13.487
11	156.877	53.201	44.368	13.395	12.813	16.918	16.182
12	189.153	63.997	53.781	16.072	15.373	20.409	19.522
13	228.946	77.146	65.463	19.389	18.546	24.739	23.663
14	278.073	93.216	79.958	23.502	22.480	30.113	28.804

15	338.787	112.914	97.940	28.607	27.364	36.781	35.181
16	413.878	137.119	120.250	34.942	33.422	45.052	43.094
17	506.814	166.920	147.931	42.800	40.939	55.315	52.910
18	621.894	203.669	182.273	52.549	50.265	68.048	65.097
19	764.451	249.043	224.882	64.646	61.835	83.846	80.200
20	941.105	305.122	277.746	79.653	76.190	103.446	98.948

PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	100.0	19.1	38.2	8.8	8.0	13.8	12.0
1	100.0	19.5	31.3	10.9	9.5	14.7	14.0
2	100.0	22.9	29.0	12.1	11.6	12.5	11.9
3	100.0	27.3	29.7	10.4	9.9	11.6	11.1
4	100.0	29.4	29.0	9.5	9.1	11.7	11.2
5	100.0	30.7	28.3	9.5	9.1	11.4	10.9
6	100.0	32.0	28.1	9.3	8.9	11.1	10.6
7	100.0	32.9	28.1	9.0	8.6	11.0	10.5
8	100.0	33.4	28.0	8.8	8.4	10.9	10.4
9	100.0	33.7	28.0	8.7	8.3	10.8	10.4
10	100.0	33.9	28.1	8.6	8.2	10.8	10.3
11	100.0	33.9	28.3	8.5	8.2	10.8	10.3
12	100.0	33.8	28.4	8.5	8.1	10.8	10.3
13	100.0	33.7	28.6	8.5	8.1	10.8	10.3
14	100.0	33.5	28.8	8.5	8.1	10.8	10.4
15	100.0	33.3	28.9	8.4	8.1	10.9	10.4
16	100.0	33.1	29.1	8.4	8.1	10.9	10.4
17	100.0	32.9	29.2	8.4	8.1	10.9	10.4
18	100.0	32.7	29.3	8.4	8.1	10.9	10.5
19	100.0	32.6	29.4	8.5	8.1	11.0	10.5
20	100.0	32.4	29.5	8.5	8.1	11.0	10.5

LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES 1.00 MACHOS 2.00 HEMBRAS (MILES)

10. 2.3 2.1 3.6 3.15
3. 20

MILES DE VACUNOS

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	26.150	5.000	10.000	2.300	2.100	3.600	3.150
1	31.336	7.108	8.816	3.420	2.992	4.600	4.400
2	35.246	10.249	8.512	4.370	4.180	4.055	3.879
3	38.793	14.239	9.355	3.853	3.685	3.916	3.745
4	43.056	17.653	9.706	3.720	3.558	4.303	4.116
5	47.532	20.871	9.927	4.088	3.910	4.465	4.270
6	52.094	24.378	10.483	4.241	4.057	4.567	4.368
7	57.053	27.962	11.168	4.338	4.150	4.822	4.612
8	62.510	31.568	11.928	4.581	4.382	5.137	4.914
9	68.514	35.334	12.896	4.880	4.668	5.487	5.248
10	75.237	39.313	14.120	5.213	4.986	5.932	5.674
11	82.888	43.530	15.624	5.636	5.391	6.495	6.213
12	91.690	48.070	17.486	6.170	5.902	7.187	6.874
13	101.930	53.032	19.802	6.828	6.531	8.044	7.694
14	113.974	58.526	22.676	7.641	7.309	9.109	8.713
15	128.269	64.691	26.239	8.654	8.277	10.431	9.977
16	145.368	71.705	30.661	9.909	9.478	12.070	11.545
17	165.959	79.784	36.147	11.466	10.968	14.104	13.491

RIS T965

18	190.895	89.196	42.953	13.399	12.816	16.627	15.905
19	221.235	100.274	51.397	15.796	15.109	19.758	18.899
20	258.290	113.433	61.874	18.770	17.954	23.643	22.615

PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	100.0	19.1	38.2	8.8	8.0	13.8	12.0
1	100.0	22.7	28.1	10.9	9.5	14.7	14.0
2	100.0	29.1	24.2	12.4	11.9	11.5	11.0
3	100.0	36.7	24.1	9.9	9.5	10.1	9.7
4	100.0	41.0	22.5	8.6	8.3	10.0	9.6
5	100.0	43.9	20.9	8.6	8.2	9.4	9.0
6	100.0	46.8	20.1	8.1	7.8	8.8	8.4
7	100.0	49.0	19.6	7.6	7.3	8.5	8.1
8	100.0	50.5	19.1	7.3	7.0	8.2	7.9
9	100.0	51.6	18.8	7.1	6.8	8.0	7.7
10	100.0	52.3	18.8	6.9	6.6	7.9	7.5
11	100.0	52.5	18.8	6.8	6.5	7.8	7.5
12	100.0	52.4	19.1	6.7	6.4	7.8	7.5
13	100.0	52.0	19.4	6.7	6.4	7.9	7.5
14	100.0	51.4	19.9	6.7	6.4	8.0	7.6
15	100.0	50.4	20.5	6.7	6.5	8.1	7.8
16	100.0	49.3	21.1	6.8	6.5	8.3	7.9
17	100.0	48.1	21.8	6.9	6.6	8.5	8.1
18	100.0	46.7	22.5	7.0	6.7	8.7	8.3
19	100.0	45.3	23.2	7.1	6.8	8.9	8.5
20	100.0	43.9	24.0	7.3	7.0	9.2	8.8

LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES 0.00 MACHOS 3.00 HEMBRAS (MILES)

****

1. 10. 2.3 2.1 3.6 23.15

1. 0. 20

MILES DE VACUNOS

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	26.150	5.000	10.000	2.300	2.100	3.600	3.150
1	31.336	4.108	11.816	3.420	2.992	4.600	4.400
2	37.946	4.309	14.452	4.370	4.180	5.435	5.199
3	46.704	5.418	18.176	5.164	4.939	6.648	6.359
4	58.536	7.267	22.554	6.316	6.041	8.361	7.998
5	73.927	10.184	27.903	7.943	7.598	10.375	9.924
6	93.641	14.606	34.638	9.856	9.428	12.835	12.277
7	118.803	20.776	42.996	12.193	11.663	15.934	15.241
8	150.711	29.066	53.333	15.137	14.479	19.778	18.918
9	190.943	40.016	66.166	18.789	17.972	24.533	23.466
10	241.498	54.254	82.096	23.306	22.293	30.436	29.113
11	304.856	72.543	101.856	28.914	27.657	37.764	36.122
12	384.081	95.850	126.369	35.876	34.316	46.854	44.816
13	482.978	125.374	156.785	44.511	42.576	58.130	55.603
14	606.271	162.597	194.522	55.223	52.822	72.121	68.906
15	759.822	209.359	241.341	68.515	65.536	89.480	85.590
16	950.899	267.946	299.429	85.006	81.310	111.017	106.190
17	1188.525	341.193	371.499	105.466	100.881	137.737	131.749
18	1483.891	432.617	460.914	130.851	125.161	170.889	163.459
19	1850.885	546.581	571.850	162.345	155.286	212.020	202.802
20	2306.734	688.500	709.488	201.419	192.662	263.051	251.614

PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	100.0	19.1	38.2	8.8	8.0	13.8	12.0
1	100.0	13.1	37.7	10.9	9.5	14.7	14.0
2	100.0	11.4	38.1	11.5	11.0	14.3	13.7
3	100.0	11.6	38.9	11.1	10.6	14.2	13.6
4	100.0	12.4	38.5	10.8	10.3	14.3	13.7
5	100.0	13.8	37.7	10.7	10.3	14.0	13.4
6	100.0	15.6	37.0	10.5	10.1	13.7	13.1
7	100.0	17.5	36.2	10.3	9.[illegible]	13.4	12.8
8	100.0	19.3	35.4	10.0	9.6	13.1	12.6
9	100.0	21.0	34.7	9.8	9.4	12.8	12.3
10	100.0	22.5	34.0	9.7	9.2	12.6	12.1
11	100.0	23.8	33.4	9.5	9.1	12.4	11.8
12	100.0	25.0	32.9	9.3	8.9	12.2	11.7
13	100.0	26.0	32.5	9.2	8.8	12.0	11.5
14	100.0	26.8	32.1	9.1	8.7	11.9	11.4
15	100.0	27.6	31.8	9.0	8.6	11.8	11.3
16	100.0	28.2	31.5	8.9	8.6	11.7	11.2
17	100.0	28.7	31.3	8.9	8.5	11.6	11.1
18	100.0	29.2	31.1	8.8	8.4	11.5	11.0
19	100.0	29.5	30.9	8.8	8.4	11.5	11.0
20	100.0	29.8	30.8	8.7	8.4	11.4	10.9

LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES 3.00 MACHOS 0.00 HEMBRAS (MILES)

10. 10. 2.3 2.1 3.6 3.15

5. 20

MILES DE VACUNOS

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	26.150	5.000	10.000	2.300	2.100	3.600	3.150
1	28.336	6.108	6.816	3.420	2.992	4.600	4.400
2	27.506	8.269	4.552	4.370	4.180	3.135	2.999
3	24.698	11.299	3.474	2.979	2.849	2.094	2.003
4	21.091	12.932	1.140	1.989	1.903	1.598	1.599
5	15.524	13.584	-2.056	1.518	1.452	0.524	0.502
6	7.273	13.769	-5.621	0.498	0.476	-0.946	-0.905
7	-3.896	12.972	-10.051	-0.899	-0.859	-2.586	-2.473
8	-18.677	10.850	-15.675	-2.456	-2.350	-4.623	-4.422
9	-38.043	7.275	-22.617	-4.392	-4.201	-7.211	-6.897
10	-63.043	1.913	-31.198	-6.850	-6.552	-10.404	-9.952
11	-94.982	-5.701	-41.864	-9.884	-9.454	-14.351	-13.727
12	-135.531	-16.076	-55.103	-13.634	-13.041	-19.258	-18.420
13	-186.749	-29.842	-71.520	-18.295	-17.499	-25.347	-24.245
14	-251.178	-47.808	-91.889	-24.080	-23.033	-32.899	-31.469
15	-331.981	-70.969	=117.16	-31.254	-29.895	-42.269	-40.431
16	-433.084	=100.55	=148.51	-40.155	-38.410	-53.895	-51.552
17	-559.354	=138.09	=187.42	-51.200	-48.974	-68.319	-65.348
18	-716.833	=185.48	=235.68	-64.903	-62.081	-86.214	-82.465
19	-913.016	=245.07	=295.57	-81.903	-78.342	=108.41	=103.70
20	=1157.20	=319.80	=369.86	=102.99	-98.518	=135.96	=130.05

PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	100.0	19.1	38.2	8.8	8.0	13.8	12.0

1	100.0	21.6	24.1	12.1	10.6	16.2	15.5
2	100.0	30.1	16.6	15.9	15.2	11.4	10.9
3	100.0	45.7	14.1	12.1	11.5	8.5	8.1
4	100.0	61.3	5.4	9.4	9.0	7.6	7.2
5	100.0	87.5	=13.	9.8	9.4	3.4	3.2
6	100.0	$189	=77.	6.8	6.6	=13.	=12
7	100.0	=333	$258	23.1	22.1	66.4	63.5
8	100.0	=58.	83.9	13.2	12.6	24.8	23.7
9	100.0	=19.	59.5	11.5	11.0	19.0	18.1
10	100.0	-3.0	49.5	10.9	10.4	16.5	15.8
11	100.0	6.0	44.1	10.4	10.0	15.1	14.5
12	100.0	11.9	40.7	10.1	9.6	14.2	13.6
13	100.0	16.0	38.3	9.8	9.4	13.6	13.0
14	100.0	19.0	36.6	9.6	9.2	13.1	12.5
15	100.0	21.4	35.3	9.4	9.0	12.7	12.2
16	100.0	23.2	34.3	9.3	8.9	12.4	11.9
17	100.0	24.7	33.5	9.2	8.8.	12.2	11.7
18	100.0	25.9	32.9	9.1	8.7	12.0	11.5
19	100.0	26.8	32.4	9.0	8.6	11.9	11.4
20	100.0	27.6	32.0	8.9	8.5	11.7	11.2

LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES 1.00 MACHOS 5.00 HEMBRAS (MILES)

10. 2.3 2.1 3.6 3.15
5. 20

MILES DE VACUNOS

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	26.150	5.000	10.000	2.300	2.100	3.600	3.150
1	29.336	7.108	6.816	3.420	2.992	4.600	4.400
2	29.486	10.249	4.552	4.370	4.180	3.135	2.999
3	27.638	14.239	3.474	2.979	2.849	2.094	2.003
4	24.973	16.814	1.140	1.989	1.903	1.598	1.529
5	20.328	18.387	-2.056	1.518	1.452	0.524	0.502
6	12.980	19.477	-5.621	0.498	0.476	-0.946	-0.905
7	2.698	19.566	-10.051	-0.899	-0.859	-2.586	-2.473
8	-11.215	18.312	-15.675	-2.456	-2.350	-4.623	-4.422
9	-29.731	15.588	-22.617	-4.392	-4.201	-7.211	-6.897
10	-53.896	11.059	-31.198	-6.850	-6.552	-10.404	-9.952
11	-85.018	4.262	-41.864	-9.884	-9.454	-14.351	-13.727
12	-124.766	-5.311	-55.103	-13.634	-13.041	-19.258	-18.420
13	-175.200	-18.293	-71.520	-18.295	-17.499	-25.347	-24.245
14	-238.860	-35.491	-91.889	-24.080	-23.033	-32.899	-31.469
15	-318.909	-57.897	=117.16	-31.254	-29.895	-42.269	-40.431
16	-419.274	-86.743	=148.51	-40.155	-38.410	-53.895	-51.552
17	-544.820	=123.55	=187.42	-51.200	-48.974	-68.319	-65.348
18	-701.590	=170.23	=235.68	-64.903	-62.081	-86.214	-82.465
19	-897.078	=229.14	=295.57	-81.903	-78.342	=108.41	=103.70
20	=1140.58	=303.18	=369.86	=102.99	-98.518	=135.96	=130.05

PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	100.0	19.1	38.2	8.8	8.0	13.8	12.0
1	100.0	24.2	23.2	11.7	10.2	15.7	15.0
2	100.0	34.8	15.4	14.8	14.2	10.6	10.2
3	100.0	51.5	12.6	10.8	10.3	7.6	7.2

4	100.0	67.3	4.6	8.0	7.6	6.4	6.1
5	100.0	90.5	=10.	7.5	7.1	2.6	2.5
6	100.0	$150	=43.	3.8	3.7	-7.3	-7.0
7	100.0	$725	=372	=33.	=31.	=95.	=91.
8	100.0	=163	$139	21.9	20.9	41.2	39.4
9	100.0	=52.	76.1	14.8	14.1	24.3	23.2
10	100.0	=20.	57.9	12.7	12.2	19.3	18.5
11	100.0	-5.0	49.2	11.6	11.1	16.9	16.1
12	100.0	4.3	44.2	10.9	10.5	15.4	14.8
13	100.0	10.4	40.8	10.4	10.0	14.5	13.8
14	100.0	14.9	38.5	10.1	9.6	13.8	13.2
15	100.0	18.2	36.7	9.8	9.4	13.3	12.7
16	100.0	20.7	35.4	9.6	9.2	12.9	12.3
17	100.0	22.7	34.4	9.4	9.0	12.5	12.0
18	100.0	24.3	33.6	9.3	8.8	12.3	11.8
19	100.0	25.5	32.9	9.1	8.7	12.1	11.6
20	100.0	26.6	32.4	9.0	8.6	11.9	11.4

LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES 0.00 MACHOS 5.00 HEMBRAS (MILES)

10. 2.3 2.1 3.6 3.15
4. 20

MILES DE VACUNOS

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	26.150	5.000	10.000	2.300	2.100	3.600	3.150
1	29.336	6.108	7.816	3.420	2.992	4.600	4.400
2	30.386	8.269	6.532	4.370	4.180	3.595	3.439
3	30.275	11.299	6.415	3.416	3.267	3.005	2.874
4	30.133	13.352	5.423	2.855	2.731	2.951	2.822
5	29.126	14.825	3.936	2.803	2.681	2.494	2.386
6	26.829	16.220	2.431	2.370	2.267	1.810	1.732
7	23.282	17.170	0.558	1.720	1.645	1.118	1.070
8	18.186	17.478	-1.873	1.062	1.016	0.257	0.246
9	11.079	17.148	-4.861	0.244	0.233	-0.862	-0.824
10	1.524	16.040	-8.539	-0.819	-0.783	-2.236	-2.139
11	-11.028	13.933	-13.120	-2.124	-2.032	-3.928	-3.757
12	-27.302	10.615	-18.808	-3.732	-3.569	-6.035	-5.773
13	-48.184	5.820	-25.859	-5.734	-5.484	-8.652	-8.276
14	-74.761	-0.800	-34.606	-8.219	-7.862	-11.895	-11.378
15	-108.391	-9.675	-45.462	-11.300	-10.809	-15.919	-15.227
16	-150.763	-21.329	-58.929	-15.123	-14.466	-20.912	-20.003
17	-203.964	-36.421	-75.637	-19.867	-19.003	-27.107	-25.929
18	-270.590	-55.765	-96.368	-25.752	-24.632	-34.793	-33.280
19	-353.859	-80.371	=122.08	-33.054	-31.616	-44.329	-42.402
20	-457.766	=111.49	=153.99	-42.113	-40.282	-56.160	-53.718

PORCENTAJES DE LA DISTRIBUCION DE LA MANADA

ANO	TOTAL	AM	AH	NM	NH	BM	BH
0	100.0	19.1	38.2	8.8	8.0	13.8	12.0
1	100.0	20.8	26.6	11.7	10.2	15.7	15.0
2	100.0	27.2	21.5	14.4	13.8	11.8	11.3
3	100.0	37.3	21.2	11.3	10.8	9.9	9.5
4	100.0	44.3	18.0	9.5	9.1	9.8	9.4
5	100.0	50.9	13.5	9.6	9.2	8.6	8.2
6	100.0	60.5	9.1	8.8	8.4	6.7	6.5

7	100.0	73.8	2.4	7.4	7.1	4.8	4.6
8	100.0	96.1	=10.	5.8	5.6	1.4	1.4
9	100.0	$154	=43.	2.2	2.1	-7.8	-7.4
10	100.0	$105	=560	=53.	=51.	=146	=140
11	100.0	=126	$119	19.3	18.4	35.6	34.1
12	100.0	=38.	68.9	13.7	13.1	22.1	21.1
13	100.0	=12.	53.7	11.9	11.4	18.0	17.2
14	100.0	1.1	46.3	11.0	10.5	15.9	15.2
15	100.0	8.9	41.9	10.4	10.0	14.7	14.0
16	100.0	14.1	39.1	10.0	9.6	13.9	13.3
17	100.0	17.9	37.1	9.7	9.3	13.3	12.7
18	100.0	20.6	35.6	9.5	9.1	12.9	12.3
19	100.0	22.7	34.5	9.3	8.9	12.5	12.0
20	100.0	24.4	33.6	9.2	8.8	12.3	11.7

LA CONSTANTE ANUAL DE RETIRO ES 1.00 MACHOS 4.00 HEMBRAS (MILES)

PRINCIPALES VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA PARA ENCONTRAR VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS.

A:	Matriz a la cual se le quieren encontrar los valores propios y vectores propios.
B:	Matriz producto repetido, $B=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)....$
C,D:	Matrices usadas para intercambiar almacenaje.
EMP:	Error máximo permitido. (ε)
IDENT:	Matriz identidad, I.
L:	Longitud de r.
LCERO:	Usada para almacenar temporalmente a L.
LAMBDA:	Vector que contiene los valores propios, $\lambda_i (i=1,...,n)$
M:	Contador de iteraciones.
N:	Número de filas y/o columnas de la matriz A.
MFREQ:	Número de iteraciones, entre la reortogonalización períodica de v.
MMAX:	Número máximo de iteraciones permitidas.
V:	Aproximación reciente de vector propio.

VCERO:	Vector supuesto al principio para vector propio.
Y:	Vector para almacenaje temporal.

PRINCIPALES VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA DE APENDICE B.

H(i) (i=1,2,...,6)	Son las clases de la manada. (AM, AH,....,BH).
Q(1),Q(2):	Es la constante de retiro (adultos únicamente)
LARGO:	Es el número de años que se quiere proyectar la manada.
GUARDA:	En esta variable se guardan los porcentajes de las clases,
TOTAL:	Es total de vacunos de cada año.
TEMPO:	Se usa para guardar el valor de H(2).

BIBLIOGRAFIA

[1] La demostración del teorema de Perron para el caso general se puede ver en libro de:
Richard Bellman, "Introducción al Análisis Matricial", Ed. Reverté, 1965.

[2] Para cuando la matriz de Leslie sea reducible en el libro de: *E.C. Pielou, Matematical Ecology*, Ed. Wiley-intercience, Pag: 42-45, se analiza esta situación.

[3] Si la matriz de Leslie no se puede diagonalizar, existe un cambio de base tal que la matriz está constituída por bloques de Jordan. En el libro de: *D.K. FADDEEV and V.N. FADDEEVA, Computational Methods of Linear Algebra 1963: Pag: 111 y 112*, se demuestra que si los elementos de la diagonal son menores que 1, cada bloque de Jordan tiende a cero cuando el orden de las potencias tiende a infinito.

[4] En los libros de *D.K. FADDEEV and FADDEEVA, Computational Methods of Linear Algebra, 1963: Pag: 291-311 y* CARNAHAN, *APPLIED NUMERICAL METHODS*, Ed. Wiley, Pag: 226 y 227, Se puede ver como trabaja el método de la potencia de Mises.

[5] El resultado de programación lineal se puede ver en el libro de: *David Gale, The Theory of Linear Economic Models*, Ed. Mc. *Graw-Hill, 1960.*

[6] Colin W. Clark, Mathematical Bioeconomics. The Optimal Magement of Renowable Resources, Ed. Wiley-Interscience: Pag: 9-16.

[7] F. Simmons, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, Ed. Mac Graw-Hill, México 1978, Pag: 327-333.

[8] Chris Rorres* Howard Anton, aplicaciones de Algebra Lineal, Ed. Limusa, México 1979. Pag:81-93 127-141.

[9] Alejandro B. Engel, Elementos de Biomatemática, monografía #20, Secretaría general de la organización de los Estado Americanos, Washington, D.C. 1978. Pag: 7-23.

[10] Edward L. Keller, Population Proyection, UMAP, Module 345, California 1980.

[11] E.C. PIELOU, Mathematical Ecology, Ed. Wiley-intercience. Pag: 20-58, Philip M. Tuchinsky.

[12] Management of a buffalo herd, UMAP UNIT 207, 1977.