

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

SISTEMAS AUTONOMOS EN EL PLANO

TESIS



EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

XOCHILT PERALTA GARCIA

Director : Dr. Ruben Flores [

HERMOSILLO, SONORA.

22 de JULIO DE 1986.

- DEDICATORIA -

A mis padres
por su amor, confianza
y sacrificio

a mis hermanos,

a mis compañeras de la
generación por su apoyo.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi asesor de tesis DR. RUBEN FLORES ESPIAÑOZA por todas las atenciones prestadas para la elaboración de ésta tesis; al M en C. ARTURO FRAGOZO ROBLES por las observaciones aportadas a este trabajo.

Agradezco muy especialmente a mi compañera y amiga Lina - Morales por su ayuda prestada para la comprensión de algunos capítulos de este trabajo.

Y agradezco también a todas aquellas personas que colaboraron de una forma directa o indirectamente en la elaboración de mi tesis.

INTRODUCCION

Este trabajo consiste en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= G(x,y) \end{aligned}$$

que son llamados "sistemas autónomos en el plano", esto es, sistemas que no dependen del tiempo.

El estudio de las ecuaciones diferenciales se centra en la búsqueda de "soluciones" a la ecuación (1), para lo cual se han ido desarrollando métodos para encontrar soluciones explícitas, y que no en todos los casos es posible poder determinarlas.

Este trabajo tiene como objetivo mostrar otra forma de estudiar las soluciones de una ecuación diferencial, esto es, estudiar el comportamiento geométrico de las soluciones o también llamada "teoría cualitativa" de las ecuaciones diferenciales. Por lo tanto en el tipo de sistemas que vamos a estudiar tenemos la ventaja de poder dibujar las "trayectorias" que describen las soluciones, puesto que son sistemas en el plano.

La primera persona que vió a una ecuación diferencial desde el punto de vista de la geometría fué Poincaré, mediante investigaciones que hacía en mecánica celeste.

El hecho de estudiar el problema cualitativo, está en la dificultad que se pueda tener, al tratar de obtener soluciones explícitas a la ecuación diferencial. Además en muchos casos prácticos, el cálculo de soluciones explícitas es de menor importancia. Por ejemplo el "oscilador de Van der Pol", poco se sabe cuantitativamente de las soluciones, pero se conocen con detalle sus aspectos cualitativos más interesantes y estos son los que importan en la aplicación.

Estudiaremos distintos tipos de sistemas autónomos, como por ejemplo: los sistemas lineales, gradientes, hamiltonianos y el caso general de un sistema de la forma (1).

En el capítulo I, damos los conceptos más generales que se van a ir mencionando en cada uno de los capítulos subsecuentes.

En el capítulo II se tratan a los sistemas autónomos más sencillos: los "sistemas lineales", esto es cuando las funciones F y G son lineales, teniendo la siguiente representación:

$$\dot{x} = ax + by$$

$$\dot{y} = cx + dy$$

Estos sistemas son muy sencillos, puesto que se conoce la solución explícita y resulta que basta conocer las soluciones en vecindades cercanas al origen para poder determinar en forma global el comportamiento geométrico de la solución, es decir, en este capítulo clasificamos los distintos tipos de comportamiento geométrico que tienen las trayectorias del sistema.

En el capítulo III, se encuentra la parte central de este trabajo que es la "teoría de Poincaré-Béndinxon". Mediante esta teoría se hace un estudio general de los "sistemas autónomos en el plano", enunciados anteriormente. Se determinan el comportamiento de las soluciones del sistema a la larga, esto es, se estudian los "conjuntos límite" de las trayectorias, haciéndose énfasis en estos conjuntos, estudiando así sus principales propiedades y deduciendo de este el comportamiento que tendrán las trayectorias al aproximarse a estos conjuntos.

En este capítulo también se demuestra el teorema de Poincaré-Béndinxon en el cual se detecta la existencia de trayectorias periódicas en un sistema autónomo.

En los capítulos IV y V se estudian dos tipos particulares de sistemas autónomos, los cuales son llamados "sistemas conservativos", y los cuales tienen gran aplicación en la física. En el capítulo IV se definen los "sistemas gradiente" estudiando de ellos las propiedades cualitativas de las soluciones, teniéndose como resultados importantes que los conjuntos límites de sus trayectorias están formado por puntos críticos solamente concluyendo entonces que los sistemas gradiente no contienen soluciones periódicas pero si soluciones asintóticamente estables e inestables. Y por último en el capítulo V se encuentran los "sistemas hamiltonianos" de los cuales observamos que el comportamiento geométrico de las trayectorias es periódico y en el cual no se observan soluciones asintóticamente estables.

Al final de cada capítulo se dan algunos ejemplos para ilustrar la teoría expuesta en cada uno de ellos.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

PARA DE MIS FILIOS
DE GRANDEZA

INDICE

CAPITULO I

I. CONCEPTOS PRELIMINARES - - - - -	1
-------------------------------------	---

CAPITULO II

II. SISTEMAS LINEALES - - - - -	11
---------------------------------	----

CAPITULO III

III. TEORIA DE POINCARÉ-BENDIXSON- - - - -	34
--	----

CAPITULO IV

IV. SISTEMAS GRADIENTES - - - - -	57
-----------------------------------	----

CAPITULO V

V. SISTEMAS HAMILTONIANOS - - - - -	70
-------------------------------------	----

CAPITULO I

1. CONCEPTOS PRELIMINARES

DEFINICION 1.1:

SISTEMAS AUTONOMOS EN EL PLANO. A un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= G(x,y)\end{aligned}\quad (1)$$

donde el lado derecho no depende de la variable independiente t , es llamado un sistema autónomo en el plano. Donde se tiene que las funciones F y G están definidas en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, y satisfacen la condición de Lipschitz para x y y en alguna vecindad para cada punto de D .

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.

Bajo las condiciones de la definición anterior existe una solución de la forma:

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad (2)$$

tal que para un tiempo t_0 satisface:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

Donde $x(t), y(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, son continuas y contienen primeras derivadas continuas y satisfacen a (1).

Las soluciones (2) describen geométicamente curvas solución en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

DEFINICION 1.2:

TRAYECTORIAS DEL SISTEMA. A las imágenes de las curvas solución sobre $\mathbb{R}^2$ las llamaremos trayectorias y las denotaremos:

$$C: (x(t), y(t)), \quad -\infty < t < \infty \quad (3)$$

tal que para $t=t_0$ pasa por (x_0, y_0) .

Por lo tanto las trayectorias son también solución del sistema.

DEFINICION 1.3:

RETRATO FASE. Al conjunto de todas las imágenes de las curvas solución en $\mathbb{R}^2$ le llamaremos retrato fase del sistema.

PROPIEDAD 1.- Si $x(t), y(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ son soluciones de (1) entonces $x(t+t_0), y(t+t_0): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ son también soluciones de (1), para algún tiempo t_0 .

Demostración:

Si $x(t)$, $y(t)$ es solución de (1), entonces

$$\dot{x}(t) = F(x(t), y(t))$$

$$\dot{y}(t) = G(x(t), y(t)), \text{ lo satisface}$$

entonces

$$\dot{x}(t+t_0) = F(x(t+t_0), y(t+t_0)) = F(x(t), y(t))$$

$$\dot{y}(t+t_0) = G(x(t+t_0), y(t+t_0)) = G(x(t), y(t))$$

Es también solución puesto que el lado derecho de las ecuaciones no dependen del tiempo.

Por lo tanto distintas soluciones de (1) nos pueden representar a una misma trayectoria puesto que los sistemas son autónomos.

DEFINICION 1.4:

PUNTO CRITICO DEL SISTEMA. Un punto (x_0, y_0) es un punto crítico si el lado derecho de (1) es igual a cero esto es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x_0, y_0) = 0 \\ \dot{y} &= G(x_0, y_0) = 0\end{aligned}\tag{5}$$

Si (x_0, y_0) representa un punto crítico para (1) entonces:

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0.$$

representan soluciones constantes para el sistema. Todo punto que no sea crítico es llamado punto regular.

DEFINICION 1.5:

PUNTO CRITICO AISLADO. Un punto crítico (x_0, y_0) de (1) se dice aislado si existe una vecindad de (x_0, y_0) , dentro del cual no existen otros puntos críticos.

DEFINICION 1.6:

CAMPO VECTORIAL. Un campo vectorial esta definido por una función $V: R^2 \rightarrow R^2$ tal que para cada punto (x, y) :

$$V(x, y) = (F(x, y), G(x, y)) \quad (6).$$

Esto es para cada punto (x, y) está definido un vector V con componentes $F(x, y)$ y $G(x, y)$ horizontal y vertical respectivamente.

Definir el campo vectorial en un punto crítico del sistema se tiene que $V(x_0, y_0) = (0, 0)$ entonces el vector definido ahí es nulo, físicamente podemos representar al campo vectorial como un campo de velocidades en R^2 tal que si se deja caer una partícula esta lleva una velocidad definida por V en (x, y) y si la partícula se encuentra en un punto crítico

(x_0, y_0) se tiene que la velocidad de la partícula en ese punto es cero, o sea esta se encuentra en reposo.

DEFINICION 1.7:

PUNTO CRITICO ESTABLE. Sea $\bar{x}_0$ un punto crítico de (1). El punto $\bar{x}_0$ es estable si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y T , tal que si

$$|\bar{x}(T_0) - \bar{x}_0| < \delta \quad \text{entonces} \quad \forall t > T_0$$

Se tiene

$$|\bar{x}(t) - \bar{x}_0| < \epsilon.$$

Podemos decir en estos casos que cuando las trayectorias se aproximan a este tipo de puntos críticos, estas permanecen cercanas al punto $\bar{x}_0$, entonces se dice que el sistema es estable; en caso contrario el sistema es llamado no-estable.

DEFINICION 1.8:

PUNTO CRITICO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE. Si un punto crítico $\bar{x}_0$ es estable y además se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \bar{x}_0$$

entonces $\bar{x}_0$ es asintóticamente estable.

Por lo tanto todas las trayectorias del sistema se -
aproximan al punto crítico, entonces el sistema es asintóti-
camente estable.

DEFINICION 1.9:

PUNTO LIMITE. Un punto x^* es punto límite de una trayecto-
ria $C: \bar{x}(t)$, si existe una sucesión $\{t_{n \rightarrow \infty}\}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x}(t_n)) = x^*$$

En particular un punto crítico asintoticamente estable
es punto límite. Denotaremos por ω -límite a, puntos límite
para sucesiones con tiempos positivos y α -límite para suce-
siones con tiempos negativos.

DEFINICION 1.10:

CONJUNTOS LIMITE.

10.a) Conjunto $L_W(C)$: A todos los puntos límite de una tra-
yectoria $C: (x(t), y(t))$ $-\infty < t < \infty$, para sucesiones $t_{n \rightarrow \infty}$
son denotados por $L_W(C)$.

10.b) Conjunto $L_\alpha(C)$: Es el conjunto de puntos límite de una
trayectoria C para sucesiones $t_{n \rightarrow -\infty}$.

Tenemos que las trayectorias de las soluciones nunca se cortan, pero si pasa que para dos tiempos distintos estas coinciden entonces las trayectorias son periódicas.

DEFINICION 1.11:

TRAYECTORIA PERIODICA. Sean t_0 y t_1 dos tiempos distintos tal que:

$$x(t_0) = x(t_1) \quad y \quad y(t_0) = y(t_1)$$

y para todo t :

$$x(t_0 + t) = x(t_1 + t)$$

$$y(t_0 + t) = y(t_1 + t)$$

se tiene que la trayectoria es cerrada, entonces existe un período h donde es el menor número positivo tal que

$$x(t + h) = x(t) \quad y \quad y(t + h) = y(t)$$

por lo tanto la trayectoria es una trayectoria periódica.

CAMBIO DE COORDENADAS

Supongamos que un sistema de ecuaciones definen un campo vectorial $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y aplicando una transformación a ese campo queremos determinar que características tendrá el

nuevo campo vectorial y lo denotaremos por $\bar{V}: R^2 \rightarrow R^2$.

Supongamos una transformación $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que puntos $x \in R^2$ los transforma en puntos $x \in R^2$ y curvas $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in R^2$ en curvas $t \mapsto (\bar{\gamma}_1(t), \bar{\gamma}_2(t))$.

Supongamos además que $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ satisfacen a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= U(x, y) \\ \dot{y} &= W(x, y)\end{aligned} \quad (*)$$

puesto que:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= U(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ \dot{\gamma}_2 &= W(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\end{aligned}$$

aplicando a las curvas la transformación T tenemos que

$$t \mapsto (T_1(\gamma_1, \gamma_2), T_2(\gamma_1, \gamma_2)) = (\bar{\gamma}_1(t), \bar{\gamma}_2(t)) \quad (**)$$

determinamos el campo vectorial $\bar{V}$ diferenciando $(**)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\gamma}}_1(t) &= \frac{\partial T_1(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial x} \cdot \dot{\gamma}_1 + \frac{\partial T_1(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial y} \cdot \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\bar{\gamma}}_2(t) &= \frac{\partial T_2(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial x} \cdot \dot{\gamma}_1 + \frac{\partial T_2(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial y} \cdot \dot{\gamma}_2 \text{ de donde:}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}_1 \\ \dot{\bar{y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} & \frac{\partial T_1}{\partial y} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} & \frac{\partial T_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} \quad (***)$$

Por lo tanto la primera matriz de lado derecho de la ecuación (***) es el jacobiano de la transformación T , entonces el nuevo campo vectorial $\bar{V}$ está determinado por el sistema (*) que determina el campo V solo que multiplicada por un factor que es la matriz jacobiana de T . Utilizaremos este cambio de coordenadas en los sistemas de ecuaciones para facilitar la resolución del sistema.

En la teoría geométrica de las ecuaciones diferenciales se distinguen tres tipos de espacio llamados espacios de fase o estados del sistema:

- I) Espacio de la variable t : el cual es R , la recta real.
- II) Espacio de las variables dependientes $x(t), y(t)$: el cual es R^2 , el plano.
- III) Espacio de las soluciones $(t, x(t), y(t))$: que es el espacio producto $R \times R^2 = R^3$, donde se dibujan las curvas solución de (1).

DEFINICIÓN 1.12:

INTEGRAL PRIMERA. Una función $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de valores reales es una integral primera de un sistema de la forma (1) si es constante sobre sus soluciones y no es constante sobre abiertos.

Esto es si $x(t), y(t)$ son soluciones entonces

$$H(x(t), y(t)) = K \quad (K = \text{constante})$$

$$\text{y } \frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = 0 = \nabla H \cdot F(x(t)).$$

CAPITULO II

II. SISTEMAS LINEALES

DEFINICION 2.1

SISTEMAS LINEALES. Un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= G(x,y)\end{aligned}\quad (1)$$

donde F y G son funciones lineales definidas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ es llamado un sistema lineal.

Las funciones F y G son de la forma:

$$\begin{aligned}F(x,y) &= ax+by+a_0 \\ G(x,y) &= cx+dy+b_0\end{aligned}\quad (2)$$

donde a, b, c, d, a_0 y b_0 son constantes, y si $a_0=b_0=0$ entonces (1) se dice que es homogéneo.

Los sistemas que serán considerados en este capítulo serán de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax+by \\ \dot{y} &= cx+dy\end{aligned}\quad (3)$$

Con $ad-cb \neq 0$, como único punto crítico $(0,0)$.

A partir de este punto crítico del sistema, se obtiene una solución para el sistema que es de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &\equiv 0 \\ y(t) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Donde las soluciones son constantes y la representación geométrica de las curvas solución en R^3 consiste en una recta que en este caso es el eje t , que al proyectarse en R^2 el retrato fase consiste en un punto.

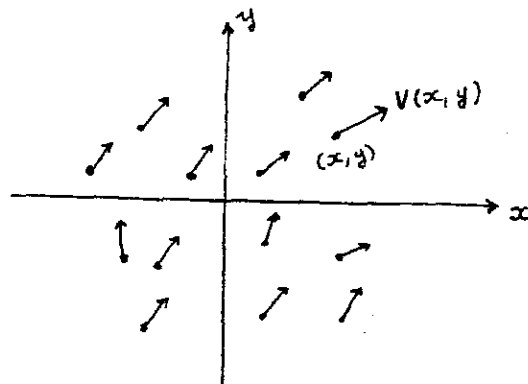
Este tipo de soluciones del sistema no serán considerados, además ninguna otra curva atraviesa ese punto, lo único que se puede esperar de las trayectorias es de que se aproximan o alejen de él.

El estudio de los sistemas de la forma (3) consistirá principalmente en mostrar el retrato fase de las soluciones, esto es estudiar la teoría geométrica de las soluciones.

El estudio del retrato fase de las soluciones de (3) se harán alrededor de los puntos críticos, y según el comportamiento que tengan através de estos puntos se clasifican en puntos: nodo, silla, centros y focos.

2.2. CAMBIO DE COORDENADAS

El sistema $\dot{x} = Ax$ (forma vectorial de (3)) define un campo de vectores en R^2 , para cada punto $(x,y) \in R^2$ define un vector con componentes $V(x,y) = (ax+by, cx+dy)$.



Sea $\gamma(t)$ una curva en R^2 tal que $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$ satisface al sistema, sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ una transformación que al aplicar lo a $\gamma(t)$ se obtiene:

$$T(\gamma(t)) = \delta(t)$$

otra curva en R^2 ; ¿qué campo de vectores define esta nueva curva en R^2 ? diferenciando entonces a $\delta(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\delta}(t) &= T(\dot{\gamma}(t)) \\ &= TA(\gamma(t)) \\ &= TAT^{-1}(\gamma(t)) \\ &= TAT^{-1}(\delta(t))\end{aligned}$$

$$\therefore \dot{\delta}(t) = B\delta(t) \quad , \quad B = TAT^{-1}$$

Por lo tanto cada vector $\delta(t)$ tiene nuevas coordenadas que dependen de TAT^{-1} que en el caso de los vectores $\gamma(t)$ dependían solamente de A . Ahora la nueva matriz TAT^{-1} transforma al sistema (3) en un sistema que es equivalente a este, llamado este nuevo sistema "Sistema Equivalente" expresado en forma canónica.

Todas las representaciones canónicas que puede adquirir (3) a través de la transformación a la que es sometido las enunciaremos a continuación al obtener sus soluciones.

2.3. OBTENCION DE LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA

Sea

$$\dot{x} = ax + by$$

$$\dot{y} = cx + dy$$

con $ad - cb \neq 0$. El único punto crítico es $(0,0)$.

Existe una ecuación característica asociada al sistema:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0$$

quedando la ecuación: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (6)

donde:

$$p = a+d$$

$$q = ad - cb$$

cuyos valores característicos a la ecuación son λ_1 y λ_2 . A partir de estos valores obtendremos las formas canónicas del sistema cuyas soluciones serán más sencillas de calcular.

Tenemos de (6) que las soluciones λ_1 , λ_2 pueden estar en los siguientes casos:

CLASIFICACION DE LOS PUNTOS CRITICOS

CASO I. λ_1, λ_2 reales y distintas

(a) λ_1 y λ_2 del mismo signo,

(b) λ_1 y λ_2 diferente signo.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS DIOS
DA LA VERDADERA GRANDEZA

CASO II. Raíces λ_1 y λ_2 repetidas

(a) El rango de $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ es cero.

(b) El rango de $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ es uno.

CASO III. λ_1, λ_2 raíces complejas

(a) λ_1, λ_2 complejas puras.

(b) λ_1, λ_2 complejas conjugadas.

FORMAS CANONICAS DEL SISTEMA

Las formas canónicas de (3) que están expresadas en la transformación TAT^{-1} son las siguientes:

$$1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}$$

La forma canónica 1) corresponde al caso I, la forma 2) y 3) para el caso II y 4) para el caso III.

Soluciones:

Por lo tanto el sistema de ecuaciones (3) escrita en forma canónica tiene la siguiente representación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y\end{aligned}\quad (7)$$

cuya solución se obtiene por un simple proceso de integración, obteniéndose con esto

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda_2 t}\end{aligned}\quad (8)$$

y cuya solución general es

$$\begin{aligned}x(t) &= AC_1 e^{\lambda_1 t} + BC_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= CC_1 e^{\lambda_1 t} + DC_2 e^{\lambda_2 t}\end{aligned}\quad (9)$$

Las soluciones (8) son soluciones equivalentes al sistema (3) y las soluciones originales de este son obtenidas al quedar determinadas en (8) el valor de las constantes A, B, C y D.

2.4 RETRATO FASE

PUNTOS NODOS.

Consideraremos el caso I.(a) de la clasificación hecha anteriormente de los valores λ_1 y λ_2 . Tomaremos $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Obtendremos la ecuación de las trayectorias a partir de (8)

analizaremos estas soluciones para los tiempos cuando $t \rightarrow \infty$ ó $t \rightarrow -\infty$. Encontrando así el retrato fase para el caso I(a).

RETRATO FASE:

La ecuación de las trayectorias se obtiene de la siguiente forma: eliminando "t" de (b)

$$\frac{x}{c_1} = e^{\lambda_1 t}$$

$$\frac{y}{c_2} = e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 \log \frac{x}{c_1} = \lambda_1 \log \frac{y}{c_2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{y}{c_2}\right)^{\lambda_1}$$

$$\therefore y = cx^{\lambda_2/\lambda_1} \text{ donde } \frac{c_2}{c_1^{\lambda_2/\lambda_1}} = C \text{ y } \lambda_2/\lambda_1 > 1. \text{ (d)}$$

La ecuación encontrada de las trayectorias determinan parábolas con centro en el origen. Haciendo un análisis de las soluciones (b) obtenidas tenemos:

I) Las trayectorias se aproximan hacia el origen cuando

$t \rightarrow \infty$ puesto que λ_1 y $\lambda_2 < 0$ entonces:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$$

$$y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$$

II) El cociente $\frac{y}{x} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ esto implica que las trayectorias son tangentes al eje "x".

III) De la ecuación (d) tenemos que si $x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0$ y viceversa.

IV) Por lo tanto todas las trayectorias se aproximan al origen tangentes al eje "x", además las trayectorias através de los ejes también se dirigen hacia el origen obteniéndose estas últimas trayectorias cuando algunas de las constantes C_1 ó C_2 son cero. En este caso cuando todas las trayectorias se dirigen al punto crítico el sistema es asintóticamente estable y el punto un *NODO*.

Gráfica del Retrato Fase:

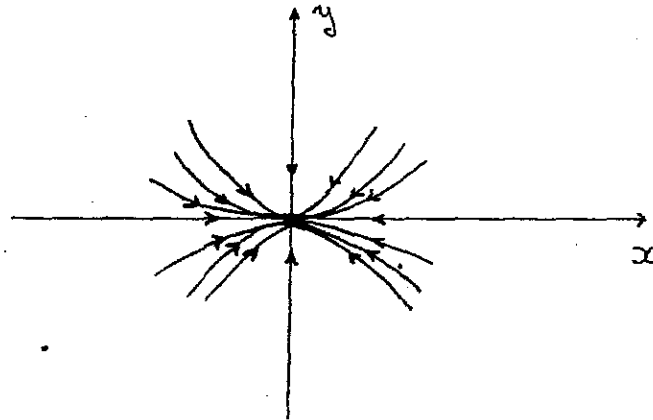


FIG. 1.

Tomando como base la solución general (9) para obtener

el retrato fase del sistema, se observa lo siguiente:

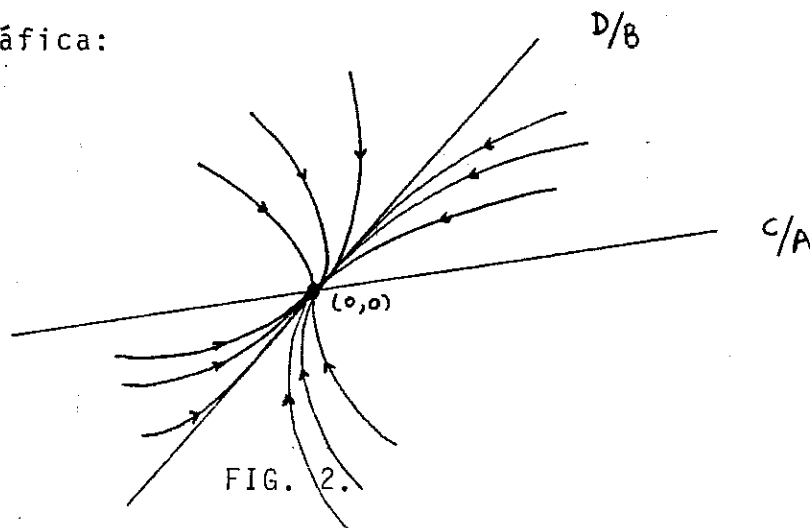
I) Todas las trayectorias entran al origen puesto que cuando $t \rightarrow \infty \implies x \rightarrow 0$ y $y \rightarrow 0$.

II) Las trayectorias entran al origen con pendiente $\frac{D}{B}$ y $\frac{C}{A}$ esto se deduce de lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{CC_1 e^{\lambda_1 t} + DC_2 e^{\lambda_2 t}}{AC_1 e^{\lambda_1 t} + BC_2 e^{\lambda_2 t}} \cdot \frac{C_2 e^{\lambda_2 t}}{C_2 e^{\lambda_2 t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{D + \frac{C_1 C}{C_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}}{B + \frac{C_1 A}{C_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}} = \frac{D}{B} \end{aligned}$$

lo mismo para $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C}{A}$.

El retrato fase obtenido tiene la siguiente representación gráfica:



cuya configuración es equivalente a la obtenida anteriormente observando la FIG. 1. Se observa que la solución original del sistema (3) es la que se muestra en la FIG. 2. y bajo la transformación a la que es sometida se obtienen soluciones equivalentes cuyas configuración están mostradas en la FIG. 1. por lo que podemos decir que las soluciones dadas en (8) nos sirven como soluciones a nuestro sistema original.

En el caso 1.(a) se tiene un segundo caso cuando $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Para este problema el retrato fase de las soluciones es la misma que el caso anterior con $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, solo que ahora las trayectorias son tangentes al eje "y" y el punto crítico representa un nodo asintóticamente estable.

Gráfica del Retrato Fase:

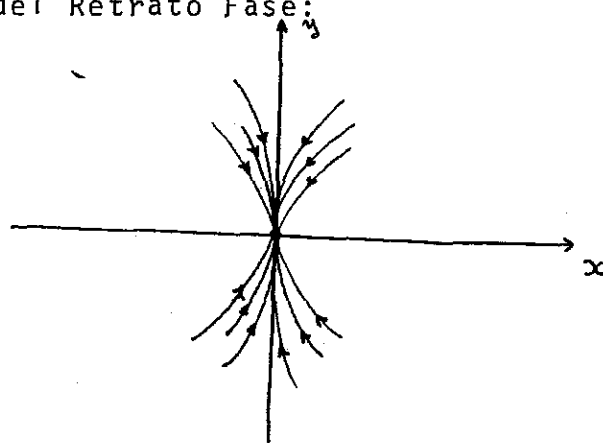


FIG. 3.

para el caso I.(a) tenemos

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0.$$

RETRATO FASE.

El retrato fase de las trayectorias es igual al caso 1.1.a) solo que el sentido de las flechas es hacia afuera. En este caso el punto crítico es un NODO inestable puesto que todas las trayectorias se dirigen hacia el infinito.

Gráfica del Retrato Fase:

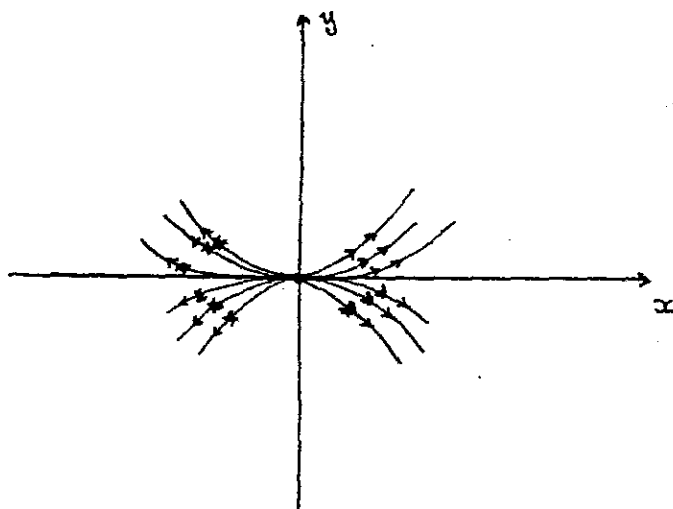


FIG. 4.

PUNTOS SILLA

Caso I.(b) λ_1, λ_2 reales y distinto signo.

Sea $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Las soluciones para este caso son las mismas a (8) esto es:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (e)$$

RETRATO FASE:

La ecuación de las trayectorias:

$$y = c x^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \lambda_2/\lambda_1 < 0 \quad (f)$$

esto implica que la ecuación (f) da curvas hiperbólicas. Haciendo el análisis geométrico de las ecuaciones (e) y (f) para tiempos al infinito:

I) Cuando $t \rightarrow \infty$ esto implica $x(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow \infty$, se observa con esto que las trayectorias se aproximan al origen atr
vés del eje "x" y se van alejando hacia el infinito através
del eje "y".

II) De (f) tenemos que si $x(t) \rightarrow 0 \rightarrow y(t) \rightarrow \infty$ y si $y(t) \rightarrow 0$
 $\Rightarrow x(t) \rightarrow \infty$.

III) Las trayectorias son tangentes al eje "y" puesto que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow \infty$, con esto podemos decir que las trayectorias se alejan al infinito tangentes al eje "y".

IV) Si las constantes C_1 y C_2 son iguales a cero al menos una, entonces $x(t)$ y $y(t)$ son trayectorias sobre los semiejes tal que:

"si $C_1 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ y $y(t) \rightarrow \infty$, trayectorias al infinito", ó

"si $C_2 = 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow \infty$ y $y(t) = 0$, trayectorias al origen".

Gráfica del Retrato Fase:

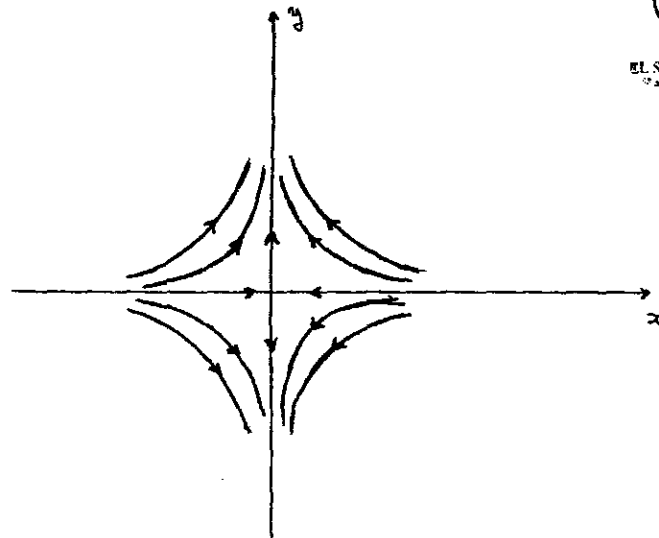


FIG. 5.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MÁS VALOR
POR SU GRANDEZA

El punto crítico en $I_0(b)$ representa un punto silla el cual es inestable.

Para el caso donde $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, intercambiando los valores característicos de $I_0(b)$ la representación del retrato fase

es el mismo solo intercambiando los ejes. La representación es la siguiente:

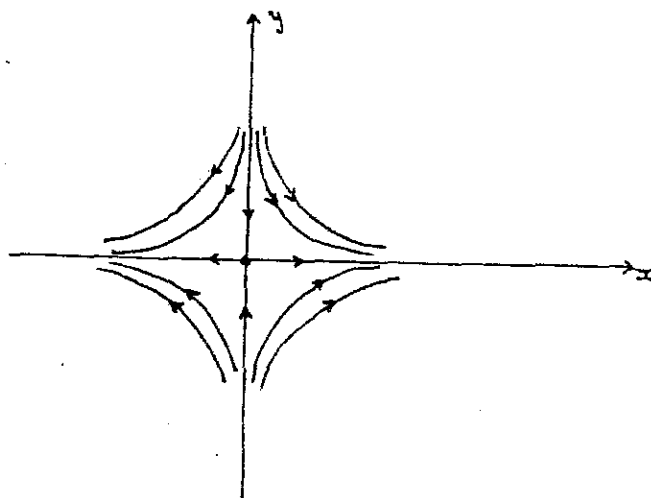


FIG. 6.

PUNTOS NODOS DEGENERADOS

Caso II. Reales e iguales: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Caso II.(a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ rango cero.

Soluciones del sistema:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Ecuación de las trayectorias:

$$y = C x^{\lambda_2 / \lambda_1} , \lambda_2, \lambda_1 < 0$$

Por lo tanto la ecuación de las trayectorias representan rectas que se aproximan al origen. El punto crítico representa un nodo asintóticamente estable.

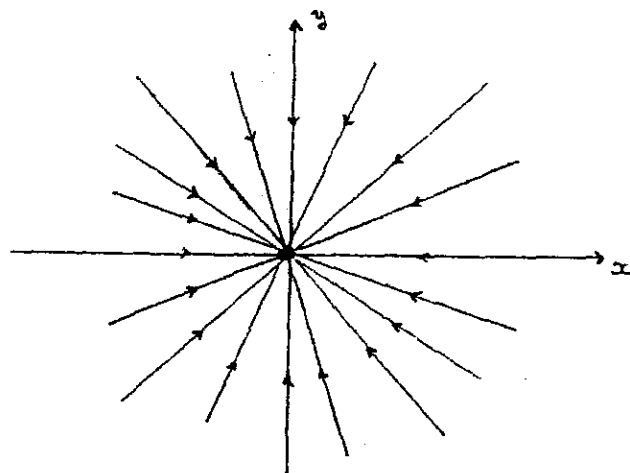


FIG. 7.

Si tenemos el caso donde $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, la representación del retrato fase de las soluciones será el mismo que el de la FIG. 7. con el sentido de las flechas hacia fuera. El punto crítico es un nodo inestable.

CASO. II.(b)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ rango uno, } \lambda_1 = \lambda_2 < 0.$$

El sistema de ecuaciones equivalentes será:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + y \\ \dot{y} &= y \end{aligned} \quad (g)$$

la solución de la segunda ecuación es inmediata

$$y(t) = C_3 e^{\lambda t}$$

y la solución de la primera es de la forma:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

existe una relación entre, las constantes C_2 y C_3
derivando $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \lambda C_1 e^{\lambda t} + \lambda C_2 t e^{\lambda t} + \lambda C_2 e^{\lambda t} \quad (h)$$

$$\dot{x} = \lambda [C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}] + C_2 e^{\lambda t}$$

igualando (g) y (h)

$$\lambda [C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}] + C_2 e^{\lambda t} = \lambda x + y$$

$$\Rightarrow y = C_2 e^{\lambda t} \text{ y como } y = C_3 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow C_2 = C_3$$

por lo tanto la solución de (g) es de la siguiente manera:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \quad (i)$$

$$y(t) = C_2 e^{\lambda t}$$

RETRATO FASE.

I) Si $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$ y $y(t) \rightarrow 0$.

II) $\lim_{t \rightarrow \infty} y/x = 0$, puesto que $y/x = \frac{C_2}{C_1 + C_2 t} \Rightarrow$ las trayectorias son tangentes al eje "x".

III) Si $C_2 = 0$ y $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ las trayectorias sobre el eje "x" tendiendo a cero puesto que:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} \text{ como } \lambda < 0$$

$$\Rightarrow x(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

IV) La ecuación de las trayectorias se obtiene de la siguiente manera: despejando "t" de la segunda ecuación de (i):

$$y = C_2 e^{\lambda t}$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln y/C_2$$

sustituyendo en la primera ecuación de (i)

$$x = (C_1 + C_3 \ln C_4 y) e^{\lambda t}, \text{ donde } C_2 \cdot \frac{1}{\lambda} = C_3$$

$$y/C_2 = C_4 y$$

$$\therefore x = (C_1 + C_3 \ln C_4 y) y/C_2, \text{ ECUACION DE LAS TRAYECTORIAS.}$$

Representando gráficamente el retrato fase de las trayectorias:

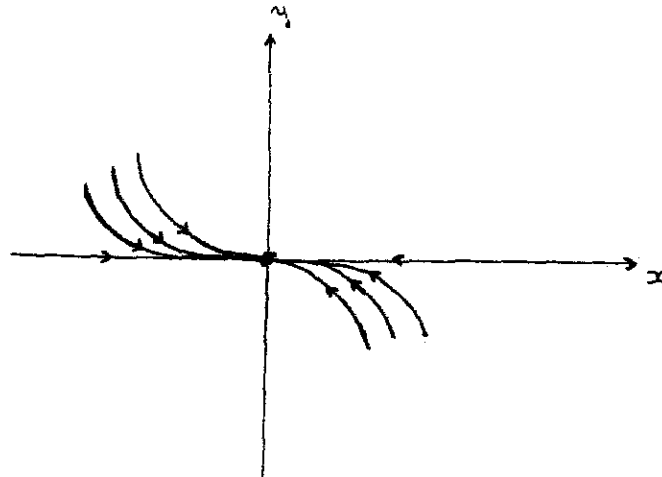


FIG. 8.

En este caso el punto crítico representa un nodo asintóticamente estable.

Para el caso $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ el retrato fase es el mismo que el caso anterior solo cambiando el sentido de las flechas de la FIG. 8 todas hacia fuera.

PUNTOS CENTRO

Caso III. λ_1, λ_2 complejas.

Caso III.(a). λ_1, λ_2 complejas puras. Las raíces características son de la forma $\lambda_1 = \alpha i, \lambda_2 = -\alpha i$. Las soluciones al sistema son de la forma

$$x(t) = C_1 e^{ait}$$

$$y(t) = C_2 e^{-ait}$$

Encontrando estas soluciones en términos de "senos" y "cosenos":

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 (\cos at + i \sin at) \\ y(t) &= C_2 (\cos at - i \sin at) \end{aligned} \quad \text{tomando } C_1 = C_2 = 1$$

sea

$$x_2(t) = \frac{x+y}{2} ; \quad y_2(t) = \frac{x-y}{2i}$$

una solución linealmente independiente se tiene:

$$x_2(t) = \cos at$$

$$y_2(t) = \sin at$$

encontrando con esta segunda solución la ecuación de las trayectorias tenemos:

$$x_2^2 + y_2^2 = \cos^2 at + \sin^2 at$$

$$\implies x_2^2 + y_2^2 = C^2, \text{ ECUACION DE LAS TRAYECTORIAS,}$$

cuya ecuación demuestra que las curvas son círculos con centro en (0,0) y radio C. En este caso el punto crítico es un

centro esto es todas las curvas son vecindades a $(0,0)$. Las curvas solución en el sistema original representan elipses con centro en $(0,0)$.

El sentido que siguen las trayectorias en el retrato fase dependen de las siguientes constantes: " b " y " c " que son las constantes de nuestro sistema original (3), el sentido de las flechas es el signo que le corresponde a la constante " c ", esto es si " c " es positiva el sentido es contrario al de las manecillas del reloj; o si $c=0$ entonces el sentido de las flechas se tomará del sentido contrario al de - " b ".

Gráfica de la geometría de las soluciones:

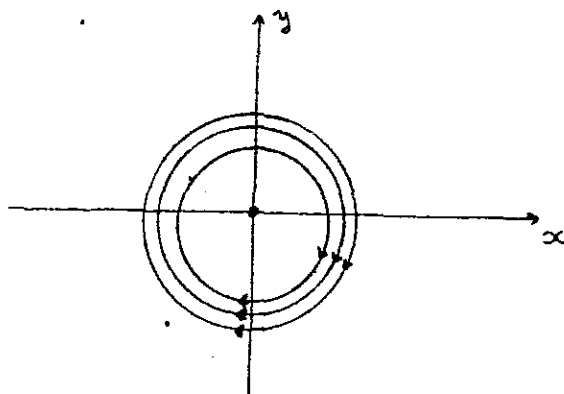


FIG. 9.

Por último tenemos el caso III.(b).

PUNTOS FOCO.

Caso III.(b) λ_1, λ_2 complejas conjugadas.

las soluciones son:

$$x(t) = C_1 e^{(\beta + \alpha i)t}$$
$$y(t) = C_2 e^{(\beta - \alpha i)t}$$

Representaremos estas soluciones en términos de "senos" y "cosenos".

RETRATO FASE.

$$x(t) = C_1 e^{\beta t} (\cos \alpha t + i \sin \alpha t)$$
$$y(t) = C_2 e^{\beta t} (\cos \alpha t - i \sin \alpha t)$$

Sean $x^*(t)$ y $y^*(t)$ nuevas representaciones de estas soluciones:

$$x^*(t) = e^{\beta t} \cos \alpha t$$
$$y^*(t) = e^{\beta t} \sin \alpha t$$

Las curvas son espirales logarítmicas alrededor del origen el equilibrio es denotado un punto focal o espiral.

"Si $\beta < 0$ las espirales se van acercando al origen"

"Si $\beta > 0$ las espirales se tienden al infinito".

el sentido de las flechas dependen de la constante "c" del

sistema original.

La representación geométrica de las soluciones es la siguiente:

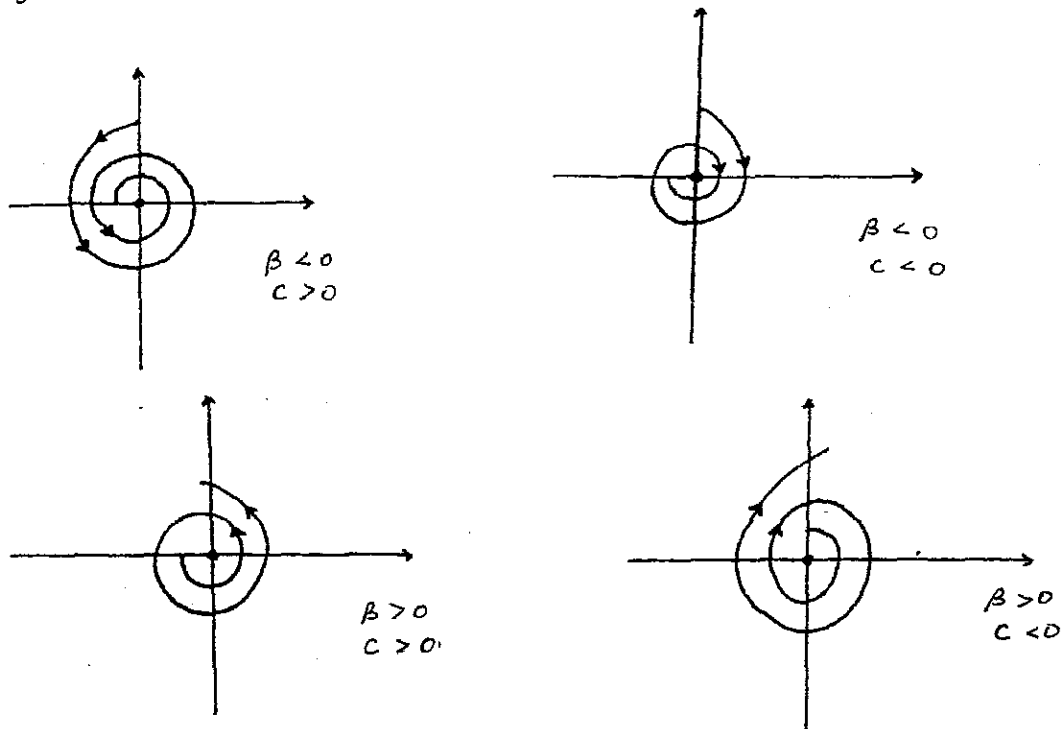


FIG. 10.

La interpretación geométrica del comportamiento de las soluciones de los sistemas autónomos lineales queda sintetizada de la siguiente manera:

- (1) λ_1, λ_2 reales y del mismo signo: punto nodo
- (2) λ_1, λ_2 reales y de signo opuesto: punto silla
- (3) λ_1, λ_2 complejas puras: punto centro
- (4) λ_1, λ_2 complejas: punto espiral.

CAPITULO III

III. TEORIA DE POINCARÉ-BENDIXSON

3.1 INTRODUCCION

Seguimos con el estudio de los sistemas autónomos en el plano definidos de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= G(x,y)\end{aligned}\tag{1}$$

El objetivo de la teoría de Poincaré-Bendixon es estudiar el comportamiento de las soluciones de (1) a la larga, esto es para tiempos infinitos mediante métodos geométricos.

Estudiaremos las trayectorias que describe el sistema (1) que forma el retrato fase de las soluciones en $D \subset \mathbb{R}^2$. Y una trayectoria la denotaremos por $C: (x(t, x_0), y(t, y_0))$, $-\infty < t < \infty$ tal que está definida para todo tiempo, y para un tiempo $t=t_0$ pasa por el punto (x_0, y_0) .

HIPOTESIS 3.1. Supondremos que la trayectoria C se encuentra en una región acotada $R \subset D$.

Denotaremos a C' como el conjunto de puntos límite de la trayectoria C y sea (x^*, y^*) un punto límite de C siempre que exista una sucesión $\{t_n\} \rightarrow \infty$ tal que $\{x(t_n, x_0), y(t_n, y_0)\} \rightarrow (x^*, y^*)$. Sea $L_\omega(c)$ el conjunto de puntos límites de C para $t \rightarrow \infty$ y puntos

límites para $t \rightarrow -\infty$ como $L_{\alpha}(C)$, esto es para sucesiones de tiempos negativos.

Cada sucesión de puntos $\{x(t_n, x_0), y(t_n, y_0)\}$ contenida en la región R , contiene una subsucesión convergente.

Tenemos entonces que las trayectorias tienden hacia esos conjuntos límite, entonces podríamos decir, si conocemos o de terminamos a esos conjuntos límite podremos determinar el com portamiento de las trayectorias a la larga.

Trabajaremos con puntos límite de una trayectoria C para sucesiones de tiempos positivos, esto es el conjunto $L_{\omega}(C)$ y lo denotaremos C' . Empezaremos entonces con el estudio de estos conjuntos límite que es precisamente lo que desarrolla la teo ría de Poincaré-Bendixon.

El sistema (1) contiene dos clases de puntos que son los puntos críticos y los puntos regulares, los primeros es cuando sucede que el lado derecho de las ecuaciones diferenciales de (1) se anulan, esto es (x_0, y_0) es un punto crítico si $\dot{x} = F(x_0, y_0) = 0$ y $\dot{y} = G(x_0, y_0) = 0$ y todo punto que no sea crítico es llamado punto regular.

Mostraremos a continuación las propiedades que contienen los conjuntos límite C' .

3.2. PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS LIMITE C'

3.2.1 CERRADOS Y ACOTADOS.

3.2.2 CONEXOS

3.2.3 INVARIANTES.

3.2.1 CERRADOS Y ACOTADOS.- Sea $d[M, N]$ la distancia entre los puntos de los conjuntos M y N , y tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d[(x(t), y(t)); C'] = 0$$

Demostración: Supongamos $\{A_n\}$ una sucesión de puntos de C' tal que convergen a un punto $A \notin C'$. Entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n \rightarrow \infty}$, donde $t_n > n$, y

$$d[(x(t_n), y(t_n)); A_n] < 1/n.$$

pero los A_n 's tienden a A entonces la sucesión $\{x(t_n), y(t_n)\} \rightarrow A$, y por lo tanto $A \in C'$ y C' es cerrado.

El conjunto C' es acotado puesto que las trayectorias C se encuentran acotadas.

3.2.2 CONEXOS.- Supongamos que C' es no conexo. Entonces podemos representar a C' como una suma de dos conjuntos, disjuntos y no nulos M y N , es decir

$$C' = M+N \quad ; \quad M \cdot N = 0 \quad ; \quad M, N \neq \emptyset$$

M y N son subconjuntos disjuntos, cerrados y acotados, entonces entre ellos existe una distancia δ . Ahora, existe una sucesión monótona $\{t_n\} \rightarrow \infty$ tal que

$$\text{para } n\text{-par} \quad d[\{(x(t_n), y(t_n))\} ; M] < \delta/4$$

$$\text{para } n\text{-impar} \quad d[\{(x(t_n), y(t_n))\} ; N] < \delta/4.$$

Por la continuidad de $(x(t), y(t))$ existe una sucesión $\{t'_n\}$ tal que $t_{2n-1} < t'_n < t_{2n}$; $n=1, 2, \dots$, $d[\{(x(t'_n), y(t'_n))\} ; M] = d[\{(x(t'_n), y(t'_n))\} ; N]$ entonces

$$d[\{(x(t'_n), y(t'_n))\} ; M+N] \geq \delta/2 \quad (*)$$

pero la sucesión de puntos $\{(x(t'_n), y(t'_n))\}$ contiene una subsucesión que converge a un punto límite $(\bar{x}, \bar{y}) \in C'$ pero de

(*) se tiene que

$$d[(\bar{x}, \bar{y}); M+N] \geq \delta/2.$$

lo cual es una contradicción puesto que $C' = M+N$.

3.2.3 INVARIANTE.- La trayectoria T que pasa por un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in C'$ está totalmente contenida en C' .

Demostración: Sea $T: (x(t, \bar{x}), y(t, \bar{y}))$ la trayectoria tal que para $t=0$, $(x(0, \bar{x}), y(0, \bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y})$.

Sea $\{t_n\}_{n \rightarrow \infty}$ una sucesión tal que puntos de una trayectoria $C: (x(t, x_0), y(t, y_0))$ con

$$(x(t_n, x_0), y(t_n, y_0)) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}).$$

Tomemos una nueva representación de C y determinemos a donde convergen los siguientes puntos $\{(x(t_n + t_0, x_0), y(t_n + t_0, y_0))\}$ se tiene:

$$(x(t_n + t_0, x_0), y(t_n + t_0, y_0)) = [x(t_0, (x(t_n, x_0))), y(t_0, (y(t_n, y_0)))] \rightarrow (x(t_0, \bar{x}), y(t_0, \bar{y}))$$



pero este punto está en la trayectoria T y es un punto límite de C' por lo tanto $T \subset C'$.

Por lo tanto hemos demostrado las propiedades con que cuentan los conjuntos límite de una trayectoria C' . Veamos ahora en que forma pueden ser clasificados estos conjuntos límite.

La clasificación de C' la haremos en base al tipo de puntos que puede tener el sistema (1) ya sea regulares o críticos.

HIPOTESIS 3.2. Los puntos críticos son aislados.

3.3 CLASIFICACION DE LOS CONJUNTOS LIMITE C' .

3.3.1 C' CONTIENE SOLAMENTE PUNTOS CRITICOS

3.3.2 C' CONTIENE SOLAMENTE PUNTOS REGULARES

3.3.3 C' CONTIENE PUNTOS REGULARES Y PUNTOS CRITICOS.

3.3.1 C' CONTIENE SOLAMENTE PUNTOS CRITICOS.

TEOREMA 3.1. Si C' contiene un punto crítico A y no contiene puntos regulares, entonces C' consiste solamente de A , tal que la trayectoria C se aproxima cuanto $t \rightarrow \infty$.

Demostración: Como C' contiene solamente a A y no contiene puntos regulares, y C' debe ser conexo, entonces el conjunto límite de C consiste en un solo punto el cual es A y las trayectorias C se aproxima a A cuando $t \rightarrow \infty$.

Una clase particular de sistemas autónomos con este tipo de conjuntos límite son los sistemas lineales, tal que cuando los valores característicos λ_1, λ_2 asociados al sistema son reales y negativos, o cuando λ_1 y λ_2 son raíces complejas conjugadas con parte real negativa; en estos casos tenemos que el punto crítico $(0,0)$ es el punto límite de una trayectoria C del sistema lineal.

TEOREMA DE POINCARÉ BENDIXSON

3.3.2 C' CONTIENE SOLAMENTE PUNTOS REGULARES.

TEOREMA 3.2 Si C' contiene solamente puntos regulares entonces C' es una trayectoria periódica tal que:

- 1) Si C es periódica entonces $C=C'$
- 2) Si C no es periódica, entonces C se aproxima a C' espiralmente por adentro o por afuera.

Demostración:

Sea C' una trayectoria periódica, puesto que es una trayectoria donde todos sus puntos son regulares, mostraremos que la trayectoria C se aproxima espiralmente a C' o C es igual a C' . Definiremos primero lo que es un segmento sin con

tacto, que servirá como base para nuestra demostración.

Definición 3.1 Un segmento sin contacto L por un punto regular A es una recta finita, cuya dirección es perpendicular al campo vectorial V definido en A . Además todo punto de L es un punto regular de V .

Geométricamente tenemos a un segmento sin contacto L y el campo V al pasar através del punto regular A , fig. a.

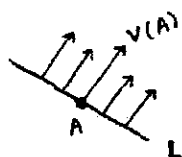


Fig. a.

El campo vectorial sobre L no difiere mucho de la dirección de $V(A)$ y esto se sigue por la continuidad del campo; además se tiene que todas las trayectorias que intersectan a L lo atraviesan en la misma dirección.

Supongamos que el conjunto límite C' atraviesa e intersecta en un punto A a un segmento sin contacto, la pregunta que nos planteamos es la siguiente: ¿qué comportamiento tendrá la trayectoria C cuando se aproxime a ese punto límite A ?, pero antes de respondernos a esta pregunta en la siguiente parte mostraremos una de las propiedades que con-

tienen los segmentos sin contacto.

PROPIEDAD 3.1 Sea A un punto interior de L . Entonces existe $\epsilon > 0$ y una vecindad V_ϵ con centro en A , tal que cada trayectoria que atraviesa a V_ϵ para $t=0$ intersecciona a L para un tiempo t finito, cercano a cero.

Demostración. Sea $A=(0,0)$ el origen del plano xy y L un s.s.c sobre el eje x . Las soluciones $(x(t, (x_0, y_0)), y(t, (x_0, y_0)))$ de

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y)$$

son continuas y contienen primeras derivadas continuas en alguna vecindad $V_\epsilon(0,0)$. Entonces por el teorema de la función implícita, $y(t, (x_0, y_0)) = 0$ tiene una solución única para $t=t(x_0, y_0)$ en $V_\epsilon(0,0)$ para algún punto $(x_0, y_0) \in V_\epsilon(0,0)$, puesto que en $(0,0)$ y $(t, (0,0))=0 \implies t=0$ y $\partial y / \partial t(0, (0,0)) \neq 0$ (por definición del segmento L), por lo tanto existe una vecindad en $(0,0)$ suficientemente pequeña tal que para $(x_0, y_0) \in V_\epsilon(0,0)$ se tiene en un tiempo $t=t_0$ que $y(t_0, (x_0, y_0)) = 0$.

Lema 3.1 Sea $A \in C'$ el cual es un punto regular. Entonces si L es un segmento sin contacto atravesando A , existe una sucesión monótona $\{A_n\} = \{x(t_n), y(t_n)\}$ que son precisamente las intersecciones de C y L . Si $A_1 = A_2$ entonces $A = A_n$ ($n=1,2,\dots$) y C

es una trayectoria periódica. Si $A_1 \neq A_2$ entonces todos los A_n 's son distintos y A_{n+1} está entre A_n y A_{n+2} , ($n=1,2,\dots$).

Demostración: El punto A es un punto límite de C tal que existe un segmento sin contacto L que lo atraviesa, entonces para cada vecindad de A existen puntos de C para tiempos suficientemente grandes, y por la propiedad anterior C intersecciona a L en puntos $\{A_n\}$. Tenemos que si la primera intersección A_1 es igual a A_2 entonces C es periódica y como A es un punto límite se tiene que $A_n = A$ ($n=1,2,\dots$), en este caso tenemos que C está totalmente contenida en C' por la propiedad de invarianza de los conjuntos C' . Supongamos ahora que $A_1 \neq A_2$ y C no intersecciona a L para un tiempo $t_1 < t < t_2$. Podemos formar una curva cerrada simple T de Jordan con el arco de trayectoria $\widehat{A_2 A_1}$ y el segmento $\overline{A_1 A_2}$, entonces T divide al plano en dos

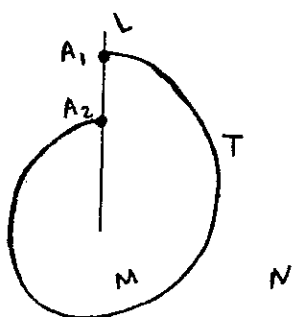


FIG. b

regiones M y N , ver Fig. b que remos mostrar donde se encuentra C para un tiempo $t > t_2$. Si C continuara hacia la región N , ésta tendría que cruzar a T pero esto no puede suceder puesto que las trayectorias no se cruzan, y si C sale hacia N por el segmento

$\overline{A_1 A_2}$ esto tampoco puede suceder, entonces tenemos que C continúa en la región M e intersecciona a L en A_3 tal que A_2 está entre A_1 y A_3 ; podemos seguir haciendo lo mismo para probar

que A_3 se encuentra entre A_2 y A_4 y entonces probar por inducción que A_{n+1} está entre A_n y A_{n+2} , por lo tanto concluimos que la sucesión $\{A_n\}$ es monótona y convergiendo a A . Entonces tenemos que el comportamiento de C cuando se aproxima a un punto límite de C' esta trayectoria o es periódica o se aproxima espiralmente y monótonamente a A . Ver Fig. c.

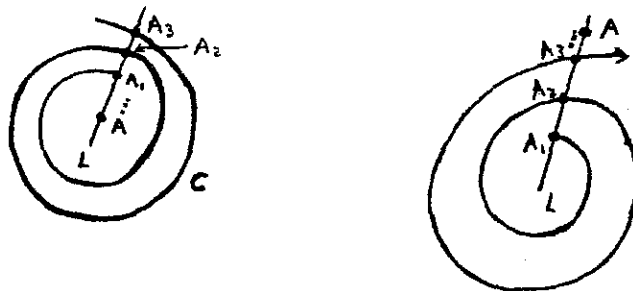


Fig. c

tenemos como consecuencia el siguiente lema.

Lema 3.2.- Un segmento sin contacto L no puede cortar a C' en dos puntos distintos.

Demostración: Esto sigue de la monotonía de las trayectorias sobre un segmento sin contacto.

Lema 3.3 Si C' contiene una trayectoria periódica F , este no contiene ningún otro punto.

Demostración: Suponemos que el conjunto límite de C consiste en una trayectoria periódica F y al menos en otro punto $C'-F$. $C'-F$ es no nulo, y no puede ser cerrado puesto - que C' sería no conexo, contrario a sus propiedades. Como C' es cerrado, existe un punto $A \in F$ tal que es un punto límite de $C'-F$. Sea L un segmento sin contacto atravesando a A . Entonces para cada círculo de A existen puntos de $C'-F$ y por la propiedad existen puntos de una trayectoria de $C'-F$. Entonces L corta a C' en dos puntos distintos, contrario al lema 3.2. Por lo tanto $C'-F = \emptyset$, C' contiene solamente a F .

Por lo tanto concluimos que cuando el conjunto límite esté formado por puntos regulares solamente, C' es una trayectoria periódica, tal que si sucede, que C es periódica entonces $C'=C$ y si no es C' periódica entonces se aproxima espiralmente a C' por dentro o por afuera. Ver Fig. d.

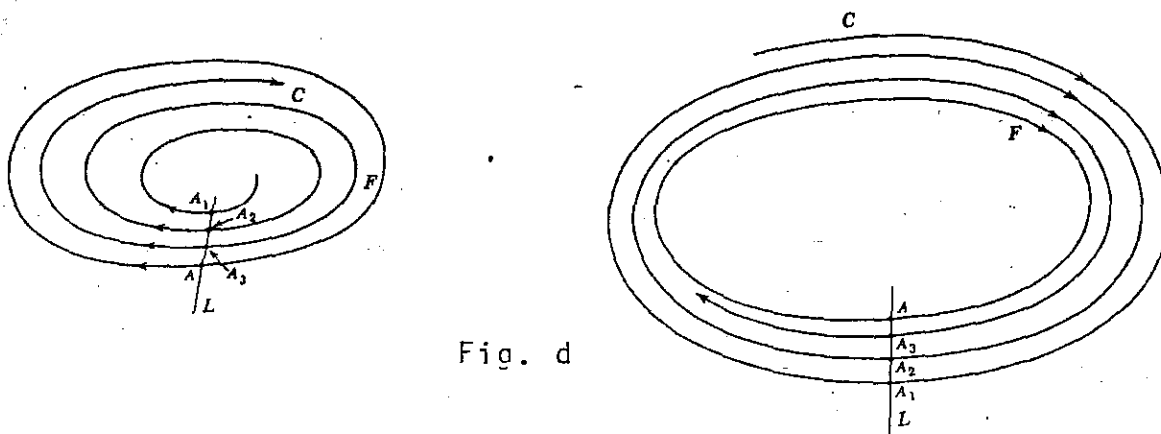


Fig. d

Tenemos ahora el último caso, como es C' cuando:

3.3. C' CONTIENE PUNTOS REGULARES Y PUNTOS CRÍTICOS.

TEOREMA 3.3 C' contiene puntos regulares y puntos críticos, entonces C' consiste de un conjunto finito de puntos críticos $\{A_n\}$ y un conjunto de trayectorias $\{C_\alpha\}$, donde cuando $t \rightarrow +\infty$ cada C_α se aproxima a un punto crítico.

Demostración: Si C' contiene puntos críticos $\{A_n\}$ este es finito, puesto que si es infinito, existe una sucesión infinita de puntos críticos convergiendo a un punto límite que es un punto crítico, y estos son aislados por lo tanto $\{A_n\}$ es finita. Si C' contiene entonces un punto regular, existe una trayectoria que atraviesa a ese punto y entonces la trayectoria está totalmente contenida en C' , la cual se aproxima para $t \rightarrow +\infty$ a puntos críticos de C' . Además C' consiste de un conjunto de trayectorias $\{C_\alpha\}$ donde el conjunto límite C'_α de esas trayectorias no contienen puntos regulares. Si un C'_α contiene un punto regular entonces C_α sería periódica y entonces contradice las suposiciones de que C' contiene puntos críticos; por lo tanto C' consiste de un conjunto $\{A_n\}$ finito de puntos críticos y un conjunto $\{C_\alpha\}$ de trayectorias aproximándose cada una a un punto crítico. El siguiente es

un esquema de un conjunto límite con estas características
Fig. e.

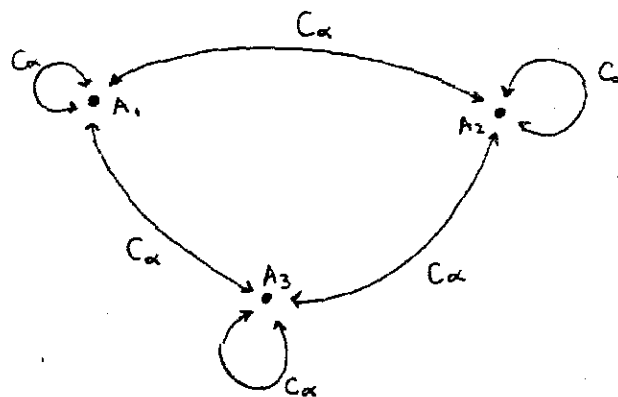


Fig. e.

Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixon

EJEMPLO 1:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(1-x^2-y^2)\end{aligned}\quad (1)$$

Este sistema tiene un único punto crítico en $(0,0)$.

Aplicar el teorema de Poincaré-Bendixon significa encontrar una región $\mathbb{R}^2$ acotada donde se encuentren contenidas las soluciones del sistema (1) y no existan en esa región puntos críticos.

Transformando a (1) en coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\theta} &= -1\end{aligned}\quad (1')$$

tomemos un círculo de radio $r = \frac{1}{2}$ y determinemos que dirección tiene el campo en ese círculo:

$$\text{si } r = \frac{1}{2} \implies \dot{r} = 3/8 > 0$$

entonces tenemos que el campo sobre ese círculo, sus coordenadas $\dot{r}$ es positiva y $\dot{\theta}$ negativa y gráficamente tenemos figura a.

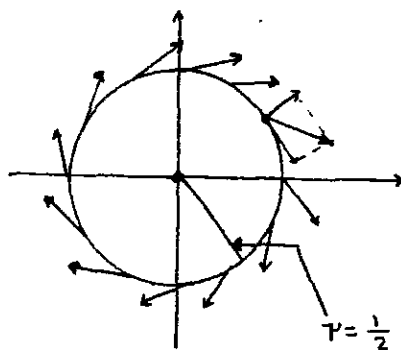


Fig. a.

Tomemos ahora un círculo de radio $r=2$ y determinemos la dirección del campo en ese círculo:

$$\text{si } r=2 \implies \dot{r} = -6 < 0$$

entonces se tiene que la dirección de los vectores apuntan hacia dentro del círculo de radio $r=2$, figura b.

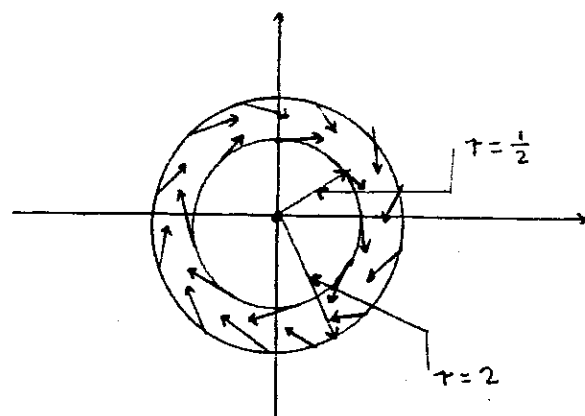


Fig. b.

Tenemos entonces una región comprendida entre $\frac{1}{2} \leq r \leq 2$, donde se tiene que el campo apunta hacia adelante y además no contiene puntos críticos. Por lo tanto aplicando el teorema de Poincaré-Bendixon se determina que en la región $R: \frac{1}{2} \leq r \leq 2$, las soluciones del sistema se encuentran contenidas ahí y además no existen puntos críticos, por lo tanto (1) contiene soluciones periódicas en la región R en la cual el conjunto límite consiste de una trayectoria periódica y donde la trayectoria C es igual que el conjunto límite o se enreda espiralmente hacia el conjunto límite.

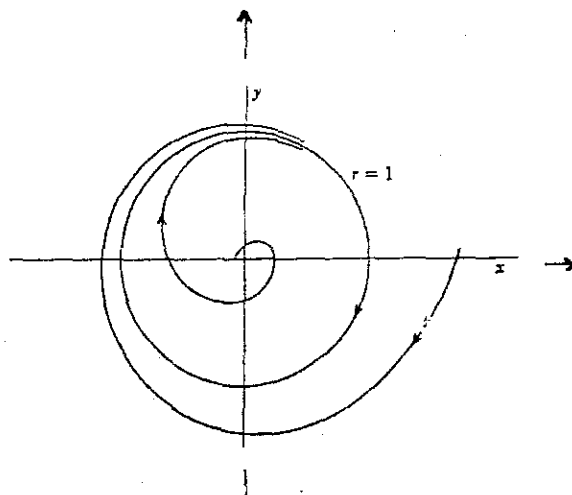


Fig. c.

En la fig. c observamos el comportamiento de las soluciones del ejemplo (1), donde el conjunto límite C' es el círculo de radio uno y donde la trayectoria C se enreda cuando $t \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 2: "Ecuación de Volterra de presa y rapaz".

Existe cierto fenómeno en la naturaleza en determinadas especies de animales, en los cuales una especie se alimenta de otra para su supervivencia y a su vez esta última crea métodos de evasión para poder sobrevivir. Podemos citar varias especies de este tipo como: zorros y conejos en un bosque, robalos y peces en un lago.

Veamos en particular como se presenta este fenómeno entre los zorros y los conejos.

Supongamos que existe una cierta población de zorros y conejos en el cual el zorro se alimenta de conejos y a su

a su vez el conejo de trévoles, si existe una gran cantidad de alimento para el conejo a medida que transcurre el tiempo su población empieza a crecer, pero a su vez la población del zorro empieza a crecer puesto que cuenta con suficiente alimento (conejo), pero con esto va a existir más depredación y la población de la presa empieza a decaer, disminuyendo con esto el alimento para el zorro empezando este a morir teniendo entonces el conejo más probabilidad de sobrevivir, y la población del conejo empieza a crecer, desencadenándose así un ciclo de supervivencia de estas especies.

Estableciendo un modelo para este fenómeno llegamos al planteamiento de un "Sistema de Ecuaciones Diferenciales Autónomo en el Plano".

Representemos por:

"x" población de los conejos.

"y" población de los zorros.

"xy" interacción entre las dos especies.

Supongamos una población que consiste de conejos solamente, entonces la población del conejo crece proporcionalmente esto es:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad a > 0$$

pero que sucede si existen encuentros entre zorros y conejos la población del conejo decrece y se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad b > 0$$

ahora supongamos una población de zorros, esta decrece a medida que transcurre el tiempo, y tenemos:

$$\frac{dy}{dt} = -cy, \quad c > 0$$

pero si existen interacciones entre las dos especies entonces:

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \quad d > 0;$$

por lo tanto tenemos el siguiente modelo que describe este fenómeno:

$$\dot{x} = ax - bxy$$

"Ecuaciones de Volterra"

$$\dot{y} = -cy + dxy, \quad a, b, c, d > 0$$

Queremos aplicar el método de Poicaré-Bendixon encon

trando una región del plano donde se encuentren acotadas las soluciones del sistema y esté libre de puntos críticos.

Analizando el sistema tenemos que tiene dos puntos críticos en:

$$(0,0) \quad \text{y} \quad (c/d, a/b).$$

Determinemos una región del plano donde las soluciones del sistema estén contenidas. Estudiaremos el campo vectorial del sistema de Volterra. Analizaremos el campo en el primer cuadrante determinado por los ejes coordenados puesto que existen poblaciones de las dos especies; además subdividiremos en otras cuatro regiones más que serán: A, B, C y D con referencia en el punto $(c/d, a/b)$, ver la figura 1, determinando el campo vectorial en cada región.

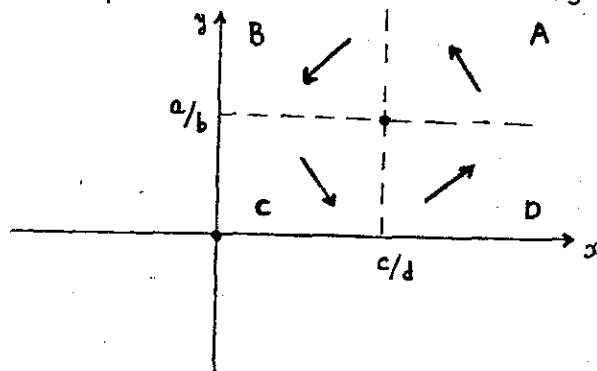


Fig. 1.

Región A: Ambas especies tienen una población grande. En esta región al existir gran cantidad de zorros se

tiene mayor degradación, entonces la población del conejo empieza a decrecer y la del zorro a crecer.

Región B: Existe mayor población de zorros que de conejos. Al tener una mayor población de zorros empieza a descender el de la presa pero a su vez no existe suficiente alimento para que sobreviva el zorro entonces empieza a morir.

Región C: Ambas poblaciones son pequeñas. Al existir poca presa el degradador empieza a morir pero al existir poca población de esta última, la población de la presa crece.

Región D: La población del conejo es mayor que la del zorro. Existe más alimento para el zorro y esta empieza a crecer en esta región.

Entonces tenemos que las soluciones del sistema se encuentran en las regiones A, B, C y D, puesto que el campo vectorial no sale de esas regiones.

Ahora determinemos que esa región no contenga puntos críticos pero para empezar se tiene que el punto $(c/d, a/b)$

es un punto crítico contenido en esa región del plano que es tamos estudiando, entonces probemos que las soluciones no - tienden a ese punto es decir que el campo vectorial no apunte hacia adentro del punto crítico.

El punto $(c/d, a/b)$ es un punto donde ambas poblaciones permanecen constantes.

Linealicemos el sistema $\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$ y determinemos

que tipo de soluciones se obtienen alrededor del punto $(c/d, a/b)$; el sistema linealizado tiene la siguiente representación $\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{bc}{d}x \\ \dot{y} &= \frac{ad}{b}y \end{aligned}$ y los valores característicos asociados

a este sistema son:

$$\lambda^2 + ca = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{ca} i$$

se obtienen raíces imaginarias esto muestra que en el sistema lineal el punto crítico representa un centro, lo cual demuestra que el campo no apunta hacia ese punto crítico, y lo mismo podemos asegurar entonces en el sistema no lineal en vecindades cercanas al punto crítico. Por lo tanto, el campo vectorial determinado por las ecuaciones de Volterra

se encuentran contenidas en las regiones A,B,C y D y además el campo no apunta hacia el punto crítico mostrando con esto que el conjunto límite de las trayectorias del sistema no contiene puntos críticos entonces aplicando el teorema concluimos que las soluciones son periódicas.

CAPITULO IV

IV SISTEMAS GRADIENTES

En este capítulo analizaremos un tipo particular de sistemas autónomos en el plano, los cuales son los "sistemas gradientes".

DEFINICION 4.1. Un sistema gradiente en R^2 es un sistema de la forma

$$\dot{x} = -\nabla V(x) \quad (1)$$

donde $V \in C^2$

$$V: R^2 \rightarrow R$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

El sistema (1) define un campo de vectores en R^2 , donde cada vector se obtiene al aplicarle el operador gradiente a la función V , y esta recibe el nombre de "función potencial", donde este tipo de sistemas son "sistemas conservativos".

4.1 CARACTERIZACION

El sistema gradiente (1) tiene la siguiente representación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= - \frac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{y} &= - \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (1')$$

Primeramente atacaremos el siguiente problema.

Dado un sistema autónomo en el plano de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= G(x,y)\end{aligned}\quad (2)$$

¿Qué características debe tener este sistema para poder identificarlo como un sistema gradiente?. Esto es lo que determinaremos a continuación.

TEOREMA 4.1. Sea un sistema autónomo en el plano de la forma (2), tal que las parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial x}$ existen y son continuas en un rectángulo de $\mathbb{R}^2$. Entonces (2) es un sistema gradiente, si y sólo si, $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{\partial G}{\partial x}$.

Demostración: $\implies$ "Si (2) es un sistema gradiente, entonces existe una función $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = G$$

entonces se tiene que las parciales mixtas son continuas y además

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}, \text{ entonces}$$

se cumple

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}.$$

" $\Leftarrow$ " Ahora debemos encontrar una función V tal que

$$F = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad G = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Aplicando la integral de línea, sobre la trayectoria horizontal de la figura 1; sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto en $\mathbb{R}^2$, entonces debemos tener una función V de la siguiente manera:

$$V(x, y_0) - V(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} \frac{\partial V}{\partial x}(S, y_0) dS$$

donde si queremos que $\frac{\partial V}{\partial x} = F$, entonces

$$V(x, y_0) = V(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} F(S, y_0) dS; \quad (3)$$

aplicando la integral de línea sobre la trayectoria vertical debemos tener:

$$V(x, y) - V(x, y_0) = \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial V}{\partial y}(x, t) dt \quad \text{y si queremos } \frac{\partial V}{\partial y} = G$$

entonces

$$V(x, y) = V(x, y_0) + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} G(x, t) dt \quad (4)$$

donde se tiene que (4) a partir de (1) queda determinado:

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} F(S, y_0) dS + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} G(x, t) dt \quad (5)$$

Si existe una función V con $\nabla V = (F, G)$ esta debe estar dada por (5), es decir V es independiente de la trayectoria. Mostraremos ahora que la función V dada por (3) funciona; - esto es, si

$$\frac{\partial V}{\partial y} = G$$

utilizando el teorema fundamental del cálculo en (5) tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = G(x, y).$$

Diferenciando (5) con respecto a x tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = F(x, y_0) + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) dt$$

y se tiene por hipótesis que $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$ entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = F(x, y_0) + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial F}{\partial y}(x, t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = F(x, y_0) + F(x, y) - F(x, y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = F(x, y)$$

∴ queda demostrado el teorema.

4.2. CONSIDERACIONES GEOMETRICAS DE LOS SISTEMAS GRADIENTE.

TEOREMA 4.2.- Dado un sistema gradiente

$$\dot{x} = - \nabla V(x)$$

se cumple lo siguiente:

4.2.1.- EN PUNTOS REGULARES LAS TRAYECTORIAS DEL SISTEMA CORTAN PERPENDICULARMENTE A LAS CURVAS DE NIVEL.

4.2.2.- UN MINIMO AISLADO DE LA FUNCION V REPRESENTA UN PUNTO CRITICO ASINTOTICAMENTE ESTABLE.

Todo punto x donde $-\nabla V(x) \neq 0$ es punto regular del sistema, y un punto crítico del sistema es todo punto no regular. Una *curva de nivel* de V es una curva donde $V(x) = K$ ($K = \text{constante}$), es decir una curva de nivel es la proyección sobre el plano xy de todos los puntos de la gráfica de la función V que se encuentra a una misma altura.

Demostración 4.2.1.- Sea X_0 un punto regular del sistema por el cual pasa una curva de nivel, esto es, sea $x = \gamma(t)$ una curva tal que para un tiempo $t = t_0$ pasa por X_0 con la propiedad de

$$V(\gamma(t)) = K \quad (6)$$

derivando ambos lados de esta ecuación con respecto a t en $t=t_0$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}(V(\gamma(t))) = 0$$

$$\Rightarrow DV(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

para $t=t_0$, $\nabla V(\gamma(t_0)) \cdot \dot{\gamma}(t_0) = 0$

$$\nabla V(x_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0) = 0$$

donde $W = \dot{\gamma}(t_0)$ es el vector tangente a la curva $\gamma(t)$ en $t=t_0$. Por lo tanto los vectores gradiente son perpendiculares a las curvas de nivel de V , implicando que las trayectorias de un sistema gradiente son perpendiculares a las curvas de nivel para todo punto regular de él.

Antes de demostrar la parte 4.2.2 del teorema mostraremos primero que la función V decrece a lo largo de las trayectorias, esto es $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ y $\dot{V}(x) = 0$ si y solo si x es punto crítico del sistema gradiente. La derivada de V a lo largo de las trayectorias es:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= \frac{d}{dt}(V(x(t))) = DV(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\
&= \nabla V(x(t)) \cdot (-\nabla V(x(t))) \\
&= -|\nabla V(x(t))|^2 \quad (7)
\end{aligned}$$

y con esto queda demostrado la anterior afirmación. Como consecuencia de esto tenemos la parte 4.2.2. del teorema, esto es si $\bar{x}$ es un punto tal que $\dot{V}(\bar{x}) = 0 \implies \bar{x}$ es un valor extremo para la función V y a la vez un punto crítico para el sistema.

Entonces si $\bar{x}$ es un mínimo aislado para V mostraremos que $\bar{x}$ es asintóticamente estable.

Demostración de 4.2.2.- Para mostrar que $\bar{x}$ es un punto crítico asintóticamente estable, se debe probar que la función

$$t \longrightarrow V(x) - V(\bar{x}) \quad (7)$$

es una función "estricta de Liapunov". $\bar{x}$ representa un mínimo aislado de V , entonces existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^2$ de $\bar{x}$ tal que

$$V(x) - V(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in U$$

$$\text{y} \quad V(\bar{x}) - V(\bar{x}) = 0$$

$$\text{además} \quad V(x) - V(\bar{x}) > 0 \quad \forall x \in U - \bar{x} \quad (8)$$

y la derivada de esta función $[V(x) - V(\bar{x})] = \dot{V}(x) = -|\nabla V(x)| < 0$

$$\forall x \in U - \bar{x} \quad (9)$$

Si la función cumple con (8) y (9) se dice que es una función "estricta de Liapunov" y el punto $\bar{x}$ representa un punto crítico asintóticamente estable.

4.3. RETRATO FASE DE LAS SOLUCIONES

Estudiando el comportamiento de las soluciones de un sistema gradiente a la larga, mostraremos que el conjunto límite de las trayectorias solo puede contener puntos críticos y no puntos regulares, implicando con esto que los sistemas gradiente no pueden tener trayectorias cerradas como conjuntos límite, lo cual demostraremos en el siguiente teorema.

Denotaremos por $C: x(t, x_0)$ a una trayectoria del sistema gradiente y tomaremos el conjunto $L_\omega(C)$, esto es

$$C' = \{x^* \mid \exists \{t_n\} \rightarrow \infty, x(t_n) \rightarrow x^*\}.$$

TEOREMA 4.3.- Sea x^* un punto límite de una trayectoria C de un sistema gradiente. Entonces x^* es un punto crítico.

Demostración: Sea x^* un punto límite de una trayectoria $C: x(t, x_0)$, tal que existe una trayectoria $T: x(t, x^*)$ tal que para $t=0$, $x(0, x^*) = x^*$. Entonces T está totalmente contenida en el conjunto C . Como x^* es punto límite de $C \Rightarrow$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n \rightarrow \infty}$ tal que

$$x(t_n, x_0) \rightarrow x^* \quad (10)$$

La función V de potencial por (6) se tiene que es decreciente a lo largo de las trayectorias del sistema (1) y además es continua por lo tanto V tiene un ínfimo, al que denotamos por $\alpha = V(x^*)$. Tenemos que

$$x(t_n + t_0, x_0) = x(t_0, x(t_n, x_0))$$

son todos los puntos de la sucesión (7) tomados un tiempo después $t=t_0$, tal que convergen a

$$x(t_0, x(t_n, x_0)) \rightarrow x(t_0, x^*)$$

pero tenemos que V es decreciente a lo largo de las trayectorias y

$$V(x^*) > V(x(t_0, x^*))$$

entonces $\alpha = V(x^*)$ no es ínfimo, pero entonces V tendría que

ser constante a lo largo de la trayectoria T , pero esto contradice que V sea decreciente a lo largo de las trayectorias, por lo tanto x^* es punto crítico.

4.4. ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS CRITICOS

Supongamos que el sistema gradiente contiene como punto crítico a $0 \in \mathbb{R}^2$. Tomemos la derivada de $D(-\nabla V(0)) = A$ como el campo vectorial lineal gradiente que aproxima al $(-\nabla V)$ cerca de 0. La matriz A está determinada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

donde se tiene que $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ por ser continuas y por lo tanto A es simétrica. Esto hace que los valores característicos asociados a la matriz A sean reales, esto es, no tiene valores característicos complejos.

Por lo tanto la estabilidad del sistema gradiente en el punto crítico 0 es el siguiente:

- 1) Si los valores característicos son reales negativos, entonces el punto crítico representa un punto crítico asintóticamente estable y representa un *nodo* para el sistema

gradiente.

- 2 Si los valores característicos son reales con signo contrario, entonces el punto crítico es inestable y representa un punto *silla* para el sistema gradiente.

EJEMPLO 5.1.- Sea $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$$

donde el gradiente es $\nabla V(x,y) = (2x(x-1)(2x-1), 2y)$. En la siguiente Fig. A observamos la gráfica de V y algunas curvas de nivel:

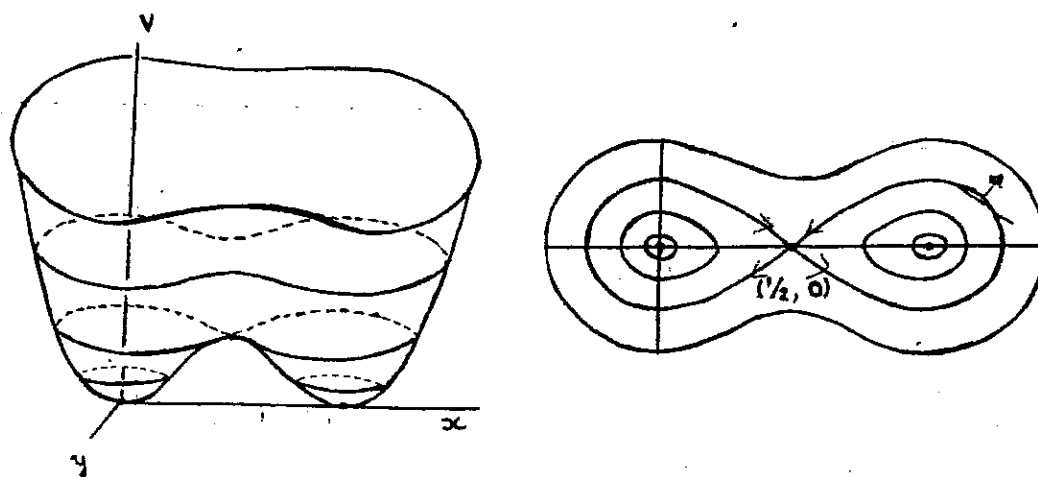


Fig. A

"Gráfica de $V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$ "

De acuerdo al gradiente de V , tenemos nuestro siguiente sistema:

$$\dot{x} = -2x(x-1)(2x-1)$$

$$\dot{y} = -2y$$

Determinando los puntos críticos del sistema gradiente obtenemos los siguientes:

$$P_1(0,0), \quad P_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad y \quad P_3(1,0) \quad ;$$

analizaremos la estabilidad de estos puntos críticos, encontrando a la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(-2x(x-1)(2x-1)) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy}(-2y) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -12x^2 + 12x - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} ;$$

evaluando los puntos críticos en A obtenemos:

$$A_{P_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \implies P_1(0,0) \text{ es asintóticamente estable y representa un nodo para el sistema gradiente.}$$

$$A_{P_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1=1, \lambda_2=-2 \implies P_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ es punto crítico estable y representa un punto silla para el sistema.}$$

$$\text{y } A_{P_3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \text{ un nodo para el sistema.}$$

El retrato fase para este sistema lo observamos en la siguiente Fig. B:

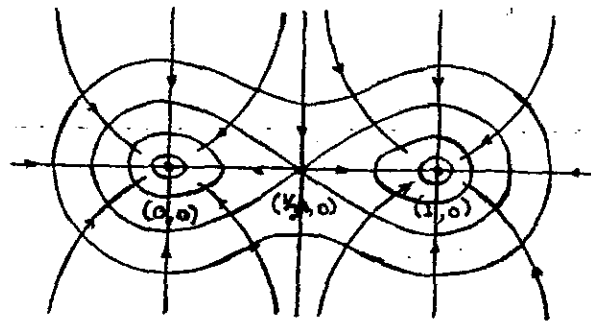


Fig. B

" Curvas de nivel de $V(x,y)$ y los vectores gradiente $(\dot{x}, \dot{y}) = -\nabla V(x,y)$ ".

CAPITULO V

V SISTEMAS HAMILTONIANOS

En este capítulo estudiaremos una clase de sistemas muy importantes que son los sistemas hamiltonianos y que vienen siendo otro tipo particular de "sistemas autónomos". Empezaremos definiendo a un sistema hamiltoniano.

Definición 5.1.- Un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= - \frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\quad (1)$$

se define como un sistema hamiltoniano, donde H es una función de clase C^2 , tal que

$$\begin{aligned}H: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ y \quad \nabla H &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Utilizaremos la siguiente notación para representar a un sistema hamiltoniano

$$\dot{x} = \nabla_H H \quad (1')$$

5.1 PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN H.

La función H que interviene en la definición de un sistema hamiltoniano tiene la propiedad de ser una "integral primera" (def. 1.12), es decir, es una función que es constante sobre trayectorias y no constante sobre ningún conjunto abierto.

PROPIEDAD 5.1.- Sea $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de (1), entonces se tiene que H es "integral primera".

Demostración: Tenemos que si $(x(t), y(t))$ es solución a (1')

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) \\ &= DH(x(t), y(t)) \cdot \frac{d}{dt}(x(t), y(t)) \\ &= \nabla H(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ $H(x(t), y(t)) = K$ es constante sobre trayectorias del sistema hamiltoniano.

5.2 INTERPRETACION GEOMETRICA.

El campo vectorial definido por un sistema hamiltoniano, al contrario de los sistemas gradiente es tangente a las curvas de nivel de la función H , esto se sigue a partir de:

TEOREMA 5.1. En todo punto regular el campo vectorial hamiltoniano es tangente a las curvas de nivel de H .

Demostración: Si $x(t), y(t)$ tal que para $t=t_0$ pasa por (x_0, y_0) es solución de (1) se tiene que:

$$H(x(t), y(t)) = K \quad (K=\text{constante})$$

$$\implies \frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = 0$$

$$\implies \nabla H \cdot \dot{\nabla}_H H = 0, \quad ,$$

entonces para todo punto regular de (1) se tiene que $\nabla_H H \neq 0$ y $\nabla_H H$ es perpendicular a los vectores gradiente de H , teniendo entonces que los vectores determinados por un sistema hamiltoniano son tangentes a las curvas de nivel de la función H .

5.3 RETRATO FASE

Analizaremos el comportamiento geométrico de las trayectorias de un sistema hamiltoniano a la larga, es decir, los conjuntos límites de las trayectorias, determinaremos que tipo de solución tienen estos sistemas.

Lema 5.1.— Sea H una función de (1) definida sobre un conjunto abierto D conteniendo un punto crítico $\bar{x}$. No existe vecindad U de $\bar{x}$ para el cual $\bar{x}$ sea punto ω -límite de las trayectorias que pasan por U .

Demostración: Supongamos que $\bar{x}$ es punto límite de una trayectoria C , entonces existe una sucesión $\{t_n\} \rightarrow \infty$ tal que $x(t_n) \rightarrow \bar{x}$. Entonces por la continuidad de H tenemos:

$$H(x(t_n)) = H(\bar{x}) .$$

Sea U una vecindad de $\bar{x}$, si $\bar{x}$ es punto ω -límite para toda trayectoria que pasa por cada punto $x \in U$, entonces tenemos que H es constante sobre U , pero esto contradice a la definición de integral primera.

Por lo tanto tenemos que los puntos críticos de un sistema hamiltoniano no pueden ser asintóticamente estables o

completamente inestables.

Lema 5.2.— Sea H una función acotada de (1), definida en una vecindad abierta D de un punto crítico $x=0$ de (1). Si $H(0)=0$ y $H(x)>0$ para $x\neq 0$ en D , entonces $x=0$ es un punto crítico estable.

Demostración: Como $H(0)=0$ y H es continua, entonces para cualquier $\epsilon>0$, se tiene que en algún punto de $|x|=\epsilon$ para $x\neq 0$ en D , $H(x)$ toma un mínimo y denotamos a este por

$$\alpha = \min H(x) > 0,$$

escogemos ahora un $0<\delta<\epsilon$ tal que en algún punto de $|x|\leq\delta$, $x\neq 0$ en D el máximo de $H(x)$ es tal que:

$$\max H(x) = \frac{\alpha}{2},$$

como H es constante sobre trayectorias, si tenemos una trayectoria C , tal que para un tiempo $t=0$ se encuentra en $|x(0)|<\delta$, entonces para toda $t>0$ $|x(t)|<\epsilon$ y por lo tanto el punto crítico $x=0$ es un punto crítico estable.

Hemos determinado que un sistema hamiltoniano contiene puntos críticos estables, determinaremos ahora que tipo de

comportamiento tienen las trayectorias alrededor de estos puntos críticos.

Lema 5.3.- Toda trayectoria C en una vecindad de un punto crítico estable y aislado de un sistema hamiltoniano debe ser una trayectoria periódica y el punto crítico un centro.

Demóstración: Sea $\bar{x}$ un punto crítico de (1), tal que existe una vecindad U conteniendo solamente a $\bar{x}$ y a la trayectoria C . Entonces por la teoría de Poincaré-Bendixon, toda trayectoria C que se encuentra en U tiene como conjunto límite a $\bar{x}$ o a una trayectoria periódica T . Por el Lema 5.1, se tiene que $\bar{x}$ no puede ser punto límite para C . Supongamos entonces que T es el conjunto límite de C , entonces la trayectoria C se acerca espiralmente por adentro o por afuera a T , entonces T es asintóticamente estable lo cual no puede ocurrir, y, así, existe un conjunto abierto en el cual H es constante. Esto demuestra que cualquier trayectoria que no se aproxima a un punto crítico es una trayectoria periódica y el punto crítico un centro.

Por lo tanto concluimos que en los sistemas hamiltonianos no existen soluciones asintóticamente estables o completamente inestables, no presentándose en este tipo de sistemas los puntos "nodo" pero si los puntos "silla" y los "centros,

teniéndose con este último soluciones periódicas del sistema.

5.4. PROPIEDADES GENERALES.

En esta parte mostraremos dos teoremas que se demuestran si consideramos el flujo de un sistema hamiltoniano:

Teorema de Liouville.

Teorema de Retorno de Poincaré.

El primer teorema lo enunciaremos en forma general:

TEOREMA DE LIOUVILLE

El "flujo" conserva volúmenes, es decir para un dominio D y un flujo g^t se tiene:

$$\text{Vol. } g^t D = \text{Vol. } D.$$

Demostraremos que este teorema se prueba si el flujo que se enuncia es de un sistema hamiltoniano, y expresaremos a un flujo hamiltoniano como una función:

$$\phi^t: (x(0), y(0)) \longrightarrow (x(t), y(t))$$

donde se tiene que $\phi(t,x,y)$ es el flujo de un sistema hamiltoniano, el cual determina una solución del sistema, que en el tiempo $t=0$ pasa por (x,y) . Entonces enunciaremos el siguiente teorema en analogía con el teorema de Liouville. Considerando flujos hamiltonianos.

TEOREMA 5.2. Consideremos al sistema hamiltoniano (1), tal que $\phi(t,x,y)$ es el flujo que en $t=0$ pasa por (x,y) . Consideremos un conjunto de puntos con condiciones iniciales $D(0) \subset \mathbb{R}^2$ y cuya área está dada por $A(0)$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} & A(t) = A(0) \\ \text{donde} \quad & A(t) = \text{Area } D(t) \\ & \text{y} \quad D(t) = \phi(t, D(0)) \end{aligned}$$

Demostración: Para demostrar que $A(0)$ permanece constante a través de un flujo hamiltoniano, basta con mostrar que

$$\left. \frac{d}{dt} A(t) \right|_{t=0} = 0$$

Se tiene que $A(t) = \iint_{D(0)} |\text{Jac } \phi(t,x,y)| \, dx dy$, ver Fig.1

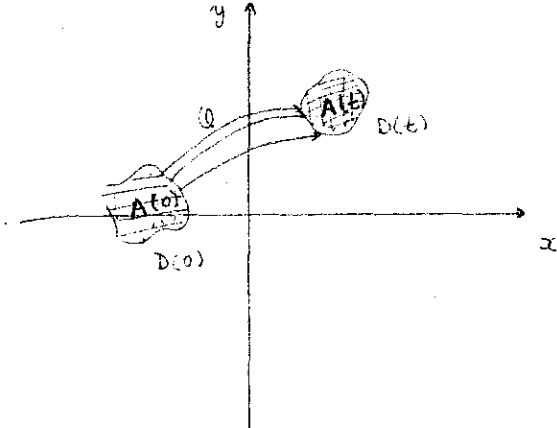


Fig. 1

se tiene que $\phi(t, x, y) = (\phi_1(t, x, y), \phi_2(t, x, y))$ donde ϕ_1 y ϕ_2 en desarrollo de Taylor en $t \rightarrow 0$:

$$\phi_1(t, x, y) = \phi_1(0, x, y) + \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(0, x, y)t + O(t^2)$$

$$\phi_2(t, x, y) = \phi_2(0, x, y) + \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(0, x, y)t + O(t^2) \text{ y}$$

por las hipótesis del teorema se tiene:

$$\phi_1(t, x, y) = x + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)t + O(t^2)$$

$$\phi_2(t, x, y) = y - \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)t + O(t^2).$$

tenemos que $|\text{Jac}\phi(t, x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$

donde: $\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y)t + O(t^2)$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x, y)t + O(t^2)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y)t + O(t^2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y)t + O(t^2)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= \left[1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y)t + O(t^2) \right] \left[1 - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y)t + O(t^2) \right] \\ &\quad - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y)t + O(t^2) \right] \left[-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y)t + O(t^2) \right] \\ &= 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x, y)t + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y)t + O(t^2) \end{aligned}$$

quedando 1, dos términos en t los cuales son iguales y términos en t^2 , t^3 , etc. entonces:

$$|\text{Jac}\phi(t, x, y)| = 1 + 0 + O(t^2)$$

$$y \quad v(t) = \iint_{D(0)} [1 + O(t^2)] \, dx dy$$

$$\therefore \left. \frac{d}{dt} v(t) \right|_{t=0} = 0 \quad \text{y se tiene demostrado el teorema.}$$

Entonces el área de un conjunto con condiciones iniciales $D(0)$, permanece constante a través de un flujo hamiltoniano. Considerando ahora un conjunto de puntos $D(t_0)$ en el instante $t=t_0$, el área de este conjunto de puntos se sigue conservando bajo el flujo hamiltoniano puesto que podemos trasladar el conjunto $D(t_0)$ de condiciones iniciales por un cambio de coordenadas $D(t-t_0)$ y trabajar con este conjunto y tenien-

do entonces:

$$\left. \frac{d}{dt}(v(t)) \right|_{t=t_0} = 0$$

(Este cambio de coordenadas lo podemos efectuar puesto que nuestros sistemas son "sistemas autónomos").

TEOREMA DE RETORNO DE POINCARÉ

Si $\phi(t, x, y)$ es un flujo hamiltoniano en el plano, y existe D tal que $\phi(t, x, y) \in D$ y $(x, y) \in D$. Entonces para cada $(x, y) \in D$ y $V(x, y)$ vecindad, existe un punto $(x', y') \in V$ y $n > 0$ tal que $\phi(n, x', y') \in V$.

Demostración: Sea $\phi(0, x', y') = (x', y') \in V \implies$ existe un $n > 0$ tal que $\phi(n, x', y') \in V$. Se tiene que el área de D es finita, entonces para algún $K > 0$, $L > 0$, $K > L$:

$$\phi(K, V) \cap \phi(L, V) \neq \emptyset$$

$$\implies \phi(K, x', y') = \phi(L, x, y)$$

$$\implies \phi(K-L, x', y') = \phi(0, x, y)$$

$$\implies \phi(K-L, x', y') = (x, y)$$

$$\text{con } (x', y') \in V \text{ y } (x, y) \in V$$

$$\therefore (x', y') \in V \text{ y } \phi(n, x', y') \in V \text{ para } n = K-L$$

L.Q.Q.D. -

5.5 APLICACION.

En algunos sistemas dinámicos reales puede considerarse que la energía total del mismo es constante, es decir, la energía que disipa el sistema dinámico por algún medio de fricción, es tan lenta que puede ser despreciada, y en estos casos se presupone que la ley de conservación de la energía o sea la suma de la energía cinética y la energía potencial es constante.

Tenemos que los sistemas hamiltonianos son un tipo de estos sistemas conservativos y la función H queda expresada:

$$H(x,y) = T(y) + V(x)$$

donde $T(y)$ indica la energía cinética y $V(x)$ la energía potencial.

EJEMPLO 5.1:

Consideremos la ecuación que describe el "movimiento de un péndulo no amortiguado":

$$\ddot{x} + k \operatorname{sen} x = 0, \quad k > 0 \quad (2)$$

La ecuación (1) es equivalente al sistema autónomo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -k \operatorname{sen} x \end{aligned} \quad (2')$$

El sistema (1') es un sistema hamiltoniano donde la función de energía total está dada por:

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + k - k \cos x$$

donde $V(x) = \int_0^x k \sin x \, dx = k - k \cos x.$



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

CONOCER DE MIS LIBROS
ES MI GRANDEZA

.) Los puntos críticos del sistema (1') son:

$$(0,0), (\pm\pi,0), (\pm2\pi,0), \dots$$

los cuales en el retrato fase representan "centros" o puntos "silla".

..) La ecuación de las trayectorias de (1'), la determinaremos para las curvas de nivel de $H(x,y) = 2k$, obteniéndose:

$$y = \pm \sqrt{2k(1+\cos x)}$$

..) El retrato fase de las trayectorias del sistema (1') se observa en la siguiente Fig. a.

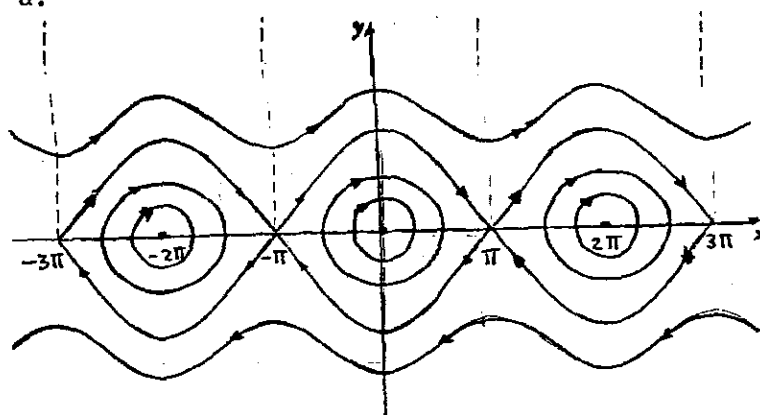


Fig. a

B I B L I O G R A F I A

1. Lectures on Ordinary Differential Equations.

Witold Hurewicz.

2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y
Teoría de Control.

Emilio O. Roxin.

3. Ordinary Differential Equations.

Jack K. Hale.

4. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones
y Notas Históricas.

George F. Simmons.

5. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con
Valores en la Frontera.

William F. Boyce.

Richard C. Driprima.