UNIVERSIDAD DE SONORA
ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

1942

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN ESPACIOS DE BANACH Y ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES DEL TIPO RETARDADO

T E S I S

que para obtener el título de
LICENCIADO EN MATEMATICAS
p r e s e n t a

ARTURO FRAGOSO ROBLES

HERMOSILLO SONORA, MEXICO
1973

UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN ESPACIOS DE BANACH Y ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES DEL TIPO RETARDADO

T E S I S

que para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

p r e s e n t a

ARTURO FRAGOSO ROBLES

HERMOSILLO SONORA, MEXICO

1973

Para Jorge "Ontiveros" como corresp.?

6/VI/73

AL PUEBLO DE SONORA, Y NO ES IMITACION

A LA MEMORIA DE MI PADRE,
A MI MADRE, HERMANAS y
HERMANOS. A DOÑA LICHA.

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al Dr. Carlos Imaz por sugerir este tema de tesis; al Profesor Enrique Valle Flores por su valiosa ayuda en el transcurso de mi carrera profesional y por su constante lucha por el desarrollo de las Matemáticas en Sonora.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN ESPACIOS DE BANACH Y ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES DEL TIPO RETARDADO

CONTENIDO

INTRODUCCION

En general, siempre se ha trabajado en ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach y ecuaciones diferenciales funcionales del tipo retardado como materias independientes. En un artículo de Oliva-Vorel [3] ya se presenta un trabajo donde se estudian ambas materias de una manera equivalente.

El objeto de este trabajo consiste en hacer un estudio más sencillo que el anterior, basado en un artículo de Imaz-Vorel [1] y se da un ejemplo donde podemos ver la equivalencia de una manera muy simple.

Este trabajo se ha dividido en tres capítulos.

El primero presenta una descripción general y sencilla de lo que es una ecuación diferencial funcional del tipo retardado contando con algunos ejemplos y aplicaciones y se da un teorema de existencia sin demostración para este tipo de ecuaciones. Además, enunciamos un teorema de existencia para ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, ya que las condiciones para existencia en ecuaciones funcionales no son suficientes para ecuaciones ordinarias en espacios de Banach y se presenta un contraejemplo.

En el segundo capítulo se expone la equivalencia entre ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach y ecuaciones funcionales del tipo retardado de una manera general a la vez que detallada.

En la tercera parte presentamos un ejemplo en el cual se dice explícitamente cual es el espacio de Banach en el cual vale la equivalencia y por último presentamos un ejemplo concreto de una ecuación diferencial funcional que puede convertirse a una ordinaria en un espacio de Banach y hacemos algunos comentarios sobre este tema.

I ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES DEL TIPO RETARDADO

$\mathbb{R}^n$ denotará el espacio n-dimensional euclideano con alguna norma $|\cdot|$. Sea $C = C([a,b],\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones continuas definidas sobre $[a,b]$ con rango $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi \in C$, se define su norma

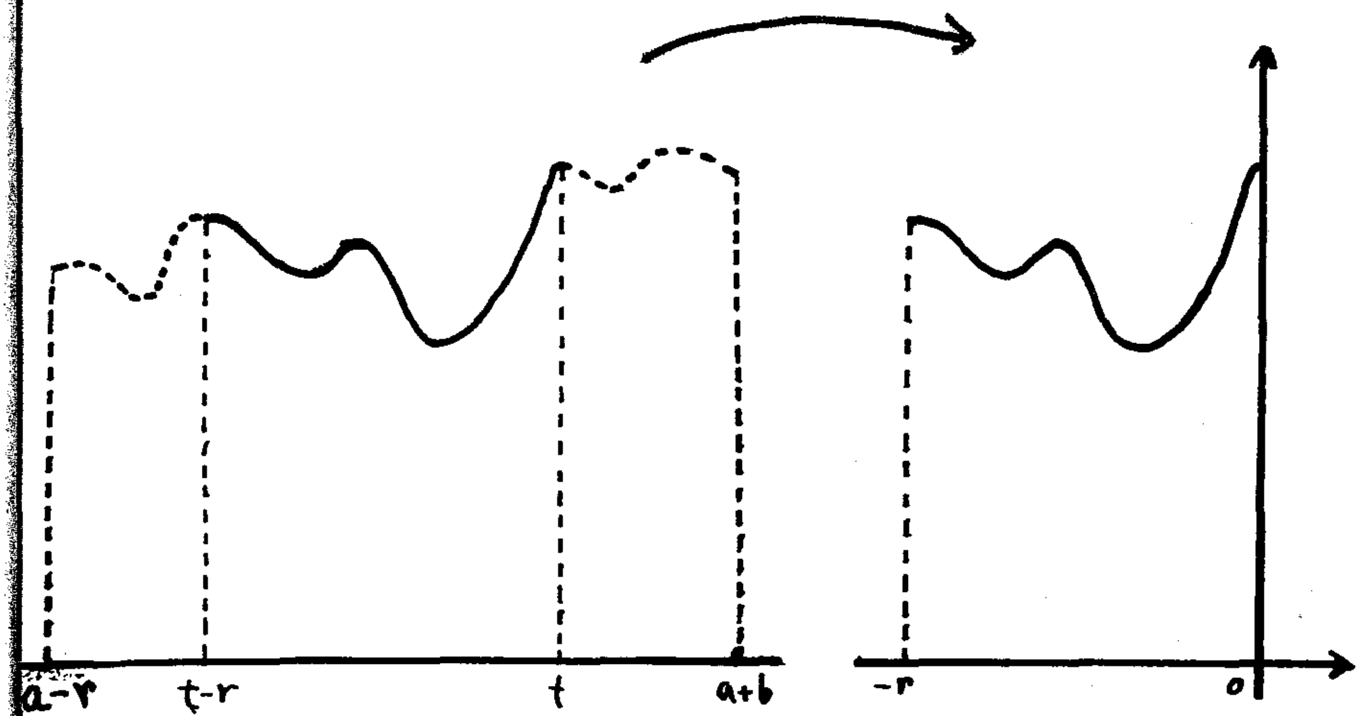
$$\|\varphi\| = \sup_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|$$

El espacio C con la topología que genera esta norma (de la convergencia uniforme) resulta ser un espacio de Banach.

$C[r,a,b]$ es el espacio de las funciones continuas sobre $[a-r,a+b]$ con rango $\mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Si $a = b = 0$, tenemos el espacio $C[r]$. Si H es tal que $0 < H \leq \infty$, $C[r,H]$ es el subconjunto de $C[r]$ de las funciones acotadas por H.

Para cada $t \in [a,a+b]$ se define la aplicación $t:C[r,a,b] \longrightarrow C[r]$ como $t(x) = x_t$ donde $x_t(\theta) = x(t+\theta)$; $-r \leq \theta \leq 0$, a x_t se le llama la t-restricción de x y es fácil demostrar que x_t es continua en t, en el sentido de que si $t_n \longrightarrow t \Rightarrow \{x_{t_n}\} \longrightarrow x_t$ en la topología de $C[r]$.

Sea $\Omega \subset C[r,H]$ abierto y g una función tal que $g:[0,T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $0 < T \leq \infty$. Si $\dot{x}(t)$ denota la derivada por la derecha de $x(t) \in \mathbb{R}^n$, la relación



(1.1) $$\dot{x}(t) = g(t,x_t)$$

define una ecuación diferencial funcional del tipo retardado. Si $\varphi \in \Omega$ y $t_0 \in [0,T)$, se dice que (1.1) tiene solución con condición inicial φ en el tiempo $t = t_0$ si existe $A > 0$, $t_0 + A \leq T$ y existe una función $x = x(t_0,\varphi) \in C[r,t_0,a]$ tal que:

i) $x_{t_0}(t_0,\varphi) = \varphi$, $x_t \in \Omega$ para toda t tal que

$t_0 \leq t < t_0 + A$

ii) $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$ para toda t tal que $t_0 \leq t < t_0 + A$.

TEOREMA DE EXISTENCIA. Si $g(t,\psi)$ es continua en $[0,T) \times \Omega$ y si (t_0,φ) es un punto cualquiera en el dominio de g, entonces existe una solución de (1.1) con condición inicial φ en $t = t_0$.

La demostración de este teorema se omite puesto que no es el objeto principal de este trabajo [ver 2].

Mencionamos algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones y algunas de sus aplicaciones. La ecuación $\dot{x}(t) = F(t,x(t),x(t-r))$ la utilizó N. Minorsky en sistemas simples de control con retroalimentación. W.K. Ergen encontró la ecuación

$$\dot{x}(t) = -\int_{t-r}^{t} a(t-u)\,g(x(u))\,du$$

utilizada en la teoría de un reactor nuclear de circulación completa donde x representa la densidad del neutrón, [ver 4]. Otro tipo de ecuaciones son las llamadas difero-diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(t-\sigma_1),\ldots,x(t-\sigma_n)),\, t \geq 0$$

donde $0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_n$ y $\sigma_j = \sigma_j(t)$ continuas en t y $r = \mathrm{Sup}\ \sigma_j(t)$; también se consideran ecuaciones mas generales como

$$\dot{x}(t) = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(t-n)}{2^n}, \; t \geq 0$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x|[t-1,t], x|[0,t], x|(-\infty,t]), \; t \geq 0$$

donde $x|[a,b]$ es la función x restringida al intervalo $[a,b]$.

Hemos visto que para garantizar existencia de soluciones de (1.1) se exige únicamente continuidad de la función $g(t,\psi)$, sin embargo, si vemos ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach, la continuidad de la función no es suficiente para garantizar existencia de soluciones; esto lo podemos ver con un contraejemplo donde la función dada es continua y no existe solución en el espacio de Banach mencionado [ver 5].

Sea c_0 el conjunto de todas las sucesiones $x = (x_n)_{n \geq 0}$ de números reales tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$. Si $x \in c_0$, se define su norma

$$\|x\| = \operatorname{Sup}_{n \geq 0} |x_n|.$$

Con esta norma, el espacio c_0 resulta ser un espacio de Banach.

Sea $f : c_0 \to c_0$ tal que si $x = (x_n)_{n \geq 0}$, $f(x) = (y_n)_{n \geq 0}$

donde $y_n = |x_n|^{1/2} + \frac{1}{n+1}$. Es obvio que f es continua en c_0 definida de esta manera. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

(1.2) $$\dot{x} = f(x), x(0) = 0$$

demostraremos que no existe una función en c_0 tal que cumple con (1.2), e.d., que no tiene solución. Supongamos que $u(t) = (u_n(t))_{n\geq 0}$ es solución de (1.2) con $u(0) = 0$, entonces

$$\dot{u}(t) = (\dot{u}_n(t))_{n\geq 0} = (f(u_n(t)))_{n\geq 0} = (|u_n(t)|^{1/2} + \frac{1}{n+1})$$

$$\dot{u}_n(t) = |u_n(t)|^{1/2} + \frac{1}{n+1}, \quad n = 1,2,\ldots$$

$\dot{u}_n(t) > 0 \Longrightarrow u_n(t)$ es creciente y por hipótesis

$u_n(0) = 0 \Longrightarrow u_n(t) > 0$ para $t \neq 0$, por tanto,

$$\frac{u_n(t)}{u_n(t)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{u_n(t)^{1/2}}$$

$$\frac{d[2u_n(t)^{1/2}]}{dt} = 1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{u_n(t)^{1/2}}$$

$$2u_n(t)^{1/2} = t + \frac{1}{n+1}\int_0^t \frac{d\tau}{u_n(\tau)^{1/2}}$$

si $n \to \infty$, es fácil ver que $u_n(t)^{1/2}$ no tiende a cero y por tanto $(u_n(t)) \notin c_0$ y (1.2) no tiene solución en c_0.

Enunciaremos un teorema de existencia para ecuaciones ordinarias en espacios de Banach.

Sea $F: I \times H \to E$ donde $I \subset \mathbb{R}$, E espacio de Banach y $H \subset E$ abierto.

TEOREMA DE EXISTENCIA. Si F es continuamente diferenciable en $I \times H$, para cualquier $t_0 \in I$ y cualquier $x_0 \in H$, existe una bola abierta $J \subset I$ con centro en t_0 tal que en J existe una solución u de $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ tal que $u(t_0) = x_0$.

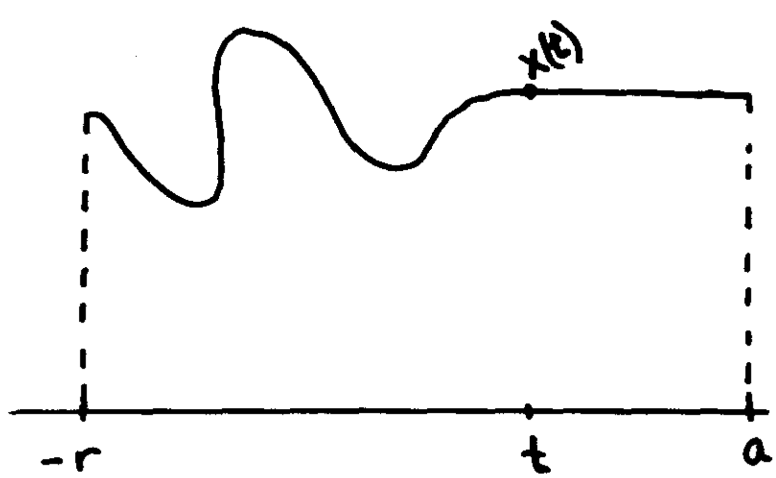
Como podemos ver, las condiciones sobre la función son mucho más fuertes que las de (1.1). La demostración de este teorema se puede ver en [5] ó [6].

II PROBLEMA DE EQUIVALENCIA ENTRE ECUACIONES FUNCIONALES DEL TIPO RETARDADO Y ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN UN ESPACIO DE BANACH

Sean a y r dos reales positivos fijos y $\mathcal{B}$ un espacio de Banach cuyos elementos son funciones definidas sobre $[-r,a]$ y rango $\mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathcal{B}$, para cada $t \in [0,a]$, x^t es una función definida sobre $[-r,a]$ tal que:

$$x^t(\theta) = \begin{cases} x(\theta)\ ; \theta \in [-r,t) \\ x(t)\ ; \theta \in [t,a] \end{cases}$$

es decir, x^t es la misma función x excepto de t en adelante donde es constante y toma el valor $x(t)$.



Sea $A \subset \mathcal{B}$ tal que si $x \in A \Longrightarrow x^t \in A$ para toda $t \in [0,a]$.
Consideremos la función $f:[0,a] \times A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in A$ tal que $x_0^t = x_0$ para toda $t \in [0,a]$. Proponemos el siguiente problema:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x^t); \; t \in [0,a] \\ x(t) = x_0(t); \; t \in [-r,0) \end{cases}$$

Decimos que (2.1) tiene solución si existe $x(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(2.1)^* \qquad \begin{cases} x(t) = x_0(0) + \int_0^t f(s,x^s)\,ds; \; t \in [0,a] \\ \\ x(t) = x_0(t); \; t \in [-r,0) \end{cases}$$

Sea $G:[0,a] \times A \longrightarrow \mathcal{B}$ y $y_0 \in A$ tal que $y_0^t = y_0$ para toda $t \in [0,a]$. Consideremos el problema siguiente:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d[y(t)]}{dt} = G(t,y(t)); \; t \in [0,a] \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

este problema es una ecuación diferencial ordinaria en $\mathcal{B}$.
Decimos que (2.2) tiene solución si existe $y(t) \in A$, $t \in [0,a]$ tal que

$$(2.2)^* \quad \begin{cases} y(t) = y_0 + \int_0^t G(s,y(s))ds; \ t \in [0,a] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde en $(2.1)^*$ y $(2.2)^*$ las integrales tienen algún sentido, digamos Riemann. Nuestro problema es ver cuándo (2.1) y (2.2) son equivalentes, e.d., cuándo las soluciones de (2.1) y (2.2) están en correspondencia uno a uno.

LA EQUIVALENCIA

Sea $f:[0,a] \times A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida en (2.1) y definimos G, cuyo dominio es $[0,a] \times A$ y rango en algun espacio de funciones, como sigue:

$$(2.3) \quad G(t,y)(\theta) = \begin{cases} 0; \ \theta \in [-r,t) \\ f(t,y^t); \ \theta \in [t,a] \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq a$$

aqui $G(t,y)(\theta) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq a$, $y \in A$, $-r \leq \theta \leq a$.

<u>Suposición</u> 1. Si $\mathcal{B}$ contiene a las funciones escalonadas continuas por la derecha, entonces aseguramos que

$G(t,y) \in \mathcal{B}$ para toda $t \in [0,a]$ y $y \in A$. De aqui en adelante, consideramos a los problemas (2.1) y (2.2) relacionados por (2.3).

<u>Definición</u>. Si $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es solución de (2.1) definimos $y(t) \in A$, $t \in [0,a]$ de la siguiente manera:

$$(2.4) \qquad y(t) = x^t; \; t \in [0,a].$$

<u>Definición</u>. Si $y(t) \in A$, $t \in [0,a]$ es solución de (2.2), definimos $x(t) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$(2.5) \qquad x(t) = \begin{cases} y(0)(t); & t \in [-r,0) \\ y(t)(t); & t \in [0,a] \end{cases}$$

<u>Suposición</u> 2. Para todas las funciones $y(t) \in A$ que son soluciones de (2.2) o provienen de (2.4), asumimos la existencia, en algún sentido, de las integrales

$$\int_0^t G(s,y(s))\,ds \in \mathcal{B} \quad \text{y} \quad \int_0^t G(s,y(s))(\theta)\,ds \in \mathbb{R}^n$$

para toda $t \in [0,a]$ y para toda $\theta \in [-r,a]$ y ademas

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)\,ds = \left(\int_0^t G(s,y(s))\,ds\right)(\theta)$$

para toda $t \in [0,a]$ y para toda $\theta \in [-r,a]$. Con estas suposiciones, demostraremos los siguientes lemas.

<u>Lema</u> 1. Sea y una solución de (2.2), entonces

$$y(t)(\theta) = y(\theta)(\theta)\,;\ \theta \in [-r,t)$$

$$y(t)(\theta) = y(t)(t)\,;\ \theta \in [t,a]$$

para toda $t \in [0,a]$.

<u>Demostración</u>. Sea $t \in [0,a]$ fijo y:

i) $\theta \in [-r,t)$; como y es solución, tenemos

$$y(t)(\theta) = y(0)(\theta) + \left(\int_0^t G(s,y(s))\,ds\right)(\theta)$$

$$= y(0)(\theta) + \int_0^t G(s,y(s))(\theta)\,ds$$

$$= y(0)(\theta) + \int_0^\theta G(s,y(s))(\theta)\,ds +$$

$$+ \int_\theta^t G(s,y(s))(\theta)\,ds$$

$$= y(0)(\theta) + \int_0^\theta G(s,y(s))(\theta)\,ds$$

$$= y(0)(\theta) + \left(\int_0^{\theta} G(s,y(s))ds\right)(\theta) = y(\theta)(\theta)$$

haciendo uso del hecho de que $\int_{\theta}^{t} G(s,y(s))(\theta)ds = 0$ para $\theta \in [-r,t)$ por (2.3).

ii) Similarmente, si $\theta \in [t,a]$ tenemos

$$y(t)(\theta) = y(0)(\theta) + \left(\int_0^t G(s,y(s))ds\right)(\theta)$$

$$= y(0)(\theta) + \int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds$$

$$= y(0)(t) + \int_0^t G(s,y(s))(t)ds$$

$$= y(0)(t) + \left(\int_0^t G(s,y(s))ds\right)(t) = y(t)(t)$$

también haciendo uso de (2.3).

<u>Lema</u> 2. Si $x(t)$ es solución de (2.1) y si $y(t)$ se define como en (2.4) ó si $y(t)$ es solución de (2.2) y $x(t)$ se define como en (2.5) entonces

$$[y(t)]^t = x^t \quad \text{para toda} \quad t \in [0,a]$$

Demostración. Si $x(t)$ es solución de (2.1) tenemos

$$x^t(\theta) = \begin{cases} x(\theta); & \theta \in [-r,t) \\ x(t); & \theta \in [t,a] \end{cases}$$

$$(x^t)^t(\theta) = \begin{cases} x^t(\theta); & \theta \in [-r,t) \\ x^t(t); & \theta \in [t,a] \end{cases}$$

basta demostrar que $(x^t)^t(\theta) = x^t(\theta)$ para $\theta \in [t,a]$, por (2.4) tenemos $x^t(t) = y(t)(t) = y(t)(\theta)$ para $\theta \in [t,a]$ y por lema 1 $y(t)(\theta) = x^t(\theta)$, $\theta \in [t,a] \Longrightarrow (x^t)^t(\theta) = x^t(\theta)$ para $\theta \in [-r,a] \Longrightarrow (x^t)^t = x^t \Longrightarrow y(t)^t = x^t$ para toda $t \in [0,a]$.

Supongamos que $y(t)$ es solución de (2.2) y $x(t)$ proviene de (2.5); aplicando lema 1 se cumple $y(t)(\theta) = y(\theta)(\theta) = x(\theta)$ para $\theta \in [0,t)$, pero $x(\theta) = x^t(\theta)$ para $\theta \in [0,t) \Longrightarrow y(t) = x^t$; si $\theta \in [t,a]$, $y(t)(\theta) = y(t)(t) = x(t) = x^t(\theta) \Longrightarrow y(t) = x^t$ para $\theta \in [t,a] \Longrightarrow y(t)^t = x^t$ para $t \in [0,a]$.

Ahora podemos pasar al resultado principal de la equivalencia.

Teorema. Si $x(t)$ es solución de (2.1), entonces $y(t)$ definida por (2.4) es solución de (2.2) y vice versa, si $y(t)$ es solución de (2.2), entonces $x(t)$ definida por (2.5) es solución de (2.1).

Demostración. Supongamos que $x(t)$ es solución de (2.1) entonces para toda $t \in [0,a]$:

i) Si $\theta \in [0,t)$ tenemos

$$y(t)(\theta) = x^t(\theta) = x(\theta) = x(0) + \int_0^\theta f(s,x^s)\,ds$$

$$= y(0)(0) + \int_0^\theta G(s,y(s))(\theta)\,ds$$

$$= y(0)(\theta) + \int_0^t G(s,y(s))(\theta)\,ds$$

$$= y(0)(\theta) + \left(\int_0^t G(s,y(s))\,ds\right)(\theta).$$

ii) Si $\theta \in [t,a]$ tenemos

$$y(t)(\theta) = x^t(\theta) = x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x^s)\,ds$$

$$= y(0)(0) + \int_0^t G(s,y(s))(\theta)\,ds$$

$$= y(0)(\theta) + \left(\int_0^t G(s,y(s))\,ds\right)(\theta)$$

de i) y ii) deducimos que

$$y(t) = y(0) + \int_0^t G(s,y(s))\,ds$$

para toda $t \in [0,a]$ y por tanto y es solución de (2.2).
Supongamos ahora que y es solución de (2.2), entonces para toda $t \in [0,a]$ tenemos:

$$x(t) = y(t)(t) = y(0)(t) + \left(\int_0^t G(s,y(s))\,ds\right)(t)$$

$$= Y(0)(0) + \int_0^t G(s,y(s))(t)\,ds$$

$$= x(0) + \int_0^t f(s,y(s)^s)\,ds$$

$$= x(0) + \int_0^t f(s,x^s)\,ds$$

por tanto x es solución de (2.1).

III UN EJEMPLO DONDE LA EQUIVALENCIA ES VALIDA

Consideremos $\mathcal{L}_1(-r,a)$ el conjunto de las funciones medibles definidas sobre $[-r,a]$ y rango $\mathbb{R}^n$ tales que son integrables en el sentido de Lebesgue. Si f y $g \in \mathcal{L}_1$, definimos la relación "$\sim$" como $f \sim g \Longleftrightarrow f(t) = g(t)$ c.d. La relación "$\sim$" es una relación de equivalencia y parte a $\mathcal{L}_1$ en clases ajenas. Sea $L_1(-r,a)$ el conjunto formado por las clases de $\mathcal{L}_1(-r,a)$.

Definamos una función selector $\varphi: L_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1$ tal que asocia a cada clase un representante en $\mathcal{L}_1$ escogido de la siguiente manera:

Si una clase contiene una función continua por la derecha, esta función es el representante, en los demas casos se escoge cualquier otra función de la clase como representante. $\varphi(L_1)$ es un espacio lineal con las operaciones siguientes:

Si $\tilde{f},\tilde{g} \in L_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi(\tilde{f}) + \varphi(\tilde{g}) = \varphi(\tilde{f}+\tilde{g})$ y $\alpha\varphi(\tilde{f}) = \varphi(\alpha\tilde{f})$. $\varphi(L_1)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\| = \int_{-r}^{a} |f(t)|\,dt.$$

Supongamos que $A \subset \varphi(L_1)$ es tal que $x \in A \Longrightarrow x$ es continua por la derecha en $[-r,0)$ y continua en $[0,a]$ y además $f(s,x^s)$ es continua por tramos para $s\in[0,a]$.

<u>Teorema</u>. Con estas hipótesis sobre A se cumple lo siguiente:

i) La función G cuyo dominio es $[0,a]\times A$ y se define por (2.3) es tal que $G(s,y(s))\in\varphi(L_1)$ para toda $s\in[0,a]$ y $y(s)\in A$.

ii) Si $x(t)$ es solución de (2.1), entonces existen las integrales

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)\,ds,\left(\int_0^t G(s,y(s))\,ds\right)(\theta)$$

para toda $t\in[0,a]$ y $\theta\in[-r,a]$ en el sentido de Riemann.

iii) Si $y(t)$ es solución de (2.2), entonces

$$y(t)(\theta) = y(\theta)(\theta);\ \theta\in[0,t)$$

$$y(t)(\theta) = y(t)(t);\ \theta\in[t,a]$$

y

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)\,ds$$

existe en el sentido de Riemann si $x(t)$ se define por (2.5) para toda $\theta\in[-r,a]$ y $t\in[0,a]$.

iv) $$\left(\int_0^t G(s,y(s))ds\right)(\theta) = \int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds$$

para toda $t \in [0,a]$ y para toda $\theta \in [-r,a]$.

Demostración. i) Se cumple por construcción de $\varphi(L_1)$.

Supongamos que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es solución de (2.1) y $y(t)$ se define por (2.4), entonces tenemos $G(s,y(s))(\theta) = f(s,x^s)$ para $\theta \in [t,a]$, por (2.3) $\Longrightarrow G(s,y(s))(\theta)$ es continua por tramos en $s \in [0,a]$ para cualquier $\theta \in [-r,a]$ fija. La aplicación $s \longmapsto G(s,y(s))$ también es continua por tramos en $s \in [0,a]$, por tanto existen las integrales

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta) \quad y \quad \int_0^t G(s,y(s))ds$$

en el sentido de Riemann para toda $t \in [0,a]$ y $\theta \in [-r,a]$.

Si $y(t)$ es solución de (2.2) y $x(t)$ se define por (2.5), entonces, por hipótesis tenemos

$$y(t) = y(0) + \int_0^t G(s,y(s))ds; \; t \in [0,a]$$

para $\theta \in [t,a]$ tenemos

$$y(t)(\theta) = y(0)(\theta) + \left(\int_0^t G(s,y(s))ds\right)(\theta)$$

como la integral existe en el sentido de Riemann, se puede aproximar por sumas y tenemos

$$= y(0)(\theta) + [\lim \Sigma_{\Delta_n} G(s_i, y(s_i))\Delta s_i](\theta)$$

donde Δ_n son particiones del intervalo $[t,a]$ tales que $|\Delta_n| \longrightarrow 0$ con $n \longrightarrow \infty$.

$$= y(0)(t) + \lim \Sigma_{\Delta_n} G(s_i, y(s_i))(\theta)\Delta s_i$$

$$= y(0)(t) + \lim \Sigma_{\Delta_n} G(s_i, y(s_i))(t)\Delta s_i$$

$$= y(0)(t) + [\lim \Sigma_{\Delta_n} G(s_i, y(s_i))\Delta s_i](t)$$

$$= y(0)(t) + [\int_0^t G(s,y(s))ds](t)$$

$$= y(t)(t).$$

Si $\theta \in [0,t]$ tenemos

$$[y(t)-y(\theta)](\theta) = [\int_\theta^t G(s,y(s))ds](\theta)$$

$$= [\lim \Sigma_{\Delta_n} G(s_i, y(s_i))\Delta s_i](\theta)$$

$$= \lim \Sigma_{\Delta_n} G(s_i,y(s_i))(\theta)\Delta s_i$$

$$= 0$$

usando (2.3), por tanto

$$y(t)(\theta) = y(\theta)(\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in [0,t)$$

si $x \in A$ definida por (2.5), entonces la relación anterior define $x^t = y(t)$ para $t \in [0,a]$ por lema 2 y $G(s,y(s))(s) = f(s,x^s)$ es continua por tramos lo que implica la existencia de la integral

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds$$

en el sentido de Riemann para toda $t \in [0,a]$ y $\theta \in [-r,a]$.

Sea $t \in [0,a]$ fijo y sea Δ_n, $n = 1,2,...$ una sucesión de particiones del intervalo $[0,t]$ tal que $|\Delta_n| \longrightarrow 0$ con $n \longrightarrow \infty$, entonces

$$\int_0^t G(s,y(s))ds = \lim \Sigma_{\Delta_n} G(s_i,y(s_i))\Delta s_i$$

esto es,

$$\int_{-r}^a \left|\left(\int_0^t G(s,y(s))ds\right)(\theta) - \left(\Sigma_{\Delta_n} G(s_i,y(s_i))\Delta s_i\right)(\theta)\right| d\theta \longrightarrow 0$$

con $n \longrightarrow \infty$, esto implica que existe una subsucesión de particiones de Δ_n, a la que llamamos Δ_n tal que

$$\left[\int_0^t G(s,y(s))ds\right](\theta) - \left[\Sigma_{\Delta_n} G(s_i,y(s_i))\Delta s_i\right](\theta) \longrightarrow 0$$

c.d. para $\theta \in [-r,a]$; por otro lado tenemos

$$\Sigma_{\Delta_n} G(s_i,y(s_i))\Delta s_i(\theta) = \Sigma_{\Delta_n} G(s_i,y(s_i))(\theta)\Delta s_i \longrightarrow$$

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds \quad \text{con} \quad n \longrightarrow \infty$$

y tenemos

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds = \int_0^t G(s,y(s))ds(\theta)$$

c.d. para toda $t \in [0,a]$ y $\theta \in [-r,a]$.

Por otra parte, de (2.3) se sigue que:

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds = \begin{cases} 0; & \theta \in [-r,0) \\ \int_0^\theta G(s,y(s))(t)ds; & \theta \in [0,t] \\ \int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds; & \theta \in [t,a] \end{cases}$$

lo que demuestra que $\int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds$ es una función continua de $\theta \in [-r,a]$, para t fija y por construcción de $\varphi(L_1)$ tenemos que

$$\int_0^t G(s,y(s))ds(\theta)$$

es continua y la igualdad

$$\int_0^t G(s,y(s))(\theta)ds = \int_0^t G(s,y(s))ds(\theta)$$

se cumple para toda $\theta \in [-r,a]$.

Un ejemplo de una ecuación diferencial funcional que cumple con III es el siguiente: Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t-1) \\ x(t) &= 0;\ t \in [-1,-\tfrac{1}{2}] \\ x(t) &= 1;\ t \in [-\tfrac{1}{2},0] \end{aligned} \tag{3.1}$$

y su solución en $[-1,2]$. $\mathcal{B}$ es el espacio $\varphi(L_1)$ como en el caso anterior definidas en $[-1,2]$. Escogemos $A \subset \varphi(L_1)$ como el conjunto de las funciones continuas por la derecha en $[-1,2]$ que son continuas por tramos en $[-1,0]$ y continuas en $[0,2]$. La solución de (3.1) está en A y si definimos

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Imaz y Z. Vorel, Ordinary differential equations in a Banach space and retarded functional differential equations, Bol. Soc. Mat. Mex. 16(1971), 32-37.

[2] J.K. Hale y C. Imaz, Existence, uniqueness, continuity and continuation of solutions for retarded differential equations, Bol. Soc. Mat. Mex. 11(1966), 29-37.

[3] F. Oliva y Z. Vorel, Functional equations and generalized ordinary differential equations, Bol. Soc. Mat. Mex. 11(1966), 40-46.

[4] J.K. Hale, Functional differential equations, Springer-Verlag, Applied Math. Sciences (1971).

[5] J. Dieudonne, Foundations of modern analysis, Academic Press (1969).

[6] H. Cartan, Cálculo diferencial, Ediciones Omega (1972).

ESTE TRABAJO SE IMPRIMIO EN LOS TALLERES DE GUADARRAMA IMPRESORES, S. A. AVENIDA CUAUHTEMOC 1201, COL. VERTIZ NARVARTE MEXICO 13, D. F., TELS. 575-28-41 y 575-41-31