

UNIVERSIDAD DE SONORA

" ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINAMICOS  
DISCRETOS "

Tesis que para obtener la Licenciatura en  
Matemáticas presenta:

FRANCISCO DAVER QUINTERO GONZALEZ.

HERMOSILLO, SON.

JULIO 1986.

## I N T R O D U C C I O N .

El presente trabajo tiene como finalidad, mostrar como problemas de muy diversa índole pero con las siguientes características:

- i) Intervienen muchas variables.
- ii) Las relaciones mutuas entre las variables pueden expresarse matricialmente.
- iii) Los valores de las variables dependen entre otras cosas de una variable  $t$  que llamaremos " tiempo " y que varía en forma discreta.

Características que abstraeremos con el concepto de SISTEMA DINAMICO DISCRETO . Tienden bajo ciertas condiciones, a un estado de estabilidad conforme al valor de  $t$  aumente.

Para ello dividimos el problema en dos casos según que las variables sean todas de la misma clase o de distinta.

a) Cuando las variables son de la misma clase, fundamentamos nuestras afirmaciones en el llamado TEOREMA DE PERRON FROBENIUS, que dice que si una matriz es irreducible y no negativa , entonces tiene un valor propio positivo mayor o igual que el valor absoluto de todos los demás valores propios, y que si es estrictamente positiva tiene un valor propio positivo mayor que el valor absoluto de todos los demás valores propios. En ambos casos les corresponde un vector propio estrictamente positivo.

Este teorema se demuestra para matrices irreducibles aun cuando solo se aplicará al caso particular de matrices primitivas.

Posteriormente vemos como aplicar este teorema a tres tipos de aplicaciones:

## Indice

Capítulo I: TEOREMA DE PERRON FROBENIUS	1
I.1 Introducción	1
I.2 Notaciones	1
I.3 Matrices Reducibles e Irreducibles	2
I.4 Teorema de Frobenius	3
I.5 Matrices Primitivas	8
Capítulo II: ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS	10
II.1 Sistemas Dinámicos Discretos	10
II.2 Prerrequisitos	12
II.3 Accesibilidad de una población en un sistema de Transporte	16
II.4 Distribución Final de un Rumor	20
II.5 Estratificación Futura de una Población	23
Capítulo III: ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS ( Variables de Diferentes Clases )	31
III.1 Introducción	31
III.2 Modelado Estático del Sistema	32
III.3 Modelado Dinámico del Sistema	34
III.4 Estabilidad de los Procesos de Pulsos	40
III.5 Rosetas	49

i) La determinación del mejor índice de accesibilidad en un sistema de transporte .

ii) La obtención de la distribución final de un rumor entre un conjunto de ciudades enlazadas en un medio de comunicación .

iii) La determinación de la distribución en los distintos grupos de edades, de una población en la que se conocen sus tasas de natalidad y mortalidad.

Los artículos de dónde fueron extraídos estos ejemplos se valen de características peculiares o de casos particulares para mostrar la estabilidad.

En este trabajo se da un procedimiento, basado en la forma canónica de Jordan, para mostrar la estabilidad del sistema una vez que hemos probado la primitividad de la matriz.

b) Cuando las variables son de diversa clase , se da un mecanismo basado en digráficas pesadas para mostrar la estructura geométrica del sistema, y un mecanismo llamado PROCESO DE PULSOS para mostrar la dinámica del sistema.

Se dan dos criterios de estabilidad:

i) Estabilidad en pulsos.

ii) Estabilidad en valores.

Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para la estabilidad en pulsos es que todo valor propio  $r$  de la matriz cumpla con  $|r| \leq 1$ , y que para la estabilidad en valores la condición necesaria y suficiente es que :

$$|r| < 1$$



## CAPITULO I

### TEOREMA DE PERRON FROBENIUS

I.1. INTRODUCCION: Uno de los resultados mas útiles en el estudio de Procesos iterados es el llamado TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS. Este teorema fue demostrado Por Perron a comienzos de este siglo Para matrices estrictamente Positivas. Posteriormente Frobenius lo Generalizó Para matrices no negativas. La finalidad de este capítulo es Presentar una demostración del Teorema de Frobenius Pues en el se sustentarán las aplicaciones que veremos en el siguiente capítulo.

I.2. NOTACIONES: Sea  $A$  una matriz cualquiera (consideraremos a los vectores como matrices renglón), entonces :

$A \gg \emptyset \iff$  todos los elementos de  $A$  son Positivos.

$A > \emptyset \iff$  todos los elementos de  $A$  son no negativos y hay al menos uno Positivo.

$A \gg \emptyset \iff$  todos sus elementos son no negativos.

$A \gg B \iff A-B \gg \emptyset$

$A > B \iff A-B > \emptyset$

$A \gg B \iff A-B \gg \emptyset$

$// A //$  = suma de todas sus entradas.

$S_n$  , denotará al simplejo unitario  $n$  dimensional , es decir , al conjunto de todos los vectores unitarios no negativos en  $\mathbb{R}^n$  .

### 1.3. MATRICES REDUCIBLES E IRREDUCIBLES :

Definición : Una matriz cuadrada  $A$  se dice reducible si y solo si existe una matriz Permutación  $P$  tal que :

$$PAP^t = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ donde } A_{11} \text{ y } A_{22} \text{ son matrices cuadradas.}$$

$A$  se dice irreducible si y solo si  $A$  no es reducible.

Lema : Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ ,  $A > 0$  y  $A$  irreducible, entonces  $(I + A)^{n-1} >> 0$ .

Demostración:

Para demostrarlo es suficiente mostrar que todo vector  $X$  no negativo es transformado por  $(I + A)$  en un vector estrictamente positivo. Para ello veremos que si  $X > 0$  y tiene componentes  $0$ , entonces  $Y = X(I + A)$  tiene menos componentes  $0$  que  $X$ . Supongamos lo contrario, es decir, que  $Y$  tiene un número mayor o igual de componentes  $0$  que  $X$ . El primer caso no puede suceder puesto que como  $(I + A) >> 0$ , entonces  $X(I+A)$  solo podría tener ceros donde  $X$  los tenía.

Consideremos el segundo caso, es decir, si  $Y$  y  $X$  tienen el mismo número de ceros, según lo mencionado en el párrafo anterior esto solo podrá pasar si los ceros están en las mismas componentes. Sea  $P$  la matriz Permutación de orden  $n \times n$  que aplicada a los vectores  $Y$  y  $X$  les deja los ceros en la parte final del vector, es decir,

$$XP = \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} \text{ y } YP = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix}$$

donde  $R$  y  $S$  son vectores con  $m$  componentes.

$$PAP^t = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \text{ donde } E \text{ y } H \text{ son matrices de orden } m \times m.$$

Como  $Y = X(I+A)$ , entonces  $YP = X(I+A)P$ ,  $YP = XP + X(AP)$   
 y  $YP = XP + (XP)(PAP^t)$ .

$$\text{Eso implica que: } \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + (R, 0) \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \Rightarrow R \cdot F = 0$$

Pero como  $R \gg 0$ , entonces  $F = 0$  y por consecuencia  $A$  es reducible, lo cual contradice la hipótesis de la irreducibilidad de  $A$ , por lo tanto  $X$  tiene mas componentes  $0$  que  $Y$ .

Como el número máximo de componentes  $0$  de  $X$  es  $n-1$ , entonces  $X(I+A)^{n-1} \gg 0$  para cualquier  $X > 0$ , y por ende  $(I+A)^{n-1} \gg 0$ .

**1.4. TEOREMA DE FROBENIUS:** Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$ ,  $A > 0$  y  $A$  irreducible, entonces  $A$  tiene un valor propio  $l_0$  que cumple con lo siguiente:

- a)  $l_0 > 0$
- b) Si  $l$  es un valor propio de  $A$  y  $l \neq l_0$ , entonces  $l_0 \gg |l|$
- c) Existe un vector propio  $X_0$  de  $A$  correspondiente a  $l_0$  tal que  $X_0 \gg 0$ .
- d)  $l_0$  es raíz simple del polinomio característico de  $A$ .

Demostración:

Sea  $H = \{ Y \in \mathbb{R}^n / Y = X (I+A)^{-1} \}$  para alguna  $X$  en  $S_n$ , sea  $HH = \{ z / z = \frac{y}{\|y\|} \text{ para alguna } Y \text{ en } H \}$ , y sea  $M = \{ l \geq 0 / \text{ existe } X \text{ en } HH \text{ tal que } XA \geq l(X) \}$ .

Puesto que  $S_n$  es compacto, entonces  $HH$  también lo será.

Ahora demostraremos que  $M$  es un conjunto no vacío y acotado superiormente por lo que tendrá un SUP.

Como  $A > 0$  entonces,  $l=0$  es un elemento de  $M$  y por lo tanto  $M$  es no vacío.

Sea  $F(X) = XA$  que es una función continua. Como  $HH$  es compacto, entonces  $F(HH)$  también lo será, pero eso implica que  $F(HH)$  está acotado.

Como la norma que estamos usando es la suma de las componentes, entonces para cualquier  $X$  en  $HH$  cualquiera de sus componentes estará acotada, sea  $k_0$  una cota superior. Es decir, que si denotamos a la  $i$ -ésima componente de un vector  $X$  por  $(X)_i$ , entonces para cualquier  $X$  en  $HH$ ,  $(XA)_i \leq k_0$ .

Sea  $l \in M$  y  $X \in HH$  tal que  $XA \geq l(X)$ , entonces:

$$(XA)_i \geq l(X)_i \quad \text{para } i=1,2,\dots,n$$

Tomemos la mayor componente de  $X$ :  $(X)_j$ , es claro que que  $(X)_j \geq \frac{1}{n}$  y por lo tanto:

$k_0 \geq (XA)_j \geq l(X)_j \geq \left(\frac{1}{n}\right) \implies k_0 \cdot n \geq 1$ , lo cual implica que  $M$  está acotado superiormente.

Sea  $l_0 = \text{SUP}(M)$ .

Consideremos una sucesión  $\langle l_k \rangle$  que converja a  $l_0$ , ella inducirá una sucesión de vectores en  $HH$   $\langle X_k \rangle$ , tal que

$$l_k (X_k) \leq (X_k)A$$

$$\{ l_k X_k \} \rightarrow l_0 (X_0) \text{ y } \{ X_k A \} \rightarrow X_0 A$$

Esto implica que  $l_0$  es elemento de  $M$  y por tanto su máximo, es decir:

$$l_0 = \max \{ l \geq 0 \mid \exists X \in HH \text{ tal que } XA \geq l \cdot X \}$$

Hasta ahora hemos seleccionado un  $l_0$ , ahora veremos que reúne las características deseadas.

i)  $l_0 > 0$ :

Dem.: Sea  $X = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in S_n$  y  $l$  el mínimo elemento positivo de  $A$ , entonces:

$$\langle XA \rangle_i = \frac{1}{n} \langle \text{suma de los elementos del } i\text{-ésimo renglón de } A \rangle$$

$$\langle XA \rangle_i > n \langle \frac{1}{n} \rangle = l > l \langle X \rangle_i$$

$$\implies XA \geq lX$$

$$\implies X \langle I+A \rangle^{n-1} A \geq lX \langle I+A \rangle^{n-1}$$

$$\implies YA \geq lY \implies l \in M$$

$$\implies l \leq l_0 \implies l_0 > 0.$$

ii) Ahora Probaremos que  $l_0$  es valor Propio de  $A$  y que tiene un vector Propio  $X_0 \gg 0$ .

Dem.: Sabemos que  $l_0 X_0 \leq X_0 A$  donde  $X_0 \in HH$ , supongamos que  $l_0 X_0 < X_0 A$ .

Si  $X_0 \in HH, X_0 \gg 0$  y  $X_0 A \gg 0$  pues como  $A$  es irreducible, en cada columna tendrá un elemento positivo. Esto implica que:

$$X_0 A - l_0 X_0 \gg 0$$

$$\implies \langle X_0 A - l_0 X_0 \rangle \langle I+A \rangle^{n-1} \gg 0$$

Sea  $Y = X_0 \langle I+A \rangle^{n-1}$ , entonces  $YA \gg l_0 Y$ , y por lo tanto existe  $\epsilon > 0$  tal que:  $YA \gg (l_0 + \epsilon) Y$ . Si tomamos la normalización de  $Y$ , que denotaremos por  $\bar{Y}$ , entonces  $\bar{Y}A \gg (l_0 + \epsilon) \bar{Y}$  con  $\bar{Y} \in HH$ . Pero esto es una contradicción ya que  $l_0$  era el máximo de  $M$ . Con

lo cual queda demostrado que  $\lambda_0$  es valor propio de  $A$  y que tiene un vector propio  $X_0$  estrictamente positivo.

iii) Ahora veremos que  $\lambda_0$  es mayor o igual que el valor absoluto de cualquier otro valor propio de  $A$ .

Supongamos que  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  tal que  $\lambda \neq \lambda_0$ .

Sea  $Z$  un vector propio de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ , es decir:

$$ZA = \lambda Z$$

Sea  $\bar{Z}$  el vector cuyas componentes son los valores absolutos de las correspondientes componentes de  $Z$ . Como  $Z \neq 0$ , entonces  $\bar{Z} > 0$ . La  $i$ -ésima componente de  $\bar{Z}A$  será:

$$(\bar{Z}A)_i = |z_1|a_{1i} + |z_2|a_{2i} + \dots + |z_n|a_{ni} = |z_1 a_{1i}| + |z_2 a_{2i}| + \dots + |z_n a_{ni}|$$

Y puesto que  $A > 0$ , entonces:

$$(\bar{Z}A)_i \geq |z_1 a_{1i} + z_2 a_{2i} + \dots + z_n a_{ni}| = |\lambda(z)_i| = |\lambda| |(z)_i| = |\lambda| \bar{Z}_i$$

Lo que implica que  $\bar{Z} \cdot A \geq |\lambda| \bar{Z}$ . Si dividimos la desigualdad anterior entre la norma de  $\bar{Z}$ , entonces tendremos:

$$\bar{Z}^+ A \geq |\lambda| \bar{Z}^+ \quad \text{con } \bar{Z}^+ \in S_n$$

$$\implies |\lambda| \leq \lambda_0.$$

Resumiendo, hasta aquí hemos propuesto un  $\lambda_0$  y hemos visto que ese candidato cumple al menos con los 3 primeros incisos del Teorema de Frobenius, nos queda únicamente por demostrar que dicho valor propio es raíz simple del polinomio característico de  $A$ . Para ello necesitaremos demostrar el siguiente lema.

iv) LEMA: Sea  $A \geq 0$  y  $B$  es cualquier submatriz de  $A$  obtenida al eliminar un renglón y una columna de  $A$ . Sea  $l_0$  el valor propio dominante de  $A$  y  $b$  el valor propio dominante de  $B$ . Entonces  $l_0 \geq b$ .

Demostración:

sin perder generalidad podemos suponer que  $B$  es la matriz que resulta al eliminar el último renglón y la última columna.  $B$  es no negativa y es irreducible. Pues si no,  $A$  sería reducible. Por lo tanto le podemos aplicar lo que llevamos demostrado del teorema de Frobenius. Sea  $b$  el valor propio dominante de  $B$  y  $Y$  tal que:

$$a) \quad YB = bY$$

$$b) \quad b = \max \{ \lambda \geq 0 \mid \text{Existe } Y \in S_{n-1} \text{ tal que } YB \geq \lambda Y \}$$

Por otro lado, sea  $l_0$  el valor propio dominante de  $A$  y  $X_0$  el vector propio correspondiente en  $S_n$ . Esto implica que:

$$\sum_{k=1}^n x_k a_{ki} = l_0 x_i \quad \text{para } i=1,2,\dots,n \quad \text{y con } \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\implies x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 1 - x_n \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n-1} x_k a_{ki} = l_0 x_i - x_n a_{ni}$$

$$\implies \sum_{k=1}^{n-1} x_k a_{ki} \leq l_0 x_i$$

Nótese que se cumplirá la desigualdad si  $a_{ni}$  es positivo.

Dividiendo entre  $(1-x_n)$  a ambos lados de la desigualdad anterior tendremos:

$$X^* B < l_0 X^* \quad \text{con } X^* \text{ en } S_{n-1}.$$

$$\implies l_0 \geq b.$$

v) Ahora si demostraremos que  $l_0$  es raíz simple del Polinomio característico de  $A$ .

$$\text{Sea } P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

$$P'(1) = - ( \det(A_1 - 1I) + \det(A_2 - 1I) + \dots + \det(A_n - 1I) )$$
 donde  $A_i$  es la submatriz de  $A$  que resulta al eliminar el  $i$ -ésimo renglón y la  $i$ -ésima columna.

Como cada uno de los sumandos es un Polinomio, y cada uno tiene el mismo Primer término, al evaluar en  $1_0$  algunos de los Polinomios se anularán. Pero si  $A$  es irreducible, no se podrán anular todos. Los que quedan no se podrán anular entre si Pues todos tienen el mismo Primer término.

Si  $1_0$  no es raíz de la derivada del Polinomio característico, entonces  $1_0$  es raíz simple de dicho Polinomio.

Con esto queda demostrado el TEOREMA DE FROBENIUS.

El teorema de Perron es muy semejante al de Frobenius, solo que a cambio del requisito de que  $A \gg 0$ , sabremos que  $1_0$  es estrictamente mayor que los valores absolutos de los demás valores Propios. Si juntamos ambos teoremas formamos un teorema que llamaremos "TEOREMA DE PERRON FROBENIUS".

#### I.4. MATRICES PRIMITIVAS:

Definición: Una matriz cuadrada se dice que es Primitiva, si y solo si, alguna potencia de ella es estrictamente Positiva.

Lema: Toda matriz Primitiva es irreducible.

Demostración:

Supongamos que  $A$  es una matriz Primitiva y reducible, entonces existe una matriz permutación  $P$  tal que:  $H = P \cdot A \cdot P^t$  tiene la forma:

$$H = \begin{pmatrix} E & O \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\implies H^k = P \cdot A^k \cdot P^t$$

$$\implies A^k = P^t H^k P$$

Esto implica que toda potencia de A tiene ceros, lo cual contradice que A sea Primitiva.

### BIBLIOGRAFIA

Bellman, Richard. "INTRODUCCION AL ANALISIS MATRICIAL". Ed. Reverte, 1965.

Gantmacher, F.R. "THE THEORY OF MATRICES". Vol. II. New York: Chelsea, 1959.

Varaa, R. "MATRIX ITERATIVE ANALYSIS". Prentice Hall, 1962.

## CAPITULO II

### ESTABILIDAD EN SISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS

La finalidad de este capítulo es mostrar diversas aplicaciones del TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS en la búsqueda de algún tipo de estabilidad a problemas en los que intervienen variables que están cambiando en forma discreta.

Veamos primero algunas definiciones que permitirán precisar a que tipo de problemas nos estaremos refiriendo.

#### II.1. SISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS.

Definición: A cualquier conjunto no vacío de variables junto con unas relaciones especificadas con precisión entre ellas le llamaremos un sistema.

Denotaremos por  $X(c)$  al vector de valores de las variables del sistema en el estado  $c$ , y lo llamaremos vector de estado.

Definición: Se llamará sistema dinámico a los sistemas en los que el vector de estado depende no solo del estado  $c$ , sino que además de otra variable  $t$  de tal manera que el vector de estado lo denotaremos por  $X(c, t)$ . La variable  $t$  normalmente se interpreta como el tiempo. Si  $t$  es una variable discreta entonces el sistema se dice discreto.

Los sistemas dinámicos discretos que trataremos aquí se dice que son causales porque el vector de estado dependerá del estado inmediato anterior, es decir:

$$X(c, r+s) = X( X(c, r), s )$$

En el caso particular de los ejemplos que estudiaremos en este trabajo, los sistemas estarán definidos de la siguiente manera:

i) Tendremos un estado inicial dado por  $X(0,0)$ .

ii)  $X(t,1) = X(0,t) \cdot A$ . Para  $t=0,1,\dots$ , donde  $A$  es una matriz que describe las relaciones entre las variables del sistema.

Con el fin de simplificar la notación observemos lo siguiente,  $X(t,1)$  es el estado del sistema una unidad después de su estado al tiempo  $t$ , por ello lo denotaremos por  $X(t+1)$ , con lo cual los sistemas que trataremos quedarán especificados por:

i)  $X(0)$ , el estado inicial.

ii)  $X(t+1) = X(t) \cdot A$  Para  $t=0,1,\dots$

En lo sucesivo, siempre que nos referiramos a un sistema nos estaremos refiriendo a sistemas dinámicos discretos del tipo anterior.

Lema II.1 : Si  $X(0)$  es el estado inicial de un sistema, entonces el estado del sistema al tiempo  $t$  será:  $X(t) = X(0) \cdot A^t$ .

Demostración:

Se demostrará por inducción matemática sobre  $t$ .

Para  $t=1$ ,  $X(1) = X(0) \cdot A$ . Por definición del sistema, por lo tanto si se cumple.

Supongamos que la afirmación es válida para  $t=k$ , o sea :

$$X(k) = X(0) \cdot A^k$$

Esto implica que:  $X(k+1) = X(k) \cdot A = (X(0) \cdot A^k) \cdot A = X(0) \cdot A^{k+1}$

## II.2. PRERREQUISITOS:

En este apartado veremos algunos resultados necesarios para poder aplicar el Teorema de Perron-Frobenius a los sistemas que estudiaremos.

Lema II.2 : Sea  $B$  una matriz de orden  $n \times n$ . Sea  $r$  un valor propio de  $B$  y  $X$  un vector propio de  $B$  correspondiente a  $r$ . Entonces  $r^k$  es un valor propio de  $B^k$  y  $X$  es un vector propio de  $B^k$  correspondiente a  $r^k$ .

Demostración:

Se demostrará por inducción matemática.

Si  $k=1$  es inmediato.

Supongamos que se cumple para  $k=m$ , es decir:  $X \cdot B^m = r^m X$ .

Esto implica que:  $X \cdot B^{m+1} = (X \cdot B^m) B = r^m \cdot X \cdot B = r^{m+1} X$ , por lo tanto si se cumple para  $k=m+1$ .

Corolario II.1 : Toda matriz Primitiva  $A > 0$  tendrá un valor Propio estrictamente dominante.

Demostración:

Sea  $A$  una matriz Primitiva tal que  $A^k \gg 0$ .

Por ser Primitiva sabemos que existe un valor Propio  $r$  dominante, es decir:  $r \gg |s|$  Para todo  $s$  valor Propio de  $A$ .

Por el lema anterior sabemos que  $r^k \gg |s^k|$ , Pero como  $A$  es estrictamente Positiva le podemos aplicar el Teorema de Perron, lo que implica que  $r^k > |s^k|$ , y por lo tanto  $r > s$ .

Ahora hablemos sobre algunas Propiedades de la forma canónica de Jordan de una matriz  $A$ .

Recordemos que la forma canónica de Jordan es una matriz formada por bloques de 2 tipos:

$$B_j = (r)_{1 \times 1}, \quad B_j = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & r & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & r \end{pmatrix}$$

Si  $r$  es raíz simple del Polinomio característico, le corresponderá un bloque del Primer tipo.

Por otro lado:

$$J^t = \begin{pmatrix} B_1^t & & & \\ & B_2^t & & \\ & & \dots & \\ & & & B_k^t \end{pmatrix}$$

Si el bloque es del Primer tipo,  $B_j^t = (r^t)$ . Si el bloque es del segundo tipo, consideremos el siguiente lema que nos da una descripción de  $B_j^t$ .

Lema II.3 : Sea B un bloque de Jordan del segundo tipo de orden  $m \times m$ , entonces el  $i$ -ésimo renglón de  $B$  caerá en cualquiera de los siguientes 2 casos:

a) Si  $t < m-i$  :

$$(B^t)_i = (0, 0, \dots, 0, \binom{t}{0} r^t, \binom{t}{1} r^{t-1}, \dots, \binom{t}{t} r^0, 0, \dots, 0)$$

b) Si  $t > m-i$  :

$$(B^t)_i = (0, 0, \dots, 0, \binom{t}{0} r^t, \binom{t}{1} r^{t-1}, \dots, \binom{t}{m-i} r^{t-(m-i)})$$

↑  $i$ -ésima componente

Demostración: Lo demostraremos por inducción matemática

$$B = \begin{bmatrix} r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{bmatrix} \Rightarrow \text{se cumple para } t=1$$

Supongamos que se cumple para  $t=k$ .

1er caso:  $(B^k)_i = (0, 0, \dots, 0, \binom{k}{0} r^k, \binom{k}{1} r^{k-1}, \dots, \binom{k}{k} r^0, 0, 0, \dots, 0)$

$$(B^{k+1})_{ij} = (B^k)_i \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Escribiremos la columna  $j$  de  $B$  en los distintos casos para que se vea como se efectúa el producto punto.

$$(B^k)_i = (0, 0, \dots, 0, \binom{k}{0} r^k, \binom{k}{1} r^{k-1}, \dots, \binom{k}{k} r^0, 0, \dots, 0)$$

Si  $j < i$   $(0, 0, \dots, 1, r, 0, \dots, \dots, \dots, \dots, 0)$

Si  $j = i$   $(0, 0, \dots, 1, r, 0, \dots, \dots, \dots, 0)$

Si  $i+1 \leq j \leq i+k$   
 $(0, 0, \dots, 0, \dots, 1, r, 0, \dots, \dots, 0)$

Si  $j = i+k+1$   $(0, 0, \dots, 0, \dots, \dots, 1, r, 0, \dots, 0)$

$$\Rightarrow (B^{k+1})_{ij} = 0 \quad \text{si } j < i \quad \text{o} \quad j > i+k+1$$

$$\text{Si } j=i, (B^{k+1})_{ij} = \binom{k}{0} r^{k+1} = \binom{k+1}{0} r^{k+1}$$

$$\text{Si } j=i+k+1 (B^{k+1})_{ij} = \binom{k}{k} r^0 = \binom{k+1}{k+1} r^0$$

$$\text{Si } i+1 \leq j \leq i+k (B^{k+1})_{ij} = \left[ \binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right] r^{k-(j-1)} = \binom{k+1}{j} r^{k+1-j}$$

Esto implica que en el primer caso si se cumple.

El segundo caso se demuestra de la misma forma.

Teorema II.1: Sea  $A > 0$ , Primitiva de orden  $n \times n$ . Sea  $r$  el valor propio estrictamente dominante de  $A$ , entonces:

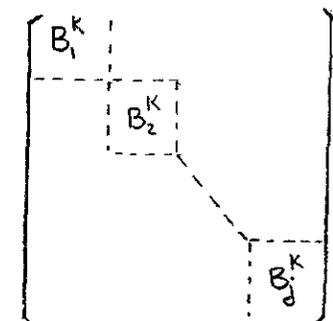
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{r^k} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} R^{-1}$$

donde  $R$  es una matriz constante que depende de  $A$ .

Demostración:

Sea  $J$  la forma canónica de Jordan de  $A$ , eso implica que:

$$A = R \cdot J \cdot R^{-1} \quad \text{Y} \quad A^k = R \cdot J^k \cdot R^{-1}$$

Pero  $J^k =$  

The diagram shows a large square matrix with a dashed-line box around it. Inside the box, there are several smaller square blocks arranged along the main diagonal. The top-left block is labeled  $B_1^k$ , the block below it is  $B_2^k$ , and the bottom-right block is  $B_d^k$ . The blocks are separated by dashed lines, indicating they are independent submatrices.

Por lo que, si  $s$  es cualquier otro valor propio de  $A$  distinto de  $r$ , entonces las entradas de  $\frac{J^k}{r^k}$  caerán en cualquiera de los siguientes casos:

$$a) \frac{r^k}{r^k} \quad b) \frac{0}{r^k} \quad c) \frac{s^k}{r^k} \quad d) \binom{k}{i} \frac{s^{k-i}}{r^k}$$

En los casos a) y b) los límites cuando  $k$  tiende a infinito son respectivamente, 1 y 0.

En el caso c), como  $r > |a|$ , entonces  $\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k = 0$

Consideremos finalmente el caso d). Supongamos que  $\binom{k}{i} s^{k-i}$  pertenece a un bloque de Jordan de orden  $m \times m$ , entonces sea  $g = m - 1$ , si  $k > 2g$ ,  $\binom{k}{i} < \binom{k}{g}$ , ya que los coeficientes binomiales van creciendo mientras  $i \leq k/2$ .

Como además:  $\binom{k}{g} = \frac{k(k-1)\dots(k-g+1)}{g!} \leq \frac{k^g}{g!}$

entonces:  $\binom{k}{i} \frac{s^{k-i}}{r^k} \leq \frac{k^g}{g!} \left(\frac{s^g}{r^k}\right) \left(\frac{1}{s^i}\right)$

lo cual implica que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \binom{k}{i} \frac{s^{k-i}}{r^k} \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^g}{g!} \left| \frac{1}{s^i} \right| \left| \frac{s}{r} \right|^k = 0$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

### II.3. ACCESIBILIDAD DE UNA POBLACION EN UN SISTEMA DE TRANSPORTE.

Supongamos un sistema de transporte constituido por un conjunto de  $n$  poblaciones enlazadas por algún tipo de vía de comunicación, digamos carreteras. Nuestro objetivo es determinar el grado de accesibilidad de cada población del sistema. Es claro que el resultado debe ser un vector de índices de la accesibilidad relativa de cada población.

Principiaremos modelando este sistema de transporte con ayuda de la Teoría de Gráficas, ya que podemos considerar al sistema como una gráfica simple (sin lazos ni lados múltiples), cuyos vértices representan a las poblaciones, y cuyos lados son las carreteras que comunican a las poblaciones.

Formemos una matriz  $A$ , que llamaremos Matriz de Adyacencia, de la siguiente manera:

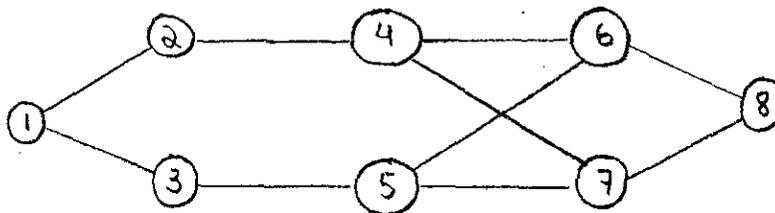
a) Su elemento  $a_{ij}$  valdrá 1 si hay carretera entre el vértice  $i$  y el vértice  $j$ .

b) Su elemento  $a_{ij}$  valdrá 0 si no la hay.

Por ser una gráfica simple,  $a_{ii} = 0$  Para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Además  $A$  resulta ser una matriz simétrica.

Con el fin de determinar la accesibilidad de los vértices podemos considerar, como una primera aproximación, el número de carreteras que comunican a cada población. Visto en términos de  $A$ , este primer indicador de la accesibilidad, que denotaremos por  $I_1$ , estará definido por:  $I_1 = A \cdot U$ , donde  $U = (1, 1, \dots, 1)$ .

Es claro que este primer indicador es muy burdo pues un vértice puede estar enlazado a muchos vértices poco accesibles, mientras que otro puede estar enlazado a pocos vértices pero muy accesibles. Por ejemplo la siguiente gráfica, donde es intuitivamente claro que el vértice 1 es menos accesible que el vértice 8, sin embargo, de acuerdo a  $I_1$ , ambos tienen la misma accesibilidad.



Un mejor indicador de la accesibilidad se podría obtener considerando los caminos de longitud 2 que haya entre cada vértice y los demás, a este indicador lo denotaremos por  $I_2$ . Veamos como podemos expresarlo en términos de la matriz  $A$ .

Sea  $B = A^2$ , es decir, el elemento  $ij$  de  $B$ , denotado por  $b_{ij}$  es:  

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$$
 , o sea que  $b_{ij}$  es una suma de unos y ceros, habiendo unos cuando:  $a_{ik} = 1 = a_{kj}$ , o lo que es equivalente, cuando haya caminos de longitud 2 entre el vértice  $i$  y el vértice  $j$ . Por lo tanto,  $I_2 = A^2 \cdot U$ .

Aunque  $I_2$  es un mejor indicador de la accesibilidad que  $I_1$ , siempre podríamos encontrar mejores indicadores, por ejemplo:

$$I_3 = A^3 \cdot U \quad \text{o} \quad I_4 = A^4 \cdot U$$

Resulta natural a partir de lo anterior, proponer como el mejor índice de accesibilidad a:  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \cdot U$ , si es que existe.

Con el fin de poder garantizar la existencia de dicho límite pondremos una condición adicional al sistema, consistente en pedir que toda población esté conectada con al menos otra población de la red, lo que en lenguaje de Teoría de Gráficas significa que la gráfica es conectada. Esta limitación en la práctica no resulta tal, pues si un vértice no estuviera conectado le asignaríamos un índice 0 y trabajaríamos con los demás.

Definición: Diámetro de una gráfica conectada es el menor entero  $d$  que permita ir de cualquier vértice a cualquier vértice por caminos de longitud menor o igual que  $k$ .

Si  $A$  es la matriz de adyacencia del sistema, sabemos que  $A^k$  nos indica el número de caminos de longitud  $k$  que une a cualquier par de vértices. Si  $A$  tuviera todas sus entradas positivas, sería una matriz primitiva, y como además sabemos que  $A > 0$ , le podríamos aplicar el teorema II.1, sin embargo ese no es el caso por lo que para poder aplicar dicho teorema trabajaremos con la matriz  $B = A + I$ . Esta matriz la podremos interpretar como la matriz de adyacencia de un sistema de transporte en el que hay caminos de un vértice a el mismo. Esto no modifica la accesibilidad de los vértices pues a todos se les da la oportunidad de repetirse.

Ahora si, si  $d$  es el diámetro de la gráfica,  $B^d >> 0$ , y por tanto primitiva, y puesto que  $B > 0$ , el teorema II.1 nos dice que su valor propio estrictamente dominante  $r$  cumple con:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B^k}{r^k} \cdot U = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} R^{-1} U$$

Sea  $c$  la primera coordenada de  $R^{-1} U$ , entonces:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} R^{-1} U = R \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual da la primera columna de  $cR$ , que es el vector propio  $cX >> 0$  que le corresponde a  $r$  según el Teorema de Perron-Frobenius.

Esto implica que si  $k$  es grande:  $B^k U \approx r^k c \cdot X$ . Por lo que si  $B^k U = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  y  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , entonces:

$$\frac{h_i}{h_j} \approx \frac{x_i}{x_j}$$

Si además observamos que  $X \cdot B = r \cdot X \implies X(A+I) = r \cdot X \implies XA = (r-1)A$ , es decir, un vector propio de  $B$  asociado a  $r$  es un vector propio de  $A$  asociado a  $r-1$ , entonces podemos afirmar que:

" Para determinar la accesibilidad relativa de los vértices en una gráfica simple conectada, basta calcular el vector propio estrictamente positivo correspondiente al valor propio estrictamente dominante de  $A$  y comparar sus coordenadas."

A este índice de accesibilidad se le llama INDICE DE ACCESIBILIDAD DE GOULD.

#### II.4. DISTRIBUCION FINAL DE UN RUMOR

Consideremos un sistema formado por un conjunto de ciudades conectadas por algun medio de comunicación, digamos teléfono. Supongamos que al tiempo  $t=1$  una persona en la ciudad  $i$  platica un rumor que acaba de inventar, a una y solo una persona en cada una de las ciudades con las que esta conectada la ciudad  $i$ . Al tiempo  $t=2$  cada persona que sabe el rumor lo cuenta a una y solo una persona que no lo sepa en cada ciudad comunicada con la de ella. Si este proceso se repite muchas veces el rumor se esparcirá por todo el conjunto de ciudades, siendo mas fuerte en unas ciudades que en otras. Quisieramos conocer la distribución final del rumor.

Nuevamente recurrimos a la Teoría de Gráficas como herramienta para el modelado del sistema, tomando a las ciudades como vértices y a las líneas de comunicación como lados de la gráfica.

Formamos la matriz de adyacencia del sistema en la misma forma que antes, y si  $X(t)$  es el vector que indica el número de personas que conoce el rumor en cada ciudad, entonces  $X(0)$  será uno de los vectores de la base canónica, es decir:

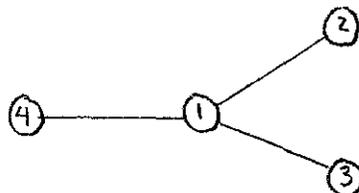
$$X(0) = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) = E_i$$

Es claro que  $X(t+1) = A \cdot X(t)$ , y por lo tanto, aplicando el lema II.1,  $X(t) = A^t X(0) = A^t E_i$ .

Como se ve, el problema es esencialmente el mismo que el del problema anterior por lo que, repitiendo la misma argumentación que en el apartado anterior, podemos afirmar que:

"Para valores de  $t$  grandes, la distribución del rumor entre las ciudades guardará la misma proporción que la que guardan entre sí las coordenadas del vector propio correspondiente al valor propio estrictamente dominante".

Consideremos la siguiente gráfica que puede representar a un sistema de transporte o de comunicaciones.



Calculemos su matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su Polinomio característico es:  $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$

Sus valores Propios son aproximadamente:

$$2.17, 0.31, -1.00, -1.48$$

Por lo que su valor Propio dominante sera : 2.17

Calculando el vector Propio correspondiente a 2.17 obtenemos que  $X = (2.17, 1.85, 1.85, 1)$ , que inmediatamente nos indica que los vértices 2 y 3 son igualmente accesibles si lo interpretamos como accesibilidad, o que el rumor se distribuirá en la misma proporción en los vértices 2 y 3, si le damos la otra interpretación.

Un hecho sobresaliente en la segunda interpretación es que no importa en que vértice se originó el rumor, sino que todo depende de la accesibilidad de cada vértice en la gráfica, lo cual relaciona las dos interpretaciones.

## II.5. ESTRATIFICACION FUTURA DE UNA POBLACION:

Consideremos una Población de cierta especie que se encuentra estratificada en generaciones de la misma longitud,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Supongamos que los miembros del estrato  $A_i$  originan en promedio  $a_i$  individuos del primer estrato, y pasan a la siguiente generación un porcentaje  $p_i$ . Nuestro propósito es conocer la distribución de la Población después de  $n$  generaciones, y ver si dicha distribución alcanza algún tipo de estabilidad.

Como primer Paso formemos la matriz que describe las condiciones dadas, y que se conoce como Matriz de Leslie.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  es el vector de distribución de la Población en los distintos estratos, entonces:

$$A \cdot X(t) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ p_1 x_1 \\ p_2 x_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} x_{n-1} \end{pmatrix} = X(t+1)$$

Por lo que aplicando el Lema II.1, podemos afirmar que:

$$X(t) = A^t X(0)$$

La distribución a largo Plazo de la Población, se Podría obtener calculando el límite, cuando  $t$  tiende a infinito, de  $X(t)$ , lo cual es equivalente a estudiar el límite, cuando  $t$  tiende a infinito, de  $A^t$ .

Con el fin de que  $A$  sea Primitiva, y podamos aplicarle la teoría antes vista, Pondremos las siguientes condiciones:

- i)  $p_1, p_2, \dots, p_n$  deben ser números Positivos.
- ii)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  deben ser números no negativos.
- iii)  $a_i$  Positiva Para toda  $i \geq r$ .

El Primer requisito es natural, Pues si algún estrato no tuviera sobrevivientes no tendrían miembros los estratos mayores.

El segundo requisito es natural también, Pues los  $a_i$  representan número de individuos.

El tercer requisito se Puede interpretar como que a Partir de cierto estrato todos los estratos son fértiles. Este requisito no es muy natural, Pero se introduce con el fin de lograr la Primitividad.

Lema II.4: Si  $A$  es una matriz de Leslie con los requisitos i), ii), y iii) anteriores, entonces  $A$  es Primitiva.

Demostración:

a) Estudiaremos Primero el caso Particular en que el Primer renglón de  $A$  es Positivo.

Sea  $B$  una matriz no negativa de orden  $n \times n$ , entonces:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \cdot B_1 & \bar{A} \cdot B_2 & \dots & \bar{A} \cdot B_n \\ p_1 b_{11} & p_1 b_{12} & \dots & p_1 b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} b_{n-11} & p_{n-1} b_{n-12} & \dots & p_{n-1} b_{n-1n} \end{bmatrix}$$

Donde  $\bar{A}$  es el Primer renglón de A y  $B_i$  es la i-ésima columna de B.

De esto podemos observar que si un renglón de B, digamos k, con  $k < n$ , es Positivo, entonces el renglón k+1 de  $A \cdot B$  también lo será.

Si  $B=A$ , entonces el Primer renglón de B es Positivo, y Por tanto el segundo renglón de  $A^2$  será Positivo. Pero además, como B tiene en cada columna al menos un elemento Positivo, entonces el Primer renglón de  $A^2$  también será Positivo. Es decir,  $A^2$  tendrá los 2 Primeros renglones Positivos. Por las mismas consideraciones podemos afirmar que  $A^3$  tendrá los 3 Primeros renglones Positivos, etc..., hasta que  $A^n$  tendrá todos sus renglones Positivos. Por lo que A es Primitiva.

b) El caso General lo demostraremos, mostrando que a partir de cierta potencia de A el Primer renglón es Positivo.

Consideremos ahora el producto  $B \cdot A$ , donde B es nuevamente una matriz no negativa de orden  $n \times n$ , y donde  $q = n - (n-1)$ .

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_r & a_{r+1} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de  $B \cdot A$  es:

$$a_1 b_{11} + p_1 b_{12}, \dots, a_{r-1} b_{11} + p_{r-1} b_{1r}, a_r b_{11} + p_r b_{1,r+1}, \dots, a_{n-1} b_{11} + p_{n-1} b_{1n}, a_n b_{11}$$

Si hacemos  $B = A$ , observamos que el bloque positivo en el primer renglón del producto  $B \cdot A$  estará recorrido un lugar hacia la izquierda respecto al bloque positivo de  $A$ , es decir, ocupará los lugares:  $1, r-1, 1, r, 1, r+1, \dots, 1, n-1$ .

Si repetimos lo anterior  $r-1$  veces tendremos que  $A^{r-1}$  tendrá el bloque positivo en los primeros  $q$  lugares, y los demás lugares son cero. Veamos que pasa en la siguiente iteración:

a) Si  $x < q \rightarrow a_x b_{11} + p_x b_{1,x+1} > 0$  pues  $p_x b_{1,x+1} > 0$

Si  $x \geq q$ , se presentan 2 casos:  $q \geq r$  o  $q < r$ .

b) Si  $r \leq q \leq x$ , entonces:  $x \geq r \Rightarrow a_x > 0$ , y como  $b_{11} > 0$   
 $\Rightarrow a_x b_{11} + p_x b_{1,x+1} > 0$

Por lo tanto, si  $r \leq q$  todo el primer renglón de  $A^r$  será positivo.

Si  $q < r$ , se presentan 2 casos:

c) Si  $q \leq x < r$ , entonces:  $a_x = 0$  y  $b_{1,x+1} = 0$

por lo tanto:  $a_x b_{11} + p_x b_{1,x+1} = 0$

d) Si  $q < r \leq x \leq n-1$ , entonces  $a_x > 0$  y  $b_{11} > 0$ ,

por lo tanto  $a_x b_{11} + p_x b_{1,x+1} > 0$

e) Si  $q < r$  y  $x = n$  entonces  $a_n b_{11} > 0$ .

Resumiendo, una vez que tenemos  $A^{T-1}$  con el bloque positivo en el lado izquierdo del primer renglón, pueden pasar 2 cosas en la siguiente iteración:

1) Todo el primer renglón es positivo.

2) El primer renglón constará de 2 bloques positivos, uno con  $q-1$  y otro con  $q$  componentes separados por un bloque de ceros.

Si volvemos a iterar  $q-1$  veces obtendremos un bloque de ceros y un bloque positivo pero con  $q+q-1$  componentes. O sea que tenemos el mismo problema original pero con muchos menos ceros. Esto significa que después de cierto número de iteraciones lograremos tener el primer renglón positivo, y aplicándole el primer caso sabremos que es primitiva.

De la demostración se ve que podríamos relajar un poco más el tercer requisito, pidiendo que  $a_n > 0$  y que haya al menos una pareja de  $a$ 's consecutivas positivas.

Con esto queda demostrado el lema.

Corolario II.2: La distribución de la población a largo plazo en el problema que hemos planteado, sigue la misma proporción que las componentes del vector propio correspondiente al valor propio estrictamente dominante de  $A$ , y es independiente del vector de distribución inicial  $X(0)$ .

Su demostración es idéntica a la que hicimos en el caso del Índice de Accesibilidad de Gould. ( ver Pág. 19 ).

Ejemplo: Consideremos una Población animal ficticia constituida por:

1000 animales entre 0 y 1 año de edad ( Clase I ).

800 animales entre 1 y 2 años de edad (Clase II ).

600 animales entre 2 y 3 años de edad (Clase III).

Supongamos que  $1/2$  de los individuos de la Clase I sobrevivirán Pasando a la Clase II.

Supongamos que  $1/2$  de los individuos de la Clase II sobrevivirán Pasando a la Clase III.

Todos los de la Clase III se mueren.

Supongamos que los individuos de la Clase I no Producen descendencia.

Supongamos que los individuos de la Clase II Producen en Promedio 1 descendiente.

Supongamos que los individuos de la Clase III Producen en Promedio 2 descendientes.

Todo lo anterior se Puede resumir diciendo que:

$$X(0) = ( 1000, 800, 600 )$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La distribución de la Población un año después será:

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 500 \\ 400 \end{bmatrix}$$

La distribución de la Población 2 años después será:

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.75 & 0.75 \\ 0.19 & 0.44 & 0.37 \\ 0.09 & 0.19 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1490 \\ 764 \\ 392 \end{bmatrix}$$

Por otro lado el Polinomio característico de A es:

$$2\lambda^3 - \lambda - 1$$

Por lo que sus valores propios son:  $1, \frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}(1-i)$

Por lo tanto, el valor propio estrictamente dominante de A es: "1", y su vector propio asociado: (4, 2, 1).

Nótese que la Proporción de Población en los distintos estratos de X(2), comienza a parecerse a las Proporciones entre las componentes del vector propio.

## II.5. CONCLUSIONES:

A través de los diversos sistemas que hemos considerado, vemos como, si la matriz que define las relaciones entre las distintas variables del sistema es Primitiva y no negativa, entonces el sistema tiende a ser estable en el sentido de que los valores que toman las variables guardan entre si Proporciones estables o fijas, independientemente de cual haya sido el estado inicial del sistema.

## BIBLIOGRAFIA

- Flores Espinoza, Rubén. "MATRICES POSITIVAS Y SUS APLICACIONES". Depto. de Matemáticas de la Universidad de Sonora.
- Keller, Edward L. "POPULATION PROJECTION". UMAP module 345. 1980.
- Roberts, Fred S. y Brown, Thomas A. "SIGNED DIGRAPHS AND THE ENERGY CRISIS". Am. Math. Monthly, 82 (1975).
- Ronnes, Chris y Anton, Howard. "APLICACIONES DE ALGEBRA LINEAL". Ed. Limusa.
- Straffin, Phillip D. "LINEAR ALGEBRA IN GEOGRAPHY: EIGENVECTORS OF NETWORKS". Math. Magazine (53), 1980.

## CAPITULO III

### ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS

(Variables de Diferentes Clases)

#### III.1. INTRODUCCION:

En el capítulo anterior estudiábamos sistemas dinámicos discretos cuyas componentes o variables eran todas de una misma clase. Por ejemplo, en el caso de la accesibilidad, todas las variables indicaban accesibilidad, en el caso de los rumores, todas las variables indicaban número de personas que conocían el rumor, y finalmente en el caso de la estratificación de la sociedad, todas las variables indicaban el número de individuos en cada estrato.

En este capítulo trataremos con sistemas dinámicos discretos cuyas variables componentes pueden ser de diversa clase. El mayor grado de complejidad de estos sistemas obliga a llegar a un compromiso entre la precisión que queremos que tenga el modelo, y la capacidad que tenemos para construirlo.

Los modelos cuyo objetivo es la precisión, llamados Modelos Aritméticos, deben sacrificar la cantidad de variables con las que trabajarán, a fin de que el modelo sea constructible y manejable. Otro problema con estos modelos es que solo pueden trabajar con variables cuantificables con un alto grado de precisión. Por lo que, si el sistema cambia rápidamente, solo podrá hacer predicciones a corto plazo.

Otro enfoque al problema de estudiar sistemas de este tipo es el construir modelos que hagan resaltar la estructura del sistema, y ver como influye dicha estructura en los cambios que se producen en el mismo. Esto ofrece la ventaja de poder manejar variables no cuantificables, y también de que sus predicciones sean de más largo plazo. Este tipo de modelos llamados Modelos Geométricos, son los que estudiaremos aquí.

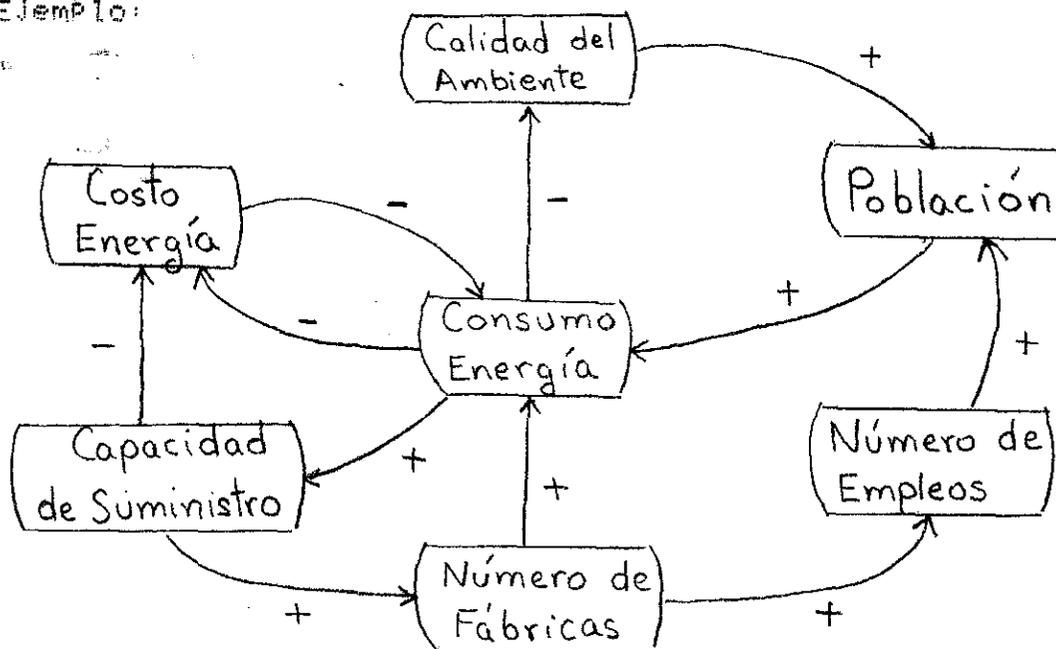
### III.2. MODELADO ESTÁTICO DEL SISTEMA.

Consideremos un sistema dinámico constituido por  $k$  variables:  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Formemos una digráfica con estas variables de la siguiente manera:

- a) Cada variable será un vértice de la digráfica.
- b) Habrá un arco dirigido con origen en  $X_i$  y final en  $X_j$ , si y solo si, un cambio en  $X_i$  obliga un cambio en  $X_j$ . Esto lo denotaremos por  $X_i X_j$ .
- c) Le asignaremos a cada arco  $X_i X_j$  el número 1 o el signo +, si un incremento (decremento) en  $X_i$  origina un incremento (decremento) en  $X_j$ . Y le asignaremos el número -1 o el signo - si un incremento (decremento) en  $X_i$  origina un decremento (incremento) en  $X_j$ .

Este modelo estático del sistema lo llamaremos DIGRAFICA CON SIGNO. Las digráficas con signo constituyen en muchas ocasiones la única manera de modelar un sistema.

Ejemplo:



Si además de conocer el tipo de interacción entre las variables podemos cuantificar dicha interacción, podemos mejorar el modelo cambiando c) por:

c) Le asignaremos a cada arco un valor que indique la intensidad de la interacción, junto con un signo que indique el tipo de interacción. A ese número con su signo le llamaremos el Peso del Arco, y lo denotaremos por  $W(X_i, X_j)$ .

A este modelo se le llamará DIGRAFICA PESADA, y es claro que: " Toda digráfica con signo es digráfica pesada".

Veamos ahora algunas definiciones:

TRAYECTORIA DE UNA DIGRAFICA es cualquier sucesión finita de vértices tal que, entre cualquier pareja consecutiva de vértices de la sucesión hay un arco.

LONGITUD DE UNA TRAYECTORIA es el número total de arcos determinados por una trayectoria.

SIGNO DE UNA TRAYECTORIA es el producto de los signos de los arcos de determinados por una trayectoria.

### III.3. MODELADO DINAMICO DEL SISTEMA.

Hasta ahora tenemos una imagen geométrica del sistema, veamos como introducir en el modelo el carácter dinámico que nos indique como van cambiando los valores de las variables conforme avanza el tiempo, el avance del tiempo, lo consideraremos en forma discreta, por lo que se le llamará PROCESO DE PULSOS.

Sea  $V_i(t)$  el valor de la variable  $X_i$  al tiempo  $t$ , con  $t$  entero no negativo.

Sea  $V_i(I)$  el valor inicial de la variable  $X_i$ .

Sea  $V(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t))$  el vector de valores de las variables al tiempo  $t$ .

Consideraremos que  $V_i(t+1)$  depende de tres factores:

- 1) Del valor de  $X_i$  al tiempo  $t$ , es decir, de  $V_i(t)$ .
- 2) De cambios de origen externo ocurridos en ese momento en esa variable  $X_i$ , les llamaremos PULSOS EXTERNOS, y los denotaremos por  $P_i(t+1)$ .

3) De los cambios inducidos en  $X_i$  al tiempo  $t+1$  por los cambios que ocurrieron al tiempo  $t$  en todas aquellas variables que influyen en  $X_i$ , y que llamaremos PULSOS.

Con el fin de simplificar la descripción de los Procesos de Pulsos introduzcamos la siguiente notación:

$$P_j(t) = V_j(t) - V_j(t-1), \text{ para } t=1, 2, \dots$$

$P(t) = (P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t))$ , y se llamará Vector de Pulsos.

$$P(0) = \overline{P(0)}$$

$\text{Sen}(X_j, X_i) = +1$  si existe  $X_j, X_i$  y tiene asignado el signo +.

$\text{Sen}(X_j, X_i) = -1$  si existe  $X_j, X_i$  y tiene asignado el signo -.

$\text{Sen}(X_j, X_i) = 0$  si no existe  $X_j, X_i$ .

$W(X_j, X_i)$  es el peso del arco  $X_j, X_i$ .

Considerando esta notación, y para una digráfica con signo, el proceso de Pulsos se puede describir por:

$$V(0) = V(I) + P(0)$$

$$V_i(t+1) = V_i(t) + \overline{P_i(t+1)} + \sum_{j=1}^n \text{Sen}(X_j, X_i) P_j(t).$$

Si la digráfica es Pasada, entonces la descripción estará dada por:

$$V(0) = V(I) + P(0)$$

$$V_i(t+1) = V_i(t) + \overline{P_i(t+1)} + \sum_{j=1}^n W(X_j, X_i) P_j(t).$$

En ambos casos,  $V(t) = V(I) + P(0) + P(1) + \dots + P(t)$ .

De esta manera vemos que el Proceso de Pulsos queda determinado si conocemos  $V(I)$  y  $P(t)$  con  $t=0,1,2,\dots$

Definición: Dada una digráfica Pesada  $D$ , dotada de un Proceso de Pulsos, decimos que el Proceso es un Proceso de Pulsos autónomo si y solo si,  $\overline{P(t)} = 0$  para toda  $t > 0$ .

Por lo tanto, en un Proceso de Pulsos autónomo solo hay pulsos externos al iniciar el Proceso.

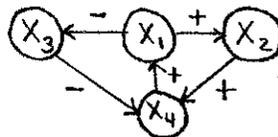
Definición: Dada una digráfica Pesada  $D$ , dotada de un Proceso de Pulsos autónomo, decimos que el Proceso es un Proceso de Pulsos simple con inicio en  $X_i$  si y solo si:

$$\overline{P(0)} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$$

dónde el 1 corresponde a la  $i$ -ésima componente.

Es decir, un Proceso de Pulsos simple es aquel que empieza su dinámica por agente externo que actúa por uno y solo uno de los vértices, y solo al inicio.

Ejemplo: Consideremos la siguiente digráfica con signo:



Entonces, un Proceso de Pulsos simple que empieza en el vértice  $X_1$ , quedará descrito por:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$V(I)$	0	0	0	0
$V(0)$	1	0	0	0
$V(1)$	1	1	-1	0
$V(2)$	1	1	-1	2
$V(3)$	3	1	-1	2

Definición: Dada una digráfica con signo  $D$ , dotada de un Proceso de Pulsos. Llamaremos "número de trayectorias con signo de longitud  $t$  de  $X_i$  a  $X_j$ ", denotada por  $N(X_i \rightarrow X_j, t)$ , al número de trayectorias positivas de  $X_i$  a  $X_j$  de longitud  $t$  menos el número de trayectorias negativas de  $X_i$  a  $X_j$  de longitud  $t$ .

Definición: Dada una digráfica pesada  $D$ , a la matriz  $A$  cuyo elemento  $ij$  es  $N(X_i X_j)$  la llamaremos Matriz de Adyacencia de la digráfica.

Teorema III.1: En un proceso de pulsos simple que empieza en el vértice  $X_i$  de una digráfica con signo  $D$ , se cumple lo siguiente:

1)  $P_j(t) =$  Número de trayectorias con signo de longitud  $t$  que van del vértice  $X_i$  al vértice  $X_j = N(X_i \rightarrow X_j, t)$ . Con  $t > 0$ .

$$2) V_j(t) = V_j(1) + \overline{P_j(0)} + \sum_{k=1}^t N(X_i \rightarrow X_j, k).$$

Demostración:

Por ser una digráfica con signo dotada de un Proceso de Pulsos  $V_j(t+1) = V_j(t) + \overline{P_j(t+1)} + \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) P_k(t)$ , donde:

$$P_k(t) = V_k(t) - V_k(t-1), \text{ para } t > 0.$$

$$V_k(0) = V_k(1) + \overline{P_k(0)} = V_k(1) + P_k(0).$$

Por ser un Proceso de Pulsos simple, es autónomo, y por tanto:  $V_j(t+1) = V_j(t) + \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) P_k(t)$ , con  $t > 0$ .

$$\implies V_j(t+1) - V_j(t) = \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) P_k(t).$$

$$\implies P_j(t+1) = \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) P_k(t).$$

Ahora demostraremos por inducción matemática que:

$$P_j(t) = N(X_i \rightarrow X_j, t)$$

$$\text{Si } t=1, P_j(1) = \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) P_k(0) = \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) \overline{P_k(0)},$$

Pero como además es un Proceso de Pulsos simple  $\overline{P_k(0)}=0$

si  $k \neq i$ ,  $\overline{P_k(0)} = 1$  si  $k=i$ . Por lo tanto:

$$P_j(1) = \text{Sen}(X_i X_j) = N(X_i \rightarrow X_j, 1)$$

Supongamos que se cumple para  $t=s$ , es decir:

$$P_j(s) = N(X_i \rightarrow X_j, s)$$

Veamos si se cumple para  $t = s+1$ :

$$P_j(s+1) = \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) P_k(s) = \sum_{k=1}^n \text{Sen}(X_k X_j) N(X_i \rightarrow X_j, s)$$

Si no hay arco entre  $X_k$  y  $X_j$ , entonces  $\text{Sen}(X_k X_j)=0$ , y no aportará nada al valor de  $P_j(s+1)$ . Por otro lado, si  $\text{Sen}(X_k X_j) \neq 0$ , entonces se Presentan 2 casos:

a)  $\text{Sen}(X_k X_j) > 0$ , entonces las trayectorias positivas y las trayectorias negativas de longitud  $s+1$  entre  $X_i$  y  $X_j$  se conservarán, pero con un arco más.

b)  $\text{Sen}(X_k X_j) < 0$ , entonces habrá tantas trayectorias positivas de longitud  $s+1$  entre  $X_i$  y  $X_j$  como había negativas de longitud  $s$  entre  $X_i$  y  $X_k$ , y viceversa. Esto implica que el número de trayectorias con signo de longitud  $s+1$  es:

$$P_j(s+1) = N(X_i \rightarrow X_j, s+1)$$

Con lo cual queda demostrada la Primera Parte del teorema.

La segunda Parte es inmediata a partir de la anterior pues

como  $V(t) = V(0) + \sum_{k=1}^t P(k)$ , entonces:

$$V_j(t) = V_j(0) + \sum_{k=1}^t P_j(k) = V_j(0) + P_j(0) + \sum_{k=1}^t N(X_i \rightarrow X_j, k).$$

Teorema III.2: Sea D una dinámica pesada con matriz de adyacencia A. Entonces, en un proceso de pulsos simple con inicio en  $X_i$ , se cumplen las siguientes propiedades:

- a)  $P(t)$  = Row  $i$  de la matriz  $A^t = (A^t)_i$ .
- b)  $V(t) = V(I) + (I + A + A^2 + \dots + A^t)_i$ .

Demostración:

a) Se demostrará por inducción matemática sobre  $t$ .

Sea  $A = (a_{ij})$  la matriz de adyacencia de D. Por lo tanto:

$$a_{ij} = W(X_i, X_j)$$

y  $A_i = (W(X_i, X_1), W(X_i, X_2), \dots, W(X_i, X_1), \dots, W(X_i, X_n))$  nos dará los pesos de todos los arcos que salen de  $X_i$ .

Como el proceso es simple, entonces  $A_i$  es el vector de cambios ocurridos al tiempo  $t=1$  por causa del pulso inicial aplicado al vértice  $X_i$ . Por lo tanto:  $A_i = P(1)$ , y entonces el teorema se cumple para  $t=1$ .

Supongamos que se cumple para  $t=s$ , es decir,  $(A^s)_i = P(s)$ .

Veamos si se cumple para  $t=s+1$ :

$$A^{s+1} = A^s \cdot A$$

$(A^{s+1})_i = ((A^s)_i) \cdot (\text{col. 1 de } A), (A^s)_i \cdot (\text{col. 2 de } A), \dots, (A^s)_i \cdot (\text{col. n de } A)$ .

Si consideramos el hecho de que la columna  $h$  nos da los pesos de todos los arcos que llegan al vértice  $X_h$ , entonces:

$(A^s)_i \cdot (\text{col. } h \text{ de } A) = \text{cambio ocurrido en el vértice } X_h \text{ al tiempo } s+1 \text{ como consecuencia de los cambios ocurridos al tiempo } s \text{ en los vértices que inciden en el.}$

$\Rightarrow (A^{s+1})_i =$  Vector de cambios ocurridos en los vértices al tiempo  $s+1 = P(s+1)$ .

b) Como  $V(t) = V(1) + P(0) + P(1) + \dots + P(t)$ , y como el proceso empezó en el vértice  $X_i$ ,  $P(0) = I_i$ , entonces:

$$V(t) = V(1) + (I + A + A^2 + \dots + A^t)_i.$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

Teorema III.3: En todo proceso de pulsos autónomo sobre una digráfica pesada  $P(t) = P(0) \cdot A^t$ .

Demostración:

Por el teorema III.2 sabemos que  $(A^t)_i$  tiene los cambios producidos al tiempo  $t$  por un pulso inicial en el vértice  $X_i$ . Por otro lado,  $P(0)$  nos da la localización e intensidad de esos pulsos iniciales. Por lo tanto:

$$P(t) = P(0) \cdot A^t$$

#### III.4. ESTABILIDAD DE LOS PROCESOS DE PULSOS

Hasta ahora, hemos construido un modelo discreto de un sistema dinámico. ahora estudiaremos como, partiendo de ese modelo, podemos determinar las condiciones para que el sistema alcance algún tipo de estabilidad.

Definiciones:

Dada una digráfica Pesada, dotada de un Proceso de Pulsos:

1) Se dice que el vértice  $X_j$  es estable en Pulsos, si y solo si, la sucesión  $\{P_j(t)\}$  está acotada.

2) Se dice que el vértice  $X_j$  es estable en valores, si y solo si, la sucesión  $\{V_j(t)\}$  está acotada.

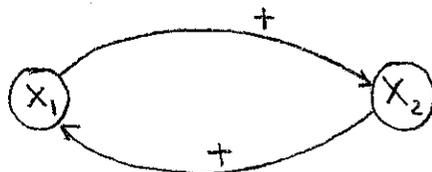
3) Se dice que la digráfica es estable en Pulsos (valores), si y solo si, cada vértice es estable en Pulsos (valores).

Lema III.1: Dada una digráfica Pesada  $D$  con un Proceso de Pulsos, si  $X_j$  es estable en valores, entonces es estable en Pulsos.

Demostración:

$X_j$  estable en valores implica que:  $|V_j(t)| < k \sqrt{t}$ , lo cual implica que:  $|P_j(t)| = |V_j(t) - V_j(t-1)| < |V_j(t)| + |V_j(t-1)| < 2k$

El recíproco de este lema no se cumple. Pues, aunque los Pulsos estén acotados, los valores pueden crecer ilimitadamente, como por ejemplo en la siguiente digráfica:



**Teorema III.4:** Dada una digráfica pesada con matriz de adyacencia  $A$ . Si  $A$  tiene un valor propio  $r$  tal que  $|r| > 1$ , entonces, siempre podremos encontrar un proceso de pulsos simple cuya sucesión de pulsos  $\{P(t)\}$  no este acotada.

Demostración:

Sea  $r$  un valor propio de  $A$ , tal que  $|r| > 1$ .

Sea  $U$  un vector propio unitario correspondiente a  $r$ , es decir:  $UA = rU$ .

Sea  $\{E_i: i=1,2,\dots,n\}$  la base canónica, entonces:

$U = s_1 E_1 + s_2 E_2 + \dots + s_n E_n$ , con  $|s_i| \leq 1$ .

Como  $UA^t = r^t U$ , entonces:

$$\|UA^t\| = \|r^t U\| = |r^t| = |r|^t$$

$$\Rightarrow \left\| \left( \sum_{k=1}^n s_k E_k \right) A^t \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n s_k (E_k A^t) \right\| \leq \sum_{k=1}^n |s_k| \|E_k A^t\|$$

$$\Rightarrow |r|^t \leq \sum_{k=1}^n \|E_k A^t\|$$

Como para cada  $t$  existe  $j$  tal que:  $\|E_j A^t\| \geq \|E_i A^t\| \forall i \neq j$   
entonces, para cada  $t$  existe  $j$  tal que:  $|r|^t \leq n \|E_j A^t\|$

Si tomamos  $\overline{P(0)} = E_j$ , entonces:  $\|P(t)\| = \|\overline{P(0)} A^t\| \geq \frac{|r|^t}{n}$

Como  $|r| > 1$ ,  $\frac{|r|^t}{n}$  se puede hacer tan grande como se quiera.

$\Rightarrow \{P(t)\}$  no está acotada.

**Corolario III.1:** Si  $D$  es una digráfica pesada con enteros y estable en pulsos para cualquier proceso de pulsos simple, entonces todo valor propio  $r \neq 0$  de la matriz de adyacencia  $A$ , cumple con:  $|r| = 1$ .

Demostración:

Según el teorema anterior  $|r| < 1$ .

Si  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  es el Polinomio característico de  $A$ , como los Pesos son enteros, entonces los coeficientes de  $p(x)$  son enteros. Por lo que si  $a_k$  es el coeficiente del término de menor grado con coeficiente distinto de 0, entonces es el producto de todos los valores propios distintos de 0 de  $A$  junto con un signo. Por lo tanto:

$$|a_k| = |r_1| |r_2| \dots |r_s|$$

Si alguno cumpliera con:  $|r_i| < 1$ , entonces:  $|a_k| < 1$

$\implies a_k = 0$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto:

$$|r_i| = 1$$

Hasta ahora hemos obtenido únicamente condiciones necesarias para que una dinámica pesada sea estable. Con el fin de poder obtener condiciones suficientes para la estabilidad necesitaremos usar la forma canónica de Jordan de la matriz de adyacencia de  $A$ .

Lema III.2: Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ , y  $J$  su forma canónica de Jordan. La sucesión  $\{\|A^t\|\}$  está acotada  $\iff$  la sucesión  $\{\|J^t\|\}$  está acotada.

Demostración:

Si  $J$  es la forma canónica de Jordan de  $A$ , entonces:  $A = Q^{-1} J Q$

$\implies A^t = Q^{-1} J^t Q$ ,  $J^t = Q A^t Q^{-1}$ , por lo tanto:

$\|A^t\|$  acotada  $\iff \|J^t\|$  acotada.

Corolario III.2:  $\{\|\sum_{k=0}^t A^k\|\}$  acotada  $\iff \{\|\sum_{k=0}^t J^k\|\}$  acotada.

LEMA III.3: Sea D una digráfica pesada con matriz de adyacencia A, y forma canónica de Jordán J. D es estable en cualquier Proceso de Pulsos autónomo, si y solo si, la sucesión  $\{\|J^t\|\}$  está acotada.

Demostración:

Necesidad: Sea D una digráfica pesada dotada de un Proceso de Pulsos autónomo, entonces:  $P(t) = P(0) \cdot A^t$ , y  $\|P(t)\| = \|P(0) \cdot A^t\|$ .

Si D es estable en Pulsos, entonces:  $\{\|P(t)\|\}$  está acotada. Por lo tanto  $\{\|P(0) \cdot A^t\|\}$  está acotada para cualquier  $P(0)$ , pero esto solo puede pasar si  $\{\|A^t\|\}$  está acotada, lo cual implica que la sucesión  $\{\|J^t\|\}$  está acotada.

Suficiencia: Si  $\{\|J^t\|\}$  está acotada, entonces  $\{\|A^t\|\}$  está acotada, lo cual implica que la sucesión  $\|P(0) \cdot A^t\|$  está acotada para cualquier  $P(0)$ , y por consecuencia  $\|P(t)\|$  también lo está.

Teorema III.5: Sea D una digráfica pesada con matriz de adyacencia A y forma canónica de Jordan J. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) D es estable en Pulsos en todo Proceso de Pulsos autónomo.

b) D es estable en Pulsos en todo Proceso de Pulsos simple.

c) Todo valor propio  $\lambda$  de A cumple con:  $|\lambda| < 1$  y si el bloque de Jordan correspondiente a  $\lambda$  tiene superdiagonal de 1's, caso en que diremos que " $\lambda$  está ligado en J", entonces:  $|\lambda| < 1$ .

Demostración:

a)  $\implies$  b):

Esto se cumple ya que todo Proceso de Pulsos simple es autónomo.

b)  $\implies$  c):

Supongamos que D es una dinámicada pesada, estable en Pulsos en todo Proceso de Pulsos simple.

El teorema III.4 implica que si r es valor propio de A, entonces  $|r| \leq 1$ .

Supongamos que r está ligado en J, y que  $|r| = 1$ , entonces, si  $B_j$  es el bloque de Jordán correspondiente a r, vemos que la entrada 1,2 de  $B_j^t = t r^{t-1}$  (ver pag.14), y por lo tanto  $|B_j^t(1,2)| = t |r|^{t-1} = t$  no estará acotada.

Esto implica que  $\{\|J^t\|\}$  no está acotada, lo que implica que D no es estable en algún Proceso de Pulsos simple. Pero eso es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto, si r está ligado en J, entonces  $|r| < 1$ .

c)  $\implies$  a):

Según el Lema III.3, si queremos demostrar que D es estable en Pulsos para todo Proceso de Pulsos autónomo, es suficiente demostrar que la sucesión  $\{\|J^t\|\}$  está acotada, o lo que es equivalente que cada entrada de  $J^t$  está acotada.

Ahora bien, las entradas de la matriz  $J^t$  Pueden ser de 3 tipos: a) 0 b)  $r^t$  c)  $\binom{t}{k} r^{t-k}$ , veamos que pasa en cada uno de ellos:

Si es 0, entonces está acotada

Si es  $r^t$ , entonces  $|r^t| = |r|^t \leq 1$  pues  $|r| < 1$

Si es  $\binom{t}{k} r^{t-k}$ , entonces según lo que vimos en la página 16 si  $t$  es suficientemente grande  $\left| \binom{t}{k} r^{t-k} \right| \leq \frac{t^g}{g!} |r|^{t-g}$  con  $g$  cte. pero como  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^g |r|^t = 0$  si  $|r| < 1$ , entonces está acotado.

Con lo cual queda demostrado el teorema.

Corolario III.3: Si  $D$  es una digráfica pasada con enteros, y  $J$  es la forma canónica de su matriz de adyacencia  $A$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a)  $D$  es estable en Pulsos en cualquier Proceso de Pulsos autónomo.

b)  $D$  es estable en Pulsos en cualquier Proceso de Pulsos simple.

c) Si  $r$  es valor propio de  $A$ , entonces:  $|r| \leq 1$   
y si  $r \neq 0$ , entonces  $r$  no está ligado en  $J$ .

d) Si  $r$  es valor propio de  $A$ , y  $r \neq 0$ , entonces:  
y  $r$  no está ligado en  $J$ .

Demostración:

a)  $\implies$  b) Por el teorema III.5 .

d)  $\implies$  c) Inmediatamente.

c)  $\implies$  a)

Si  $r \neq 0$ , el corolario III.2 implica que:  $|r| = 1$ , y el teorema III.5 que  $r$  no está ligado en  $J$ . Por lo tanto, si  $r$  está ligado en  $J$ , entonces  $r = 0$ , y en consecuencia  $|r| < 1$  con lo cual se cubren las condiciones del inciso c) del teorema anterior, y eso implica a).

b)  $\implies$  d)

Si  $D$  es estable en Pulsos en cualquier Proceso de Pulsos simple, y como está Pesada con enteros, entonces:  $r=0$  o  $|r|=1$ . Pero si  $|r|=1$ ,  $r$  no estará ligado en  $J$ .

**Teorema III.6:** Sea  $D$  una digráfica Pesada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a)  $D$  es estable en valores en todo Proceso de Pulsos autónomo.

b)  $D$  es estable en valores en todo Proceso de Pulsos simple.

c)  $D$  es estable en Pulsos Para todo Proceso de Pulsos simple y todo valor propio de  $A$ , matriz de adyacencia de  $D$ , es distinto de 1.

**Demostración:**

a)  $\implies$  b) ya que todo Proceso de Pulsos simple es autónomo.

c)  $\implies$  a)

Para demostrar que 0 es estable en valores en todo proceso de Pulsos autónomo, hay que demostrar que:  $\{\|V(t)\|\}$  está acotada. Pero,  $V(t) = V(1) + P(0) + P(1) + P(2) + \dots + P(t)$ , y por el teorema III.3  $V(t) = V(1) + P(0) [I + A + A^2 + \dots + A^t]$ . Por lo tanto, para que  $\{\|V(t)\|\}$  esté acotada hay que demostrar que la sucesión  $\{\|\sum_{k=0}^t A^k\|\}$  está acotada. Pero por el corolario III.2, esto es equivalente a demostrar que la sucesión  $\{\|\sum_{k=0}^t J^k\|\}$  está acotada, lo cual a su vez es equivalente a demostrar que cada entrada de la matriz  $\sum_{k=0}^t J^k$  está acotada.

Como J es la forma canónica de Jordan, las entradas de  $J^t$  pueden ser de los siguientes tipos:

i) 0

ii)  $r^t$ , donde r es valor propio de A.

iii)  $\binom{t}{k} r^{t-k}$

En el primer caso, no hay nada que demostrar.

En el segundo caso:

$$\left| \sum_{k=0}^t r^k \right| = \left| \frac{r^{t+1} - 1}{r - 1} \right| \leq \frac{1}{|r-1|} (|r^{t+1}| + 1)$$

pero como  $|r| < 1$ , entonces  $\left| \sum_{k=0}^t r^k \right| \leq \frac{2}{|r-1|} \implies$  acotada.

En el tercer caso, según lo que vimos en la demostración del teorema III.5:

$$\left| \binom{t}{k} r^{t-k} \right| \leq \frac{t^g}{g!} |r|^{t-g} \quad \text{si } t \text{ es suficientemente grande}$$

$$\implies \left| \sum_{k=0}^n \binom{t}{k} r^{t-k} \right| \leq \left| R + \sum_{t=t_0}^n \frac{t^g}{g!} |r|^{t-g} \right| \leq |R| + \sum_{t=t_0}^n \frac{t^g}{g!} |r|^{t-g}$$

Ahora consideremos  $\sum_{t=0}^{\infty} t^g |r|^{t-g}$  con  $|r| < 1$

por la prueba del cociente  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+1)^g |r|^{t+1-g}}{t^g |r|^{t-g}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^g |r|$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^g |r| = |r| < 1 \Rightarrow$  la serie converge y por tanto

esta acotada.

En todos los casos la sucesión  $\left\{ \left\| \sum_{t=0}^n J^t \right\| \right\}$  estuvo acotada.

b)  $\implies$  c)

Sea D estable en valores en cualquier proceso de Pulsos simple, y supongamos que  $n=1$ .

Como D es estable en valores también lo es en Pulsos, y por lo tanto,  $r$  no está ligado en J. Por lo que el bloque de Jordan que le corresponderá será:  $B = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ , lo cual implica que:

$\left\| \sum_{k=0}^n B^k \right\| = n+1 \Rightarrow$  no está acotada, lo que a su vez implica que la sucesión  $\left\{ \left\| \sum_{t=0}^n J^t \right\| \right\}$  no está acotada.

Por lo tanto D no es estable en valores, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto  $n \neq 1$ .

Con lo cual queda demostrado el teorema.

### III.5. ROSETAS

Hasta ahora hemos obtenido condiciones necesarias y suficientes para que una digráfica Peñada sea estable en todo proceso de Pulsos. Veremos ahora que hay cierto tipo de digráficas, en las que su estructura es suficiente para saber si la digráfica es estable.

Definición: Una digráfica se dice FUERTEMENTE CONECTADA si se puede ir de cualquier vértice a cualquier vértice de la digráfica.

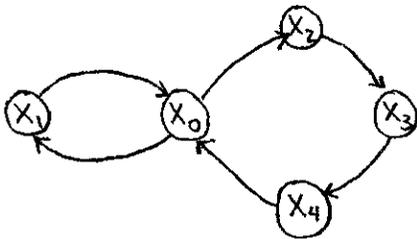
Definición: Se llama CICLO de una digráfica, a cualquier trayectoria que empiece y termine en el mismo vértice.

Definición: Se llama CICLO BASICO de una digráfica, a cualquier ciclo en el que el primer vértice es el único que se repite y lo hace solo una vez.

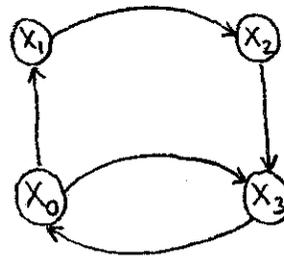
Definición: Se llama ROSETA a cualquier digráfica fuertemente conectada en la que existe uno y solo un vértice común a cualquier pareja de ciclos, y a todos los ciclos.

Definición: Se llama ROSETA GENERALIZADA a cualquier digráfica fuertemente conectada en la que exista al menos un vértice común a todos los ciclos.

Ejemplos:



Roseta



Roseta generalizada

Lema III.4: Sea  $D$  una roseta generalizada con signo. Sea  $Q_i$  la suma de los signos de los ciclos básicos de longitud  $i$ . Sea  $s = \max\{i : Q_i \neq 0\}$ , o  $s=0$  si  $Q_i = 0$  para toda  $i$ .

Si  $s=0$ , entonces  $D$  es estable en pulsos y en valores en todo proceso de pulsos simple.

Demostración:

Si  $s=0$ , entonces por cada ciclo básico de longitud  $l$  con signo  $+$ , habrá otro de la misma longitud pero con signo  $-$ .

Para demostrar este lema, bastará demostrar que es estable en valores. Pues la estabilidad en valores implica la estabilidad en pulsos.

Si  $D$  está dotado de un proceso de pulsos simple que empieza en  $X_i$ , entonces, según el teorema III.1:

$$V_j(t) = V_j(I) + P_j(0) + \sum_{k=1}^t N(X_i \rightarrow X_j, k)$$

Para demostrar que  $V_j(t)$  está acotado, bastará ver que está acotada la siguiente suma:  $\sum_{k=1}^t N(X_i \rightarrow X_j, k)$ .

Consideremos el conjunto  $B$  de trayectorias de  $X_i$  a  $X_j$  que pasan a lo más una vez por un vértice común a todos los ciclos  $\gamma$  que denotaremos por  $\gamma$ .

Sea  $b$  la longitud de la trayectoria en  $B$  de mayor longitud.

Sea  $c$  la longitud del mayor ciclo básico al que pertenece  $X_j$ .

Cualquier trayectoria de longitud  $t > b + c$ , deberá recorrer al menos un ciclo básico adicional, el cual tendrá cierto signo, digamos  $+$ , pero como  $s=0$ , habrá otro de la misma longitud pero con signo contrario. Por lo tanto:  $N(X_i \rightarrow X_j, t > b+c) = 0$  y

$$|V_j(t)| \leq |V_j(I)| + |P_j(0)| + \sum_{k=1}^{b+c} |N(X_i \rightarrow X_j, k)|$$

que por ser finito es acotado.



Desarrollando respecto al Primer nivelón tendremos:

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) = & (-\lambda)^n + (-1)^3 d_s^1 (-1)^3 d_{s+1}^1 \cdots (-1)^3 d_{f-1}^1 d_f (-\lambda)^{n-(b_1+1)} + \\
 & (-1)^{b_1+2} d_s^2 (-1)^{2b_1+3} d_{s+1}^2 (-1)^{2b_1+3} d_{s+2}^2 \cdots (-1)^{2b_1+3} d_{f-1}^2 (-1)^{b_1+1} d_f^2 (-\lambda)^{n-(b_2+1)} \\
 & + \dots + (-1)^{b_1+b_2+\dots+b_{k-1}+2} d_s^k (-1)^{2(b_1+b_2+\dots+b_{k-1})+3} \\
 & (-1)^{2(b_1+b_2+\dots+b_{k-1})+3} d_{f-1}^k (-1)^{b_1+b_2+\dots+b_{k-1}+1} d_f^k (-\lambda)^{n-(b_k+1)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + ((-1)^3)^{b_1} C_1 (-1)^{n-b_1-1} \lambda^{n-(b_1+1)} + (-1)^{2(b_1+b_2+\dots+b_{k-1})+3}$$

$$\begin{aligned}
 & ((-1)^{2b_1+3})^{b_2-1} C_2 (-1)^{n-(b_2+1)} \lambda^{n-(b_2+1)} + \dots + \\
 & (-1)^{2(b_1+b_2+\dots+b_{k-1})+3} ((-1)^{2(b_1+b_2+\dots+b_{k-1})+3})^{b_k-1} C_k (-1)^{n-(b_k+1)} \lambda^{n-(b_k+1)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = (-1)^n \left[ \lambda^n - C_1 \lambda^{n-(b_1+1)} - C_2 \lambda^{n-(b_2+1)} - \dots - C_k \lambda^{n-(b_k+1)} \right]$$

agrupando, tendremos que sumar los términos que corresponden a ciclos de la misma longitud  $\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=1}^s a_i \lambda^{n-i}$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^{n-s} \left( \lambda^s - a_1 \lambda^{s-1} - a_2 \lambda^{s-2} - \dots - a_s \right)$$

En el caso de que la roseta sea Generalizada el Polinomio característico queda descrito de la misma manera. Pues la única diferencia es que ahora habrá ciclos básicos dentro de otros ciclos básicos. Para ello hay que cuidar que en todos los ciclos básicos la numeración de los vértices sea progresiva.

Veamos ahora que información nos Proporciona el Polinomio característico.

$$\text{Sea } R(\lambda) = \lambda^s - a_1 \lambda^{s-1} - a_2 \lambda^{s-2} - \dots - a_{s-1} \lambda - a_s$$

Como  $a_s \neq 0$ , entonces  $R(\lambda)$  tiene como raíces a los valores Propios no 0 de  $D$ .

Como  $D$  es estable en pulsos y pesada con enteros, toda raíz de  $R(\lambda)$  tendrá magnitud 1, y como  $a_s = \pm$  producto de las raíces, entonces:  $a_s = \pm 1$  con lo cual queda demostrado el inciso a).

Como  $R(\lambda)$  es un polinomio con coeficientes enteros, mónico, y cuyas raíces tienen magnitud 1, entonces por un lema de Kronecker, podemos afirmar que sus raíces son raíces de la unidad.

Factoricemos  $R(\lambda)$  en factores irreducibles en los enteros:

$P_j(\lambda) \implies$  los  $P_j(\lambda)$  son polinomios ciclotómicos, y por tanto si un número es raíz, su inverso también lo será, por lo tanto:

$$R(\lambda) = \lambda^s - a_1 \lambda^{s-1} - a_2 \lambda^{s-2} - \dots - a_{s-1} \lambda - a_s$$

$$R(\lambda) = \lambda^s (1 - a_1 \lambda^{-1} - a_2 \lambda^{-2} - \dots - a_{s-1} (\lambda^{-1})^{s-1} - a_s (\lambda^{-1})^s)$$

$$\text{Sea } Q(\lambda) = a_s \lambda^s + a_{s-1} \lambda^{s-1} + \dots + a_1 \lambda - 1$$

$$\implies R(\lambda) = -\lambda^s Q(\lambda^{-1})$$

$$\implies \lambda_0 \text{ es raíz de } R(\lambda) \iff \lambda_0^{-1} \text{ es raíz de } Q(\lambda)$$

$$\implies R(\lambda) \text{ y } Q(\lambda) \text{ son polinomios del mismo grado y con las mismas raíces } \implies R(\lambda) = Q(\lambda)$$

Si  $a_s = 1$ , comparando  $R(\lambda)$  y  $Q(\lambda)$  vemos que:

$$a_i = -a_{s-i} = -a_s a_{s-i}$$

$$\text{Si } a_s = -1, \quad a_i = a_{s-i} = -a_s a_{s-i}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

**Teorema III.8:** Supongamos que  $D$  es una roseta generalizada con  $s > 0$ , y  $(a_1, a_2, \dots, a_s)$  la sucesión de la roseta. Si  $D$  es estable en pulsos en todo proceso de pulsos simple, entonces:

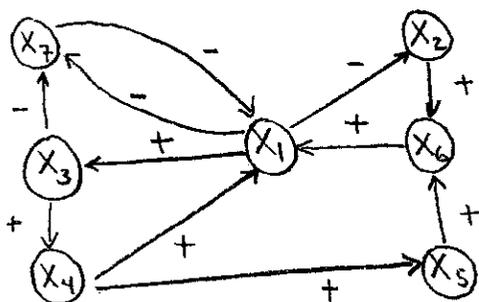
$D$  es estable en valores en todo proceso de pulsos simple, si y solo si,  $\sum_{i=1}^s a_i \neq 1$ .

Demostración:

En el teorema III.5 se demostró que una condición necesaria y suficiente para que una digráfica pesada sea estable en valores era que 1 no fuera un valor propio. Pero esto pasa

$$\iff R(1) \neq 0 \iff 1 - \sum_{i=1}^s a_i \neq 0 \iff \sum_{i=1}^s a_i \neq 1$$

Consideremos el ejemplo de la digráfica que vimos en la página 33 y que esquematizaremos de la siguiente manera:



Ciclos de longitud 2:  $X_1 X_2 X_1$ , +

Ciclos de longitud 3:  $X_1 X_2 X_6 X_1$ , -  
 $X_1 X_3 X_4 X_1$ , +  
 $X_1 X_3 X_7 X_1$ , +

Ciclos de longitud 4: no hay

Ciclos de longitud 5:  $X_1 X_3 X_4 X_5 X_6 X_1$ , +

$$\Rightarrow a_5 = 1, a_4 = 0, a_3 = 1, a_2 = 1, a_1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{El polinomio característico es: } p(\lambda) = \lambda^7 - \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^2$$

Como  $p(1) = -2$  y  $p(2) = 19 \Rightarrow$  tiene un valor propio  $> 1$  y por tanto existirá un proceso de pulsos simple que no será estable.

## BIBLIOGRAFIA

Roberts, Fred S. y Brown, Thomas A. " SIGNED  
DIGRAPHS AND THE ENERGY CRISIS ". Am. Math.  
Monthly, 82 ( 1975 ).