TESIS #58

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FLUJOS SOBRE REDES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

JOAQUIN HUMBERTO LOPEZ BORBON

HERMOSILLO, SONORA. *JULIO DE 1986.*

A LA MEMORIA DE MI
HIJO KIKIRITO, MI
ANGEL DE BUENA FE.

EN HONOR A MIS PADRES
DOÑA EMY Y DON BETO

UNA HUMILDE MUESTRA
DE CONFIANZA, PARA
MIS HERMANOS RODRI-
GO Y DAVID.

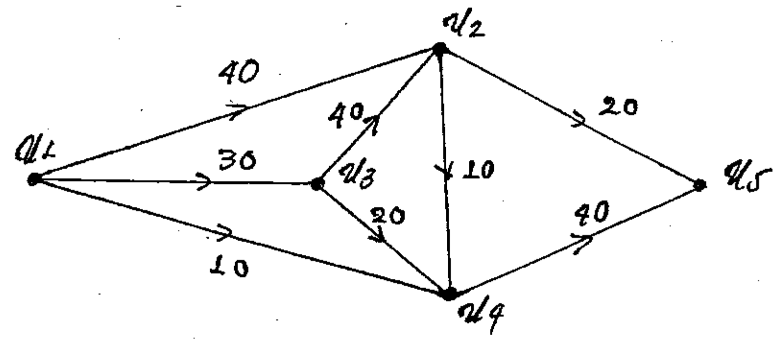
A MI ESPOSA GOYITA
CON TODO MI AMOR.

MI MAS SINCERO RECONOCIMIENTO Y ADMIRACION AL DR. RUBEN FLORES ESPIÑOZA, YA QUE SIN SU ASESORIA, DIFICILMENTE HUBIERA TERMINADO ESTE TRABAJO DE TESIS. TAMBIEN AGRADESCO AL M.C. OSCAR MARIO RODRIGUEZ Y EN GENERAL, A TODOS MIS MAESTROS DE CARRERA.

I N T R O D U C C I O N

HOY EN DIA, NUESTRA SOCIEDAD ESTA REGIDA POR REDES: REDES DE TRANSPORTE; REDES DE COMUNICACION; REDES DE DISTRIBUCION DE AGUA, GAS, DRENAJE, ENERGIA ELECTRICA, PRODUCTOS DE CONSUMO, ETC. ES POR ESTO, QUE EL ANALISIS MATEMATICO DE TALES REDES, HA EMPEZADO HA SER ESTUDIO DE FUNDAMENTAL IMPORTANCIA. DE AHI, LA RAZON DEL PRESENTE TRABAJO DE TESIS.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE PROBLEMA: " UNA FABRICA (v_1) QUIERE ENVIAR ALGUNAS CAJAS, A UN MERCADO (v_5), Y TIENE VARIOS CAMINOS PARA HACERLO, COMO LO MUESTRA LA FIGURA,



EL NUMERO QUE APARECE EN CADA CAMINO, ES LA CAPACIDAD MAXIMA DE CAJAS QUE PUEDE PASAR. ¿ CUAL ES LA CANTIDAD MAXIMA DE CAJAS, QUE PUEDEN SER ENVIADAS DE (v_1) A (v_5), A TRAVES DE LA RED, SIN EXEDER LA CAPACIDAD DE CADA UNO DE LOS CAMINOS ?.

LA RED PUEDE REPRESENTAR CALLES DE UN SOLO SENTIDO, Y EL NUMERO, LA CAPACIDAD MAXIMA DE VEHICULOS QUE PUEDEN PASAR POR HORA, POR CADA CALLE. ENTONCES SE QUIERE ENCONTRAR EL FLUJO MAXIMO DE VEHICULOS POR HORA, QUE PUEDEN IR DE u_i A u_f.

TAMBIEN LA RED DE LA FIG. PUEDE REPRESENTAR UNA RED DE DISTRIBUCION DE AGUA POTABLE, DE LA FUENTE u_i A u_f (u_f PUEDE REPRESENTAR UNA COLONIA), Y LOS NUMEROS, LA CAPACIDAD MAXIMA DE CADA TUBO. ETC.

EN EL PRIMER CAPITULO DE LA TESIS, SE CONSTRUYE LA HERRAMIENTA NECESARIA, PARA RESOLVER EL PROBLEMA PLANTEADO. ESTA HERRAMIENTA, CORRESPONDE A ANALISIS COMBINATORIO Y TEORIA DE GRAFICAS. ESTE CAPITULO CONTIENE LO SIGUIENTE:

-SE DEFINEN LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES; RED CAPACITADA, FLUJO SOBRE REDES, CORTE Y CAPACIDAD DE CORTE.

-SE DEMUESTRA EN FORMA CONSTRUCTIVA, EL TEOREMA CENTRAL DE LA TESIS.

TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE.-"EN UNA RED CAPACITADA, EL VALOR MAXIMO DE UN FLUJO, ES IGUAL A LA CAPACIDAD MINIMA DE UN CORTE."

-SE DEDUCE EL ALGORITMO DE FORD-FULKERSON, PARA ENCONTRAR FLUJOS MAXIMOS EN UNA RED DADA.

EN EL SEGUNDO CAPITULO, SE ANALIZAN REDES MAS AMPLIAS, PARA DAR SOLUCION A PROBLEMAS MAS REALES. Y SE DAN METODOS PARA REDUCIR UN PROBLEMA DE FLUJOS, SOBRE ESTE TIPO DE REDES, A UN PROBLEMA DE MAXIMO FLUJO, PARA ASI APLICAR EL ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON. AQUI SE ANALIZA:

-LA RED CON FUENTES Y SUMIDEROS MULTIPLES. ANALIZA,POR EJEM. EL FLUJO SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCION DE AGUA POTABLE, CON VARIAS PILAS ABASTECEDORAS, PARA CONSUMO DE VARIAS COLONIAS, TERMINALES EN LA RED.

-LA RED CON CAPACIDAD EN LOS VERTICES. PUEDE ANALIZAR, POR EJEM. EL FLUJO DE UNA RED DE CARRETERAS, CON CAPACIDAD MAXIMO DE TRAFICO Y LOS VERTICES REPRESENTAR CIUDADES, QUE TAMBIEN POSEEN UNA CAPACIDAD INTERNA DE TRAFICO.

-EL FLUJO MINIMO EN RED CAPACITADA INFERIORMENTE. EN MUCHOS PROBLEMAS DE REDES,SE NECESITA ENCONTRAR EL FLUJO MINIMO SOBRE UNA RED,SUJETO A CAPACIDADES INFERIORES.

-EL FLUJO MAXIMO Y EL FLUJO MINIMO EN RED CAPACITADA INFERIOR Y SUPERIORMENTE. EN ESTA RED PUEDE SER POSIBLE, QUE NO EXISTA FLUJO QUE CUMPLA CON LAS CAPACIDADES, AQUI SE DA EL METODO PARA ENCONTRAR EL FLUJO MAXIMO O EL FLUJO MINIMO, EN CASO DE QUE EXISTAN

-EL FLUJO MAXIMO Y FLUJO MINIMO CON GASTO EN LOS VERTICES. POR LO GENERAL, EN LAS REDES SE CUENTA CON VARIAS FUENTES, QUE PUEDEN SUMINISTRAR FLUJOS, ENTRE CIERTAS COTAS DADAS, ADEMAS EN LOS VERTICES RESTANTES, SE PRODUCEN GASTOS, TAMBIEN ESTIMADOS ENTRE CIERTAS COTAS DADAS (INCLUSIVE EL GASTO CERO). CON ESTE ANALISIS, SE PUEDE ENCONTRAR (SI ES QUE EXISTE) EL FLUJO MAXIMO QUE SATISFACE LAS COTAS DE SUMINISTRO Y GASTO, O EL FLUJO MINIMO QUE SATISFACE LAS MINIMAS NECESIDADES DE GASTO Y SUMINISTRO, ETC.

EL TERCER CAPITULO, CON EL TEOREMA DE FACTIBILIDAD, SE DEDUCEN LAS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES, PARA LA EXISTENCIA DE FLUJOS, SUJETO A CIERTAS COTAS DE SUMINISTRO Y COTAS DE GASTO. Y SE DAN LAS SIGUIENTES APLICACIONES A COMBINATORIA:

-APLICACION A MATRICES. SE OBTIENEN CRITERIOS PARA LA EXISTENCIA DE UNA MATRIZ NO NEGATIVA, CUYA SUMA DE RENGLONES Y SUMA DE COLUMNAS, ESTAN ENTRE COTAS DESIGNADAS, ADEMAS LAS ENTRADAS DE LA MATRIZ SEAN ACOTADAS SUPERIORMENTE POR NUMEROS ESPECIFICOS.

-PROBLEMA DE LA SUBDIGRAFICA.-CONSISTE EN DETERMINAR, CONDICIOBAJO LAS CUALES, UNA DIGRAFICA TIENE UNA SUBDIGRAFICA, CON

NUMERO DADO DE ARCOS QUE ENTRAN Y NUMERO DADO DE ARCOS QUE SALEN, DE CADA UNO DE LOS VERTICES.

-SISTEMA DE DISTINTOS REPRESENTANTES. ESTE ES EL FAMOSO TEOREMA DE P. HALL, MEJOR CONOCIDO COMO EL TEOREMA DEL MATRIMONIO.

-PROBLEMA DE ASIGNACION DE EMPLEOS. SE DEDUCEN LAS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES, PARA ASIGNAR UN CONJUNTO DE EMPLEOS DISPONIBLES, A ASPIRANTES CALIFICADOS COMO APROPIADOS O NO APROPIADOS PARA CADA UNO DE LOS EMPLEOS.

EL PROBLEMA DE FACTIBILIDAD Y PROBLEMA DE ASIGNACION DE EMPLEOS, SON ANALIZADOS TAMBIEN POR METODOS DE PROGRAMACION LINEAL.

CON ESTE TERCER CAPITULO SE CONCLUYE EL TRABAJO DE TESIS.

F L U J O S   S O B R E   R E D E S

I TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE

I.1 DEFINICIONES BASICAS

I.2 TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE

I.3 ALGORITMO DE FORD-FULKERSON

II AMPLIACIONES DEL TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE

II.1 RED CON FUENTES Y SUMIDEROS MULTIPLES

II.2 RED CAPACITADA EN ARCOS Y VERTICES

II.3 FLUJO MINIMO EN RED CAPACITADA INFERIORMENTE

II.4 FLUJO MAXIMO EN RED CAPACITADA INFERIOR Y SUPERIORMENTE

II.5 FLUJO MINIMO EN RED CAPACITADA INFERIOR Y SUPERIORMENTE

II.6 FLUJO MAXIMO Y FLUJO MINIMO EN RED CON GASTO EN LOS VERTICES

III APLICACIONES DEL TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE

III.1 PROBLEMA DE FACTIBILIDAD

III.2 APLICACIONES A MATRICES

III.3 PROBLEMA DE LA SUBDIGRAFICA

III.4 SISTEMA DE REPRESENTANTES

III.5 PROBLEMA DE ASIGNACION DE EMPLEOS

CAPITULO I

TEOREMA MAXIMO FLUJO MINIMO CORTE

I.1 DEFINICIONES BASICAS

VERTICE.-ES UN PUNTO EN EL PLANO, O SIMPLEMENTE UN ELEMENTO DE UN CONJUNTO.

LADO.-ES UN PAR NO ORDENADO DE VERTICES, QUE INDICA CONEXION ENTRE DICHOS VERTICES. POR EJEMPLO EL LADO $\{v,w\}$ INDICA QUE LOS VERTICES v Y w ESTAN CONECTADOS ENTRE SI.

ARCO.-ES UN PAR ORDENADO DE VERTICES, QUE INDICA DIRECCION Y CONEXION. POR EJEMPLO EL ARCO (v,w) INDICA CONEXION DE v A w.

CADENA DE v A w.-ES UN CONJUNTO ORDENADO DE LADOS DE LA SIGUIENTE FORMA $\{\{v,v_1\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_k,v_i\},\{v_i,v_r\},\ldots,\{v_n,w\}\}$ DONDE TODOS LOS VERTICES SON DISTINTOS. POR SIMPLICIDAD LA CADENA TAMBIEN SE DENOTA $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_i \to v_r \to \cdots \to w$.

CAPACIDAD DE ARCO.-ES UN ENTERO NO NEGATIVO QUE SE LE ASIGNA A CADA ARCO.

RED CAPACITADA.-ES UN PAR (V,K) DONDE V= $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ ES EL CONJUNTO FINITO DE VERTICES, Y K ES LA FUNCION ENTERA $K: V\times V \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ QUE SATISFACE $K(v,v)=0$ PARA TODA $v \in V$. VXV ES EL CONJ. DE ARCOS, K(v,w) ES LA CAPACIDAD DEL ARCO $(v,w)\in VXV$. K(v,w)=0 INDICA QUE NO HAY CONEXION DE v A w.

EJEM 1.-SEA LA RED (V,K) DONDE V= $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $K(v_1, v_2)=5$, $K(v_1, v_3)=3$, $K(v_2, v_3)=3$, $K(v_3, v_2)=2$, $K(v_3, v_4)=5$, $K(v_2, v_4)=4$, $K(v_i, v_j)=0$ EN OTROS CASOS. GRAFICAMENTE LA REPRESENTAREMOS

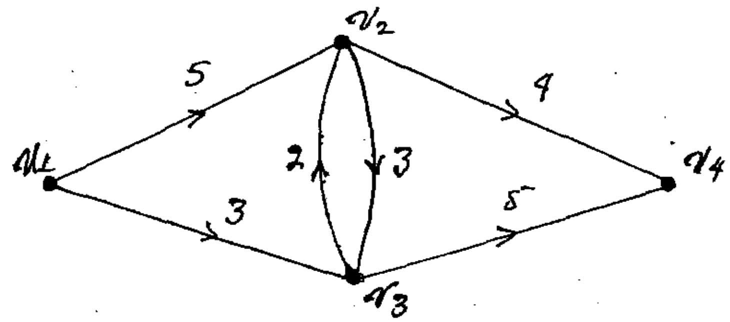


FIG. 1

MATRIZ DE CAPACIDADES.-OTRA FORMA DE REPRESENTAR LA FUNCION $K: V\times V \longrightarrow \mathbb{Z}^+\cup\{0\}$, ES MEDIANTE LA MATRIZ nxn K= $[K_{ij}]$ DONDE $K_{ij}=K(v_i, v_j)$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

EJEM 3.-DEL EJEM. ANTERIOR LA MATRIZ DE CAPACIDADES ES:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EJEM 3.-EN LA FIG.1 $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$ Y $v_1 \to v_2 \to v_4$ SON EJEMPLOS DE CADENAS DE v_1 A v_4.

FLUJO SOBRE LA RED (V,K).-DEL CONJ. V DISTINGUIREMOS DOS VERTICES $v_1, v_n \in V$ Y LES LLAMAREMOS FUENTE Y SUMIDERO RESPECTIVAMENTE, Y A LOS RESTANTES, VERTICES INTERMEDIOS. UN FLUJO SOBRE (V,K) DE v_1 A v_n ES UNA FUNCION $f: V\times V \longrightarrow \mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ QUE SATISFACE:

i) $\sum_{J} [f(v_i, v_J) - f(v_J, v_i)] = \begin{cases} v & si\ \ i = 1 \\ -v & si\ \ i = n \\ 0 & si\ \ i \neq 1, n \end{cases}$ (1.1)

LA CANTIDAD $v > 0$ SE LE LLAMA VALOR DEL FLUJO f Y SE DENOTA $v(f)$.

ii) $0 \leq f(v_i, v_J) \leq k(v_i, v_J)$. (1.2)

ARCO SATURADO.-A (v_i, v_J) SE LE LLAMA ARCO SATURADO SI CUMPLE QUE $f(v_i, v_J) = k(v_i, v_J)$.

EJEM 4.-SEA (V,K) LA RED CAPACITADA DE LA FIG. 1 ENTONCES: $f(v_1, v_2) = 5$, $f(v_1, v_3) = 2$, $f(v_2, v_3) = 2$, $f(v_2, v_4) = 3$, $f(v_3, v_4) = 4$ $f(v_i, v_J) = 0$ EN LOS OTROS CASOS, ES UN FLUJO SOBRE (V,K).

GRAFICAMENTE

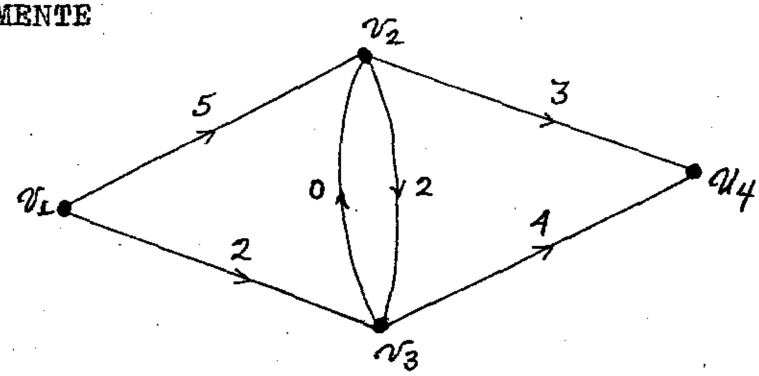


fig 2

VALOR DEL FLUJO= $f(v_1, v_2) + f(v_1, v_3) + f(v_1, v_4) = 5 + 2 + 0 = 7$.

ADEMAS (v_1, v_2) ES UN ARCO SATURADO.

MATRIZ DE FLUJO.-LA MATRIZ DE FLUJO, ES LA MATRIZ nxn $F = [f_{iJ}]$ DONDE $f_{iJ} = f(v_i, v_J)$; $i, J = 1, 2, \ldots, n$.

EJEM 5.-LA MATRIZ DE FLUJO DEL EJEM. ANTERIOR ES

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EL VALOR DEL FLUJO $v(f)$ ES LA DIFERENCIA DE LA SUMA DE LAS ENTRADAS DEL PRIMER RENGLON Y LA SUMA DE LAS ENTRADAS DE LA PRIMERA COLUMNA.EN ESTE CASO $v(f) = 7 + 0 = 7$.

ZERO FLUJO.-ES EL FLUJO $f_{ij} = 0 \quad i,j = 1,2,\ldots,n$ CLARAMENTE $v(f) = 0$.

EL FLUJO Y CAPACIDAD DE FLUJO PODEMOS REPRESENTARLOS EN UNA MISMA GRAFICA, MEDIANTE DOS NUMEROS ASIGNADOS A CADA UNO DE LOS ARCOS, DONDE EL PRIMERO REPRESENTE EL FLUJO SOBRE ESE ARCO Y EL SEGUNDO SU CAPACIDAD. POR EJEM. DEL EJEM 1 Y EJEM 4 TENEMOS:

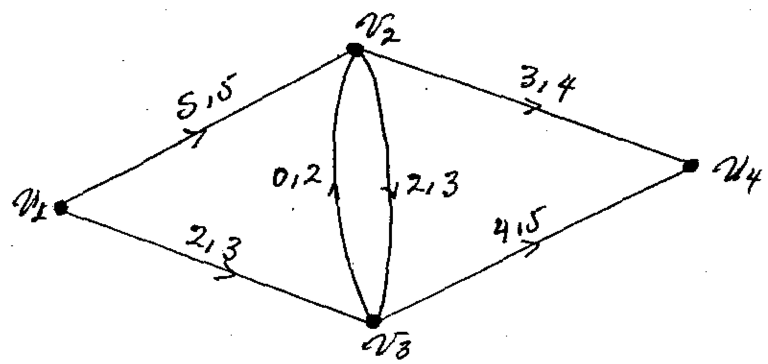
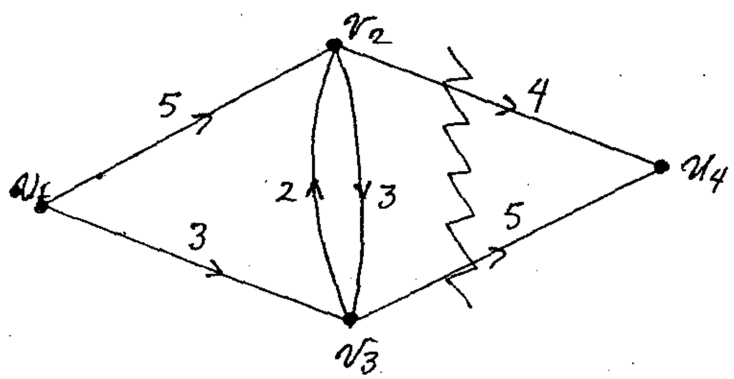


fig 3

CORTE DE UNA RED.-UN CORTE DE UNA RED (V,K) CON RESPECTO A LOS VERTICES v_1 Y v_n (FUENTE Y SUMIDERO) ES UNA PARTICION DEL CONJ. V EN DOS CONJS. V_1 Y V_n TALES QUE $v_1 \in V_1$ y $v_n \in V_n$. LA CAPACIDAD DEL CORTE (V_1, V_n) ES EL NUMERO

$$K(V_1,V_n)=\sum_{\substack{v_i\in V_1\\ v_j\in V_n}} K(v_i,v_j) \qquad (1.3)$$

EJEM 6.-EN LA FIG.1, $V_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ Y $V_4=\{v_4\}$ ES UN CORTE



$$K(V_1,V_4)=K(v_1,v_4)+K(v_2,v_4)+K(v_3,v_4)=9$$

EN LA MATRIZ DE CAPACIDADES K PODEMOS OBTENER ESTE RESULTADO, SUMANDO TODAS LAS ENTRADAS k_{ij}, QUE SE ENCUENTREN EN EL RENGLON i TAL QUE $v_i\in V_1$ Y LA COLUMNA j TAL QUE $v_j\in V_n$.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to v_3 \\ v_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 5 & 3 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{4} \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow K(V_1,V_4)=9$$

EJEM 7.-EN LA FIG.1, $V_1=\{v_1,v_3\}$ Y $V_2=\{v_2,v_4\}$ ES UN CORTE CUYO VALOR ES:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \to v_1 \\ v_2 \\ \to v_3 \\ v_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & \boxed{5} & 3 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow K(V_1,V_4)=12$$

CADENA AUMENTADORA.-ES UNA CADENA DE LA FUENTE v_1 AL VERTICE v_f, $v_1 \to v_a \to v_b \to \dots \to v_k \to v_i \to v_j \to \dots \to v_p \to v_f$, CON LA PROPIEDAD DE QUE CADA LADO $\{v_i, v_j\}$ POSEA EL ARCO (v_i, v_j) NO SATURADO, O EL ARCO (v_j, v_i) CON FLUJO DISTINTO DE CERO.

EJEM 8.-SEA LA RED (V,K) CON EL FLUJO ESPECIFICADO

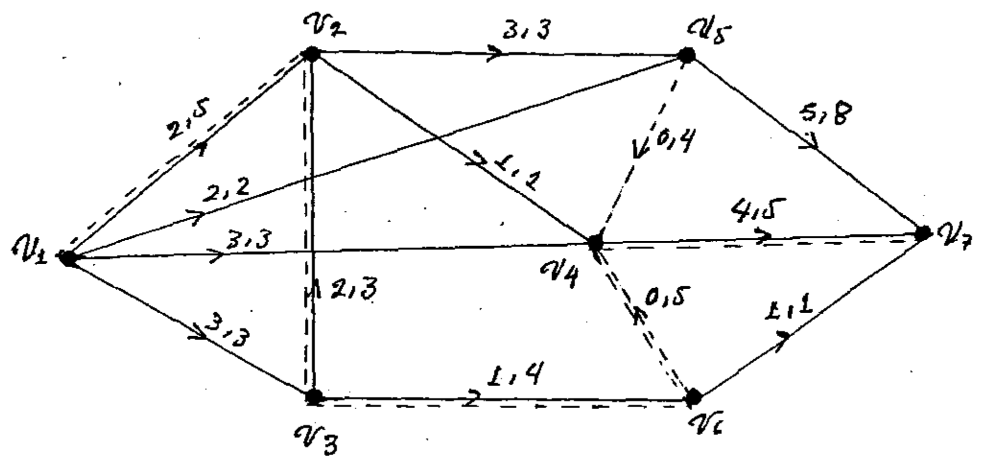


fig 4

$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_6 \to v_4 \to v_7$ ES UNA CADENA AUMENTADORA DE v_1 A v_7 (FUENTE Y SUMIDERO) TAL QUE $\{v_2, v_3\}$ POSEE EL ARCO (v_3, v_2) YA QUE $f(v_3, v_2) = 2 \neq 0$, Y LOS LADOS RESTANTES $\{v_i, v_j\}$ POSEEN (v_i, v_j) YA QUE SON NO SATURADOS:

SE LE LLAMA CADENA AUMENTADORA, YA QUE SI SE LOGRA CONECTAR LA FUENTE v_1 CON EL SUMIDERO v_n, ES POSIBLE AUMENTAR EL FLUJO EN UNA CANTIDAD $\varepsilon > 0$, TAL QUE SI P ES LA CADENA AUMENTADORA DEFINIMOS $\varepsilon = \min\{l, m\}$

DONDE $l = \min\{K(v_i, v_j) - f(v_i, v_j) / v_i, v_j \in P \text{ posee el arco } (v_i, v_j)\}$

$$m = \min\{f(v_i, v_j) / \{v_i, v_j\} \in P \text{ posee } (v_j, v_i)\}$$

ESTO SE DEMOSTRARA A CONTINUACION EN EL LEMA 1.

EJEM 9.-EN EL EJEM. ANTERIOR FIG.4 TENEMOS $l = 1, m = 2 \Rightarrow \varepsilon = 1$
ENTONCES EL FLUJO AUMENTADO QUEDARA:

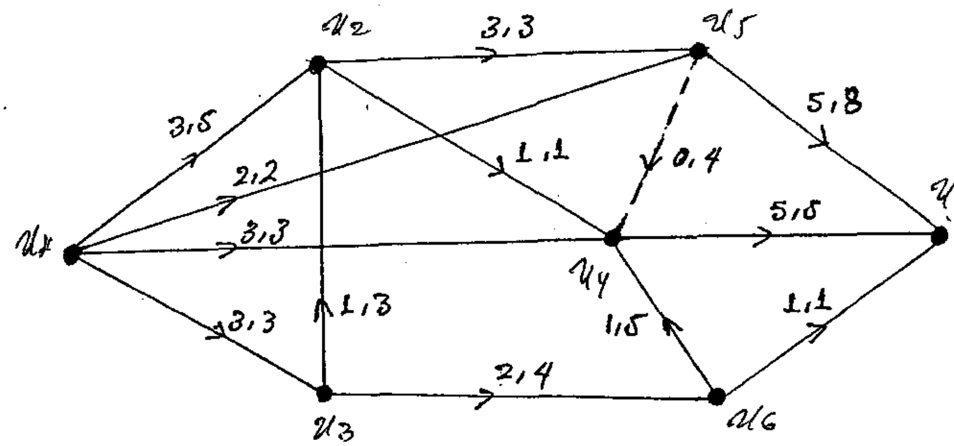


fig 5

I.2 TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE

LEMA 1.-SEA (V,K) UNA RED, F= $[f_{ij}]$ UN FLUJO DE v_1 A v_n CON $V(f)=V$. SEA P UNA CADENA AUMENTADORA DE v_1 A v_n ENTONCES $F^* = [f^*_{ij}]$ TAL QUE :

$$f^*(v_i, v_j) = \begin{cases} f(v_i, v_j) + \varepsilon & si \ \{v_i, v_j\} \in P \\ f(v_i, v_j) - \varepsilon & si \ \{v_j, v_i\} \in P \\ f(v_i, v_j) & si \ \{v_i, v_j\} \notin P \end{cases} \qquad (1.4)$$

ES UN FLUJO CUYO VALOR ES $V(f^*) = V + \varepsilon$ DONDE EL NUMERO POSITIVO ε SE DEFINE: $\quad \varepsilon = \min \{l, m\}$ (1.5)

$$l = \min\{K(v_i, v_j) - f(v_i, v_j) \mid \{v_i, v_j\} \in P \text{ POSEE EL } (v_i, v_j)\}$$

$$m = \min\{ f(v_i, v_j) \mid \{v_i, v_j\} \in P \text{ POSEE EL } (v_j, v_i)\}$$

DEMOSTRACION.

A) POR DETERMINAR QUE $\quad 0 \leq f^*_{ij} \leq K_{ij}$

$$si \quad f^*(v_i, v_j) = f(v_i, v_j) + \varepsilon \Rightarrow f^*(v_i, v_j) \leq K(v_i, v_j)$$

POR LA DEFINICION DE ε,

SI $f^*(v_i,v_j)=f(v_i,v_j)-\varepsilon \Rightarrow f^*(v_i,v_j) < K(v_i,v_j)$ YA QUE $\varepsilon > 0$,

SI $f^*(v_i,v_j)=f(v_i,v_j) \Rightarrow f^*(v_i,v_j) \leq K(v_i,v_j)$

$$\therefore\ f^*(v_i,v_j) \leq K(v_i,v_j) \quad i,j=1,\ldots,n.$$

B) POR DETERMINAR QUE $\sum_{r}[f^*_{ir}-f^*_{ri}]=0 \quad i\neq 1,n$

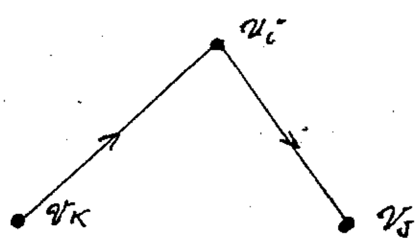
CONSIDERMOS LOS SIGUIENTES CASOS PARA $v_i \quad i\neq 1,n$.

i) v_i NO ES UN VERTICE DE P, ENTONCES $f^*_{ir}=f_{ir}$, $f^*_{ri}=f_{ri}$

$\Rightarrow \sum_{r}[f^*_{ir}-f^*_{ri}]=\sum_{r}[f_{ir}-f_{ri}]=0$ YA QUE f ES FLUJO.

ii) v_i ES UN VERTICE DE P, ENTONCES POR LA DEFINICION DE CADENA EXISTEN LOS LADOS $\{v_k,v_i\}$, $\{v_i,v_j\} \in P$ CON LAS SIGUIENTES OPCIONES:

a) $\{v_k,v_i\}$ POSEE EL (v_k,v_i) Y $\{v_i,v_j\}$ POSEE EL (v_i,v_j)

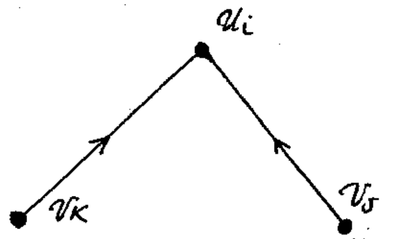


$$f^*_{ki}=f_{ki}+\varepsilon \ , \quad f^*_{ri}=f_{ri} \quad r\neq k$$

$$f^*_{ij}=f_{ij}+\varepsilon \ , \quad f^*_{ir}=f_{ir} \quad r\neq j$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{r}[f^*_{ir}-f^*_{ri}] &= \sum_{r\neq j} f^*_{ir}+f^*_{ij}-\sum_{r\neq k} f^*_{ri}-f^*_{ki}\\ &=\sum_{r\neq j} f_{ir}+f_{ij}+\varepsilon-\sum_{r\neq k} f_{ri}-f_{ki}-\varepsilon\\ &=\sum_{r} f_{ir}-\sum_{r} f_{ri}\\ &=\sum_{r}[f_{ir}-f_{ri}]\\ &=0 \quad \text{YA QUE } f \text{ ES UN FLUJO.}\end{aligned}$$

b) $\{v_K, v_i\}$ POSEE EL (v_K, v_i) Y $\{v_i, v_J\}$ POSEE EL (v_J, v_i)



$$f^*_{ir} = f_{ir} \quad , \quad f^*_{Ki} = f_{Ki} + \varepsilon$$

$$f^*_{Ji} = f_{Ji} - \varepsilon \quad , \quad f^*_{ri} = f_{ri} \quad r \neq J, K$$

$$\Rightarrow \sum_r \left[f^*_{ir} - f^*_{ri} \right] = \sum_r f^*_{ir} - \sum_{r \neq J,K} f^*_{ri} - f^*_{Ki} - f^*_{Ji}$$

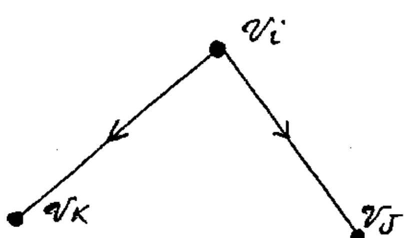
$$= \sum_r f_{ir} - \sum_{r \neq J,K} f_{ri} - f_{Ki} - \varepsilon - f_{Ji} + \varepsilon$$

$$= \sum_r f_{ir} - \sum_r f_{ri}$$

$$= \sum_r \left[f_{ir} - f_{ri} \right]$$

$$= 0$$

c) $\{v_K, v_i\}$ POSEE EL (v_i, v_K) Y $\{v_i, v_J\}$ POSEE EL (v_i, v_J)



$$f^*_{iK} = f_{iK} - \varepsilon \quad , \quad f^*_{iJ} = f_{iJ} + \varepsilon$$

$$f^*_{ir} = f_{ir} \quad r \neq K, J \quad , \quad f^*_{ri} = f_{ri}$$

$$\Rightarrow \sum_r \left[f^*_{ir} - f^*_{ri} \right] = \sum_{r \neq K,J} f^*_{ir} + f^*_{iK} + f^*_{iJ} - \sum_r f^*_{ri}$$

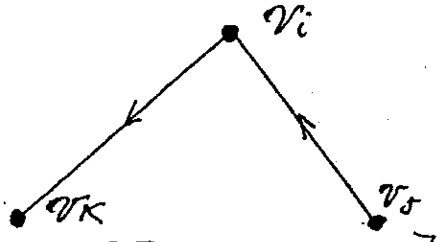
$$= \sum_{r \neq K,J} f_{ir} + f_{iK} - \varepsilon + f_{iJ} + \varepsilon - \sum_r f_{ri}$$

$$= \sum_r f_{ir} - \sum_r f_{ri}$$

$$= \sum_r \left[f_{ir} - f_{ri} \right]$$

$$= 0$$

d) $\{v_k, v_i\}$ POSEE EL (v_i, v_k) Y $\{v_i, v_j\}$ POSEE EL (v_j, v_i)



$$f^*_{ik} = f_{ik} + \varepsilon \ , \quad f^*_{ir} = f_{ir} \quad r \neq k$$

$$f^*_{ji} = f_{ji} - \varepsilon \ , \quad f^*_{ri} = f_{ri} \ , \quad r \neq j$$

$$\Rightarrow \sum_r \left[f^*_{ir} - f^*_{ri} \right] = \sum_{r \neq k} f^*_{ir} + f^*_{ik} - \sum_{r \neq j} f^*_{ri} - f^*_{ji}$$

$$= \sum_{r \neq k} f_{ir} + f_{ik} - \varepsilon + \sum_{r \neq j} f_{ri} - f_{ji} + \varepsilon$$

$$= \sum_r \left[f_{ir} - f_{ri} \right]$$

$$= 0$$

POR LO TANTO DE a), b), c) Y d) SE CONCLUYE QUE SI v_i ES VERTICE DE P, SE TIENE

$$\sum_r \left[f^*_{ir} - f^*_{ri} \right] = 0 \qquad i \neq 1, n$$

ESTE RESULTADO, JUNTO CON EL OBTENIDO EN i) CONDUCE A

$$\sum_r \left[f^*_{ir} - f^*_{ri} \right] = 0 \quad \text{PARA TODO} \quad i \neq 1, n.$$

QUE ERA LO QUE FALTABA PARA CONCLUIR QUE f^* ES UN FLUJO.

C) POR DETERMINAR QUE $\quad v(f^*) = v + \varepsilon$

SEA $\{v_1, v_a\}$ EL LADO INICIAL DE LA CADENA, HAY DOS OPCIONES PARA $\{v_1, v_a\}$:

i) QUE POSEEA EL (v_1, v_a) ENTONCES

$$f^*_{1a} = f_{1a} + \varepsilon \ , \quad f^*_{1j} = f_{1j} \quad j \neq a \ , \quad f^*_{j1} = f_{j1} \ .$$

$$\Rightarrow v(f^*) = \sum_{J} \left[f^*_{IJ} - f^*_{JI} \right]$$
$$= \sum_{J \neq a} f^*_{IJ} + f^*_{Ia} - \sum f^*_{JI}$$
$$= \sum_{J \neq a} f_{IJ} + f_{Ia} + \varepsilon - \sum f_{JI}$$
$$= \sum f_{IJ} - \sum f_{JI} + \varepsilon$$
$$= \sum \left[f_{IJ} - f_{JI} \right] + \varepsilon$$
$$= v(f) + \varepsilon$$
$$= v + \varepsilon .$$

b) QUE POSEEA EL (v_a, v_I) ENTONCES

$$f^*_{IJ} = f_{IJ}, \; f^*_{aI} = f_{aI} - \varepsilon \; , \; f^*_{JI} = f_{JI} \quad J \neq a .$$

$$\Rightarrow v(f^*) = \sum_{J} f^*_{IJ} - \sum_{J \neq a} f^*_{JI} - f^*_{aI}$$
$$= \sum_{J} f_{IJ} - \sum_{J \neq a} f_{JI} - f_{aI} + \varepsilon$$
$$= \sum_{J} \left[f_{IJ} - f_{JI} \right] + \varepsilon$$
$$= v(f) + \varepsilon$$
$$= v + \varepsilon$$

$\therefore$ EN AMBOS CASOS $v(f^*) = v + \varepsilon$

LEMA 2.-SEA $F=[f_{ij}]$ UN FLUJO ARBITRARIO SOBRE (V,K) DE LA FUENTE v_1 AL SUMIDERO v_n , (V_1, V_n) UN CORTE TAMBIEN ARBITRARIO CON RESPECTO A v_1 Y A v_n ENTONCES:

$$v(f) \leq K(V_1, V_n) \tag{1.6}$$

DEM.-

$$\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{j=1}^{n} [f(v_1, v_j) - f(v_j, v_1)] \\
&= \sum_{v_i \in V_1} \sum_{j=1}^{n} [f(v_i, v_j) - f(v_j, v_i)] \\
&= \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_1} [f(v_i, v_j) - f(v_j, v_i)] + \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_n} [f(v_i, v_j) - f(v_j, v_i)] \\
&= \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_n} [f(v_i, v_j) - f(v_j, v_i)] \\
&\leq \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_n} f(v_i, v_j) \\
&\leq \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_n} K(v_i, v_j) \\
&\leq K(V_1, V_n)
\end{aligned}$$

ESTE LEMA NOS ASEGURA QUE EL VALOR DE CUALQUIER FLUJO, NO EXEDE LA CAPACIDAD DE CUALQUIER CORTE. SI LA IGUALDAD SE ALCANZA ES PORQUE EL FLUJO ES DE VALOR MAXIMO Y EL CORTE DE CAPACIDAD MINIMA.

LO QUE NO ES INMEDIATAMENTE CLARO, ES QUE LA IGUALDAD SE ALCANCE, ESTE FAMOSO RESULTADO ES CONOCIDO COMO EL TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE, QUE FUE DEMOSTRADO POR PRIMERA VEZ EN 1955 POR FORD-FULKERSON.

TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE.-EN UNA RED CAPACITADA (V,K) EL VALOR MAXIMO DE UN FLUJO, ES IGUAL A LA CAPACIDAD MINIMA DE UN CORTE.

$$\max\left\{ v(f) \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ ES UN FLUJO} \\ \text{DE } v_1 \text{ A } v_n \end{array} \right\} = \min \left\{ K(V_1, V_n) \,\middle|\, \begin{array}{l} (V_1, V_n) \text{ ES UN CORTE} \\ \text{CON RESPECTO A } v_1, v_n \end{array} \right\}$$

DEM.-SEA $F=[f_{ij}]$ UN FLUJO MAXIMO DE LA FUENTE v_1 AL SUMIDERO v_n SOBRE (V,K). ESTE FLUJO SIEMPRE EXISTE PORQUE HAY UN NUMERO FINITO DE ELLOS, YA QUE $f_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ Y $0 \leq f_{ij} \leq K_{ij}$.

DEFINIMOS $V_1 = \{v_q / \text{EXISTE P CADENA AUMENTADORA DE } v_1 \text{ A } v_q\}$. $V_n = V_1^c$.

SUPONGAMOS QUE $v_n \in V_1$, ES DECIR EXISTE P CADENA AUMENTADORA DE v_1 A v_n. POR EL LEMA 2 SE PUEDE AUMENTAR EL FLUJO F, LO CUAL CONTRADICE A QUE F ES MAXIMO, POR LO TANTO $v_n \notin V_1$ DE AQUI QUE $v_n \in V_n$, ENTONCES (V_1, V_n) ES UN CORTE CON RESPECTO A v_1 Y v_n.

DEL LEMA 1 SABEMOS QUE

$$v(f) = \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_n}} [f_{ij} - f_{ji}] \leq \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_n}} K(v_i, v_j)$$

POR LA DEFINICION DE (V_1, V_n) SABEMOS QUE

$$f_{ij} = f(v_i, v_j) = K(v_i, v_j)$$

Y QUE $f_{ji} = f(v_j, v_i) = 0$

PORQUE SI NO FUERA ASI $v_j \in V_1$.

POR LO TANTO

$$
\begin{aligned}
U(f) &= \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_n} [f(v_i, v_j) - \overset{0}{f(v_j, v_i)}] \\
&= \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_n} f(v_i, v_j) \\
&= \sum_{v_i \in V_1,\, v_j \in V_n} K(v_i, v_j) \\
&= K(V_1, V_n) \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

ENTONCES, POR EL LEMA 2 EL CORTE (V_1, V_n) ES DE CAPACIDAD MINIMA.

I.3 ALGORITMO DE FORD-FULKERSON

CON EL FIN DE OBTENER EL FLUJO MAXIMO OPERANDO MATRICIALMENTE, DAREMOS LAS SIGUIENTES DEFINICIONES, DE LAS CUALES DEDUCIREMOS EL ALGORITMO.

RED DE EXESOS.-LA RED (V,K) CON FLUJO $F^* = [f^*_{ij}]$ DE v_1 A v_n PUEDE TRANSFORMARSE EN LA RED DE EXESOS (V, A^*) DONDE $A^* = [a^*_{ij}]$ TAL QUE

$$a^*_{ij} = K_{ij} - f^*_{ij} + f^*_{ji} \qquad (1.8)$$

LOS a^*_{ij} REPRESENTAN LA CAPACIDAD TOTAL DEL ARCO (v_i, v_j) YA QUE $K_{ij} - f^*_{ij}$ ES LO QUE FALTA PARA SATURARLO Y f^*_{ji} ES EL FLUJO DEL ARCO EN SENTIDO CONTRARIO, CUYO FLUJO PODEMOS REGRESAR.

EJEM 10.-LA RED DE EXESOS DE LA FIG. 4 SERA:

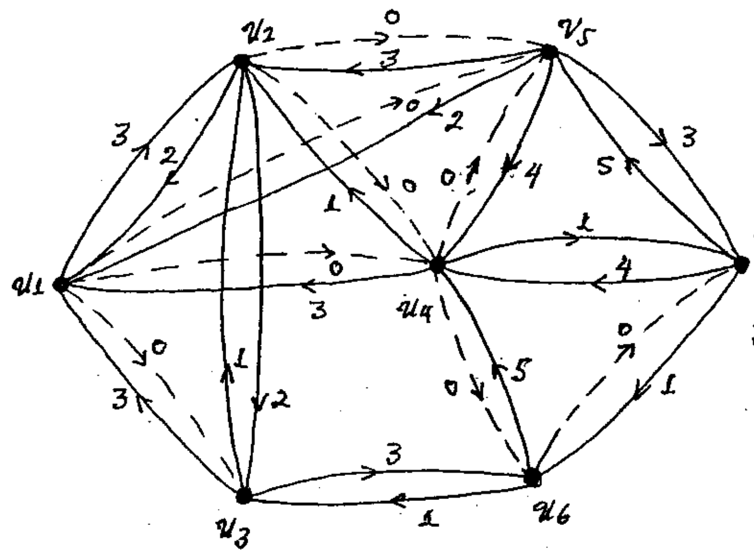


fig 6

Y SU MATIZ, LLAMADA MATRIZ DE EXESOS ES:

$$A^* = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

MATRIZ DE EXESOS

CADENA AUMENTADORA EN LA RED DE EXESOS.-ES LA CADENA EN LA RED DE EXESOS (V,A^*) CON $A^*=[a^*_{ij}]$, TAL QUE CADA UNO DE SUS LADOS $\{v_i,v_j\}$ POSEE EL ARCO (v_i,v_j) EN EL MISMO SENTIDO SI $a^*_{ij} \neq 0$.

EN LA FIG.6 PODEMOS OBSERVAR QUE SE OBTIENE LA MISMA CADENA DE v_1 A v_7 QUE EN FIG.4 $(v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_6 \to v_4 \to v_7)$. ESTA CADENA EN LA MATRIZ DE EXESOS A^* QUEDA REPRESENTADA DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\
v_1 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 2 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\
v_4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\
v_5 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\
v_6 & 0 & 0 & 1 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 1 & 0
\end{array}
$$

EN ESTE CASO, EL AUMENTO ε DEL FLUJO $F^* = [f^*_{ij}]$ QUEDA DEFINIDO POR

$$\varepsilon = \text{MIN} \left\{ a^*_{ij} \,/\, \{v_i, v_j\} \in P \right\}$$

DONDE P ES LA CADENA AUMENTADORA

EN ESTE CASO TAMBIEN $\varepsilon = 1$ COMO HABIAMOS OBTENIDO ANTES.

NUEVA RED DE EXESOS.-DESPUES DE HABER AUMENTADO EL FLUJO, LA NUEVA RED DE EXESOS (V,A) TENDRA POR MATRIZ DE CAPACIDADES $A = [a_{ij}]$ TAL QUE:

$$
a_{ij} = \begin{cases} a^*_{ij} - \varepsilon & \text{si } \{v_i, v_j\} \in P \\ a^*_{ij} + \varepsilon & \text{si } \{v_j, v_i\} \in P \\ a^*_{ij} & \text{EN LOS OTROS CASOS} \end{cases} \qquad (1.9)
$$

EN NUESTRO EJEMPLO

$$\text{NUEVA MATRIZ DE EXESOS} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

FLUJO AUMENTADO.-EL FLUJO AUMENTADO $F=[f_{ij}]$ OBTENIDO AL INCREMENTAR $\overset{*}{F}=[f^{*}_{ij}]$, ε UNIDADES, EN CADA LADO DE LA CADENA AUMENTADORA, LO PODEMOS OBTENER DE ACUERDO A LA FORMULA MATRICIAL

$$f_{ij} = \max\{K_{ij} - a^{*}_{ij},\ 0\} \qquad (1.10)$$

QUE EN EL EJEM. QUE HEMOS VENIDO TRABAJANDO QUEDA:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

GRAFICAMENTE QUEDA:

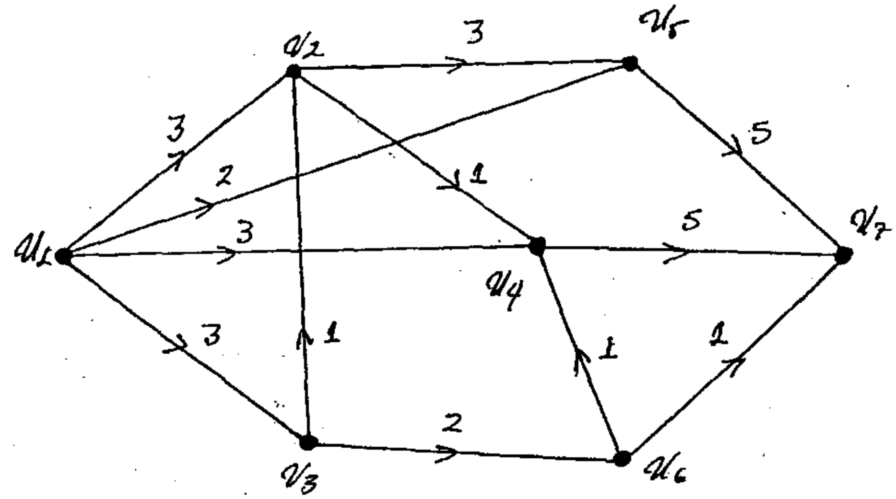


fig 7

QUE ES EL MISMO FLUJO OBTENIDO EN LA FIG.5

EL ALGORITMO DE FORD-FULKERSON, PARA ENCONTRAR EL MAXIMO FLUJO CONSISTE EN, ENCONTRAR UNA CADENA AUMENTADORA DE LA FUENTE AL SUMIDERO EN LA RED DE EXESOS, CONSTRUIR LA NUEVA MATRIZ DE EXESOS A LA CUAL SE LE REPITE EL PROCESO. EL ALGORITMO TERMINA HASTA QUE NO SEA POSIBLE ENCONTRAR CADENA AUMENTADORA DE LA FUENTE AL SUMIDERO, Y EL FLUJO MAXIMO SE OBTIENE DE (1.10) DONDE $A^*=[a^*_{ij}]$ ES LA ULTIMA MATRIZ DE EXESOS.

DADA LA RED CAPACITADA (V,K) CON $V=\{v_i\}_{i=1}^{n}$, v_1 FUENTE Y v_n SUMIDERO, SE DA EL SIGUIENTE ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL MAXIMO FLUJO DE v_1 A v_n.

ALGORITMO DE FORD-FULKERSON

1) PRINCIPIAR EL COMPUTO CON UN FLUJO CUALQUIERA Y DEFINIR LA MATRIZ INICIAL DE EXESOS A= $[a_{ij}]$ DONDE $a_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji}$. SE PUEDE INICIAR INCLUSIVE CON EL ZERO FLUJO, Y EN TAL CASO A=K.

2) OBTENER UNA CADENA AUMENTADORA EN LA MATRIZ A, DE LA SIGUIENTE MANERA:

A CIERTOS VERTICES v_j $j=1,\dots n$ LE DEFINIMOS LAS ETIQUETAS u_j, w_j RECURSIVAMENTE COMO SIGUE; PARA v_1 SE DEFINE $u_1=\infty, w_1=0$. PARA AQUELLOS v_j TALES QUE $a_{1j}>0$ DEFINIR $u_j=a_{1j}, w_j=1$. EN GENERAL PARA AQUELLOS v_i LOS CUALES YA HAN SIDO ETIQUETADOS SELECCIONAR UNO DE ELLOS, Y EXAMINAR TODOS LOS v_j TALES QUE $a_{ij}>0$ Y QUE NO LE HAN DEFINIDO ETIQUETAS, LAS CUALES SE DEFINEN

$$u_j = \min\{u_i, a_{ij}\}$$
$$w_j = i$$

CONTINUAR ESTE PROCESO HASTA QUE i) v_n SE LE DEFINAN SUS ETIQUETAS u_n, w_n O ii) HASTA QUE NO SE PUEDAN HACER MAS ETIQUETAMIENTOS QUEDANDO v_n SIN ETIQUETAR.

SI SUCEDE ii) EL COMPUTO TERMINA.

SI SUCEDE i) PASAR A OBTENER UNA NUEVA MATRIZ DE EXESOS A= $[a_{ij}]$ COMO LO INDICA 3).

3) REEMPLAZAR $a_{w_n n}$ POR $a_{w_n n}-u_n$ Y $a_{n w_n}$ POR $a_{n w_n}+u_n$. EN GENERAL $a_{w_j j}$ POR $a_{w_j j}-u_n$ Y $a_{j w_j}$ POR $a_{j w_j}-u_n$ DONDE CADA j ES IGUAL A $w_{j'}$ DEL ANTERIOR j' EN EL REEMPLAZAMIENTO ANTERIOR.

ESTE REMPLAZAMIENTO CONTINUA HASTA $w_J = 1$ HA SIDO COMPLETADO.

EN BASE A LA NUEVA MATRIZ DE EXESOS A, SE REPITE 2).

EL COMPUTO TERMINA CUANDO NO SE PUEDE ETIQUETAR V_n COMO LO INDICA 2 ii).

CUANDO EL PROCESO TERMINA, EL MAXIMO FLUJO $F = [f_{iJ}]$ ES DADO POR

$$f_{iJ} = \text{MAX}\{K_{iJ} - a_{iJ}, 0\}$$

COMO A CONTINUACION SE DEMOSTRARA, MEDIANTE LOS TRES LEMAS SIGUIENTES.

LEMA 1.- SEA A = $[a_{iJ}]$ UNA MATRIZ DE EXESOS GENERADA POR EL PROCESO ALGORITMICO, ENTONCES

$$a_{iJ} + a_{Ji} \tag{1.11}$$

$$\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} \qquad i \neq 1, n \tag{1.12}$$

SON INVARIANTES DEL PROCESO

DEM 1.11).- SEA $A^* = [a^*_{iJ}]$ LA MATRIZ DE EXESOS INICIAL OBTENIDA DEL FLUJO INICIAL $F^* = [f^*_{iJ}]$,POR (1.8) TENEMOS

$$a^*_{iJ} = K_{iJ} - f^*_{iJ} + f^*_{Ji}$$

$$a^*_{Ji} = K_{Ji} - f^*_{Ji} + f^*_{iJ}$$

$$a^*_{iJ} + a^*_{Ji} = K_{iJ} - K_{Ji} \tag{1.13}$$

SEA $A=[a_{ij}]$ LA ULTIMA MATRIZ DE EXESOS DEL PROCESO Y SUPONGAMOS QUE FUE OBTENIDA DE $A'=[a'_{ij}]$ COMO LO INDICA EL PROCESO; EC (1.9)

$$\Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \\ a_{ij}+\mu_n \\ a_{ij}-\mu_n \end{cases} \qquad (1.14)$$

$$\text{si } a_{ij}=a'_{ij} \Rightarrow a_{ji}=a'_{ji} \Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=a'_{ij}+a'_{ji}$$

$$\text{si } a_{ij}=a'_{ij}+\mu_n \Rightarrow a_{ji}=a'_{ji}-\mu_n \Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=a'_{ij}+a'_{ji}$$

$$\text{si } a_{ij}=a'_{ij}-\mu_n \Rightarrow a_{ji}=a'_{ji}+\mu_n \Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=a'_{ij}+a'_{ji}$$

$$\Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=a'_{ij}+a'_{ji}$$

APLICANDO ESTE RECURSIVAMENTE ,LLEGAMOS POR (1.13)AL INVARIANTE

$$a_{ij}+a_{ji}=k_{ij}+k_{ji} \qquad (1.15)$$

DEM(1.12).-PARA LA MATRIZ DE EXESO INICIAL $A^*=[a^*_{ij}]$ TENEMOS DE (1.8) QUE

$$k_{ij}-a^*_{ij}=f^*_{ij}-f^*_{ji}$$

$$\Rightarrow \sum_j [k_{ij}-a^*_{ij}] = \sum_j [f^*_{ij}-f^*_{ji}] \quad \text{COMO } f^* \text{ ES UN FLUJO}$$

$$\Rightarrow \sum_j [k_{ij}-a^*_{ij}] = 0 \qquad i \neq 1,n$$

$$\Rightarrow \sum_j k_{ij} = \sum_j a^*_{ij} \qquad i \neq 1,n \qquad (1.16)$$

EN GENERAL SI $i=\omega_\ell$ $i\neq 1,n$ PARA ALGUN ℓ , ENTONCES EXISTE UN $K=\omega_i$ .ENTONCES PARA ESTE i EL NUEVO a_{ij} OBTENIDO - DE LA ANTERIOR MATRIZ DE EXESOS $A'=[a'_{ij}]$ SERA:

$$a_{ij}=\begin{cases} a'_{ij}-u_n & \text{PARA } j=1 \\ a'_{ij}+u_n & \text{PARA } j=K \\ a'_{ij} & \text{EN OTROS CASOS} \end{cases}$$

DE AQUI QUE

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \quad i\neq 1,n \qquad (1.17)$$

ES UN INVARIANTE

LEMA 2.- F ES UN FLUJO

DEM .-COMO $f_{ij}=\max\{k_{ij}-a_{ij},\ 0\}$ CON $a_{ij}\geq 0$

ENTONCES $0\leq f_{ij}\leq k_{ij}$

DEL INVARIANTE(1.15) TENEMOS QUE $k_{ij}-a_{ij}=-(k_{ji}-a_{ji})$

ENTONCES $f_{ji}=\max\{k_{ji}-a_{ji},\ 0\}=\max\{-(k_{ij}-a_{ij}),\ 0\}$

DE AHI QUE

$$f_{ij}-f_{ji}=k_{ij}-a_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[f_{ij}-f_{ji}]=\sum_{j=1}^{n}[k_{ij}-a_{ij}]$$

$$=\sum k_{ij}-\sum a_{ij}$$

$$=0 \qquad i\neq 1,n \qquad \text{POR } (1.17).$$

$\therefore$ F ES UN FLUJO

LEMA 3.-F ES UN MAXIMO FLUJO

DEM.-EN EL PUNTO DONDE LA TERMINACION OCURRE (CUANDO YA NO SE PUEDEN DEFINIR LAS ETIQUETAS u_n, w_n DEL SUMIDERO) DEFINIMOS EL CONJ. DE VERTICES V_1 CUYOS ELEMENTOS SON LOS v_i QUE SI SE LES PUDO ASIGNAR ETIQUETAS u_i, w_i Y AL CONJ. V_n COMO EL COMPLEMENTO. COMO $v_1 \in V_1$ Y $v_n \in V_n$, (V_1, V_n) ES UN CORTE CON RSPECTO A v_1 Y v_n. ADEMAS $a_{ij} \doteq 0$ SI $v_i \in V_1$ Y $v_j \in V_n$, PORQUE DE LO CONTRARIO SE HUBIERA PODIDO ASIGNAR A v_j SUS ETIQUETAS u_j, w_j

DEL LEMA 1 SABEMOS QUE

$$\sum_{j=1}^{n} [k_{ij} - a_{ij}] = \sum_{j=1}^{n} [f_{ij} - f_{ji}]$$

POR LO TANTO

$$\sum_{j=1}^{n} [k_{ij} - a_{ij}] = \begin{cases} 0 & si \quad 1 < i < n \\ v(f) & si \quad i = 1 \end{cases}$$

SUMANDO A AMBOS MIEMBROS DE ESTA IGUALDAD PARA TODO i TAL QUE $v_i \in V_1$ TENEMOS:

$$v(f) = \sum_{v_i \in V_1} \sum_{j=1}^{n} [k_{ij} - a_{ij}]$$

$$= \sum_{v_i \in V_1} \left[\sum_{v_j \in V_1} [k(v_i, v_j) - a_{ij}] + \sum_{v_j \in V_n} [k(v_i, v_j) - a_{ij}] \right]$$

DE (1.15) TENEMOS $\quad k_{ij} - a_{ij} = -(k_{ji} - a_{ji})$

ENTONCES SE ANULA LA PRIMERA DOBLE SUMATORIA.

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f) = \sum_{u_i \in V_L} \sum_{u_j \in V_L} \cancelto{0}{\left[k_{ij} - a_{ij}\right]} + \sum_{u_i \in V_L} \sum_{u_j \in V_n} \left[k_{ij} - a_{ij}\right]$$

$$= \sum_{u_i \in V_L} \sum_{u_j \in V_n} \left[k_{ij} - a_{ij}\right]$$

COMO $a_{ij} = 0$ PARA TODO $u_i \in V_L$ Y $v_j \in V_n$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f) = \sum_{\substack{u_i \in V_L \\ u_j \in V_n}} k_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f) = k(V_L, V_n)$$

C A P I T U L O II

A M P L I A C I O N E S D E L T E O R E M A M A X I M O F L U J O M I N I M O C O R T E

II.1 RED CON FUENTES Y SUMIDEROS MULTIPLES

SEA (V,K) UNA RED CAPACITADA, CON $S \neq \emptyset$ CONJ. DE LAS FUENTES, R CONJ. DE LOS VERTICES INTERMEDIOS, Y $T \neq \emptyset$ CONJ. DE LOS SUMIDEROS, DE ESTA MANERA SE TIENE QUE $V = S \cup R \cup T$ Y $S \cap R = R \cap T = S \cap T = \emptyset$.

EL FLUJO $F = [f_{ij}]$ DE S A T DONDE $f_{ij} = f(v_i, v_j)$ EN ESTA RED DEBE SATISFACER:

i)

$$\sum_{v_j \in V} \left[f(v_i, v_j) - f(v_j, v_i) \right] = \begin{cases} w_i & si \quad v_i \in S \\ -g_i & si \quad v_i \in T \\ 0 & si \quad v_i \in R \end{cases}$$

A LAS FUNCIONES ENTERAS $w(v_i) = w_i \geq 0$, $v_i \in S$ Y $g(v_i) = g_i \geq 0$, $v_i \in T$ SE LES LLAMA RESPECTIVAMENTE, FUNCION DE SUMINISTRO Y FUNCION DE GASTO TAL QUE

$$v(f) = \sum_{v_i \in S} w_i = \sum_{v_i \in T} g_i$$

ii) $0 \leq f(v_i, v_j) \leq K(v_i, v_j)$

EL FLUJO DE VALOR MAXIMO PARA ESTA RED, PUEDE SER ENCONTRADO, APLICANDO EL ALGORITMO DE FORD- FULKERSON A UNA NUEVA RED (V', K') OBTENIDA DE (V, K) DE LA SIGUIENTE FORMA:

1) SE AGREGA A V LOS VERTICES v_0 Y v_{n+1} ES DECIR $V' = V \cup \{v_0, v_{n+1}\}$ Y TODOS LOS ARCOS (v_0, v_i) TAL QUE $v_i \in S$, (v_j, v_{n+1}) TAL QUE $v_j \in T$.

2) K SE DEFINE:

$$K'(v_i, v_j) = \begin{cases} M & si \ v_i = v_0 ,\ v_j \in S \\ K(v_i, v_j) & si \ v_i, v_j \in V \\ M & si \ v_i \in T ,\ v_j = v_{n+1} \end{cases}$$

DONDE M ES UN ENTERO POSITIVO SUFICIENTEMENTE GRANDE.

POR EJEMPLO SEA (V,K) LA SIGUIENTE RED

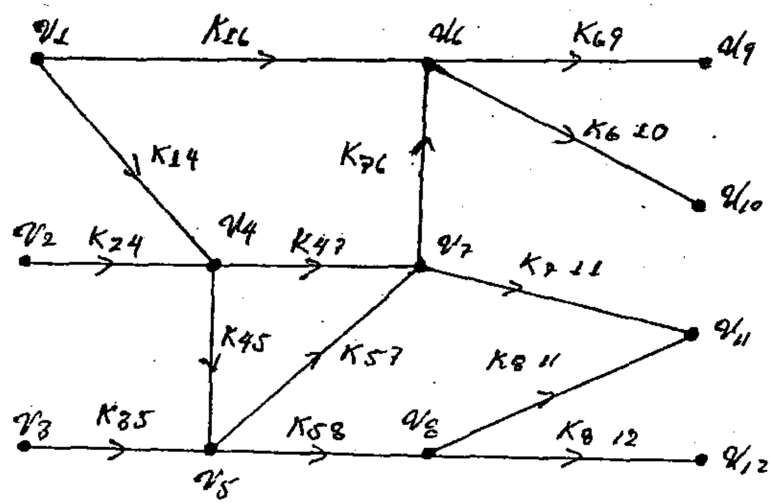


FIG.1

ENTONCES LA NUEVA RED SERA:

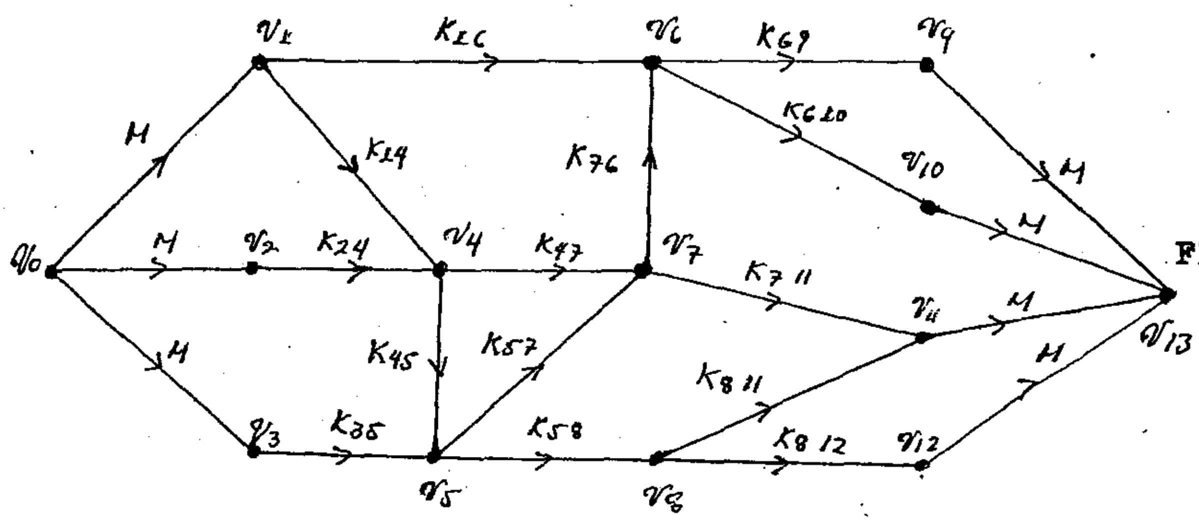


FIG.2

II.2 RED CAPACITADA EN ARCOS Y VERTICES

CONSIDIREMOS AHORA EL CASO DE UNA RED CAPACITADA (V,K) CON LA FUNCION ADICIONAL $C : V \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ DONDE $C(v_i) = C_i$ ES LA CAPACIDAD DEL VERTICE v_i. DENOTEMOS A ESTA RED COMO (V,K,C)

EN ESTE CASO EL FLUJO $F = [f_{ij}]$ DE v_1 A v_n DEBE SATISFACER:

i)

$$\sum \left[f_{ij} - f_{ji} \right] = \begin{cases} v & si \quad i = 1 \\ -v & si \quad i = n \\ 0 & si \quad i \neq 1, n \end{cases}$$

DONDE $v(f) = v$.

ii) $0 \leq f_{ij} \leq K_{ij}$

iii) $f_{ij} \leq C_i \; , \; f_{ij} \leq C_j$

EL FLUJO DE VALOR MAXIMO PARA LA RED (V,K,C) SE PUEDE

OBTENER APLICANDO EL ALGORITMO DE FORD-FULKERSON A LA RED (V',K') OBTENIDA A PARTIR DE (V,K,C) DE LA SIGUIENTE FORMA:

1) A CADA VERTICE $v_i \in V$ SE HACEN CORRESPONDER DOS VERTICES v_i' Y $v_i'' \in V'$

2) A CADA ARCO (v_i , v_j) SE HACEN CORRESPONDER DOS ARCOS (v_i'' , v_i') Y (v_i', v_j'').

3) LAS CAPACIDADES DE LOS ARCOS EN (V',K') ESTAN DADAS POR

$$K'(v_i', v_j'') = K(v_i, v_j)$$

$$K'(u_i'', v_i') = C(v_i)$$

POR EJEMPLO SEA (V,K,C) LA SIGUIENTE RED

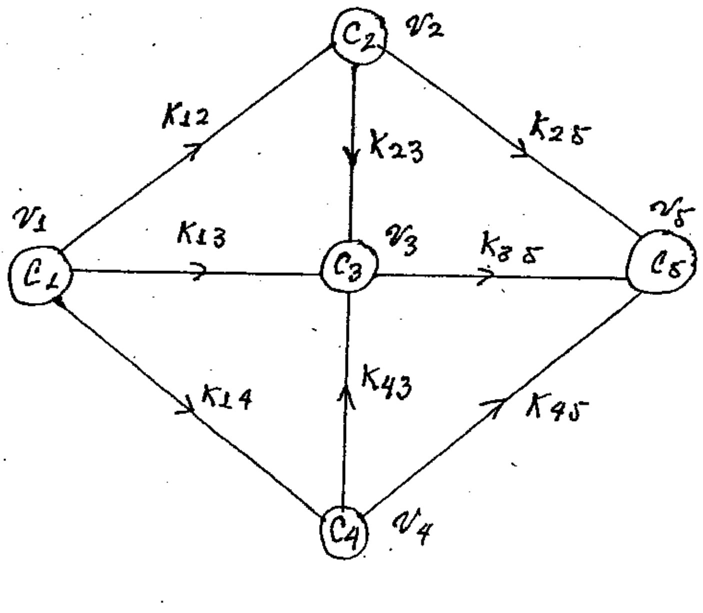


FIG.3

ENTONCES LA NUEVA RED (V,K) SERA

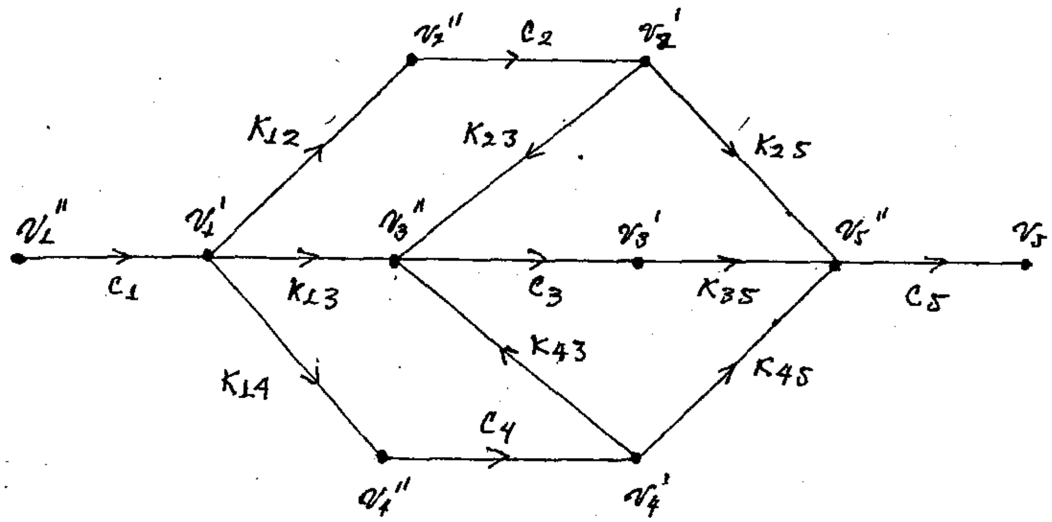


FIG.4

II.3 FLUJO MINIMO EN RED CON CAPACIDADES INFERIORES

SEA LA RED CAPACITADA (V,K) DONDE K ES LA FUNCION DE CAPACIDADES INFERIORES, ES DECIR $K(v_i, v_j) = K_{ij}$ ES LA CAPACIDAD INFERIOR DEL ARCO (v_i, v_j).

AQUI EL FLUJO $F = [f_{ij}]$ DE v_1 A v_n DE VALOR $v \geq 0$ DEBE SATISFACER:

i)

$$\sum_J [f_{iJ} - f_{Ji}] = \begin{cases} v & si \quad i = 1 \\ -v & si \quad i = n \\ 0 & si \quad i \neq 1, n \end{cases}$$

DONDE $v = v(f)$, ES EL VALOR DEL FLUJO

ii) $0 \leq K_{iJ} \leq f_{iJ}$.

EL FLUJO DE VALOR MINIMO, PUEDE OBTENERSE DE LA SIGUIENTE MANERA:

1) SE HACE CIRCULAR UN FLUJO INICIAL f^*_{ij} TAL QUE $f^*_{ij} \geq k_{ij}$.

2) SE OBTIENE UNA NUEVA RED CAPACITAD (V,K') DONDE

$$k'_{ij} = f^*_{ij} - k_{ij}$$

3) APLICANDO EL ALGORITMO DE FORD-FULKERSON, SE OBTIENE EL FLUJO DE VALOR MAXIMO $F' = [f'_{ij}]$ EN (V,K') TAL QUE $f'_{ij} \leq k'_{ij}$.

DE ACUERDO A LO ANTERIOR TENEMOS QUE:

$$f^*_{ij} - f'_{ij} \geq f^*_{ij} - k'_{ij} = k_{ij}$$

Y EL FLUJO DE VALOR MINIMO SERA

$$f_{ij} = f^*_{ij} - f'_{ij}$$

POR EJEMPLO SEA LA RED (V,K) DONDE LOS NUMEROS K REPRESENTAN CAPACIDADES INFERIORES.

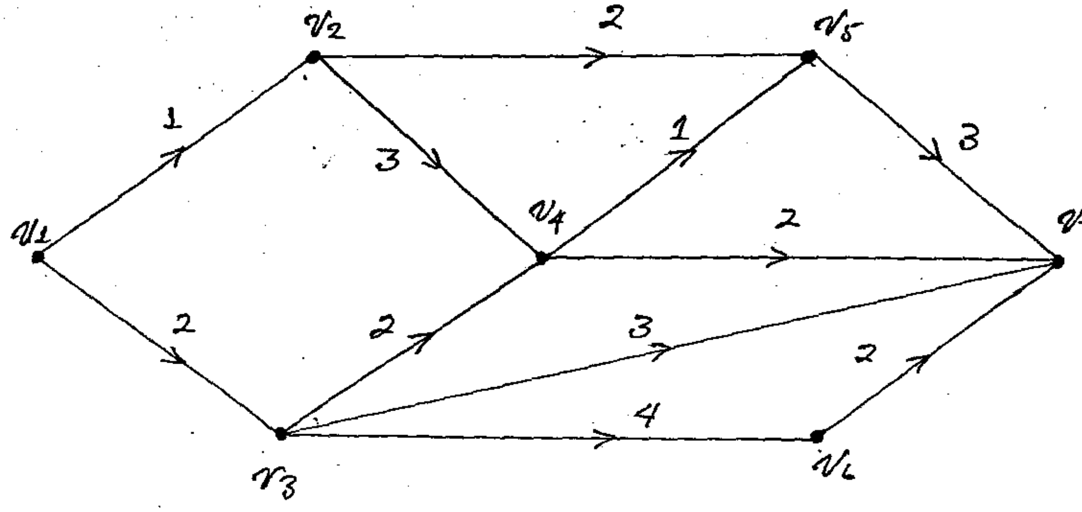


FIG.5

CONSIDEREMOS EL FLUJO INICIAL f^*_{ij} TAL QUE $f^*_{ij} \geq K_{ij}$.

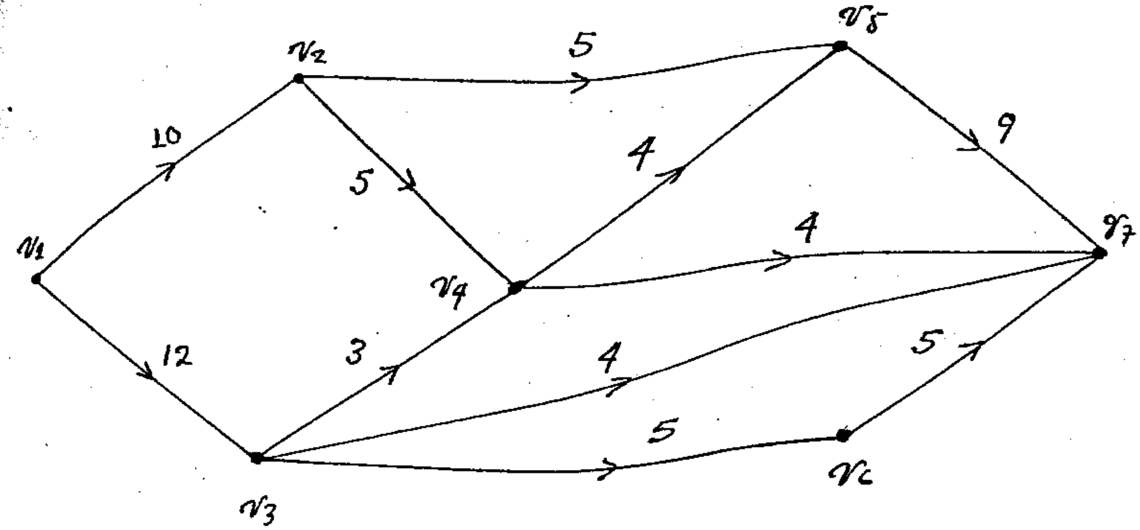


FIG.6

ENTONCES LA NUEVA MATRIZ (V',K') CON K'CAPACIDADES SUPERIORES SERA:

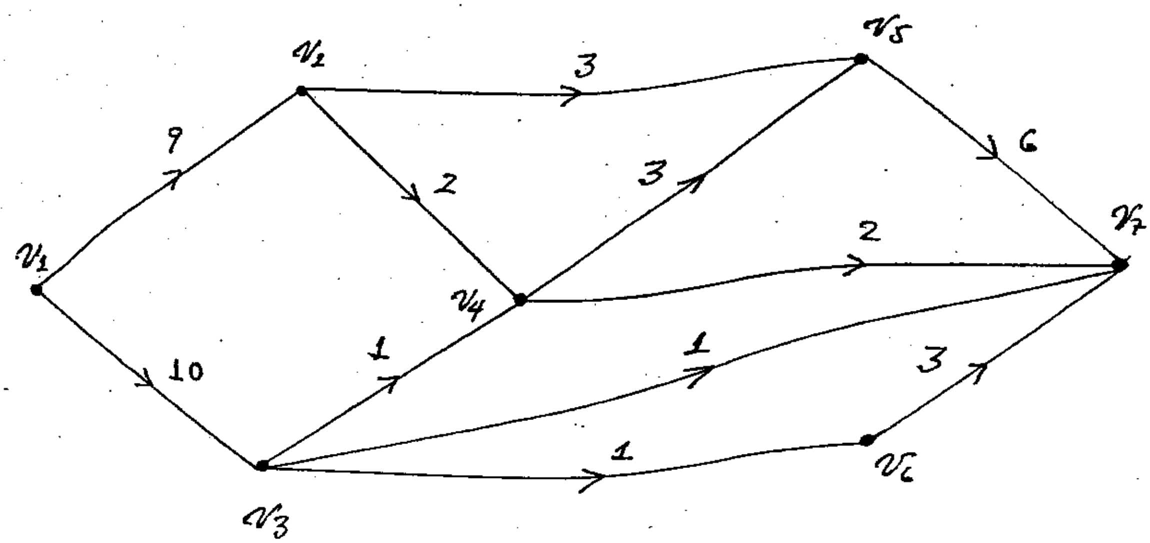


FIG.7

II.4 FLUJO MAXIMO EN RED CAPACITADA INFERIOR Y SUPERIRMENTE.

CONSIDEREMOS UNA RED (V,KI,KS) DONDE KI ES LA FUNCION DE CAPACIDADES INFERIORES, KI(v_i , v_j)=KI$_{ij}$ Y KS LA FUNCION DE CAPACIDADES SUPERIORES, KS(v_i , v_j)=KS$_{ij}$.

AHORA EL FLUJO F= $[f_{ij}]$ DE v_1 A v_n DEBE ESTAR SUJETO A LO SIGUIENTE:

i)

$$\sum [f_{ij} - f_{ji}] = \begin{cases} v & si \quad i=1 \\ -v & si \quad i=n \\ 0 & si \quad i \neq 1,n \end{cases} \qquad (2.1)$$

DONDE $v(f)=v \geq 0$ ES EL VALOR DEL FLUJO.

ii) $KI_{ij} \leq f_{ij} \leq KS_{ij}$ DONDE $KI_{ij} \geq 0$. (2.2)

SI EXISTEN FLUJOS QUE SATISFACEN i) Y ii), ENTONCES EL FLUJO DE VALOR MAXIMO ASOCIADO A LA RED (V,KI,KS) SE OBTIENE DE LA SIGUIENTE MANERA:

1) HACER PASAR UN FLUJO INICIAL f^{*}_{ij} SUJETO A ii) ES DECIR

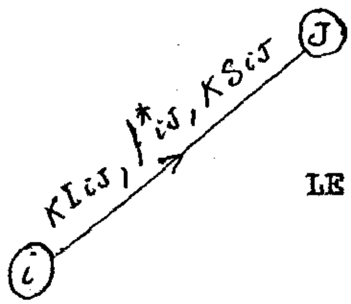
$$KI_{ij} \leq f^{*}_{ij} \leq KS_{ij}$$

2) CONSTRUIR UNA NUEVA RED (V,K) CON CAPACIDADES SUPERIORES K, UNICAMENTE, DE LA SIGUIENTE MANERA;

a) PARA EL ARCO (v_i , v_J) TAL QUE $KS_{iJ} \neq 0$ Y $KS_{Ji} = 0$.

$$K_{iJ} = KS_{iJ} - f^*_{iJ}$$

$$K_{Ji} = f^*_{Ji} - KI_{iJ}$$



LE CORRESPONDE

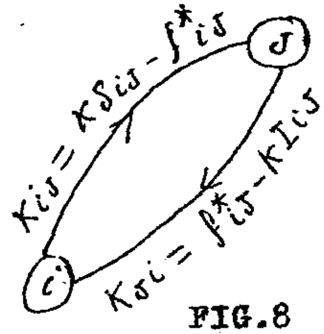
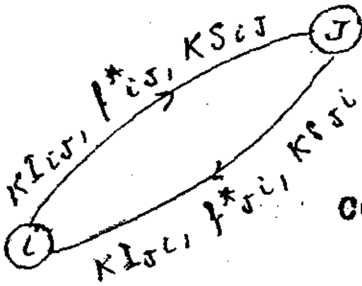


FIG.8

b) PARA EL ARCO (v_i , v_J) TAL QUE $KS_{iJ} > 0$ Y $KS_{Ji} > 0$

$$K_{iJ} = KS_{iJ} - f^*_{iJ} + f^*_{Ji} - KI_{Ji}$$

$$K_{Ji} = KS_{Ji} - f^*_{Ji} + f^*_{iJ} - KI_{iJ}$$



LE

CORRESPONDE

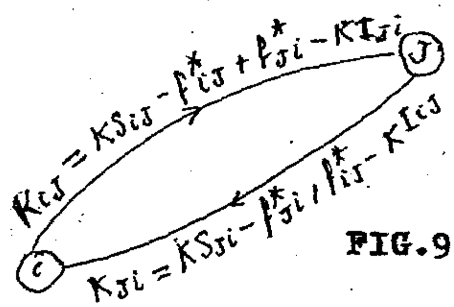


FIG.9

3) OBTENER EL FLUJO MAXIMO $F' = [f'_{iJ}]$ DE (V,K) APLICANDO EL ALGORITMO DE FORD-FULKERSON.

4) EL FLUJO MAXIMO $F = [f_{iJ}]$ DE LA RED (V,KI,KS) ES:

$$f_{iJ} = f^*_{iJ} + f'_{iJ}$$

EN ALGUNOS CASOS SE NECESITA ACONDICIONAR, EL FLUJO MAXIMO OBTENIDO, EN LOS LADOS DEL TIPO 2b), DE TAL MANERA QUE SE CUMPLA CON LOS LIMITES INFERIORES Y SUPERIORES.

POR EJEMPLO SEA LA RED (V,KI,KS) DADA A CONTINUACION, DONDE EL PRIMER NUMERO ES LA CAPACIDAD INFERIOR Y EL SEGUNDO LA CAPACIDAD SUPERIOR.

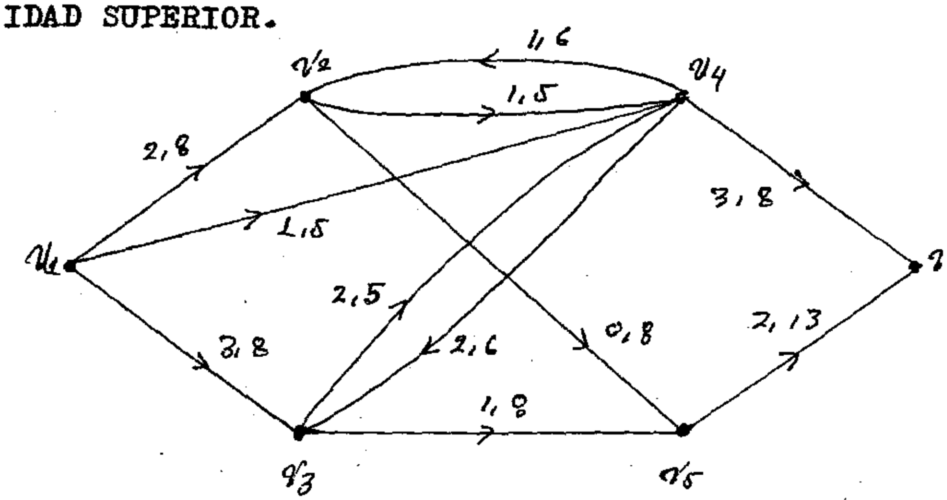


FIG.10

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE FLUJO INICIAL

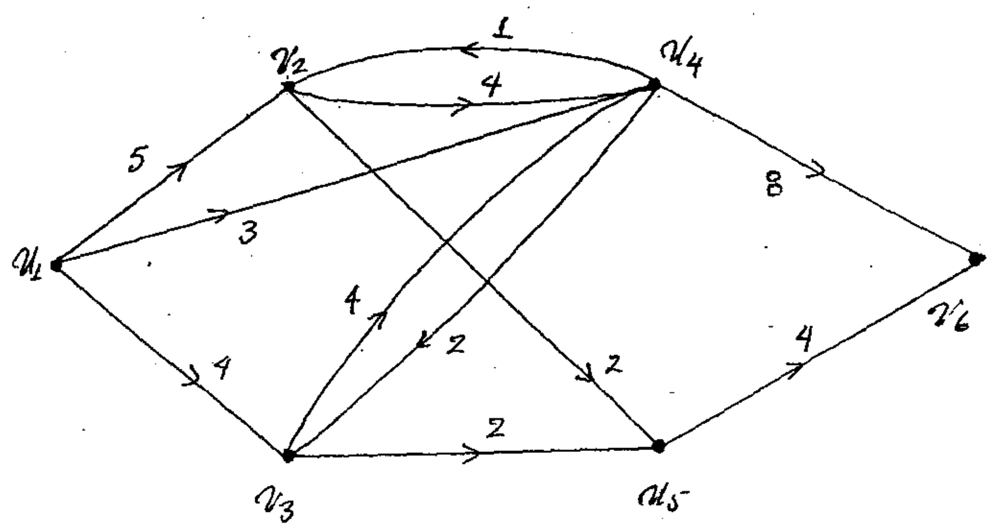


FIG.11

ENTONCES LA NUEVA RED (V,K) SERA LA SIGUIENTE, DONDE LOS NUMEROS REPRESENTAN CAPACIDADES SUPERIORES.

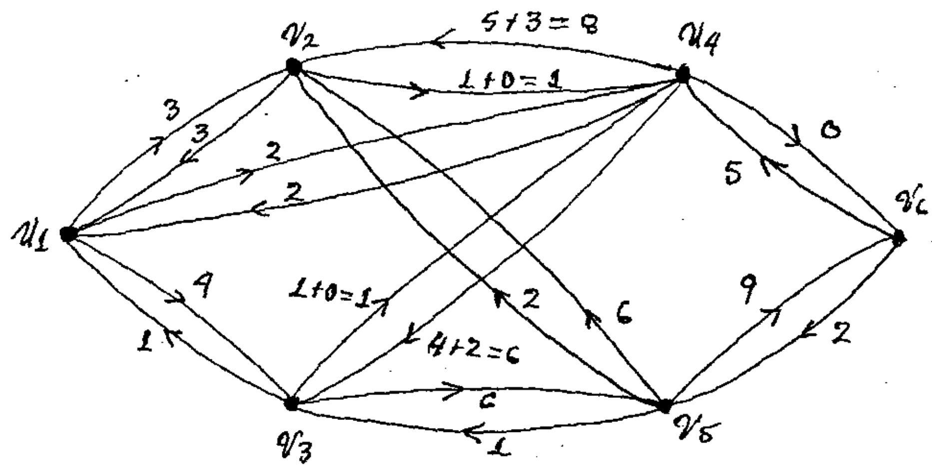


FIG.12

EN EL CAPITULO III, SE OBTIENEN LAS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES, PARA LA EXISTENCIA DE FLUJOS SOBRE REDES MAS PARTICULARES.

II.5 FLUJO MINIMO EN RED CAPACITADA INFERIOR Y SUPERIORMENTE

SI EXISTE UN FLUJO EN LA RED (V,KI,KS) QUE CUMPLE (2.1) Y (2.2), ENTONCES EXISTE UN FLUJO DE VALOR MINIMO, QUE PARA ENCONTRARLO, HAREMOS LO SIGUIENTE:

1) SE HACE PASAR UN FLUJO INICIAL $F^* = [f^*_{ij}]$ TAL QUE

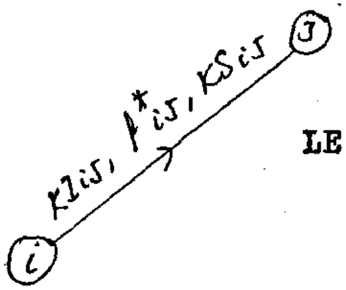
$$KI_{ij} \leq f^*_{ij} \leq KS_{ij}$$

2) CONSTRUIR LA RED (V,K) CON CAPACIDADES SUPERIORES K, DE LA FORMA SIGUIENTE:

a) PARA EL ARCO (u_i , u_J) TAL QUE $KS_{iJ} > 0$ Y $KS_{Ji} = 0$

$$K_{iJ} = f^*_{iJ} - KI_{iJ}$$

$$K_{Ji} = KS_{iJ} - f^*_{iJ}$$



LE CORRESPONDE

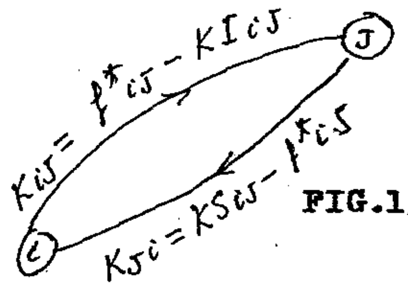
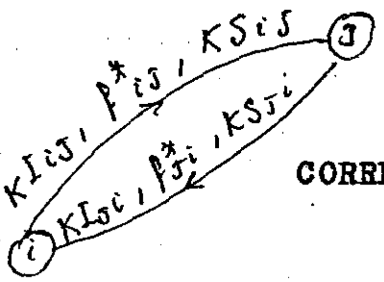


FIG.13

b) PARA EL ARCO (u_i , u_J) TAL QUE $KS_{iJ} > 0$ Y $KS_{Ji} > 0$

$$K_{iJ} = f^*_{iJ} - KI_{iJ} + KS_{Ji} - f^*_{Ji}$$

$$K_{Ji} = f^*_{Ji} - KI_{Ji} + KS_{iJ} - f^*_{iJ}$$



LE

CORRESPONDE

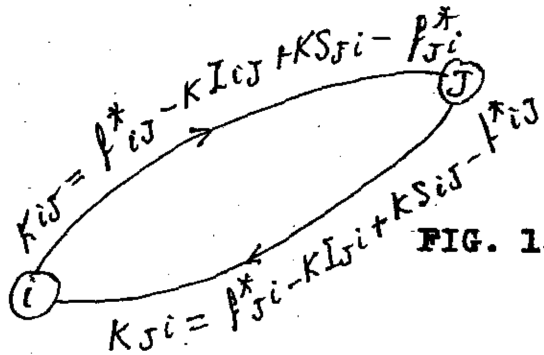


FIG. 14

3) OBTENER EL MAXIMO FLUJO $F' = [f'_{iJ}]$ EN (V,K) MEDIANTE EL ALGORITMO DE FORD-FULKERSON.

4) EL FLUJO MINIMO EN (V,KI,KS) DENOTADO POR $F = [f_{iJ}]$ ES

$$f_{iJ} = f^*_{iJ} - f'_{iJ}$$

POR EJEMPLO, DADA LA RED (V,KI,KS) Y EL FLUJO INICIAL FIG.10 Y FIG. 11 RESPECTIVAMENTE, ENTONCES LA NUEVA RED (V,K) PARA ENCONTRAR EL FLUJO MINIMO SERA:

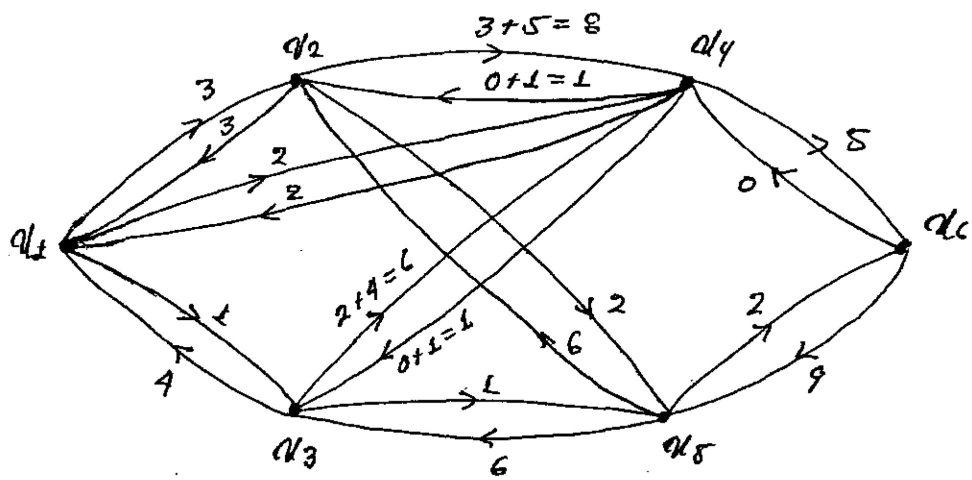


FIG.15

II.6 FLUJO MAXIMO Y FLUJO MINIMO EN RED CON GASTO EN LOS VERTICES.

CONSIDEREMOS LA RED (V,K), DE FUENTES MULTIPLES S, FUNCIONES SUMINISTRO $\omega(v_i)$, $v_i \in S$ Y FUNCIONES GASTO $g(v_i)$, $v_i \in \bar{S}$, ENTRE COTAS DADAS $0 \le \alpha(v_i) \le \beta(v_i)$ Y $0 \le a(v_i) \le b(v_i)$ RESPECTIVAMENTE. ESTA RED LA DENOTAREMOS COMO (V,K,G), $V=S \cup \bar{S}$.

SE REQUIEREN FLUJOS $F=[f_{ij}]$ DE S A $\bar{S}$, ES DECIR DISTRIBUIR EL FLUJO SOBRE LA RED, QUE CUMPLA:

i)

$$\sum \left[f_{ij} - f_{ji} \right] = \begin{cases} w_i & si \ v_i \in S \\ -g_i & si \ v_i \in \bar{S} \end{cases}$$

DONDE $w(v_i)=w_i \geq 0$, $g(v_0)=g_i \geq 0$ Y $v(f)=\sum w_i$.

ii) $0 \leq f_{iJ} \leq k_{iJ}$

iii) $\alpha(v_i) \leq w_i \leq \beta(v_i) \quad v_i \in S$

$a(v_i) \leq g_i \leq b(v_i) \quad v_i \in \bar{S}$

SI EXISTEN FLUJOS QUE SATISFACEN ESTAS CONDICIONES, ENTONCES EXISTE UN NUMERO FINITO DE ELLOS, POR LO TANTO EXISTE UN FLUJO MAXIMO Y UN FLUJO MINIMO. EL FLUJO MAXIMO O EL FLUJO MINIMO DE S A $\bar{S}$ EN (V,K,G) SE OBTIENE, ENCONTRANDO EL FLUJO MAXIMO O EL FLUJO MINIMO SEGUN SEA EL CASO, A UNA RED (V,KI,KS) COMO EN II.4 Y II.5 .

LA RED (V,KI,KS) SE OBTIENE DE (V,K,G) DE LA SIGUIENTE MANERA:

1) SE AGREGA A V LOS VERTICES v_0 Y v_{n+1} , $V' = V \cup \{v_0, v_{n+1}\}$.

2)SE AGREGAN LOS ARCOS (v_0 , v_i) $v_i \in S$ Y (v_J , v_{n+1}) $v_J \in \bar{S}$.

3) LAS CAPACIDADES INFERIORES Y SUPERIORES SE DEFINEN:

$$KI(v_i,v_J) = \begin{cases} \alpha(v_J) & \text{si } v_i = v_0,\ v_J \in S \\ 0 & \text{si } v_i, v_J \in V \\ a(v_J) & \text{si } v_i \in \bar{S},\ v_J = v_{n+1} \end{cases}$$

$$KS(v_i,v_J) = \begin{cases} \beta(v_J) & \text{si } v_i = v_0,\ v_J \in S \\ K(v_i,v_J) & \text{si } v_i, v_J \in V \\ b(v_i) & \text{si } v_i \in \bar{S},\ v_J = v_{n+1} \end{cases}$$

POR EJEMPLO DADA LA RED DE LA FIG. 16 CON FUENTES S= $\{v_1, v_2\}$ Y S= $\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ LAS COTAS DE SUMINISTRO Y GASTO SON

$$\alpha(v_1) = 0\ ,\quad \beta(v_1) = 5,\quad \alpha(v_2) = 3,\quad \beta(v_2) = 10$$

$$a(v_3) = a(v_4) = a(v_5) = a(v_6) = a(v_7) = 1$$

$$b(v_3) = b(v_4) = b(v_5) = b(v_6) = b(v_7) = 3$$

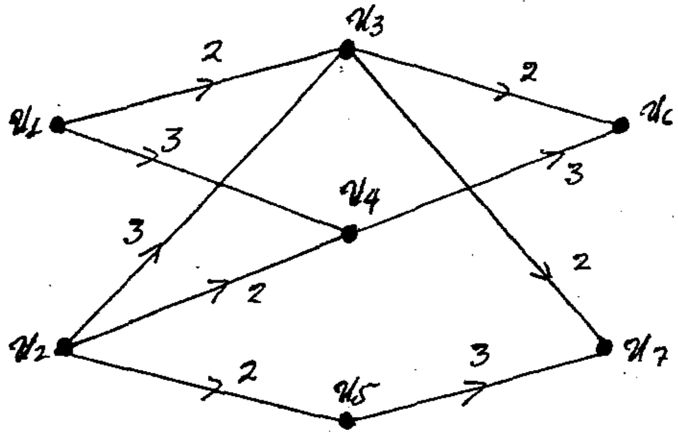


FIG.16

ENTONCES LA RED (V,KI,KS) OBTENIDA A PARTIR DE (V,K,G) DE LA FIG.16 SERA LA SIGUIENTE FIGURA, DONDE EL PRIMER NUMERO ES SU CAPACIDAD INFERIOR Y EL SEGUNDO SU CAPACIDAD INFERIOR.

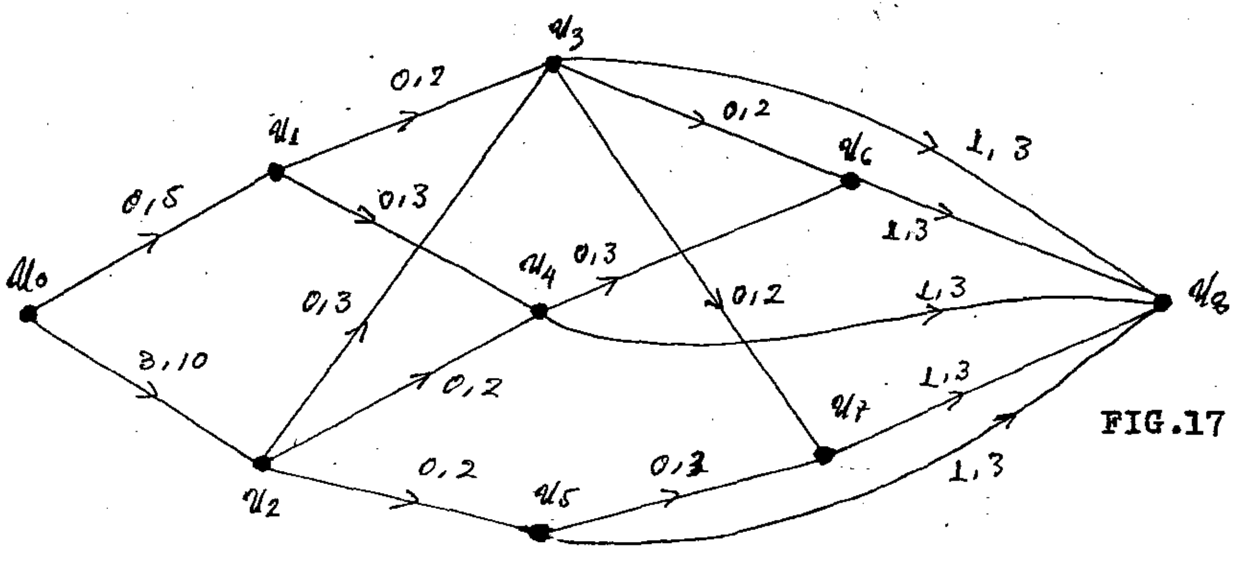


FIG.17

CAPITULO III

APLICACIONES DEL TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE

III.1 PROBLEMA DE FACTIBILIDAD

SUPONGAMOS QUE NOS DAN UNA RED CAPACITADA, CON CIERTOS VERTICES DESIGNADOS COMO FUENTES Y OTROS COMO SUMIDEROS, ASUMIMOS QUE CADA FUENTE REQUIERE ENVIAR, Y CADA SUMIDERO RECIBIR, ENTRE CIERTAS COTAS DADAS. ¿ BAJO QUE CONDICIONES ES ESTO POSIBLE ?. PARA FORMALIZAR ESTE PROBLEMA, DAREMOS LAS SIGUIENTES NOTACIONES Y DEFINICIONES.

COTAS DE SUMINISTRO Y GASTO.-SEA (V,K) $V=\{v_i\}_{i=1}^{n}$ UNA RED CON CONJ. DE FUENTES S, CONJ. DE SUMIDEROS T, Y CONJ. DE VERTICES INTERMEDIOS R. ASOCIAMOS CON CADA $v_i \in S$ LAS COTAS ENTERAS DE SUMINISTRO $\alpha(v_i)$, $\beta(v_i)$ TALES QUE $0 \leq \alpha(v_i) \leq \beta(v_i)$. SIMILARMENTE ASOCIAMOS CON CADA $v_i \in T$ LAS COTAS ENTERAS DE GASTO $a(v_i)$, $b(v_i)$ TALES QUE $0 \leq a(v_i) \leq b(v_i)$.

FLUJO FACTIBLE.- $F=[f_{ij}]$ UN FLUJO SOBRE (V,K) DE S A T QUE SATISFACE LAS CONDICIONES:

$$\alpha(v_i) \leq \sum_{j} [f_{ij} - f_{ji}] \leq \beta(v_i) , \quad v_i \in S$$

$$a(v_i) \leq \sum_{j} [f_{ij} - f_{ji}] \leq b(v_i) , \quad v_i \in T \qquad (3.1)$$

SE LE LLAMA FLUJO FACTIBLE Y A LAS CONDICIONES SE LES LLAMA CONDICIONES FACTIBLES.

NOTACION.-PARA SIMPLIFICAR LA NOTACION, SE ACEPTAN LOS SIGUIENTES CONVENIOS. SEA $V_1, V_2 \subset V$ DENOTAMOS

$$(V_1, V_2) = \{(v_i, v_j) \mid u_i \in V_1,\ v_j \in V_n\}$$

$$f(V_1, V_2) = \sum_{u_i \in V_1,\, u_j \in V_2} f(u_i, v_j)$$

$$f(V, v_j) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i, u_j)$$

$$f(u_i, V) = \sum_{j=1}^{n} f(v_i, v_j)$$

ADEMAS SI LA COTA α ES DEFINIDA EN $V' \subset V$ TENEMOS:

$$\alpha(V') = \sum_{u_i \in V'} \alpha(v_i)$$

DE ACUERDO A ESTA NOTACION TENEMOS QUE EL VALOR DEL FLUJO $\mathcal{U}(f)$, QUE ES EL FLUJO NETO QUE SALE DE LAS FUENTES, QUEDARA:

$$\mathcal{U}(f) = \sum_{u_i \in S} \sum_{j=1}^{n} \left[f(v_i, u_j) - f(v_j, v_i) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[f(S, v_j) - f(v_j, S) \right] \qquad (3.2)$$

$$\Rightarrow \quad v(f) = f(S,V) - f(V,S)$$

O EN TERMINOS DEL FLUJO NETO QUE ENTRA A LOS SUMIDEROS

$$v(f) = f(V,T) - f(T,V)$$

LAS CONDICIONES DE FACTIBILIDAD QUEDAN:

$$\alpha(v_i) \leq f(u_i,V) - f(V,v_i) \leq \beta(v_i) \ , \ u_i \in S$$
$$a(v_i) \leq f(V,v_i) - f(u_i,V) \leq b(v_i) \ , \ u_i \in T \qquad (3.3)$$

PROBLEMA DE FACTIBILIDAD.-DADA LA RED (V,K) CON LAS FUENTES S, SUMIDEROS T, Y DADAS LAS COTAS ENTERAS DE SUMINISTRO Y GASTO. ¿CUALES SON LAS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE EXISTA UN FLUJO FACTIBLE DE S A T?.

PARA DEDUCIR ESTAS CONDICIONES, LO HAREMOS MEDIANTE LA CONSTRUCCION DE UNA RED AUXILIAR (V',K'), EL LEMA 1 Y LEMA 2 QUE A CONTINUACION SERAN DEMOSTRADOS.

RED AUXILIAR.-A PARTIR DE LA RED (V,K) DEL PROBLEMA DE FACTIBILIDAD, CONSTRUIMOS LA RED (V',K') AÑADIENDO CUATRO VERTICES $V' = \{s, t, u, w\} \cup V$ Y EL CONJUNTO DE ARCOS (s,S), (u,S), (T,t), (T,w), (u,t), (s,w), (t,s) Y EXTENDIENDO LA FUNCION DE CAPACIDAD K DE LA SIGUIENTE

MANERA:

$$K'(s, v_i) = \beta(v_i) - \alpha(v_i) \quad , \quad v_i \in S$$

$$K'(u, v_i) = \alpha(v_i) \quad , \quad v_i \in S$$

$$K'(v_i, t) = b(v_i) - a(v_i) \quad , \quad v_i \in T$$

$$K'(v_i, w) = a(v_i) \qquad v_i \in T$$

$$K'(u, t) = a(T)$$

$$K'(s, w) = \alpha(S)$$

$$K'(t, s) = \infty$$

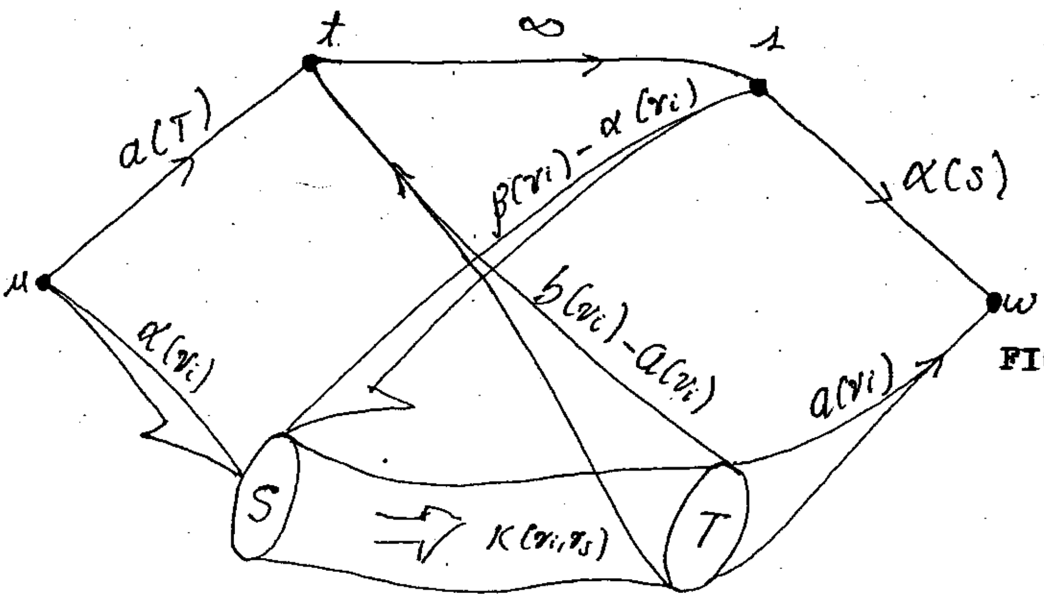


FIG.1

LEMA 1.-UN FLUJO FACTIBLE EXISTE EN (V,K) SI Y SOLO SI EL VALOR DEL MAXIMO FLUJO DE u A w EN LA RED (V',K') ES $\alpha(S)+a(T)$.

DEM.-SUPONGAMOS QUE F= $[f_{ij}]$ ES UN FLUJO FACTIBLE EN (V,K) EXTENDEMOS F A F'= $[f'_{ij}]$ DEFINIDA EN LOS ARCOS DE (V',K') COMO SIGUE:

$$f'(s, v_i) = f(v_i, V) - f(V, v_i) - \alpha(v_i) \qquad v_i \in S$$

$$f'(u, v_i) = \alpha(v_i) \qquad v_i \in S$$

$$f'(v_i, t) = f(V, v_i) - f(v_i, V) - a(v_i) \qquad v_i \in T$$

$$f'(v_i, w) = a(v_i)$$

$$f'(u, t) = a(T)$$

$$f'(s, w) = \alpha(S)$$

$$f'(t, s) = f(S, V) - f(V, S)$$

$$f'(v_i, v_j) = f(v_i, v_j) \qquad (v_i, v_j) \in V \times V.$$

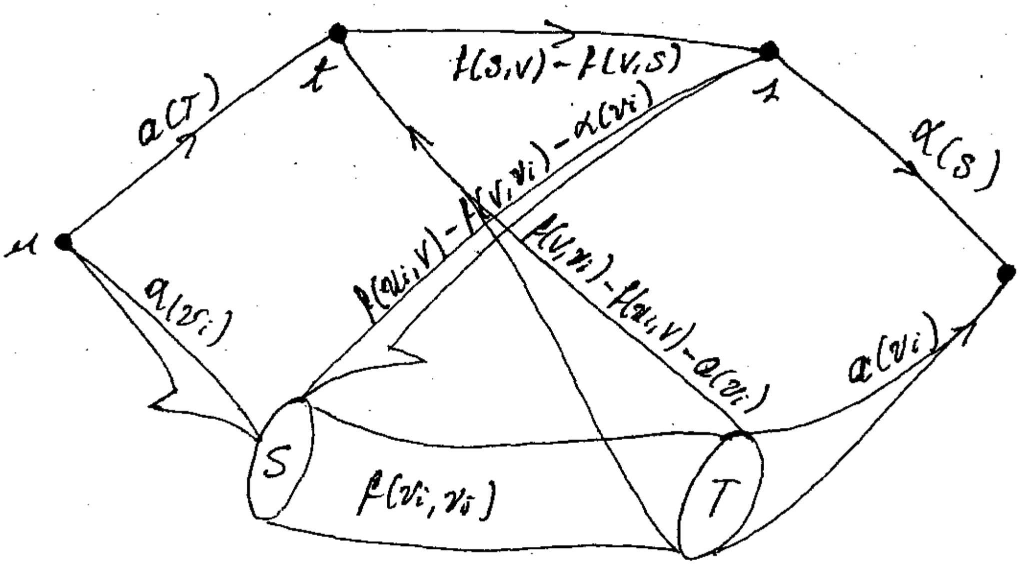


FIG.2

PODEMOS OBSERVAR QUE $F' = [f'_{ij}]$ ES UN FLUJO DE u A w EN (V',K') CUYO VALOR ES $v(f') = \alpha(S) + a(T)$ Y ESTE ES MAXIMO.

DEM.-SUPONGAMOS AHORA QUE $F' = [f'_{ij}]$ ES UN FLUJO MAXIMO DE u A w DE VALOR $\alpha(S) + a(T)$ ENTONCES

$$f'(u, v_i) = \alpha(v_i) \quad , \quad u_i \in S$$
$$f'(u_i, w) = a(v_i) \quad , \quad u_i \in T$$

SEA $F = [f_{ij}]$, $F' = [f'_{ij}]$ RESTRINGIDO A (V,K). ENTONCES F ES UN FLUJO DE S A T EN (V,K), CON LO CUAL TENEMOS

$$f'(u, v_i) + f'(s, u_i) = f(u_i, V) - f(V, u_i) \quad u_i \in S$$
$$\alpha(u_i) + f'(s, u_i) = f(u_i, V) - f(V, u_i) \quad u_i \in S$$

Y COMO $0 \leq f'(s, u_i) \leq \beta(v_i) - \alpha(v_i)$, $u_i \in S$ OBTENEMOS

$$\alpha(v_i) \leq \alpha(v_i) + f'(s, u_i) \leq \beta(u_i), \quad u_i \in S$$
$$\alpha(u_i) \leq f(u_i, V) - f(V, u_i) \leq \beta(x_i), \quad x_i \in S$$

QUE ES LA PRIMERA CONDICION DE FACTIBILIDAD (3.3)

EN FORMA ANALOGA SE LLEGA A LA SEGUNDA CONDICION DE FACTIBILIDAD (3.1)

$$f(V, u_i) - f(u_i, V) = f'(u_i, w) + f'(u_i, t), \quad u_i \in T$$
$$f(V, u_i) - f(u_i, V) = a(u_i) + f'(u_i, t) \quad , \quad u_i \in T$$

Y COMO $0 \leq f'(u_i, t) \leq b(x_i) - a(u_i) \quad , \quad u_i \in T$

OBTENEMOS $\alpha(u_i) \leq f(V, u_i) + f(u_i, V) \leq b(x_i), \quad u_i \in T$

QUE ES LA SEGUNDA CONDICION DE FACTIBILIDAD (3.3)

OPERACIONALMENTE POR MEDIO DE ESTE LEMA 1, PODEMOS SABER SI EXISTE FLUJO FACTIBLE EN (V,K), OBTENIENDO EL VALOR DEL MAXIMO FLUJO $F' = [f'_{ij}]$ EN (V',K') MEDIANTE EL ALGORIMO DE FORD-FULKERSON.

-SI $\mathcal{U}(f') = \alpha(s) + a(T)$ ENTONCES F' RESTRINGIDO A (V,K) ES EL FLUJO FACTIBLE.

-SI $\mathcal{U}(f') \neq \alpha(s) + a(T)$ ENTONCES F FACTIBLE NO EXISTE.

LEMA 2.-UN FLUJO $F' = [f'_{ij}]$ DE u A w, DE VALOR MAXIMO $\mathcal{U}(f') = \alpha(s) + a(T)$ EN LA RED AUXILIAR (V',K') EXISTE SI Y SOLO SI SE CUMPLEN

$$\begin{aligned} \beta(s \cdot \bar{X}) + K'(X, \bar{X}) &\geq a(T \cdot \bar{X}) \\ b(T \cdot X) + K'(X, \bar{X}) &\geq \alpha(s \cdot X) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

PARA TODA PARTICION X, $\bar{X}$ DE V EN (V,K).

DEM.-POR EL TEOREMA MAXIMO FLUJO-MINIMO CORTE $F' = [f'_{ij}]$ ES MAXIMO CON VALOR $\mathcal{U}(f') = \alpha(s) + a(T)$ SI Y SOLO SI LA CAPACIDAD DE CUALQUIER CORTE $(X', \bar{X}')$ DE (V', K') ES AL MENOS TAN GRANDE COMO $\alpha(s) + a(T)$. MEDIANTE ESTE RESULTADO PODEMOS OBTENER LAS CONDICIONES (3.4) CONSIDERANDO LOS CASOS SIGUIENTES PARA EL CORTE $(X', \bar{X}')$ QUE RESTRINGIDO A (V,K) ES LA PARTICION X, $\bar{X}$.

CASO 1) $s \in X'$, $t \in \bar{X}'$ LA PARTICION QUEDA $X' = \{u, s\} \cup X$ $\bar{X}' = \{w, t\} \cup \bar{X}$ ENTONCES

$$\begin{aligned} K'(X', \bar{X}') &= K'(u,t) + K'(u,\bar{X}) + K'(s,w) + K'(s,\bar{X}) \\ &\quad + K'(X,w) + K'(X,t) + K'(X,\bar{X}) . \\ &= a(T) + \cancel{\alpha(S\cdot\bar{X})} + \alpha(S) + \beta(S\cdot\bar{X}) - \cancel{\alpha(S\cdot\bar{X})} \\ &\quad + \cancel{a(T\cdot X)} + b(T\cdot X) - \cancel{a(T\cdot X)} + K'(X,\bar{X}) \\ &= \alpha(S) + a(T) + \beta(S\cdot\bar{X}) + b(T\cdot X) + K'(X,\bar{X}) \end{aligned}$$

EN ESTE CASO SIEMPRE TENEMOS QUE

$$K'(X', \bar{X}') \geq \alpha(S) + a(T)$$

CASO 2) $s \in \bar{X}'$, $t \in X'$ COMO $K(\cdot,\cdot) = \infty$ ENTONCES $K'(X', \bar{X}') = \infty$ Y LA CONDICION TAMBIEN SE CUMPLE.

CASO 3) $s \in X'$, $t \in X'$ LA PARTICION QUEDA $X' = \{u, s, t\} \cup X$ $\bar{X}' = \{w\} \cup \bar{X}$ ENTONCES

$$\begin{aligned} K'(X',\bar{X}') &= K'(s,w) + K'(u,\bar{X}) + K'(s,\bar{X}) + K'(X,w) + K'(X,\bar{X}) \\ &= \alpha(S) + \cancel{\alpha(S\cdot\bar{X})} + \beta(S\cdot\bar{X}) - \cancel{\alpha(S\cdot\bar{X})} + a(T\cdot X) + K'(X,\bar{X}) \\ &= \alpha(S) + a(T\cdot X) + a(T\cdot\bar{X}) - a(T\cdot\bar{X}) + \beta(S\cdot\bar{X}) + K'(X,\bar{X}) \\ &= \alpha(S) + a(T) + \beta(S\cdot\bar{X}) + K'(X,\bar{X}) - a(T\cdot\bar{X}) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow K'(X', \bar{X}') \geq \alpha(S) + a(T)$ SI Y SOLO SI

$\beta(S\cdot\bar{X}) + K'(X,\bar{X}) \geq a(T\cdot\bar{X})$ QUE ES LA PRIMERA DE (3.4)

CASO 4) $s \in \bar{X}'$, $t \in \bar{X}'$ LA PARTICION QUEDA $X' = \{u\} \cup X$
$\bar{X}' = \{s, t, w\} \cup \bar{X}$. ENTONCES

$$K'(X', \bar{X}') = K'(u,t) + K'(u, \bar{X}) + K'(X,t) + K'(X,w) + K'(X, \bar{X})$$
$$= a(T) + \alpha(S \cdot \bar{X}) + b(T \cdot X) - \cancel{a(T \cdot \bar{X})} + \cancel{a(T \cdot \bar{X})} + K'(X, \bar{X})$$
$$= a(T) + \alpha(S \cdot \bar{X}) + \alpha(S \cdot X) - \alpha(S \cdot X) + b(T \cdot X) + K'(X, \bar{X})$$
$$= a(T) + \alpha(S) + b(T \cdot X) + K'(X, \bar{X}) - \alpha(S \cdot X)$$

ENTONCES $K'(X', \bar{X}') \geq a(T) + \alpha(S)$ SI Y SOLO SI

$$b(T \cdot X) + K'(X, \bar{X}) \geq \alpha(S \cdot X)$$

QUE ES LA SEGUNDA DE (3.4).

DEL LEMA 1 Y LEMA 2, LLEGAMOS AL SIGUIENTE TEOREMA

TEOREMA DE FACTIBILIDAD 1.-UN FLUJO FACTIBLE EXISTE EN (V,K) SI Y SOLO SI SE CUMPLEN (3.4)

$$\beta(S \cdot \bar{X}) + K(X, \bar{X}) \geq a(T \cdot \bar{X})$$
$$b(T \cdot X) + K(X, \bar{X}) \geq \alpha(T \cdot X)$$

PARA TODO CORTE $(X, \bar{X})$ DE (V,K)

EL CASO PARTICULAR EN EL CUAL SE REQUIERE QUE SE CUBRAN LOS GASTOS DE ACUERDO AL SUMINISTRO EXISTENTE, ES CONSIDERANDO $\alpha(v_i) = 0$, $\forall v_i \in S$, Y $b(v_i) = \infty$, $\forall v_i \in T$.

COROL 1.-UN FLUJO $F=[f_{ij}]$ EN (V,K) QUE SATISFACE:

$$f(u_i,V)-f(V,u_i)\leq \beta(u_i) \quad u_i\in S$$
$$f(V,u_i)-f(u_i,V)\geq a(u_i) \quad u_i\in T \qquad (3.5)$$

EXISTE SI Y SOLO SI SE CUMPLE

$$\beta(S\cdot\bar{X})+k(X,\bar{X})\geq a(T\cdot\bar{X})$$

PARA TODO CORTE $(X,\bar{X})$ DE (V,K)

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO $a(u_i)$, $u_i\in T$ Y $\beta(u_i)=\infty$, $u_i\in S$, TENEMOS EL SIGUIENTE COROLARIO.

COROL 2.-UN FLUJO EN (V,K) QUE SATISFACE

$$f(u_i,V)-f(V,u_i)\geq \alpha(u_i)\,, \quad u_i\in S$$
$$f(V,u_i)-f(u_i,V)\leq b(u_i)\,, \quad u_i\in T \qquad (3.6)$$

EXISTE SI Y SOLO SI

$$b(T\cdot X)+k(X,\bar{X})\geq \alpha(S\cdot X)$$

PARA TODO CORTE $(X,\bar{X})$ DE (V,K).

ESTE COROLARIO PUEDE DEDUCIRSE TAMBIEN A PARTIR DEL COROLARIO 1 , INTERPRETANDOLO DE LA SIGUIENTE MANERA; INTERCAMBIANDO LAS FUENTES Y SUMIDEROS DE (V,K), INVERTIMOS LA DIRECCION DE TODOS LOS ARCOS, Y CONSIDERAR A α COMO LA COTA DE GASTO EN EL CONJ. S SUMIDEROS, Y b COMO LA COTA SUMINISTRO EN EL CONJ. T FUENTES.

EL TEOREMA DE FACTIBILIDAD 1 PUEDE REESTABLECERSE DE LA SIGUIENTE MANERA:

TEOR.2.-LAS CONDICIONES

$$\alpha(v_i) \leq f(v_i, V) - f(V, u_i) \leq \beta(v_i) \quad , u_i \in S$$
$$a(v_i) \leq f(V, v_i) - f(v_i, V) \leq b(v_i) \quad , u_i \in T$$

SON FACTIBLES, SI Y SOLO SI

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(v_i, V) - f(V, v_i) \geq \alpha(v_i) , & u_i \in S \\ f(V, v_i) - f(u_i, V) \leq b(v_i) , & u_i \in T \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(u_i, V) - f(V, v_i) \leq \beta(v_i) , & u_i \in S \\ f(V, u_i) - f(u_i, V) \geq a(v_i) , & u_i \in T \end{array} \right\}$$

SON SEPARADAMENTE FACTIBLES.

III.2 APLICACION A MATRICES

EL SIGUIENTE TEOREMA PROVEE LOS CRITERIOR PARA LA EXISTENCIA DE UNA MATRIZ NO NEGATIVA, CUYA SUMA DE RENGLONES Y SUMA DE COLUMNAS ESTAN ENTRE COTAS DADAS, ADEMAS QUE LAS ENTRADAS DE LA MATRIZ SEAN ACOTADAS SUPERIORMENTE POR NUMEROS ESPECIFICADOS.

TEOR.3.-SEAN $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, \ldots, m$, $0 \leq a_j \leq b_j$ $j = 1, \ldots, n$, $k_{ij} \geq 0$ CONSTANTES. SI EXISTEN MATRICES $[f^1_{ij}]$ Y $[f^2_{ij}]$ QUE SATISFACEN:

$$\begin{array}{lll} \alpha_i \leq \sum_j f^1_{ij} , & \sum_i f^1_{ij} \leq b_j , & 0 \leq f^1_{ij} \leq k_{ij} \\ \sum_j f^2_{ij} \leq \beta_i , & a_j \leq \sum_i f^2_{ij} , & 0 \leq f^2_{ij} \leq k_{ij} \end{array} \quad (3.7)$$

ENTONCES EXISTE UNA MATRIZ $[f_{iJ}]$ QUE SATISFACE

$$\alpha_i \leq \sum_J f_{iJ} \leq \beta_i \ , \ a_J \leq \sum_i f_{iJ} \leq b_J \ , \ 0 \leq f_{iJ} \leq k_{iJ} \quad (3.8)$$

DEM.-SEA (V,K) LA RED, DONDE $V = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ $K(x_i, y_J) = k_{iJ}$, $S = \{x_1, \ldots x_m\}$ FUENTES, $T = \{y_1, \ldots, y_n\}$ SUMIDEROS, $R = \emptyset$. ASOCIAMOS CON CADA x_i LAS COTAS α_i Y β_i. CON CADA y_J , a_J Y b_J. ENTONCES UN FLUJO DE S A T ES UNA MATRIZ $[f_{iJ}]$ SATISFACIENDO $0 \leq f_{iJ} \leq k_{iJ}$, UN FLUJO FACTIBLE SATISFACE ADEMAS LAS PRIMERAS DOS DE (3.8). ENTONCES ESTE TEOREMA ES CONSECUENCIA INMEDIATA DEL TEOR.2.

III.3 PROBLEMA DE LA SUBDIGRAFICA

DIGRAFICA.-ES UNA RED NO CAPACITADA. ES DECIR, SIMPLEMENTE ES EL CONJUNTO DE VERTICES $V = \{u_i\}_{i=1}^{n}$ Y EL CONJUNTO DE ARCOS $A = \{(u_i, v_J) / u_i, v_J \in V\} \subset V \times V$. LAS DIGRAFICAS LAS DENOTAREMOS $[V, A]$. LA SIGUIENTE FIGURA REPRESENTA UNA SUBDIGRAFICA.

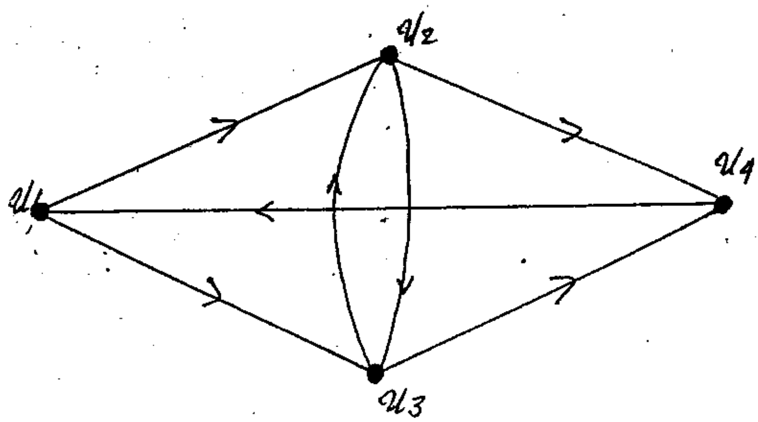


FIG.3

SUBDIGRAFICA.- UNA SUBDIGRAFICA DE UNA DIGRAFICA $[V, A]$, ES UNA DIGRAFICA $[V_H, A_H]$ TAL QUE $V_H \subset V$, $A_H \subset A$. LA FIG. 3 REPRESENTA UNA SUBDIGRAFICA DE LA FIG. 2

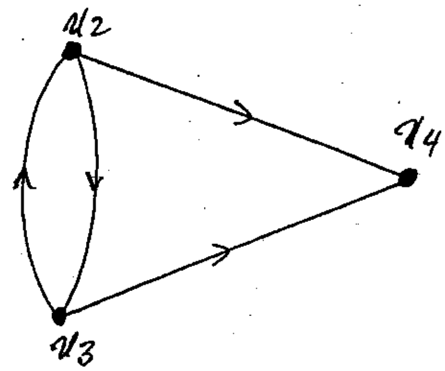


FIG.4

GRADO LOCAL.- EL GRADO LOCAL DE $[V, A]$ EN $v_i \in V$ SE DEFINE COMO LA PAREJA $e(v_i)$, $i(v_i)$ DONDE $e(v_i)$ ES EL NUMERO DE ARCOS QUE ENTRAN A v_i, $i(v_i)$ ES EL NUMERO DE ARCOS QUE SALEN DE v_i.

POR EJEMPLO, EN LA DIGRAFICA DE LA FIG. 3 , TENEMOS PARA CADA VERTICE LOS STES GRADOS LOCALES

$$e(v_1) = 1 \quad , \quad i(v_1) = 2$$
$$e(v_2) = 2 \quad , \quad i(v_2) = 2$$
$$e(v_3) = 2 \quad , \quad i(v_3) = 2$$
$$e(v_4) = 2 \quad , \quad i(v_4) = 1$$

EL PROBLEMA DE LA SUBDIGRAFICA, CONSISTE EN DETERMINAR CONDICIONES BAJO LAS CUALES $[V, A]$ TIENE UNA SUBDIGRAFICA $[V_H, A_H]$ CON GRADOS LOCALES DADOS.

POR EJEMPLO, SEA $[V,A]$ DE LA FIG. 3. ¿ EXISTIRA UNA SUBDI - GRAFICA $[V_H, A_H]$ CON LOS STES. GRADOS LOCALES?

$$e_H(v_1) = 1 \quad , \quad i_H(v_1) = 1$$
$$e_H(v_2) = 1 \quad , \quad i_H(v_2) = 1$$
$$e_H(v_3) = 1 \quad , \quad i_H(v_3) = 1$$
$$e_H(v_4) = 1 \quad , \quad i_H(v_4) = 1$$

LA RESPUESTA ES QUE SI EXISTE, Y UNA DE ELLAS ES LA STE. FIG.

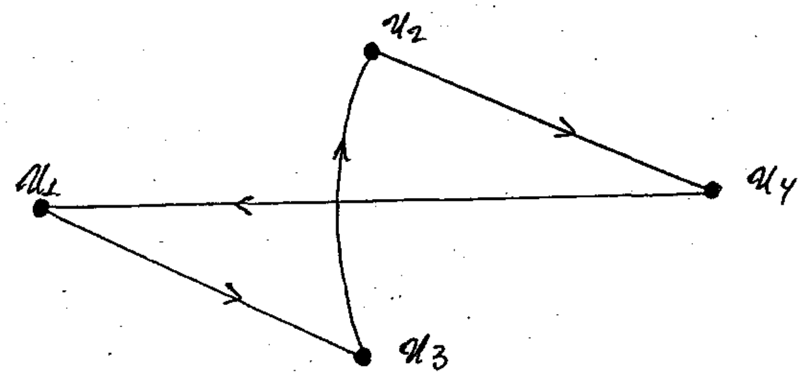


FIG.5

PERO $[V,A]$ NO TIENE SUBDIGRAFICA $[V_H, A_H]$ CON LOS STES. GRADOS LOCALES

$$e_H(v_1) = i_H(v_1) = 0$$
$$e_H(v_2) = i_H(v_2) = 2$$
$$e_H(v_3) = 1 \quad , \quad i_H(v_3) = 2$$
$$e_H(v_4) = 1 \quad , \quad i_H(v_4) = 1$$

NOTACION.-PARA SIMPLIFICAR, CONSIDIREMOS LA NOTACION STE:

$A(x) = \{y \,/\, (x,y) \text{ es un arco}\}$ CONJ. DE LAS y DESPUES DE x

$B(x) = \{y \,/\, (y,x) \text{ es un arco}\}$ CONJ. " " " ANTES DE x

$A(X) = \{y \,/\, (x,y) \text{ es un arco}, x \in X\}$

$B(X) = \{y \,/\, (y,x) \text{ es un arco}, x \in X\}$

CONSIDIREMOS EL STE. PROBLEMA QUE ES MAS GENERAL QUE EL PLANTEADO ANTERIORMENTE.

PROBLEMA.-SEA $[V,A]$ UNA DIGRAFICA, ASOCIAMOS CON CADA $u_i \in V$ CUATRO FUNCIONES ENTERAS $\alpha(u_i)$; $\beta(u_i)$; $a(u_i)$; $b(u_i)$ QUE SATISFACEN $0 \leq a(u_i) \leq b(u_i)$ Y $0 \leq \alpha(u_i) \leq \beta(u_i)$ DETERMINAR CONDICIONES BAJO LAS CUALES $[V,A]$, TIENE UNA SUB-DIGRAFICA, $[V_H, A_H]$ CON GRADOS LOCALES $e_H(u_i)$, $i_H(u_i)$ QUE SATISFACEN:

$$\begin{aligned} a(u_i) &\leq e_H(u_i) \leq b(u_i) \\ \alpha(u_i) &\leq i_H(u_i) \leq \beta(u_i) \end{aligned} \qquad (3.9)$$

PARA ENCONTRAR LAS CONDICIONES, CONVERTIREMOS EL PROBLEMA EN UN PROBLEMA DE FLUJO Y APLICAREMOS EL TEOREMA DE FACTIBILIDAD 1.

A PARTIR DE $[V,A]$ CONSTRUIMOS LA RED (V',K') CON DOBLE NUMERO DE VERTICES, PERO EL MISMO NUMERO DE ARCOS QUE $[V,A]$, DE LA STE. MANERA:

-A CADA $u_i \in V$ LE CORRESPONDE u_i' Y $u_i'' \in V'$

-A CADA ARCO (u_i , v_j) $\in A$ LE CORRESPONDE EL ARCO (u_i' , v_j'') EN (V',K') CON CAPACIDAD UNITARIA, K'(u_i' , u_j'')=1.

EN (V',K') SEAN LAS PRIMAS FUENTES S Y LAS DOBLES PRIMAS SUMIDEROS T. IMPONEMOS PARA CADA $u_i' \in S$ LA PRIMERA CONDICION DE FACTIBILIDAD (3.1), ES DECIR, QUE EL FLUJO QUE SALE DE u_i ESTA ENTRE $\alpha(u_i)$ Y $\beta(u_i)$. SIMILARMENTE PARA CADA $u_j'' \in T$ IMPONEMOS LA SEGUNDA CONDICION DE FACTIBILIDAD (3.1) , EL FLUJO QUE ENTRA EN u_j'' ESTA ENTRE $a(v_j'')$ Y $b(u_j'')$.

POR EJEMPLO, (V',K') DE $[V,A]$ DE LA FIG. 1 QUEDARA:

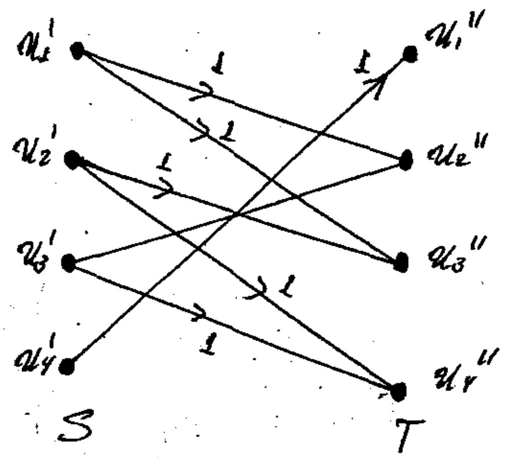


FIG.6

DE UN FLUJO FACTIBLE F= $[f_{ij}]$ DE S A T EN (V',K') PODEMOS ENTRESACAR UNA SUBDIGRAFICA $[V_H, A_H]$ QUE SATISFACE (3.9) , CONSIDERANDO (u_i, v_j) $\in A_H$ SI Y SOLO SI $f(u_i', u_j'') = 1$. INVERSAMENTE UNA SUBDIGRAFICA $[V_H, A_H]$ QUE SATISFACE (3.9) PRODUCE UN FLUJO FACTIBLE EN (V',K'). POR LO TANTO, SEAN $U \subset S$ Y $W \subset T$, $\bar{U}$ Y $\bar{W}$

SUS RESPECTIVOS COMPLEMENTOS EN S Y T, SE SIGUE DEL TEOREMA DE FACTIBILIDAD 1 QUE LA SUBDIGRAFICA $[V_H, A_H]$ EXISTE SI Y SOLO SI

$$\beta(\bar{U}) + |(U, \bar{W})| \geq a(\bar{W}) \tag{3.10}$$

PARA TODO $U \subset S, W \subset T$.

$$b(W) + |(U, \bar{W})| \geq \alpha(U) \tag{3.11}$$

DONDE $|\;|$ DENOTA CARDINALIDAD.

ESTAS CONDICIONES PODEMOS SIMPLIFICARLAS, HACIENDO DEPENDER DE UN UNICO CONJ. DE LA STE. MANERA:

DADO $U \subset S$ SEA.

$$W = \{u_i'' \in T \,/\, b(u_i'') < |(V, u_i'')|\}$$

PARA ESTE PAR U,W

$$\sum_{u_i'' \in A(U)} \min \{b(u_i''), |(U, u_i'')|\}$$

MINIMIZA $b(W) + |(U, \bar{W})|$ PARA TODO $W \subset T$, ENTONCES (3.11) QUEDARA

$$\sum_{u_i'' \in A(U)} \min \{b(u_i''), |(U, u_i'')|\} \geq \alpha(U) \tag{3.12}$$

PARA TODO $U \subset S$

SIMILARMENTE (3.10) E REDUCIDA A

$$\sum_{u_i \in B(\bar{W})} \min \{\beta(u_i'), |(u_i', \bar{W})|\} \geq a(\bar{W}) \tag{3.13}$$

PARA TODO $\bar{W} \subset T$.

TODO ESTO QUEDA ESTABLECIDO EN EL SIGUIENTE TEOREMA

TEOR.4.-SEA $[V,A]$ UNA DIGRAFICA QUE A CADA $u_i \in V$ LE ASOCIAMOS LOS ENTEROS $a(u_i)$, $b(u_i)$, $\alpha(u_i)$, $\beta(u_i)$ TALES QUE $0 \leq a(u_i) \leq b(u_i)$ Y $0 \leq \alpha(u_i) \leq \beta(u_i)$ ENTONCES $[V,A]$ TIENE UNA SUBDIGRAFICA $[V_H, A_H]$ CUYOS LADOS LOCALES $e_H(u_i)$, $i_H(u_i)$ SATISFACEN

$$a(u_i) \leq e_H(u_i) \leq b(u_i)$$

$$\alpha(u_i) \leq i_H(u_i) \leq \beta(u_i)$$

SI Y SOLO SI, PARA TODO $X \subset V$ TENEMOS

$$\alpha(X) \leq \sum_{y \in A(X)} \min \{ b(y), |(X,y)| \}$$

$$a(X) \leq \sum_{y \in B(X)} \min \{ \beta(y), |(y,X)| \} \qquad (3.14)$$

CONSIDEREMOS EN EL STE. TEOREMA, EL CASO ESPECIAL DONDE LOS GRADOS LOCALES SON ESPECIFICADOS EXACTAMENTE, ES DECIR $a(u_i) = b(u_i)$ Y $\alpha(u_i) = \beta(u_i)$.

TEOR.5.-LA DIGRAFICA $[V,A]$ TIENE UNA SUBDIGRAFICA $[V_H, A_H]$ CON GRADOS LOCALES $e_H(u_i) = b(u_i) \geq 0$, $i_H(u_i) = \alpha(u_i) \geq 0$ SI Y SOLO SI, PARA TODO $X \subset V$ TENEMOS :

$$\alpha(V) = b(V) \qquad (3.15)$$

$$\alpha(X) = \sum_{y \in A(X)} \min \{ b(y), |(X,y)| \}$$

DEM.-UNA CONDICION NECESARIA PARA QUE $[V_H, A_H]$ EXISTA ES QUE $\alpha(V) = b(V)$, QUE EN (V;K') SERIA

$$\alpha(s) = b(r) \tag{3.16}$$

ESTA CONDICION JUNTO CON (3.11) IMPLICA (3.10) YA QUE

$$\begin{aligned} a(\bar{u}) + |(u,\bar{w})| &\geq \alpha(\bar{u}) + \alpha(u) - b(w) \\ &\geq \alpha(s) - b(w) \\ &\geq b(r) - b(w) \\ &\geq b(\bar{w}) \end{aligned}$$

QUE ES (3.10) CON $\alpha = \beta$ Y $a = b$.

ENTONCES (3.16) Y (3.11) SON CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES. DE ACUERDO A LA DISCUSION DEL TEREMA 4, (3.11) EN TERMINOS DE UN SOLO CONJUNTO, QUEDADARA:

$$\alpha(U) \leq \sum_{u_i'' \in A(U)} \min \{ b(u_i''), |(U, u_i'')| \}$$

TAL QUE $U \subset S$.

QUE CON $U = X$, $u_i = U_i''$ ES LA SEGUNDA CONDICION DE TEOREMA.

COMO CONSECUENCIA DEL TEOR.2 TENEMOS

TEOR.6.-SI LA GRAFICA $[V, A]$ TIENE SUBDIGRAFICAS $[V_H, A_H]$ Y $[V_D, A_D]$ TALES QUE $a(u_i) \leq e_H(u_i)$, $i_H(u_i) \leq \beta(u_i)$ Y $e_D(u_i) \leq b(u_i)$, $\alpha(u_i) \leq i_D(u_i)$ DONDE $0 \leq \alpha(u_i) \leq \beta(u_i)$, $0 \leq a(u_i) \leq b(u_i)$ ENTONCES $[V, A]$ TIENE UN SUBDIGRAFICA

$[V_G, A_G]$ TAL QUE

$$a(u_i) \leq e_G(u_i) \leq b(u_i)$$
$$\alpha(u_i) \leq i_G(u_i) \leq \beta(u_i)$$

III.4 SISTEMA DE REPRESENTANTES

SISTEMA DE DISTINTOS REPRESENTANTES.-SEAN $E_1, \ldots, E_n$ SUBCONJUNTOS DE UN CONJUNTO DADO E= $\{e_1, \ldots, e_m\}$. UNA LISTA DE ELEMENTOS DISTINTOS DE E, D= $\{e_{i1}, \ldots, e_{in}\}$ TALES QUE $e_{iJ} \in E_J$ SE LE LLAMA, SISTEMA DE DISTINTOS REPRESENTANTES DE $E_1, \ldots, E_n$.

TEOR.7.-SEAN α_K Y β_K $K=1, \ldots p$ SATISFACIENDO $0 \leq \alpha_K \leq \beta_K$, ENTEROS ASOCIADOS CON UNA PARTICION $P_1, \ldots, P_p$ DEL CONJ. DADO $E=\{e_1, \ldots, e_m\}$. LOS SUBCONJ. $E_1, \ldots, E_n$ DE E TIENEN UN SISTEMA DE DISTINTOS REPRESENTANTES D SATISFACIENDO $\alpha_K \leq |D \cdot P_K| \leq \beta_K$ $K=1, \ldots, p$, SI Y SOLO SI

$$\left|\left(\bigcup_{K\in Y} P_K\right) \cdot \left(\bigcup_{J\in W} E_J\right)\right| \geq |W| - \sum_{K\in Y} \beta_K \tag{3,17}$$

$$\left|\left(\bigcup_{K\in Y} P_K\right) \cdot \left(\bigcup_{J\in W} E_J\right)\right| \geq |W| - n + \sum_{K\in Y} \alpha_K$$

(DONDE $\cdot$ INDICA INTERSECCION Y / / CARDINALIDAD DE CONJUNTOS)

SE SOSTIENEN PARA TODOS LOS SUBCONJUNTOS $X \subset \{1, \ldots, p\}$ Y $W \subset \{1, \ldots, n\}$.

DEM.-ESTE PROBLEMA LO TRANSFORMAREMOS A UN PROBLEMA DE FACTIBILIDAD, DE LA SIGUIENTE MANERA; $S = \{P_1, \ldots, P_p\}$, $R = \{e_1, \ldots, e_m\}$ Y $T = \{E_1, \ldots, E_n\}$ LOS VERTICES DE LA RED (V, K), $V = S \cup R \cup T$, CON FUNCIONES DE CAPACIDAD K

$$K(P_h, e_i) = 1 \quad \text{SI Y SOLO SI } e_i \in P_h$$
$$K(e_i, E_J) = \infty \quad \text{" " " " } e_i \in E_J$$
$$K(v, w) = 0 \quad \text{EN LOS OTROS CASOS}$$

CON CADA $P_h \in S$ ASOCIAMOS LAS COTAS α_h, β_h, SIMILARMENTE SE REQUIERE QUE EL FLUJO QUE ENTRE EN E_J SEA PRECISAMENTE LA UNIDAD, ES DECIR $a(E_J) = b(E_J) = 1$. GRAFICAMENTE

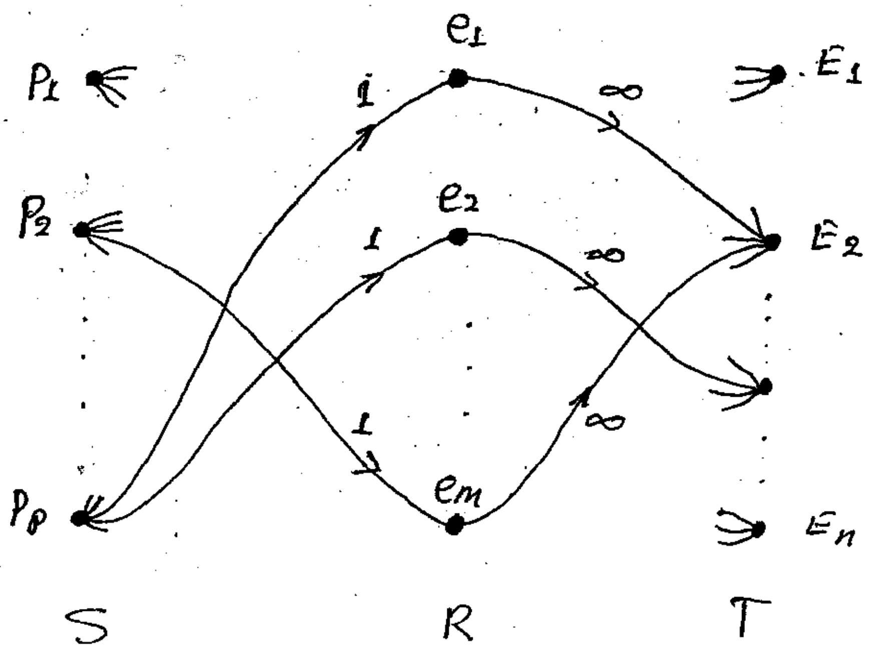


FIG.7

DELA DEFINICION DE K, Y COMO $P_1, \ldots, P_\ell$ ES UNA PARTICION DE E, SE SIGUE QUE LA CONTINUIDAD DEL FLUJO A TRAVES DE CADA $e_i \in R$ ES A LO MAS LA UNIDAD. ENTONCES UN FLUJO FACTIBLE $F=[f_{ij}]$ DE S A T ESCOGE UN CONJUNTO

$$D = \{ e_i \mid f(S, e_i) = f(e_i, T) = 1 \}$$

QUE CUMPLE CON LAS HIPOTESIS DEL TEOREMA.

INVERSAMENTE, DADA D SATISFACIENDO LAS SUPOSICIONES DEL TEOREMA, PODEMOS DEFINIR UN FLUJO FACTIBLE $F=[f_{ij}]$ DE LA SIGUIENTE MANERA

$$f(P_h, e_i) = \begin{cases} 1 & \text{SI } e_i \in D \cdot P_h \\ 0 & \text{DE OTRA MANERA} \end{cases}$$

$$f(e_i, E_J) = \begin{cases} 1 & \text{SI } e_i \in E_J \\ 0 & \text{DE OTRA MANERA} \end{cases}$$

ENTONCES EL PROBLEMA DE FACTIBILIDAD EN (V,K) ES EQUIVALENTE A LA EXISTENCIA DE D REUNIENDO LOS REQUISITO DEL TEOREMA Y POR LO TANTO, PODEMOS APLICAR EL TEOREMA DE FACTIBILIDAD 1. SEA $(X, \bar{X})$ UN CORTE EN (V,K) Y LOS CONJUNTOS

$$S \cdot X = Y, \quad R \cdot X = Z, \quad T \cdot X = \bar{W}$$

$$S \cdot \bar{X} = \bar{Y}, \quad R \cdot \bar{X} = \bar{Z}, \quad T \cdot \bar{X} = W$$

GRAFICAMENTE

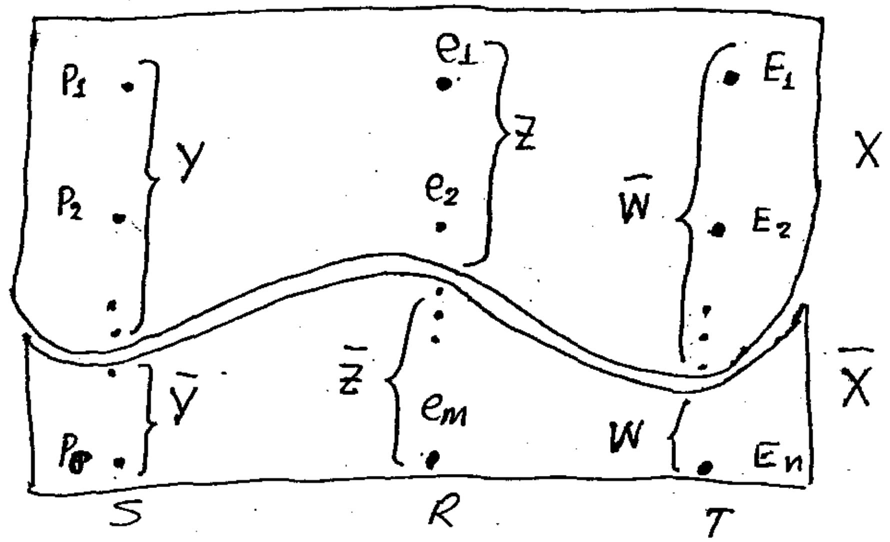


FIG.8

ENTONCES LAS CONDICIONES (3.4) DEL TEOREMA DE FACTIBILIDAD QUEDARAN:

$$\begin{aligned} \beta(\bar{Y}) + k(X,\bar{X}) &\geq |W| \\ |\bar{W}| + k(X,\bar{X}) &\geq \alpha(Y) \end{aligned} \tag{3.18}$$

COMO $k(e_i, E_j)=\infty$, LAS CONDICIONES SE SOSTIENEN AUTOMATICAMENTE, A MENOS QUE $(X,\bar{X})$ NO CONTENGA ARCOS DE R A T. ENTONCES, ATENDEREMOS A ESTE TIPO DE PARTICIONES, TALES QUE $B(W)\subset \bar{Z}$,PERO COMO (3.18) SON INDEPENDIENTES DE Z, ES SUFICIENTE SELECCIONAR $\bar{Z}= B(W)$ ENTONCES TENEMOS:

$$k(X,\bar{X}) = k(Y,\bar{Z}) = k(Y,B(W)) = |A(X)\cdot B(W)|$$

CONSECUENTEMENTE UN FLUJO FACTIBLE DE S A T EXISTE, SI Y SOLO

SI $|A(X) \cdot B(W)| \geq |W| - \beta(\bar{Y})$

$$|A(X) \cdot B(W)| \geq \alpha(Y) - |\bar{W}|$$

$$X \subset S, \ W \subset T.$$

REEMPLAZANDO $|\bar{W}| = n - |W|$

$$\beta(\bar{Y}) = \sum_{k \in \bar{Y}} \beta_k, \quad \alpha(Y) = \sum_{k \in Y} \alpha_k, \quad A(Y) = \bigcup_{k \in Y} P_k, \quad B(W) = \bigcup_{J \in W} E_J$$

LLEGAMOS A LAS CONDICIONES DEL TEOREMA.

III.5 PROBLEMA DE ASIGNACION DE EMPLEOS

SEA $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ EL CONJ. DE ASPIRANTES A OCUPAR LOS EMPLEOS DISPONIBLES $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. CADA ASPIRANTE HA SIDO CALIFICADO, COMO APROPIADO O NO APROPIADO PARA CADA UNO DE LOS EMPLEOS.

EL PROBLEMA CONSISTE EN DETERMINAR LAS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES, PARA ASIGNAR TODOS LOS EMPLEOS DISPONIBLES A ASPIRANTES APROPIADOS, Y COMO SE HACE TAL ASIGNACION.

NOTACION.-SEA $W \subset \mathcal{E}$ DENOTAMOS $\mathcal{A}(W)$ AL CONJ. DE ASPIRANTES QUE SON APROPIADOS PARA AL MENOS UNO DE LOS EMPLEOS W.

$$\mathcal{A}(W) = \{A_i \in \mathcal{A} \mid A_i \text{ ES APROPIADO PARA ALGUN } E_J \in W\} \quad (3.19)$$

ESTE PROBLEMA DE ASIGNACION, LO PODEMOS PLANTEAR COMO UN PROBLEMA DE FACTIBILIDAD, DE LA SIGUIENTE MANERA:

-LA RED (V,K) ES V=$\mathcal{Q} \cup \mathcal{E}$ Y LA FUNCION DE CAPACIDADES K ES

$$K(A_i, E_J) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \text{ es apropiado para } E_J \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (3.20)$$

-LAS CONDICIONES DE FACTIBILIDAD SON

$$\begin{aligned} &\alpha(A_i) = 0 \quad \text{Y} \quad \beta(A_i) = 1 \quad i = 1, \ldots, m \\ &a(E_J) = b(E_J) = 1 \quad J = 1, \ldots, n \end{aligned} \qquad (3.21)$$

SI EXISTE UN FLUJO FACTIBLE $F = [f_{iJ}]$ DE $\mathcal{Q}$ A $\mathcal{E}$ EN (V,K) ENTONCES EXISTE LA SIGUIENTE ASIGNACION; E_J SE ASIGNA A A_i SI $f(A_i, E_J) = 1$. A LA INVERSA, SI EXISTE UNA ASIGNACION DE TODOS LOS EMPLEOS DISPONIBLES CON ASPIRANTES APROPIADOS ENTONCES, $f(A_i, E_J) = 1$ CUANDO E_J SE ASIGNA A A_i ES UN FLUJO FACTIBLE DE $\mathcal{Q}$ A $\mathcal{E}$ EN (V,K).

POR EL TEOREMA DE FACTIBILIDAD 1 TENEMOS QUE, UN FLUJO FACTIBLE EXISTE, SI Y SOLO SI

$$|\mathcal{Q} \cdot \bar{X}| + |(X, \bar{X})| \geq |\mathcal{E} \cdot \bar{X}| \qquad (3.22)$$

$$|\mathcal{E} \cdot X| + |(X, \bar{X})| \geq 0 \qquad (3.23)$$

PARA TODA PARTICION $X, \bar{X}$ DE V.

CONSIDIREMOS $\mathcal{Q} \cdot X = U$, $\mathcal{Q} \cdot \bar{X} = \bar{U}$, $\mathcal{E} \cdot X = \bar{W}$, $\mathcal{E} \cdot \bar{X} = W$ (3.23) SIEMPRE SE CUMPLE, Y (3.22) QUEDA $|\bar{U}| + |(U, W)| \geq |W|$ PARA TODO $U \subset \mathcal{Q}$, $W \subset \mathcal{E}$. PARA HACERLA DEPENDER UNICAMENTE DE UN SOLO CONJ. CONSIDIREMOS $U = \mathcal{Q}$ $\Rightarrow \bar{U} = \emptyset$ POR LO TANTO (3.22) QUEDA $|(\mathcal{Q}, W)| \geq |W|$ PARA TODO $W \subset \mathcal{E}$.

DONDE $|(a,w)|$ ES EL NUMERO DE ASPIRANTES QUE SON APROPIADOS PARA AL MENOS UNO DE LOS EMPLEOS DEL CONJ. W.

$$\Rightarrow |a(w)| \geq |w| \text{ PARA TODO } w \subset \mathcal{E} \tag{3.24}$$

TEOREMA 8.-EL CONJ. DE EMPLEOS $\mathcal{E}=\{E_1,\ldots,E_n\}$ PUEDE SER LLENADOS POR EL CONJ. DE ASPIRANTES $a=\{A_1,\ldots,A_m\}$ SI SOLO SI

$$|w| \leq |a(w)| \text{ PARA TODO } w \subset \mathcal{E}.$$

DONDE $|\;|$ INDICA CARDINALIDAD.

BIBLIOGRAFIA

-D.R. FULKERSON, "FLOW NETWORKS AND COMBINATORIAL OPERATIONS RESEARCH" . MAA STUDIES IN MATHEMATICS, VOLUME 11. STUDIES IN GRAPH THEORY, PART 1, 139-171.

-WILSON. INTRODUCTION TO GRAPH THEORY. ACADEMIC PRESS, NEW YORK & LONDON.

-FORD, L.R., JR., AND D.R. FULKERSON, "MAXIMAL FLOW THROUGH A NETWORK", CANAD. J. MATH., 8 (1956), 399-404.

=L. R. FORD, JR. AND D. R. FULKERSON, "A SIMPLE ALGORTHM FOR FINDING MAXIMAL NETWORK FLOWS AND AN APPLICATION TO THE HITCHCOCK PROBLEM", CANAD. J. MATH, 9 (1957), 210-218.

-D.R. FULKERSON, "A NETWORK FLOW FEASIBILITY THEOREM AND COMBINATORIAL APPLICATIONS", CANAD J. MATH., 11 (1959), 440-451.

-GALE, D., "A THEOREM ON FLOWS IN NETWORKS", PAC. J. MATH., 7 (1957), 1073-1082.

-HALL, P., "ON REPRESENTATIVES OF SUBSETS", J. LONDON MATH. SOC., 10 (1935), 26-30.

-HOFFMAN, A.J., "SOME RECENT APPLICATION OF THE THEORY OF LINEAR INEQUALITIES TO EXTREMAL COMBINATORIAL ANALYSIS", PROC. SYMPOSIA APPLIED MATH., 10 (1960).