U N I V E R S I D A D   D E   S O N O R A

Departamento de Matemáticas.

"CALCULO INFINITESIMAL EN EL SIGLO XX"

T E S I S

Que para obtener el título de Licenciado en Mátematicas presenta el pasante:

JORGE RUPERTO VARGAS CASTRO.

Hermosillo, Sonora, a 17 de Septiembre de 1987.

INTRODUCCION GENERAL

Al comparar la manera de demostrar los teoremas de límites de funciones ; como se presenta en el libro "Cálculo diferencial e integral" de W.A. Granville (# 3 de la Bibliografía) en el artículo 20 , páginas 23 y 24 en base al concepto de infinitésimo (artículo 19,pág. 22) y sus propiedades - (inicio artículo 20); con la manera de hacerlo en el libro "El cálculo con geometría analítica" de L.Leithold (# 7 de la bibliografía), vemos la gran ventaja en sencillez y facilidad que tiene la primera forma; y surge la pregunta natural acerca de por qué entonces en la actualidad se usan tan complicados métodos como los de la segunda forma y han quedado en desuso los métodos de la primera.

Los infinitésimos eran las herramientas fundamental de Leibniz; pero a pesar de que le funcionaban muy bien, y por tanto, cobraron prestigio, nunca pudo dar una justificación de su existencia, ya que en los números reales el único infinitésimo es el cero y por tanto puede decirse que trabaja sobre la nada.

En la presente tesis se estudia, dicho a grandes rasgos, los antecedentes históricos de los infinitésimos e infinitamente grandes, algunas de sus visisitudes hasta el concepto actual en los últimos años del siglo XX.

En el capítulo I, se estudian algunos antecedentes históricos de dichos conceptos pasando a grandes rasgos por su evolución a lo largo de los siglos hasta el presente.

En el capítulo II se construye un modelo lógicamente fundado de un campo ordenado extensión propia de los reales y por tanto no Arquimedeano en el cual sí hay, por consecuencia, elementos infinitamente grandes e infinitésimps; es un modelo que combina teoría de modelos y teoría axiomática de conjuntos , a diferencia del modelo original de A. Róbinson que es el puro campo de la teoría de modelos y por lo tanto mas abstracto aún.

En el capítulo III se reproduce el modelo de Imaz-Carrión y al final se da una fundamentación en base al modelo explicado en el capítulo II; y así se logra que no sea sólo un modelo formal, sino que a partir de un modelo lógicamente fundado se hace brotar de manera natural.

En el capítulo IV se construye, con el recurso de la existencia de números naturales infinitamente grandes, una función no medible en el sentido de Lebesgue y posteriormente se pasa a otro tipo de aplicaciones de estos conceptos a la solución de problemas de física y geometría, involucrando comentarios acerca de la visión de los conceptos de tiempo y espacio relacionándolos con la discusión histórica del capítulo I.

Finalmente, a manera de conclusiones, se dan muy pocas y mas que todo se lanza una serie de interrogantes para reflexión futura; ya que la experiencia del mismo concepto de infinitésimo e infinitamente grande nos hace ver el cuidado que debemos tener en hacer conclusiones contundentes aventuradas como sucedió en el siglo IX con respecto al concepto de infinitésimo (I.5).

CAPITULO I.- ANTECEDENTES HISTORICOS:

El concepto de magnitud infinètisimal hace muchos siglos que "roba el sueño" a los estudiosos de la matemática y ha sido uno de los factores de reflexión e impulso de la matemática misma, en especial, de la época Helénica para acá. Veamos enseguida algunos ejemplos:

Paradojas de Zenón*

Para muchos filósofos Griegos; como Platón entre otros, las paradojas de Zenón no son mas que simples falacias y manifestaciones de la ignorancia del concepto físico de movimiento relativo. A continuación presento la reconstrucción hecha por Tannery y dentro de un contexto que a opinión del también historiador F. Cajori". . . esta presentación hace que la imagen de Zenón pase de la de ser un ignorante de làs más simples nociones de movimiento relativo, a ser la imagen de un formidable lógico.

*Zenón de Elea (siglo V A.C.) discipulo de Parmenides (540 A.C.) contemporaneos de los Pitágóricos.

Según Tannery, Zenón no intentaba negar la existencia del movimiento, sino que quería probar que el moviemiento era imposible si el espacio se concebía como una unión de puntos, que tuvieran magnitud distinta a cero. Zenón se oponía así a los ataques de los pitagóricos, que se habían lanzado en contra de su maestro Parménides, y arremetía en contra de la idea pitagórica que hacía del punto "una unidad que ocupaba cierta posición en el espacio". Tannery interpreta esta definición como si los pitagóricos pensaran que un cuerpo, por ejemplo, es la unión de puntos, de la misma manera que un número es la suma (unión) de unidades.

La posición de Zenón a este respecto es la de que un punto no es una unidad, un 1, sino algo "sin largo, ancho y alto". ---

Muchos comentadores creen que Zenón presentaba sus argumentos en forma de diálogo y esta es la manera en que Tannery lo reconstruye.

Un pitagórico afirma que una magnitud finita puede considerarse como la unión de partes indivisibles.

Zenón replica: "Admitiendo, como ambos lo hacemos, que con una cantidad se puede subdividir infinitamente, por medio de la bisección, es evidente que esas partes se hacen más y más pequeñas; así si hay un último término, éste debe ser cero. Pero, entonces, la suma de tales términos indivisibles, que son cero, no puede ser otra cosa que le cero mismo; y por tanto, tal cantidad no tiene magnitud.

El pitagórico dice: ¿Por qué las partes indivisibles no han de ser diferentes al cero y tener una magnitud?

Zenón contesta: "Si las partes indivisibles tiene una magnitud, una misma magnitud y hay un número infinito de ellas, entonces, la suma de todas esas partes debe ser infinita. Por lo tanto, una cantidad finita no puede considerarse como la suma de sus partes indivisibles".

Zenón continúa y presenta la primera de las famosas paradojas de la que, al igual que las tres restantes, aquí presentamos la versión de J. Burnet que es un desarrollo de la dada por Aristóteles.

Primera paradoja ó de la dicotomía

> "No se puede recorrer un número infinito de punto en un tiempo finito. Primero ha de recorrerse la mitad de la distancia total; a su vez la mitad de esta última distancia; y, nuevamente la mitad de esta última.

Este proceso es infinito así que (si el espacio está hecho de puntos) hay un número infinito de partes, que se pueden obtener - por bisección y no pueden recorrerse en un tiempo dado.

El adversario de Zenón replica que si bien es cierto que la -- subdivisión puede hacerse una y otra vez, esto no implica que -- haya tenido que realizarse y que por lo tanto es posible que la-- distancia haya sido recorrida en un tiempo dado.

Zenón contesta ahora con la segunda de sus paradojas:

Paradoja de Aquiles y la Tortuga: Segunda paradoja

Aquiles el héroe legendario, el más rápido de los humanos, -- compite contra una tortuga a la que pretenciosamente le ha dado - una ligera ventaja; el héroe no es capaz de vencer a la tortuga.

> "Aquiles primero debe llegar al lugar donde -- arrancó la tortuga. Para entonces, la tortuga ha recorrido un pequeño trecho; Aquiles ha de- recorrer este último; pero para entonces la -- tortuga ya habrá avanzado un poco más. Aquiles siempre estará más cerca, pero nunca podrá al- canzarla."

Con esto Zenón ha presentado un argumento en el que ya no se- habla de subdivisión, y en el que el intervalo de tiempo en que -- transcurre la acción se ha subdividido de una manera muy parecida a como se hace con el "intervalo espacial" en el que ocurre la - acción.

Su adversario pitagórico señala ahora que si es posible divi dir un tiempo finito en un número infinito de partes, ¿qué, acaso no corresponde a un instante cada posición sucesiva del móvil?

En contra de esto Zenón lanza sus dos últimas paradojas:

Tercera paradoja o paradoja de la flecha

> "Una flecha lanzada al aire por un potente arco, en todo instante, está en reposo!"

"Esto es, si los "instantes" existen, mientras la flecha vuela, tiene una posición determinada en cada instante, pero esto implica que durante ese instante (recuérdese que está considerando al instante como una unidad de tiempo con cierta magnitud) la flecha se encuentra fija en tal posición, en el lugar que ocupa."

el pitagórico contesta que cuando él habló de que el tiempo era una suma de instantes, él no dijo que el instante ocurría cuando la flecha se encontraba en algún punto de su trayectoria, sino que tal instante ocurría cuando la flecha pasaba de una posición a la siguiente.

Paradoja del estadio

> "Considérense tres hileras de puntos unos debajo de otros, como en la figura 1."

Figura 1	Figura 2
A	A ....
B	B ....
C	C ....

Una de ellas, B, está inmóvil, mientras que A y C se mueven en direcciones opuestas con igual velocidad, hasta encontrarse en la posición que aparece en la figura 2. Lo recorrido por C, respecto a A, es el doble de lo recorrido respecto a B; o, en otras palabras, cualquier punto de C ha pasado el doble de puntos de A que de B. Por tanto, no puede ser que un instante corresponda al paso del móvil de un--

O sea, Zenón afirma que lo propuesto por su adversario no tiene fundamento, por que haría que todos los movimientos fueran --- iguales.

el movimiento de un punto de A al siguiente punto a la izquierda requiere del transcurso de un instante.

el movimiento de un punto C al siguiente punto a la derecha - requiere del transcurso de un instante.

Por ello A se mueve relativamente a C con el doble de la velocidad que su respecto de B. Por lo tanto, no es el paso de un punto a otro lo que corresponde a cada instante, pues esto implicaría que uno es igual a su doble.

¡Gulp!, como dice F. Cajori, esta presentación hace que la - la imagen de Zenón pase de la de ser un ignorante de las más simples nociones del movimiento relativo (que es lo que se concluiría, si la última paradoja se tomara disociada de las demás, a - ser la imagen de un formidable lógico.

hay que aclarar que esta interpretación no es compartida por la mayoría de los lógicos y que muchos de ellos las entienden-- tal y como las hicieron Platón y Aristóteles; esto es, como simples falacias.

De lo que si no hay duda es que las paradojas de Zenón suscitaron una gran conmoción entre los griegos, y que, durante mucho tiempo, el tratar de desentrañar lo que había detrás de esas -- "falacias" impulsó el desarrollo del estudio de modelos aritméticos del tiempo y del espacio que hicieran posible una descrip--- ción adecuada del movimiento. No es éste el sitio para desarrollar más este punto, baste señalar que no es sino hasta el último tercio del siglo XIX en que se dan modelos aritméticos del tiempo y del espacio (los llamados números reales) que reflejan adecuadamente la mecánica macroscópica.

En esta presentación de las paradojas de Zenón vemos entre otras cosas, las profundas discusiones de la época acerca de la presencia de los infinitésimos tanto en el concepto de espacio (¡El punto tiene dimensiones no nula?) como en el de tiempo (¿qué es un instante?)

2.-CONCEPCIONES FILOSOFICAS Y SUS IMPLICACIONES EN LA GEOMETRIA

La escuela de Abdera* desarrolla ideas en que aparecen las nociones de infinitesimales o indivisibles. Esta corriente de pensamiento mantenía que todas las cosas; aún el alma y la mente, estaban construidas a base de átomos que se movían en el vacío, estos átomos eran partículas duras e indivisibles, todas ellas cualitativamente iguales pero con un número indefinido de formas y tamaños, todos ellos muy pequeños como para ser percibidos por los sentidos.

Sabemos a través de la mención que de ello hace arquímides en el método, que Demócrito fué el primer matemático griego que determinó el volúmen del cono y la pirámide. La manera como llegó a estos resultados la desconocemos; pero probablemente, lo hizo mediante la generalización a cualquier pirámide del resultado acerca de la pirámide cuadrada que seguramente aprendió de los egipcios en alguno de los viajes que realizó por el Oriente. El resultado para el cono quizá lo pudo obtener haciendo crecer el número de lados de la base de una pirámide poligonal inscrita en el cono. Por lo menos este tipo de ideas es del mismo corte que los que aparecen en la aporía que le es atri--

*Abdera.-ciudad de Francia situada junto a la desembocadura del río Nestos (Mesta), en el Egeo. Fundada a mediados del siglo VII A.C. A pesar de ser Patria de Demócrito, Anaxarco, Protágoras y Hecateo, sus habitantes tenían reputación de simples.

buida acerca de si son iguales o no las diversas secciones circulares paralelas e infinitesimales que él consideraba que formaban el cono ; si fueran iguales, el cono sería igual al cilindro que lo circunscribe; si fueran desiguales, el cono estaría formado por escalones.

Dentro de esta línea, también puede citarse el método mediante el cual Antifón cuadra el círculo; consistente en "pasar al límite" al considerar que el área del círculo era el límite de las áreas de los polígonos inscritos (cuando el número de lados se hacía "indefinidamente"grande); lo cual equivale a decir que la diferencia de áreas entre el círculo y tales polígonos se hace infinitesimal.

Eudoxio, para evitar éste "pasar al límite" usa el método exhaustivo.

3.- CAVALIERI.

el uso sistemático de técnicos infinitesimales para cálculo de áreas y volúmenes se popularizó con los trabajos "Geometría de los indivisibles" (1635) y "6 ejercicios geométricos" (1647) de B. Cavalieri (1598-1647).

El método de Cavalieri consiste en establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos indivisibles de dos figuras geomé tricas; si correspondientes indivisibles tienen la misma razón constante, Cavalieri concluye que las áreas o volúmenes de dos figuras dadas tienen la misma razón.

En general, conocemos el área o volumen de una de las dos figuras por medio de la otra. Además, Cavalieri también inventó un método para calcular el volumen de un sólido en términos de sus secciones transversales, este método está sabado basado →

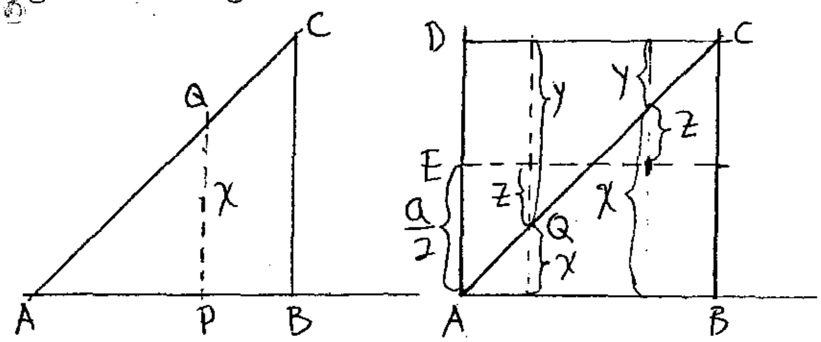
en un procedimiento formal para calcular lo que ahora podemos referirnos como "sumas de potencias de líneas". Este procedimiento condujo a Cavalieri a un resultado equivalente a la integral

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Veamos dos ejemplos:

Calcular el área bajo y = x de x = 0 a x = a

Sea el $\triangle$ A B C (rectángulo Isósceles) según la siguiente figura:



Bosquejando el método de Cavalieri para calcular $\sum_A^B x$ comenzamos con un cuadrado A B C D de lado a dividido en dos triángulos por la diagonal A C

Si X e Y denotan las longitudes de las secciones típicas PQ y QR de estos triángulos congruentes, entonces X + Y = a así - que:

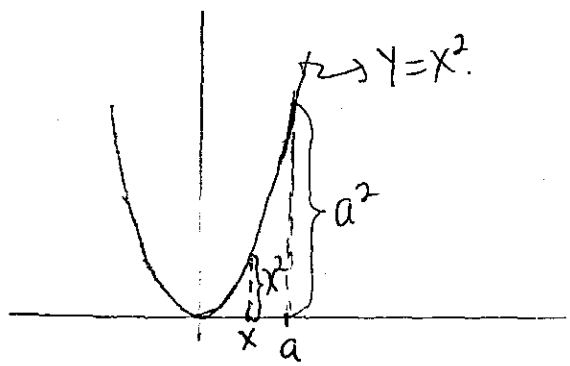
$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x+y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y = 2\sum_A^B x$$

porque $\sum_{A}^{B} x = \sum_{A}^{B} y$ por simetría. Entonces:

$$\sum_{A}^{B} x = \frac{1}{2} \sum_{A}^{B} a = \frac{1}{2} a^2$$

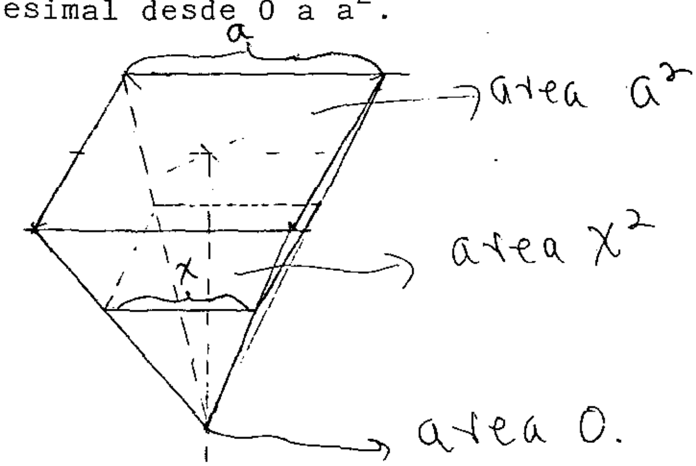
Porque $\sum_{A}^{B} a$ representa el área del cuadrado; por ser una suma infinita de líneas de longitud a, grosor infinitesimal, hasta compeltar el ancho a.

Inspirados en su idea de comparar figuras, para calcular el-área bajo la curva $Y = X^2$ de $X = 0$ a $X = a$



$$A = \sum_{0}^{a} x^2$$

La cual equivale al volumen de la pirámide de base a^2 y altura a, ya que $\sum X^2$ es una suma contínua de áreas cuadradas de grosor-infinitesimal desde 0 a a^2.



Y así:

$A = \sum_{0}^{a} X^2 = \frac{1}{3} \quad (a^2)(a) = \frac{1}{3}\, a^3$ que coincide con el valor de lo que actualmente conocemos como $\int_0^a X^2 dx$.

Procediendo en forma inductiva, Cavalieri utiliza el resultado de $\sum x^2$ para obtener $\sum x^3$ y continúa paso a paso hasta n = 9 para luego inferir la fórmula $\sum_{A}^{B} X^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ que anteriormente había sido obtenida por Arquímides por el método de exhausión de Eudoxio y llevando a límite.

Durante las dos décadas siguientes a la publicación del primer libro de Cavalieri, los matemáticos franceses Fermat, Pascal y Roberval dieron pruebas más ó menos rigurosas de la fórmula general de Cavalieri.

$$\int_0^a X^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

4.- LEIBNIZ

Godofredo Leibniz (1646-1716) matemático Alemán que alrededor del año 1670 simultaneamente con Sir Isaac Newton (1642-1727) hechan las bases del cálculo diferencial e integral (entonces llamado cálculo infinitesimal) y algebrizan las operaciones de diferenciación e integración.

Es tal vez Leibniz quien mas sistemáticamente usa los infinitésimos y los elementos infinitamente grandes, al estilo de los ejemplos mostrados en la introducción.

A Leibniz se le objetaba el no dar una justificación lógica de la existencia de los números infinitésimos y los infinitamente grandes; ya que en el conjunto de números usuales, el cero es el único infinitésimo y no existen elementos infinitamente grandes; y por lo tanto, si Leibniz trabajaba en base a infinitésimos, podría decirse que trabajaba sobre la nada; la única justificación que Leibniz podía dar era el hecho de que su método funcionaba y conducía a resultados correctos.

Newton en cierto modo trabajó con infinitésimos, ya que en sus cálculos físicos, cuando se presentaba una potencia de un término pequeño, por ser mucho más pequeño, la despreciaba en sus cálculos y ya no las utilizaba; en la deducción de la fórmula del período del péndulo, para ángulos pequeños usa indistintivamente X y Sen X (X en radianes).

Fué Leibniz quien introdujo las notaciones $\frac{dy}{dx}$ y $\int f(x)\,dx$ que hoy utilizamos; en el caso de la derivada por ejemplo, en el libro de "Granville" se presenta la famosa regla de los cuatro pasos, cuyo paso final indica $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ que para nosotros $\frac{dy}{dx}$ no es un cociente, sino sólo un símbolo, mientras que para Leibniz $\frac{dy}{dx}$ es un cociente de diferenciales (infinitesimales) -

en el cual al pasar ΔX (diferencial de x) a dx (diferencia infinitesimal), automáticamente, por la continuidad implícitamente aceptada, ΔY pasa a dy.

En el período que se extiende desde 1715 hasta fines de la Revolución Francesa no se registra ningún momento de gran esplendor creador. Se trata de un momento de transición que explota, por lo demás de modo muy inteligente, las conquistas del siglo XVII, sobre todo en los dominios del cálculo infinitesimal. Estas conquistas se abren indudablemente a importantes perspectivas nuevas pero sin hacer caso de las direcciones decisivas que les darán toda su significación en el siglo siguiente. Puede decirse que fué la época del alemán Euler (1707-1781) quien invadió prácticamente todos los dominios de la matemática y llega a su culmen a mediados del siglo.

5.- SIGLO XIX.

"La Sepultura" de los Infinitésimos:

Conocida es la característica de la matemática del siglo XIX, cuyo arranque empieza alrededor de la salida de la revolución francesa; se impulsa el desarrollo de la axiomatización, generalización y el concepto de estructura abstracta. Las matemáticas, bastante disgregadas hasta entonces, se empiezan a reorganizar de acuerdo con perspectivas más fundamentales que han de llevar, si no a una unificación completa, si, al menos, a poner claramente de relieve la verdadera naturaleza de sus diferentes dominios y de sus relaciones.

Debido al rigor característico del siglo, el esfuerzo por aritmetizar el cálculo y la falta de fundamento lógico que Leibniz daba al uso de infinitésimos e infinitamente grandes, fué siendo gradualmente sustituido el uso de infinitésimos por el criterio ε, δ.

En el prólogo del libro "Teoría Axiomática de Conjuntos" de Jesús Mosterín se comenta que en el siglo XIX se hizo una profunda depuración de las matemáticas, eliminando "conceptos fantasmagóricos" como los infinitésimos.

R.I.P. infinitésimos.

6.- SIGLO XX.

"La Resurrección de los Infinitésimos".

Así como al sepultarse a una persona muerta a causa de males cardiacos queda al incertidumbre si estaba realmente muerta, ya que en ocasiones al exhumarlos se han encontrado signos de que estaba viva, a algunos matemáticos del siglo XX los inquietaba el hecho de que conceptos, que tan sencilla y eficazmente hacían surgir los conceptos del cálculo, estuvieran sepultados.

El matemático norteamericano Abraham Robinson al hacer estudios sobre teoría de modelos, empieza, a partir de la década de los 50, a construir un campo con propiedades casi en todo iguales a las del campo ordenado de los reales, excepto en la arquimedanidad, y que por tanto en él si hay infinitésimos lógicamente fundados dando origen al llamado "análisis no estándar" y lograr, en cierto modo, la"resurrección" a una "nueva vida" de los infinitésimos que habían sido sepultados en el siglo XIX.

La construcciónde uno de tales modelos,su uso práctico y algunas de sus aplicaciones es el objetivo de los siguientes capítulos.

CAPITULO II

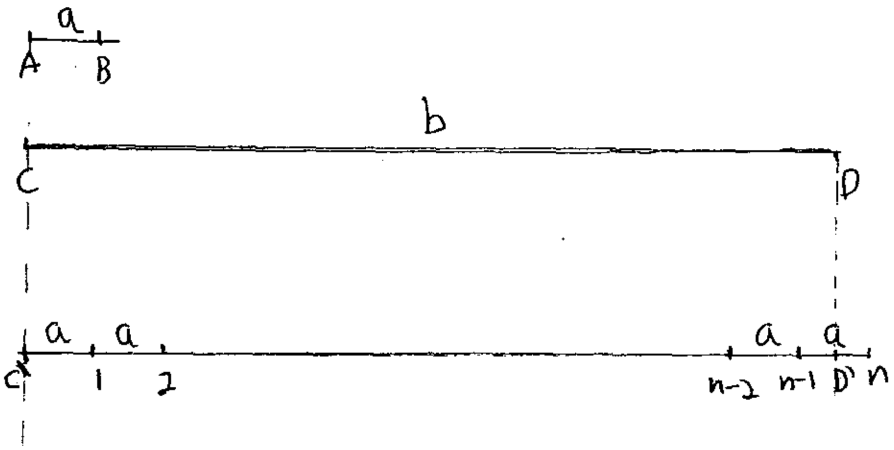
Construcción de un Modelo de Análisi no Estandar.

Desde que se inició la discusión de la obra de Euclides, "Los Elementos", ya desde la proposición 1, se encontró que --

daba por hecho la continuidad de líneas (rectas y cincunferen -- cias), sin que hubiera algún axioma o postulado de donde pudiera deducirse, seguramente lo daba por hecho en base a la intuición; por lo tanto, en el proceso de análisis, depuración y complementación de la obra de Euclides que culminó el siglo XIX con la -- Geometría de Hilbert; fué necesario añadir entre otros, el axioma de Dedekind y el axioma de Arquímides que juntos equivalen al axioma de continuidad.

El axioma de Arquímides aplicado a segmentos de recta significa lo siguiente:

Dados los segmentos $\overline{AB}$ Y $\overline{CD}$ con $l(\overline{AB})=a$ y $l(\overline{CD})=b$ de tal- manera que $a<b$; sucede que al superponer consecutivamente segmentos de longitud a sobre $\overline{CD}$, llega el momento en que la longitud- del segmento obtenido por la unión de los segmentos de longitud- a en la forma secuencial antes mencionada, es mayor que b; o sea que, $na>B$ para algún natural n; gráficamente:



Como los números reales están en correspondencia biunívoca-- con los puntos de una línea recta, al enunciarse este principio- a los números reales, queda así :

PRINCIPIO DE ARQUIMIDES:

"para cualesquiera dos números reales positivos a,b; tales que $a<b$, existe un número natural n tal que $na>b$.

El sistema de los números reales, por ser un campo ordenado- en el cual se cumple el principio de Arquímides, se llama "campo ordenado Arquimedeano" ó "campo ordenado arquimedeanamente"

Por otro lado, hay un importante teorema algebraico que afirma:

TEOREMA 1.1

"Los reales son el máximo campo ordenado arquimedeano, salvo isomorfismo"

Mientras un campo ordenado sea arquimedeano, no puede contener infinitésimos, ya que si por ejemplo, $|a|<\S$: por pequeño que sea $\S$, para algún $n\in|N$, sucede que $n|a|>\S$ y por tanto $|a|>\frac{\S}{n}$ para algún natural n, y por tanto, no puede haber infinitésimos.

Por tanto, según el teorema antes mencionado, para que un -- campo ordenado T pueda tener infinitésimos, es necesario que T - sea, en cierto modo una extensión propia de R; o sea, debemos -- poder "sumergir" R en una superestructura T.

En la siguiente sección, iniciamos la construcción de una -- superestructura *R de R; que conserva, en cierto sentido, las -- "mismas" propiedades de campo ordenado completo que posee R, en el cual hay infinitémismo e infinitamente grandes, dentro del -- contexto de la teoría axiomática de conjuntos con uso de lenguajesde primer orden y de orden superior, ya que el trabajo original de A. Robinson se hizo dentro del contexto de la teoría de - modelos.

2.- DEFINICION DE LA ESTRUCTURA $\hat{R}$ Y ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES.

Las primeras versiones del análisis no estandar se basan en la formulación de las propiedades de R que pueden formularse en un lenguaje de primer orden, esto significa, dicho brevemente ,-

que el uso de cuantificadores en el lenguaje formal se permite - sólo sobre variables con valores en los reales. Sin necesidad de ir muy lejos en nuestro análisis, descubrimos la necesidad de un lenguaje más rico, en el cual pueden formularse expresiones ta - les como "para todos los conjuntos no vacíos de números natura-- les . . . " ó "Existe una función continua . . . ". En este -- sentido, tambiénes bueno observar que aún algunos de los axiomas del sistema de los números reales pertenecen a un lenguaje supe- rior; por ejemplo, el axioma de completes de Dedekind involucra- cuantificación con respecto a pares ordenados con números reales (cortaduras de Dederkind).

Por eso usaremos el marco de la teoría axiomática de conjuntos en términos de la cual puede desarrollarse la teoría de los núme ros reales. El lenguaje "formal" será un lenguaje de orden infe- rior cuyas constantes serán conjuntos y números.

Denotemos po R, como es usual, al conjunto de los números -- reales; definimos inductivamente los conjuntos:

$Ro = R$ y $R_{n+1} = P(\bigcup_{k=0}^{n} R_k)$; con $n = 0,1,2, \ldots$ donde

$P(x)$ = conjunto potencia de x; y así :

$$\hat{R} = \bigcup_{n \geq 0} Rn$$

Los elementos de $\hat{R}$ se llaman las entidades de la superes-- tructura $\hat{R}$. Los elementos de $Ro = R$ se mencionan algunas veces como los individuales (o individuos) de $\hat{R}$.

Asumiremos que un par ordenado ~~de~~ 2ro (a,b) se define~~n~~ en el senti do de Kuratowski por $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ y las eneadas $(a,a_2, \ldots, an)$ se definen inductivamente por $(a) = a$, $(a_1,a_2, \ldots, an) = ((a_1, \ldots, an-1),an)$.

Se sigue inmediatamente con las ~~enedeadas~~ eneadas y conjuntos de ~~ene-deadas~~ eneadas son entidades de $\hat{R}$.

Las operaciones algebraicas de R , pueden definirse en términos de relaciones definidas por ternas ordenadas como sigue:

$ab = c$ si y sólo si $(a,b,c) \in P \in \hat{\mathbb{R}}$ y
$a + b = c$ si y sólo si $(a,b,c) \in S \in \hat{\mathbb{R}}$

y la relación de orden es una relación binaria. De esto se sigue que los axiomas y propiedades de R pueden expresarse en términos de ciertas entidades de $\hat{R}$.

Las entidades de $Rn - Rn\text{-}1$ $(N \geq 1)$ se llaman de rango n en $\hat{R}$.- A los individuales se les asigna el rango 0; y por tanto, al conjunto vacío le asignamos rango 1, ya que $\phi \notin \mathbb{R}_0$ y como $\phi \subset \mathbb{R}_0$, $\phi \in \mathbb{R}_1$

y por tanto $\phi \in \mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_0$.

Si $\phi \neq a \in \hat{\mathbb{R}}$; entonces el rango de a es el número natural más pequeño n tal que $a \in \mathbb{R}n$. También es fácil ver que si a_1, a_2 . . . , $an \in \hat{\mathbb{R}}$, el rango de $(a_1, \ldots, an)$ = max (rango de a_1, rango de a_2, . . . , rango de an) + $(n-1)$

Algunas propiedades conjuntistas menores de $\hat{R}$ se resumen, para referencias posteriores, en el siguiente lema:

Lema 2:1

i) $R_p \subset R_n$ para todo $n \geq p \geq 1$.

ii) $\bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$ para todo $n \geq 1$

iii) $R_k \in \mathbb{R}n+1$ para todo $0 \leq k \leq n$ y para todo $n \geq 0$.

iv) Si $X \in Y \in R_n$ $(n \geq 1)$, entonces $X \in R_0 \cup Rn\text{-}1$.

v) Si $(x_1, \ldots, Xn) \in y \in Rp$ $(p \geq 1)$, entonces $x_1, \ldots, Xn \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{p-1}$. En particular, si una entidad $\psi \in \hat{\mathbb{R}}$ es una relación binaria, entonces su dominio, $\mathrm{dom}\,\psi = \{x \mid (\exists y)\ (x,y) \in \psi\} \in \hat{\mathbb{R}}$, y su rango , $\mathrm{ran}\,\psi = \{y \mid (\exists x)\ (x,y) \in \psi\} \in \hat{\mathbb{R}}$.

DEMOSTRACION:

i) Si $X \in \mathbb{R}p$, entonces $X \subset \bigcup_{k=0}^{p-1} \mathbb{R}_k$, y así $X \subset \bigcup_{k=0}^{q} \mathbb{R}_k$ para todo $q \geq p-1$; por lo tanto, $X \in P(\bigcup_{k=0}^{q} \mathbb{R}_k) = \mathbb{R}_{q+1}$ para todo $q + 1 \geq p$.

ii) Para $n \geq 1$, $Rn \subset Rn + 1$, y ya que Ro es disconjunto de todo Rn $(n \geq 1)$ se sigue que para todo $n \geq 1$ tenemos $\bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$.

iii) Ya que por ii) tenemos que $\mathbb{R}_k \subset \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$ $(0 \leq k \leq n)$ $k \leq (n+1)$ obtenemos que $\mathbb{R}_k \in P(\mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n) = \mathbb{R}_{n+1}$

iv) Si $y \in \mathbb{R}n$, $(n \geq 1)$, entonces $y \subset \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}\, n-1$, y como $X \in y$, entonces $X \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{n-1}$

v) Si $(x_1, \ldots, Xn) \in Y \in \mathbb{R}_p$ $(p \geq 1)$, entonces $(X_1, \ldots, Xn) \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{p-1}$ Por tanto, $\{x_1\}\{x_1, (x_2, \ldots Xn)\}\} \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{p-1} = \mathbb{R}_0 \cup P(\mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{p-2})$ y esto implica que $X_1 \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{p-2} \subset \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{p-1}$, y similarmente para las entidades $x_2, \ldots, xn$.

En nuestro desarrollo haremos uso frecuente del lenguaje lógico, para lo cual hacemos las siguientes especificacionespara un lenguaje lógico L.

i) Conectivos: $\wedge$ para "Y", V para "O" inclusiva, $\underline{V}$ para"O" exclusiva, $\rightarrow$ para condicional" si . . . entonces ", $\Rightarrow$ para implicación "... implica ...", $\leftrightarrow$ para la bicondicional "si y-sólo si", $\Leftrightarrow$ para la biimplicación, $\sim$ para negación "no" o -"no es cierto que . . ."

ii) Las variables: Una sucesión infinita contable será usualmente denotada por X,Y, . . . con o sin subíndices .
minúsculas

iii) Los cuantificadores: $(\exists .)$-existencial. y $(\forall .)$-universal.

iv) <u>Paréntesis</u>: ( ), [ ], { }, usadas para agrupar fórmulas como en matemáticas.

v) <u>El predicado básico</u> : $\in$ se lee ". . . es miembro de . . ." " . . . pertenece a . . ."

vi) <u>Constantes extralógicas</u> : (O simplemente constantes).

Este es un conjunto de símbolos para el cual es suficiente ser puesto en correspondencia uno-a-uno con las entidades de la estructura que está bajo consideración. Este conjunto de constantes es generalmente infinito pero fijo. Además, las constantes se denotan usualmente por letras Romanas con o sin subíndices, sobre todo de las primeras del alfabeto, y otros símbolos tales como los numerales 0,1,2,...

Aquí supondremos que el conjunto de constantes de L es puesto en correspondencia uno-a-uno con todas las entidades de la estructura $\hat{R}$ e identificaremos de ahora en adelante las constantes de L con las entidades de $\hat{R}$ y así consideraremos a $\hat{R}$ como parte de L.- Si tal identificación ha sido establecida, entonces nos referimos a $\hat{R}$ como una L-estructura.

La interpretación del predicado básico $\in$ de L en $\hat{R}$ será la relación de pertenencia de la teoría axiomática de conjuntos.

De las fórmulas atómicas $\alpha \in \beta$, donde los símbolos α y β pueden denotar constantes y variables , las fórmulas bien formadas (fbf) se obtienen en etapas sucesivas por la aplicación de conectivos y cuatificadores. Al mismo tiempo se introducen los paréntesis de tal manera que la formación de la fórmula queda determinada sin ambigüedad. Además, agregaremos a la terminología que en las fbf $[(\forall x) V]$ y $[(\exists x) V]$, V se llama el "campo" del cuantificador y en todas las fbf que pueden formarse de estas por las posteriores aplicaciones repetidas de conectivos y cuantificadores.

Unavariable X en una fbf V se llama <u>libre</u> si X no está en - $(\exists x)$ ó $(\forall x)$ o en el <u>campo</u> de un cuatificador en V. Una fbf- se llama <u>sentencia</u> si todo variable está en el <u>campo</u> de un cuantificador, en otro caso, se llama <u>predicado</u>. Una fbf V en L se dice que está en <u>forma normal precedente</u> (fnp), si en la formación de V de fórmulas atómicas los cuatificadores se aplican después de los conectivos, esto es, si los conectivos están en el- campo de todos los cuantificadores . En simbolos, V = $(q\ x\ n_{\xi})$ . . . (qx_1) W , donde (q.) denota ya sea $(\exists\cdot)$ó$(\forall\cdot)$ y W es una fbf sin cuantificadores.

Uno de los resultados básicos del cálculo de predicado inferior establece que toda fbf es equivalente a una fbf que está en fnp.

Para nuestro propósito, sólo consideraremos los fbf de L que tienen la propiedad que todos los cuantificadores son de la forma "$(\forall x)[[X\in A]\Rightarrow .\ .\ ]$" y "$(\exists x)[[X\in A]\wedge \cdots]$" donde A es - una entidad de $\hat{R}$ y los llamaremos <u>fbf admisibles</u>. Por lo tanto- una fbf es admisible siempre que el dominio de cualquier cuantificador que ocurre en ellaes una entidad específica de $\hat{R}$. El -- conjunto de fbf admisible de L será denotado por K = K(L) y el subconjunto de K de todas las sentencias admisibles que se cumplen ~~con~~ en $\hat{R}$ será denotado por $K_0 = K_0(L)$.

Observemos que todas las afirmaciones en análisis que tratan con números, conjuntos de números, relaciones entre números, relaciones entre conjuntos y números y otras que cumplen en R, pueden expresarse como sentencias admisibles de L que están en K_0. por ejemplo, la sentencia de K_0.

$(\forall a)(\forall b)(\forall c)\,[a,b,c\in \mathbb{R}]\Rightarrow[p(a,b,c)\Rightarrow P(b,a,c)]$ expresa que- el producto de reales es conmutativo.

Cualquier *L-estructura $*(\hat{R})$ en la cual la L-estructura en - la cual L-estructura $\hat{R}$ puede "sumergirse" propiamente y para la cual todas las sentencias admisibles de $\hat{R}$ que se cumplen en R,-- con adecuada interpretación de los símbolos en $\hat{R}$ también se cumplen en $*(\hat{R})$ se llamará un modelo no estandar de orden superior- DE $\hat{R}$. En ese caso, el conjunto *R de individuales de $*(\hat{R})$ es -- un campo totalmente ordenado del cual R es un subcampo propio.-- Pero $*(\hat{R})$ no es la superestructura determinada por *R. En efecto, si A=P(R), entonces bajo la inyección de $\hat{R}$ en $*(\hat{R})$ esta constante no denotará el conjunto de todos los subconjuntos de *R como- podía esperarse al principio sino sólo un subsistema de P(*R).

3.- MODELOS DE $\hat{R}$ QUE SON ULTRAPOTENCIAS.

Empezaremos por recordar algunas definiciones y resultados - elementales de la teoría de filtros.

Si I es un conjunto no vacío, por un filtro $\mathcal{F}$ sobre I entendemos:

1.- $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset P(I)$
2.- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
3.- $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones finitas.
4.- $(\forall F)(\forall G)[[(F \subset G) \wedge (F \in \mathcal{F})] \Rightarrow G \in \mathcal{F}]$

En particular, $\mathcal{F} \neq \emptyset \Longrightarrow I \in \mathcal{F}$

Un filtro $\mathcal{F}_1$ se llama mas fino que un filtro $\mathcal{F}_2$ $(\mathcal{F}_2 \leq \mathcal{F}_1)$ siempre que $F \in \mathcal{F}_2$ implica $F \in \mathcal{F}_1$.

Esta relación ordena el conjunto dde todos los filtros sobre I y el filtro $\{I\}$ es el elemento más pequeño.

Un filtro $\mathcal{F}$ se llama un ultrafiltro siempre que no está propiamente contenido en cualquier otro filtro, o sea, los ultrafiltros son los elementos máximos del conjuntos ordenado de filtros.

En relación a ultrafiltros, tenemos la siguiente importante caracterización:

"Un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si para todo $F \subset I$, $F \in \mathcal{F}$ ó $I - F \in \mathcal{F}$".

La anterior afirmación es fácil ver que es equivalente a:

"Un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si:

Si $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$ ($F_i \subset I$, $i = 1,2, \ldots, n$), entonces $F_i \in \mathcal{F}$ para al menos un índice i, y así, es en sí misma una caracterización del concepto de un ultrafiltro.

Un filtro se llama σ-incompleto, siempre que existe una secuencia $F_n \in \mathcal{F}$ ($n=1,2,\ldots$) tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \notin \mathcal{F}$, y un filtro $\mathcal{F}$ se llama σ-completo siempre que no es σ-incompleto. - Un filtro se llama libre siempre que $\bigcap(F : F \in \mathcal{F}) = \emptyset$. No se conoce la existencia de ultrafiltros σ-completos libres.

Este problema se conoce como el problema de la medida de Ulam. Es fácil ver que un ultrafiltro σ-incompleto es libre; esto se sigue del siguiente resultado.

"Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es σ-incompleto si y sólo si existe una partición contable $\{I_n / n = 1,2,\ldots\}$ del conjunto I sobre el cual se define $\mathcal{U}$ de tal manera que $I_n \notin \mathcal{U}$ para toda $n=1,2,\ldots$".

De este resultado junto con el lema de Zorn se sigue ahora que sobre todo conjunto infinito, existe una gran cantidad de ultrafiltros σ-incompletos.

Ahora nos dedicaremos a describir una estructura que es una ultrapotencia de $\hat{R}$.

Sea I un conjunto infinito, sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto de subconjuntos de I y sea $\{I_n/n = 1,2,\ldots\}$ una partición contable de I que satisface $I_n \notin \mathcal{U}$ para toda n=1,2,... que se mantendrá fija.

Por $\hat{R}^I$ denotamos como es usual el conjunto de todos los mapeos de I en $\hat{R}$. Existe una inyección natural $a \longrightarrow {}^*a$ de $\hat{R}$ en $\hat{R}^I$ definida por $^*a(i) = a$ para toda $i \in I$, eso es, $\hat{R}$ se identifica en $\hat{R}^I$ por los mapeos constantes. Los predicados básicos no definidos "$=$" y "$\in$" de $\hat{R}$ pueden extenderse a $\hat{R}^I$ por medio de las siguientes definiciones $\mathcal{U}$-dependientes.

<u>Definición 3.1</u> Si $a,b \in \hat{R}^I$, entonces $a =_{\mathcal{U}} b$ si y sólo si $\{i / a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$ y $a \in_{\mathcal{U}} b$ sí y sólo si $\{i/a(i) \in b(i)\} \in \mathcal{U}$.

Como consecuencia inmediata de que $I \in \mathcal{U}$, tenemos el hecho de que si $a,b \in \hat{R}$, entonces $a=b$ si y sólo si $a =_{\mathcal{U}} {}^*b$, y $a \in b$ si y sólo si $^*a \in_{\mathcal{U}} {}^*b$, de ello se sigue que las relaciones "$=_{\mathcal{U}}$" y "$\in_{\mathcal{U}}$" son $\mathcal{U}$-extensiones de "$=$" y "$\in$" de $\hat{R}$. En aras de la simplicidad mantendremos de ahora en adelante la notación original "$=$" para "$=_{\mathcal{U}}$" y "$\in$" para "$\in_{\mathcal{U}}$".

Con el fin de justificar la definición, vamos a demostrar que para todo $a,b \in \hat{R}^I$ sucede que $a=b$ ó no $(a=b)$ $(a \neq b)$, y también se cumple que $a \in b$ ó no $(a \in b)$.

Ya que la demostración para ambos casos es la misma, únicamente lo verificaremos para "$=$".

Si $a,b \in \hat{R}^I$, entonces definimos:
$U_1 = \{i/a(i) = b(i)\}$ y $U_2 = \{i/a(i) \neq b(i)\}$.

De $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = I \in \mathcal{U}$ se sigue de la propiedad básica de un ultrafiltro que $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_2 \notin \mathcal{U}$ ó $\mathcal{U}_1 \notin \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{U}$, eso es, por definición 3.1, se cumple que $a=b$ ó $a \neq b$.

Teniendo justificada la definición, podemos justificar la sugerencia de que las relaciones "=", "$\in$" en $\hat{R}^I$ se comportan como la igualdad y la pertenencia conjuntista respectivamente.

Ya que los individuales de $\hat{R}$ no tienen elementos pero diferentes de ϕ, eso es, la teoría de conjuntos en $\hat{R}$ se basa en un conjunto de los llamados <u>urelementos</u>, la igualdadde conjuntos en términos de $\in$ se leería "a=b" sí y sólo si $a \in c$ y $b \in c$ para todo $c \in \hat{R}^I$. Pero esto puede ahora verificarse inmediatamente observando que si $a=b$ y $a \in c$, entonces $\mathcal{U}_1 = \{i / a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_2 = \{i / a(i) \in c(i)\} \in \mathcal{U}$ implica por las propiedades de filtro que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{U}$ y así $i \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ implica que $b(i) \in c(i)$, eso es, $b \in c$. Recírpocamente, tenemos que $a, b \in \hat{R}^I$, entonces $a \in \{X \mid X = a \;\; X \in \hat{R}^I\} = \{a\}$, implica que $b \in \{a\}$, eso es $b=a$. Que la relción de igualdad, como se definió en 3.1, es una relación de equivalencia es inmediatamente claro. Que satisface la regla de substitución en $\in$, o sea: $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(\forall d)[[a \in b] \wedge [a = c] \wedge [b = d] \Rightarrow [c \in d]]$ puede verificarse en la misma manera por el uso de las propiedades de $\mathcal{U}$.

Y así puede verse que cada una de las propiedades de $\hat{R}$ se cumplen en $\hat{R}^I$.

Supondremos que los elementos de $\hat{R}^I$ están identificados de manera uno-a-uno con las constantes de un lenguaje formal *L.

Además, suponemos que *L tiene dos predicados básicos "=" (igualdad) y "$\in$" (pertenencia) los cuales se identifican con las relaciones correspondientes de $\hat{R}^I$. Por lo tanto, obtenemos una *L-estructura $\hat{R}^I$ cuyo conjunto de sentencias verdaderas depende de $\mathcal{U}$.

Se distinguirá una cierta subestructura de nuestra *L-estructura de la cual mostraremos que satisface, en cierto sentido, las sentencias de K_0.

En el siguiente lema, enlistaremos para referencia posterior, algunas de las propiedades básicas de la inyección $a \to {}^*a$ de $\hat{R}$ en $\hat{R}^I$.

LEMA 3.2

i) $^*\emptyset = \emptyset$

ii) Si $a, b \in \hat{R}$, entonces $a \subset b$ implica que $^*a \subset {}^*b$

iii) Si $a, b \in \hat{R}$, entonces $a \in b$ sí y sólo si $^*a \in {}^*b$

iv) Para todo $a \in \hat{R}$, tenemos $^*\{a\} = \{^*a\}$

v) Si $a_1, \ldots, a_n \in \hat{R}$, entonces $^*(\bigcup_{i=1}^{n} a_i) = \bigcup_{i=1}^{n} {}^*a_i$,

$^*(\bigcap_{i=1}^{n} a_i) = \bigcap_{i=1}^{n} {}^*a_i$, $^*\{a_1, \ldots, a_n\} = \{^*a_1, \ldots, {}^*a_n\}$,

$^*(a_1, \ldots, a_n) = (^*a_1, \ldots, {}^*a_n)$, y $^*((a_1 \times \ldots \times a_n) = {}^*a_1 \times \ldots \times {}^*a_n$.

vi) Para todo $a, b \in \hat{R}$, tenemos $^*(a-b) = {}^*a - {}^*b$

vii) Si $b \in \hat{R}$ es una relación binaria, entonces $^*(\text{dom } b) = \text{dom } b^*$, $^*(\text{ran} b) = \text{ran}{}^*b$, y para todo $a \in \hat{R}$ tenemos $^*(b(a)) = \{Y \mid (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b)\} = {}^*b(^*a) = \{Y \mid (\exists x)(x \in {}^*a \wedge (x,y) \in {}^*b)\}$.

DEMOSTRACION:

Sólo probaremos vi), ya que las pruebas de los demás son similares. vi) Si $C \in {}^*(a-b)$, entonces $U_1 = \{i \mid c(i) \in a-b\} \in \mathcal{U}$ implica, usando $U_1 \subset U_2 = \{i \mid c(i) \in a\} \in \mathcal{U}$ que $C \in {}^*a$ y usando $U_1 \subset U_3 = \{i \mid c(i) \notin b\} \in \mathcal{U}$ en el cual, ya que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, es equivalente a $\{i \mid c(i) \in b\} \notin \mathcal{U}$ que $c \notin {}^*b$, y así $C \in {}^*a - {}^*b$, para el recíproco, sólo invertiremos el proceso.

<u>DEFINICION 3.3</u>

Una entidad de la *L-estructura $\hat{R}^I$ se llama <u>interna</u> siempre que existe un número natural $n \geq 0$ tal que $a \in {}^*R_n$.

Una entidad interna a se llama una <u>entidad estándar</u> siempre que existe una entidad $b \in \hat{R}$ tal que $a={}^*b$. Todas las entidades que no son internas se llamas <u>externas</u>.

El conjunto $\bigcup_{n\geq 0} {}^*R_n$ de todas las entidades internas se llama la ultrapotencia de $\hat{R}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$ y se denotará por ${}^*(\hat{R})$.

La $\mathcal{U}$-ultrapotencia de $\hat{R}$ se denota usualmente por $\mathcal{U}$-producto $\hat{R}$ pero quí no emplearemos esta notación.

Obsérvese que el mapeo $a \to {}^*a$ de $\hat{R}$ en $\hat{R}^I$ sumerge $\hat{\mathbb{R}}$ en la subestructura ${}^*(\hat{\mathbb{R}})$ de $\hat{R}^I$.

La noción de rango se extiende inmediatamente en las entidades internas.

Una entidad interna $a\in {}^*(\hat{R})$ se dice ser de rango $n (n\geq 1)$ siempre que $a\in {}^*R_n - {}^*R_{n-1}$; y las entidades de ${}^*R = {}^*R_0$ se dicen ser de rango 0. Las entidades de rango 0 también se nombran como los <u>individuales</u> de ${}^*(\hat{R})$. Por medio de esta definición, el conjunto vacío ${}^*\emptyset$ tiene rango 1. Si <u>a</u> es no vacía e interna, entonces $a\in {}^*R_p$ para algún $P\geq 0$, y así, por definición 3.1, tenemos que $U=\{i \mid a(i)\in R_p\}\in\mathcal{U}$. Entonces $\bigcup_{k=0}^{p}\{i \mid \text{rango } a(i)=k\} = U\in\mathcal{U}$ implica, usando el hecho de que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, que existe exactamente un índice n tal que $0\leq n\leq p$ y $U_1=\{i \mid \text{rango } a(i) = n\}\in\mathcal{U}$. Entonces, para todo $i\in U_1$ tenemos $a(i)\in {}^*R_n - {}^*R_{n-1}$, y así $a\in {}^*(R_n-R_{n-1}) = {}^*R_n - {}^*R_{n-1}$ (lema 3.2 VI), esto es, rango $a = n$.

Si $a={}^*b$, $b\in \hat{R}$, es una entidad estandar de ${}^*(\hat{R})$, entonces su rango es invariable.

Ahora nos preguntamos si puede haber entidades internas que no son estándar; como consecuencia de la hipótesis de que el -- ultrafiltro $\mathcal{U}$ es δ- incompleto, tenemos:

TEOREMA 3.5

Existen entidades internas que no son estándar. En efecto,- si $a \in \hat{R}$ es una entidad que tiene infinidad de elementos, entonces existe una entidad $b \in {}^*a$ tal que b no es estándar.

DEMOSTRACION:

Debido a que a es un conjunto ínfinito, existe una sucesión $\{bn \mid n = 1,2,\ldots\}$ de elementos de a tales que $bn \neq bm$ para toda- $n,m = 1,2,\ldots$ y $n \neq m$. Sea b el mapeo de I a a tal que $b(i) = bn$ para todo $i \in In$ $(n=1,2,\ldots)$ Entonces $b \in {}^*a$ pero b no es igual- a algún elemento estandar de $*(\hat{R})$, y esto demuestra el teorema.

Las entidades internas en $*(\hat{R})$ pueden también caracteri-- zarse como sigue:

"Una entidad a es interna sí y sólo si a es un elemento de-- una entidad estandar".

Para ver esto, sólo necesitamos mostrar que si $a \in {}^*b$, $b \in \hat{R}$, entonces a es interno. Ahora, del hecho de que $b \in \hat{R}$, se sigue que $b \in Rn$ para alguna n, lo cual implica que $b \subset R_0 \cup Rn-1$, y así, por lema 3.2 ($\mathcal{V}$), $a \in {}^*b \subset {}^*R_0 \cup {}^*Rn-1$, lo cual implica que ----- $a \in {}^*R_0 \cup {}^*Rn-1$, hecho que muestra que a es interno.

Ahora, en vista del teorema 3.5, nos preguntaremos acerca de la naturaleza de las entidades que son elementos de entidades internas, como lo muestá el siguiente teorema cuyo recíproco no es cierto como veremos más adelante.

TEOREMA 3.6

Si $a \in b \in {}^*Rn$ $(n \geq 1)$, entonces $a \in {}^*Rn-1$, eso es, los elementos de una entidad interna son internos.

DEMOSTRACION:

De $b \in {}^*Rn$ se sigue que $U \equiv \{ i \mid b(i) \subset R_o \cup Rn-1 \} = \{ i \mid b(i) \in Rn \} \in \mathcal{U}$, y así, para $i \in U$ tenemos $a(i) \in R_o \cup Rn-1$. Por lo tanto, por el lema 3.2(v) y definición 3.1, $a \; {}^*(R_0 \cup Rn-1) = {}^*R_0 \cup {}^*Rn-1$, y así la prueba concluye.

Como en el caso de la L-estructura $\hat{R}$, llamaremos una *L-fbf-admisible siempre que todos los cuantificadores que intervienen-en ella son de la forma "$(\forall x) \; [[x \in a] \Rightarrow \ldots]$" y "$(\exists x) \; [[x \in A \wedge \ldots]]$", donde a es una constante que denota una entidad de $\hat{R}$.

Una fbf admisible de *L se llama interna siempre que todas -las constantes que ocurren en ella denotan entidades internas.-- Una-fbf admisible de *L se llama estándar siempre que todas las-constantes que ocurren en ella denotan entidades estándar. Por -lo tanto, uan fbf estandar es interna.

El conjunto de todas las sentencias internas de *L será denotado por *K = *K (*L), y el subconjunto de todas las sentencias-internas que se cumplen en $^*(\hat{R})$ serán denotados por $^*K_o = {}^*K_o$ (*L).

Si V es una fbf admisible de L, entonces su *-transforma *V se define como esa fnf estándar de *L la cual se obtiene de V por sustituir en Vtodas las constantes, digamos $a_1, \ldots, ap$, que ocu--rren en *V, ~~*ap~~ por $a_1, \ldots, a_p$ pero respetando las variables y paréntesis.

Probaremos que la *- inyección tiene la siguiente propiedad-importante:

TEOREMA 3.7

Sea $V = V(x_1,\ldots,x_p)$ una L-fbf con las variables libres $x_1\ldots,$ x_p, sea $A = \{(x_1\ldots,x_p)|(x_1,\ldots x_p)\in a \wedge V(x_1,\ldots,x_p)\}$, donde a es una entidad arbitraria de $\hat{R}$. Entonces $A\in \hat{R}$ y:

$$*A = \{(y_1,\ldots,y_p)|(y_1,\ldots, y_p)\in *a \wedge *V(y_1,\ldots,y_p)\}.$$

DEMOSTRACION:

Que A R es trivial (lema 2.1). si $V = V(x_1,\ldots,x_p, a_1,\ldots,a_q)$ es atómica, eso es, V tiene la forma $(x_1,\ldots, x_p,a_1,\ldots aq)\in A$ Q ó $(x_1,\ldots, x_{p-1}, a_1\ldots, aq)\in xp$ con posibles permutaciones de las variables, entonces el resultado se sigue inmediatamente de la definición 3.1. En miras de demostrar que el resultado se cumple para todas las fbf V de L sin cuantificadores, tenemos que demostrar que se cumple para dos de tales fbf V y W, entonces también se cumple para $[V\wedge W]$ y $[\sim V]$. Como es bien sabido, esto deberá tener cuidado de todos los conectivos lógicos. Supongamos que $*A = \{(x_1,\ldots, x_p)|(x_1,\ldots,x_p)\in *a \wedge *V(x_1\ldots,x_p)\}$, entonces, tenemos que mostrar que:

$*B = \{(x_1\ldots,x_p)| (x_1,\ldots,x_p)\in *a \wedge *V(x_1,\ldots,x_p)\}$, donde $B = a-A$. Ya que, por lema 3.2 (vi), $*B = *a-*A$ y de aquí se sigue el resultado. Supongamos ahora que $V = V(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,yq)$ Y $W = W(x_1,\ldots,x_p, z_1,\ldots,Zr)$ son dos L-fbf sin cuantificadores para las cuales se cumple el resultado, y sea:

$A=\{(x_1,\ldots x_p,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,zr)|(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,yq,z_1,\ldots,zr)\in A \wedge [V\wedge W]\}$ entonces $A =\{(x_1,\ldots, zr)|(x_1,\ldots,zr)\in a\wedge V\}\cap \{(x_1,\ldots,zr)| (x_1,\ldots,zr)\in a \wedge W\}$ esto implica, por lema 3.2 (v), que $*A = *\{\ldots\}\cap *\{\ldots\}=\{(x_1,\ldots, zr)|(x_1,\ldots,zr)\in *a\wedge[V\wedge W]\}$ y así el resultado se cumple para todas las fbf sin cuantificadores.

Para fbf admisibles con cuantificadores usaremos inducción sobre el número n de cuantificadores. Para $n=0$, es el resultado inmediato superior. Supongamos ahora que el resultado se cumple para todas las fbf admisibles con n ó menos cuantificadores. Sea V una fbf admisible con $(n+1)$ cuantificadores que están escritos en <u>fnp</u> $(qx_{n+1})\ldots(qx_1)\ W(x_1,\ldots,x_{n+1},y_1,\ldots,y_q)$, donde W no tiene cuantificadores y $y_1,\ldots,y_q$ son las variables libres que ocurren en V. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que (qx_{n+1}) es el cuantificador existencial $(\exists x_{n+1})$ ya que en otro caso consideramos $\sim V$. Denotemos por b el dominio de $(\exists x_{n+1})$. Entonces ya que V es admisible, $b \in \hat{R}$. Sea
$B=\{((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1})/((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1})\in a\times b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)\ W\}$ donde $a\in\hat{R}$. Entonces, por la hipótesis de inducción y el lema 3.2 (v), obtenemos que:
$^*B=\{((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1})/((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1}\in {}^*a\times{}^*b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)\,{}^*W\}$.
El dominio de la relación binaria B es el conjunto $A=\{(y_1,\ldots,y_p)/(y_1,\ldots,y_p)\in a\wedge(\exists x_{n+1})(x_{n+1}\in b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)W)\}$.
El dominio de la relación binaria $^*B$ es, por lo tanto, el conjunto $\{(y_1,\ldots,y_p)/(y_1,\ldots,y_p)\in {}^*a \wedge (\exists x_{n+1})\ (x_{n+1}\in{}^*b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)\,{}^*W)\} = \{(y_1,\ldots,y_p)/(y_1,\ldots,y_p)\in {}^*a\wedge{}^*V\}$.

Entonces, por el lema 3.2(vii), obtenemos el resultado deseado, eso es: $^*A=\{(y_1,\ldots,y_p)/(y_1,\ldots,y_p)\in {}^*a\wedge{}^*V\}$.

Ahora probaremos el teorema fundamental acerca de ultrafiltros al cual en adelante nos referiremos como el T.F.

<u>Teorema 3.8</u>

$^*(\hat{R})$ es un modelo no estándar de orden superior de $\hat{R}$ eso es, una sentencia admisible V de K(L) se cumple en R si y sólo si $^*V$ se cumple en $^*(\hat{R})$, y $\hat{R}$ es "sumergido" propiamente en $^*(\hat{R})$.

Demostración:

El teorema 3.5 nos dice que la "inyección" $a \to {}^*a$ de $\hat{R}$ en $^*(\hat{R})$ es propia. Tenemos que demostrar si $V \in K(L)$, entonces $V \in Ko$ sí y sólo ai $^*V \in {}^*Ko$. Si V no tiene cuantificadores, entonces se sigue inmediatamente de la definición 3.1 supongamos que $V \in K$ tiene la fnp $V=(qx_n)\ldots(qx_1)W$,donde W no tiene cuantificadores.Nohay pérdida de generalidad en suponer que (qx_n) es el cuantificador existencial $(\exists x_n)$.Entonces $V \in Ko(L)$ es equivalente a "El conjunto $A=\{x_n / x_n \in a \wedge (qx_{n-1})\ldots(qx_1)W \neq \emptyset$, donde a es el dominio de $(\exists x_n)$. Entonces ,por el teorema 3.7 y el lema 3.2(i), vemos que $A \neq \emptyset$ es equivalente a $^*A=\{x_n / x_n \in {}^*a \wedge (qx_{n-1})\ldots(qx_1) {}^*W\} \neq {}^*\emptyset$,lo cual es en si equivalente a $^*V \in {}^*Ko$.

Un importante aspecto del método del análisis no estandar: es el uso del T.F. repetidamente para transformar los enunciados verdaderos de R en enunciados verdaderos acerca de las entidades internas de $^*(\hat{R})$.
Para ilustrar esto daremos algunos ejemplos referentes a la teoría de conjuntos de $\hat{R}$.

Ejemplos 3.9

i) Los individuales de $\hat{\mathbb{R}}$ son los "urelementos" de la teoría de conjuntos de R en el sentido de que aunq ue son diferentes del conjunto vacío $\emptyset$, no hay entidades de $\hat{\mathbb{R}}$ que son elementos de individuales. Esta afirmación puede expresarse por la siguiente lista infinita de sentencia de Ko.

$$(\forall x)(\forall y)[[x \in \hat{\mathbb{R}}] \wedge [y \in R_n] \Rightarrow [\sim y \in x]] \text{ , } n=0,1,2,\ldots$$

Del T.F. concluimos que *Ko contiene las siguiente lista de sentencias.

$$(\forall x)(\forall y)[[x \in {}^*R] \wedge [y \in {}^*R_n] \Rightarrow [\sim y \in x]], \; n= 0,1,2,\ldots$$

En palabras , no hay entidades internas que son elementos de los individuales de $*(\hat{\mathbb{R}})$.

ii) Uno de los axiomas de la teoría de conjuntos establece que la unión de los elementos de un conjunto es un conjunto. para la teoría de conjuntos de $\hat{\mathbb{R}}$ esto significa que Ko contiene la siguiente lista infinita de sentencias::

$$(\forall Z)[Z \in R_n] \Rightarrow (\exists y)[y \in R_n] \wedge (\forall x)[x \in R_n] \Rightarrow [[x \in y] \Leftrightarrow (\exists u)[u \in Z] \wedge [x \in u]] .$$

Por lo tanto, del T.F. tenemos el siguiente resultado."la unión de los elementos de una entidad interna es una entidad interna.

iii) El axioma del conjunto potencia establece que para todo conjunto existe un conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de este conjunto. por lotanto,Ko contiene la siguiente lista infinita de sentencias.

$$(\forall x)[[x \in \hat{\mathbb{R}}_n] \Rightarrow (\exists y)[[y \in \hat{\mathbb{R}}_{n+1}] \wedge (\forall z)\, Z \in R_n] \Rightarrow [[Z \in y] \Leftrightarrow [Z \subset x]]] \, n=1,2,\ldots$$

Entonces el T.F. implica que el conjunto de todas las entidades internas que son subconjuntos de una entidad interna es una entidad interna. iv) El lema 2.1 (v) establece que el dominio y el rango de toda entidad de $\hat{\mathbb{R}}$ que es una relación binaria ,es una entidad de $\hat{R}$. Esto nuevamente puede expresarse por una lista infinita de sentencias de Ko.

$(\forall b)[b \in B_n] \Rightarrow (\exists Z)[Z \in R_n] \wedge (\forall x)[x \in R_n] \Rightarrow [[[x \in Z] \Leftrightarrow (\exists y)[y \in R_n] \wedge (x,y) \in b]]$ (n=3,4,...), donde B_n denota la entidad de todas las relaciones binarias de rango $\leq n$. El T.F. implica que "el dominio y el rango de cualquier relación binaria interna es interna".

Otra observación de importancia es que si $b \in \hat{R}$ es una relación binaria, entonces cualquier propiedad que b posee y que puede expresarse por sentencias de Ko también se cumple para *b. por ejemplo, si b es una relación de orden o función o relación de equivalencia , entonces *b es una relación de orden o función o relación de equivalencia. Si $b \in \hat{R}$ bien ordena su dominio , entonces *b bienordena su dominio en el sentido de que todo subconjunto interno no vació del dominio de *b ,tiene un primer elemento.

V) De los axiomas de la teoría de conjuntos se sigue que la imagen de un conjunto bajo una relación binaria, es un conjunto.. Por lo tanto, en $\hat{R}$ se cumplen las siguientes afirmaciones. Si $b \in \hat{R}$ es una relación binaria y $a \in \hat{R}$, entonces $\{y/ (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b)\} \in \hat{R}$. Debido a que esto puede expresarse mediante sentencias de Ko, entonces al aplicar el T.F. concluimos:

"La imágen de una entidad interna bajo una relación binaria interna es interna".

Uno de los problemas del análisi no estándar es decidir si ciertos conjuntos de entidades internos o no. Como hemos visto en las secciones anteriores, uno de los métodos usados para decidir tal cuestión involucra al T.F. , probando que el conjunto en cuestión viola una cierta propiedad que debería poseer, de acuerdo al T.F., si hubiera sido interno.
Otro resultado útil y de mucha ayuda conrespecto a esto, es el siguiente teorema

Teorema 3.10

Sea $V = V(x_1, \ldots, x_n)$ una fbf interna con las variables libres $x_1, \ldots, x_n$, y sea $a \in {}^*(\hat{\mathbb{R}})$ una entidad interna. Entonces el conjunto $\{(x_1, \ldots, x_n) / (x_1, \ldots x_n) \in a \wedge V(x_1, \ldots x_n)\}$ es interno.
$\{(x_1, \ldots, x_n) / (x_1, \ldots, x_n) \in A \wedge V(x_1, \ldots, x_n)\}$ *es interno.*

Demostración

Si V no tiene cuantificadores, eso es, $V = V(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_p)$ donde $a_1, \ldots, a_p$ son los constantes que ocurren en V las cuales , por hipótesis denotan entidades internas. Dado que a es interna, se sigue inmediatamente que el mapeo $i \to E(i) = \{(x_1, \ldots x_n) / (x_1, \ldots X_n) \in a(i) \wedge V(x_1, \ldots, x_n, a_1(i), \ldots, a_p(i))\}$ es un mapeo de T a $\mathbb{R}_n$ para alguna n, y así determina una entidad interna que denotaremos por E. Entonces, es fácil ver que $E = \{(x_1, \ldots, x_n) / (x_1, \ldots, x_n) \in a \wedge V\}$. Esto prueba el resultado para fbf internas sin cuantificadores. Pra fbf internas en general usaremos otra vez inducción sobre el número de cuantificadores . Por lo tanto supongamos que el teorema se cumple para todas las fbf internas con $\leq n$ cuantificadores Sea $V = (qx_{n+1}) \ldots (qx_1) W$ una fbf interna con las variables libres $y_1, \ldots, y_p$. No hay pérdida de generalidad al suponer que $(qx_{n+1}) = (\exists x_{n+1})$ con dominio $b \in {}^*(\hat{\mathbb{R}})$ Ya que b es interna se sigue de la hipótesis de inducción que la relación binaria.

$B= \{((y_1, \ldots, y_p), x_{n+1}) / ((y_1, \ldots, y_p), x_{n+1}) \in a \times b \wedge q(x_n) \ldots$
$q(x_1)\, W(y_1, \ldots, y_p, x_{n+1})\}$
es interno, y así por el ejemplo 3.9 (iv) ,su dominio $\{(y_1, \ldots, y_p)/$
$(y_1, \ldots, y_p) \in a \wedge (\exists\, x_{n+1})\, (qx_n) \ldots (qx_1)\, W\}$ es interno , y
con esto termina la demostración.

4.- El SISTEMA DE NUMEROS REALES NO ESTANDAR *R

El conjunto *R de individuales de la $\mathcal{U}$-ultrapotencia $*(\hat{R})$ de la superestructura $\hat{R}$, donde $\mathcal{U}$ es es un ultrafiltro δ-incompleto, tiene, de acuerdo al T.F. las mismas propiedades que R, en la medida en que pueden expresarse por sentencias de Ko.

Ya que R es un campo totalmente ordenado y que es fácil ver que esto puede expresarse por sentencias de Ko, se sigue que *R es un campo totalmente ordenado. La inyección $a \longrightarrow *a$ de R en *R sumerge R en un subcampo de *R. En miras de simplificar nuestra notación, denotaremos las extensiones de las operaciones algebraicas y orden por los mismos símbolos al pasar de R a *R. Por lo tanto, a+b= c en *R significa en términos de $\mathcal{U}$ que $\{ i/a(i)+b(i)=c(i)\}\in\mathcal{U}$ Δ_1 como una ilustración, el enunciado que afirma "la relación de orden "$\leq$" ordena R totalmente puede expresarse por la siguiente sentencia de Ko. $(\forall x)\ (\forall y)\left[x \in R \wedge y \in R\right] \Rightarrow \left[x<y\right] \vee \left[x=y\right] \vee \left[x>y\right]$, y así como se mencionó antes, se sigue del T.F. que la extensión de la relación de oreden de *R ordena totalmente a *R.

El elemento unitario $e \in *R$ tiene la propiedad de que para todo $0 \neq r \in R$, $*r(*r)^{-1} = e$, y así $e = *1$, donde 1 denota el número real uno.

Para simplificar la notación, de ahora en adelante identificaremos R con el subcampo de los números estandar de *R, Y sentiremos libertad de escribir RC*R.

El valor absoluto $|r|$ de un número real $r \in R$ definido por $|r| = r$ siempre que $r \geq o$ y $|r| = -r$ cuando $r < o$, puede considerarse como un mapeo de R en $R^+ = \{r / r \in R \wedge r \geq o\}$ (conjunto de los reales no negativos). La constante de L que denota este mapeo se extiende, al pasar de $\hat{R}$ a $*(\hat{R})$ a un mapeo $*|\cdot|$ de *R en $*(R^+)$ el cual, de acuerdo al T.F., tiene la propiedad de que $*|a| = a$ para todo $*R \ni a \geq o$ y $*|a| = -a$ para todo $*R \ni a < o$. Tambien en este caso eliminaremos la * notación y escribiremos $|a|$ para denotar el valor absoluto de un número real $a \in *R$. Similarmente, escribiremos max (a,b) y min(a,b), $a,b \in *R$, para las extensiones *max (,) y* min (,) de los mapeos max (r,s) y min (r,s) de R x R en R respectivamente.

Δ_1.- y similarmente el resto de operaciones. Además, $a \leq b$ en $*\mathbb{R}$ significa $\{ i/a(i) \leq b(i)\} \in \mathcal{U}$.$\rightarrow$

Denotemos por la constante S un subconjunto de R. entonces al pasar a*(R), *S denota un subconjunto de *R el cual es una entidad estandar y la cual por R.F. tiene las mismas propiedades que S en la medida en que puedan expresarse por sentencia de Ko. Mas presisamente, la subestructura $*(\hat{S})$ de $*\ (\hat{R})$, donde $\hat{S}$ denota la subestructura definida por S, es un modelo no estandar de $\hat{S}$ (ultrapotencia). Sobre las bases del lema 3.2. (iii) y la presente notación, escribiremos con libertad SC*S. Ademas, por el lema 3.2. (V), S=*S si y solo si S es un conjunto finito.

Si la constante N denota el conjunto de números naturales de R, eso es N, denota un conjunto de números de *R el cual, de nuevo tiene las mismas propiedades de N en la medida en que pueden expresarse como sentencia de Ko. Más presisamente, $*\ (\hat{N})$ es una ultrapotencia que produce un modelo no estandar de orden superior de la aritmética.

Del teorema 3.5. se sigue que *R es una extensión propia de R, y así, de acuerdo a un resultado de álgebra (mencionado en la introducción de este capítulo) que afirma que todo campo arquimedeano Δ1 Pero *R tiene las mismas propiedades que R y R es Arquimedeano. Examinaremos esta aparente paradoja. El hecho de que R sea Arquimedeano puede expresarse por la siguiente sentencia de Ko:

$[n \in \mathbb{N}] \Rightarrow [[nx \leq 1] \Leftrightarrow [x \leq 0]]$

$(\forall x)(\forall n)\ [x \in R] \wedge$ ~~[n∈N/nx∧1∧∧x/o~~ , y así por el T.F., la siguiente afirmación se cumple para *R $(\forall x)(\forall n)\ [x \in *R] \wedge [n \in *N] \Rightarrow [nx \leq 1] \Leftrightarrow [x \leq 0]$, eso es, Δ2 Arquimedeano con respecto a *N. No es Arquimedeano en el sentido del metalenguaje, eso es, si $0 < a \in *R$, entonces existe un número natural n en el metalenguaje tal que, a 1, en - veces +. $a+\cdots+a>1$

Hasta ahora, sólo hemos considerado propiedades de R y su extensión expresable en lenguaje de primer orden.

Ahora examinaremos unas pocas de propiedades de R que son del tipo de orden superior.

Propiedad de Completés de Dedekind

Todo subconjunto no vacío de R que está acotado superiormente tiene una mínima cota superior (Sup.)

Como esto puede expresarse fácilmente por una sentencia de Ko, la cual contendrá un cuantificador universal cuya variable representa subcon

Δ1.- es isomorfo a un subcampo de ℝ, concluimos que *ℝ es no-Arquimedeano.

Δ.- con la interpretación [illegible] de las constantes *ℝ es →

juntos de R; entonces, por el uso del T.F. se sigue que *R satisface la propiedad de completés de Dedekind, o sea:

4.1 Todo subconjunto interno no vacío de *R que está acotado superiormente tiene un <u>sup</u>.

Ya que $*(\hat{N})$ es un modelo no estandar de orden superior de la aritmética, se sigue que bajo la interpretación adecuada del T.F., el modelo *(N) satiface todos los axiomas de de Peano. Por ejemplo el principio de inducción que estable que todo conjunto no vacío de números naturales tiene un primer elemento, que es una propiedad de orden superior de $\hat{N}$, tiene que ser interpretada en $*(\hat{N})$ en el siguiente sentido:

4.2 Todo subconjunto interno no vacío de *N, tiene un primer elemento:

Del teorema 3.5 también se sigue que $*N-N \neq \emptyset$. Más precisamente, probaremos que existe un "número natural" $w \in *N$ tal que $|r| < w$ para todo $r \in \mathbb{R}$. En efecto si w(i)=n para todo $i \in In$ (n=1,2,....), donde $\{In\}$ denota la participación de I tal que $In \notin \mathcal{U}$ para toda N=1,2,..., entonces W es un mapeo de I a N con la propiedad que para todo $0 < r \in N$, el conjunto $\{i/w(i) < r\} \notin \mathcal{U}$, y asi $w \in *N$ y $|r| < w$ para todo $r \in R$. Esto prueba, en base a que $\mathcal{U}$ es δ-incompleto que *N contiene un número que es mas grande que cualquier número real positivo, ese es un número que podría llamarse infinitamente grande.

Resumimos algunos de estos resultados en la siguiente:

4.3 <u>Definición</u>

"Un número real $a \in *R$ se llama finito, siempre que existe un número real estandar $0 < r \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < r$. Un número real $a \in *R$ que no es finito, se llamará infinito.

Un número real $a \in *R$ se llama un infinitesimal (o infinitésimo) o — infinitamente pequeño, siempre qeu $|a| < r$ para todo $0 < r \in R$".

Aquí cobra pleno significado y fundamento la terminología de Leibniz

El conjunto de todos los números reales finitos de *R: se denotará por Mo y el conjunto de todos los infinitésimos por M1.

Obsérvese que $R \subset Mo$, $M1 \subset Mo$ y $R \cap M1 = \{0\}$, eso es, 0 ("nulo") se considera también como un infinitesimal, es el único infinitesimal estandar.

Un número real $a \in *R$ es infinito si y sólo si $|a| > r$ para todo $0 < r \in R$. Por lo tanto, el número natural w definido arriba es infinito. Su recíproco, por lo tanto, es un infinitésimo. Mas generalmente, un número real $0 \neq a \in {}^*R$ es un infinitésimo si y solo si su recíproco es infinito:

El siguiente teorema sirve para determinar alos números naturales finitos:

4.4 Teorema

Un número natural $n \in {}^*N$ es finito si y solo si n es un número na- ral estandar. En símbolos, $^*N \cap Mo = N$.

Demostración

Es obvio que $N \subset Mo$. Si $n \in {}^*N$ es finito, entonces existe un número real estandar $0 < r \in R$ tal que $n < r$.

Por lo tanto, Ko contiene la sentencia:

$(\forall x)\,[x \in N] \Rightarrow [x \leq r] \Leftrightarrow [x=1] \vee [x=2] \vee \ldots \vee [x=P]$, donde r y p son constantes y $p=[r]$ es la parte entera de r. Por lo tanto, por el T.F. obtenemos que $n=1$ ó $n=2$ ó ....ó $n=$ r , y la prueba concluye:

Por lo tanto, los números naturales infinitamente grandes estan dados por $^*N-N$; los cuales comunmente los denotaremos por letras griegas como w, con o sin subíndices.

El mapeo $r \to [r]$ de R^+ a $N \cup \{0\}$, donde $[r]$ denota el mayor entero no negativo menor o igual que r <u>se extiende</u> al pasar de $\hat{R}$ a $^*(\hat{R})$ al mapeo $^*[\cdot]$ de $^*(R^+)$ a $^*N \cup \{0\}$. Del T.F. si sigue que para todo $0 \leq a \in {}^*R$, $^*[a]$ es el mayor entero no negativo menor o igual que a. También en este caso eliminaremos la $*$-notación y simplemente escribiremos $[a]$ para la parte entera de a.

Ahora haremos una discusión acerca de las propiedades de los números finitos de $^*R$.

Es fácil ver que Mo es un subanillo de $^*R$, y de hecho, es un dominio entero, o sea, Mo no tiene divisores de cero. El conjunto de los infitésimos constituye un subanillo de Mo con la propiedad de que si $h \in M1$ y $a \in Mo$, entonces $ah \in M1$, eso es, M1 es un ideal en Mo. Es fácil ver además que M1 es ideal máximo. En efecto, observe que si $a \in Mo$ y $a \notin M1$, entonces existen números reales positivos $r_1, r_2 \in R$ tales que $0 < r_1 < |a|$ r_2, y así $\frac{1}{a} \in Mo$ lo cual muestra que cualquier ideal que contenga a M1 propiamente debe contener el elemento 1 de Mo y por tanto todo Mo.

Si $a, b \in {}^*R$ y $a-b$ es infinitesimal, entonces dremos que b está infinitamente cerca de a y escribiremos $a \simeq 1b$.

Considere el anillo cociente Mo/M1. Entonces, ya que M1 es un ideal máximo en Mo, el anillo cociente Mo/M1 es un campo. En relación a esto:

4.5 Teorema

El anillo cociente Mo/M1 es orden isomórfico a el campo R de los números reales estandar.

Demostración:

Primero observemos que si A es una clase lateral en Mo módulo M1, entonces A no puede contener dos números reales estandar diferentes r_1 y r_2. Ya que, en ese caso $|r_1 - r_2| =_1 0$, y así $r_1 \neq r_2$ implica por definición 4.3. que $|r_1 - r_2| < |r_1 - r_2|$ y se obtiene una contradicción. Esto muestra que R es un subcampo de Mo/M1. Para completar la prueba tenemos que demostrar que a todo $a \in$ Mo corresponde un número real estandar, el cual es entonces el único tal que $a-r=_1\theta$. Para este fin obsérvese que si $a \in$ Mo, entonces los conjuntos $D=\{r/r\in R \wedge r\leq a\}$ y $D'=R-D$ definen una cortadura de Dedekind (D,D') en R. Sea $r\in R$ el número real en R que determina la misma cortadura (D,D'). Entonces, mostraremos que $a=_1 r$. Si no, entonces por definición 4.3. existe un número real positivo $\theta < \varepsilon \in R$ tal que $|a-r| \geq \varepsilon$. Si $a>r$ entonces $|a-r|\geq\varepsilon$ implica que $r+\frac{\varepsilon}{2} < a$, y contradice el hecho de que a y r determinan la misma cortadura, Similarmente, si $r > a$, entonces $r - \frac{\varepsilon}{2} > a$ da origen a la misma contradicción. Por lo tanto Mo/M1 es orden isomórfico a R y la demostración concluye:

4.6 Definición

El orden homomorfismo de anillo de Mo sobre Ro con núcleo M1 se llamará el homomorfismo de la parte estandar y se denotará por St.

4.7 Teorema

i) $St(a+b)=st(a)+St(b)$, $St(ab) = St(a)St(b)$, y $St(a-b)=St(a)-St(b)$, $\forall a,b\in$ Mo.

ii) Si $a,b\in$ Mo, entonces $a\leq b$ implica $St(a)\leq St(b)$

iii) $St(|a|)= |St(a)|$, $St(\text{máx}(a,b)) = \text{máx}.(St(a), St(b))$ y $St(\text{mín}(a,b)) = \text{Min}(St(a), St(b))$ para todo $a,b\in$ Mo.

iv) $St(a)=0$ si y solo si $a\in$ M1

v) Para todo estándar $r\in R$, tenemos $St(r)=r$

vi) Si $a \in$ Mo y $St(a)\geq 0$, entonces $|a| =_1 St(a)$

vii) Para todo $a,b\in$ Mo, tenemos $a=_1 b$ sí y sólo si $St(a)=St(b)$

A las clases de equivalencia (laterales) de Mo con respecto a M1 se se acostumbra llamarlas <u>Mónadas</u>. Las mónadas se denotan por $\mathcal{M}(r), r \in \mathbb{R}$. Por tanto, en particualr, $\mathcal{M}(0)$= M1.

5.- <u>Definición y Propiedad de algunas entidades externas</u>

Ya se estableció que el recíproco del teorema 3.6 no es necesariamente cierto, o sea, un conjunto de entidades internas no es necesariamente interno; por otro lado, tenemos ya definidos algunos conjuntos de infividuales tales como *N-N, Mo, Mi, $\mathcal{M}(r), r \in R$. Ahora surge la pregunta natural de si estos consjuntos son internos o no. Para ello sguiremos el siguiente procedimiento. Supondremos que cada conjunto en cuestión es interno y mostraremos qeu viola alguna propiedad que debían poseer en base a la suposición de que es interno y a lá T.F. Así:

5.1 <u>Teorema</u>

Los conjuntos no vacíos *N-N, Mo, M1, $\mathcal{M}(r)(r \in R)$, y el conjunto de números reales infinitamente grandes $*R_\infty$= *R-Mo son todos externos.

<u>Demostración:</u>

Supongamos que *N-N es interno. Entonces ya que *N-N=$\emptyset$ (terema 3.5) tenemos por (4.2) que *N-N tiene un primer elemento, digamos w_0. Pero el conjunto dea números naturales infinitamente grande no tiene un primer elemento. Así, si $W \in$ *N-N, entonces $k+1 < W$ para todo $k \in N$, esto implica que $W-1 \in$*N-N, y así $Wo-1 < Wo$ lo cual prueba que *N-N no tiene primer elemento. Por lo tanto, *N-N es externo.

Supongamos que el conjunto M1 es interno. Ya que M1$\neq \emptyset$ y $h \in$ M1 implica $|h| < 1$, se sigue de (4.1) qeu M1 tiene un <u>sup</u>, digamos, a_0. De $0 \in$ M1, se sigue que $a_0 \geq 0$. Ademas $a_0 \notin$ M1 ya que M1 contiene otros elementos diferentes de cero. Pero entonces $a_0/2$ es tamiben un <u>sup</u> de M1 y se obtiene así una contradicción, así es que M1 es externo.

Similarmente, en base a (4.1) podemos mostrar qeu Mo es externo.

Si $*R_\infty$ = *R-Mo es interno, entonces también Mo=*R-$*R_\infty$ es interno y se obtiene una contradicción. Por lo tanto, $*R_\infty$ es externo.

Ya que los mapeos de translación son internos, se sigue inmediatamente del hecho de que $\mathcal{M}(0)$ es externa que $\mathcal{M}(r)=\mathcal{M}(0)$ +r $(r \in R)$ es externo. Esto completa la prueba.

Observaciónes:

i) Si DCM1 es interno y no vacío, entonces, de acuerdo a (4.1) tiene un sup. La demostración anterior muestra que el sup es un infinitésimo. Similarmente, el sup de un conjunto interno no vacío de números finitos es finito. El inf de un conjunto interno no vacío de números infinitos es por supuesto infinito.

ii) La operación "parte estándar" es un mapeo de Mo a R. No es, por lo tanto, un mapeo interno. Ya que, si fuera interno entonces de acuerdo al ejemplo 3.9(v) su dominio Mo debería ser interno lo cual contradice al teorema precedente y concluimos que la operación "parte estándar" es una operación externa.

5.2 Teorema

Si $A \in \widehat{R}$, entonces el conjunto $*A-\{*a/a \in A\}$ de todos los elementos no estándar de $*A$ es o vacío o externo,, y en el último caso, el conjunto $\{*a/a \in A\}$ es también externo.

Demostración:

Si $A \in \widehat{R}$, entonces $*A-\{*a/a \in A\} = \phi$ si y sólo si A es finito. (teorema 3.5 y lema 3.2 (v) . Supongamos, por lo tanto, qeu A es infinto. Entonces existe un mapeo f uno-a-uno de un subconjunto de A sobre $N=\{1,2,\ldots\}$.

Si $B=*A-\{*a/a\ A\}$ es interno, entonces $B \cap \mathrm{dom}\ (*f)$ es tambien interno (teorema 3.10). Por lo tanto, por el ejemplo 3.9(v), tenemos que $*N-N=*f(B \cap \mathrm{dom}*f)$ es interno, lo cual contradice al teorema 5.1 y la prueba concluye.

5.3 Definición

"Un conjunto D de entidades internas de $*(\widehat{R})$ se llama $*$-finito siempre que exista un número natural $w \in *N-N$ y un mapeo interno un-auno de D sobre el conjunto interno $\{1,2,\ldots\ldots,w\}$. En ese caso, diremos que la cardinalidad interna de D es w o simplemente, que D tiene w-elementos".

Si D es $*$-finito, entonces es claro que su cardinalidad externa es al menos χ_0 .

5.4 Teorema

Todo conjunto $*$-finito de entidades internas es interno. Un conjunto

*-finito de números reales tiene un elemento máximo y un mínimo.

Demostración:

Ya que, por el ejemplo 3.9(iv), el dominio de una función interna es interna, se sigue inmediatamente de la definición 3.5 quß un conjunto *-finito es interno.

Si D es un conjunto *-finito de números reales, entonces, por la sentencia de Ko que establece qeu todo conjunto finito de números reales de R tiene un elemento máximo y uno mínimo se sigue del T.F. que todo conjunto *-finito de números reales en *R tiene un elemto máximo y uno mínimo; lo cual cmpleta la prueba.

6.- Teorias de Limites

Como un primer ejemplo ilustraremos qué clase de efecto tiene la teoría de números infinitamente grandes e infinitamente pequeños sobre la teroría de los límites

6.1 Teorema

Una sucesión Sn n= 1,2,.... en R es acotada sí y solo si *Sw es finito para todo $W \in {}^*N-N$.

Demostración:

Esto se sigue inmediatamente de la observación que sigue al teorema 5.1 a el efecto de que el sup de un conjunto interno de números finitos es finito. Por lo tanto, si (ran*S) CMo, entonces $|{}^*Sn| \leq a$ para todo $n \in {}^*N$ y algún $a \in Mo$, eso es, $|Sn| \leq St(a)$ para todo $n \in N$, y la prueba concluye.

En el sentido clásico de sucesión $\{Sn/n=1,2,...\}$ se dice que es convergente con límite S sí y sólo si:

(*) $(\forall \varepsilon)[\,0<\varepsilon \in R] \Rightarrow (\exists x)[x \in N] \wedge (\forall y)[y \in N \wedge x \leq y] \Rightarrow [\,|Sy-S| < \varepsilon]$.

En análisis no estándar se dice más intuitivamente así:

6.2 Teorema

Sea $\{Sn/n=1,2,...\}$ una sucesión de números de R, y sea $S \in R$. Entonces $\lim_{n\to\infty} Sn=S$ sí y sólo si $^*Sw \simeq S$ para todo $w \in {}^*N-N$.

Demostración:

Supongamos primero que $\lim_{n\to\infty} Sn= S$. Entonces, de la sentencia (*) de Ko la siguiente es una sentencia de Ko.

$(\forall x)[x \in N \wedge x > n] \Rightarrow |Sx-S| < \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ y $n \in N$.

son constantes. Por lo tanto, se cumple la siguiente *L-sentencia: $(\forall x)\ [x\in {}^*N\wedge x>n]\Rightarrow[{}^*Sx-S]<\varepsilon$.

En particular, para todo $w\in {}^*N-N$ tenemos que $|{}^*Sw-S|<\varepsilon$. La última afirmación se cumple, por lo tanto, para todo $\varepsilon>0$, eso es, ${}^*Sw=_1 S$ para toda $w\in {}^*N-N$.

Con el fin de ver que la condición es suficiente observamos que si ε es una constante que denota a un número positivo de R, la siguiente sentencia se cumple en *(R).

$(\exists y)\ [y\in {}^*N]\wedge\ (\forall x)[\ x\in {}^*N\wedge y<x]\Rightarrow\ |{}^*Sx-S|<\varepsilon$. Así, necesitamos tomar para y únicamente un número natural infnitamente grande. Obsérvese que esta sentencia es la *-transforma de la sentencia.

$(\exists y)[y\in N]\wedge\ (\forall x)[\ x\in N\wedge y<x]\Rightarrow\ |Sx-S|<\varepsilon$, y así por el T.F. se cumple en $\hat{R}$. Esto significa que existe un índice $n_0\in N$ tal que $|Sn-S|<\varepsilon$ para toda $n>n$. Ya que esto se cumple para toda $\varepsilon>0$, obtenemos que $\lim_{n\to\infty} Sn$ $=S$ y la demostración concluye:

La condición ${}^*Sw=_1 S$ para toda $w\in {}^*N-N$ es equivalente a $St({}^*Sw)=S$ para todo $w\in {}^*N-N$.

El teorema 6.2 también nos dice inmediatamente que si el límite existe es único. Además, el Teorema 6.1 muestra que toda sucesión convergente es acotada:

El criterio de Cauchy para la convergencia toma la siguiente forma:

6.4 Teorema

Una sucesión $\{Sn/n=1,2,\ldots\}$ de números reales de R es convergente sí y solo si ${}^*Sw=_1{}^*Sw'$ para todo $w,\ w'\in {}^*N-N$:

Demostración:

Del criterio de Cauchy $|Sn-Sm|<\varepsilon$ para todo n,m suficientemente grandes, de lo cual se sigue como en la prueba de Teorema 6.2 que la condición es necesaria. En miras de probar que la condición es suficiente, en vista del Teorema 6.2 únicamente es suficiente que *Sw es finito para todo $w\in {}^*N-N$. Para este fin, supongamos que existe un número natural infinitamente grande $Wo\in {}^*N-N$ tal que ${}^*Sw_0$ es infinito. Definimos el siguiente conjunto $A=\{n\ /\ n\in {}^*N\wedge |{}^*Sw\ -{}^*S_n|<1\}$ de números naturales. Del Teorema 3.10 se sigue que A es interno. Además, por hipótesis, ${}^*N-N\subset A$. Si $n\in N$ es finito, entonces $|{}^*Sw_0|\le|{}^*Sw_0-{}^*Sn|+|{}^*Sn|\in Mo$ muestra que $n\notin A$, y así $A={}^*N-N$, contradiciendo el hecho de que *N-N no es interno (teorema 5.1), y así *Sw es finito para todo $w\in {}^*N-N$.

7.- CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD

Sea f una función valuada en los reales de una variable real que está definida en $(a,b)\subset R$. Al pasar a $*(\hat{R})$ lafunción f se extiende a una función $*f$ cuyo dominio de definición es el intervalo $(*a,*b)\subset *R$ y con valores en $*R$. Además tengamos en mente que el T.F. implica que $*f$ satisface en $*(\hat{R})$ todas las propiedades de f en la medida que pueden expresarse por sentencias de K_o.

Por ejemplo, si para algún $a<x_0<b$, $\lim_{x\to x_0} f(x)= L$, entonces la siguiente sentencia pertenece a Ko.

$$(\forall \varepsilon)[0<\varepsilon\in R]\Rightarrow(\exists\delta)[0<\delta\in R]\wedge(\forall x)[x\in R\wedge 0<|x-x_0|<\delta]\Rightarrow[|f(x)-L|<\varepsilon].$$

Usando los mismos métodos que en la prueba del teorema 6.1, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 7.1

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ sí y sólo si $*f(Xo+h)=_1 L$ para todo $0\neq h\in M_1$

En particular, f es continua en Xo sí y sólo si $*f(Xo+h)=_1 f(Xo)$ para todo $h\in M_1$, eso es, equivalentemente $st(*f(a))= f(st(a))$ para todo $a\in *R$ tal que $st(a)=Xo$.

La derivada de f en Xo existe sí y sólo si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(Xo+h)-f(Xo)}{h}$$

existe. Por lo tanto, por teorema 7.1, f es diferenciable en Xo sí y sólo si existe una constante $L\in R$ tal que

$$\frac{*f(Xo+h)-*f(Xo)}{h} =_1 L$$

para todo $0\neq h\in M_1$. Como debíamos haber esperado, la derivada de una función diferenciable es la parte estándar del cociente de infinitesimales

$$\frac{\Delta f}{\Delta X}\Big|_x=\frac{*f(x+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}\Big|_x$$

donde $\Delta X\neq 0$ denota un infinitésimo.

Si f es diferenciable en Xo, entonces f es continua en Xo, ya que,, de $*f(Xo+h)-f(Xo)=_1 hf'(Xo)$ para todo $0\neq h\in M_1$ se sigue, usando $hL=_1 0$, que $*f(Xo+h)-f(Xo)=_1 0$ para todo $h\in M_1$.

Una función real f definida sobre un intervalo arbitrario es uniformemente continua siempre que para todo $0<\varepsilon\in R$, existe una constante $0<\delta\in R$ tal que $|f(X)-f(y)|<\varepsilon$ para todo $x,y\in$ dom f y $|x-y|<\delta$. Al pasar a $*(\hat{R})$ obtenemos inmediatamente el siguiente criterio para continuidad uniforme:

Teorema 7.2

"Sea f una función real de una variable real. Entonces f es uniformemente continua sí y sólo si $*f(a)=_1 *f(b)$ para todo $a,b\in \mathrm{dom.}\ *f$ y $a=_1 b$"

De los resultados anteriores, puede ahora obtenerse el famoso teorema de Heine.

Teorema 7.3 (Heine)

Sea f una función real de una variable real definida sobre el intervalo cerrado y acotado $x_1 \leq x \leq x_2; x_1, x_2 \in R$. Si f es continua, entonces f es uniformemente continua.

Demostración

Sean $a,b\in *R$ que satisfacen $x_1 \leq a,b \leq X_2$ y $a=_1 b$. Entonces $a,b\in M_0$ y $x=St(a)=St(b)$ satisface $X_1 \leq X \leq X_2$. Ya que f es continua tenemos, por el teorema 7.1, que $*f(a)=_1 f(x)= {}_1^* f(b)$, y así $*f(a)= {}_1^* f(b)$, eso es, por el teorema 7.2, f es uniformemente continua.

Así como los conceptos de límite, derivada, continuidad y continuidad uniforme de funciones han sido abordadas con los métodos del análisis no estándar, así son abordables muchos otros temas del análisis; éstos bastan como ejemplo.

En el capítulo 4 ahondaremos más en estos conceptos y otras aplicaciones.

CAPITULO III

MODELO DE IMAZ-CARRION

1.- Introducción:

Al definir la adjunción de un elemento a a un campo F, denotado por F(a), "visto de fuera" no es más que la mínima extensión de F que contiene a a como elemento, o sea,

$$F(a)=\bigcap_{\alpha\in I}\{K_\alpha / K_\alpha \text{ es campo} \wedge F\subset K_\alpha \wedge a\in K_\alpha\}$$

Esto es cierto y correcto, pero no nos permite manipular algebraicamente los elementos de F(a), por lo cual se hace necesario precisar las operaciones de F a F(a), definir la forma de los elementos de F(a), conocer "por dentro" a F(a) y manipularlo algebraicamente; todo esto se hace al estudiar teoría de campos dentro de un curso de Algebra Moderna.

De una manera similar, el modelo teórica de análisis no standar *R definido en el capítulo II, así como en otras construcciones teóricas hechas desde otros puntos de vista (por teoría de modelos como lo hizo Abraham Róbinson o por el uso de valuaciones por ejemplos) aunque dichos procesos de construcción están lógicamente justificados y de alguna manera definen las operaciones de la extensión de R a *R, tales definiciones son teóricas y no permiten suficiente grado de manipulación de las operaciones en *R que permitan su uso práctico tanto en la definición y uso de los conceptos matemáticos, principalmente del cálculo diferencial como su aplicación a problemas prácticos.

Las siguientes secciones del presente capítulo las dedicamos tanto a la explicación de un modelo operativo propuesto por el Dr. Carlos Imaz*1, promovido y ampliado por el M. en C. Vicente Carrión M.*2, como la exposición de sus antecedentes y sobre todo, lo que es tal vez lo mas importante del presente capítulo, dar su fundamentación teórica en base al modelo expuesto en el capítulo II.

*1.-Dr.carlos Imaz,trabajó por muchos años en el campo de las Matemáticas puras, en esta década ha colaborado en la sección de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN.

*2.- Vicente Carrión . coordinar por muchos años del área de Matemáticas en la que fuera escuela preparatoria de la Uni-Son. En la sección de Matemática educativa estudió la Maestría en Ciencias, especialidad Matemátic Educativa.

2.- Antecedentes del modelo Imaz-Carrión.

Una característica común en la búsqueda de un modelo para el cálculo diferencial con infinitésimos e infinitos es la de intentar construir un anillo ordenado (preferentemente campo) que contenga propiamente a R (el campo de los reales) y que por tanto el orden de dicho anillo sea no Arquimedeano.

<u>Definición 2.1</u>

Sea R(t) una extensión trascendental simple del campo de los reales R, y que según el álgebra moderna puede identificarse con el campo de las funciones racionales en la indet erminada t con coeficientes en R, cada elemento de R (t) puede escribirse en la forma : $f(t)=\dfrac{p(t)}{q(t)}=\dfrac{a_0+a_1\,t+\ldots+a_n t^n}{b_0+b_1\,t+\ldots+b_m t^m}$,

donde $q(t)\neq 0$, o sea que, al menos uno de los bj es distinto de cero; t es una indeterminada y ai , bj $\in$ R; i=0,...,n;J=0,...,m.

Podemos suponer que el primer $b_j\neq 0$ es 1, ya que en caso de no serlo, obtenemos una expresión equivalente a la dada al multiplicar tanto numerador como denominador de la expresión de la derecha en la expresión de f(t) por b_J^{-1}. Por lo tanto , si $f\neq 0$ podemos escribir: $f=\dfrac{a_k\,t^k+\ldots a_n t^n}{t^J+b_{j+1}\,t^{J+1}+\ldots+b_m t^m}$ $a_j\neq 0$, $0\leq k\leq n$, $0\leq J\leq m$.

Para determinar un orden en R(t), decimos que $f\neq 0$ es <u>positivo</u> si y sólo si $a_k>0$. Es cuestión de rutina verificar que esto define realmente un orden " $<$ " en R(t).

Verifiquemosahora que el orden de R(t) es no arquimedeano.

Por nuestra definición, para $0<t$, $t<1$ (ya que 1-t es positivo) y para cualquier natural n:

$$\underbrace{t+t+\cdots+t}<1$$

ya que 1-nt es positivo.

Aunque R(t) es un campo ordenado no arquimedeano y que por tanto posee elementos infinitamente grandes e infinitésimos, no resultó ser un buen modelo en la práctica, sobre todo al querer hacerlo operativo en los conceptos del cálculo, ya que no es posible extender hasta R(t) algunas de las funciones mas comunes definidas en R; por ejemplo, $Y=\sqrt{x}$

Series de potencia generalizadas:

Langwitz trabaja posteriormente con el campo de las series de potencia generalizadas L.

Los elementos de L son las expresiones formales

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{v_k} \quad a_k, v_k \in \mathbb{R}, \ v_k \uparrow \infty$$

$v_k \uparrow \infty$ implica que $V_0 < V_1 < V_2 < \ \ldots$

La igualdad de elementos de L se define mediante la coin - cidencia de términos como en polinomios.

La suma y producto de elementos de L se realizan formalmente como suma y producto de polinomios.

Langwitz demuestra que (L,+,.) es un campo, aunque solo le interesa de momento verlo como anillo.

Define elementos positivos como aquellos cuyo primer coeficiente no nulo es positivo.

Mediante el concepto de valuación , ideales de anillo y anillo cociente "sumerge" L en un modelo de análisis no estandar y así le da fundamento teórico al modelo L que es más operativo que el modelo sumamente teórico de A. Robinson.

La dificultad práctica del modelo L de Laugwitz está en el uso del concepto de valuaciones y tner que sumergirse en un modelo teórico.

3.- Modelo de Imaz-Carrión.

Como una variante al modelo de Laugwitz en el cual se evita el uso de Valuaciones y se intenta que pueda ser manejado, al menos hasta cierto nivel, aún por estudiantes de preparatoria, es el ideado por el Dr. Carlos Imaz y ampliado y difundido por el M.C. Vicente Carrión Miranda y es el que presentamos a continuación:

Definición 3.1.

El conjunto R^* de números hiperreales consta de elementos de la forma:

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \omega^{\alpha_i}$$, donde $a_i, \alpha_i \in R; i=0,1,2,\ldots$ y $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$, ω es un "símbolo formal" cuyo significado se precisa al examinar los siguientes casos de números hiperreales:

i) r es el número real a_0, si $\alpha_0 = 0$ y $a_i=0$, $i=1,2,3,\ldots$

ii) r es un número hiperreal finito de forma $r=a_0+\sum_{i=1}^{\infty} a_i\omega^{\alpha_i}$, si $\alpha_0=0$ y si no sucede que $a_i \neq 0$ y $\alpha_i > 0$ a la vez para algún $i=1,2,3,\ldots$ Todo hiperreal finito se encuentra entre dos reales.

iii) r es un hiperreal infinitesimal (ó infinitésimo) si $\alpha_i < 0$ $\forall i=0,1,2,\ldots$ y $a_i \neq 0$ para alguna $i=0,1,2,\ldots$

En particular, si $a_0=1$, $\alpha_0=-1$ y $a_i=0$ para $i=1,2,3,\ldots$ entonces $r=\omega^{-1}$ es el infinitésimo mas simple y se expresa por $\dot{\lambda}$.

Un infinitesimal positivo se caracteriza por ser mayor que cero y menor que cualquier real positivo..

Un infinitesimal negativo es menor que cero y mayor que cualquier número real negativo.

El único número real infinitésimo es cero. Además, dados $\dot{\lambda}$ infinitesimal y $r \in R$, si $\dot{\lambda} > 0, -\dot{\lambda} < 0; r+\dot{\lambda} \notin R$; y $r\dot{\lambda}$ es infinitesimal.

iv) r es un número hiperreal infinito si $a_i \neq 0$ y $\alpha_i > 0$ para algún $i=0,1,2,\ldots$ En particular si $a_0=1$, $\alpha_0=1$ y $a_i=0$ para $i=1,2,3,\ldots$ entonces $r=w$, el infinito de expresión más simple, la base de la representación de los números hiperreales.

Igualdad de números hiperreales

Definición 3.2.

Dos números hiperreales r1 y r2 son iguales, r1=r2, si y sólo si, los coeficientes de las potencias iguales de w son iguales; es decir, si $r1=\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i}$ y $r2=\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta_i}$, entonces r1=r2 si y sólo si, $a_i=b_i$ y $\alpha_i=\beta_i$,i=0,1,2,...

En particular, r'=0 si y sólo si, $a_i=0$, i=0,1,2,... Además r=1 si y sólo si, $a_0=1$, $\alpha_0=0$ y $a_i=0$, i=1,2,3,...

Operaciones en R*

Definición 3.3.

i) Adición. Si $r1=\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i}$ y $r2=\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta_i}$, $r1+r2=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)w^{\gamma_i}$, $\alpha_i=\beta_i$ i=0,1,2,...

r1+r2 es el número hiperreal cuyos coeficientes se obtienen al sumar los coeficientes de potencias iguales de w.

En general, $\gamma_0\geq\alpha_0$ ó $\gamma_0\geq\beta_0$, no obstante, si $\alpha_0=\beta_0$ y $a_0=-b_0$, entonces $\gamma_0<\alpha_0$.

Observación. r+r=2r, r+r+r=3r,...

ii) Multiplicación. $r1r2=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha_k+\beta_i=\gamma_i} a_k b_i\right)w^{\gamma_i}$.

El coeficiente de cada término del producto r1r2 es la suma de aquellos productos de coeficientes $a_k b_i$, donde w tiene el mismo exponente.

Observación: $rr=r^2$, $r\ r\ r=r^3$,...

El conjunto R* con las operaciones de adición y multiplicación definidas forman un campo, (R*, +,.).

En lo que sigue se utilizan las expresiones

$$r1=\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i}\ ,\quad r2=\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta_i}\quad y\ r3=\sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma_i}.$$

Axiomas de campo en (R*, +,.)

Los once axiomas de campo se obtienen por operación directa aprovechando que (R +,.) es campo; a continuación a manera de ejémplo, mostramos las dos asociativas y la distributiva del producto respecto a la suma.

i) Asociativa de la suma (r1+r2)+r3=r1+(r2+r3); para toda $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^*$

Demostración.

(r1+r2) + r3
$$= \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha i} + \sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta i}\right] + \sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)w^{\delta i} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma i} = \sum_{i=0}^{\infty}\left[(a_i+b_i)+c_i\right]w^{\lambda i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left[a_i+(b_i+c_i)\right]w^{\lambda i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\lambda i} + \sum_{i=0}^{\infty}(b_i+c_i)w^{\lambda i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha i} + \left[\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta i} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma i}\right]$$
$$= r_1 + (r_2 + r_3)$$

Observación. (r1+r2)+r3=r1 +(r2+r3)=r1+r2+r3.

ii)Asociativa del producto (r1 r2)r3 = r1 (r2 r3); para toda $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^*$

Demostración.

(r1 r2) r3 =
$$\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta i}\right)\right]\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma i}\right)$$
$$= \left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha_k+\beta_l=\delta_i}^{\infty} a_k b_l\right)w^{\delta i}\right]\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma i}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\sum_{\delta_m+\gamma_n=\lambda_i}^{\infty}\left(\sum_{\alpha_k+\beta_l=\delta_m} a_k b_l\right)c_n\right]w^{\lambda i}$$

$$= \sum_{i=0} \left[\sum_{(\alpha_k+\beta_l)+\gamma_m=\lambda_i} (a_k b_l) c_m \right] w^{\lambda i} = \sum_{i=0} \left[\sum_{\alpha_k+(\beta_l+\gamma_m)=\lambda_i} a_k (b_l c_m) \right] w^{\lambda i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{\alpha_h+\rho_n=i}^{\infty} a_h \left(\sum_{\beta_l+\gamma_m=\rho_l} b_l c_m \right) \right] w^{\lambda i}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i} \right) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\beta_l+\gamma_m=\rho_i} b_l c_m \right) w^{\rho_i} \right]$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i} \right) \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta_i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma_i} \right) \right]$$

=r1 (r2 r3).

Observación. (r1 r2) r3 = r1(r2 r3) = r1 r2 r3

iii) Distributiva del producto con respecto a la suma.

r1 (r2 + r3)=r1r2 +r1r3; para toda $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}^*$

Demostración.

$$r1\ (r2 + r3) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i} \right) \left[\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta_i} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma_i} \right] = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i} \right) \left[\sum_{i=0}^{\infty} (b_i + c_i) w^{\delta_i} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{\alpha_k+\beta_l=\lambda_i} a_k (b_l + c_l) \right] w^{\lambda_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{\alpha_k+\beta_l=\lambda_i} (a_k b_l + a_k c_l) \right] w^{\lambda_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha_k+\beta_l=\lambda_i} a_k b_l + \sum_{\alpha_k+\beta_l=\lambda_i} a_k \gamma_i \right) w^{\lambda_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha_k+\beta_l=\lambda_i} a_k b_l \right) w^{\lambda_i} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha_k+\beta_l=\lambda_i} a_k b_l \right) w^{\lambda}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta_i} \right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i w^{\gamma_i} \right)$$

= r1r2 + r1r3.

El hecho , incompletamente mostrado,lo resumimos en el siguiente:

Teorema3.4.

La estructura algebraica (R*,+,.) es un campo.

ORDEN EN R*

Definición 3.5.

Sea $r=\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i}$; r es positivo, $r>0$, si $a_0>0$.
$r\geq 0$ significa $r>0$ ó $r=0$; $r<0$ significa r es negativo; y $r\leq 0$ es lo mismo que $r<0$ ó $r=0$.
Además, r1 es menor que r2, $r1<r2$, si $r2-r1>0$.
La definición anterior establece un órden en R*.

Teorema 3.6

Si r1,r2 y r3 son números hiperreales,entocnces

1. sólo una de las siguientes relaciones está definida:

   $r>0, r<0, r=0$.

2. $r1+r2>0$, si $r1>0$ y $r2>0$.
3. $r1\, r2>0$, si $r1>0$ y $r2>0$.

Teorema 3.7

Seán $r1=\sum_{i=0}^{\infty} a_i w^{\alpha_i}$ y $r2=\sum_{i=0}^{\infty} b_i w^{\beta_i}$. Entonces,

$r1<r2$ si, y sólo si,

1. $\alpha_0=\beta_0$ y $a_0<b_0$;ó tambien,si $\alpha_k=\beta_k$ y $a_k=b_k$ para $k=0,1,2,\ldots,n$ y $\alpha_{k+1}=\beta_{k+1}$ y $a_{k+1}<b_{k+1}$.
2. $\alpha_0<\beta_0$ y $b_0>0$;ó bien, si $\alpha_k=\beta_k$ y $a_k=b_k$ para $k=0,1,2,\ldots,n$ y $\alpha_{k+1}<\beta_{k+1}$ y $b_{k+1}>0$.
3. $\alpha_0>\beta_0$ y $a_0<0$; o si $\alpha_k=\beta_k$ y $a_k=b_k$ para $k=0,1,2,\ldots,n$ y $\alpha_{k+1}>\beta_{k+1}$ y $a_{k+1}<0$.

Teorema 3.8

Si r,r1,r2,r3 y r4 son números hiperreales, entonces.

1. Una y sólo una, de las siguientes relaciones es posible:
   $r1 > r2$, $r1 < r2$, $r1 = r2$
2. $r1 < r2$ y $r2 < r3$ implica $r1 < r3$.
3. $r1 < r2$ implica $r1 + r < r2 + r$
4. si $r1 < r2$ y $r > 0$ entonces $r1r < r2r$.
5. si $r1 < r2$ y $r < 0$ entonces $r1r > r2r$.
6. $r^2 > 0$, si $r \neq 0$. En particular, $1 > 0$
7. si $r1 < r2$ entonces $-r2 < -r1$. En particular, $r > 0$ implica $-r < 0$ y $r < 0$ implica $-r > 0$.
8. $0 < 1/r2 < 1/r1$, si $0 < r1 < r2$
9. si $r1 < r2$ y $r3 < r4$ entonces $r1 + r3 < r2 + r4$
10. si $r1 < r2$ y $r3 > r4$ entonces $r1 - r3 < r2 - r4$.

Valor absoluto

Definición 3.9

El valor absoluto de $r \in R^*$, $|r|$, se define como sigue:

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{si } r \geq 0 \\ -r, & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Teorema 3.10

Si r, r1,r2 $\in R^*$, entonces

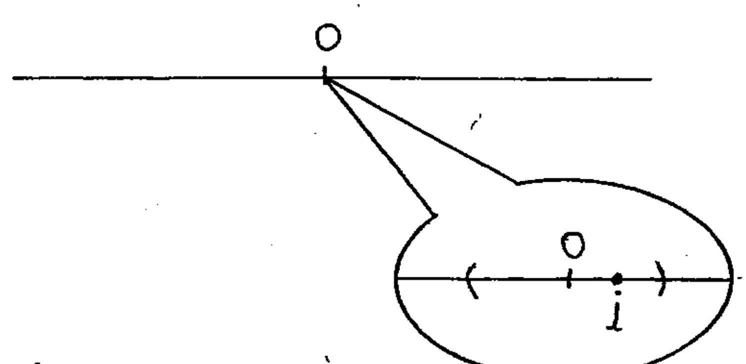
1. $|r| \geq 0$.
2. $|r| = 0$ si y sólo si $r=0$.
3. $|-r| = |r|$
4. $|r|^2 = r^2$
5. $|r| = \sqrt{r^2}$
6. $-|r| \leq r \leq |r|$.

7. $|r^{-1}| = |r|^{-1}$, si $r \neq 0$.
8. $|r_1| \leq |r_2|$ si y sólo si $-r_2 \leq r_1 \leq r_2$.
9. $|r| \geq r_1$, si y sólo si $r \leq -r_1$ ó $r \geq r_1$.
10. $|r_1| - |r_2| \leq |r_1 + r_2| \leq |r_1| + |r_2|$.
11. $|r_1 r_2| \leq |r_1| \, |r_2|$.
12. $|r| = i$, i infinitésimo, si y sólo si Re (r) = 0
 [Re (r) significa la parte real de r].
13. $r \in \mathbb{R}$ y $|r| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ si y sólo si $r = 0$.
14. Las proposiciones (12) y (13) son equivalentes.

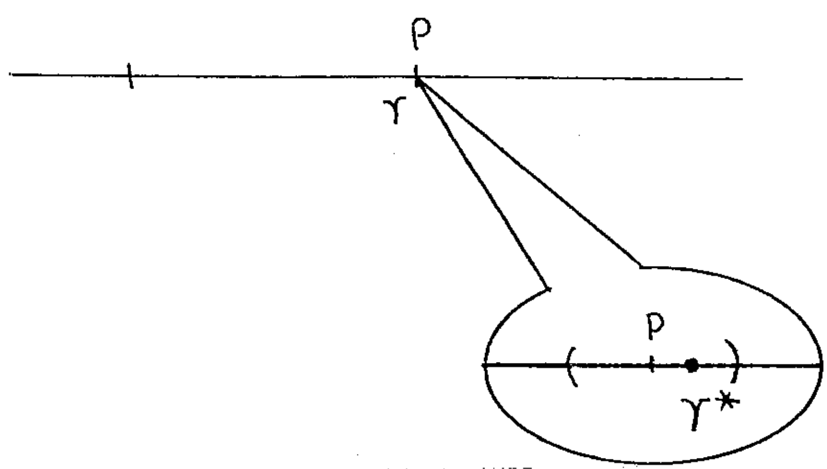
REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS HIPERREALES

Una forma de tener una representación geométrica para $\mathbb{R}^*$ - es ampliar la recta numérica. Un punto (número real) se imagina como un segmento de recta: el átomo del real (o mónada). El centro del segmento se asocia al punto. En la estructura de éste - segmento se encuentran los infinitesimales.

Por ejemplo, la visualización del átomo del cero es la siguiente:



Lo mismo se hace para cualquier punto de la recta.



Para los infinitos positivos, después de la recta numérica se añade a la derecha otra recta; y para los infinitos negativos se agrega una más a la izquierda.

$$\cdots\underbrace{\rule{4cm}{0.4pt}}_{\text{números hiperreales infinitos negativos.}}\cdots\underbrace{\rule{4cm}{0.4pt}}_{\text{números reales, infinitésimos e hiperreales finitos.}}\cdots\underbrace{\rule{4cm}{0.4pt}}_{\text{números hiperreales infinitos positivos.}}\cdots$$

Cada punto sobre las partes infinitas se considera una recta: el átomo del hiperreal infinito. Un número infinito se asocia al centro de esta recta compuesta de números reales, A su vez, en cada punto de ese átomo de reales de todo hiperreal infinito se encuentra un átomo infinitesimal. De esta manera se tiene una representación geométrica de los números hiperreales mediante la recta numérica hiperreal.

FUNCIONES

Definición 3.11

Una función hiperreal de variable hiperreal es un conjunto f^* no vacío de pares ordenados de números hiperreales tales que para cada $a^* \in A^*$, $A^* \subset R^*$, existe exactamente un número $b^* \in B^*$, $B^* \subset R^*$, para el cual a pareja ordenada (a^*, b^*) es elemento de f^*. Lo anterior se denota $f^*: A^* \rightarrow B^*$, se dice que $f^*(a^*)$ está definida y se escribe $f^*(a^*) = b^*$. A^* es el dominio de f^* y B^* el codominio.

$f^*(a^*)$ no está definida si no existe $b^* \in B^*$ tal que $(a^*, b^*) \in f^*$.

La imagen de f^* es el conjunto $C^* = f^*(A^*)$ de elementos $y^* \in B^*$ tales que existe $x^* \in A^*$ con la propiedad $f^*(x^*) = y^*$; es decir, $C^* = \{ y^* \in R^* / \; y^* \in B^* \Rightarrow f^*(x^*) = y^* \text{ para alguna } x^* \in A^* \}$

La gráfica G^* de f^* es el conjunto de parejas de números hiperreales (x^*, y^*) tales que $y^* = f^*(x^*)$,
$G^* = \{(x^*, y^*) / y^* = f^*(x^*), x^* \in R^*\}$.

Observaciones:

i) Los conceptos de igualdad de funciones, operaciones funcionales, álgebra de funciones, función compuesta, función inyectiva, función suprayectiva, función biyectiva, función inversa y sus teoremas, función algebraica, función racional, función irracional, función trascendente entre otros, se definen igual que en R, con la debida adaptación de lenguaje.

ii) Las definiciones de función real de variable real, gráfica de una función real y demás conceptos sobre funciones reales, así como la demostración de sus propiedades, son análogos a los casos hiperreales excepto que el dominio y codominio de las funciones en cuestión están contenidas en R, $f: A \rightarrow B$, $A \subset R$ y $B \subset R$.

iii) No siempre una función $f^*: R^* \longrightarrow R^*$ tiene representación gráfica en forma explícita; ejemplo:

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^* \text{ está en el átomo de un número racional} \\ 0, & \text{si } x^* \text{ está en el átomo de un número irracional} \end{cases}$$

EXTENSION DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Definición 3.12

Sean $f: A \longrightarrow B$, $A \subset R$ y $B \subset R$ y las extensiones A^* y B^* de los conjuntos A y B respectivamente. La función $f^*: A^* \longrightarrow B^*$ es la extensión natural de f si satisface las siguientes condiciones que, además, son naturales si se quiere que la extensión traslade las propiedades de f a la estructura de R^*.

1. La imagen de f es subconjunto de la imagen de la extensión del dominio de f y éste último conjunto es, a su vez, subconjunto de la extensión de la imagen de f.

$$f(A) \subseteq f^*(A^*) \subseteq [f(A)]^*.$$

2. $Ref^*(x^*) = f^*(Re(x^*)) = f(x)$ para toda $x^* \in A^*$ y $x^* = x + i$, i es infinitesimal y $x \in A$.

3. $f(x)$ es igual a su extensión $f^*(x^*)$ si ambos, x y $f(x)$, - son puntos aislados de A y $f(A)$, respectivamente.

4. Sea $x_0 \in A$ un punto de acumulación de A. Dado $\varepsilon > 0$, si -- $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cap A \neq \emptyset$ y si $y_0 = f(x_0)$ es un punto aislado de $f(A)$, entonces el intervalo $(x_0 - i, x_0)$ se transforma bajo f^* en $f(x)$, para $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$,
Si $(x_0, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y si $y_0 = f(x_0)$ es un punto aislado de $f(A)$, entonces el intervalo $(x_0, X_0 + i)$ se transforma bajo- f^* en $f(x)$, para $X \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

5. Si ambos, $x_0 \in A$ y $f(x_0)$, son puntos de acumulación y si dado $\varepsilon > 0$, se tiene $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cap A \neq \emptyset$ o $(x_0, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, entonces uno de los intervalos $(x_0 - i, x_0)$ ó $(x_0, x_0 + i)$ se --- transforma bajo f^* en laparte izquierda, o en la parte derecha, del átomo dse $f(x_0)$. En otras palabras, si en A^* se incluye la- parte izquierda del átomo de x_0 se tiene:

$$f^*\Big((x_0 - i, x_0)\Big) = \begin{cases} \Big(f(x_0) - j, f(x_0)\Big), \\ \quad \text{o bien,} \\ f(x_0), f(x_0) + j, \end{cases}$$

o si en A^* se incluye la parte derecha de x_0, se tiene:

$$f^*\Big((x_0, x_0 + i)\Big) = \begin{cases} \Big(f(x_0) - j, f(x_0)\Big), \\ \quad \text{o bien,} \\ \Big(f(x_0), f(x_0) + j\Big), \end{cases}$$

j infinitesimal.

6. Sea x_0 un punto de acumulación del conjunto A. Supóngase que para cada número real $N > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si -------- $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, o bien $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, $x \in A$, entonces $f(x) > N$. La extensión de f^* asocia uno de los intervalos $(x_0 - i, x_0)$ ó-- $(x_0, x_0 + i)$ al conjunto de los números hiperreales infinitos - positivos.

Ahora, supongase que para cada $N > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que - si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, o bien, $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, $x \in A$, entonces ---

(x_o-i, x_o) o (x_o, x_o+i) en el conjunto de los números hiperreales infinitos negativos.

7. Sea y_o un punto de acumulación de f(A).

Supóngase que dado $\mathcal{E}>0$, existe un número real N tal que -- si $x>N$, $x\in A$, entonces $f(X)\in(y_o-\mathcal{E}, y_o)$, o bien, $f(x)\in(y_o, y_o+\mathcal{E})$, $y_o\in f(A)$. La extensión f* transforma el conjunto de número hiperreales infinitos positivos en la parte izquierda del átomo de y_o, (y_o-j, y_o), o en la parte derecha del átomo de y_o, ---- (y_o, y_o+j), j es infinitesimal.

Supongase, además, que para cada $\mathcal{E}>0$, existe un número -- real N tal quesi $x<-N$, $x\in A$, entonces $f(x)\in(y_o-\mathcal{E}, y_o)$, o también $f(x)\in(y_o, y+\mathcal{E})$. La extensión natural de f, f*, asocia el conjunto de números infinitos negativos en uno de los,semiátomos (y_o-j, y_o) ó (y_o, y_o+j), j infinitesimal.

8. Considerese que para cada número real $M>0$, existe $N>0$ -- tal que si $x>N$, $x\in A$ entonces f(x) M. La extensión f* relaciona el conjunto de números infinitos positivos con él mismo.

Ahora, considérese que dado elreal $M>0$, existe $N>0$ tal - que si $x>N$, $x\in A$, entonces $f(x)<-M$. En este caso, la exten -- sión f* transforma el conjunto de infinitos positivos en el conjunto de infinitos negativos.

Enseguida, supóngase quepara cada números real $M>0$, existe $N>0$ tal quesi $x<-N$, $x\in A$ entonces $f(x)>M$. La extensión f*- asocia elconjunto de los infinitos negativos con el conjunto de los infinitos positivos.

Finalmente, dado el número real $M>0$ existe $N>0$ tal que - si $x<-N$, $x\in A$ entonces $f(x)<-M$. La extensión f* asocia el -- conjunto de los hiperreales negativos con él mismo.

Si f* cumple las condiciones antreriores se dice que f* -- es "extensión fiel" de f. En lo, sucesivo sólo se trabaja con extensiónes fieles.

EXTENSION DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Se ha dicho que puede no ser claro que la extensión de una función exista en forma canónica; no obstante, sí lo es para funciones expresables explícitamente en forma analítica como el caso de las funciones algebraicas cuyas extensiones cumplen canónicamente con las propiedades fundamentales definidas.

Todas las funciones algebraicas se extienden utilizando la misma forma que las define; en $f(x)$ se reemplaza x por $x^*=x+i$, se realizan las operaciones algebraicas indicadas y se expresa $f^*(x^*)$ en potencias de i.

Como un ejemplo de lo anterior mostramos a continuación la forma de extender la función polinomial:

<u>Ejemplos 3.13</u>

i) Extensión de la función polinomial.

Sea el polinomio $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k=0,1,\ldots,n$, $x \in \mathbb{R}$. La extensión $P^*(x^*)$ se obtiene como sigue:

$$
\begin{aligned}
P^*(x^*) &= P^*(x+i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (x+i)^k \\
&= a_0 + a_1(x+i) + a_2(x+i)^2 + \ldots + a_r(x+i)^r + \ldots \\
&\quad + a_{n-1}(x+i)^{n-1} + a_n(x+i)^n \\
&= a_0 \\
&\quad + a_1(x+i) \\
&\quad + a_2(x^2 + 2xi + i^2) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + a_r\Big[x^r + \binom{r}{1} x^{r-1} i + \binom{r}{2} x^{r-2} i^2 + \ldots + \binom{r}{h} x^{r-h} i^h + \ldots \\
&\qquad + \binom{r}{r-2} x^2 i^{r-2} + \binom{r}{r-1} x i^{r-1} + i^r\Big] \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + a_{n-1}\Big[x^{n-1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2} i + \binom{n-1}{2} x^{n-3} i^2 + \ldots + \binom{n-1}{h} x^{(n-1-h)} i^h + \\
&\qquad \ldots + \binom{n-1}{n-3} x^2 i^{n-3} + \binom{n-1}{n-2} x i^{n-2} + i^{n-1}\Big]
\end{aligned}
$$

$$+ a_n\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\,i + \binom{n}{2}x^{n-2}\,i^2 + \ldots + \binom{n}{h}x^{n-h}\,i^h + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2\,i^{n-2} + \binom{n}{n-1}x\,i^{n-1} + i^n\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} a_k\binom{k}{1}x^{k-1}$$

$$+ i^2\sum_{k=2}^{n} a_k\binom{k}{2}x^{k-2}$$

$$+ \ldots$$

$$+ i^h\sum_{k=h}^{n} a_k\binom{k}{h}x^{k-h}$$

$$+ \ldots$$

$$+ i^{n-1}\sum_{k=n-1}^{n} a_k\binom{k}{n-1}x^{k-n+1}$$

$$+ i^n a_n$$

$$= \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=h}^{n} a_k\binom{k}{h}x^{k-h}\,i^h$$

ii) Extensión de la función irracional $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$.

$$f^*(x+i) = \sqrt[n]{(x+i)^m}$$

$$= (x+i)^{\frac{m}{n}}$$

Se utiliza el desarrollo del binomio de Newton:

$$f^*(x+i) = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\,i + \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{1}{2!}\;x^{\frac{m}{n}-2}\,i^2$$

$$+ \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\frac{1}{3!}\;x^{\frac{m}{n}-3}\,i^3 + \ldots$$

$$= \sqrt[n]{x^m} + \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}\;i + \frac{m(m-n)}{2!\;n^2}\sqrt[n]{x^{m-2n}}\;i^2$$

$$+ \frac{m(m-n)(m-2n)}{3!\;n^3}\sqrt[n]{x^{m-3n}}\;i^3 + \ldots + \ldots$$

EXTENSIONES DE FUNCIONES NO ALGEBRAICAS

Las extensiones de las funciones no algebraicas se establecen de varias maneras distinguidas por niveles de complejidad. Primeramente se obtienen para las funciones trigonómetricas y las trigonómetricas inversas mediante sus definiciones geométricas y algebraicas; en ambos casos con una aproximación infinitesimal de primer orden. Asímismo, las funciones exponencial y logarîtmica se desarrollan algebraciamente con igual grado de aproximación.

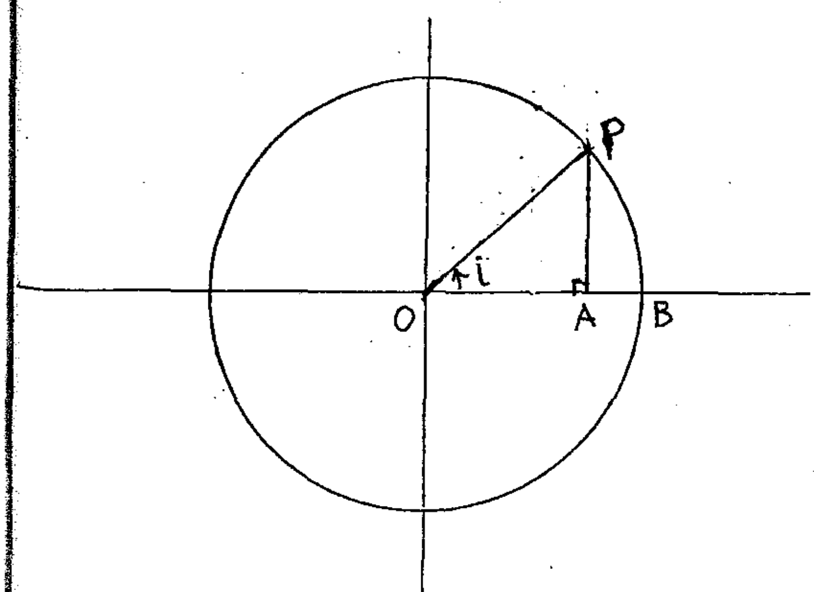
En segundo término, estas funciones se trabajan geométrica y algebraicamente hasta infenitésimas de segundo orden.

El siguiente resultado es de utilidad al establecer las extensiones: expresar las funciones trigonómetricas para el ángulo i, en términos de i.

Teorema 3.14

Terorema. Sen. i = i, Cos. i = 1, Tan. i = i, Cot. i $=\omega$, Sec i=1 y Csc. i $=\omega$, x $\in$ R e i es infenitésimo y $\omega = \frac{1}{i}$

Demostración,



AP $\perp$ OB,

$\measuredangle$ POB = $\overset{\frown}{BP}$ = i.

La semicuerda $\overline{AP}$ se considera aproximadamente igual a la medida del arco infinitesimal $\overset{\frown}{BP}$,

$\overline{AP}$ = $\overset{\frown}{BP}$ = i.

En el Δ OBP, rectángulo, se tiene

sen $\measuredangle$ BOP = AP,

Sen i = i

$$\text{Cos } i = \sqrt{1-\text{Sen}^2 i} = \sqrt{1-i^2} = 1;$$

$$\text{Tan } i = \frac{\text{Sen } i}{\text{Cos } i} = \frac{i}{1} = i;$$

$$\text{Cot } i = \frac{\text{Cos } i}{\text{Sen } i} = \frac{1}{i} = \omega;$$

$$\text{Sec } i = \frac{1}{\text{Cos } i} = 1;$$

$$\text{Csc } i = \frac{1}{\text{Sen } i} = \frac{1}{i} = \omega.$$

Teorema 3.15

Teorema. Si $f(x) = \text{Sen } x$ entonces $f^*(x+i) = \text{Sen } x + i\text{Cos}x$, ,$i$ es infinitesimal y $x \in \mathbb{R}$.

A continuación presentamos una lista de algunas funciones algebraicas y trascendentes mas comunes y sus respectivas extensiones a $\mathbb{R}^*$; algunas se presentan extendidas, además de hasta infinitésimos de primer orden, hasta infinitésimos de 2do. orden; los ejemplos anteriores ya demostrados marcan la pauta acerca de lo que se puede hacer para llegar a tales extensiones.

1. $f(x) = c$, $f^*(x+1) = c$
2. $f(x) = x$, $f^*(x+1) = x+i$
3. $f(x) = x^2$, $f^*(x+i) = x^2+2xi$ (primer orden) $f^*(x+i) = x^2+2xi+i^2$ (2do. orden).
4. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
   $f^*(x+i) = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=h}^{n} a_k \binom{k}{h} x^{k-h} i^h$ (hata el orden deseado).
5. $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$
   $f^*(x+i) = \sqrt[n]{x^m} + \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}\, i + \frac{m(m-n)}{2!\,n^2}\sqrt[n]{x^{m-2n}}\, i^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{3!\,n^3}\sqrt[n]{x^{m-3n}}\, i^3 +$ ..(hasta el orden deseado)
6. $f(x) = \text{Sen } x$
   $f^*(x+i) = \text{sen } x + i \cos x$
7. $f(x) = \tan x$
   $f^*(x+i) = \tan x + i \sec^2 x$
8. $f(x) = \text{arc sen } x$
   $f^*(x+i) = \text{arc sen } x + \frac{i}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $f(x) = \text{arc tan } x$
   $f^*(x+i) = \text{arc tan } x + \frac{i}{1+x^2}$

10. $f(x) = a^x$

$f^*(x+i) = a^x + ia^x \log a$

11. $f(x) = \log_a x$

$f^*(x+i) = \log_a x + \dfrac{i}{x \log a}$

12. $f(x) = \text{sen } x$

$f^*(x+i) = \text{sen } x + i \cos x - \dfrac{i^2}{2} \text{sen } x$ (hasta 2do. orden)

Todas las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas pueden extenderse hasta infinitésimas de 2do. orden o mas.

Así como todo hiperreal tiene parte real, pare infinita y parte infinitésima, pudiendo ser cero alguna de las tres; también una función $f^*: R^* \longrightarrow R^*$ tiene su parte real, simbolizada por Re (f^*) y iene siendo la restricción de la función f^* a R. Esto equivale a lo que en el modelo del Capítulo II se llama "parte estándar".

El concepto de parte real es lo que se usa para definir los conceptos más básicos de análisis, tales como límite, derivada, continuidad, etc. de una manera similar a como se hizo en II.7, con la diferencia que aquí podemos manipular algebraicamente con mayor soltura las extensiones de las funciones en cuestión:

Se prueba que Re(f) tiene las siguientes propiedades entre otras:

$$\mathrm{Re}(f \pm g) = \mathrm{Re}(f) \pm \mathrm{Re}(g)$$

$$\mathrm{Re}(f \cdot g) = \mathrm{Re}(f) \cdot \mathrm{Re}(g)$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathrm{Re}(f)}{\mathrm{Re}(g)}, \text{ si } \mathrm{Re}(g) \neq 0.$$

Enseguida escribo las definiciones de límite, derivada y continuidad:

Definición 3.16

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{Re}(f(x_0+i))$, donde i es un infinitésimo.

ii) $\dfrac{df}{dx}(x_0) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{f(x_0+i) - f(x_0)}{i}\right)$; i infinitésimo

iii) f es continua en x_0, significa que:

$f(x_0+i) - f(x_0) = J$; con i, J infinitésimos; o lo que es lo mismo; $\mathrm{Re}(f(x_0+i)) = f(x_0)+J$

En el caso de la definición del límite, no sólo se dice cuando una función f tiene por límite a un número dado L en un punto x_0, sino que además se proporciona el algoritmo para determinar dicho límite, así:

Si $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \mathrm{Re}\left(f(2+i)\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{(2+i)^2-5(2+i)+6}{(2+i)^2+3(2+i)-10}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{4+4i+i^2-10-5i+6}{4+4i+i^2+6+3i-10}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-i+i^2}{7i+i^2}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{i(-1+i)}{i(7+1)}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-1+i}{7+i}\right)$$

Por otro lado:

$$\frac{-1+i}{7+i} = \frac{-1}{7+i} + \frac{i}{7+i}$$

$$= \frac{-1}{7\left(1+\frac{i}{7}\right)} + \frac{1}{7\left(1+\frac{i}{7}\right)}$$

$$= -\frac{1}{7}\left(1-\frac{i}{7}+\frac{i^2}{7^2}-\frac{i^3}{7^3}+\frac{i^4}{7^4}\dots\right) + \frac{i}{7}\left(1-\frac{i}{7}+\frac{i^2}{7^2}-\frac{i^3}{7^3}+\frac{i^4}{7^4}\dots\right)$$

$$= -\frac{1}{7} + i\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}\right) + i^2\left(-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{7^3}+\dots\right)$$

$$\therefore \mathrm{Re}\left(\frac{-1+i}{7+i}\right) = -\frac{1}{7}$$ y por tanto

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{1}{7}$$

Si $g(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \mathrm{Re}\left(g(0+i)\right) = \mathrm{Re}\left(g(i)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\text{Sen } i}{i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{i}{i}\right) = \mathrm{Re}\ (1) = 1$$

Las reglas de derivación son mas fáciles de deducir.

4. Una fundamentación más sólida para el modelo de Imaz Ca----rrión.

El modelo del Capítulo II está bien fundado, pero es difí--cil manipularlo operativamente; mientras que el modelo de Imaz - Carrión es muy práctico, pero es sólo un modelo formal; axiomáticamente consistente, pero deja una sensación de falta de slidé.., sobre todo en la definición del elemento básico ω.

Enseguida nos proponemos a partir del modelo teórico del Capítulo II, "hacer brotar" en forma natural el modelo de Imaz Carrión, con ligeras adaptaciones, y así darle un fundamento mas - sólid. y a la vez aumentar el interés del modelo teórico, ya que le encontramos una salida para hacerlo operativo. Brevemente:

Del teorema II.3.5 se sigue que $^*N - N \neq \emptyset$.

Del teorema II.5.1 aseguro que $^*N - N$ es externo y $R_\infty = {}^*R$-Mo es externo, entre otros.

Según la definición II.5.3, los conjuntos $\{1,2,\ldots,\omega\}$ en particular, con $\omega \in {}^*N - N$ son *-finitos.

El teorema II.5.4 en su segunda parte afirma: "un conjunto*-finito de números reales tiene un elemento máximo y uno mínimo".

En particualr, para los conjuntos de la forma $\{1,2,\ldots,\omega\}$, $\omega \in {}^*N - N$, 1 es su elemento mínimo y ω su elemento máximo.

sea $\{1,2,\ldots,\omega_k\} = \bigcap_\alpha \{1,2,\ldots,\omega_\alpha\}$

Entonces $\omega = \omega_k$ es el mínimo elemento tal que $\omega \in {}^*N - N$

Ahora:

Sea $R^* = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \omega^{v_i} \right\}$; donde α_i, $v_i \in R$; $i = 0,1,2,\ldots$

y además $v_0 < v_1 < v_2 < \ldots$ y ω es el mínimo natural infinito.

Así se omiten los axiomas que definen formalmente a ω como el primer infinito y a $\frac{1}{\omega}$ como infinitésimo, puesto que ya está dado desde el principio que ω es el mínimo natural infinito- y no un elemento formal. El resto del modelo; operaciones, axiomas de campo, orden, etc. es lo mismo.

Otra manera de establecer la existencia del mínimo natural $\omega \in {}^*N - N$, es por la aplicación del T.F. a la siguiente fbf admisible que se cumple en N.

$(\forall A)(\exists x)\left[[A \subset N] \wedge [x \in A] \Rightarrow (\forall y)\left[[y \in A] \Rightarrow [x \leq y]\right]\right]$; o sea, todo subconjunto de N, tiene un primer elemento.

CAPITULO IV

Este capítulo cuarto y final lo dedicaremos a la presentación de algunas aplicaciones, tanto a la matemática misma como a la física, de los conceptos del cálculo con el manejo de infinitésimos e infinitamente grandes.

1,- Construcción de una función no Lebesgue-medible.

DEFINICION 1.1 ESPACIO DE MEDIDA

Supongamos que X es un conjunto, no necesariamente subconjunto de un espacio métrico. se dice que X es un espacio de medida si existe un σ-anillo $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de X (llamados conjuntos medibles) y una función de conjuntos aditiva numerable no negativa μ (llamada medida), definida en $\mathfrak{M}$

Si, además, $X \in \mathfrak{M}$, se dice que X es un espacio medible.

DEFINICION1.2 FUNCION MEDIBLE

Sea f una función definida en el espacio medible X, con valores en el sistema ampliado de los números reales.

Se dice que la función f es medible si el conjunto $\{x / f(x) > a\}$ es medible para todo número real a.

Si la medida μ a la que se refiere la definición 1.1 es la medida de Lebesgue, entonces decimos quela función es Lebesgue-medible.

TEOREMA 1.3

Cada una de las cuatro condiciones siguientes implica las otras tres.

$\{x/ f(x) > a\}$ es medible para todo a real.

$\{x/ f(x) \geq a\}$ es medible para todo a real.

$\{x/ f(x) < a\}$ es medible para todo a real.

$\{x/ f(x) \leq a\}$ es medible para todo a real.

TEOREMA 1.4

Una función medible que tiene períodos arbitrariamente pequeños es igual a una constante casi donde quiera. (c. d. q.)

DEFINICION 1.5

Un número racional estándar r se llama diádico, si existe un natural n tal que $2^n r$ es un entero.

Sea $w \in {}^*N - N$ un número natural infinitamente grande. Por el teorema II. 3.10 la siguiente función es interna.

$$\phi(x) = [2^w x] - 2[2^{w-1} x], \; x \in {}^*R$$

Sea f la restricción de ϕ a R de ${}^*R$

TEOREMA 1.6

f Tiene las siguientes propiedades:

i) f (al igual que ϕ) es periódica módulo uno; y toma 0 y 1 como únicos valores.

ii) Para todo número diádico estándar d, $0 \leq d \leq 1$, $f(d) = 0$.

iii) Todo número diádico d, $0 \leq d \leq 1$, es un período de f, es decir, $f(x+d) = f(x)$ para todo $x \in R$

iv) Para todo x, $0 \leq x \leq 1$, tenemos $f(1-x) = 1 - f(x)$, si x no es diádico.

DEMOSTRACION:

i) Es periódica módulo 1, porque para toda $x \in Z$ (Enteros), $f(x) = 0$.

La exhausión de casos para x indica que tanto $\phi(x)$ como $f(x)$ puede tomar sólo los valores 0 ó 1.

ii) Sea $d = \frac{a}{2^k}$, con $a \in Z$ y $k \in N$.

$$f(d) = f\left(\frac{a}{2^k}\right) = \left[2^{w-k} a\right] - 2\left[2^{w-k-1} a\right]$$
$$= \left[2^{w-k} a\right] - 2\left[\frac{2^{w-k} a}{2}\right]$$

Como $w \in {}^*N - N$, $w > k$ para todo $k \in N$; por tanto, $2^{w-k} a \in Z$ y $\frac{2^{w-k} a}{2} \in Z$; así:

$$f(d) = 2^{w-k} a - \cancel{2}\left(\frac{2^{w-k}}{\cancel{2}}\right) = 2^{w-k} a - 2^{w-k} a = 0$$

iii) Si d es un racional diádico estándar, sucede que:

$$f(x+d) = \left[2^w (x+d)\right] - 2\left[2^{w-1} (x+d)\right]$$
$$= \left[2^w x + 2^w d\right] - 2\left[2^{w-1} x + 2^{w-1} d\right]$$

Para cualquier entero $a \geq 0$ y cualquier real $y \geq 0$ sucede que $[y+a] = [y] + [a]$.

Así:

$$f(x+d) = \left[2^w x\right] + \left[2^w d\right] - 2\left[2^{w-1} x\right] - 2\left[2^{w-1} d\right]$$
$$= \left[2^w x\right] - 2\left[2^{w-1} x\right] + \left[2^w d\right] - 2\left[2^{w-1} d\right]$$
$$= \left[2^w x\right] - 2\left[2^{w-1} x\right] + 0 \text{ (por ii))}$$
$$= f(x)$$

iv) Si tenemos un entero $a>0$ y un real $y\geq 0$ tal que y no es entero, entonces $[a-y] = [a] - [y] -1$; ejemplo:

$[8-3.14] = [4.86] = 4$

$[8] - [3.14] - 1 = 8-3-1 = 4$; por tanto; para $0\leq x\leq 1$, sucede que:

$$\begin{aligned} f(1-X) &= [2^{w}(1-X)] - 2[2^{w-1}(1-X)] \\ &= [2^{w} - 2^{w}X] - 2[2^{w-1} - 2^{w-1}X] \\ &= ([2^{w}] - [2^{w}X] - 1) - 2([2^{w-1}] - [2^{w-1}X] - 1) \\ &= 1 + [2^{w}] - [2^{w}] - ([2^{w}X] - 2[2^{w-1}X]) \\ &= 1 - ([2^{w}X] - 2[2^{w-1}X]) \\ &= 1 - f(X) \end{aligned}$$

TEOREMA 1.7

La función real $f(X) = [2^{w}X] - 2[2^{w-1}X]$, $X\in\mathbb{R}$ no es medible en el sentido de Lebesgue.

Supongamos que f es una función medible, por el teorema 1.6 - iii), el teorema 1.4 y teorema 1.6 i) se sigue que $f=0$ (c.d.q) ó $f=1$ (c.d.q.)

Sea $A=\{X/0\leq X\leq 1 \text{ y } f(X)<\frac{1}{2}\}$. Entonces A es un conjunto medible (Definición1.2), y la función característica de A tiene todos los números diádicos como períodos, y así, por Teorema1.4,- $m(A)=0$ ó $m(A)=1$, donde m denota la medida de Lebesgue.

Considere ahora también el conjunto $B=\{X/0\leq X\leq 1 \text{ y } f(X)>\frac{1}{2}\}$.- Entonces por el Teorema 1.6 iii) y iv), se sigue que si X no es diádico y $0<X<1$, entonces $X\in A$ si y sólo si $1-X\in B$. Por lo tanto, el conjunto A_0 de puntos no diádicos de A y el conjunto B_0 de puntos no diádicos de B són simétricos con respecto al punto $\frac{1}{2}$. Debido a que el conjunto de puntos diádicos es numerable su medida de Lebesgue es cero, y así, $m(A)= m(A_0)= m(B_0)$ $=m(B)$. Entonces , $A_0\cap B_0= \emptyset$, $m(A_0\cup B_0)\leq 1$, $m(A_0)=m(B_0)$ y $m(A_0)=0$ ó $m(A_0)=1$ implica que $m(A_0)=m(B_0)=0$. Por tanto, $f(X)=\frac{1}{2}$(c.d.q.), la cual contradice el hecho de que f no toma el valor de $\frac{1}{2}$;por lo cual conculimos que f no es medible en el sentido Lebesgue.

2.- Velocidad media, velocidad instantanea y concepto Pitagórico de instante.

Sea f(t) la ecuación de posición, en función del tiempo, de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea y sea t_o el tiempo correspondiente a un determinado momento en que se observa el movimineto de dicha particula, cuya grafica distancia-tiempo se expresa en la figura 2.1

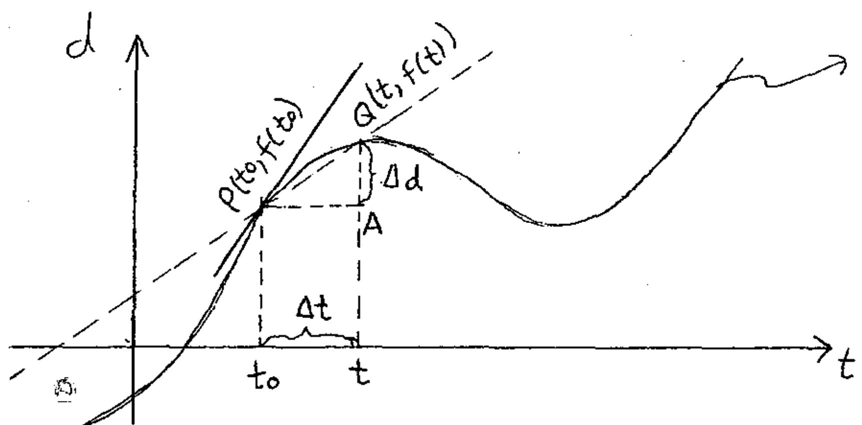


Figura 2.1

Le llamamos Δt a la diferencia entre el tiempo t_o y otro tiempo t ($\Delta t = t-t_o$); por tanto, $\Delta t \geq 0$, si $t \geq t_o$ y $\Delta t<0$, si $t<t_o$; así como Δd indica la diferencia de posiciones entre $f(t_o)$ y f(t); o sea, $\Delta d= f(t)-f(t_o)$.

DEFINICION 2.2

Se le llama velocidad media (aunque estrictamente hablando deberiamos decir rapidez media, ya que la velocidad es un vector) a la distancia total recorrida entre el tiempo empleado para recorrerla; o sea:

$$\bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_o)}{t-t_o}$$

Llamando, como lo hemos hecho, $t-t_o=\Delta t$; si despejo t, obtenemos $t= t_o+\Delta t$, y por tanto:

$$\bar{v} = \frac{f(t_o+\Delta t)- f(t_o)}{\Delta t} = \bar{v}(t_o,\Delta t)$$

Entre mas pequeño sea Δt, mas se parece $\bar{v}$ a $v(t_o)$; o sea, la velocidad en el preciso instante en que $t=t_o$.

Si hacemos $\Delta t= i$ (i infinitésimo), tenemos que:

$$\overline{v}(t_0, i) = \frac{f(t_0+i) - f(t_0)}{i}$$

Si f es una función regular (que es el ordinario) en el intervalo de tiempo considerado, $\overline{v}(t_0, i)$ difiere infinitesimalmente de $v(t_0)$ (velocidad instantanea), o sea, $\overline{v}(t_0,i)=v(t_0)+j$, donde j es otro infinitésimo. Por la regularidad de la función, cuando $\Delta t=i$, $\Delta d=k$, donde k es también infinitésimo.

Hablando en la terminología de Imaz:

$$Re(\overline{v}(t_0,i)) = Re\left(\frac{f(t_0+i)-f(t_0)}{i}\right) = Re\ (v(t_0)+j) = v(t_0)$$

pero

$$Re\left(\frac{f(t_0+i)- f(t_0)}{i}\right) = \frac{df}{dt}(t_0) \quad \text{(Definición III 3.16 ii))}$$

De nuevo, $\frac{df}{dt}(t_0) = v(t_0)$

Geométricamente, $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ representa la pendiente de la secante $\overline{PQ}$; al pasar a infinitésimos, tal cociente se convierte en $\frac{k}{i} = \frac{f(t_0+i)-f(t_0)}{i}$ que es la pendiente de una secante que difiere infinitesimalmente de la pendiente de la tengente a la curva en P.

Tomando en cuenta la continuidad de la curva (III.3.16 - iii)), si paso de t_0 a t_0+i, $f(t_0)$ pasa a $f(t_0)+k$, o sea, que "al transcurrir un instante, avanzo un punto" y en este sentido tendrían cierta razón los pitagóricos en su concepción de espacio y tiempo presentada en la discución resumida en las paradojas de Zenón (I.1).

En resumen era una discusión con diferencia de niveles, en nuestro lenguaje moderno diríamos que Zenón argumentaba en base a los reales y el Pitagórico en base a los hiperreales.

En el momento podía decirse que Zenón tenía más fundamento lógico en base a los conocimientos de la época.

3.- Longitudes, areas volúmenes, presión, fuerza.

Al calcular por ejemplo una area o un volumen o la fuerza total que ejerce un fluido sobre una superficie debido a la presión, lo que hacemos en la práctica es, aún inconcientes a veces del concepto riguroso de integral, tomár un elemento representante, por ejemplo una "lámina" delgada, para el caso de volumenes, de grosor "diferencial" pensándolo de grosor infinitesimal; sumamos continuamente dichas placas siguiendo las restricciones marcadas por la función y obtenemos el volumen (o lo deseado) que pretendíamos encontrar.

Caemos en las mismas ideas de Cavalieri (I.3), pero sin comparar con otros objetos, o mas cercamente con la de Demócrito (I.2).

Por cierto, el concepto de infinitésimo da respuesta a la aporía de Demócrito, ya que sin romper la continuidad de la recta, pudo hacer variaciones infinitesimales dentro del átomo correspondiente a cada punto.

En el modelo de Imaz-Carrión también se ha desarrollado algo del concepto de integral, aunque mas del 90% del trabajo se dedica a la fundamentación del cálculo diferencial en el lenguaje infinitesimal; también el objeto de la presente tesis es trabajar hasta el nivel del cálculo diferencial.

CONCLUSIONES

1.- La historia de los conceptos de elementos inifinitamente grandes e infinitésimos, alternativamente aceptados y rechazados, nos hacen ver el cuidado que debemos tener en hacer afirmaciones concluyentes.

2.- La matemática no es un monumento histórico que hace siglos se terminó de construir y que traería por consecuencia la concepción (está en mente de muchos)de que estudiarla es sólo conocer cosas inmutables del pasado, sino que a finales del siglo 20, la matemática aún se está haciendo.

3.- Así como en la antigüedad , y por muchos siglos, el universo numérico estuvo constituido sólo por los números naturales y fué necesario vencer grandes obstáculos épistemológicos para aceptar el concepto de número racional positivo, de irracional positivo, de número cero y el escándolo mas reciente, el concepto de números reales construidos formalmente en el siglo XIX y visualizados en una recta completa ; nos preguntamos:
a) ¿Llegará el momento en que el concepto de números hiperreales sea aceptado tan "normalmente" como el concepto de número real a pesar de que los infinitamente grandes e infinitésimos de pronto solo parecen ser números ideales como en su momento lo parecieron ser los números negativos (siglo XVII D.C.)?.
b)¿ Será posible que el cálculo infinitesimal, al estilo de Leibniz con ligeras variantes de lenguaje, sea utilizado con naturalidad y sencillez aún por estudiantes de preparatoria?

4.- Ya hay quines en México han hecho los primeros intentos de textos de cálculo con enfoque infinitesimal (# 18 de la bibliografía) y este es uno de los retos del momento para quines estamos interesados en la investigación y uso de nuevo del auténtico "Cálculo infinitesimal" tanto a nivel preparatoria como a nivel profesional, deferenciándose en grado de profundidad.

El Dr. Carlos Imaz ha hecho muchos trabajos en el campo de las matemáticas puras, al igual que el Dr. Eugenio Filloy; su interés último por la enseñanza de las matemáticas lo llevó a trabajar sobre el modelo infinitesimal del capítulo III; por otro lado, vemos que hay cierto "celo" infundado y hasta rivalidades entre quienes trabajan en los diversos campos de investigación en matemáticas , tales como Matemáticas puras, matemáticas aplicadas y matemática educativa; por tal motivo yo pregunto:

¿ Són realmente incompatibles los diversos campos de investigación en Matemáticas ?

¿ Nó es posible que dichos campos interactuén y se complementen ?

BIBLIOGRAFIA

1.- "Algebra Moderna"
J.N. Herstein.

2.- "Applied Nonstandar Analysis"
Martin Davis
Wiley-Interscience(1977).

3.- "Cálculo diferncial e integral"
William Anthony Granville
Cuarta reimpresión 1981.
LIMUSA

4.- "Cálculo Integral" (Tomos I y II)
José Guzmán H. y Verónica Hoyos A.
P.N.F.A.P.M.
Primera edición (1985)

5.- "CALCULUS" with Analytic Geometry" (second edition)
Earl W. Swokowskii
Prindle, Weber & Schmidt

6.- "Diccionario de las matemáticas modernas"
Lucien Chambadal
LAROUSSE

7.- El cálculo con geometría analítica"
Louis Leithold
Cuarta edición 1982
HARLA

8.- " Física " (parte I)
Robert Resnick y David Halliday
Décima cuarta impresión (1978)
C.E.C.S.A.

9.- "LAS MATEMATICAS"
Las ideas-las obras-Los hombres(tipo diccionario enciclopédico)
Ediciones mensajero Bilbao.

10.- "Measure Theory"
Paul R. Halmoss
Springer-Verlag (1974)
New York Heidelberg Berlin.

11.- "Modern Algebra"
B.L. VAN DER WAERDEN
Frederick Ungar Publishing Co. New York

12.- "Notas del curso de Geometría de la maestría abierta de la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN
Dr. Eugenio Filloy.

13.- Notas preliminares del modelo de Imaz ampliado y presentado por Carrión.

14.- "PAPERS IN THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS"
Supplement of the "AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY"
volúmen 80, june-july 1973, Number 6.

15.- "PRINCIPIOS DE ANALISIS MATEMATICO"
W. RUDIN
Tercera edición 1980-1981
M.C. Graw Hill.

16.- "¿Qué es la Matemática?"
Richard Courant y Herbert Robbins
Quinta edición, segunda reimpresión -1979.
Editorial Aguilar.

17.- "STUDIES IN MODEL THEORY"
M.D.Morley, Editor.
MAA studies in Mathematics, volume 8
The Mathematical Association of America

18.- "Usos y fundamentos de los infinitésimos el el siglo XVIII"(tesis de maestría)
Claudio de J. pita Ruíz V.
Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN (1983)

I N D I C E