UNIVERSIDAD DE SONORA
ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

CALCULO DIFERENCIAL SOBRE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

RUBEN FLORES ESPINOZA

HERMOSILLO, SONORA, MEXICO
1971

Al pueblo de Sonora

A mi familia

Deseo expresar mi mas sincero agradecimiento al Prof. Enrique Valle Flores no solo por su guía durante el desarrollo de mi carrera profesional, sino por su labor e interés hacia la Escuela de Altos Estudios de la Universidad de Sonora.

CALCULO DIFERENCIAL SOBRE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

INTRODUCCION

El cálculo diferencial, ataca desde sus principios, el problema de aproximar una función en una vecindad de un cierto punto mediante funciones lineales, dada la sencillez y manuabilidad de estas últimas. Esta función lineal aproximadora es una buena aproximación a la función dada en un sentido bien preciso y además de que resulta ser única y es llamada la diferencial de la función en el punto considerado. La definición de proximidad de funciones en una vecindad de un punto, nos lleva además directamente al concepto de tangencia, que en el caso de funciones reales de varias variables reales corresponde fielmente al concepto de tangencia que en geometría se tiene.

En el caso de funciones sobre espacios vectoriales normados y con valores sobre espacios vectoriales normados, el concepto de diferencial y de aproximación o tangencia de funciones se traduce satisfactoriamente por medio de la llamada diferencial de Frechet, la cual valiéndose de las normas sobre los respectivos espacios nos da una magnífica generalización del concepto de diferencial que para espacios euclideanos se tenía. (J. Dieudonné "Foundations of modern analysis")

Es bien conocido por otra parte, y además se demuestra en el Capítulo II de este trabajo que si se remplazan las normas por normas equivalentes, es decir por normas que generan la misma topología, entonces los conceptos y resultados del cálculo diferencial permanecen incambiables. Todo lo anterior, sugiere directamente que los conceptos y resultados del cálculo diferencial sobre espacios normados únicamente dependen de las respectivas topologías sobre los espacios en cuestión y no de las normas que las generan.

Tomando en cuenta todo lo anterior, construiremos una teoría del cálculo diferencial que únicamente recurra a las propiedades topológicas de los espacios para proponer las definiciones fun damentales de tangencia, aproximación y diferencial de funciones y que además sea una buena generalización.

A. Frölicher y W. Bucher en su "Calculus in vector spaces without norm" Springer-Verlag 1966, construyen un cálculo diferencial para funciones con valores sobre espacios vectoriales pseudotopológicos y con variable sobre espacios vectoriales pseudotopológicos, y al hacerlo recurren a la noción que de convergencia de filtros que sobre ese tipo de espacios se tiene. El cálculo allí construído es una buena generalización del caso normado, además que se verifican los resultados más importantes del análisis.

Los espacios vectoriales pseudotopológicos bajo ciertas condiciones son espacios vectoriales topológicos (A. Frölicher, W. Bucher "Calculus in vector spaces without norm", R. Flores "Nota sobre los espacios vectoriales pseudotopológicos" Revista Sonorense de Matemáticas Abril 1970.). Nosotros en nuestro caso construiremos un cálculo diferencial para funciones con valores y variable sobre espacios vectoriales topológicos, pero recurriremos para ello a la noción de convergencia Moore-Smith que sobre un espacio vectorial topológico existe, aunque la manera de hacerlo está sugerida por la construcción de Frölicher y Bucher.

Demostraremos que nuestra teoría es una buena generalización del caso normado y que satisface los requisitos importantes que pide el análisis. En la teoría para un cálculo diferencial sobre espacios de Banach, la norma es usada en dos lugares clave:

i) Se definen f y g, funciones continúas con valores y variable sobre espacios de Banach como tangentes en x_0, si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

ii) Se define una norma sobre el espacio vectorial de las funciones lineales como $\|\ell\| = \sup\{\|\ell(x)\| \mid \|x\| = 1\}$

La primera es usada para dar una definición apropiada de di ferencial, y la segunda para dar una definición de funciones k-diferenciables (Ver J. Dieudonné "Foundations of modern analysis").

En este trabajo, únicamente atacaremos el problema, de dar una buena definición de funciones diferenciables para funciones con valores y variable sobre espacios vectoriales topológicos, mientras que el problema de definir topologías apropiadas para el espacio vectorial de las funciones lineales continuas de un e.v.t. en un e.v.t., no será tratado, aunque creemos que puede hacerse de una manera natural.

Cabe hacer notar que la originalidad que se pretende con este trabajo es, además de presentar una exposición sistemática de la teoría del cálculo diferencial desde el caso real hasta el caso topológico vectorial, la de dar una construcción de un cálculo diferencial para espacios vectoriales topológicos recurriendo a la noción de convergencia Moore-Smith que sobre dichos espacios existe.

La secuencia de la exposición será la siguiente:

En el Capítulo I daremos un breve resumen del cálculo diferencial, desde funciones reales de variable real hasta funciones con valores y variables sobre espacios vectoriales euclideanos. En este capítulo, además se procura dar definiciones apropiadas de la diferencial de una función que permitan ir automáticamente generalizando el concepto como es el caso de los teoremas 117 y 135.

En el Capítulo II se dá una breve exposición del cálculo diferencial para funciones definidas sobre espacios vectoriales normados y con valores sobre espacios vectoriales normados. En este capítulo además se hace una breve discusión del teorema del valor medio y sus consecuencias.

En el Capítulo III se hace una breve exposición de los hechos mas importantes sobre los espacios vectoriales topológicos (bases, metrización, etc.) en este capítulo por otra parte se dan ejemplos de espacios topológicos vectoriales puros como son los espacios topológicos vectoriales no normados y se dan también ejemplos de espacios topológicos vectoriales no metrizables.

En el Capítulo IV se da una definición de diferencial y de tangencia de funciones con valores en e.t.v. y de variable sobre e.t.v., además se demuestran los teoremas relativos al álgebra de diferenciales así como la llamada regla de cadena; además que se demuestra que es una generalización de todas las anteriores definiciones.

En el Capítulo V se demuestra el llamado teorema fundamental del cálculo diferencial dada su utilidad al probar otros básicos resultados del cálculo diferencial. Intuitivamente el da una estimación de la diferencia entre los puntos finales del movimiento de un punto en un espacio vectorial por medio de la velocidad, la estimación se hace por medio de un conjunto convexo. En el caso normado el teorema nos lleva a la ya conocida estimación por medio de la norma como lo hace Dieudonné siempre que tomemos como el conjunto convexo a la vecindad cerrada unitaria. Pero tomando otros subconjuntos convexos se obtiene más información que la dada por el caso clásico.

Además en este capítulo se demuestran algunos corolarios importantes de este último teorema y se hace una breve discusión sobre el mismo.

I N D I C E

C A P I T U L O V.

C A P I T U L O I

1.1 CALCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL.

Daremos esta vez un breve resumen de la teoría de la diferenciación de funciones reales de una variable real.

DEFINICION 111.- Sea $f: (a,b) \to R$ y sea $x_o \in (a,b)$. Entonces se dice que tiene derivada en x_o si el siguiente límite existe. $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

A este límite lo denotaremos por $f'(x_o)$ y lo llamaremos la derivada de f en x_o.

La anterior definición da lugar a algunos teoremas inmediatos los cuales únicamente enunciaremos.

TEOREMA 111.- Si f tiene derivada en un punto x_o de (a,b), entonces f es contínua en x_o.

TEOREMA 112.- Si f y g son funciones definidas en (a,b), entonces en aquellos puntos donde f y g tienen derivada, las funciones $f \pm g$ y fg también tienen derivada. Lo anterior también es cierto de f/g en aquellos puntos donde $g(x) \neq o$.

Estas derivadas están dadas así:

i).- $(f \pm g)' = f' \pm g'$

ii).- $(fg)' = fg' + gf'$

iii).- $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$ si $g(x) \neq o$

TEOREMA 113.- (Regla de la cadena) Sea f continua en un intervalo cerrado S y sea f(S) la imágen de S bajo f.

Sea g definida sobre f(S) y consideremos la fun--- ción composición g o f; sea x_o un punto interior - de S tal que $f(x_o)$ es un punto interior de f(S); - sean f y g derivables en x_o y $f(x_o)$ respectivamente. Entonces g o f es derivable en x_o y $(g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o))\, f'(x_o)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}. \end{tikzcd} \qquad S \subset \mathbb{R}.$$

DEFINICION 112.- (Diferenciabilidad de una función) Sea f una función real de variable real definida en un abierto S y tal que es derivable en cada punto de S. Construyamos la siguiente función.

$df: S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$df\ (x\ t) = f'(x)\ t$

A la función así definida la llamaremos la dife-- rencial de f y a $df(x_o,t)$ lo llamaremos la diferencial de f en x_o.

Los siguientes teoremas son facilmente probados recurriendo a los teoremas 112 y 113.

TEOREMA 114.- Si f y g están definidas en (a,b) y además ambas son diferenciables en $S\subset(a,b)$, entonces las funciones $f\pm g$ y fg son también diferenciables en S. Lo anterior también es cierto de f/g en aquel subconjunto de S donde $g \neq 0$. Las diferenciales además están dadas así:

$$d\,h\,(x_o,t) = d\,f\,(x_o,t) \pm d\,g\,(x_o,t) \text{ con } h = f\pm g$$

$$dh\,(x_o,t) = f(x_o,dg(x_o,t) + g(x_o)df(x_o,t) \text{con } h=fg$$

$$dh\,(x_o,t) = g(x_o)^{-1} df(x_o,t) - f(x_o)g(x_o)^{-2} dg\,(x_o t)$$

con $h = f/g$.

TEOREMA 115.- (Diferenciación de funciones compuestas) Sea f contínua sobre un cerrado S y sea $f(S)$ la imágen de S bajo f. Sea g definida sobre $f(S)$ y consideremos la función composición $g \circ f$. Sea $A\subset S$ donde f es diferenciable y tal que g es diferenciable en $f(A)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en A y se tiene que:

$$d(g \circ f,\ x_o,t) = dg(f(x_o),\ df\,(x_o,t)) \quad \forall x_o \in A$$

Por último daremos dos útiles teoremas, uno de ellos el conocido teorema del valor medio y el otro un teorema que nos permitirá hacer la subsiguiente generalización a nuestro cálculo diferencial.

TEOREMA 116.- (Teorema del valor medio) Sean f y g definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, ambas teniendo derivada finita ó infinita en cada punto interior y en los puntos (a,b) terminales satisfaciendo la re lación:

$$[f(a^+)-f(b^-)][g(a)-g(b)]=[f(a)-f(b)][g(a^+)-g(b^-)]$$

Entonces existe al menos un punto interior x_o tal que:

$$f'(x_o)[g(b)-g(a)] = g'(x_o)[f(b)-f(a)]$$

TEOREMA 117.- Sea f una función real de una variable real definida sobre un abierto S, entonces f es diferenciable en S y solo si existe una función g tal que:

i).- $g: S \times R \longrightarrow R$

ii).- g es lineal en su segunda variable, es decir:

$$g(x, dt + d't') = dg(x,t) + d'g(x,t')$$

iii).- Para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad $V(x)$ de x tal que para toda $y \in V'(x)$ se tiene que:

$|f(y) - f(x) - g(x,y-x)| \leq \varepsilon |y-x|$ para cada $x \in S$

Además $g(x,t) = df(x,t)$.

1.2 CALCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES DE UN NUMERO FINITO - DE VARIABLES REALES.

Trataremos aqui el caso de la diferenciabilidad de funciones $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado que en este tipo de funciones, la diferencial cobra su verdadero significado e importancia como función lineal que se aproxima tanto como se quiere en una cierta vecindad del punto, a la función en cuestión pues en este tipo de funciones como no existe un concepto de derivada, es necesario dar una definición apropiada de diferenciabilidad como lo sugiere el teorema 116.

DEFINICION 121.- (Derivada direccional) Sea $f: A \to \mathbb{R}$, A un subconjunto de R^n y sea x un elemento de A. Sea u un vector unitario de R. Definiremos la derivada direccional de f en la dirección u en el punto x como el siguiente límite en caso que exista:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda u) - f(x)}{\lambda}$$

En caso que exista lo denotaremos $D_u f(x)$.

En el caso de que el vector u sea el i-ésimo elemento de la base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots e_i \ldots e_n\}$ a la derivada direccional en la dirección e_i la llamaremos la i-ésima derivada parcial y la denotaremos simplemente $D_i f(x_0)$.

DEFINICION 122.- (Diferenciabilidad de funciones) Sea $f: A \to R$. A un subconjunto abierto de R^n. Diremos que f es diferenciable en un subconjunto S de A si existe una función g tal que:

i).- $g: S \times R^n \longrightarrow R$

ii).- g es lineal en la segunda variable, es de-- cir:

$$g(x, \alpha t + \alpha' t') = \alpha g(x,t) + \alpha' g(x,t')$$

iii)- Para cada x elemento de S y para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad $V(x)$ tal que para toda $y \in V(x)$ se tiene que:

$$|f(y) - f(x) - g(x, y-x)| \leq \varepsilon \|y - x\|$$

Cuando tal función exista diremos que f es- diferenciable en S y la denotaremos $d\,f$.

TEOREMA 121.- Sea $f: A \longrightarrow R$, A un subconjunto abierto de R^n. Si f es diferenciable en S A entonces:

$$df(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) t_k \quad \text{con } a_k = D_k f(x) \text{ y } t = \sum_{k=1}^{n} t_k e_k$$

TEOREMA 122.- Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, - si t es un vector unitario, se tiene:

$$df(x,t) = D_t f(x).$$

TEOREMA 123.- Sean $f: A \rightarrow R$ y $g: A \rightarrow R$, A un subconjunto abier to de R^n. Si tanto f como g son diferenciables - en un subconjunto S de A, entonces $\alpha f \pm \beta g$, $\alpha, \beta \in R$ también lo son en S y se tiene que:

$$d(\alpha f \pm \beta g) = \alpha\, df \pm \beta\, dg.$$

TEOREMA 124.- (Regla de la cadena o diferenciabilidad de funcio nes compuestas) Sea $f = (f_1, f_2 \ldots f_i \ldots f_m)$ una función vectorvaluada sobre un abierto Z de - R^m y con valores en R^n, y sea g una función definida en un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \supset f(Z)$, sea además S un subconjunto de A donde cada f_i es diferenciable y tal que g es a su vez diferenciable en $f(A)$. Entonces $h = g \circ f$ es diferenciable en S y,

$$dh(z,t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} D_k g(f(z)) D_i f_k(z) \right) t_i \quad t = \sum_{k=1}^{n} t_k e_k$$

Este teorema lo veremos en una mejor forma cuando veamos funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

TEOREMA 125.- (Teorema del valor medio) Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, A un abierto en $\mathbb{R}^n$, sea además f diferenciable en $S \subset A$. Sean $\underline{x}$ y $\underline{y}$ dos puntos de S tales que el conjunto $L = \{\lambda y + (1 - \lambda) x \mid 0 < \lambda < 1\}$ está contenido en S. Entonces existe un punto $z \in L$ tal que:

$$f(y) - f(x) = df(z, y-x).$$

1.3 CALCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES $f: R^n \longrightarrow R^m$.

Esta vez, al mismo tiempo que haremos una exposición brevísima del cálculo diferencial de funciones de R^n en R^m aprovecharemos para ilustrar que para este tipo de funciones no existe un teorema del valor medio como el del teorema 125 y que es necesario remplazarlo por otro. La discusión acerca del teorema del valor medio la dejaremos para el capítulo II de este trabajo.

DEFINICION 131.- Sea $f: A \longrightarrow R^m$, A un subconjunto abierto de R^n. Diremos que f es diferenciable en S A si existe una función g la cual satisfaga:

i) $g: S \times R^n \longrightarrow R^m$

ii) g es lineal en la segunda variable, es decir $g(x, \alpha t + \alpha' t') = \alpha g(x,t) + \alpha' g(x,t')$.

iii) Para cada x elemento de S y cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $V(x)$ de x tal que para toda $y \in V(x)$ se tiene:

$\| f(y) - f(x) - g(x, y-x) \|_m \leq \varepsilon \| y-x \|_n$

donde $\| \ \|_m$, $\| \ \|_n$ son las normas euclideanas sobre R^m y R^n respectivamente.

A la función g en caso de existir la denotaremos df y la llamaremos la diferencial de f en S.

TEOREMA 131.- (Unicidad de la diferencial) Si $f: A \longrightarrow R^m$, es diferenciable en un subconjunto $S \subset A$, entonces la diferencial es única.

Demostración.- Sean h y g dos funciones que satisfagan los postulados de la definición anterior y sean x elemento de S y t elemento de K^n. Tomemos:

$y = x + \frac{\lambda}{\| t \|} t$ con tal que y esté en las vecindades que por iii) existen para cada $\varepsilon > 0$

Entonces, por el mismo postulado iii), tenemos:

$\frac{|\lambda|}{\| t \|_n} \| g(x,t) - h(x,t) \|_m \leq \varepsilon \| t \|_n \Rightarrow g(x,t) = $
$= h(x,t).$

Entonces si $f: A \to K^m$ tenemos que se puede escribir $f = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_m)$ con $f_i: A \to \mathbb{R}$ y si f es diferenciable análogamente, podemos escribir:

$$df(x,t) = (df(x,t)_1, df(x,t)_2, \ldots \; df(x,t)_m)$$

y por el tercer postulado con que cumple la diferencial, tenemos que para cada $\varepsilon > 0 \; \exists \; V(x)$ tal que $\forall y \in V(x)$

$$\| f(y) - f(x) - (df(x,y-x)_1, \ldots\ldots, df(x,y-x)_m) \| \leq \varepsilon \| y-x \|$$

$\| f_i(y) - f_i(x) - df(x,y-x) \| \leq \varepsilon \| y-x \| \; \forall y \in V(x)$ y como $df(x\ t)_i$ es lineal tenemos que $df(x\ t)_i = df_i(x,t)$.

Entonces la diferencial de f la podemos escribir:

$df(x\ t) = (df_1(x,t), \ldots\ldots\ldots, df_m(x\ t))$.

$$df(x,t) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) \ldots D_i f_1(x) \ldots D_n f_1(x) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ D_1 f_i(x) \ldots D_i f_i(x) \ldots D_n f_i(x) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ D_1 f_m(x) \ldots D_i f_m(x) \ldots D_n f_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \quad \text{con } t = \sum_{k=1}^{n} t_k e_k$$

TEOREMA 133.- Sean f y g: $A \longrightarrow R^m$, si f y g son diferenciables en $S \subset A$ también lo son $\alpha f \pm \beta g$ y $d(\alpha f \pm \beta g) = \alpha\, df \pm \beta\, dg$.

TEOREMA 134.- (Diferenciación de funciones compuestas) Sea $f: A \longrightarrow R^k$ y $g: B \longrightarrow R^m$, A un abierto de R^n y B un abierto que contiene a f(A) y además $B \subset R^k$. Sea f diferenciable en $S \subset A$ de tal manera que g es diferenciable en f(S), entonces la función composición $g \circ f: A \longrightarrow R^m$ es diferenciable en S y,

$$d((g \circ f)\, x, t) = dg(f(x), df(x,t)).$$

TEOREMA 135.- Sea $f: A \longrightarrow R^m$, A un subconjunto abierto de R^n, es diferenciable en $S \subset A$ y solo si existe una función $h: S \times R^n \longrightarrow R^m$.

$$h(x,y) = f(x) + u\,(x, y-x)$$

con u lineal en la segunda variable y además:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y) - h(x,y)\|_m}{\| y - x\|_n} = 0$$

En tal caso se tiene que $df = u$.

Demostración.- Si f es diferenciable en S entonces sea $h(x,y) = f(x) + df(x,y)$, es claro que:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y) - f(x) - df\,(x, y-x)\|_m}{\| y - x\|_n} = 0$$

pues existe en virtud de los postulados i), ii) y iii) de la definición 131 para cada $\varepsilon > 0$ una vecindad V(x) de x tal que $\| f(y) - f(x) - df\,(x, y-x)\| \leq \varepsilon \| y-x \|$ $\forall\, y \in V(x)$, y reciprocamente, si tal función h existe obviamente f es diferenciable con df = u.

En este tipo de funciones, funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ no existe algo parecido al teorema del valor medio cuya formulación dimos en el teorema 125. Para este efecto, daremos un ejemplo de una f que siendo diferenciable en un convexo, no existe un punto $c \in L(x,y)$ tal que $f(y) - f(x) = d\,(c, y-x)$.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x\ y) = (3x^2, y^3)$ f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

Además $f(1,1) = (3,1)$ y $f(0,0) = (0,0)$

$$df\,(\bar{x},t) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad t = (t_1, t_2) \quad \bar{X} = (x,y)$$

Si $z \in L((0,0),(1,1))$ se tiene que $Z = (t_o, t_o)$ pues,

$z \in L$ si $Z = (t_o, t_o)$.

Entonces:

$$f(1,1) - f(0,0) = (3,1) = \begin{pmatrix} 6\,t_o & 0 \\ 0 & 3\,t_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = df(z,(1,1))$$

$(3,1) = (6t_o, 3t_o^2)$ $\quad t_o = \frac{1}{2}$ y $t_o = \sqrt{1/3}$ $\quad$ Absurdo.

No tiene sentido la existencia de $z \in L(\bar{x}, \bar{y})$ con -- $f(y) - f(x) = d\,(z, y-x)$.

En el Capítulo II haremos una discusión exhaustiva del teorema del valor medio que hay que definir para espacios vectoriales normados.

C A P I T U L O II

CALCULO DIFERENCIAL SOBRE ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.

Construiremos esta vez un cálculo diferencial sobre espacios vectoriales normados y para ello nos aprovecharemos del último teorema del capítulo anterior, el cual nos da una caracterización del concepto de diferenciabilidad basado únicamente en la norma de los espacios. Además de que demostraremos que se cumplen los resultados básicos del cálculo, discutiremos el importante teorema del valor medio, el cual tomará esta vez una diferente formulación.

DEFINICION 211.- Sean E, F dos espacios vectoriales normados (ambos reales o complejos) y sea A un abierto contenido en E. Sean f y g dos funciones con dominio A y contradominio F. Diremos que f y g son tangentes en $S \subset A$ si

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \neq y}} \frac{\| f(y) - g(y) \|}{\| y - x \|} = 0 \text{ para toda } x \in S$$

Esta definición claramente calca el concepto de tangencia de funciones que en geometría se tiene.

TEOREMA 211.- Si f y g son tangentes y continuas en S, entonces $f(x) = g(x)$

Demostración.- Como tanto f como g son tangentes y continuas en cada $x \in S$ tenemos que para cada $x \in S$, dado $\varepsilon > 0$ existe $V(x)$ vecindad de x tal que:

$\| f(y) - f(x) \| \leq \varepsilon/2 \quad \forall\, y \in V(x)$

$\| g(y) - g(x) \| \leq \varepsilon/2 \quad \forall\, y \in V(x)$

$\| f(y) - g(y) \| \leq \varepsilon \, \| y-x \| \quad \forall y \in V(x) \Rightarrow$

$\| f(x) - g(x) \| \leq \| f(y)-f(x) \| + \| g(y)-g(x) \| +$

$+ \| f(y) - g(y) \| \leq \varepsilon + \varepsilon \, \| y - x \| \quad \forall y \in V(x)$

Pero $\varepsilon \| y-x \| \leq \varepsilon \ \forall \| y-x \| \leq 1$ lo que implica

que $\| f(x)-g(x) \| \leq 2\varepsilon \ \forall y \in V_1(x) \cap V(x)$.

($V_1(x)$ vecindad de x de radio 1).

El anterior argumento es válido para cada $x \in S$.

lo que demuestra plenamente el teorema.

TEOREMA 212.- Sean E, F dos espacios vectoriales normados (ambos reales o complejos) y sea A un abierto contenido en E. Entonces si $S \subset E$ la relación ser tangentes en S es una relación de equivalencia sobre el conjunto de funciones con dominio A y contradominio F.

Demostración.- Obviamente se cumplen la reflexividad y la simetría de la relación.

Además como $\| f(y)-h(y) \| \leq \| f(y)-g(y) \| + \| g(y)-h(y) \|$. Entonces:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x_0}} \frac{\| f(y)-h(y) \|}{\| y - x \|} \leq \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y)-g(y) \|}{\| y - x \|} +$$

$$+ \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| g(y)-h(y) \|}{\| y - x \|}$$

Entonces si f es tangente a g en S y g lo es a h en S se tiene en virtud de la desigualdad anterior que f es tangente a h en S.

Es de notar que la definición de tangencia de funciones para espacios vectoriales normados, depende únicamente de las topologías inducidas por las normas, pues f y g siguen siendo tangentes para normas equivalentes, es decir para normas diferentes pero que generan la misma topología.

Aclarando lo anterior, tenemos que si:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y) - g(y) \|_1}{\| y - x \|_2} = 0$$

Entonces si $\| \ \|_1'$ es una norma equivalente sobre F y $\| \ \|_2'$ es una norma equivalente sobre E, se tiene que existen a_1, b_1, a_2, b_2 constantes reales mayores que cero tales que:

$$a_2 \| x \|_2 \leq \| x \|_2' \leq b_2 \ \| x \|_2 \ \forall x \in E \ ; \ a_1 \| x \|_1 \leq \| x \|_1' \leq b_1 \| x \|_1 \ \forall x \in F.$$

Lo anterior nos lleva:

$$\frac{\| f(y) - g(y) \|_1'}{\| y - x \|_2'} \leq \frac{b_1}{a_2} \ \frac{\| f(y) - g(y) \|_1}{\| y - x \|_2} \Rightarrow \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y) - g(y) \|_1'}{\| y - x \|_2'} = 0$$

DEFINICION 212.- (Diferenciabilidad de funciones continuas). Sea $f: A \to F$ una función continua, A un subconjunto abierto de E . E, F espacios vectoriales normados. Diremos que f es diferenciable en $S \subset A$ si existe una función $\mathcal{U}$ tal que:

i) $\mathcal{U} : S \times E \to F$

ii) $\mathcal{U}$ es lineal en la segunda variable, es decir $\mathcal{U}(x,\alpha t+\alpha' t') = \alpha\,\mathcal{U}(x,t) + \alpha'\,\mathcal{U}(x,t')$

iii) Para cada $x \in S$ la función $m: E \to F$ $m(t) = f(x) + \mathcal{U}(x,t-x)$ es tangente a f en x, es decir:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y)-f(x)-\mathcal{U}(x,y-x)\|}{\| y-x\|} = 0 \quad \text{para cada } x \in S.$$

A la función $\mathcal{U}$ en caso de existir se le llama la diferencial de f en S y se denota df (x,t).

Enseguida demostraremos que la diferencial de una función, en caso de existir es única.

TEOREMA **213**.- Si F: A $\to$ F, A un abierto contenido en E. E, F e.v.n. Entonces si f es diferenciable en $S \subset A$ la diferencial es única.

Demostración.- Supongamos que existen 2 funciones $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ que cumplen con los postulados i) ii) e iii) de la definición anterior. Sea $(x,y) \in S \times E$, entonces se tiene que:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y) - f(x) - \mathcal{U}_1(x,y-x)\|}{\| y - x \|} = 0$$

$$\text{y} \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| f(y) - f(x) - \mathcal{U}_2(x,y-x)\|}{\| y - x \|} = 0$$

Esto implica que $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \dfrac{\| \mathcal{U}_1(x,y-x) - \mathcal{U}_2(x,y-x) \|}{\| y - x \|} = 0$

Hagamos $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2$. Demostraremos que $\mathcal{V} = 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ $\exists$ $r > 0$ tal que $\| \mathcal{V}(x,z) \| \leq \varepsilon \| z \|$ con $z = y-x$ y $0 \leq \| z \| \leq r$ pero también si $\omega \neq 0$ se tiene que $z = \dfrac{r\,\omega}{\| \omega \|} \Rightarrow \left\| \mathcal{V}\left(x, \dfrac{r\omega}{\|\omega\|}\right) \right\| \leq \varepsilon r \dfrac{\|\omega\|}{\|\omega\|} = \varepsilon r$

$\| \mathcal{V}(x,w) \| \leq \varepsilon \| w \|$. Es decir para toda $\omega \in E$ se tiene que $\| \mathcal{V}(x,w) \| \leq \varepsilon \| w \|$ esto implica ---- $\| \mathcal{V}(x,w) \| = 0$ $\forall\, \omega \in E \Rightarrow \mathcal{U}_1(x,y) = \mathcal{U}_2(x,y)$, es decir la diferencial es única.

TEOREMA 214.- Sea $f: A \to F$, continua, A un abierto de E. E, F e.v. normados. Si f es diferenciable en $S \subset A$ entonces la diferencial de f en cada punto $x \in S$ es una función lineal continua en la segunda variable.

Demostración.- Basta demostrar que es continua en cero y entonces si $\varepsilon > 0$ existe, $0 < r < 1$ tal que

$\| f(x + t) - f(x) \| \leq \varepsilon/2$ y además,

$\| f(x+t) - f(x) - df(x,t) \| \leq \varepsilon/2 \; \| t \|$.

Ambas aseveraciones para toda $t, 0 \leq \| t \| \leq r$, entonces esto nos lleva a:

$\| df(x,t) \| \leq \varepsilon/2 \; \| t \| + \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \forall\, 0 < \| t \| < r < 1$

$\Rightarrow$ df es continua en la segunda variable.

En esta demostración hemos hecho uso de que la topología sobre E es invariante bajo traslaciones.

Ahora daremos cabida al álgebra de funciones diferenciables, y así tenemos:

TEOREMA 215.- Sea $\mathcal{C}_d$ el conjunto de las funciones contínuas (con dominio A y contradominio F, A un abierto de E. E, F e.v. normados) diferenciables en $S \subset A$.

Entonces $\mathcal{C}_d$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones contínuas definidas en los conjuntos de definición de los elementos de $\mathcal{C}_d$

Mas aún:

$$d(\alpha f \pm \beta g)(x,t) = \alpha\, df(x,t) \pm \beta\, dg(x,t).$$

Demostración.- Efectivamente:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{\| (\alpha f \pm \beta g)(y) - (\alpha f \pm \beta g)(x) - \alpha df(x, y-x) \mp \beta dg(x, y-x) \|}{\| y - x \|} = 0$$

TEOREMA 216.- (Diferenciabilidad de funciones compuestas) Sean E, F y G tres espacios vectoriales normados. Sea $f: A \longrightarrow F$ una función contínua diferenciable en $S \subset A$

Sea $g: B \to G$, B un abierto de F tal que $B \supset f(A)$ además sea g diferenciable en $R \subset B$ y tal que $R \supset f(S)$. Entonces la función composición $h = g \circ f$ es diferenciable en S y $dh = dg \circ df$ es decir,

$dh(x,t) = dg(f(x), df(x,t))$.

Demostración.- Dado $1 > \varepsilon > 0$ existe $V(x)$ tal que si $y \in V(x)$ se tiene que:

$f(y) = f(x) + df(x, y-x) + \gamma_1(y-x)$

con $\| \gamma_1(y-x)\| \leq \varepsilon \| y-x\|$. Además existe --- $V(f(x))$ vecindad abierta de $f(x)$ tal que:

$\| g(z)-g(f(x)) - dg(f(x), Z-f(x)\| \leq \varepsilon \| Z-f(x)\|$

Esto para toda $z \in V(f(x))$.

Como f es contínua en x, existe $V_1(x)$ vecindad - abierta de x tal que $f(V_1(x)) \subset V(f(x))$

$\| g(f(y))-g(f(x))-dg(f(x), f(y)-f(x))\| \leq \varepsilon \| f(y)-$

$-f(x)\| \quad \forall y \in V_1(x)$.

Todo lo anterior nos lleva a que

$\| g(f(y))-g(f(x))-dg(f(x), df(x,y-x) + \gamma_1(y-x))\| \leq$

$\leq \varepsilon \| f(y)-f(x)\| \quad \forall y \in V_1(x) \cap V(x)$, y entonces:

$\| g(f(y))-g(f(x))-dg(f(x), df(x,y-x))\| \leq \varepsilon \| df(x,$
$y-x) + \gamma_1(y-x)\| + \| dg(f(x), \gamma_1(y-x))\| \leq \varepsilon \| df(x)\|$
$\| y-x\| + \varepsilon \| df(x)\| \; \| \gamma_1(y-x)\| + \| dg(f(x)\| \; \| \gamma_1$
$(y-x)\| \leq \varepsilon a \| y-x\| + \varepsilon^2 a \| y-x)\| + \varepsilon b \| y-x\| =$
$= \varepsilon(\varepsilon a + a + b) \| y-x\|$

con a = norma de $df(x)$
b = norma de $dg(f(x))$

Todo lo anterior nos lleva a que:

$\| g(f(y))-g(f(x))-dg(f(x), df(x,y-x))\| \leq \varepsilon \| y-x\|$
$\forall y \in V_1(x) \cap V(x)$.

Y entonces tenemos que g o f es diferenciable en- S y $d(g \circ f) = dg \circ df$.

Enseguida enunciaremos y demostraremos el llamado Teorema del valor medio, pero además haremos una discusión importante de él.

2.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO.-

La verdadera importancia del teorema del valor medio radica en que dados dos puntos a y b permite dar una estimación de la variación de la función en estos dos puntos en términos de la derivada en un punto interior del segmento de recta que une a a y b y en términos de la variación de la variable b-a . Su formulación para funciones reales de variable real es de la forma:

$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ con $c \in (a,b)$. Hemos visto además que para funciones vectoriales de variable vectorial no tiene sentido la igualdad como lo ilustra el último ejemplo del Capítulo I. Por otra parte nada se sabe del punto c salvo que se encuentra entre a y b y para todos los casos en que el teorema del valor medio es útil, todo lo que necesitamos saber es que $f'(c)$, es un número que se encuentra entre el supremum e infimum del conjunto $\{ f'(x) \mid x \in L(a,b) =$ a segmento de recta que une a a con b.$\}$ Enunciaremos para funciones con valores y variable sobre espacios normados, el teorema del valor medio en la forma de la desigualdad.

$\| f(b)-f(a) \| \leq M(b-a)$ con $f:[a,b] \longrightarrow E$ (E. e.v.normado y $M \geq \{ \| df(c) \| \mid c \in L(a,b) \}$ y $\| df(c) \|$ la norma de la diferencial en c .

Enunciaremos el teorema en una forma equivalente aunque mas general.

TEOREMA 221.- Sea $I = [a,b]$ un intervalo compacto en $\mathbb{R}$, f una función contínua de I en un espacio vectorial normado F, g una función contínua de I en $\mathbb{R}$. Supongamos que existe un conjunto numerable D subconjunto de I tal que, para cada $y \in I - D$ se tiene que f y g son diferenciables en y y además $\| df(y) \| \leq g'(y)$ Entonces $\| f(b)-f(a) \| \leq g(b)-g(a)$.

Demostración.- Sea $n \to x_n$ una biyección de N en D; para cada $\varepsilon > 0$, probaremos que $\| f(b)-f(a) \| \leq$ $g(b)-g(a) + \varepsilon(b-a+1)$; el miembro de la izquierda es independiente de ε y eso completará la demostración.

Sea $A = \{ y \in I$, tales que para $a \leq z < y$, se tiene:

$$\| f(z)-f(a) \| \leq g(z)-g(a) + \varepsilon(z-a) + \varepsilon \sum_{x_n < z} 2^{-n}$$

Es claro que $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$; si $r \in A$ y $a < q < r$ entonces $q \in A$ también, esto muestra que si s es el superior de A entonces $A = [a,s)$ o $A = [a,s]$ pero de la definición de A, tenemos que $A = [a,s]$ y de la continuidad de f, g y $\| \ \|$ tenemos que:

$$\| f(s)-f(a) \| \leq g(s)-g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon \sum_{x_n < s} 2^{-n},$$ entonces necesitamos probar que $s = b$. Supongamos que $s < b$; si $s \notin D$, entonces de la definición de D se sigue que existe un intervalo $[s, s+\ell]$ contenido en I tal que si $s \leq y < s+\ell$

$$\| f(y)-f(s) - df(s,y-s) \| \leq \varepsilon/2 \ (y-s)$$
$$\| g(y)-g(s) - g'(s)(y-s) \| \leq \varepsilon/2 \ (y-s)$$ y entonces

$\| f(y)-f(s) \| \leq \| df(s) \| (y-s) + \varepsilon/2 \ (y-s) \leq g'(s)$

$(y-s) + \varepsilon/2 \ (y-s) \leq$

$\leq g(y)-g(s) + \varepsilon (y-s)$ y entonces

$$\| f(y)-f(a) \| \leq g(y)-g(a) + \varepsilon(y-a) + \varepsilon \sum_{x_n < s} 2^{-n}$$

$$\leq g(y)-g(a) + \varepsilon(y-a) + \varepsilon \sum_{x_n < y} 2^{-n}$$

contrario a la definición de s. Si $s \in D$ sea -- $s = x_m$ se sigue de la continuidad de f y g existe $[s, s+\ell] \subset I$, tal que para $s \leq y < s+\ell$

$\| f(y)-f(s) \| \leq \varepsilon/_2 \ 2^{-m}$, $| g(y)-g(s) | \leq \varepsilon/_2 \ 2^{-m}$

$$\| f(y)-f(a) \| \leq g(y)-g(a) + \varepsilon(s-a) + \varepsilon \sum_{x_n < y} 2^{-n}$$

$$\leq g(y)-g(a) + \varepsilon(y-a) + \varepsilon \sum_{x_n < y} 2^{-n}$$

contrario a la definición de s.

El caso mas importante es aquel en que $g(x) = M (x-a)$ con $M > o$.

COROLARIO 1.- Si existe un subconjunto numerable D de I tal-que para cada $y \in I-D$, f es diferenciable en y y además $\| df(y) \| \leq M$. Entonces $\| f(b)-f(a) \| \leq M (b-a)$.

COROLARIO 2.- Supongamos g es una función contínua y $g: I \to R$ y tal que si $y \in I-D$ entonces $m \leq g'(y) \leq M$.

Entonces:

$$m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a).$$

COROLARIO 3.- Sean E y F dos espacios vectoriales normados,- f una función contínua en una vecindad del segmento S que une los puntos x_0, x_0+t de E .
Si f es diferenciable en S, entonces:

$$\| f(x_0+t)-f(x_0)\| \leq \| t\| \sup_{0\leq r\leq 1} \| df(x_0+r t)\|$$

Demostración.- Sea $g : [0,1] \longrightarrow F$ con $g(r) = f(x_0+r t)$, g es diferenciable donde f lo es y -

$g'(r) = df(x_0+r t,t)$, entonces:

$\| g'\| = \| df(x_0+r t)\| \; \| t\|$ y entonces:

$$\| f(x_0+t)-f(x_0)\| \leq \| t\| \sup_{0\leq r\leq 1} \| df(x_0+r t)\|$$

COROLARIO 4.- Sea A un subconjunto abierto conexo de un espacio-normado E, f una función contínua de A en F e.v. normado; si f es diferenciable en A y la diferencial en cada $x \in A$ es la función nula, entonces- f es constante.

Demostración.- Sea $x_0 \in A$ y sea $B=\{x \in A \mid f(x) = f(x_0)\}$ B es cerrado pues f es continua ; Si -- $x \in B$ y si U es una esfera abierta contenida - en A, entonces U contiene al segmento de recta - que une a x con y y punto de U, entonces:

$f(y) = f(x) = f(x_o)$ aplicando Corolario 3. Esto-demuestra que B es abierto $\Longrightarrow$ B = A pues A es --conexo.

COROLARIO 5.- Sean E, F dos espacios vectoriales normados, f diferenciable en una vecindad A del segmento S que -une los puntos a y b. Entonces para cada $x_o \in A$, tenemos:

$$\| f(b)-f(a)-df(x_o,b-a)\| \leq \| b-a\| \sup_{x \in S} \| df(x)-df(x_o)\|$$

Demostración.- Apliquemos el Corolario 3 a la función $g(x) = f(x) - df(x_o,x)$.

Bibliografía.- J. Dieudonné Foundations of modern analysis.

C A P I T U L O   I I I

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

El propósito de este capítulo, es el de presentar algunos resultados básicos sobre espacios vectoriales topológicos, los cuales nos serviran en la posterior construcción de un cálculo diferencial sobre dicho tipo de espacios. Los primeros teoremas los haremos para espacios vectoriales topológicos sobre un campo valuado no discreto K, mientras que los teoremas relativos a metrización de espacios vectoriales topológicos los haremos para e.v.t. sobre los reales (de aqui en adelante usaremos e.v.t. para denotar espacio topológico vectorial).

El último teorema de este capítulo nos da una manera sistemática de construir e.v.t. no metrizables que son sobre los cuales tendrá interés nuestra teoría, pues habremos que recurrir únicamente a las propiedades netamente topológicas del espacio para construir una teoría de la diferenciación.

Primeramente daremos algunas definiciones para aclarar la terminología a usar.

DEFINICION 311.- Un campo K se dice valuado si existe una función $| \ |$ tal que:

i) $| \ | : K \to \mathbb{R}^+$

ii) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$

iii) $|x+y| \quad |x|+|y| \quad x, y \in K$

iv) $|xy| = |x||y| \quad x, y \in K$

A la función $| \ |$ se le llama comunmente valor ab-

soluto y genera una métrica sobre K así $d(x,y) = |x-y|$. El campo valuado K se llama no-discreto si la métrica es tal que la topología generada es distinta de la discreta (equivalente esto último a que el rango de $|\ |$ sea distinto de $\{0,1\}$.
Un campo valuado no-discreto es necesariamente infinito.

DEFINICION 312.-Un espacio vectorial topológico sobre un campo valuado K (c.v.t. sobre K) es una pareja (L,T) donde L es un espacio vectorial topológico sobre K y T una topología sobre L, donde además se satisfacen los siguientes postulados:

LT 1) La función $+: L \times L \longrightarrow L$; $+(x,y) = x+y$ es contínua en la topología producto correspondiente.

LT 2) La función $\cdot: K \times L \longrightarrow L$; $\cdot(a,x) = ax$ es contínua en la topología producto sobre $K \times L$.

Los postulados para e.t.v. nos llevan directamente a la continuidad de la función $(x,y) \longrightarrow x - y$.

TEOREMA 311.- Sea L un e.t.v. sobre K. Entonces:
Para cada $x_0 \in L$ y cada $a_0 \in K$ se tiene que si $a_0 \neq 0$, entonces la función $T(x) = x_0 + a_0 x$ es un homeomorfismo de L en L. Si $a_0 = 1$ a T se le llama traslación.

Demostración.- Claramente $T(x) = x_0 + a_0 x$ es contínua como consecuencia de los postulados LT1) y LT2) para e.v.t., además como $T^{-1}(x) = a_0^{-1}(x - x_0)$, los --

mismos postulados nos llevan a la continuidad de T^{-1}. Lo anterior implica que T es un homeomorfismo.

El anterior teorema es de suma importancia en el siguiente sentido: Si A es una vecindad de $x_0 \in L$, entonces $A = x_0 + V$ donde V es una vecindad de cero en L y viceversa si V es una vecindad de cero, entonces x_0+V es una vecindad de x_0. Lo anterior implica que basta conocer el filtro de las vecindades de cero para conocer las vecindades de cualquier punto x_0 de L. A este tipo de topologías se les llama topologías invariantes bajo traslaciones.

DEFINICION 312.-Sea L un e.v.t. Diremos que $A \subset L$ absorbe a B si existe $t_0 \in K$ tal que $B \subset tA$ siempre que $|t| \geq |t_0|$. Un subconjunto U de L se dice radial si absorbe a cualquier subconjunto finito de L.

DEFINICION 313.-Un subconjunto C de L e.v.t. lo llamaremos circular si $tC \subset C \quad \forall\, |t| \leq 1$.

TEOREMA 312.- Una topología T sobre un espacio vectorial L sobre K satisface los postulados LT1 y LT2 si y solo si T es invariante bajo traslaciones y además el filtro de las vecindades de cero $\mathcal{U}_0$ posee una base $\mathcal{B}$ con las propiedades.

i) Para cada $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ con $U+U \subset V$

ii) Cada $V \in \mathcal{B}$ es radial y circular.

iii) Existe $t \in K$ con $0 < |t| < 1$ tal que $V \in \mathcal{B}$ implica $tV \in \mathcal{B}$.

Demostración.- Probaremos primero que en un e.t.v. L existe una tal base $\mathcal{B}$ para el filtro de las vecindades de cero. Construyamosla así: sea $V \subset \mathcal{U}_o$ ($\mathcal{U}_o$ el filtro de las vecindades de cero en L), -- existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_o$ y $\varepsilon > 0$ tal que $t\mathcal{V} \subset V \ \forall |t| \leq \varepsilon$ debido al postulado LT2.

Entonces sea $V_w = \bigcup \{ t\mathcal{V} \mid |t| \leq \varepsilon \}$ y sea $B =$
$= \{ V_w \mid w \subset \mathcal{U}_o \}$.

Es claro que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{U}_o$ pues cada elemento de $\mathcal{U}_o$ contiene un elemento de $\mathcal{B}$; además se -- cumplen los postulados para base filtrante.

Obviamente B es circular pues $\rho V = \rho \bigcup \{ t\mathcal{V} \mid |t| \leq \varepsilon \} =$
$= \bigcup \{ \rho t \mathcal{V} \mid |\rho t| \leq \varepsilon \}$ pues $|\rho| \leq 1 \Rightarrow \rho V_w \subset V_w$.

Además es claramente radial pues si A es un subconjunto finito de L, sea $x_o \in A$, por el postulado LT2, dado V_w existe $\varepsilon > 0$ tal que $tx_o \in V_w \ \forall |t| \leq \varepsilon < 1$, lo que implica $x_o \subset t^{-1} V_w$ y si - $|r| \geq |t^{-1}| \Rightarrow |r^{-1}| \leq |t|$ lo que nos lleva a $r^{-1} x_o \subset V_w$ $x_o \in r V_w$, es decir V_w es radial pues esto se extiende para cada elemento de A.

Ahora demostraremos que para cada $V_w \in \mathcal{B}$ existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ con $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subset V$, ésto es claro pues dado V_w por LT1, existe - $\mathcal{X} \in \mathcal{U}_o$ tal que $\mathcal{X} + \mathcal{X} \subset V_w$ y entonces existe $V_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{B}$ con $V_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$, lo que implica que $V_{\mathcal{X}} + V_{\mathcal{X}} \subset V_w$, que es lo que queríamos probar.

Para demostrar iii) basta hacer notar que como K es no discreto existe $0 < |t| < 1$ y como $\mathcal{B}$ es circular, se tiene que -- $t V_w \in \mathcal{B}$ para toda $V_w \in \mathcal{B}$.

El que la topología sea invariante bajo traslaciones ya se probó en el teorema anterior.

Recíprocamente, si L es un espacio vectorial y T una topología invariante bajo traslaciones definida sobre L, la cual posee una base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{U}_0$ con las características dadas por el teorema, demostraremos que se verifican los postulados LT1 y LT2.

Es claro que $\{x_0 + V \mid V \in \mathcal{B}\}$ es una base para $\mathcal{U}_{x_0}$ demostraremos que $+(x,y) = x + y$ es contínua. Sea $W \in \mathcal{U}_{x_0+y_0}$ $\Rightarrow$ $W = x_0 + y_0 + V$ con $V \in \mathcal{B}$ y entonces existe $V_0 \in \mathcal{B}$ tal que $V_0 + V_0 \subset V$ y entonces $W \supset x_0 + y_0 + V_0 + V_0$ y $W \supset (x_0 + V_0) + (y_0 + V_0)$ entonces $x_0 + V_0 \in \mathcal{U}_{x_0}$ y $y_0 + V_0 \in \mathcal{U}_{y_0}$ lo que implica que LT1 se cumple.

Para probar la continuidad de $\cdot(t,x) = t\,x$, sea $t_0 \in K$ y $x_0 \in L$; si $W \in \mathcal{U}_{t_0x_0}$ entonces $W = t_0x_0 + V$ con $V \in \mathcal{B}$, por otro lado $tx = t_0x_0 + t\,(x-x_0) + (t-t_0)\,x_0$ procuraremos encontrar vecindades de t_0 y de x_0 tales que bajo la función producto-exterior caigan dentro de W.

Primeramente como $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ con $U + U \subset V$ y como U es radial existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|t-t_0| \leq \varepsilon$ se tiene que $(t-t_0)\,x_0 \in U \;\forall\, |t-t_0| \leq \varepsilon$, y por otra parte sea: $0 < |r| < 1$ y sea $n \in N$ tal que $|r|^{-n} \geq |t_0| + \varepsilon$
Sea $R = r^n U$ entonces $t(x-x_0) \in t r^n U$ si $x-x_0 \in R$ y como $|t| \leq |t_0| + \varepsilon \leq |r|^{-n}$ se tiene que $t(x-x_0) \in U$ para toda $x \in x_0 + r^n U$ y entonces si $x \in x_0 + r^n U$ y $|t-t_0| \leq \varepsilon$ entonces $tx \in t_0x_0 + V$ lo que prueba que LT2 se cumple.

3.2 METRIZACION DE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

Con el propósito de exhibir espacios vectoriales no-metrizables y por lo tanto no normados, daremos esta vez un resultado que nos permite conocer condiciones necesarias y suficientes para metrizar espacios vectoriales topológicos sobre los reales. La importancia de este tipo de espacios, radica en que para construír un cálculo diferencial sobre ellos, se tendrá que recurrir únicamente a sus propiedades netamente topológicas y no a su métrica ni a su carácter normado.

Haremos aqui también una breve discusión sobre e.t.v. producto.

TEOREMA 321.- Un e.t.v. sobre los reales y de Hausdorff es metrizable si y solo si posee una base numerable del filtro de las vecindades de cero. En tal caso existe una función $| \ | : L \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $|t| \leq 1 \Rightarrow |tx| \leq |x| \quad \forall\, x \in L$

ii) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x,y \in L$

iii) $|x| = 0$ si y solo si $x=0$

iv) La métrica $d(x,y) = |x-y|$ genera la topología de L.

Demostración.- Sea L un e.t.v. de Hausdorff el cual posee una base numerable del filtro $\mathcal{U}_0$ de las vecindades de cero.

A partir de esta base $\mathcal{Q}$ es posible construír una base $\mathcal{F}$ tal que sea radial y circular y además posea la propiedad de que si $V \in \mathcal{F}$ entonces existe $U \in \mathcal{F}$

con $\mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V$. El teorema 311 anterior, asegura y da la forma de construír la tal base $\mathcal{F}$.
$\mathcal{F}$ claramente es numerable y sea $\mathcal{F} = \{F_n : n \in N\}$; construyamos a partir de $\mathcal{F}$ la siguiente base:
El conjunto de las vecindades abiertas de cero se puede partir en clases $\mathcal{C}_n$ asi: A vecindad abierta de cero está en $\mathcal{C}_n$ si $F_n \subset A$. Tomemos un representante de cada clase y construyamos la siguiente colección $\mathcal{Y} = \{A_n \mid A_n \in \mathcal{C}_n \; n \in N\}$. Sea V_1 el elemento de $\mathcal{F}$ contenido en A_1, para este elemento existe $F_{i_1} \subset \mathcal{F}$ tal que $F_{i_1} + F_{i_1} \subset V_1$; es claro que $F_{i_1} \cap A_2$ es una vecindad de cero y por lo tanto contiene a un elemento V_2 de $\mathcal{F}$ con $V_2 \subset F_{i_1} \cap A_2$ además $V_2 + V_2 \subset V_1$. Para A_3 repitamos el proceso y obtengamos V_3 y así sea $\mathcal{B} = \{V_n$ obtenidos mediante el proceso anterior$\}$.
Es claro que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{U}_0$ y además se cumple que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$

Para cada subconjunto H no vacio y finito de naturales, definamos la vecindad circular V_H como:

$V_H = \sum_{m \in H} V_m$ y definamos el número real $P_H = \sum_{m \in H} 2^{-m}$

Lo anterior implica que:

(1) $P_H < 2^{-m} \Rightarrow m < H \Rightarrow V_H \subset V_m$ donde $m < H$ significa $m < k \; \forall k \in H$.

Definamos la función real $| \; | : L \rightarrow R$

$$|x| = \begin{cases} \text{Inf.} \{ P_{[H]} : x \in V_{[H]} \} & \text{si } x \text{ es elemento de algún } V_{[H]}. \\ 1 \quad \text{si } x \notin V_{[H]} \ \forall\, H. \end{cases}$$

Es claro que el rango de esta función está contenida en --- $[0, 1]$.

Como cada $V_{[H]}$ es circular, entonces si $|t| \leq 1$ y si -- $x \in V_{[H]}$ entonces $tx \in V_{[H]}$ y $|x| \geq |tx|$ lo que prueba i).

Demostraremos ahora que se cumple la desigualdad del triángulo:

Si $|x| + |y| \geq 1$ entonces claramente $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Ahora, si $|x| + |y| \leq 1$, sea $\varepsilon > 0$ un real tal que $|x| + |y| + 2\varepsilon < 1$; existen entonces subconjuntos no vacios y finitos H, K de naturales tales que $x \in V_{[H]}$, $y \in V_{[K]}$ y $P_{[H]} < |x| + \varepsilon$, $P_{[K]} < |y| + \varepsilon$. Como $P_{[H]} + P_{[K]} < 1$ entonces existe un subconjunto - finito M de naturales tal que $P_{[M]} = P_{[H]} + P_{[K]}$ y M tiene la propiedad $V_{[H]} + V_{[K]} \subset V_{[M]}$. Se sigue entonces $x + y \in V_{[M]}$ y $|x+y| \leq P_{[M]} = P_{[H]} + P_{[K]} < |x| + |y| + 2\varepsilon$.

Lo que prueba la desigualdad del triángulo.

Para cada $\varepsilon > 0$, sea $S_{\varepsilon} = \{ x \in L \mid |x| \leq \varepsilon \}$, entonces es - claro que $S_{2^{-(n+1)}} \subset V_n \subset S_{2^{-n}}$, $n \in N$, (2); pues, primeramente $V_n \subset S_{2^{-n}}$ es obvio pues si $x \in V_n$ entonces $|x| \leq 2^{-n}$. Por otro lado si $|x| \leq 2^{-(n+1)}$ entonces existe H tal que $x \in V_{[H]}$ y $P_{[H]} < 2^{-n}$ y por (1) se tiene que $x \in V_n$.

De la relación 2 es claro que iii) se verifica pues como L es de Hausdorff entonces si $x = 0$, esto implica $x \in \bigcap \{V_n : n \in N\}$ y entonces iii) es inmediato a partir de ésto. Mas aún, (2) muestra que la familia $\{S_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es una base de vecindades de cero; como además la topología inducida por la métrica $d(x\ y) = |x - y|$ es invariante bajo traslaciones pues $T(x) = x_0 + x$ es un homeomorfismo y entonces por el teorema anterior se verifica iv).

Hay que hacer notar que los postulados para una métrica como son $|x| = |-x|$ y $|x| \geq 0$ para toda $x \in L$ son cumplidos por nuestra función aqui definida pues si $|t| \leq 1$ implica $|tx| \leq |x|$ $\forall\, x \in L$, entonces se tiene $|-x| \leq |x|$ y $|x| \leq |-x| \Rightarrow |x| = |-x|$ y además $0 \leq |x| + |-x| = 2|x|$ implica $|x| \geq 0$.

3.3 ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS PRODUCTO.

Sea $\{L_i : i \in I\}$ una familia de espacios vectoriales topológicos sobre R. El producto cortesiano $L = \prod_{i \in I} L_i$ con

$L = \{ f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} L_i, f(i) \in L_i \}$ es un espacio vectorial topológico sobre R con las operaciones:

$$+ (f,g) = f + g \quad \text{con } (f+g)(i) = f(i) + g(i)$$

$$\circ (t,f) = t f \quad \text{con } (t f)(i) = tf(i)$$

y con la topología producto sobre L.

Demostraremos que efectivamente es un e.v.t. viendo que se cumple LT1 y LT2.

Sea A una vecindad abierta de f + g, entonces:

$$A = \bigcup_{j \in J} \Big(\bigcap_{i=1}^{n_j} P_i^{-1}(U_i) \Big)$$ con P_i la i-ésima función proyección, U_i abierto en L_i.

Entonces:

$$f + g \in \bigcap_{i=1}^{n_j} P_i^{-1}(U_i)$$ para alguna j y

entonces $f(i) + g(i) \in U_i \quad i = 1, \dots, n_j$ y

$f(i) + g(i) \in L_i \quad i \neq 1, 2, \ldots, n_j$ y entonces exis-ten vecindades V_i y W_i de $f(i)$ y $g(i)$ respectivamente tales que $V_i + W_i \subset U_i \quad i = 1, \ldots, n_j$ pues L_i es e.v.t.

Entonces:

$$\bigcap_{i=1}^{n_j} P_i^{-1}(V_i) + \bigcap_{i=1}^{n_j} P_i^{-1}(W_i) \subset A$$

lo que prueba la continuidad de la suma.

Ahora si A es una vecindad abierta de tf , entonces:

Sea $A = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{i=1}^{n_j} P_i^{-1}(U_i) \right)$ entonces $tf(i) \in U_i$ Para alguna j

$i = 1, \ldots, n_j$ y entonces existe $\varepsilon_i > 0$ y V_i vecindad de $f(i)$ $i = 1, \ldots, n_j$, tal que $tV_i \subset U_i \ \forall |t| \leq \varepsilon_i$ y entonces:

$$t \bigcap_{i=1}^{n_j} P_i^{-1}(V_i) \subset A \qquad \forall |t| \leq \min\{\varepsilon_i, i = 1 \cdots n_j\}.$$

lo que prueba que LT2 se cumple y L es un e.v.t.

TEOREMA 331.- Sea $\{L_i : i \in I\}$ una familia de e.v.t. sobre R, metrizables. El producto cartesiano $\prod_{i \in I} L_i$ es metrizable si y solo si I es numerable.

Para probar este importante probemos mejor éste:

TEOREMA 332.- Sea $\{L_i, i \in I\}$ una familia de e.v.t. tales que cada L_i posee una base numerable para el filtro de las vecindades de cero. Entonces el producto cartesiano $\prod_{i \in I} L_i$ posee una base numerable para el filtro $\mathcal{U}_0$ de las vecindades de cero si y solo si todos menos un número numerable de espacios L_i son indiscretos.

Demostración.- Supongamos que B es un subconjunto numerable de I de tal manera que L_i es indiscreto para $i \in I-B$ y que $x \in L_i$. Para cada $i \in I$ escojamos una base numerable $\mathcal{B}_i$ del sistema de vecindades de cero de L_i. Entonces tomemos $\mathcal{B} = \{L_i\}$ si $i \in I-B$. Consideremos la familia de todas las intersecciones finitas de subconjuntos de la forma $P_i^{-1}(U)$ para $i \in I$ y $U \in \mathcal{B}_i$, ésta es claramente numerable pues $P_i^{-1}(U) = \prod \{L_i : i \in I\}$ si $i \in I-B$. Pero la familia de las intersecciones finitas es una base para el sistema de las vecindades de cero y entonces $\prod_{i \in I} L_i$ posee una base numerable.

Probemos el converso. Supongamos que B es un subconjunto no-numerable de I tal que para cada $i \in I-B$ existe una vecindad de cero en L_i la cual es un subconjunto propio de L_i, y supongamos que existe una base numerable $\mathcal{F}$ para $\mathcal{U}_0$ en $\prod_{i \in I} L_i$. Cada miembro F de $\mathcal{F}$ contiene un miembro de la base definidora de la topología producto y entonces $P_\alpha(F) = L_\alpha$ salvo para un número finito de elementos de B.

Como B es no-numerable, existe un elemento α de B tal que $P_\alpha(F) = L_\alpha$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Pero existe una vecindad V de cero tal que es un subconjunto propio de L_α y claramente ningún miembro de $\mathcal{F}$ es tal que es un subconjunto de $P_\alpha^{-1}(V)$. Contradicción. Este teorema y el teorema 321 demuestran el teorema 331. Este teorema nos enseña a construir espacios vectoriales-topológicos no-metrizables.

Ejemplos:

i) $\prod_{i \in R} R_i$ con $R_i = R$.

ii) $\prod_{i \in R} N_i$ con $N_i = (C_{[a,b]}, \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

C A P I T U L O IV

CALCULO DIFERENCIAL SOBRE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

En este importante capítulo daremos la construcción de un cálculo diferencial sobre espacios vectoriales topológicos, restringiéndonos a espacios vectoriales topológicos sobre los reales y de Hausdorff. A pesar de estas restricciones la teoría se puede extender sin mayor problema a espacios vectoriales topológicos sobre campos valuados no-discretos; sin embargo en este caso lo haremos para e.v.t. sobre los reales pues este caso da claramente la pausa a seguir.

Lo importante de nuestra construcción ès que, además de ser una generalización del cálculo diferencial sobre espacios vectoriales normados conserva para los e.v.t. todos aquellos resultados fundamentales del cálculo diferencial como veremos luego.

Empezaremos el capítulo con lo que llamaremos funciones error, las cuales nos definen el concepto de "aproximación" de funciones con el cual construiremos nuestro cálculo diferencial. La definición de función error nos parece clara en cuanto a que se define como tal, una función que "tiende" más rapido a cero de como lo hace su variable. En este nuestro caso pedimos que la variable tienda a cero por medio de una sucesión real convergente a cero.

En este capítulo e.v.t. siempre denotará espacios vectoriales topológicos sobre los reales y de Hausdorff.

4.1 FUNCIONES ERROR.

DEFINICION 410.- Sea L un e.v.t. Una sucesión generalizada $\{hp\}$ sobre un conjunto dirigido D la llamaremos acotada si para toda sucesión generalizada $\{tp\}$ de reales sobre el mismo conjunto dirigido D y tal que es convergente a cero, se tiene que $\{tphp\}$ es también convergente a cero.

DEFINICION 411.- Sean L, M e.v.t. Sea $\Upsilon : L \longrightarrow M$ una función. Diremos que Υ es una función error, si la función $q_{\Upsilon} : R \times L \longrightarrow M$

$$q_{\Upsilon}(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{t}\, \Upsilon(th) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

es tal que si $\{hp\}$ es una sucesión acotada y $\{tp\}$ una sucesión generalizada de reales convergentes a cero y sobre el mismo conjunto dirigido D, entonces:

$$\lim_{p \in D} q_{\Upsilon}(tp,hp) = 0$$

Las funciones error son aquellas que tienden "más rápido" a cero de como lo hace su variable, esto es claro intuitivamente.

Es de hacer notar que si Υ es una función error entonces $\Upsilon(0) = 0$. Esto es claro pues si consideramos la sucesión acotada $\{0\}$ entonces

$$\lim_{p \in D} \frac{\Upsilon(0)}{tp} = 0$$

para toda sucesión $\{t_p\} \to 0$ de reales sobre el conjunto dirigido D y esto claramente nos lleva a que --- $r(0) = 0$.

TEOREMA 411.- Sean L, M e.v.t. Si r_1 y r_2 son funciones error, - entonces también lo es la función $r_3 = a r_1 + b r_2$

Demostración.- La función $q_{r_3} : R \times L \longrightarrow M$ es -- tal que:

$$q_{r_3}(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{t}\left[a r_1(th) + b\, r_2(th)\right] & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

y claramente si $\{hp\}$ es una sucesión acotada y -- $\{tp\}$ una sucesión de reales sobre el mismo conjunto dirigido D convergente a cero, entonces:

$$\lim_{p \in D} q_{r_3}(tp, hp) = 0$$

TEOREMA 412.- Sean L, M, N e.v.t. $r : L \longrightarrow M$, una función error y $\ell : M \longrightarrow N$ una función lineal contínua. Entonces la función composición $\ell \circ r : L \longrightarrow N$ es también una función error.

Demostración.- Construyamos $q_{\ell \circ r} : R \times L \longrightarrow N$

$$q_{\ell \circ r}(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{t}\, \ell \circ r\,(th) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathcal{G}_{\ell o r}(t,h) = \begin{cases} \ell\left(\frac{1}{t}\, r(th)\right) & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

y si $\{hp\}$ y $\{tp\}$ son sucesiones generalizadas en el sentido de la definición 411, entonces:

$$\lim_{p \in D} \mathcal{G}_{\ell o r}(tp, hp) = 0 \quad \text{pues } \ell \text{ es continúa.}$$

TEOREMA 413.- Sean L, M e.v.t., $r : L \longrightarrow M$. Si r es una función error lineal, entonces $r = 0$.

Demostración.- Sea $h \in L$ entonces la sucesión $\{hp\} = \{h\}$ es una sucesión acotada y entonces

$$0 = \lim_{p \in D} \frac{1}{tp}\, r(tph) = \lim_{p \in D} r(h) = r(h)$$

4.2 DIFERENCIABILIDAD EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS DE FUNCIONES CONTINUAS.

DEFINICION 421 Sean L, M e.v.t. $f: A \longrightarrow M$, A un abierto de L, f una función contínua. Diremos que f es diferenciable en $x \in A$ si existe una función ℓ tal que:

i) $\ell : L \longrightarrow M$

ii) ℓ es lineal y contínua

iii) La función $r : L \longrightarrow M$ con $r(h) = f(x+h) - f(x) - \ell(h)$ es una función error.

En caso de existir llamaremos a ℓ la diferencial de f en x y denotaremos por df(x,t) a la diferencial de f en x valuada en t.

TEOREMA 421.- Sean L,M e.v.t. Si f función contínua es diferenciable en x entonces la diferencial es única.

Demostración.- Supongamos que existen 2 funciones lineales ℓ_1 y ℓ_2 que cumplen con la definición 421. Es decir: $r_1(h) = f(x+h) - f(x) - \ell_1(h)$ y

$$r_2(h) = f(x+h) - f(x) - \ell_2(h)$$

son funciones error. Esto nos lleva a que $r_1 - r_2 = \ell_1 - \ell_2$ y entonces $r_1 - r_2$ es una función error lineal lo que implica que $r_1 = r_2$.

A partir de la definición de diferenciabilidad en un punto es claro que, la función constante y toda función lineal son diferenciables en cada punto de su dominio.

TEOREMA 422.- Sea f una función contínua $f: L \longrightarrow M$, L,M e.v.t. Sea u un vector en L, entonces definiremos la derivada direccional de f en x en la dirección u como el siguiente límite en caso de que exista.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

y la denotaremos $D_u f(x)$.

TEOREMA.- Sea $f: L \to M$ contínua y diferenciable en x. Si u es un vector de L entonces f posee derivada direccional en x en la dirección y $D_u f(x) = df(x,u)$.

Demostración.- Como f es diferenciable en x entonces: $\gamma(h) = f(x+h) - f(x) - df(x,h)$ es una función error y entonces como $\{u\}$ es una sucesión acotada, entonces para toda sucesión generalizada $\{t_\rho\}$ de reales convergente a cero, se tiene:

$$\lim_{\rho \in \mathcal{D}} \frac{1}{t_\rho} \left[f(x+t_\rho u) - f(x) - df(x,t_\rho u) \right] = 0$$

y entonces

$$\lim_{\rho \in \mathcal{D}} \frac{1}{t_\rho} \left[f(x+t_\rho u) - f(x) \right] = df(x,u).$$

A las derivadas direccionales en la dirección de los elementos de la base las llamaremos derivadas parciales.

Antes de enunciar y demostrar el importante resultado que se refiere a diferenciación de funciones compuestas, haremos notar que nuestra definición es una generalización del concepto de diferenciabilidad para funciones contínuas sobre espacios vectoriales normados.

Sea $f: N \longrightarrow M$ una función contínua, N,M e.v. normados. Si f es diferenciable en x, entonces existe una función lineal en su segunda variable tal que:

$$\lim_{h \to o} \frac{\| f(x+h) - f(x) - df(x,h) \|}{\| h \|} = 0$$

Demostraremos que la función $\gamma : N \longrightarrow M$ con $(h) = f(x+h) - f(x) - df(x,h)$ es una función error.

Sea la función $\varphi_v : R \times N \longrightarrow M$

$$q_r(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{t}\, r(th) & \text{si } t \neq o \\ 0 \quad \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Sean $\{h_\rho\}$ y $\{t_\rho\}$ dos sucesiones con las caracte rísticas dadas en la definición 411. Entonces:

$$\| q_r(t_\rho, h_\rho) \| = \frac{\| r(t_\rho h_\rho) \|}{\| t_\rho h_\rho \|} \; \| h_\rho \| \quad \text{si } h_\rho \neq 0$$

y entonces $\lim\limits_{\rho \in D} \| q_r(t_\rho, h_\rho) \| = 0$ pues como -

$\lim\limits_{\rho \in D} \dfrac{\| r(t_\rho h_\rho) \|}{\| t_\rho h_\rho \|} = 0$ y $\{h_\rho\}$ es una sucesión --

acotada por la continuidad de la norma tenemos que

$$\lim_{\rho \in D} \| q_r(t_\rho, h_\rho) \| = 0$$

Esto prueba que si f es diferenciable en el senti- do de Frèchet también lo es en el nuestro y viceversa, sea si $f: N \longrightarrow M$ e.v.n cumple con la definición 421 en x entonces si --- $x_n \longrightarrow 0$ se tiene que $\| x_n \| \longrightarrow 0$ y como $\left\{ \dfrac{x_n}{\| x \|} \right\}$ con $\| x_n \| \neq 0$ es una sucesión acotada en el sentido de la definición -- 411, tenemos que:

$$\lim \; q\left(\| x_n \| \frac{x_n}{\| x \|} \right) = 0 = \lim_{x_n \to o} \frac{\| r(x_n) \|}{\| x_n \|} \quad \text{lo que-}$$

implica que f es Frèchet diferenciable.

4.3 DIFERENCIACION DE FUNCIONES COMPUESTAS.

Antes de enunciar y demostrar el importante teorema sobre diferenciación de funciones compuestas, daremos un breve lema que nos será de utilidad después.

LEMA 431.- Sean L,M,N e.v.t. $r_1 : L \longrightarrow M$ una función error, $\ell : L \longrightarrow M$ una función lineal contínua y $r_2 : M \longrightarrow N$ una función error. Entonces $r_2 \circ (\ell + r_1)$ es una una función error.

Demostración.- Sea $q_{r_2\circ(\ell+r_1)} : R \times L \longrightarrow N$

$$q_{r_2\circ(\ell+r_1)}(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{t} \; r_2 \circ (\ell + r_1)\,(th) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

entonces si $\{h_\rho\}$ y $\{t_\rho\}$ son sucesiones con las características de los pedidos en la definición 411 Entonces:

$$q_{r_2\circ(\ell+r_1)}(t_\rho,h_\rho) = \frac{1}{t_\rho} r_2[\ell(t_\rho h_\rho) + r_1(t_\rho h_\rho)] \quad \text{si } t \neq 0$$

$$= \frac{1}{t_\rho} r_2\left[t_\rho \left(\ell(h\ ) + \frac{1}{t_\rho} r_1 (t_\rho h_\rho\ )\right)\right]$$

Ahora consideremos la sucesión generalizada $\{u_\rho\} = \ell(h_\rho) + \frac{1}{t_\rho} r_1(t_\rho h_\rho)$ esta es acotada pues si $\{b_\rho\}$

es una sucesión de reales convergente a cero entonces:

$$\{b_\rho U_\rho\} = \left\{ \ell(b_\rho h_\rho) + b_\rho \frac{1}{t_\rho} r_1(t_\rho h_\rho) \right\}$$ y esta --

claramente converge a cero pues ℓ es contínua y lineal y r_1 es función error.

Entonces tenemos que:

$$\mathcal{G}_{r_2 o(\ell + r_1)}(t_\rho, h_\rho) = \frac{1}{t_\rho} r_2\left[t_\rho(\ell(h_\rho) + \frac{1}{t_\rho} r_1(t_\rho h_\rho)\right]$$

y como r_2 es función error, tenemos que:

$$\lim_{\rho \in D} \mathcal{G}_{r_2 o(\ell + r_1)}(t_\rho, h_\rho) = \lim \frac{1}{t_\rho} r_2\left[t_\rho(\ell(h_\rho) + \frac{1}{t_\rho} r_1(t_\rho h_\rho)\right] = 0$$

TEOREMA 431.- Sean las funciones $f: L \longrightarrow M$ y $g: M \longrightarrow N$ $L, M, N,$ e.v.t. Entonces si f es diferenciable en $x \in L$ y g es diferenciable en $f(x)$ entonces g o f es diferenciable en x y,

$$d(g \circ f)(x,t) = dg(f(x), df(x,t))$$

Demostración.- Como f es diferenciable en x entonces la función $r_1 : L \longrightarrow M$

$r(h) = F(x+h) - f(x) - df(x,h)$ es una función -- error.

Como g es diferenciable en $f(x)$ entonces $r_2 : M \longrightarrow N$

$\Upsilon_2(K) = g(f(x)+K)) - g(f(x)) - dg(f(x), K)$ es- una función error.

$(g \circ f)(x+h) = g(f(x+h)) = g(f(x)+df(x,h) + \Upsilon_1(h))=$

$= g(f(x)) + \Upsilon_2(df(x,h) + \Upsilon_1(h)) + dg(f(x),df(x,h))+$

$+ dg(f(x),\Upsilon_1(h))$

y como las funciones $\Upsilon_2(df(x,h) + \Upsilon_1(h))$ y $dg(f(x)$ $\Upsilon_1(h))$ son funciones error por el teorema 412 y el lema anterior, entonces la función lineal ---- $dg(f(x), df(x,h))$ es la diferencial de g o f en x.

C A P I T U L O   V

En este capítulo enunciaremos y demostraremos el importantísimo Teorema del valor medio, donde el valor de una función con valores sobre un e.v.t. será estimado por medio de su diferencial. Como no se tiene una norma lo formularemos por medio de un conjunto convexo, lo cual es más ventajoso.

Al final de este capítulo haremos una breve discusión de este importante teorema.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea $f: [a,b] \longrightarrow L$, L un e.v.t., localmente convexo y $g: [a,b] \longrightarrow R$. f y g contínuas. Sea B un subconjunto cerrado y convexo de L conteniendo a cero y sea D un subconjunto numerable de $[a,b]$ tal que f y g son diferenciables en cada $t \in [a,b]-D$ y además se tiene:

$df(t,x) \in g'(t,x) \circ B \qquad t \in [a,b]-D$

Además $\quad s < t \Rightarrow g(s) < g(t)$

Teorema.- Bajo las anteriores hipótesis.

$f(b) - f(a) \in (g(b) - g(a)) \circ B$

Demostración.- Consideremos el caso

$a = 0, \quad g(0) = 0, \quad f(0) = 0 \quad y \quad 0 \in B \quad$ y reduzcamos a éste el caso general así:

Sea $p \in B$ un punto fijo y definamos

$a_1 = 0, \quad b_1 = b-a, \quad g_1(t) = g(t+a) - g(a) \; \forall \; t \in [a_1, b_1].$

$f_1(t) = f(t+a) - f(a) - g_1(t) \circ p$ para $t \in [o,b_1]$

$B_1 = B - p$.

Demostraremos que la validez de las condiciones dadas arriba sobre a, b, g, f y B implica la validez de las mismas sobre - a_1, b_1, g_1, f_1, B_1.

$g_1'(t) = g'(t+a)$

$df_1(t,h) = df(t+a, h) - g'(t+a)$ y como

$df(t,h) \in g'(t,h) \circ B \quad \forall \; t \in [a,b]-D$, entonces

$df_1(t,h) \in g'(t+a,h) \circ B - g'(t+a) \circ p = g_1'(t,h) \circ B_1$

Además de que B_1 es convexo y cerrado también.

Entonces si $f(b_1) \in g(b_1) \circ B_1$ nos lleva a que

$f(b) - f(a) - (g(b) - g(a)) \circ p \in (g(b) - g(a)) \circ (B - p)$

$f(b) - f(a) \in (g(b) - g(a)) \circ B$

Demostraremos entonces el caso especial agregando a B la -- condición de que sea una vecindad de cero.

Probemos que $f(b) \in (g(b) + \varepsilon b + \varepsilon)\, B$ para cada $\varepsilon > 0$.

Sea $n \to x_n$ una biyección de N en D y definamos la -- función $h: [0,b] \longrightarrow R$ con

$$h(s) = g(s) + \varepsilon \circ s + \varepsilon \sum_{x_n < s} 2^{-n}.$$

Sea $I = \{t \in [0,b] \mid f(s) \in h(s) \circ B$ para toda $0 \leq s < t\}$

Obviamente $I \neq \emptyset$ pues $0 \in I$ se cumple la condición por vacuidad.

Sea $K = \sup I$. Si $0 \leq t < K$ entonces existe $t_1 \in I$ con $t < t_1$ y entonces $I = [0, K]$ pues $K \in I$.

Demostraremos que $f(K) \in h(K) \circ B$

Si $K = 0$ no hay nada que probar. Si $K > 0$ entonces:

$\dfrac{f(t)}{h(t)} \in B$ para $0 < t < K$

y como f es contínua y h también por la izquierda, tenemos-que:

$$\lim_{\substack{t < K \\ t \to K}} \frac{f(t)}{h(t)} = \frac{f(K)}{h(K)} \in B \quad \text{pues B es cerrado}$$

lo que implica $f(K) \in h(K) \circ B$.

Como $I = [0, K] \subset [0,b]$ entonces $K \leq b$, demostraremos que $K = b$.

CASO 1.- Supongamos que $K < b$ y $K \neq x_n$ para toda $n \in N$, es - decir K es un punto donde se cumple el que $df(K,x) \in g'(K) \circ B$.

Entonces

$f(K+h) = f(K) + df(K,h) + r_1(h)$

$g(K+h) = g(K) + dg(K,h) + r_2(h)$

$df(K,h) \in g'(K)h \circ B$ con r_1 y r_2 funciones error.

Y entonces dado $\varepsilon/2$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$r_1(t) \in \varepsilon/2 \; t \circ B \quad \forall \; |t| \leq \delta_1$ pues r_1 es una función error y

$$\lim_{t \to 0} \frac{r_1(\frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{\varepsilon}t)}{t} = 0$$

dado $\varepsilon/2$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$r_2(t) \in \varepsilon/2 \; t \; I_0 \text{ con } I_0 = [-1,1] \quad \forall \; |t| \leq \delta_2 ,$$ es decir:

$$|r_2(t)| \leq \varepsilon/2 \; |t| \quad \forall \; |t| \leq \delta_2$$

Sea ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, b - k\}$, entonces para toda q con $0 \leq q \leq \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} f(k+q) &= f(k) + df(k,q) + r_1(q) \in \\ &\in h(k) \circ B + g'(k)\, q \circ B + \varepsilon/2\, q \circ B = \\ &= h(k) \cdot B + (g(k+q) - g(k) - r_2(q)) \circ B + \varepsilon/2\, q \circ B \end{aligned}$$

como los coeficientes $h(k)$, $g(k+q) - g(k) - r_2(q) = g'(k) \cdot q$ y $\varepsilon/2 \circ q$ son no negativos y como B es convexo, entonces si $u,v,w > 0$, $uB + vB + wB \subset (u+v+w)\,B$ pues $ub_1 + vb_2 \subset (u+v)\,B$ ya que $ub_1 + vb_2$ es un elemento del segmento que une $(u+v)\,b_1$ con $(u+v)\,b_2$ pues $ub_1 + vb_2 =$

$$= \frac{u}{u+v}\,(u+v)\,b_1 + \left(1 - \frac{u}{u+v}\right)(u+v)\,b_2$$ y entonces $ub_1 + vb_2 = b_4$ con $b_4 \in uB + vB$ y ahora $ub_1 + vb_2 + wb_3 = b_4 + wb_3$ y este es analogamente un elemento de $(u+v+w)\,B$.

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} f(k+q) &\in (h(k) + g(k+q) - g(k) - r_2(q) + \varepsilon/2\, q) \circ B \\ &= (g(k+q) + \varepsilon \sum_{x_n < k} 2^{-n} + \varepsilon k - r_2(q) + \varepsilon/2\, q) \circ B \\ &\subset (g(k+q) + \varepsilon \sum_{x_n < k+q} 2^{-n} + \varepsilon(k+q))\, B = \end{aligned}$$

$= h(K+q) \circ B$

ya que $\varepsilon \sum_{x_n < K+q} 2^{-n} > \varepsilon \sum_{x_n < K} 2^{-n}$ y $-r_2(q) + \varepsilon/2\, q > 0$

pues $|r_2(q)| \leq \varepsilon/2\, q$ y $-\varepsilon/2\, q \leq r_2(q) \leq \varepsilon/2\, q$

Se tiene además que $f(s) \in h(s) \cdot B \quad \forall\, 0 \leq s \leq K+q$

entonces $K + \delta \in I$ contradiciendo la definición de K como el supremum.

Esto muestra que este caso no es posible.

CASO 2.- Sea $K < b$ y $K = x_m$ para alguna $m \in N$. Como f es contínua en X_m, existe $\delta_1 > 0$ con $f(q)-f(K) \in \varepsilon/2\, 2^{-m} \circ B$ para $|q - K| < \delta_1$

Análogamente como g es contínua y monótona, existe $\delta_2 > 0$ con:

$g(q) - g(K) \leq \varepsilon/2\; 2^{-m}$ para $K \leq q \leq K + \delta_2$

Sea $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2, b - K \}$, entonces se tiene para $K \leq q \leq K + \delta$

$$f(q) = (f(q) - f(K)) + f(q)$$

$$\in \varepsilon/2\; 2^{-m} B + (g(K) + \varepsilon K + \varepsilon \sum_{x_n < K} 2^{-n}) \circ B$$

$$\subset \varepsilon/2\; 2^{-m} B + (g(q) + \varepsilon q + \varepsilon \sum_{x_n < K} 2^{-n}) \circ B$$

$$\subset (g(q) + \varepsilon q + \varepsilon \sum_{x_n \leq K} 2^{-n}) \circ B \subset h(q) \circ B$$

Contrario a la hipótesis de que K era el sup. Entonces $K = b$.

PARTE 3.- Demostraremos ahora que $f(b) \in g(b) \circ B$.

si $g(b) \neq 0$ entonces teniendo en cuenta que B es cerrado y haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{f(b)}{g(b) + \varepsilon b + \varepsilon} \in B$$

En el caso de que $g(b) = 0$, entonces $g(t) = 0$ para toda $t \in [0,b]$ y entonces $df(t,x) = 0$ $\forall$ $t \in [o,b]$ -D

Sea C una vecindad convexa, cerrada de cero, entonces -- las hipótesis del teorema se mantienen remplazando B por C y entonces por la parte 2 se tiene:

$$f(b) \in (\varepsilon b + \varepsilon) \circ C \quad ó \quad \frac{f(b)}{\varepsilon b + \varepsilon} \in C$$

como el espacio es de Hausdorff se tiene entonces que --

$\frac{f(b)}{b+1} = 0$ lo que implica que $f(b) = 0$ pues $0 \in B$.

PARTE 4.- En esta parte trataremos de eliminar la hipótesis de que B sea una vecindad de cero.

En el caso que $g(b) = 0$, entonces $f(b) = 0$ y ciertamente $f(b) \in g(b) \cdot B$.

En el caso $g(b) \neq 0$. Supongamos que $Z = \frac{f(b)}{g(b)} \notin B$

donde B es un cerrado convexo pero no una vecindad de cero. Como B es cerrado escojamos una vecindad $\mathcal{U}$ de Z- tal que $\mathcal{U} \cap B = \emptyset$. Por la continuidad de la suma como $0 - 0 + Z = Z \in \mathcal{U}$ existe una vecindad V de cero-tal que $V-V+z \subset \mathcal{U}$. Si la topología de L es localmente convexa podemos escoger a V convexo.

Ahora $(z+V) \cap (B+V) = \emptyset$. Pues si la intersección no fuera vacia, existirian $v_1, v_2 \in V$ y $b \in B$ -- con $z + v_1 = b + v_2$ y $b = v_1 - v_2 + z \in V-V + z \subset \mathcal{U}$ contradicción al hecho de que $U \cap B = \emptyset$.

Entonces $z + V$ es una vecindad ajena de $B + V$ y entonces $z \notin \overline{B+V} = B^*$. El conjunto B^* es cerrado, convexo y una vecindad de cero y $B^* \supset B$.

Entonces las hipótesis del teorema se cumplen para - B^* y se tiene $f(b) \in g(b)$ B^*, es decir $z \in B^*$ en contradicción con $z \notin B^*$. Lo que termina la demostración del teorema.

COROLARIO 1.- Sea $g: L \longrightarrow M$, L, M e.v.t. . Sea g contínua en todos los puntos del segmento S que une a con $a + h$ y sea g diferenciable en todos los puntos de S salvo en un conjunto numerable D de ellos.

Sea B un conjunto cerrado y convexo de M y $\ell: L \to M$ lineal.

Entonces si

$g'(x,h) - \ell(h) \in B$ para $\forall\ x \in S-D$

se tiene que $g(a + h) - g(a) - \ell(h) \in B$.

Demostración.- Consideremos el caso $\ell = 0$.

Sea $f: [0,1] \longrightarrow M$ con $f(t) = g(a + th)$ $0 \leq t \leq 1$ entonces $df(t,h) = dg(a + th,h)$ y como $a + th \in S$ se tiene $df(t,h) \in B$ $\forall$ $t \in S-D$, entonces vale el teorema anterior y $f(1) - f(0) \in B$ que es lo que queríamos probar pues $g(a+h) - g(a) \in B$.

Si $\ell \neq 0$ lo reduciremos al caso anterior introduciendo $p: L \longrightarrow M$ con $p(x) = g(x) - \ell(x)$

Entonces $dp(x,h) = dg(x,h) - \ell(h)$ y aplicando el caso anterior se tiene $p(a+h) - p(a) \in B$ es decir $g(a+h) - g(a) - \ell(h) \in B$.

El teorema del valor medio que acabamos de probar considerado para espacios vectoriales normados basta escoger a B como la esfera unitaria para caer en el que llamamos para e.v. normados teorema del valor medio.

Entre las ventajas de este teorema están la de que no solo nos dice que si la velocidad no es "muy grande" entonces el desplazamiento no lo es tampoco, sino que además el término "grande" lo extiende al hecho de que $df(x,h)$ descanse en un conjunto convexo.