UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

C. Gracias
1 5

TESIS

PRINCIPIOS DE OPTIMIZACION
Y
METODOS COMBINATORIOS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MARIA DE LOURDES DIAZ CHAVEZ PACHECO.

Hermosillo, Sonora.

Julio de 1986.

- DEDICATORIA -

A mis hijos
Daniel y Rubén con
todo mi amor

a Rubén

a mis padres.

I N D I C E

PRINCIPIOS DE OPTIMIZACION Y METODOS COMBINATORIOS

CAPITULO I

METODO DE COTA Y RAMA - 1

1.1 PROBLEMA DE LITTLE- 4
1.2 ALGORITMO DE LITTLE- 5
1.2.1 ALGORITMO DE LITTLE PARA CAMINOS HAMILTONIANOS CON ORIGEN - - - - - - - - - - - - - - - - - 9
1.2.2 ALGORITMO DE LITTLE PARA CAMINOS HAMILTONIANOS- 10
1.3 EL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO- - - - - - - - - - - - - 11
1.4 UN PROBLEMA DE SERIACION EN ARQUEOLOGIA - 13
1.5 UN PROBLEMA DE AFECTACION- - - - - - - - - - - - - - - - 40
1.6 UN PROBLEMA DE ASIGNACION - - - - - - - - - - - - - - - - 41
1.6.1 APLICACION DEL ALGORITMO DEL PROBLEMA DE ASGINACION- - - - - - - - - - - - - - - - - 50

CAPITULO II

METODO DE PROGRAMACION DINAMICA - - - - - - - - - - - - - - - - - 60

2.1 UN PROBLEMA DE RUTA - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 66
2.2 EL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO- - - - - - - - - - - - - - 69

INTRODUCCION

En el presente trabajo discutiremos algunos principios de optimización que dan lugar a Métodos Combinatorios para la determinación de máximos ó mínimos de funciones definidas sobre un conjunto numerable de puntos.

La aplicación de estos métodos la haremos a través de varios problemas de interés, a los cuales podemos reducir muchos problemas que se presentan en la vida diaria, como es el famoso Problema del Agente Viajero que debe encontrar el itinerario de mínimo costo que le permita recorrer un conjunto de ciudades en donde conoce las tarifas de transporte entre cada par de ellas. Evidentemente el número de itinerarios posibles correspondería al número de permutaciones del conjunto de ciudades, el cual es un conjunto numerable que puede ser muy grande. Es claro ver que cualquier método enumerativo para un número suficientemente grande de ciudades es casi imposible de aplicar, sin embargo éste problema puede resolverse fácilmente mediante la aplicación de métodos combinatorios.

Estos métodos provienen de sencillos principios de optimización utilizados iteradamente como en el caso del Méto todo de Cota y Rama cuyo principio de optimización nos dice que si tenemos una función definida en un conjunto numerable de elementos y dicho conjunto, de alguna manera, podemos dividirlo en dos subconjuntos y además podemos encontrar de alguna forma una cota para cada uno de estos subconjuntos, al tomar la mínima de ellas estamos encontrando una cota para los dos subconjuntos y también para todo el conjunto. La aplicación iterada de este principio permite diseñar algoritmo - para la solución de esos problemas.

Asimismo presentamos el Método de Programación Dinámica basado en el Principio de Optimización de Bellman que dice - que si se tiene un proceso que se determina mediante la aplicación encadenada de n decisiones a partir de un estado inicial p_o y si además el costo total del proceso es igual a la suma de funciones de costo para cada decisión, entonces si - $(q_1,q_2,q_3,\ldots,q_n)$ es una sucesión de n decisiones óptimas - partiendo de p_o se tiene que $(q_2,q_3,\ldots,q_n)$ es una sucesión de decisiones óptimas en (n-1) etapas para el estado inicial resultante de la aplicación de q_1 a p_o.

La aplicación iterada de este principio transforma el problema de optimización en n etapas en una sucesión de problemas de optimización en una etapa dando lugar al llamado Método de Programación Dinámica.

En el capítulo I hacemos varias aplicaciones del Método de Cota y Rama y presentamos algunos algoritmos a que da lugar. El de Little que nos resuelve problemas de búsqueda de circuitos y caminos hamiltonianos de gráficas completas y con pesos las cuales plantean el problema en términos de matrices y preguntándonos que optimizaríamos, sería la suma de los términos resultantes de la elección de un elemento de cada renglón y de cada columna. En particular podemos resolver con éste algoritmo el Problema del Agente Viajero y un problema similar de Seriación en Arqueología el cual analizamos en éste capítulo. Con este algoritmo resolvemos también un problema de afectación que aunque no nos define ni un circuito ni un camino hamiltoniano sin embargo la elección de un elemento en cada renglón y en cada columna sigue definiendo los elementos del conjunto de opciones.

Presentamos también el llamado "Problema de la Orquesta" que da lugar a un algoritmo aplicable a problemas de asignación en el cual a partir de una mxn matriz deseamos escoger r renglones $r<m$ tal que la suma de los máximos por columnas que estos r renglones definen sea mínima. El problema de la Orquesta es aquel cuyos músicos a partir de un repertorio de m obras desean dar un concierto de r obras de tal forma que el número de ellos sea mínimo, sabiendo además el número de músicos en cada instrumento que se necesita para interpretar

cada obra. Aquí el conjunto de conciertos es equivalente a las combinaciones de las m obras en grupos de r, los métodos enumerativos en esta caso también son casi imposibles de aplicar para un número suficientemente grande de obras y de músicos. Como un ejemplo de este problema resolvemos el problema de los Profesores.

En capítulo II presentamos el Método de Programación Dinámica el cual nos permite plantear y resolver muchos y muy variados problemas. En particular presentamos su aplicación a un problema de ruta y al Problema del Agente Viajero.

CAPITULO I
METODO DE COTA Y RAMA

Sea $E=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ un conjunto numerable de puntos y $f(S_i)$ una función real no-negativa. El problema consiste en determinar el conjunto E_m de puntos de E donde f alcanza su mínimo valor.

Consideremos una propiedad separadora P_A que permita establecer una bipartición de E en los conjuntos A y $\bar{A}$ ($\bar{A}$ complemento de A relativo a E). Supongamos que por algún método podemos encontrar una cota inferior b_o para el conjunto E, una cota inferior $b_1 \geq b_o$ para el conjunto A y una cota $b_1' \geq b_o$ para el conjunto $\bar{A}$. Evidentemente el min $\{b_1,b_1'\}$ será una cota para A,$\bar{A}$ y E. Supongamos que b_1 es igual min $\{b_1,b_1'\}$.

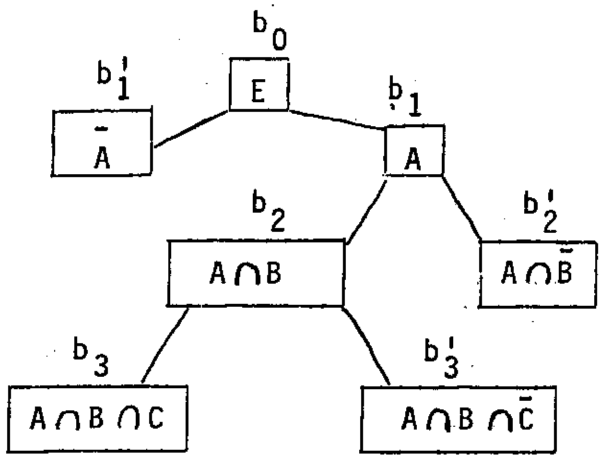
Consideremos ahora otra propiedad separadora P_B que establezca una bipartición del conjunto A en los conjuntos $A\cap B$ y $A\cap\bar{B}$ y supongamos que por algún método podemos encontrar una cota $b_2 \geq b_1$ para $A\cap B$ y una cota $b_2' \geq b_1$ para $A\cap\bar{B}$.

Evidentemente el min $\{b_2,b_2'\}$ será una cota para $A\cap B$, $A\cap\bar{B}$ y por lo tanto una cota para A. Si además éste último mínimo es menor ó igual que b_1, entonces será una cota para todo el conjunto E.

Si esto último no se presenta entonces b_1' será una cota de E y en tal caso el proceso de bipartición que hemos ilustrado lo trasladaremos hacia el conjunto $\bar{A}$.

Si repetimos este proceso prodremos ir obteniendo cotas inferiores para el conjunto E con solo obtener cotas para subconjuntos de E con menor número de elementos. Si en algún paso de éste proceso podemos determinar exactamente el mínimo de la función entonces éste será el mínimo para todo el conjunto E. En particular si en algún paso del proceso de bipartición el subconjunto resultante consta de un sólo elemento entonces el valor de la función sobre él será el mínimo para todo el conjunto E.

Una manera de ilustrar gráficamente a éste proceso es mediante una aroboresencia a partir del conjunto E, y generada por propiedades separadoras. Como se muestra en la siguiente figura.



$b_1 \geq b_o$

$b'_1 \geq b_o$

$b_1 = \min \{b'_1, b_1\}$

$b_2 \geq b_1$

$b'_2 \geq b_1$

$b_2 = \min \{b'_1, b_2, b'_2\}$

$b_3 \geq b_2$

$b'_3 \geq b_2$

$b'_1 = \min \{b'_1, b'_2, b_3, b'_3\}$

El proceso anteriormente ilustrado se conoce como el método de rama y cota en investigación de operaciones y tiene una amplia gama de aplicaciones algunas de las cuales presentamos enseguida.

1.1 PROBLEMA DE LITTLE

DETERMINACION DE LOS CIRCUITOS HAMILTONIANOS OPTIMOS DE UN GRAFO.

Sea $[V_{ij}]$ una n x n matriz con entradas no negativas y sobre cuya diagonal principal sus entradas toman el valor ∞. Consideremos el problema de elegir n entradas, una sobre cada renglón y sobre cada columna y tales que la suma de sus valores sea mínimo. Este es el problema de Little.

El problema anterior es equivalente al problema de determinar sobre una gráfica A completa y con pesos el circuito hamiltoniano óptimo. Ilustraremos esto último: Si A es una gráfica completa con n vértices y v_{ij} es el valor sobre el arco $(X_i X_j)$ que une el vértice X_i con el vértice X_j, y además $v_{ii}=\infty$, entonces la matriz definida por éstos valores es una matriz como la matriz del principio $[V_{ij}]$.

Recordemos ahora que un circuito hamiltoniano sobre una gráfica completa es una elección de n arcos (X_i,X_j) tales que cada vértice aparece una vez como vértice inicial de algún arco y una sola vez como vértice final de algún otro. En términos de la matriz $[V_{ij}]$ corresponde claramente a una elección de una entrada sobre cada renglón y cada columna.

El problema de determinar el circuito hamiltoniano óptimo será entonces equivalente al problema de Little.

1.2 ALGORITMO DE LITTLE

Sea $[V_{ij}]$ una n x n matriz con $v_{ij} \geq 0$ y $v_{ii} = \infty$.

Sea $E = \{(V_{1,i1}, V_{2,i2}, \ldots, V_{n,in})$ con $i_j \neq j$ y $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ una permutación de $\{1,2,3,\ldots,n\}\}$ el conjunto de circuitos hamiltonianos y $f(V_{1,i1}, V_{2,i2}, \ldots, V_{n,in}) = \sum_{j=1}^{n} V_{j,ij}$. Veamos como el método de cota y rama puede ser aplicado para obtener el circuito hamiltoniano óptimo.

A) Se calcula primero una cota inferior para los circuitos hamiltonianos de la siguiente forma:

a) Sea $\alpha i = \min\{v_{ij}, j=1, n\}$ y $\rho = \sum_{i=1}^{n} \alpha i$ claramente el valor de cada circuito hamiltoniano será mayor ó igual a ρ.

b) Sea $[V'_{ij}] = [V_{ij} - \alpha i]$; entonces el valor de un circuito hamiltoniano en $[V_{ij}]$ será igual al valor de ese mismo circuito en $[V'_{ij}] + \rho$

Consideremos $[V'_{ij}]$, $\beta_j = \min\{V'_{ij}, i=1,n\}$ y $\phi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$ entonces el valor de cada circuito hamiltoniano en $[V'_{ij}]$ será mayor ó igual que ϕ .

B) Una cota inferior para el conjunto de circuitos hamiltonianos de $[V_{ij}]$ es $\rho+\phi$.

C) Sea ahora, $[V''_{ij}]=[V'_{ij}-\beta_j]$ ésta matriz tendrá al menos un cero en cada renglón y en cada columna.

Un circuito hamiltoniano en $[V''_{ij}]$ con valor H, tendrá valor como circuito hamiltoniano en $[V_{ij}]$ igual a $H+\rho+\phi$ de ésta manera vemos que el problema se reduce a determinar el circuito hamiltoniano óptimo para $[V''_{ij}]$ que es una matriz que tiene al menos un cero en cada renglón y en cada columna.

En la nueva matriz $[V''_{ij}]$ consideremos para cada arco (X_i,X_j) con valor v_{ij} igual a cero, los circuitos hamiltonianos que no lo incluyen. Cada uno de ellos tendrá valor mayor o igual al $\gamma_{ij}=\min_{k\neq i} v''ik + \min_{k\neq j} v''kj$, determinemos - ahora para cual de esos arcos su correspondiente γ_{ij} anteriormente obtenida es máximo y sea ése el arco (X_k,X_l).

D) Con el arco determinado anteriormente definamos la propiedad separadora $P_{k,l}$ que parte el conjunto de los circuitos hamiltonianos de $[V''_{ij}]$ en el subconjunto A de los circuitos que contienen a (X_k,X_l) y en el conjunto $\bar{A}$ de los circuitos que no lo contienen, al que le corresponderá la propiedad $\bar{P}_{kl}$.

Para los circuitos en $\bar{A}$ una cota inferior será γ_{kl}

E) Para los circuitos en A, estos quedarán determinados con una elección de un circuito hamiltoniano en la n-1 x n-1 matriz obtenida al eliminar en $[V''_{ij}]$ el renglón k y la columna l y hacer $V_{lk} = \infty$.

Una cota para los caminos hamiltonianos en ésta matriz reducida se establece aplicando el procedimiento del inciso A).

F) Obtenidas las cotas para A y $\bar{A}$ escogemos la mínima δ.

a) Si δ era la cota para $\bar{A}$ esto quiere decir que el camino hamiltoniano óptimo no puede incluir a (X_k, X_l) en cuyo caso regresamos a la matriz $[V''_{ij}]$ y hacemos v_{kl} igual a ∞ y continuamos el procedimiento a partir de esa nueva matriz.

b) Si δ era la cota para A continuamos con la matriz reducida tomando en cuenta que (X_k, X_l) es parte del circuito hamiltoniano óptimo.

A partir de las matrices obtenidas ya sea en el caso a) ó b) se repite el procedimiento hasta obtener una matriz 1x1 con lo que habremos encontrado una cota para E, es decir un circuito hamiltoniano en A y un elemento en cada renglón y en cada columna de matriz $[V_{ij}]$ cuya suma de valores equivaldrá a la cota obtenida para E.

1.2.1 ALGORITMO DE LITTLE PARA CAMINOS HAMILTONIANOS CON ORIGEN

Un camino hamiltoniano es una elección de n-1 arcos donde cada vértice salvo dos de ellos corresponden al punto inicial de un arco y al punto final de otro.

En términos de una matriz $[Q_{ij}]$ n x n con ∞ en la diagonal principal un camino hamiltoniano corresponde a una elección de un elemento sobre cada renglón salvo en uno de ellos y la elección de un elemento sobre cada columna salvo en una de ellas.

Si consideramos el conjunto de los caminos hamiltonianos con origen en el vértice X_k los valores de cada uno de ellos serán los mismos que los valores de los circuitos hamiltonianos obtenidos de la matriz $[Q'_{ij}]$ con Q'_{ik} igual a cero $i=1,n$ y $Q'_{ij} = Q_{ij}$ si $j \neq k$.

A ésta nueva matriz $[Q'_{ij}]$ podemos aplicarle el algoritmo de Little, y determinamos asi el camino hamiltoniano.

1.2.2 ALGORITMO DE LITTLE PARA CAMINOS HAMILTONIANOS

En general obtener un camino hamiltoniano en un gráfica A completa y con pesos será equivalente a encontrar un circuito hamiltoniano en la gráfica construída a partir de ésta añadiéndole un nuevo vértice S cuyos arcos de entrada y de salida (S, X_i) y (X_j, S) tienen peso igual a cero.

La matriz $[R_{ij}]$ asociada a la nueva gráfica se forma a partir de la anterior aumentándole un renglón y una columna de ceros. Un circuito hamiltoniano en la nueva n+1 x n+1 matriz nos definirá un camino hamiltoniano para la n x n matriz original, cuyo vértice inicial corresponderá al renglón del elemento del circuito hamiltoniano sobre la columna de ceros agregada y cuyo vértice final corresponderá a la columna del elemento del circuito hamiltoniano sobre el renglón de ceros agregado.

1.3 EL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO

Un agente viajero tiene que recorrer un conjunto de m ciudades unidas entre sí por carreteras. Si conoce el costo de transporte entre cada par de ellas se quiere,

a) Recorrer todas las ciudades sin pasar 2 veces por alguna de ellas, volviendo a la ciudad de origen, y que el costo de dicho recorrido sea mínimo. (Circuito hamiltoniano).

b) Recorrer todas las ciudades sin pasar 2 veces por alguna de ellas, que el costo del recorrido sea mínimo comenzando por una ciudad dada, sin regresar a ella. (Camino hamiltoniano con origen).

c) Recorrer todas las ciudades, que el costo del recorrido sea mínimo y que la elección de la ciudad de origen sea óptima (Camino hamiltoniano).

Consideremos la matriz $[V_{ij}]$ m x m donde m es el número de ciudades que hay que recorrer y sea V_{ij} el costo de ir de la ciudad i a la ciudad j, además los $V_{i,i}$ son igual a ∞.

El problema del agente viajero equivale a encontrar un circuito hamiltoniano de valor mínimo que una las m ciudades. Es decir equivale a escoger una entrada de cada renglón y de cada columna en la matriz $[V_{ij}]$ tal que la suma de ellas sea mínima, lo cual corresponde al problema de Little.

1.4 UN PROBLEMA DE SERIACION EN ARQUEOLOGIA

Consideremos una colección de depósitos que contengan artefactos que hayan sido ordenados en tipos considerando funciones, materiales, formas, productos de trabajo, estilos de decoración etc.

Se formará a partir de éstos depósitos la matriz m x n de incidencia A de ceros y unos donde m es el número de depósitos, n el número de tipos y además

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el depósito } i \text{ contiene al tipo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Cada renglón de A corresponde a un depósito, los depósitos están numerados de acuerdo a un orden inicial.

Se ordenarán ahora 6 depósitos IIIC, IIIB, IIIA, IB, IC y IIC.

Las piezas de cerámica encontradas en los depósitos fueron clasificadas en 8 tipos diferentes entonces la matriz $[a_{ij}]_{mxn}$ quedaría:

$$A = \begin{array}{c|cccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ IIIC & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ IIIB & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ IIIA & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ IB & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ IC & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ IIC & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Al multiplicar $A \cdot A^T$ obtendríamos la matriz $m \times m$ de correlación a la que llamaremos S donde m es el número de depósitos y los S_{ij} corresponderían a los tipos de cerámica que el depósito i tiene en común con el depósito j.

$$A \circ A^T = S = \begin{array}{c|cccccc|} & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ IIIC & 5 & 5 & 2 & 5 & 5 & 2 \\ IIIB & 5 & 8 & 4 & 6 & 7 & 4 \\ IIIA & 2 & 4 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ IB & 5 & 6 & 3 & 6 & 6 & 3 \\ IC & 5 & 7 & 4 & 6 & 7 & 4 \\ IIC & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}$$

Una forma de dar una medida de la distancia en el tiempo entre el depósito i y el depósito j será el número $v_{ij} = n - S_{ij}$

donde n es el total de tipos de cerámica y S_{ij} los tipos que el depósito i tiene en común con el depósito j.

Entonces el problema de seriación en el tiempo es equivalente a encontrar el camino hamiltoniano mínimo para la gráfica N asociada a la matriz $[v_{ij}]$m x m.

$$V = \begin{array}{c|cccccc|} & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ \hline IIIC & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 6 \\ IIIB & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ IIIA & 6 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ IB & 3 & 2 & 5 & 2 & 2 & 5 \\ IC & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ IIC & 6 & 4 & 5 & 5 & 4 & 4 \end{array}$$

Aplicaremos el método de cota y rama por medio del algoritmo de Little para el caso de la búsqueda de un camino hamiltoniano óptimo para lo cual:

1) Se añadirá a la matriz $[v_{ij}]$ un renglón y una columna S con valor en los (S, X_i) y (X_j, S) igual a cero, lo que equivale a añadirle a la gráfica N un vértice S conectado a todos los demás vértices con arcos de valor cero.

2) En la diagonal principal de la matriz $[v_{ij}]$ es decir en los v_{ii} se colocará ∞ , podemos hacerlo ya que la información en la diagonal corresponde a los tipos que tienen cada uno de los m depósitos

$$V_1 = \begin{array}{c} \\ S \\ IIIC \\ IIIB \\ IIIA \\ IB \\ IC \\ IIC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccccc} \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 3 & 6 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & \infty & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & \infty & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & \infty & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & \infty & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 5 & 5 & 4 & \infty \end{array}\right| \end{array}$$

Aplicamos el algoritmo de Little a la matriz V_1.

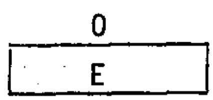
A) Calcular una cota inferior para E el conjunto de todos los posibles caminos hamiltonianos de la gráfica N. Los α_i se escribirán en una columna aumentada a la matriz V_1

a) $\rho = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$ y los β_j en un renglón aumentado a la matriz V_1

b) $\phi = \sum_{r=1}^{m} \beta_j = 0$

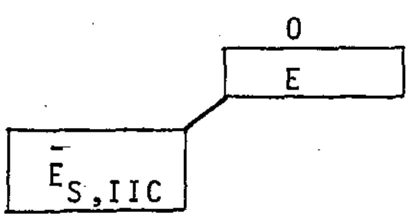
$$V_1 = \begin{array}{c|ccccccc|c}
 & S & IIIC & IIIB & IIIA & IIIB & IC & IIC & \alpha_i \\
\hline
S & \infty & 0^{(3)} & 0^{(1)} & 0^{(4)} & 0^{(2)} & 0^{(1)} & 0^{(4)} & 0 \\
IIIC & 0^{(3)} & \infty & 3 & 6 & 3 & 3 & 6 & 0 \\
IIIB & 0^{(1)} & 3 & \infty & 4 & 2 & 1 & 4 & 0 \\
IIIA & 0^{(4)} & 6 & 4 & \infty & 5 & 4 & 5 & 0 \\
IC & 0^{(2)} & 3 & 2 & 5 & \infty & 2 & 5 & 0 \\
IB & 0^{(1)} & 3 & 1 & 4 & 2 & \infty & 4 & 0 \\
IIC & 0^{(4)} & 6 & 4 & 5 & 5 & 4 & \infty & 0 \\
\beta_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

B) Cota de E= $\rho+\phi$ = 0



C) Los γ_{ij} los colocaré arriba de los ceros correspondientes en la matriz V_1.
Max γ_{ij} =4 para (S, IIC), (IIC, S), (S, IIIA) y (IIIA, S). Escojo arbitrariamente (S, IIC)

D) Cota para $\bar{E}_{S,IIC}$ =0 + 4 = 4

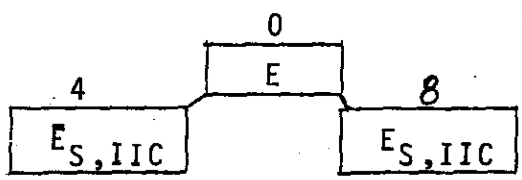


E) Eliminar de la matriz V_1 la columna IIC y el renglón S y colocar ∞ en (IIC, S).

V_2 =

	S	IIIC	IIIB	IIIA	IB	IC	α_i
IIIC	0	∞	3	6	3	3	
IIIB	0	3	∞	4	2	1	
IIIA	0	6	4	∞	5	4	
IB	0	3	2	5	∞	2	
IC	0	3	1	4	2	∞	
IIC	0	6	4	5	5	4	4
β_j		2		1	1		

cota para $E_{S,IIC} = 0 + 8 = 8$



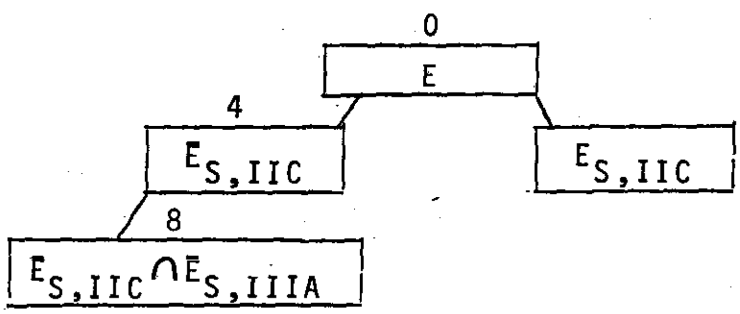
F) $\delta = \min\{4,8\} = 4$ para $\bar{E}_{S,IIC}$ retomo la matriz V_1 colocando ∞ en (S, IIC) y restando 4 a la columna IIC.

$$
V_3 = \begin{array}{c} \\ S \\ IIIC \\ IIIB \\ IIIA \\ IB \\ IC \\ IIC \end{array}
\begin{array}{ccccccc} S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\
\hline
S & \infty & 0^{(2)} & 0^{(1)} & 0^{(4)} & 0^{(2)} & 0^{(1)} & \infty \\
IIIC & 0^{(2)} & \infty & 3 & 6 & 3 & 3 & 2 \\
IIIB & 0 & 3 & \infty & 4 & 2 & 1 & 0 \\
IIIA & 0^{(1)} & 6 & 4 & \infty & 5 & 4 & 1 \\
IB & 0^{(1)} & 3 & 2 & 5 & \infty & 2 & 1 \\
IC & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & \infty & 0 \\
IIC & 0^{(4)} & 6 & 4 & 5 & 5 & 4 & \infty
\end{array}
$$

C) Max γ_{ij} = 4 en (S, IIIA) y (IIIC, S) escojo (S, IIIA).

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap \bar{E}_{S,IIIA}$ = 4+4 = 8

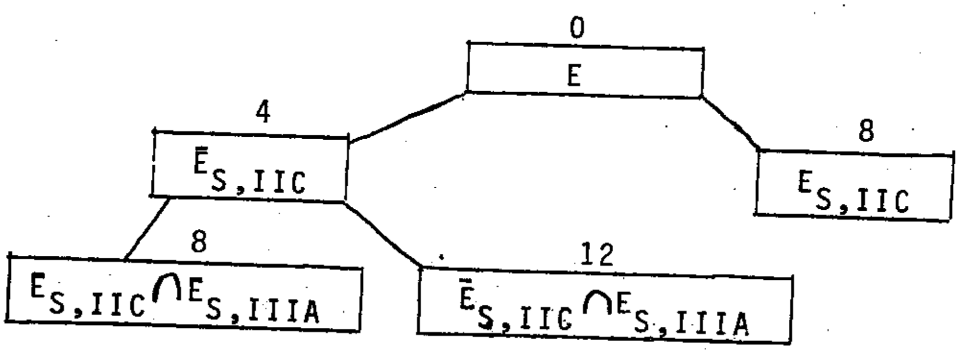


E) Eliminar el renglón S y la columna IIIA en la matriz V_3 y colocar ∞ en (IIIA, S)

V_4 =

	S	IIIC	IIIB	IB	IC	IIC	α_i
IIIC	0	∞	3	3	3	2	
IIIB	0	3	∞	2	1	0	
IIIA	∞	6	4	5	4	1	1
IB	0	3	2	∞	2	1	
IC	0	3	1	2	∞	0	
IIC	0	6	4	5	4	∞	
β_j		3	1	2	1		

cota para $\bar{E}_{S,IIC}$ $\quad E_{S,IIIA} = 4+8 = 12$



F) $\delta = \min\{8,8,12\} = 8$ para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA}$ y $E_{S,IIC}$ escojo $E_{S,IIC}$ para lo cual de la matriz V_2 restamos los α_i y β_j.

$$V_5 = \begin{array}{r|cccccc|} & S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC \\ IIIC & 0^{(2)} & \infty & 3 & 5 & 2 & 3 \\ IIIB & 0^{(1)} & 1 & \infty & 3 & 1 & 1 \\ IIIA & 0^{(4)} & 4 & 4 & \infty & 4 & 4 \\ IB & 0^{(1)} & 1 & 2 & 4 & \infty & 2 \\ IC & 0^{(1)} & 1 & 1 & 3 & 1 & \infty \\ IIC & \infty & 0^{(1)} & 0^{(1)} & 0^{(3)} & 0^{(1)} & 0^{(1)} \end{array}$$

C) Max $\gamma_{ij}=4$ para (IIIA, S)

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} = 8+4= 12$

E) Eliminar el renglón IIIA y la columna S y colocar ∞ en (IIC, IIIA)

$$V_6 = \begin{array}{r|ccccc|c} & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & \alpha_i \\ IIIC & \infty & 3 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ IIIB & 1 & \infty & 3 & 1 & 1 & 1 \\ IB & 4 & 2 & 4 & \infty & 2 & 2 \\ IC & 1 & 1 & 3 & 1 & \infty & 1 \\ IIC & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & \\ \beta_j & & & 2 & & & \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} = 8+8= 16$

F) $\delta=\min\{8,12,12,16\}= 8$ para

$\bar{E}_{S,IIC} \cap \bar{E}_{S,IIIA}$ para lo cual en la matriz V_3 coloco ∞ en (S,IIIA) y resto 4a la columna IIIA.

$$V_7 = \begin{array}{c|ccccccc|} & S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ \hline S & \infty & 0^{(3)} & 0^{(1)} & \infty & 0^{(2)} & 0^{(1)} & \infty \\ IIIC & 0^{(2)} & \infty & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ IIIB & 0 & 3 & \infty & 0 & 2 & 1 & 0 \\ IIIA & 0^{(1)} & 6 & 4 & \infty & 5 & 4 & 1 \\ IB & 0^{(1)} & 3 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 \\ IC & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & \infty & 0 \\ IIC & 0^{(1)} & 6 & 4 & 1 & 5 & 4 & \infty \end{array}$$

C) Max $\gamma_{ij}= 3$ en (S, IIIC)

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} = 8+3= 11$

E) Suprimir de la matriz V_7 el renglón S y la columna IIIC y colocar ∞ en (IIIC, S)

$$V_8 = \begin{array}{c|cccccc|c} & S & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC & \alpha_i \\ \hline IIIC & \infty & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ IIIB & 0 & \infty & 0 & 2 & 1 & 0 & \\ IIIA & 0 & 4 & \infty & 5 & 4 & 1 & \\ IB & 0 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 & \\ IC & 0 & 1 & 0 & 2 & \infty & 0 & \\ IIC & 0 & 4 & 1 & 5 & 4 & \infty & \\ \beta_j & & 1 & & 1 & 1 & & \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} = 8+5= 13$

F) Min {11,13,12,14}= 11 para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC}$ para lo cual coloco ∞ en (S,IIIC) en la matriz V_7 y resto 3 a la columna IIIC

$$V_9 = \begin{array}{c|ccccccc|} & S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ \hline S & \infty & \infty & 0^{(1)} & \infty & 0^{(2)} & 0^{(1)} & \infty \\ IIIC & 0^{(2)} & \infty & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ IIIB & 0 & 0 & \infty & 0 & 2 & 1 & 0 \\ IIIA & 0^{(1)} & 3 & 4 & \infty & 5 & 4 & 1 \\ IB & 0 & 0 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \infty & 0 \\ IIC & 0^{(1)} & 3 & 4 & 1 & 5 & 4 & \infty \end{array}$$

C) Max γ_{ij}= 2 para (S, IB) y (IIIC, S) escojo (S, IB) cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap \bar{E}_{S,IB}$ = 11+2= 13

E) Elimino el renglón S y la columna IB y coloco ∞ en (IB, S)

$$V_{10} = \begin{array}{c|cccccc|} & S & IIIC & IIIB & IIIA & IC & IIC \\ \hline IIIC & 0 & \infty & 3 & 2 & 3 & 2 \\ IIIB & 0 & 0 & \infty & 0 & 1 & 0 \\ IIIA & 0 & 3 & 4 & \infty & 4 & 1 \\ IB & \infty & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 1 & 0 & \infty & 0 \\ IIC & 0 & 3 & 4 & 1 & 4 & \infty \\ \beta_j & & & 1 & & 1 & \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB}$= 11+2= 13

F) Min {13,12,16} = 12 para $E_{S,IIC} \cap \bar{E}_{IIIA,S}$ y $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA}$ escojo $E_{S,IIC} \cap \bar{E}_{IIIA,S}$ para lo cual en la matriz V_5 coloco ∞ en (IIIA, S) y resto 4 al renglón IIIA.

$$V_{11} = \begin{array}{c|cccccc|} & S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC \\ IIIC & 0^{(2)} & \infty & 3 & 5 & 2 & 3 \\ IIIB & 0^{(1)} & 1 & \infty & 3 & 1 & 1 \\ IIIA & \infty & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ IB & 0^{(1)} & 1 & 2 & 4 & \infty & 2 \\ IC & 0^{(1)} & 1 & 1 & 3 & 1 & \infty \\ IIC & \infty & 0 & 0 & 0^{(3)} & 0 & 0 \end{array}$$

C) Max γ_{ij} =3 para (IIC, IIIA)

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA}$ = 12+3= 15

E) Eliminar de la matriz V_{11} el renglón IIC y la columna IIIA y colocar ∞ en (IIIA, IIC)

$$V_{12} = \begin{array}{c|ccccc|} & S & IIIC & IIIB & IB & IC \\ IIIC & 0^{(2)} & \infty & 3 & 2 & 3 \\ IIIB & 0^{(1)} & 1 & \infty & 1 & 1 \\ IIIA & \infty & 0^{(1)} & 0^{(1)} & 0^{(1)} & 0^{(1)} \\ IB & 0^{(1)} & 1 & 2 & \infty & 2 \\ IC & 0^{(1)} & 1 & 1 & 1 & \infty \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA}$= 12

F) Min {13,12,16,15}= 12 para $E_{S,IIIC} \cap E_{S,IIIA}$ y $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA}$ escojo este último

C) Max $\gamma_{ij} = 2$ para (IIIC, S)

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA}$

$\bar{E}_{IIIC,S} = 12+2 = 14$

E) Elimino de la matriz V_{12} el renglón IIIC y la columna S y coloco ∞ en (IIIA, IIIC)

$$V_{13} = \begin{array}{r|cccc|c} & IIIC & IIIB & IB & IC & \alpha_i \\ \hline IIIB & 1 & \infty & 1 & 1 & 1 \\ IIIA & \infty & 0 & 0 & 0 & \\ IB & 1 & 2 & \infty & 2 & 1 \\ IC & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIC,S} = 12+3 = 15$

F) $\delta = \min\{15, 13, 12, 16\} = 12$ para $\bar{E}_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA}$ para lo cual tomo la matriz V_4 y resto las α_i β_j

$$V_{14} = \begin{array}{r|cccccc|} & S & IIIC & IIIB & IB & IC & IIC \\ \hline IIIC & 0^{(1)} & \infty & 2 & 1 & 2 & 2 \\ IIIB & 0 & 0 & \infty & 0 & 0^{(1)} & 0 \\ IIIA & \infty & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ IB & 0 & 0 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 0^{(1)} & 0 & \infty & 0 \\ IIC & 0^{(3)} & 3 & 3 & 3 & 3 & \infty \end{array}$$

C) Max $\gamma_{ij} = 3$ para (IIC, S)

D) Cota para $\bar{E}_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{IIC,S} = 12+3 = 15$

E) Eliminar de la matriz V_{14} el renglón IIC y la columna S y colocar ∞ en (IIIA, IIC)

$$V_{15} = \begin{array}{r|ccccc|l} & IIIC & IIIB & IB & IC & IIC & \alpha_i \\ IIIC & \infty & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ IIIB & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & \\ IIIA & 2 & 2 & 2 & 2 & \infty & 2 \\ IB & 0 & 1 & \infty & 1 & 1 & \\ IC & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & \end{array}$$

Cota para $\bar{E}_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{IIC,S} = 12+3 = 15$

F) $\delta = \min \{13,14,15,16\} = 13$ para

$E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB}$; $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB}$; $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC}$ escojo esta última para lo cual tomo la matriz V_8 restando las α_i, β_j.

$$V_{16} = \begin{array}{r|cccccc|} & S & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ IIIC & \infty & 0 & 0 & 0^{(1)} & 0 & 0 \\ IIIB & 0 & \infty & 0 & 1 & 0 & 0 \\ IIIA & 0^{(1)} & 3 & \infty & 4 & 3 & 1 \\ IB & 0^{(1)} & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 0 & 1 & \infty & 0 \\ IIC & 0^{(1)} & 3 & 1 & 4 & 3 & \infty \end{array}$$

C) Max $\gamma_{ij} = 1$ en (IIIC, IB), (IIIA, S)

(IB, S) y (IIC, S) escojo (IIC, S)

D) Cota para $\bar{E}_{S,IIC} \cap \bar{E}_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,S} = 13+1 = 14$

E) Eliminar en la matriz V_{16} el renglón IIC y la columna S y colocar ∞ en (IIIC, IIC)

$$V_{17} = \begin{array}{c|ccccc|c} & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC & \alpha_i \\ \hline IIIC & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & \\ IIIB & \infty & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ IIIA & 3 & \infty & 4 & 3 & 1 & 1 \\ IB & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 1 & \infty & 0 & \end{array}$$

Cota para $\bar{E}_{S,IIC} \cap \bar{E}_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,S} = 13+2 = 15$

F) $\delta = \text{Min}\{13,14,15,16\} = 13$ escojo $\bar{E}_{S,IIC} \cap \bar{E}_{S,IIIA} \cap \bar{E}_{S,IIIC}$ $\bar{E}_{S,IB}$ para lo cual en la matriz V_9 coloco ∞ en (S, IB) y resto 2 a la columna IB

$$V_{18} = \begin{array}{c|ccccccc|} & S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ \hline S & \infty & \infty & 0^{(1)} & \infty & \infty & 0^{(1)} & \infty \\ IIIC & 0 & \infty & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ IIIB & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 1 & 0 \\ IIIA & 0^{(1)} & 3 & 4 & \infty & 3 & 4 & 1 \\ IB & 0 & 0 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ IIC & 0^{(1)} & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & \infty \end{array}$$

C) Max γ_{ij}= 1 para (S, IIIB), (S, IC), (IIIA, S) (IIC, S) escojo (IIC, S)

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB} \cap E_{IIC,S}$= 13+1= 14

E) Eliminar el renglón IIC y la columna S y colocar ∞ en (S, IIC)

$$V_{19} = \begin{array}{c|cccccc|c} & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC & \alpha_i \\ \hline S & \infty & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty & \\ IIIC & \infty & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ IIIB & 0 & \infty & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ IIIA & 3 & 4 & \infty & 3 & 4 & 1 & 1 \\ IB & 0 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 & \\ IC & 0 & 1 & 0 & 0 & \infty & 0 & \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,\bar{I}IIC} \cap E_{S,IB} \cap E_{IIC,S}$= 13+2= 15

F) δ=Min {13,14,15,16} = 13 para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB}$ para lo cual a la matriz V_{10} le resto las β_j

$$V_{20} = \begin{array}{c|cccccc|} & S & IIIC & IIIB & IIIA & IC & IIC \\ \hline IIIC & 0^{(2)} & \infty & 2 & 2 & 2 & 2 \\ IIIB & 0 & 0 & \infty & 0 & 0^{(1)} & 0 \\ IIIA & 0^{(1)} & 3 & 3 & \infty & 3 & 1 \\ IB & \infty & 0^{(1)} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 0^{(1)} & 0 & \infty & 0 \\ IIC & 0^{(1)} & 3 & 3 & 1 & 3 & \infty \end{array}$$

C) Max $\gamma_{ij} = 2$ para (IIIC,S)

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB} \cap E_{IIIC,S} = 15$

E) Eliminar la columna S y el renglón IIIC y colocar ∞ en (IB, IIIC)

$$V_{21} = \begin{array}{c|ccccc|c} & IIIC & IIIB & IIIA & IC & IIC & \alpha_i \\ \hline IIIB & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & \\ IIIA & 3 & 3 & \infty & 3 & 1 & 1 \\ IB & \infty & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & \\ IIC & 3 & 3 & 1 & 3 & \infty & 1 \end{array}$$

Cota para $\bar{E}_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB} \cap E_{IIIC,S} = 16$

F) $\delta = \text{Min}\ \{14,15,16\} = 14$ para

$\bar{E}_{S,IIC} \cap \bar{E}_{S,IIIA} \cap \bar{E}_{S,IIIC} \cap \bar{E}_{S,IB} \cap \bar{E}_{IIC,S}$; $\bar{E}_{S,IIC} \cap \bar{E}_{IIIA,S} \cap \bar{E}_{S,IIIC} \cap \bar{E}_{IIC,S}$; $E_{S,IIC} \cap \bar{E}_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA} \cap \bar{E}_{IIIC,S}$ escojo $E_{S,IIC} \cap \bar{E}_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA}$ $\bar{E}_{IIIC,S}$ para lo cual en la matriz V_{12}

coloco ∞ en (IIIC, S) y resto 2 al renglón IIIC.

$$V_{22} = \begin{array}{c|ccccc|} & S & IIIC & IIIB & IB & IC \\ \hline IIIC & \infty & \infty & 1 & 0^{(1)} & 1 \\ IIIB & 0^{(1)} & 1 & \infty & 1 & 1 \\ IIIA & \infty & 0^{(1)} & 0^{(1)} & 0 & 0^{(1)} \\ IB & 0^{(1)} & 1 & 2 & \infty & 2 \\ IC & 0^{(1)} & 1 & 1 & 1 & \infty \end{array}$$

C) Max $\gamma_{ij} = 1$ para (IIIC, IB), (IIIB, S), (IIIA, IIIC), (IIIA, IIIB), (IIIA, IC), (IB, S) y (IC, S) escojo (IIIC, IB)

D) Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIC,S} \cap E_{IIIC,IB} = 15$

E) Eliminar el renglón IIIC y la columna IB y colocar ∞ en(IB,IIIC)

$$V_{23} = \begin{array}{c|cccc|} & S & IIIC & IIIB & IC \\ \hline IIIB & 0^{(1)} & 1 & \infty & 1 \\ IIIA & \infty & 0^{(1)} & 0^{(1)} & 0^{(1)} \\ IB & 0^{(2)} & \infty & 2 & 2 \\ IC & 0^{(1)} & 1 & 1 & \infty \end{array}$$

Cota para

$E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIC,S} \cap E_{IIIC,IB} = 14$

F) $\delta = Min\ \{14,15,16\} = 14$ escojo

$E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,\ IIIA} \cap E_{IIIC,S} \cap E_{IIIC,IB}$

C) Max $\gamma_{ij} = 2$ para (IB,S)

D) Cota para $E_{S,IIC}$ $E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIC,S} \cap$
$E_{IIIC,IB} \cap E_{IB,S} = 16$

E) Eliminar el renglón IB y la columna S y colocar ∞ en (IIIA, IIIC)

$$V_{24} = \begin{array}{c|ccc|} & IIIC & IIIB & IC \\ \hline IIIB & 1 & \infty & 1 \\ IIIA & \infty & 0 & 0 \\ IC & 1 & 1 & \infty \\ \beta_j & 1 & & \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIC,S} \cap$
$E_{IIIC,IB} \cap E_{IB,S} = 15$

F) $\delta = Min\ \{14,15,16\} = 14$ escojo

$E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA}$ $E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,S}$ para lo cual en la matriz V_{16} coloco ∞ en(IIC,S) y resto 1 al renglón IIC

$$V_{25}= \begin{array}{r|cccccc|} & S & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ IIIC & \infty & 0 & 0 & 0^{(1)} & 0 & 0 \\ IIIB & 0 & \infty & 0 & 1 & 0 & 0 \\ IIIA & 0^{(1)} & 3 & \infty & 4 & 3 & 1 \\ IB & 0^{(1)} & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 0 & 1 & \infty & 0 \\ IIC & \infty & 2 & 0^{(2)} & 3 & 2 & \infty \end{array}$$

C) Max $\gamma_{ij}= 2$ para (IIC,IIIA) cota para

D) $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,S} \cap E_{IIC,IIIA} = 16$

E) Eliminar el renglón IIC y la columna IIIA y colocar ∞ en (IIIA, IIC)

$$V_{26}= \begin{array}{r|ccccc|} & S & IIIB & IB & IC & IIC \\ IIIC & \infty & 0 & 0^{(1)} & 0 & 0 \\ IIIB & 0 & \infty & 1 & 0 & 0 \\ IIIA & 0^{(3)} & 3 & 4 & 3 & \infty \\ IB & 0^{(1)} & 1 & \infty & 1 & 1 \\ IC & 0 & 0 & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIC} \cap E_{IIC,IIIA} = 14$

F) $\delta = \text{Min}\ \{14,15,16\} = 14$ escojo

$E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \quad E_{IIC,IIIA}$

C) Max $\gamma_{ij} = 3$ para (IIIA,S)

D) Cota para $E_{S,\ IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{\ IIC,IIA} \cap E_{IIIA,S} = 17$

E) Eliminar el renglón IIIA y la columna S y colocar ∞ en (IIIC,IIC)

$$V_{27}= \begin{array}{c} \\ IIIC \\ IIIB \\ IB \\ IC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} IIIB & IB & IC & IIC \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \infty & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \infty & 0 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \end{array}$$

Cota para $E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIA,S} = 15$

F) $\delta = \text{Min}\ \{14,15,16,17\} = 14$ para

$E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{S,IB} \cap E_{IIC,S}$ para lo coloco en la matriz V_{18} ∞ en (IIC, S) y re sto 1 al renglón IIC .

$$V_{28} = \begin{array}{c} \\ S \\ IIIC \\ IIIB \\ IIIA \\ IB \\ IC \\ IIC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccccc} \infty & \infty & 0^{(1)} & \infty & \infty & 0^{(1)} & \infty \\ 0^{(1)} & \infty & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0^{(1)} & 3 & 4 & \infty & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ \infty & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & \infty \end{array}\right| \end{array}$$

$$
V_{30} = \begin{array}{c|cccc|}
 & IIIB & IIB & IC & IIC \\
IIIC & 0 & 0^{(1)} & 0 & \infty \\
IIIB & \infty & 1 & 0 & 0 \\
IB & 0 & \infty & 0 & 0 \\
IC & 0 & 1 & \infty & 0
\end{array}
$$

C) Max $\gamma_{ij} = 1$ para (IIIC,IB)

D) Cota para $\bar{E}_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIA,S}$ $\cap \bar{E}_{IIIc,IB} = 16$

E) Eliminar el renglón IIIC y la columna IB y colocar ∞ en (IB,IIC)

$$
V_{31} = \begin{array}{c|ccc|}
 & IIIB & IC & IIC \\
IIIB & \infty & 0 & 0 \\
IB & 0 & 0 & \infty \\
IC & 0 & \infty & 0
\end{array}
$$

Cota para $\bar{E}_{S,IIC} \cap \bar{E}_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,IIIA} \cap$ $E_{IIIA,S} \cap E_{IIIC,IB} = 15$

F) $\delta = \min\{15,16,17\} = 15$ escojo

$E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIIC,IB}$.

C) Max $\gamma_{ij} = 0$ escojo (IIIB,IC)

aquí podemos observar que la cota para E es igual a 15 ya que todas las γ_{ij} son cero

D) Cota para

$$E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIIC,IB} \cap E_{IIIb,IC} = 15$$

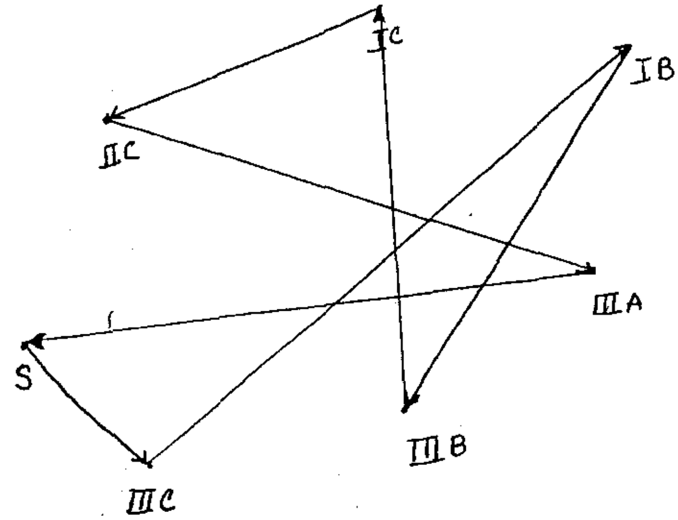
E) Eliminamos el renglón IIIB y la columna IC y colocamos ∞ la (IC,IIIB)

$$V_{32} = \begin{array}{c|cc|} & IIIB & IIC \\ IB & 0 & \infty \\ IC & \infty & 0 \end{array}$$

Cota para

$$E_{S,IIC} \cap E_{S,IIIA} \cap E_{S,IIIC} \cap E_{IIC,IIIA} \cap E_{IIIA,S} \cap E_{IIIC,IB} \cap E_{IIIB,IC} = 15$$

A partir de la matriz V_{31} podemos darnos cuenta cuales son los ârcos posibles (IB,IIIB) y (IC,IIC) repartir de estos arcos podemos encontrar el circuito hamiltoniano de E con mínima cota igual a 15



Al eliminar el vértice S tenemos el camino hamiltonia no mínimo de E con cota igual a 15.

IIIC, IB, IIIB, IC, IIC, IIIA.

Con lo cual tenemos un orden en el tiempo de los 6 depósitos iniciales. Si retomamos la matriz de incidencia A y escribimos el nuevo orden obtendríamos la matriz A' al compararlas observaríamos que ha disminuído el número de ceros - entre unos

A' =

	1	2	3	4	5	6	7	8
IIIC	0	0	1	1	1	1	1	0
IB	0	0	1	1	1	1	1	0
IIIB	1	0	1	1	1	1	1	0
IC	1	1	1	1	1	1	1	1
IIC	1	0	1	1	1	1	1	1
IIIA	1	0	1	0	0	1	0	1

Lo que en la matriz V de diferencias sería equivalente a escojer un elemento de cada columna salvo en una de ellas que correspondería al vértice inicial y uno en cada renglón salvo en una de ellas lo que correspondería al vértice final.

$$V = \begin{array}{c|cccccc} & IIIC & IIIB & IIIA & IB & IC & IIC \\ \hline IIIC & 3 & 3 & 6 & \boxed{3} & 3 & 6 \\ IIIB & 3 & 0 & 4 & 2 & \boxed{1} & 4 \\ IIIA & 6 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ IB & 3 & \boxed{2} & 5 & 2 & 2 & 5 \\ IC & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & \boxed{4} \\ IIC & 6 & 4 & \boxed{5} & 5 & 4 & 4 \end{array}$$

La suma de estos valores sería igual a 15 que es la cota de E.

Cabe hacer notar que el camino hamiltoniano antes encontrado no es el único, pueden haber más, sí continuamos la arboresencia, en algún vértice pendiente podríamos en algún momento encontrar otros caminos hamiltonianos con - cota igual a 15.

1.5 PROBLEMA DE AFECTACION

Consideremos p obreros X_1, X_2, X_3, ..., X_p y p trabajos Y_1, Y_2, ..., Y_p, definamos T_{ij} igual al tiempo, costo, etc. que el obrero i tarda en hacer el trabajo j, a partir de ésto podemos formar la matriz $[T_{ij}]$.

El problema es asignar a cada trabajo un obrero de tal forma que la suma de los tiempos, costos, etc. sea mínimo. Esto equivale a escoger un elemento de cada renglón y de cada columna de la matriz $[T_{ij}]$, por lo que podemos aplicar el algoritmo de Little.

En el caso en el que el número de trabajos sea menor que el de los obreros el problema será escoger una entrada en cada columna para lo cual se aplicará el algoritmo de Little teniendo en cuenta que los pasos A), B) y C) sólo podrán aplicarse a las columnas.

1.6 APLICACION DEL METODO DE COTA Y RAMA A UN PROBLEMA DE ASIGNACION

Una orquesta posee un repertorio de m obras, cada una de las cuales requiere una configuración propia de instrumentos.

La orquesta se propone dar un concierto de r obras $r \leq m$. Si cada músico sabe tocar un sólo instrumento se desea seleccionar r obras de forma que el total de músicos necesarios para su ejecución sea mínimo.

Consideremos la m x n matriz $[T_{ij}]$ donde m es el número de obras y n el número de instrumentos distintos de la orquesta y sea T_{ij} el número de instrumentos del tipo j que requiere la obra i en su interpretación.

El problema de la orquesta equivale entonces a elegir r renglones de la matriz $[T_{ij}]$ tal que sea mínima la suma de los máximos valores que sobre cada columna definen los r renglones. Es decir si $(i_1,i_2,\ldots,i_r)$ es una elección entonces la función de costo es $f(i_1,i_2,\ldots i_r)= \sum_{k=1}^{n} \max_{ij} T_{ijk}$. Se trata de minimizar éste valor.

En este problema el conjunto de repertorio posibles es igual a $\binom{m}{r}$ las posibles combinaciones de m en r.

Apliquemos el método de cota y rama al problema anterior.

A) Calculemos una cota inferior para E fijándonos que para cada posible elección de r renglones, el máximo valor definido sobre cada columna será mayor ó igual que el número que en orden ascendente, se coloca en la r-ésima posición (si hay dos ó más valores iguales se cuentan cada uno de ellos en posiciones distintas). A esos números r_j le llamaremos mínimos efectivos.

A la matriz $\left[T_{ij}\right]$ le añadiremos un renglón formado por los mínimos efectivos y una columna formada por $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}$ y $\sum_{j=1}^{n} r_j$ a la cual le llamaremos columna de totales. Cada una de las $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}$ nos dará el número de músicos que se necesita para interpretar cada una de las m obras y $\sum_{j=1}^{n} r_j$ nos dará una cota inferior al número de músicos que se necesita para interpretar r obras.

Es claro que al tomar el r-ésimo término de cada una de las n columnas estamos tomando una cota inferior para el número que de cada instrumento se necesita al escoger cualesquier r obras.

$$T = \left|\begin{array}{ccccc|c} T_{11} & \cdots & T_{ij} & \cdots & T_{1n} & \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_{i1} & \cdots & T_{ij} & \cdots & T_{in} & \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_{m1} & & T_{mj} & & T_{mn} & \sum_{j=1}^{n} T_{mj} \\ r_1 & & r_j & & r_n & \sum_{j=1}^{n} r_j \end{array}\right|$$

Se forma a partir de la matriz $[T_{ij}]$ la matriz $[K_{ij}]$ de excesos m x n donde $K = \max\{0, T_{ij} - r_j\}$. Se le añade una columna formada por $\sum_{j=1}^{n} K_{ij}$

$$K = \left|\begin{array}{ccccc|c} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1n} & \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ K_{i1} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{in} & \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ K_{m1} & \cdots & K_{mj} & \cdots & K_{mn} & \sum_{j=1}^{n} K_{mj} \end{array}\right|$$

Entonces una cota para el conjunto E a la que llamaremos M será

$$M = \sum_{j=1}^{n} r_j + (\text{i-ésimo valor en orden ascendente de las } \sum_{j=1}^{n} K_{ij})$$

que no es otra cosa que el mínimo efectivo de músicos que se necesita para interpretar r obras más el exceso sobre éste mínimo, para interpretar r obras.

B) Se fija en el mínimo de las $\sum_{j=1}^{n} K_{ij}$ y en su renglón correspondiente en la matriz $[T_{ij}]$ y aquí se tomará la primera propiedad separadora, supongamos que ésa elección es la obra B y formemos dos subconjuntos del conjunto E, el conjunto E_B aquel que contenga la elección B con la propiedad P_B y al cual le asociaremos la matriz T_B y $\bar{E}_B$ aquel que no contenga la elección B al cual le asociaremos la propiedad $\bar{P}_B$ y la matriz $\bar{T}_B$.

C) Calculemos ahora una cota inferior para $\bar{E}_B$. La matriz $\bar{T}_B$ será igual a la matriz T menos el renglón correspondiente a la elección B, a la cual le añadiremos un renglón formado por los r-ésimo términos en forma ascendente sobre las m columnas (ya que aún no tenemos ninguna elección hecha) llamados $r_j^{'}$ y añadamos una columna formada por $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}$.

$$\bar{T}_B = \left|\begin{array}{ccc|c} T_{11} & \cdots\cdots & T_{1n} & \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \\ \vdots & & \vdots & \\ T_{b-11} & \cdots\cdots & T_{b-1n} & \sum_{j=1}^{n} T_{b-1j} \\ T_{b+11} & \cdots\cdots & T_{b+1n} & \sum_{j=1}^{n} T_{n+1j} \\ \vdots & & \vdots & \\ T_{m1} & \cdots\cdots & T_{mn} & \sum_{j=1}^{n} T_{mj} \\ r'_1 & & r'_n & \sum_{j=1}^{n} r'_j \end{array}\right|$$

Nuevamente se forma a partir de la matriz $\bar{T}_B$ la matriz de excesos $K_{\bar{T}_B}$ donde los $K'_{ij} = \max[0, T_{ij} - r'_j]$ y se le añade a dicha matriz una columna formada por las $\sum_{j=1}^{n} K'_{ij}$ sobre cada renglón i.

$$K_{\bar{T}_B} = \left|\begin{array}{ccc|c} K'_{11} & \cdots\cdots & K'_{1n} & \sum_{j=1}^{n} K'_{ij} \\ \vdots & & \vdots & \\ K'_{b-11} & \cdots\cdots & K'_{n-1n} & \sum_{j=1}^{n} K'_{n-ij} \\ \vdots & & \vdots & \\ K'_{m1} & \cdots\cdots & K'_{mn} & \sum_{j=1}^{n} K'_{mj} \end{array}\right|$$

Entonces la cota para $\bar{E}_B$ a la que llamaremos M' será

$$M' = \sum_{j=1}^{n} r'_j + (\text{r-ésimo valor en forma ascendente de las } \sum_{j=1}^{n} K'_{ij})$$

es decir el mínimo efectivo de músicos que se necesita para interpretar r obras sin tomar en cuenta a la obra B más el exceso sobre este mínimo que se necesita para tocar r obras.

D) Calculemos ahora una cota para E_B. La matriz T_B estará formada de la siguiente manera los $T'_{ij} = \max[0, T_{ij} - T_{bj}]$ es decir T'_{ij} es el número de músicos adicionales que se necesita en el instrumento j para la obra i.

A dicha matriz se le añadirá un renglón formado por el (r-1)-ésimo término que en orden ascedente se encuentra sobre cada columna. A ese término le denotaremos r''_j ya que ahora necesitamos hacer una elección de r-1 obras

$$T_B = \left| \begin{array}{ccc|c} T'_{11} & \cdots\cdots & T'_{1n} & \sum_{j=1}^{n} T'_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \\ T'_{b-11} & \cdots\cdots & T'_{b-1n} & \sum_{j=1}^{n} T'_{b-1j} \\ \vdots & & \vdots & \\ T'_{m1} & & T'_{mn} & \sum_{j=1}^{n} T'_{mj} \\ r''_1 & & r''_n & \sum_{j=1}^{n} r''_j \end{array} \right.$$

Formemos ahora la correspondiente matriz de excesos donde los $K''_{ij} = \max\{0, T'_{ij} - r''_j\}$

$$K_{T_B} = \left|\begin{array}{ccc|c} K''_{11} & \cdots & K''_{1n} & \sum_{j=1}^{n} K''_{ij} \\ \vdots & & \vdots & \\ K''_{b-11} & \cdots & K''_{b-1n} & \sum_{j=1}^{n} K''_{b-1j} \\ \vdots & & \vdots & \\ K''_{m1} & \cdots & K''_{mn} & \sum_{j=1}^{n} K''_{mj} \end{array}\right.$$

La cota para E_B a la que llamaremos M'' será

$$M'' = \sum_{j=1}^{n} T_{bj} + (\text{r-1-ésimo valor en forma ascendente de los términos } \sum_{j=1}^{n} K''_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} r''_j$$

Lo que equivale al número de músicos que se necesita para interpretar la obra B menos los r-1-ésimos valores de los excesos sobre la obra B más la suma de los mínimos efectivos para interpretar r-1 obras.

E) Tomamos $S = \min\{M', M''\}$

F) Supongamos que S corresponde a M' para E_B, entonces escogemos una nueva obra C que defina una par tición sobre E_B a partir de las propiedades P_C y $\bar{P}_C$. Esta obra se escoge como en el paso B) y se continua aplicando el algoritmo.

G) Supongamos que S corresponde a M'' para E_B, entonces escogemos una nueva obra C que defina una partición sobre E_B a partir de propiedades P_C y $\bar{P}_C$, ésta obra se escogerá como en el paso B).

a) Formemos la nueva matriz $T_B \cap T_C$ a partir de la matriz T_B eliminando en esta el renglón correspondiente a la obra C. Aplicamos a esta nueva matriz el paso C) con la diferencia que los mínimos efectivos r''_j corresponderán al valor colocado en la r-1 posición al colocar en orden ascendente los elementos de cada columna. Una cota para $E_B \cap E_C$ que llamaremos M''' será

$$M''' = \sum_{j=1}^{n} r'''_j + (\text{r-1-ésimo valor ordenado en forma ascendente de las } \sum_{j=1}^{n} K'''_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} T_{bj}$$

b) Formamos la matriz $T_B \cap T_C$ a partir de la matriz T_B eliminando el renglón correspondiente a la elección C y donde los $T'''_{ij} = \max[0, T''_{ij} - T_{cj}]$ a esta matriz se le añadirá el renglón de mínimos efectivos r'^{ν}_{j} formado por los valores colocados en la r-2 posición al ordenar en forma ascedente los elementos de cada columna y la columna de totales. Se forma a partir de ésta matriz la correspondiente matriz de excesos $K_{T_B \cap T_C}$ con $K'^{\nu}_{ij} = \max\{0, T''_{ij} - r'^{\nu}_{j}\}$ más la columna de totales.

Entonces una cota para $E_B \cap E_C$ a la que llamaremos M'^{ν} será $M'^{\nu} = \sum_{j=1}^{n} \max \{T_{bj}, T_{cj}\}$ +(el valor colocado en la r-2 posición en orden ascedente de los $\sum_{j=1}^{n} K'^{\nu}_{ij}$)+ $\sum_{j=1}^{n} r'^{\nu}_{j}$.

Escogemos el mínimo de las cotas anteriormente obtenidas y repetimos el procedimiento hasta obtener las r obras.

1.6.1 APLICACION DEL ALGORITMO DEL PROBLEMA DE ASIGNACION

Aplicaremos el algoritmo del problema de asignación al siguiente ejemplo:

La Universidad desea ampliar su oferta educativa mediante la apertura de 3 carreras en una nueva plaza del Estado.

La institución dispone del siguiente cuadro que muestra las necesidades de profesores que requieren los cursos de las distintas carreras, cada profesor atenderá los cursos que le correspondan en todas las carreras

	Algebra	Cálculo	Mecánica	Programación	Geometría Analítica	Fluídos	Cálculo Avanzado
Ing. Civil	3	2	5	6	2	6	2
Lic. Mat.	3	8	9	6	8	1	5
Lic. Fis.	3	3	6	4	5	4	3
Geología	2	2	4	2	3	3	3
Ing. Química	1	1	3	3	5	3	4

Se desea seleccionar las 3 carreras de forma que el número de profesores sea mínimo. Para lo cual a la matriz anterior se le aumentará un renglón correspondiente a los mínimos efectivos es decir el tercer elemento por columna ordenado en forma ascendente y una columna de totales (para mayor facilidad a cada carrera se le asociará una letra C,M,F, G,Q y a cada materia una letra a,c,n,p,g,f,k) entonces obtendremos la siguiente matriz T

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & a & c & m & p & g & f & k & \\ \hline C & 3 & 2 & 5 & 6^{(2)} & 2 & 6^{(2)} & 2 & 26^{(4)} \\ M & 3 & 8^{(5)} & 9^{(4)} & 6^{(2)} & 8^{(3)} & 1 & 5^{(2)} & 40^{(17)} \\ F & 3 & 3^{(1)} & 6^{(1)} & 4 & 5 & 4^{(1)} & 3 & 28^{(3)} \\ G & 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 3 & 3 & 19 \\ Q & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 3 & 4^{(1)} & 20^{(1)} \\ \hline r_j & 3 & 2 & 5 & 4 & 5 & 3 & 3 & 25 \end{array}$$

En lugar de escribir las correspondientes matrices K_t las k_{ij} las escribiré sobre las T_{ij} correspondientes encerradas en un círculo.

A) La cota para E=M será

$$M = \sum_{j=1}^{7} r_j + \text{El tercer término en orden ascendente}$$

$$\text{de } \sum_{j=1}^{7} K_{ij} = 25+3 = 28$$

B) Aquí aplicamos la primera propiedad separadora nos fijamos en la carrera que corresponda al min $\sum_{j=1}^{7} K_{ij}$ la cual es G, a partir de esta elección formaremos 2 subconjuntos a partir del conjunto E. El conjunto E_G es aquel que contenga la elección G con propiedad P_G y al que asociaremos la matriz T_G, y $\bar{E}_G$ aquel que no contenga la elección G con la propiedad $\bar{P}_G$ y al que asociaremos la matriz $\bar{T}_G$

C) Calculamos una cota inferior para $\bar{E}_G$ para la cual eliminamos de la matriz T el renglón correspondiente a G, y le añadimos un renglón formado por los 3eros términos ordenados en forma ascendente de cada columna, ya que aún no hemos hecho ninguna elección, la columna de totales y los K_{ij} encerrados en un círculo arriba de las correspondientes T_{ij}.

$\bar{T}_G$ =

	a	c	m	p	g	f	k	
C	3	2	5	6	2	$6^{(2)}$	2	$26^{(2)}$
M	3	$8^{(5)}$	$9^{(3)}$	6	$8^{(3)}$	1	$5^{(1)}$	$40^{(12)}$
F	3	$3^{(0)}$	6	4	5	4	3	$28^{(0)}$
Q	1	1	3	3	5	3	4	$20^{(0)}$
r'_j	3	3	6	6	5	4	4	31

Cota para $\bar{E}_G$ = M'

$$M' = \sum_{j=1}^{7} r'_j + \text{3er término en forma ascendente de} \sum_{j=1}^{7} K_{ij}$$

$$M' = 31+2 = 33$$

D) Calculamos una cota para E_G para la cual eliminamos de la matriz T el renglón G y los $T'_{ij}=\max\{0,T_{ij}-T_{Gj}\}$. A dicha matriz se le añadirá el renglón formado por el segundo término que en orden ascendente se encuentra sobre cada columna. Ya que necesitamos hacer una elección de 2 carreras

$T_G =$

	a	c	m	p	g	f	k	
C	1	0	0	$2^{(2)}$	0	$2^{(2)}$	0	$5^{(4)}$
M	1	$6^{(6)}$	$4^{(4)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	0	$2^{(2)}$	$18^{(17)}$
F	1	$1^{(1)}$	$1^{(1)}$	0	0	$1^{(1)}$	0	$4^{(3)}$
Q	0	0	0	0	0	0	$1^{(1)}$	$1^{(1)}$
r''_j	1	0	0	0	0	0	0	1

Cota para E_G = M"

$$M'' = \sum_{j=1}^{7} T_{Gj} + \text{el segundo valor en forma ascendente de } \sum_{j=1}^{7} K_{ij} + \sum_{j=1}^{7} r_j$$

$$M'' = 19+3+1 = 23$$

E) Tomamos el min $\{33, 23\} = 23$ para E_G

G) Nos fijamos en la matriz T_G y tomamos la carrera que corresponda al min $\sum_{j=1}^{7} K_{ij}$ la cual corresponde a Q y partimos el conjunto E_G en dos subconjuntos $E_G \cap \bar{E}_Q$ que no incluya a Q con matriz $T_G \cap \bar{T}_Q$ y $E_G \cap E_Q$ que incluye a Q con matriz $T_G \cap T_Q$.

a) Formamos la nueva matriz $T_G \cap \bar{T}_Q$ a partir de la matriz T_G eliminando de esta el renglón correspondiente a Q y aumentando un renglón de los segundos términos en orden ascendente en cada columna ya que solo tenemos 1 carrera

$T_B \cap \bar{T}_Q$ =

	a	c	m	p	g	f	k	
C	1	0	0	2	0	$2^{(2)}$	0	$5^{(2)}$
M	1	$6^{(5)}$	$4^{(3)}$	2	$3^{(3)}$	0	$2^{(2)}$	$18^{(13)}$
F	1	1	1	0	0	1	0	$4^{(0)}$
r'''_j	1	1	1	2	0	1	0	6

Cota para $E_G \cap \bar{E}_Q = M'''$

$M''' = \sum_{j=1}^{7} r'''_j$ + el segundo valor en orden ascendente de $\sum_{j=1}^{7} K_{ij} + \sum_{j=1}^{7} T_{Gj}$

$M''' = 6+2+19= 27$

b) Formemos la matriz $T_G \cap T_Q$ a partir de la matriz T_G eliminando de esta el renglón Q y donde los T''_{ij} = max $\{0, T'_j - T_{Qj}\}$ se le añadirá también un renglón correspondiente a el primer término de cada columna ordenado en forma ascendente ya que solo falta una elección

$T_G \cap T_Q =$

	a	c	m	p	g	f	k	
C	1	0	0	$2^{(2)}$	0	$2^{(2)}$	0	$5^{(4)}$
M	1	$6^{(6)}$	$4^{(4)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	0	$1^{(1)}$	$17^{(16)}$
F	1	$1^{(1)}$	$1^{(1)}$	0	0	$1^{(1)}$	0	$4^{(3)}$
r'''_j	1	0	0	0	0	0	0	1

Cota para $E_G \cap E_Q = M^4$

$M^4 = \sum_{j=1}^{7} \max \{T_{Gj}, T_{Qj}\}$ + el primer término en orden ascendente de $\sum_{j=1}^{7} K_{ij} + \sum_{j=1}^{7} r_j$

$= 2+2+4+3+5+3+4+3+1 = 27$

E) min $\{33, 27, 27\} = 27$ escojo arbitrariamente $E_G \cap E_Q$

G) Nos fijamos en la matriz $T_G \cap T_Q$ el min $\sum_{j=1}^{7} K_{ij}$ que equivale al renglón F.

a) Construímos la nueva matriz $T_G \cap T_Q \cap \bar{T}_F$ eliminando el renglón F de la matriz $T_G \cap T_Q$ y aumentando un renglón con los primeros elementos de cada columna.

$$T_G \cap T_Q \cap \bar{T}_F = \begin{array}{c} \\ C \\ M \\ r_j \end{array} \begin{array}{|ccccccc|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & c & m & p & g & f & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2^{(2)} & 0 & 5^{(2)} \\ 1 & 6^{(6)} & 4^{(4)} & 2 & 3^{(3)} & 0 & 1 & 17^{(14)} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Cota para $E_G \cap E_Q \cap \bar{E}_F = M^5$

$M^5 = \sum_{j=1}^{7} \max \{T_{Gj}, T_{Qj}\} + \sum_{j=1}^{n} r_j$ + primer término de $\sum_{j=1}^{n} K_{ij}$

$= 2+2+4+3+5+3+4+3+2= 28$

b) La cota para $T_G \cap T_Q \cap T_F = \sum_{j=1}^{7} \max \{T_{Gj}, T_{Qj}, T_{Fj}\}$

$M^6 = 3+3+6+4+5+4+4= 29$.

E) $\min \{23,26,28,29\} = 26$ para $E_G \cap \bar{E}_Q$

F) Escogemos una nueva carrera que corresponderá a fijarnos en la matriz $T_G \cap \bar{T}_Q$ y escoger el min $\sum_{j=1}^{7} K_{ij}$ el cual corresponde al renglón F.

a) La cota para $E_G \cap \bar{E}_Q \cap \bar{E}_F$ que llamaré M^7 sera

$$M^7 = \sum_{j=1}^{7} \max \{T_{Gj},\ T_{Cj}, T_{mj}\} = 3+8+9+6+8+6+3 = 45$$

b) Construyamos a partir de la matriz $T_G \cap \bar{T}_Q$ la matriz $T_G \cap \bar{T}_Q \cap T_F$ eliminando el renglón F y las $T'''_{ij} = \max \{0,\ T''_{ij} - T_{Fj}\}$ y aumentando un renglón equivalente a el primer término en orden ascendente de cada columna

	a	c	m	p	g	f	k	
C	0	0	0	2	0	$2^{(2)}$	0	$4^{(2)}$
M	0	$5^{(5)}$	$3^{(3)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	0	$2^{(2)}$	$15^{(15)}$
$\bar{r}_j$	0	0	0	2	0	0	0	2

Cota para $E_G \cap \bar{E}_Q \cap E_F$ que llamaré M^8 será

$$M^8 = \sum_{j=1}^{n} \max \{T_{Gj},\ T_{Fj}\} + \sum_{j=1}^{7} r_j + \text{primer término}$$

$$\sum_{j=1}^{7} K_{ij}$$

$$M^8 = 3+3+6+4+5+4+3+2+2 = 32$$

E) $\min \{33, 28, 29, 45, 32\} = 28$ para $E_G \ E_Q \ \bar{E}_F$

F) a) Cota para $E_G \cap E_Q \cap \bar{E}_F \cap E_C = \sum_{j=1}^{m} \max \{T_{Gj},\ T_{Qj},\ T_{Cj}\}$

$$= 3+2+5+6+5+6+4$$

$$= 31.$$

b) Cota para $E_G \cap E_Q \cap \bar{E}_F \cap E_M$

$$= \sum_{j=1}^{n} \max \{T_{Gj}, T_{Qj}, T_{mj}\} = 3+8+9+6+8+3+5 = 42$$

E) min {33,31,42,45,32,29} = 29 para E_G E_Q E_F

Finalmente E_G E_Q E_F corresponde a una solución única cuya cota es 29 y que corresponde a la elección de las carreras Geología, Ingeniería Química y Física la cual es óptima, representada en la fig. 1.

Entre mayor sea el número de profesores y de carreras más se notará la ventaja del método de rama y cota.

Para finalizar proponemos 1 problema que puede resolverse aplicando el método anterior.

1) Dada una matriz mxn, construir una algoritmo que permita escoger r renglones r<m tales que la suma de las diferencias entre el valor máximo y el valor mínimo definidos por esos r renglones sobre cada columna sea mínima.

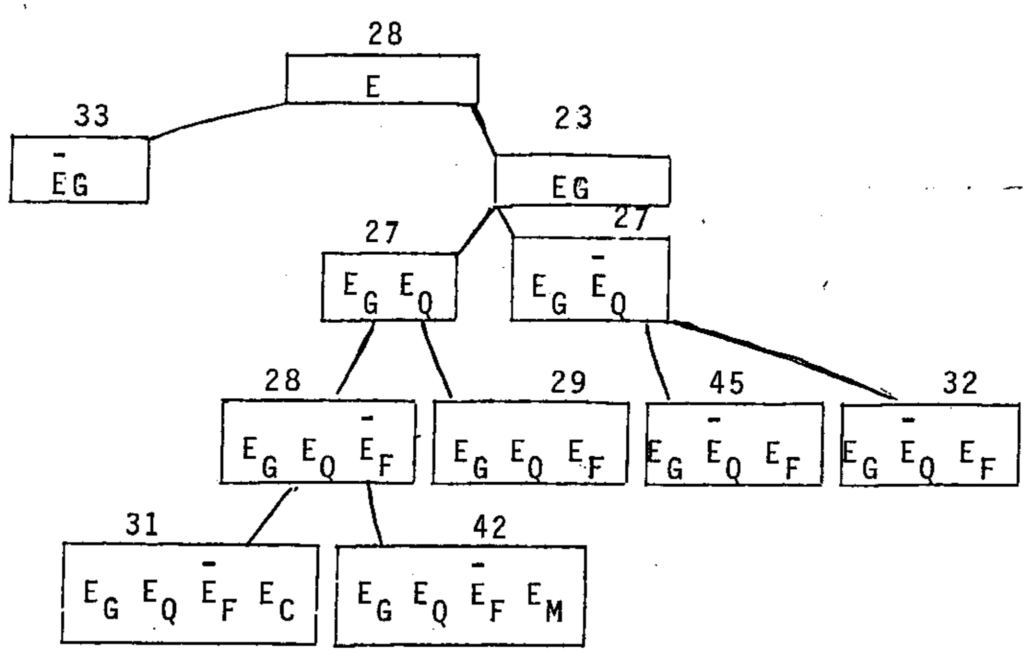

28
E
33
$\bar{E}G$
23
EG
27
$E_G\ E_Q$
27
$E_G\ \bar{E}_Q$
28
$E_G\ E_Q\ \bar{E}_F$
29
$E_G\ E_Q\ E_F$
45
$E_G\ \bar{E}_Q\ E_F$
32
$E_G\ \bar{E}_Q\ E_F$
31
$E_G\ E_Q\ \bar{E}_F\ E_C$
42
$E_G\ E_Q\ \bar{E}_F\ E_M$

FIG. 1.

CAPITULO II
METODO DE PROGRAMACION DINAMICA

Considérese un sistema dinámico de parámetro discreto o por etapas

$$x_1 = g_i(x_{i-1}, u_i) \qquad i=1,\ldots,n$$

donde x_i se denomina la variable de estado, es decir resume toda la información del sistema en la etapa i y denotaremos por S_i el conjunto de estados en la etapa i. Así mismo, u_i se denomina la variable de decisión y denotaremos por C_i el conjunto de decisiones en la etapa i.

La función g_i se denomina la función de transformación de estados y permite determinar el estado en que se encuentra el sistema en la etapa i dado que se conoce el estado inicial en la etapa i-1 y dado que se tomó la decisión u_i.

Dado un estado inicial x_0 se desea determinar la política de decisiones

$$\Pi = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, \ldots, u_n^*) = \text{tal que minimice}$$
$$z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_{i-1}, x_i, u_i)$$

sujeto a

$$x_i = g_i(x_{i-1}, u_i) \qquad i=1,\ldots,n$$

$$x_i \in S_i \quad ; \quad u_i \in C_i \qquad i=1,\ldots,n$$

donde las funciones g_i y f_i $i=1,\ldots,n$ son conocidas y se llaman funciones de costo.

Una descripción esquemática del desarrollo del sistema dinámico de parámetro discreto con su correspondiente proceso de evaluación se muestra en la figura 1. Así mismo, una explicación de la manera en que se toman las decisiones, se transforman los estados y evalúan las decisiones, se tiene a continuación:

ETAPA 1. El decisor observa el estado inicial x_0 y basado en esta información efectúa la decisión u_1 (que debería escribirse $u_1(x_0)$). Como resultado de esto se obtiene el estado x_1 de acuerdo a la transformación $x_1=g_1(x_0,u_1)$ y el correspondiente valor asociado a tales estados y decisiones, denotado $f_1(x_0,x_1,u_1)$.

ETAPA k. El decisor observa el estado x_{k-1} y basado en está información toma la decisión u_k. Entonces, la transformación $g_k(x_{k-1},u_k)$ proporciona el nuevo estado x_k y se contabiliza el correspondiente costo o beneficio representado por el escalar $f_k(x_{k-1},x_k,u_k)$.

ETAPA n. El decisor observa el estado x_{n-1} y efectúa la decisión u_n. Se obtiene el nuevo estado x_n y el correspondiente costo o beneficio $f_n(x_{n-1}, x_n, u_n)$.

Lo que se desea en este proceso de decisiones secuenciales es determinar la política $\Pi = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, \ldots, u_n^*)$ que minimice la suma total de los costos incurridos en cada etapa, esto es

$$\min \sum_{i=1}^{n} f_i(x_{i-1}, x_i, u_i)$$

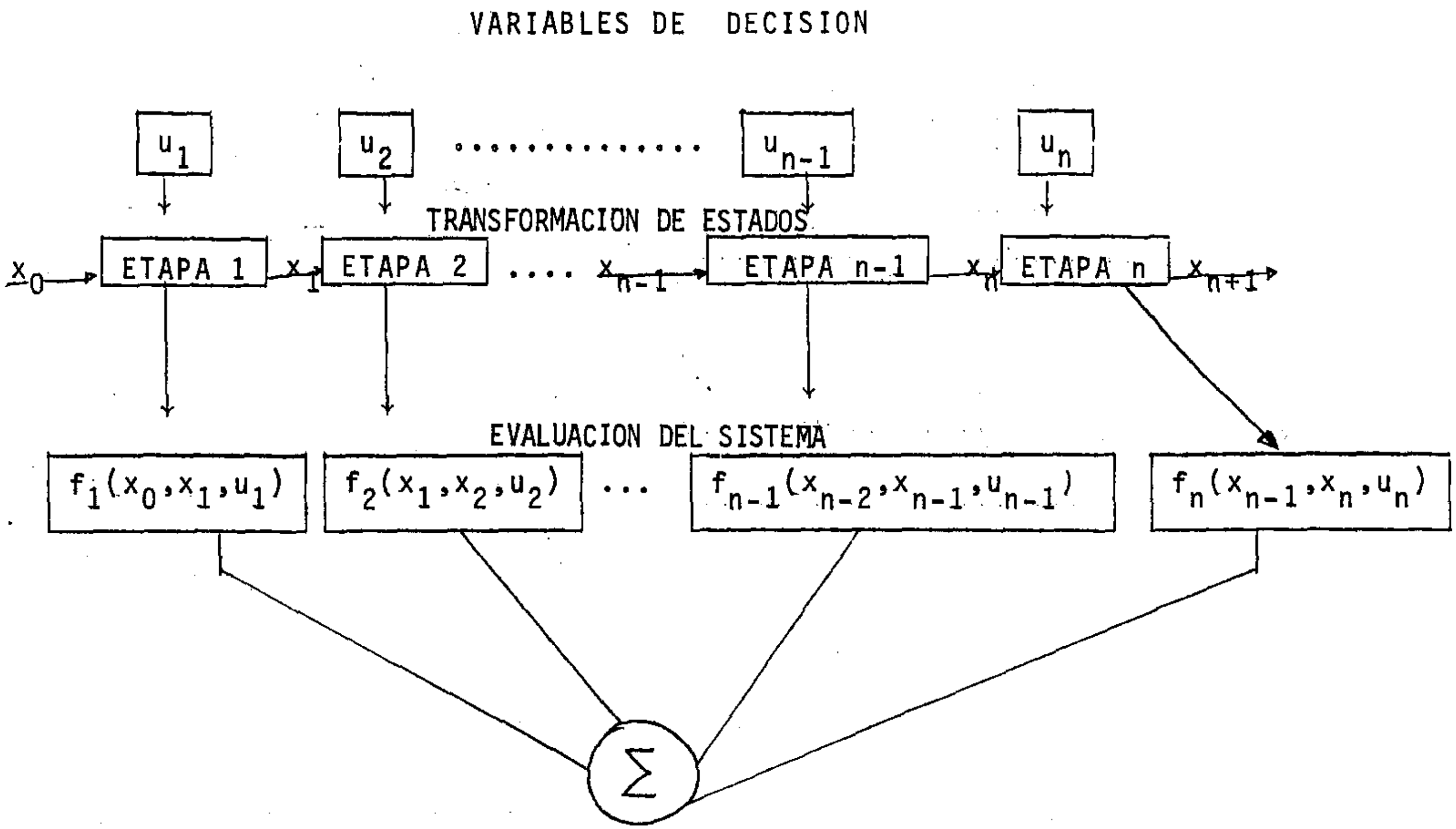


Fig. 1. Diagrama de desarrollo del sistema

Una manera de representar el conjunto de estados S_i y de decisiones C_i para $i=1,\ldots,n$ de un sistema dinámico, se hace también mediante una gráfica N donde los estados se representarán como vértices y a cada posible decisión u_i $i=1,\ldots,n$ se le asocia un arco que une el estado inicial con el estado final resultante de esa decisión. La función de costo se representará dándole pesos $f_i(x_{i-1},x_i,u_i)$ a los arcos correspondientes. Entonces $z=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_{i-1},x_i,u_i)$ representa el costo de la trayectoria definida a partir de las decisiones u_i en la gráfica N. Minimizar z equivaldrá entonces a encontrar una trayectoria óptima en la gráfica N.

El principio de optimalidad de Bellman dice: "un vector de decisión óptima tiene la propiedad que cualesquiera que sean el estado y la decisión iniciales, las decisiones restantes deben constituír un vector de decisión óptima con respecto al estado resultante de la decisión inicial". Es decir si:

$J(x_{i_j}, x_{i_{j+1}})$ es el costo de llevar el sistema en la etapa j del estado x_{i_j} a $x_{i_{j+1}}$

y $J^*(x_0,x_n)$ el costo de la trayectoria óptima para ir desde x_0 hasta x_n entonces la porción de ésta trayectoria que comienza en el estado x_{i1} y termina en el estado x_n será la trayectoria óptima que une estos dos estados.

Apliquemos el "principio de optimalidad" etapa por etapa esto nos lleva a:

$$J^* (x_0,x_n) = \min_{i_1} \{ J(x_0,x_{i_1}) + J^* (x_{i_1}, x_n)\}$$

donde x_{i_1} representa para todos los posibles valores de i_1 los posibles estados en que puede encontrarse el sistema al final de la primera etapa. Análogamente:

$$J^* (x_0,x_n)= \min_{i_1} \{J(x_0,x_{i_1})+ \min_{i_2} \{ J(x_{i_1},x_{i_2})+ J^* (x_{i_2},x_n)\}$$

$$= \min_{i_1} \{J(x_0,x_{i1})+ \min_{i_2} \{J(x_{i_1},x_{i_2})+ \min_{i_3} \} J(x_{i_2},x_{i_3})$$

$$+\ldots+ \min_{i_{n-1}} \{J(x_{i_{n-2}}, x_{i_{n-1}})+ J(x_{i_{n-1}},x_n) \}\ldots \}$$

donde $\{x_{i_j}\}$ representa el conjunto de estados al principio de la etapa j.

El método de programación dinámica nos lleva a transformar el problema inicial de minimización de n etapas que envuelve una elección de u_i $i=1,\ldots,n$ decisiones en una sucesión de un problema de minimización de una etapa que envuelve elecciones de u_1 entonces u_2 entonces alguna otra decisión.

II.1 UN PROBLEMA DE RUTA

Como una aplicación del método de programación dinámica, consideremos el siguiente problema de ruta el cual tiene una gran variedad de aplicaciones. Supongamos que tenemos N ciudades numeradas 1,2,...,n en algún orden y un conjunto de números $J(x_i, x_j)$ donde $J(x_i, x_j)$= el tiempo requerido para ir de la ciudad i a la j.

Comenzando en la primera ciudad, queremos trazar una trayectoria a la n-ésima ciudad la cual sea de tiempo mínimo. Podemos ir directamente de la primera a la n-ésima ciudad ó pasando por cualquiera de las otras ciudades.

En algunas ocasiones no hay conección entre 2 ciudades en particular, en este caso consideremos $J(x_i, x_j) = \infty$

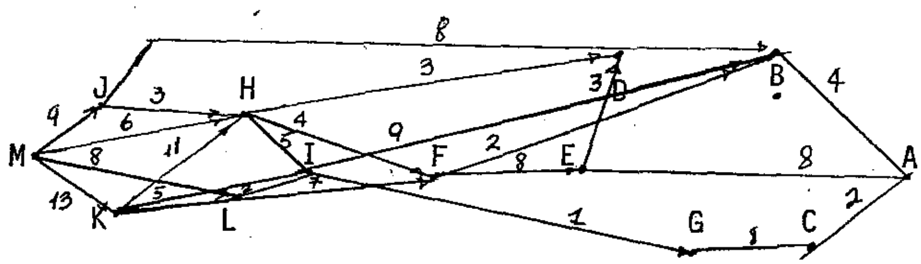
Si N es muy grande, cualquier solución enumerativa directa es imposible. Consideremos el problema general de minimizar el tiempo requerido para ir de la i-ésima a la n-ésima ciudad. Sea $J(x_i, x_n)$= el tiempo requerido para ir de la i-ésima a la n-ésima ciudad usando la trayectoria óptima.

Entonces

$$J^*(x_i,x_n) = \min_{j \neq i} \{J(x_i,x_j) + J^*(x_j,x_n)\}$$

A lo anterior podemos aplicarle el método recursivo de la programación dinámica.

Busquemos el camino o trayectoria de valor mínimo entre M y A de la siguiente gráfica



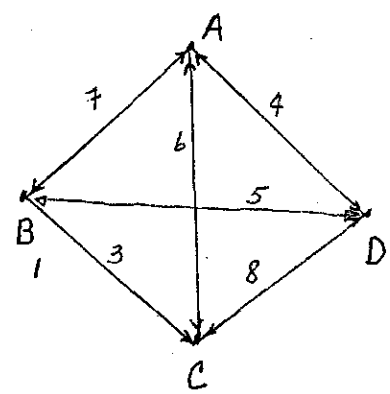
Para lo cual construíremos una tabla en la cual representaremos el vértice de salida, el vértice adyacente, - $J(x_i,x_j) + J^*(x_j,x_n)$, valor de la trayectoria óptima, trayectoria óptima.

vértice de salida	vértice adyacente	$J(x_i,x_j)+ J^*(x_j,x_n)$	valor de la trayectoria óptima	trayectoria óptima
B	A	4	4	B-A
C	A	2	2	C-A
D	B	5 + 4 = 9	9	D-B-A
G	C	8 + 2 = 10	10	G-C-A
E	D	3 + 9 = 12		
	A	8	8	E-A
F	E	8 + 8 = 16		
	B	2 + 4 = 6	6	F-B-A
I	D	9 + 4 = 13		
	F	8 + 6 = 14		
	G	1 +10 = 11	11	I-G-C-A
H	D	3 + 9 = 12		
	E	8 + 6 = 14		
	F	4 + 6 = 10		
	I	5 +11 = 16	10	H-F-B-A
L	I	2 +11 = 13	13	L-I-G-C-A
J	B	8 + 4 = 12		
	H	3 +10 = 13	12	J-B-A
K	H	11 +10 = 21		
	I	5 +11 = 16		
	F	7 + 6 = 13	13	K-F-B-A
M	J	9 +12= 21		
	H	6 +10= 16		
	L	8 +13= 21		
	K	13 +13= 26	16	M-H-F-B-A

La trayectoria óptima para ir de M a A será M-H-F-B-A con valor igual a 16.

II.2 APLICACION AL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO

El problema del Agente Viajero que discutimos en las apli caciones del Capítulo I, puede también ser resuelto por el mé todo de programación dinámica aplicado al árbol que definen las distintas permutaciones de las N ciudades. Por ejemplo si tene mos 4 ciudades y costos de transporte entre ellas dados como en la figura que sigue



podemos construír el árbol de la figura 2.

Aunque el método de programación dinámica puede aplicar se a éste problema, el método de cota y rama es más eficiente ya que si el número de ciudades en muy grande el árbol correspondiente sería difícil de construír, pues constaría de N! vértices finales.

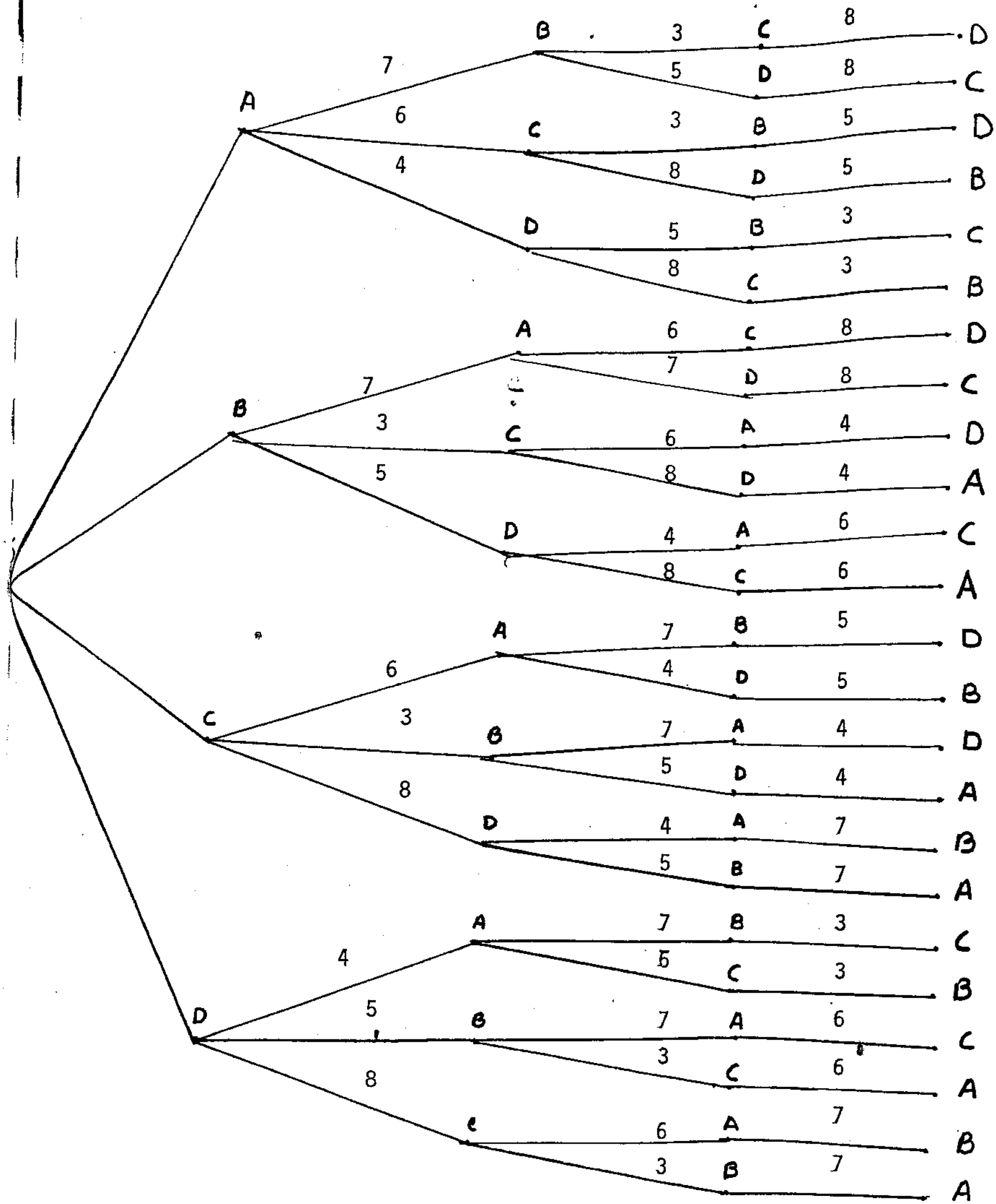


Fig. 2.

B I B L I O G R A F I A

1. Introducción a la Combinatoria y sus Aplicaciones.
A. Kaufmann. Editorial C.E.C.S.A.

2. Métodos de Optimización. Programación Lineal Gráficas.
Francisco J. Jauffrid M., Alberto Moreno Bonet, J. Jesús Acosta.
Editorial Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A.

3. Applied Dynamic Programming.
Billman end Dreyfus. Editorial Princenton.

4. Mathematical Methods in Operation Research.
Gue/Thomas. Editorial Macmillan.

5. Optimal Control Theory un Introduction.
W. Kirk. Editorial Prentice-Hall.

6. Matrix end Network Models in Archeology. Mathematics Magazine. Vol. 57. No. 1., Enero 1984.

7. Adaptive Control Processes: A Guided Tour.
Bellman Richard. Princeton University Press, Princeton New Jersey.

Trabajo Mecanografiado por:
Blanca Irene Tapia Vásquez.