Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Tesis de Pedro Cota Sauceda

# REGLAS DE MULTIPLICADORES Y OPTIMIZACION UN ENFOQUE UNIFICADO

Q CIRCIAS
1ST 5

Lic. Marco Antonio Valencia Arvizo

Director: Dr. Ruben Flores E.



Hillo., Son. 1988

# A G R A D E C I M I E N T O S

Con *gratitud y afecto* a mi director de tesis, Dr. Rubén Flores Espinoza, por su guía, e interés mostrado durante la realización del presente trabajo; por su carácter afable y dinámico que logró apartar de mí, la destemplanza y el desaliento. Agradezco también sus constantes críticas y sugerencias, sin las cuales hubiese sido imposible elucidar y desarrollar el tema de tesis propuesto.

Con *aprecio* a los miembros del comité de revisión de tesis, M.C. Marco Antonio Valencia Arvizu y M.C. Oscar Mario Rodríguez Sánchez, por lo acertado de las sugerencias efectuadas durante la lectura, seminario de exposición y redacción de ésta.

Con *cariño* a mis compañeros del Departamento de Matemáticas de la UNI-SON, por su apoyo moral y su comprensión, que sirviera de estímulo en mi constante afanar por hacer efectivo este anhelo vehemente.

*Dixi et salvaui animan mean.*

# CONTENIDO

# CAPITULO IV

CUATRO REGLAS BASICAS DE MULTIPLICADORES



# CAPITULO V

LOCALIZACION DE EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION SUJETA A RESTRICCIONES

# P R E S E N T A C I O N

El presente trabajo tiene como objetivos: presentar un enfoque unificado de la teoría de optimización restringida; y proporcionar un método analítico, que permita resolver el problema de la localización de extremos de funciones, sujetas a desigualdades como restricciones.

A fin de hacer efectivo el primer objetivo propuesto, fué necesario acudir al Análisis Convexo; razón por la cual se establecen los conceptos básicos de esta disciplina, organizados en el capítulo I.

Con este mismo fin, fué necesario formular un Nuevo Criterio de Optimalidad; dicho criterio se ejemplifica en el capítulo III. Adicionalmente, se obtienen en forma geométrica, las conclusiones de las cuatro reglas básicas de multiplicadores, establecidas en el capítulo IV.

El capítulo V, tiene por objeto ejemplificar el procedimiento analítico, que permite localizar el mínimo de una función, sujeta a restricciones de desigualdad.

# INTRODUCCION

En este trabajo, fundamentalmente, se trata el próblema de determinar las condiciones necesarias para un mínimo relativo de una función $\phi_0(x)$ sujeta a las P restricciones de desigualdad $\phi_1(x) \leq 0$, $\phi_2(x) \leq 0, \ldots,$ $\phi_p(x) \leq 0$ y a las q restricciones de igualdad $\phi_{p+q}(x)=0$, $\phi_{p+2}(x)=0, \ldots, \phi_{p+q}(x)=0$, donde $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p, \phi_{p+q}, \ldots, \phi_{p+q}$ son funciones de valor real, definidas sobre un subconjunto abierto de $R^n$,o bien sobre un subconjunto convexo de $R^n$. Los supuestos de diferenciabilidad sobre las funciones $\phi_i$ han sido debilitados e incluso hasta suprimido, como es el caso de la Regla de Multiplicadores Convexa, establecida en el Capítulo IV.

Con el propósito de establecer comparaciones entre los resultados obtenidos aquí, mediante un enfoque diferente, y los obtenidos por Karush [ 5 ] y Kuhn-Tucker [ 6 ], enunciaremos primero estos últimos. Antes daremos algunas definiciones preliminares.

Sean U un subconjunto de $R^n$ y $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p$ p+1 funciones de valor real definidas sobre U. Se dice que $X \varepsilon U$ es un punto factible, si $\phi_i(x) \leq 0 (i=1,\ldots,p)$. Denotaremos por S a la colección de todos los puntos factibles, dado por $S=\{X\varepsilon U | \phi_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\dots,p\}$.

Se dice que $\bar{X}\varepsilon U$ minimiza a $\phi_o(x)$, sujeta a las p-restricciones de desigualdad $\phi_1(x)\leqslant 0,\dots,\phi_p(x)\leqslant 0$ si $\bar{X}\varepsilon S$ y $\phi_o(\bar{x})\leqslant\phi_o(x)$, para todo $X\varepsilon S$.

Se dice que $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)\ \varepsilon\ R^n$ es una <u>dirección admisible</u> si $h\neq 0$ y $\phi'_i(\bar{x})h\leqslant 0$ $(i=1,2,\dots,p)$. Un <u>arco regular</u> $x_j(t)(j=1,\dots,n;0\leqslant t\leqslant t_o)$, se llamará admisible en el caso de que $\phi_i[x(t)]\leqslant 0$ para todo i y t. Se dice que $\bar{x}$ es un punto regular si $\phi_j(\bar{x})=0$ $(j=p+1,\dots,p+q)$ y $\phi'_{p+q}(\bar{x}),\dots,\phi_{p+q}(\bar{x})$ son linealmente independientes.

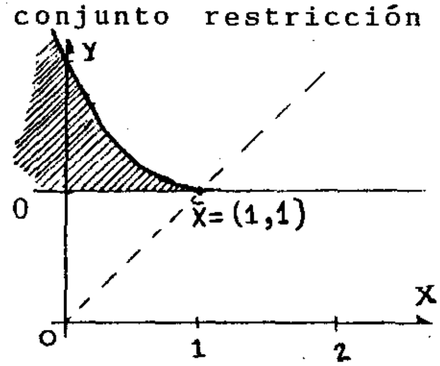
<u>Restricciones</u> de <u>cualificación</u> de <u>Kuhn-Tucker.</u> Supóngase que $\bar{x}$ es un punto sobre la frontera de S. Definimos el conjunto de direcciones admisibles

$$\bar{D}=\{h\varepsilon R^n | \phi'_i(\bar{x})\,h\leqslant 0, \text{ para todas aquellas } i \text{ tales que } \phi_i(\bar{x})=0\}$$

Las R-C-K-T se satisfacen en $\bar{x}$, si para todo $h\varepsilon\bar{D}$ existe un arco admisible que parte de $\bar{x}$ en la direccion h y es tangente a h.

Dicho de manera diferente; se dice que las restricciones de cualificación se satisfacen en todo punto $\bar{x}$ de la frontera del conjun- restricción, si para todo punto $h\varepsilon R^n$, $h\neq 0$, que satisface las desigualdades lineales homogéneas $\phi_i'(\bar{x})\cdot h \leqslant 0$ $(i=1,\ldots,p)$, existe un arco regular, tangente a h, que parte de $\bar{x}$ en la dirección h y está totalmente contenido en el conjunto restricción.

Las restricciones de cualificación, como lo afirman Kuhn-Tucker [ 6 ], tienen como finalidad la exclusión de singularidades sobre la frontera del conjunto restricción tales como un punto cúspide apuntando hacia el exterior de dicho conjunto. Por ejemplo, el conjunto restricción en dos dimensiones determinado por;




$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \phi_1(x,y) &= y-(1-x)^3-1 \leqslant 0 \\ \phi_2(x,y) &= 1-y \leqslant 0 \end{aligned}$$

En el punto frontera $\bar{x}=(1,1)$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Las únicas direcciones admisibles son los puntos de la forma $h=(a,0)$, $a>0$ y $h=(a,0)$, $a<0$. Dicho conjunto no satisface las restricciones de cualificación en el punto frontera $\bar{x}=(1,1)$, puesto que no contiene un arco regular que parta desde este punto en la dirección $h=(a,0)$,

$a>0$. En un tal punto singular la condición (i) del teorema de Karush-Kuhn-Tucker, que se enuncia a continuación, dejaría de cumplirse para cual quier vector $\bar{\lambda}$, como podría ser el caso para $\phi_0(x,y)=-x+y$, sujeta a las restricciones (1).

TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER. Si para toda dirección admisible h, existe un arco admisible que parte de $\bar{x}$ en la dirección h, y si $\bar{x}$ es un mínimo relativo de la función $\phi_0(x)$, sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_i(x)\leqslant 0$ $(i=1,\ldots,p)$, entonces existe $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_p)$ tal que si

$$\phi(x,\lambda)=\phi_0(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi_i(x),\text{ entonces}$$

$$\text{i)}\quad \phi_x(\bar{x},\bar{\lambda})=0$$

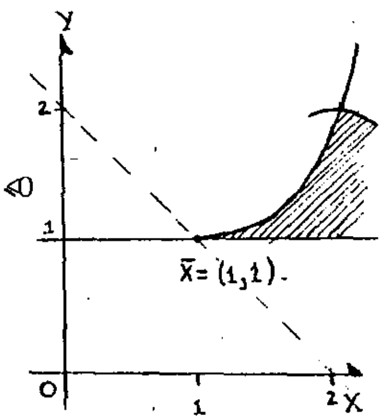
$$\text{ii)}\quad \bar{\lambda}_i\geqslant 0,\text{ para } i=1,\ldots,p$$

$$\text{iii)}\quad \phi_\lambda(\bar{x},\bar{\lambda})\cdot\bar{\lambda}=0;\text{ es decir } \bar{\lambda}_i\phi_i(\bar{x})=0, i=1,\ldots,p.$$

Donde las funciones $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p$ son funciones reales de clase C', definidas sobre un subconjunto abierto U de $R^n$. La función $\phi(x,\lambda)$ es la llamada función lagrangiana, y los parámetros $\bar{\lambda}_i$ son los llamados multiplicadores de lagrange, $\phi_x(x,\lambda)$, $\phi_\lambda(x,\lambda)$ denotan la derivada o gradiente de la función lagrangiana, con respecto a $x,\lambda$ respectivamente.

No obstante, lo dicho anteriormente, las singularidades sobre la frontera tales como un punto cúspide, no son necesarias ni suficientes para que las restricciones de cualificación dejen de satisfacerse. Por ejemplo, el conjunto restricción en dos dimensiones determinado por ;

$$\phi_1(x,y) = (1-x)^3 + y - 1 \leq 0$$
$$\phi_2(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1 \leq 0$$
$$\phi_3(x,y) = 1 - y \leq 0$$




En el punto (cúspide) $\bar{x} = (1,1)$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} \\ \phi_{3x} & \phi_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Es claro que en el punto $\bar{x}=(1,1)$ la única dirección admisible es $h=(a,0), a>0$ y que existe un arco admisible $x(t)$ que parte de $\bar{x}=(1,1)$ en la dirección $h$, tangente a $h$. En particular, el arco regular $x(t)=\bar{x}+th$, $0 \leq t \leq 1$ parte de $\bar{x}$ en la dirección $h$ y está totalmente contenido en el conjunto restricción (factible) $S$, donde $x(0)=\bar{x}$ y $x'(0)=h$. Por lo tanto, las restricciones de cualificación de Kuhn-Tucker se satisfacen en el punto (cúspide)

$\bar{x}=(1,1)$ y las condiciones (i)-(iii), del teorema de Karush-Kuhn-Tucker, se verifican en el punto $\bar{x}=(1,1)$, si por ejemplo $\phi_o(x,y)=x+y$, con $\bar{\lambda}_1=1/2$, $\bar{\lambda}_3=\bar{\lambda}_1+1$; $\bar{\lambda}_1>0$. Nótese además, que los multiplicadores $\bar{\lambda}_i$ no son únicos.

Sin embargo, existe una restricción de cualificación dada por Karush[ 5 ], mediante la cual las irregularidades sobre la frontera del conjunto factible S (puntos cúspide o no cúspide), quedan totalmente excluídas. Introduciendo esta restricción de cualificación, ligeramente diferente a la dada por Kuhn-Tucker, obtenemos el;

TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER MODIFICADO. Si existe alguna dirección admisible $\bar{h}\in R^n$ tal que:

a) $\phi_i'(\bar{x})\cdot\bar{h}<0$, para toda i tal que $\phi_i(\bar{x})=0$,
y si $\bar{x}$ mínimo relativo de la función $\phi_o(x)$,
sujeta a las restricciones de desigualdad
$\phi_i(x)\leqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,p)$, entonces existe
$\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_p)\in R^p$ tal que si;

$$\phi(x,\lambda)=\phi_o(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi(x),\text{ entonces}$$

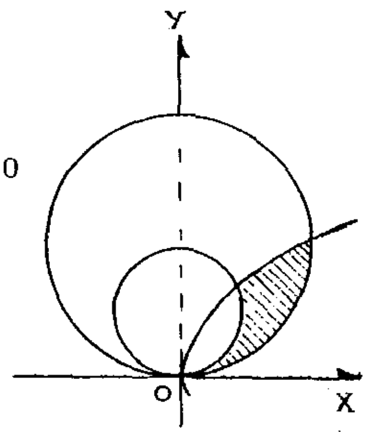
i) $\phi_x(\bar{x},\bar{\lambda})=0$,

ii) $\bar{\lambda}_i\geqslant 0$, para $i=1,2,\ldots,p$ y

iii) $\phi_\lambda(\bar{x},\bar{\lambda})\cdot\bar{\lambda}=0$, esto es; $\bar{\lambda}_i\phi_i(\bar{x})=0$, $(i=1,\ldots,p)$

Es fácil dar un ejemplo donde las hipótesis del teorema de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen, pero las hipótesis del teorema de Karush-Tucker Modificado, no se cumplan. Sea el conjunto restricción en dos dimensiones determinado por;

$$(*)\qquad \begin{aligned} \phi_1(x,y) &= x^2+(y-2)^2-4<0 \\ \phi_2(x,y) &= 1-[\,x^2+(y-1)^2\,]\leq 0 \\ \phi_3(x,y) &= y^2-x\leq 0 \end{aligned}$$




En el punto $\bar{x}=(0,0)$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} \\ \phi_{3x} & \phi_{3y} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el punto $\bar{x}=(0,0)$, la única dirección admisible es $h=(a,0)$, $a>0$. Es claro que en esta dirección, existe un arco regular que parte de $\bar{x}$ en la dirección h, totalmente contenido en el conjunto restricción y tangente a h. Además, si $\phi_0(x,y)=x$ entonces el punto $\bar{x}=(0,0)$ es un mínimo relativo de la función $\phi_0(x,y)$, sujeta a las restricciones (*). Obsérvese que, en el punto óptimo $\bar{x}=(0,0)$, las condiciones (i)-(iii) del teorema de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen con $\bar{\lambda}_3=1$, $\bar{\lambda}_2=2\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_1>0$. Adicionalmente, este ejemplo muestra que los multiplicadores $\bar{\lambda}_i$ no son únicos.

No obstante, las hipótesis del teorema de Karush-Kuhn-Tucker Modificado no se satisfacen en el punto $\bar{x}=(0,0)$, puesto que no existe una dirección admisible $\bar{h}$ tal que satisfaga las desigualdades lineales homogeneas $\phi_i'(\bar{x})\cdot\bar{h}<0$, para toda i tal que $\phi_i(\bar{x})=0$.

Sin embargo, el Teorema de Karush-Kuhn-Tucker Modificado, será formulado aquí como un corolario a un teorema más general, en el cual las restricciones de cualificación se han suprimido, que será probado en el capítulo IV.

TEOREMA DE JOHN. Supóngase que U es un subconjunto abierto de $R^n$, y que $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_p$ son p+1 funciones reales definidas sobre U, cada una diferenciable en $\bar{x}\in U$. Si $\bar{x}\in U$ es un mínimo relativo de la función $\phi_0(x)$, sujeta a las p-restricciones de desigualdad $\phi_1(x)\leqslant 0,\ldots,\phi_p(x)\leqslant 0$, entonces existe algún $\bar{\lambda}\neq 0$, $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_0,\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_p)\in R^{p+1}$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen;

i) Si $\phi(x)=\lambda_0\phi_0(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi_i(x)$, entonces $\phi'(\bar{x})=0$,

ii) $\bar{\lambda}_i\geqslant 0$, para i=0,1,...,p y

iii) $\bar{\lambda}_i\phi_i(\bar{x})=0$, para i=1,2,...,p.

Las condiciones (i)-(iii) serán referidas en el corolario, como las conclusiones de la regla de multiplicadores de John. La conclusión; se satisfacen con un $\lambda_0$ positivo significa que, sin pérdida de generalidad, $\lambda_0$ se puede tomar igual a la unidad.

La propiedad: si existe algún $\bar{h} \varepsilon R^n$ (admisible) tal que $\phi'(\bar{x}) \cdot \bar{h} < 0$ para toda i tal que $\phi_i(\bar{x})=0$, es la llamada restricción de cualificación de Karush, impuesta sobre las funciones restricción con la finalidad de excluir las singularidades sobre la frontera del conjunto factible S y así poder asegurar la existencia de un $\lambda_0$ positivo, y así poder dividir entre $\lambda_0$, obteniéndose $\bar{\lambda}_0 = 1$, $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1/\lambda_0, \ldots, \bar{\lambda}_p = \lambda_p/\lambda_0$. Con estos preliminares, enunciamos el:

COROLARIO. [Teorema de Karush-Kuhn-Tucker Modificado]. Si existe algún $\bar{h} \varepsilon R^n$ tal que $\phi_i'(\bar{x}) \cdot \bar{h} < 0$, para todas aquellas i tales que $\phi_i(\bar{x})=0$, entonces las conclusiones de la regla de multiplicadores de John se satisfacen con un $\lambda_0$ positivo.

Dicho de manera diferente: si las restricciones de cualificación de Karush se satisfacen, entonces

i) Si $\phi(x)=\lambda_o\phi_o(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi_i(x)$, entonces $\phi'(\bar{x})=0$

ii) $\bar{\lambda}=1, \bar{\lambda}_i\geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,p)$ y

iii) $\bar{\lambda}_i\phi_i(\bar{x})=0 \quad (i=1,\ldots,p)$.

La condición (i) en el teorema de John, nos asegura que el mínimo restringido de $\phi_o(x)$ se localiza entre los puntos críticos de la función lagrangeana $\phi(x)$. La conclusión iii), referida comunmente como la condición de holgura complementaria, nos dice que el multiplicador $\lambda_i$ será igual a cero cuando la restricción i sea inactiva, es decir, $\lambda_i=0$ para todas aquellas i tales que $\phi_i(\bar{x})<0$; y que el multiplicador $\lambda_i$ será positivo si la restricción i es activa, es decir, $\lambda_i>0$ para todas aquellas i tales que $\phi_i(\bar{x})=0$.

Cuando la función a minimizar $\phi_o(x)$ está sujeta, además, a las restricciones de igualdad $\phi_{p+1}(x)=0,\ldots,$ $\ldots\ \phi_{p+q}(x)=0$, es necesario imponer adicionalmente una condición de regularidad, con la finalidad de excluir las singularidades sobre la frontera del conjunto restricción (factible) definido por:

$$S=\{x\in R^n/\phi_i(x)\leqslant 0,\ \phi_j(x)=0\ (i=1,\ldots,p;\ j=p+1,\ldots,p+q)\}$$

RESTRICCION DE CUALIFICACION DE KARUSH.

Supóngase que $\bar{x}$ es un punto sobre la frontera de S. Definimos el conjunto de direcciones admisibles;

$$\bar{D}=\{h\varepsilon R^n/\phi_i'(\bar{x})\cdot h\leqslant 0,\ \text{para toda i tal que satisfaga}\ \phi_i(\bar{x})=0, \phi_j'(\bar{x})\cdot h=0,\ j=p+1,\dots,p+q.\}$$

Entonces, las restricciones de cualificación de Karush se satisfacen en el punto frontera $\bar{x}$, si las derivadas $\phi_{p+1}(\bar{x}),\dots,\ \phi_{p+q}(\bar{x})$ son linealmente independientes y existe algún $\bar{h}\varepsilon R^n$ tal que;

a) $\phi_i(\bar{x})\cdot\bar{h}<0$, para todas aquellas i tales que $\phi_i(\bar{x})=0$,
b) $\phi_j(\bar{x})\cdot\bar{h}=0$, para $j=p+1,\dots,p+q$.

De lo anterior, las condiciones necesarias para que un punto $\bar{x}\varepsilon U$ minimice la función $\phi_0(x)$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1(x)\leqslant 0,\dots,\phi_p(x)\leqslant 0$ y a las restricciones de igualdad $\phi_{p+1}(x)=0,\dots,\ \phi_{p+q}(x)=0$, están dadas por;

TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER MODIFICADO.

Si las derivadas de las funciones $\phi'_{p+1}(\bar{x}),\dots,\phi'_{p+q}(\bar{x})$ son linealmente independientes y existe algún $\bar{h}\varepsilon R^n$ tal que:

a) $\phi_i(\bar{x})\cdot\bar{h}<0$, para toda $i=1,\ldots,p$ tal que $\phi_i(\bar{x})=0$, y

b) $\phi_j(\bar{x})\cdot\bar{h}=0$, para toda $j=p+1,\ldots,p+q$,

y si $\bar{x}$ es un mínimo relativo de la función $\phi_0(x)$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1(x)\leq 0,\ldots,\phi_p(x)\leq 0$, y a las restricciones de igualdad $\phi_{p+1}(x)=0,\ldots,\phi_{p+q}(x)=0$, entonces existe $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_p,\bar{\lambda}_{p+1},\ldots,\bar{\lambda}_{p+q})\in R^{p+q}$ tal que si:

$$\phi(x)=\phi_0(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi_i(x)+\sum_{j=p+1}^{p+q}\lambda_j\phi_j(x),$$

entonces;

i) $\phi_x(\bar{x})=0$

ii) $\bar{\lambda}_i\geq 0$, para $i=1,\ldots,p$, ($\bar{\lambda}_j$ sin restricción de signo)

iii) $\phi_\lambda(\bar{x})\cdot\bar{\lambda}=0$; es decir, $\bar{\lambda}_i\phi_i(\bar{x})=0$, para $i=1,\ldots,p$.

Este resultado será establecido aquí como un corolario a un teorema más general, donde las restricciones de cualificación se han suprimido, a saber;

TEOREMA DE CARATHEODORY-JOHN.

Supóngase que U es un subconjunto abierto de $R^n$, y que $\phi_0, \phi_1,\ldots,\phi_p,\phi_{p+1},\ldots,\phi_{p+q}$ son $p+q+1$ funciones reales definidas sobre U, fuertemente diferenciables en $\bar{x}\in U$. Si $\bar{x}\in U$ minimiza $\phi_0$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1(x)\leq 0,\ldots,\phi_p(x)\leq 0$ y a las restricciones de igualdad $\phi_{p+1}(x)=0,\ldots,$ $\phi_{p+q}(x)=0$, entonces existe $\lambda\neq 0, \lambda=(\lambda\ ,\ldots,\lambda_{p+q})\varepsilon R^{p+q+1}$, tal que:

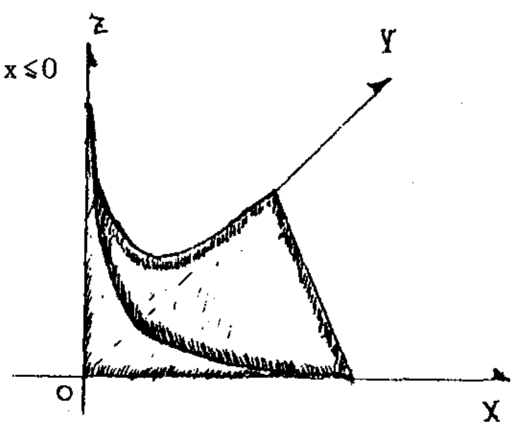
i) Si $\phi(x)= \sum_{i=0}^{p} \lambda_i\phi_i(x)+ \sum_{j=p+1}^{p+q} \lambda_j \phi_j(x)$, entonces $\phi'(\bar{x})=0$,

ii) $\lambda_i\geq 0$ para $i=0,1,\ldots,p$ y

iii) $\lambda_i\phi_i(\bar{x})=0$ para $i=1,\ldots,p$.

Es fácil dar un ejemplo donde las hipótesis del teorema de Karush-Kuhn-Tucker Modificado no se satisfacen y las del teorema de Caratheodory-John aún siguen siendo válidas. Considérese el conjunto restricción en el espacio de tres dimensiones determinado por;

$$(*)\quad \begin{aligned} \phi_1(x,y,z)&= y-(1-z)^3+x\leq 0\\ \phi_2(x,y,z)&= -x\leq 0\\ \phi_3(x,y,z)&= -y\leq 0\\ \phi_4(x,y,z)&= x-(1-z)^5=0 \end{aligned}$$




En el punto $\bar{x}=(0,0,1)$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} & \phi_{1z}\\ \phi_{2x} & \phi_{2y} & \phi_{2z}\\ \phi_{3x} & \phi_{3y} & \phi_{3z}\\ \phi_{4x} & \phi_{4y} & \phi_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las únicas direcciones admisibles son; $h=(0,0,a)$, $a>0$ y $h=(0,0,a)$, $a<0$. Sin embargo, no existe un $\bar{h}$ tal que; $\phi_i'(\bar{x})\cdot\bar{h}<0$ $(i=1,2,3)$ y $\phi_4'(\bar{x})\cdot\bar{h}=0$. Por lo tanto, las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker no se satisfacen. No obstante, las condiciones (i)-(iii) del teorema de Caratheodory-John se satisfacen con un $\lambda_0=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3>0$ y $\lambda_4=0$, para la función $\phi_0(x,y,z)=-z$ sujeta a las restricciones (*). Nótese que el punto $\bar{x}=(0,0,1)$ es un mínimo restringido de $\phi_0$, no obstante que las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker no se satisfacen.

Ahora bien, si la suposición de diferenciabilidad de las funciones $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_p$, que aparecen en la regla de multiplicadores de John, se intercambia por la hipótesis de convexidad de éstas; entonces las condiciones necesarias para un mínimo restringido, están dadas por la Regla de Multiplicadores Convexa.

## REGLA DE MULTIPLICADORES CONVEXA.

Supóngase que U es un subconjunto convexo de $R^n$, y que $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_p$ son $p+1$ funciones convexas definidas en U. Si $a\in U$ minimiza $\phi_0(x)$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1(x)\leq 0,\ldots,\phi_p(x)\leq 0$, entonces existe algún $\lambda\neq 0$, $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in R^{p+1}$ tal que:

i) Si $\phi(x)=\lambda_0\phi_0(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi_i(x)$ y $x\in U$, entonces $\lambda_0\phi_0(a)=\phi(a)\leq\phi(x)$,

ii) $\lambda_0\geq 0, \lambda_i\geq 0$ para $i=1,\dots,p$ y

iii) $\lambda_i\phi_i(a)=0$ para $i=1,\dots,p$.

Si las hipótesis de convexidad de las funciones se satisfacen y además se impone alguna restricción de cualificación sobre éstas; el Teorema resultante proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que un punto $a\in U$ minimice a $\phi_0(x)$ sujeta a las restricciones $\phi_1(x)\leq 0,\dots,\phi_p(x)\leq 0$.

COROLARIO. [Teorema de Suficiencia de Karush-Kuhn-Tucker]. Supóngase que las hipótesis de la regla de Multiplicadores Convexa se satisfacen. Si ninguna de las funciones $\phi_i$ para $i=1,\dots,p$ es identicamente cero sobre el conjunto factible $S=\{x\in U/\ \phi_i(x)\leq 0$ para $i=1,\dots,p\}$, entonces las conclusiones de la Regla de Multiplicadores Convexa se satisfacen con un $\lambda_0$ positivo. Recíprocamente, si las conclusiones de la Regla de Multiplicadores Convexa se satisfacen con un $\lambda_0$ positivo, entonces $a\in U$ minimiza $\phi_0(x)$ sujeta a las restricciones $\phi_1(x)\leq 0,\dots,\phi_p(x)\leq 0$.

Cualquier condición impuesta sobre las funciones restricción de una regla de multiplicadores, que permita asegurar que $\lambda_o$ es positivo, se le llama Restricción de Cualificación. Si una regla de multiplicadores contiene alguna restricción de cualificación, se le denominará Restringida. En caso contrario, se llamará Básica.

Las ideas claves utilizadas en la demostración de las tres Reglas de Multiplicadores Básicas, enunciadas anteriormente y probadas en el capítulo IV, se deben a B.H. POURCIAU [8] . La idea Básica es de carácter geométrico. Esto permite establecer un nuevo criterio de optimalidad, que hace posible la utilización de los teoremas de separación de conjuntos convexos.

Con el fin de mostrar explícitamente en que consiste dicha idea geométrica; supóngase que U es un subconjunto de $R^n$, que $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_p, \phi_{p+1}, \ldots, \phi_{p+q}$ son p+q+1 funciones reales definidas sobre U, y que deseamos localizar un punto $a \in U$ el cual minimice a $\phi_o(x)$ sujeta a las restricciones $\phi_1(x) \leq 0, \ldots, \phi_p(x) \leq 0, \phi_{p+1}(x)=0, \ldots, \phi_{p+q}(x)=0$. Si la geometría de este problema de optimización restringida se mira en el espacio imagen $R^{p+q+1}$ del mapeo $\phi(x)=(\phi_o(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_p(x), \phi_{p+1}(x), \ldots, \phi_{p+q}(x))$, $X \in U$, y si definimos el subconjunto convexo $W_a$ de $R^{p+q+1}$ como

$W_a=\{Y=(\eta_o,\eta_1,\ldots,\eta_{p+q})\in R^{p+q+1}/\eta_o<\phi_o(a),\eta_i\leq 0$ para $i=1,\ldots,p,\ \eta_i=0$ para $i=p+1,\ldots,p+q\}$, entonces la existencia de la solución óptima $a\in U$ está caracterizada por la intersección vacía de los conjuntos $\Phi(U)$ y $W_a$, y la Regla de Multiplicadores asociada a este problema es una consecuencia inmediata de la separación con un hiperplano de los conjuntos $\Phi(U)$ y $W_a$.

El objetivo del capítulo primero consiste en establecer los conceptos básicos de convexidad que serán utilizados en las pruebas y, principalmente, el teorema de separación de conjuntos convexos.

El tercer capítulo, fué elaborado con el propósito de establecer un nuevo criterio de optimalidad y, haciendo uso de dicho criterio, deducir geométricamente las conclusiones de las reglas de multiplicadores (básicas) enunciadas anteriormente.

En el capítulo cuarto, se enuncia y demuestra el Principio Unificado de las Reglas de Multiplicadores, el cual constituye el principal objetivo del presente trabajo. Además, en este capítulo, se proporcionan las pruebas de las Reglas de Multiplicadores que admiten desigualdades como restricciones, derivándose éstas del

Principio Unificado. El procedimiento empleado en las pruebas de las reglas de multiplicadores es análogo al utilizado en la demostración de dicho principio. La diferencia radica en la dificultad para convexificar la imagen $\Phi(U)$, no necesariamente convexa, y en mostrar como construir un conjunto convexo K que contenga a $\Phi(U)$ y que K permanezca aún separado de $W_a$.

Adicionalmente, se prueba la regla de multiplicadores que admite sólo restricciones de igualdad. La deducción se realiza mediante una aplicación directa del <u>Teorema del Mapeo Interior,</u> establecido en el capítulo II.

Si bien es cierto que las reglas de multiplicadores, caracterizan la solución óptima al problema de minimización restringida, no es fácil deducir de las mismas donde se encuentra localizada dicha solución. Esta dificultad se debe a que las conclusiones obtenidas en dichas reglas no proporcionan, por sí solas, un método constructivo para obtener la solución, no obstante caracterizarla. El propósito del capítulo quinto, consiste en ejemplificar un procedimiento analítico que permita obtener el mínimo de una función sujeta a restricciones de desigualdad.

# CAPITULO I

# CONJUNTOS CONVEXOS Y TEOREMAS DE SEPARACION

1.1 RECTAS E HIPERPLANOS. En nuestro presente trabajo haremos un uso considerable de la noción de Recta e Hiperplano en $R^n$. Una definición adecuada será la forma vectorial obtenida mediante la formulación de la ecuación de una recta y un hiperplano en $R^2$ y $P^3$, respectivamente, en términos vectoriales. Consideremos dos puntos $x_1,x_2$ y la recta que pasa por ellos, como se muestra en la figura de abajo. El vector $(x_2-x_1)$ es paralelo a la recta que pasa por $x_1,x_2$. Cualquier punto x sobre la recta que pasa por los puntos $x_1,x_2$ puede expresarse por

$$x= x_1+\lambda(x_2-x_1)=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1 \qquad (1\text{-}1)$$

para algún escalar $\lambda$. Entonces la ecuación (1-1) es la forma vectorial para la recta que pasa por $x_1,x_2$ en $R^2$, la cual será utilizada para definir una recta en $R^n$.

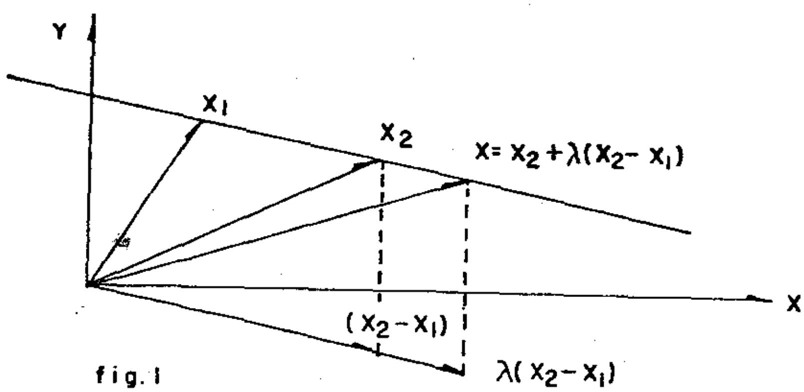



fig. 1

*Definición 1.1.* La recta que pasa por los puntos $x_1, x_2$ $(x_1 \neq x_2)$ en $R^n$ esta definida como el conjunto de puntos

$$X = \{x \mid x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1, \text{ y todo } \lambda \text{ en } R\}$$

*Definición 1.2.* El segmento de recta que une los puntos $x_1, x_2$ en $R^n$, denotado por $[x_1, x_2]$, está definido como el conjunto de puntos

$$[x_1, x_2] = \{x \mid x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1, \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

*Definición 1.3.* Producto interior euclidiano. Dados $\ell = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $R^n$, el producto interior de $\ell$ por $x$ se denota por $\ell \cdot x$ y se define como:

$$\ell \cdot x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Puede observarse que el producto interior da como resultado un número real $\alpha$.

*Definición 1.4.* Se dice que dos vectores $\ell$ y $y$ en $R^n$, son ortogonales si $\ell \cdot y = 0$.

La ecuación de un Plano H en $R^3$ se puede encontrar si se tiene un punto en el plano y un vector que sea ortogonal a todos los vectores que están sobre el plano. A ese vector ortogonal se le llama vector normal y lo denotaremos por $\ell$. Entonces, dado un punto $x_0$ en el plano H, y el vector normal, $\ell$, el plano H, que se muestra en la figura de abajo, se define como el conjunto de puntos que satisface la ecuación

$$\ell\cdot(x-x_0)=0 \qquad (1-2)$$

donde x es cualquier punto sobre el plano H, en $R^3$. Efectuando el producto en la ecuación (1-2) tenemos $\ell\cdot x=\alpha$ donde $\ell\cdot x_0=\alpha$, es un número real.

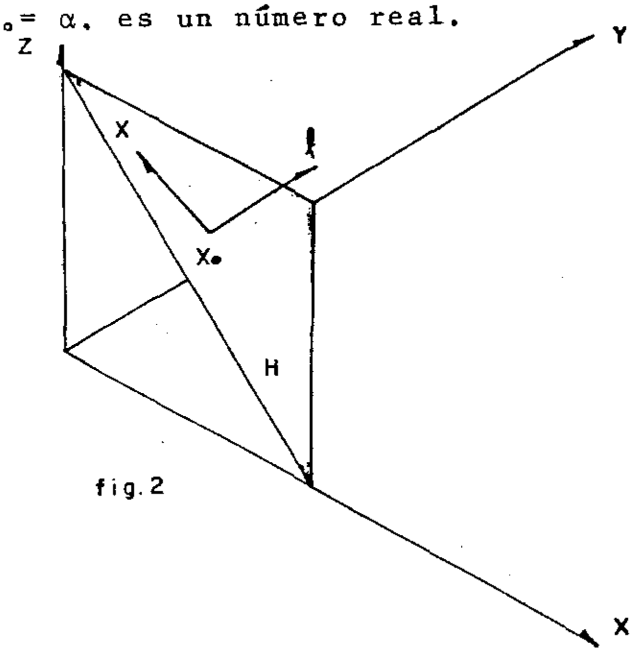



fig.2

La noción equivalente en $R^n$ de un plano en $R^3$ o una recta en $R^2$ es la de un hiperplano.

*Definición 1.5.* Un subconjunto H de $R^n$ se llama hiperplano siempre que, para algún $\ell\neq 0$ en $R^n$ y algún número real $\alpha$, H sea de la forma

$$H = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x = \alpha\} \qquad (1\text{-}3)$$

Un hiperplano $\ell \cdot x = \alpha$ en $R^n$ divide a todo el espacio $R^n$ en tres conjuntos mutuamente exclusivos. Estos son

$$H = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x = \alpha\}$$
$$H^- = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x < \alpha\}$$
$$H^+ = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x > \alpha\}$$

*Definición 1.6.* A los conjuntos $H^- = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x < \alpha\}$ y $H^+ = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x > \alpha\}$ se les llama semi-espacios abiertos. A los conjuntos $\bar{H}^- = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x \leq \alpha\}$ y $\bar{H}^+ = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x \geq \alpha\}$ se le llama semi-espacios cerrados.

## 1.2 CONJUNTOS CONVEXOS.

*Definición 2.1.* Un subconjunto C de $R^n$ es convexo si para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2$ en C el segmento de recta $[x_1, x_2]$ que une estos puntos está contenida totalmente en el conjunto.

Por convención consideraremos al conjunto vacío y al conjunto formado por un sólo punto como conjuntos convexos. Un punto x del segmento de recta $[x_1, x_2]$, dado por la expresión

$$x = \lambda x_2 + (1-\lambda) x_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

se le llama combinación lineal convexa. Mediante esta última noción podemos redefinir un conjunto convexo, de la siguiente manera: un subconjunto C de $R^n$ se dice que es convexo si y sólo si toda combinación convexa de dos puntos cualesquiera $x_1, x_2$ en C está contenida en el conjunto C

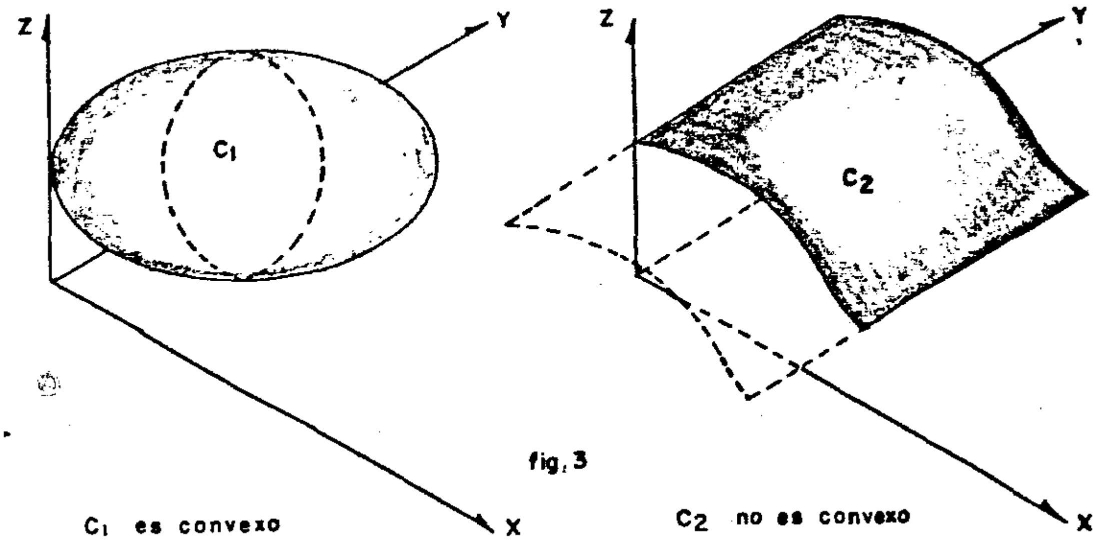



fig. 3

$C_1$ es convexo

$C_2$ no es convexo

EJEMPLO 2.1. Un hiperplano es un conjunto convexo. Sean $x_1, x_2$ dos puntos cualesquiera en el hiperplano H, es decir, $\ell \cdot x_1 = \alpha$ y $\ell \cdot x_2 = \alpha$, entonces $x = \lambda x_2 + (1-\lambda) x_1$ está en el hiperplano, puesto que:

$$\ell \cdot x = \ell \cdot \left[ \lambda x_2 + (1-\lambda) x_1 \right] = \lambda \ell \cdot x_2 + (1-\lambda) \ell \cdot x_2$$
$$= \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$$

EJEMPLO 2.3. Un sub-espacio lineal L de $R^n$ es convexo, prueba. Por definición, un subconjunto L de $R^n$ recibe el nombre de subespacio lineal si para todo $x_1, x_2$ en L se cumple que $\alpha x_1+\beta x_2$ están en L para cualesquiera números reales $\alpha, \beta$, Como una consecuencia inmediata de la definición, se tiene que L contiene todas las combinaciones lineales convexas, puesto que estas últimas son casos especiales de las anteriores.

EJEMPLO 2.4. El conjunto solución S de un sistema de desigualdades lineales

$$(1) \quad \lambda_{i1}x_1 + \lambda_{i2}x_2 +\ldots+ \lambda_{in}x_n \geqslant b_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

es un conjunto convexo en $R^n$. La misma proposición se cumple, aún cuando algunos o todos los signos de desigualdad $\geqslant$ sean reemplazados por $>$ y/o $=0$. Prueba, denotemos por $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $\ell_i=(\lambda_{i1},\ldots,\lambda_{in})$ entonces la desigualdad (1) la podemos escribir

$$\ell_i \cdot x \geqslant b_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

sean $x_1, x_2$ dos puntos cualesquiera del conjunto solución S, entonces, $\ell_i \cdot x_1 \geqslant b_i$ y $\ell_i \cdot x_2 \geqslant b_i$. Ahora, sea $z=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Tenemos que

$$\ell_i \cdot z= \ell_i \cdot [\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]=\lambda \ell_i \cdot x_2+(1-\lambda)\ell_i \cdot x_1 \geqslant$$
$$\geqslant \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i.$$

puesto que esto se cumple para toda $i=1,...,m$, esto demuestra que S es convexo.

A continuación introducimos un nuevo concepto, a saber el de función convexa (concava) que nos será de gran utilidad posteriormente, y nos proporciona ejemplos de conjuntos convexos.

*Definición 2.2.* Sea C un conjunto convexo, no vacío en $R^n$. Una función $\phi: C \to R$ se dice que es convexa sobre C, o simplemente convexa, si para dos puntos cualesquiera $x_1, x_2$ en C y un escalar $\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\phi(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1) \leq \lambda\phi(x_2)+(1-\lambda)\phi(x_1)$$

y se dice que es cóncava sobre C, o simplemente cóncava, si

$$\phi(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1) \geq \lambda\phi(x_2)+(1-\lambda)\phi(x_1)$$

La siguiente figura muestra la configuración geométrica de las nociones anteriores. Observe que el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la función convexa (cóncava) esta por arriba (abajo) de ella.

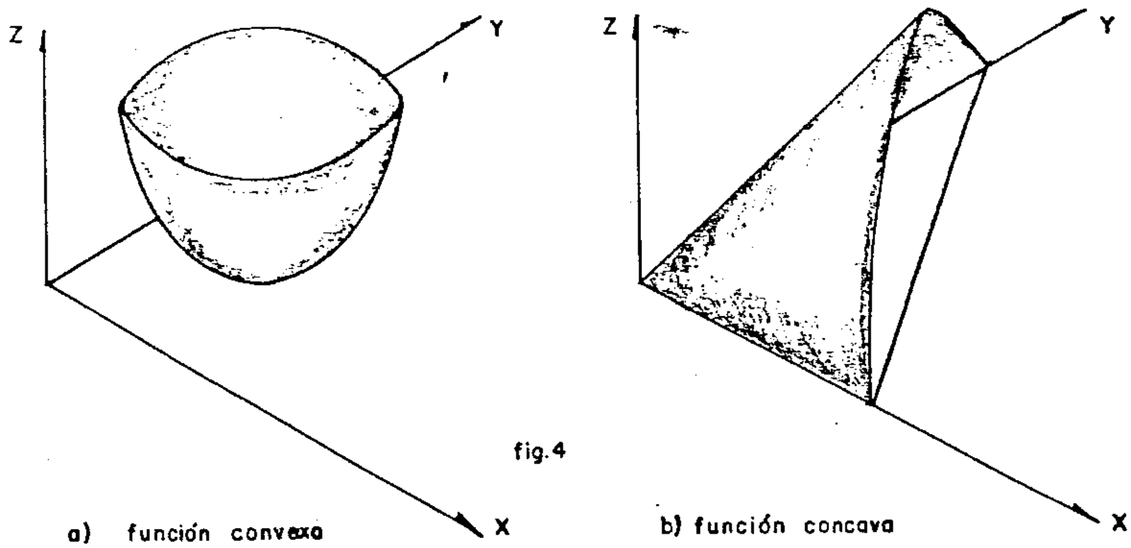



fig.4

a) función convexa b) función concava

EJEMPLO 2.5. La norma euclidiana es una función convexa definida sobre la totalidad de $R^n$. Prueba. Definiendo $\phi(x)=||x||$ y escribiendo x como combinación convexa de dos puntos $x_1, x_2$ en $R^n$ tenemos $x=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1$, $0\leq\lambda\leq 1$ y

$$\begin{aligned}\phi(x)= \phi(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)&=||\lambda x_2+(1-\lambda)x_1||\\ &\leq \lambda||x_2||+(1-\lambda)||x_1||=\lambda\phi(x_2)+(1-\lambda)\phi(x_1)\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $\phi$ es convexa.

El lema siguiente nos proporciona un ejemplo de conjunto convexo y adicionalmente nos será útil para demostrar que la bola cerrada (abierta) en $R^n$ es un conjunto convexo.

LEMA 2.1. Sean C un conjunto convexo, no vacío en $R^n$ y $\phi$:C–>R una función convexa (cóncava). Entonces el conjunto -

$S=\{x\varepsilon C|\phi(x)\leqslant\alpha,\alpha\varepsilon R\}$, es un subconjunto convexo de C.Prueba.
Tomemos dos puntos $x_1,x_2\varepsilon S$. por definición de S, $\phi(x_1)$, $\phi(x_2)\leqslant\alpha$ y puesto que $\phi$ define una función convexa, tenemos

$$\phi\left[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\right]\leqslant\lambda\phi(x_2)+(1-\lambda)\phi(x_1)$$
$$\leqslant\lambda\cdot\alpha+(1-\lambda)\alpha=\alpha$$

o $$\phi\left[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\right]\leqslant\alpha$$

así que $\lambda x_2+(1-\lambda)x_1$ está en S, y S es convexo.

EJEMPLO 2.6. Una $\delta$-bola cerrada (abierta) centrada en a, denotada por $\bar{B}_\delta(a)$ $\left[B_\delta(a)\right]$ y definida como el conjunto

$$\bar{B}_\delta(a)=\{x\varepsilon R^n|\ ||x-a||\leqslant\delta,\delta>o\}$$

Es un conjunto convexo.
Prueba. Definiendo $\phi(x)=||x-a||$ y observando que $\phi$ es una función convexa; podemos escribir

$$\bar{B}_\delta(a)=\{x\varepsilon R^n|\phi(x)\leqslant\delta\}$$

aplicando el lema 2.1., tenemos que $\bar{B}_\delta(a)$ es un conjunto convexo.

## 1.3 ALGEBRA DE CONJUNTOS CONVEXOS

LEMA 3.1. Dados dos conjuntos convexos $C_1, C_2$ en $R^n$, su intersección $C=C_1 \cap C_2$ es también un conjunto convexo. Prueba. Si $C=\phi$ o consta de un sólo punto, C es convexo. Supongamos que éste no es el caso. Sean $x_1, x_2$ dos puntos cualesquiera de $C=C_1 \cap C_2$. Entonces,

$$\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \varepsilon C_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$
$$\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \varepsilon C_2 \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

por lo tanto

$$\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \varepsilon C_1 \cap C_2 = C, \text{ y } C \text{ es convexo.}$$

La propiedad anterior se puede generalizar a un número mayor de conjuntos convexos.

TEOREMA 3.1. Si $C_1, \ldots, C_n$ son conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ es un conjunto convexo.

*Demostración*: Si $x_1, x_2 \ \bigcap_{i=1}^{n} C_i$, entonces $x_1, x_2$ están en $C_i$ para todo $i=1,\ldots,n$, puesto que cada uno de los $C_i$ es un conjunto convexo, la combinación lineal convexa de $x_1, x_2$;

$$\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \ \varepsilon \ C_i \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

puesto que esto se cumple para cualquier $i=1,\ldots,n$, se sigue que:

$$\lambda x_2+(1-\lambda)x_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} C_i.$$

Lo cual demuestra que la intersección es un conjunto convexo.

*Definición 3.1.* Sean $C_1,\ldots,C_m$ m subconjuntos convexos de $R^n$. La suma directa $C_1\oplus,\ldots\oplus C_m$ es el conjunto de todos los puntos $y \in R^n$ tales que $y=x_1+,\ldots,+x_m$ donde $x_j \in C_j, j=1,\ldots,m$.

Sea $C_j$ un subconjunto convexo de $R^n$. Entonces podemos definir a $-C_j$ como el conjunto de todos los puntos $-x_j$ donde $x_j \in C_j$.

*Definición 3.2.* Sean $C_i$ y $-C_j$ dos subconjuntos convexos de $R^n$. Entonces, definimos la suma $C_i\oplus(-C_j)= C_i-C_j$ como el conjunto de puntos $y \in R^n$ tal que $y=x_i+(x_j)= x_i-x_j$, donde $x_i \in C_i$ y $-x_j \in -C_j$.

TEOREMA 3.2. Sean $C_1,\ldots,C_m$ m subconjuntos convexos de $R^n$. - Entonces la suma directa $C_1\oplus,\ldots,\oplus C_m$ es un conjunto convexo.

*Demostración:* LLamémosle C a la suma directa $C_1\oplus,\ldots,\oplus C_m$ esto es, $C=C_1\oplus,\ldots,\oplus C_m$, y tomemos dos puntos $y \in C$ y $y' \in C$. Claramente debemos tener $x_j \in C_j$ y $x_j' \in C_j$ tal que $y=\Sigma x_j$, $y'=\Sigma x_j'$. Consideremos ahora la combinación lineal convexa, $\lambda y+(1-\lambda)y'$. Entonces tenemos que;

$$\lambda y+(1-\lambda)y'= \lambda\Sigma x_j+ (1-\lambda)\Sigma x_j'= \Sigma[\lambda x_j+(1-\lambda)x_j'].$$

Ahora, para J=1,...,m tenemos que $[\lambda x_j+(1-\lambda)x_j']\varepsilon C_j$, para cada $C_j$ convexo. Por lo tanto $\lambda y+(1-\lambda)y'\varepsilon C$ y C es convexo.

Tenemos ya definido el concepto de combinación lineal convexa de dos puntos $x_1,x_2$ como $\lambda x_2+(1-\lambda)x_1$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Esta definición puede ser generalizada a la noción de una combinación lineal convexa de m puntos.

*Definición 3.3.* Una combinación lineal convexa de un número finito de puntos $x_1,\ldots,x_m$ está definida como un punto

$$x= \Sigma_{j=1}^{m}\mu_j x_j, \mu_j\geqslant 0,\ j=1,\ldots,m,\ \Sigma_{j=1}^{m}\mu_j=1$$

LEMA 3.2. El conjunto de todas las combinaciones convexas de un número finito de puntos $x_1,\ldots,x_m$ es un conjunto convexo. Es decir, el conjunto

$$S=\{x|x= \Sigma_{j=1}^{m}\mu_j x_j,\ \mu_j\geqslant 0,\ j=1,\ldots,m\ \Sigma_{j=1}^{m}\mu_{j=1}\}$$

es convexo.

*Demostración:* Sean y,z dos puntos cualesquiera tales que:

$$y= \Sigma_{j=1}^{m} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \Sigma_{j=1}^{m} \alpha_j =1,$$

$$z= \Sigma_{j=1}^{m} \beta_j x_j, \quad \beta_j \geq 0, \quad \Sigma_{j=1}^{m} \beta_j =1.$$

Para probar que S es convexo, basta con mostrar que la combinación convexa $\lambda z+(1-\lambda)y$ está también en el conjunto - para cualquier $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$. Ahora

$$\lambda z+(1-\lambda)y= \Sigma_{j=1}^{m} \left[\lambda \beta_j+(1-\lambda)\alpha_j\right] x_j$$

pero tenemos

$$\lambda \beta_j+(1-\lambda)\alpha_j \geq 0,$$

y

$$\Sigma_{j=1}^{m} \left[\lambda \beta_j+(1-\lambda)\alpha_j\right] =\lambda \Sigma_{\beta j}+(1-\lambda)\Sigma\alpha_j =1.$$

entonces $\lambda x+(1-\lambda)y$ es también una combinación convexa de los $x_j$, y por tanto el conjunto es convexo.

EJEMPLO 3.1. La figura de abajo muestra la geometría del conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos - $x_1, x_2, \ldots, x_6$. En $R^2$ el conjunto de todas las combinaciones - convexas de m puntos lo encontramos uniendo con segmentos de recta todos los puntos. El polígono resultante y su interior es el conjunto buscado.

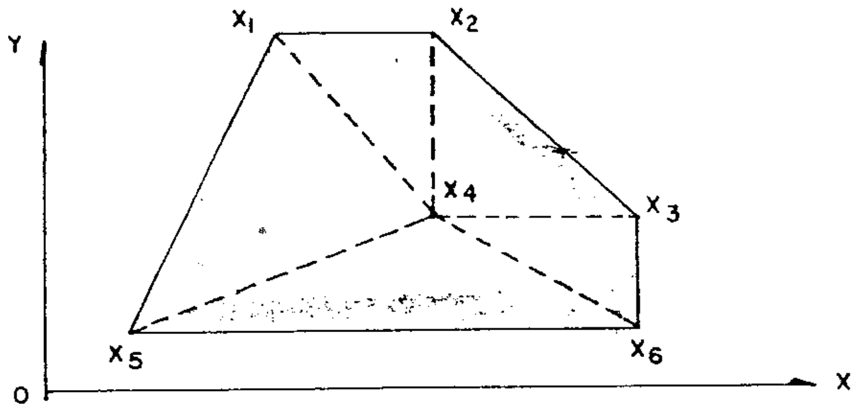



fig.5

Si un conjunto X en $R^n$ no es convexo, podemos ampliarlo hasta convertirlo en un conjunto convexo mediante la adición del menor número posible de puntos. La intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X deberá ser el mínimo conjunto convexo el cual contiene a X.

*Definición 3.4.* Sean $X_\lambda (\lambda \varepsilon \Lambda)$ la familia arbitraria de todos los conjuntos convexos que contienen a X. Entonces, $C(X) = \bigcap_{\lambda \varepsilon \Lambda} X_\lambda$ es el menor conjunto convexo que contiene a X y recibe el nombre de envoltura convexa o cápsula convexa de X.

1.4 SEPARACION DE CONJUNTOS CONVEXOS. La presente sección está dedicada exclusivamente a una discusión de la separación de conjuntos convexos en $R^n$, un elemento básico en nuestras deducciones de las reglas de los multiplicadores con restricciones de desigualdad.

*Definición 4.1.* Dos subconjuntos $C_1$ y $C_2$ de $R^n$ se dice que son separados si existe un hiperplano H tal que $C_1$ está contenido en $\bar{H}^+$ y $C_2$ está contenido en $\bar{H}^-$ donde $\bar{H}^+ = \{x \varepsilon R^n \mid \ell \cdot x \geqslant \alpha\}$ y

$H^- = \{x \in R^n | \ell \cdot x \leq \alpha\}$ son los semi-espacios cerrados de H.

Cuando $C_1$ y $C_2$ son separados, y ambos tienen intersecciones vacías con H, entonces $C_1$ y $C_2$ se dice que están estrictamente separadas. Como se muestra en la figura 6

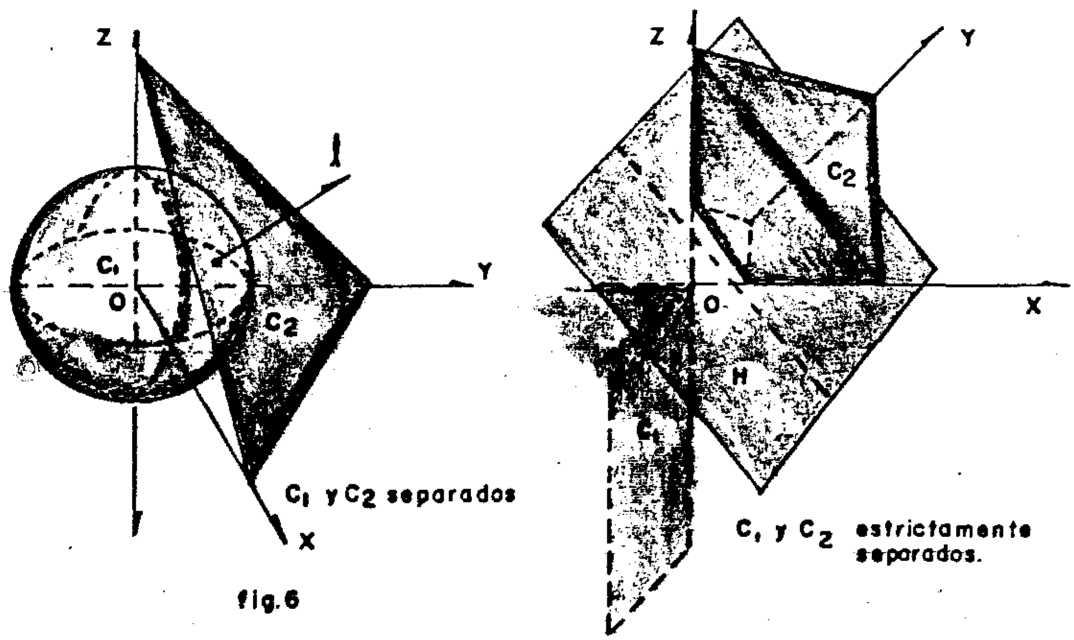



fig.6

LEMA A. Si C es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $R^n$ con $0 \notin C$, entonces C y $\{0\}$ están estrictamente separados.

PRUEBA: Sea $\phi$ ~~mapea~~ de $R^n$ en R dado por $\phi(x)=||x||^2$ donde $||x||=\sqrt{x \cdot x}$, entonces $\phi$ alcanza ~~un~~ su valor mínimo en el conjunto cerrado C, digamos en $\ell \in C$ (para el valor mínimo no es necesario que C sea compacto). Fijemos x en C. Entonces $0 \leq \lambda \leq 1$ implica que -

$\ell+\lambda(x-\ell)\varepsilon C$ por la convexidad de C. Puesto que el valor mínimo de $\phi$ se alcanza en $\ell$, sabemos

$$||\ell+\lambda(x-\ell)||^2 \geqslant ||\ell||^2$$

o

$$2\lambda\ell\cdot x-2\lambda\ell\cdot\ell+\lambda^2 x\cdot x- 2\lambda^2\ell\cdot x + \lambda^2\ell\cdot\ell\geqslant 0$$

Si además $\lambda\varepsilon(0,1]$, dividiendo por $\lambda$, y suponiéndose que $\lambda\to 0$. Entonces $\ell\cdot x\geqslant\ell\cdot\ell= ||\ell||^2$ . Puesto que $\ell\neq 0$, poniendo $\alpha=1/2||\ell||^2>0$ se obtiene $\ell\cdot x>\alpha>0$, lo cual muestra la separación deseada.

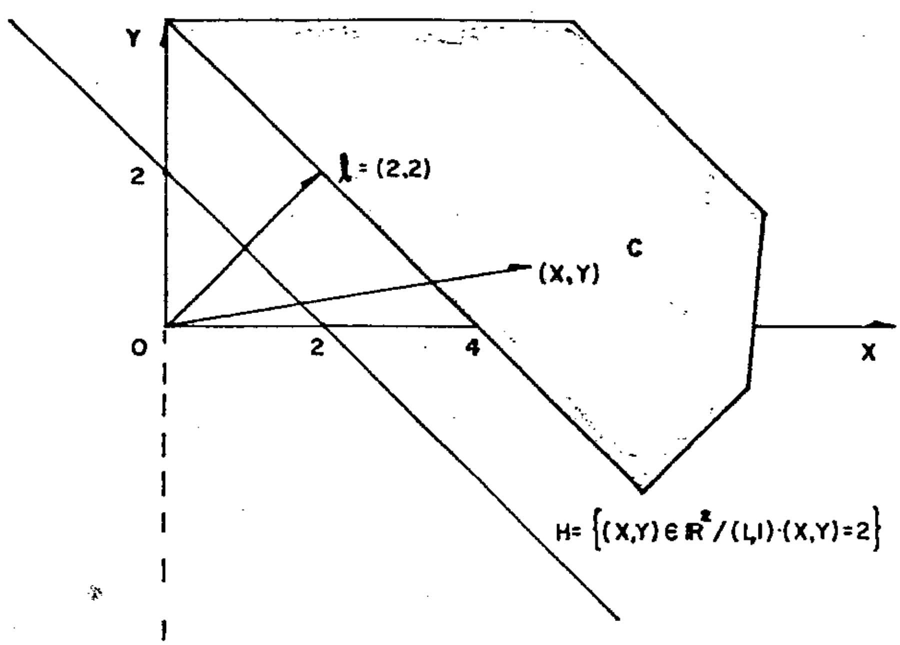



fig.7. C y {O} estrictamente separados

LEMA B. Si C es un subconjunto convexo, no vacío de $R^n$ y $0 \notin C$, ?
entonces C y $\{0\}$ son separados.

*Demostración:* Para obtener la separación deseada, basta mostrar la existencia de un Hiperplano Separador H. Para cada $x \in C$ denotemos por $k(x)$ el subconjunto $\{\ell \in R^n \mid ||\ell||=1$ y $\ell \cdot x \geqslant 0\}$ de la esfera unitaria en $R^n$. Si $\bigcap_{x \in C} k(x) \neq \phi$, entonces cualquier $\ell \in \bigcap_{x \in C} k(x)$ satisface $\ell \cdot x \geqslant 0$ para todo $x \in C$, y la prueba quedaría terminada. La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que $\bigcap_{x \in C} k(x)=\phi$. Puesto que los conjuntos - $k(x)$ son cerrados, entonces $k^c(x)$ es abierto y $U_{x \in C}\, k^c(x)$ cubren la esfera unitaria, denotada por $S=\{\ell \in R^n \mid \; |\ell|=1\}$. Por tanto, existe una subcubierta finita $k^c(x_1)$, $k^c(x_2),\ldots,k^c(x_p)$ tal que:

$$S= \bigcup_{i=1}^{p} K^c(x_i) = \Big[ \bigcap_{i=1}^{p} K(x_i) \Big]^c .$$

Pero entonces la cápsula convexa del conjunto finito -
$\{x_1,x_2,\ldots,x_p\}$ es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de $R^n$ que no contiene al cero, por que está contenida en C. Luego, por el lema 4, existe $\ell \in R^n$ con $|\ell|=1$ tal que $\ell \cdot x_i \geqslant 0$ $i=1,\ldots,p$ y esa $\ell \in \bigcap_{i=1}^{p} K(x_i)$, contrario a la suposición de que $\bigcap_{i=1}^{p} K(x_i)= \phi$. Con lo cual termina la demostración.

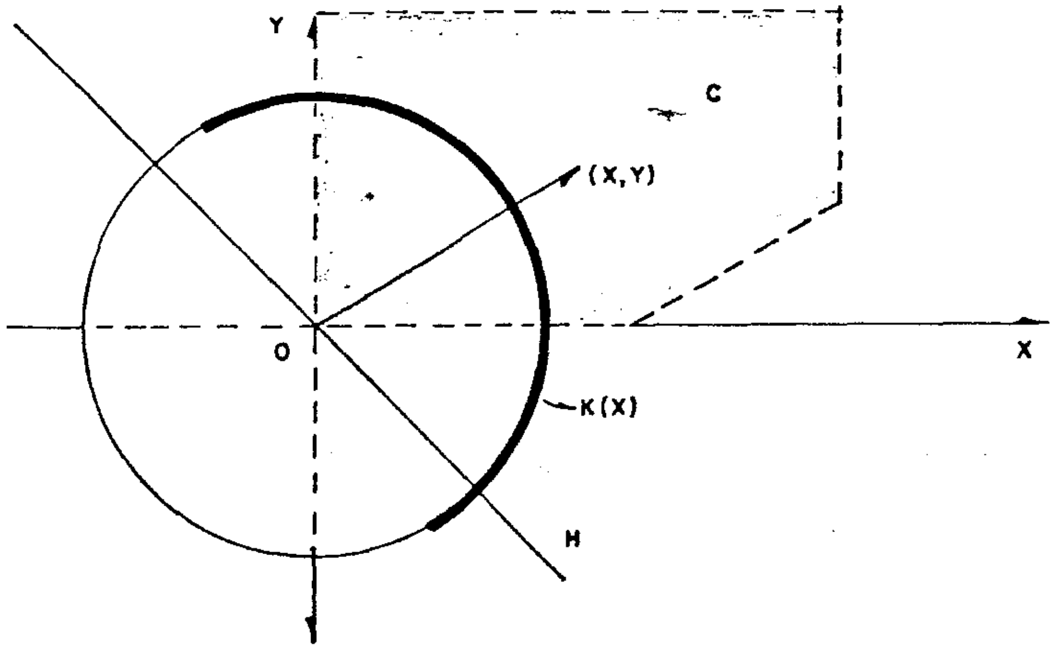



fig.8 C y $\{0\}$ separados

LEMA C. Si C es un subconjunto convexo, no vacío, de $R^n$ con $0 \notin \mathrm{Int}\, C$, entonces C y $\{0\}$ son separado, PRUEBA: puesto que $0 \notin \mathrm{Int}\, C$, existe una sucesión $\{x_k\}$ en $R^n$ tal que $x_k \notin C$ para todo n y $x_k \to 0$. Por el lema B, para cada k existe algún $\ell_k$ en $R^n$ con $|\ell_k|=1$ tal que satisface la desigualdad $\ell_k \cdot x \geq \ell_k \cdot x_k$ para cualquier x en C. En un subconjunto de la esfera unitaria en $R^n$, la sucesión $\{\ell_k\}$ deberá poseer una subsucesión$\{\ell_{kj}\}$ convergente a un $|\ell|=1$. Entonces, dado cualquier x en C, haciendo $j\to\infty$ en la desigualdad $\ell_{kj} \cdot x \geq \ell \cdot x_{kj}$ obtenemos $\ell \cdot x \geq 0$, como se deseaba.

TEOREMA DE SEPARACION. Supóngase que $C_1$ y $C_2$ son subconjuntos convexos no vacíos de $R^n$. Cada una de las condiciones siguientes asegura que $C_1$ y $C_2$ son separados.

(1) $0 \notin C_1 - C_2$

(2) $0 \notin^{*} \text{Int } (C_1 - C_2)$

(3) $\text{Int } C_2 \neq \phi$ y $0 \notin C_1 - \text{Int } C_2$

*Demostración:* (1) Sea $C = C_1 - C_2$. Entonces C es un subconjunto convexo, no vacío de $R^n$ con $0 \notin C$. Por el lema B, C y {0} son separados; esto es, algún $\ell \varepsilon R^n$ satisface $\ell \cdot x \leqslant 0$ para todo $x \varepsilon C$. Esto significa que para todo $X_1 \varepsilon C_1$ y todo $X_2 \varepsilon C_2$, tenemos $\ell \cdot x_1 \leqslant \ell \cdot x_2$. Por lo tanto, si $\alpha_1 = \sup\{\ell \cdot x_1 : x_1 \varepsilon C\}$ y $\alpha_2 = \inf\{\ell \cdot x_2 : x_2 \varepsilon C_2\}$, entonces $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Poniendo $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)|2$, y observando que cualquier - $x_1 \varepsilon C$ y cualquier $x_2 \varepsilon C_2$ satisface:

$$\ell \cdot x_1 \leqslant \alpha \leqslant \ell \cdot x_2$$

(2). Sea $C = C_1 - C_2$. Entonces C es un subconjunto convexo, no vacío de $R^n$ con $0 \notin \text{Int } C$. Por el lema C, C y {0} son separado, la prueba se completa como en (1). (3) Aplicando la condición (1). inferimos que $C_1$ y $\text{Int } C_2$ son separados. Pero esto implica que $\overline{\text{int } C_2} = C_2$ son separados.

# CAPITULO II

## II DERIVADA GENERALIZADA Y TEOREMAS DE MAPEO INTERIOR.

2.1. INTRODUCCION. La noción de derivada como una aproximación lineal a una función en una vecindad de un punto a, nos permite obtener una información más completa del comportamiento de f en dicha vecindad. Con el fin de establecer dicho concepto, daremos, a continuación, algunas definiciones que nos serán de gran utilidad.

*Definición 1.* Se dice que una aplicación $\ell: R^n \longrightarrow R^m$ es una aplicación lineal si;

$$\text{i) } \ell(x_1+x_2) = \ell x_1 + \ell x_2 \qquad (x_1, x_2 \varepsilon R^n)$$
$$\text{ii) } \ell(cx) = c\ell x \qquad (c\varepsilon R,\ x\varepsilon R^n)$$

obsérvese que si $\ell: R^n \longrightarrow R^m$ es lineal $\ell 0=0$ y que $\ell$ queda determinada completamente por medio de su acción sobre cualquier base de $R^n$.

NOTACION. Se representará por $\ell(R^n, R^m)$ el conjunto de todas las aplicaciones $c_1\,\ell_1 + c_2\,\ell_2$ por

$$(c_1\ell_1 + c_2\ell_2)x = c_1\ell_1 x + c_2\ell_2 x \quad (x\varepsilon R^n)$$

es claro, entonces, que $c_1\ell_1 + c_2\ell_2 \varepsilon\ (R^n,R^m)$, y que el conjunto $\ell(R^n,R^m)$ es un espacio vectorial.

*Definición 3.* Si $M\varepsilon\ell\ (R^n,R^m)$ y $\ell\ \varepsilon\ \ell\ (R^m,R^k)$ definimos su producto $\ell\cdot M$ como la composición de M y $\ell$:

$$(\ell\cdot M)x = \ell(Mx) \qquad (x\varepsilon R^n)$$

entonces $\ell\cdot M\ \varepsilon\ell(R^n,R^k)$.

*Definición 4.* Si $\ell\varepsilon\ell(R^n,R^m)$, definimos la Norma $||\ell||$ de $\ell$ como el Sup de todos los números $|\ell x|$, donde x tiene como rango todos los vectores en $R^n$ con $|x|\leqslant 1$. Se escribe

$$||\ell|| = \sup_{|x|\leqslant 1}|\ell x|$$

TEOREMA 1. (i) Si $\ell\varepsilon\ell(R^n,R^m)$, entonces $||\ell||$ es finito y es una aplicación continua de $R^n$ en $R^m$. (ii) Si $\ell, M\varepsilon\ell(R^n,R^m)$ y c es una escalar, entonces;

a) $||\ell+M|| \leqslant ||\ell|| + ||M||$

b) $||c\ell|| = |c|\ \ ||\ell||$.

con la distancia entre $\ell$yM definida por $||\ell-M||$, $\ell(R^n,R^m)$ es un espacio métrico. (iii) Si $M\varepsilon\ell\ (R^n,R^m)$ y $\ell\varepsilon\ell(R^m,R^k)$, entonces

$$||\ell\cdot M|| \leq ||\ell||\ ||M||$$

*Demostración.* (1) Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ la base natural en $R^n$ y supongamos que $x=\Sigma c_i e_i$, $|x|\leq 1$, de modo que $|c_i|\leq 1$ para $i=1,2,\ldots,n$. Ahora

$$|\ell x|=|\Sigma c_i \ell e_i|\leq\Sigma|c_i|\,|\ell e_i| \leq \Sigma|\ell e_i|<\infty$$

por tanto

$$||\ell||\leq \sum_{i=1}^{n}|\ell e_i|<\infty$$

si x, y $\varepsilon R^n$ entonces $|\ell_x-\ell_y|\leq||\ell||\,|x-y|$, por tanto $\ell$ es continua (uniformemente).

(ii) La desigualdad a) se deduce de

$$|(\ell+M)x|=|\ell x+Mx| \leq |\ell x| + |Mx| \leq (||\ell||+||M||)|x|$$

si $\ell,M,N,\varepsilon\ell(R^n,R^m)$, la desigualdad del triángulo se verifica

$$||\ell-N||=||\ell-M+N|| \leq ||\ell-M||+||M-N||$$

Como consecuencia del teorema anterior, $||\ell||$ es una norma sobre el espacio vectorial $\ell(R^n,R^m)$. Luego $\ell(R^n,R^m)$ es un espacio vectorial normado, posee pues, una topología perfecta mente definida por los espacios normados $R^n$ y $R^m$. Con la métrica inducida por la norma, los conceptos de conjunto abierto, continuidad, etc. tienen sentido para estos espacios.

## 2.1 APLICACIONES DIFERENCIABLES.

*Definición de Aplicación Diferenciable.* Sea U un subconjunto abierto de $R^n$. Un mapeo $\Phi:U\to R^m$ se dice que es diferenciable en el punto a $\in U$ si existe un mapeo lineal $\ell:R^n\to R^m$ con la propiedad de que para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

(2.2.1) $x\in U$ y $|x-a|\leq\delta$ implican $|\Phi(x)-\Phi(a)-\ell(x-a)|\leq\varepsilon|x-a|$

Si $\Phi$ es diferenciable en el punto a, la aplicación lineal contínua $\ell$ que define la relación (2.2.1) es única. Es un elemento de $\ell(R^n,R^m)$, que será denotado por $\Phi'(a)$ y llamado la Derivada Total Débil de la aplicación $\Phi$ en el punto a. La relación (2.2.1) con la notación $\Phi'(a)$ se escribe:
$|\Phi(x)-\Phi(a)-\Phi'(a)(x-a)|\leq\varepsilon|x-a|$.

TEOREMA DE UNICIDAD DE LA DERIVADA. Sean U un subconjunto abierto de $R^n$ y $\Phi:U\to R^m$ una aplicación. Si el mapeo $\Phi$ es diferenciable en el punto $a\in U$, entonces la derivada correspondiente $\ell=\Phi'(a)$ se determina de manera única.

*Demostración:* Supóngase que $\ell_1, \ell_2$ están en $\ell(R^n, R^m)$ y que satisfacen la definición anterior. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}0 \leq |\ell_1(x-a)-\ell_2(x-a)| &= |-\Phi(x)+\Phi(a)+\ell_1(x-a)+ \\ &\quad \Phi(x)-\Phi(a)-\ell_2(x-a)| \\ &\leq |\Phi(x)-\Phi(a)-\ell_1(x-a)|+|\phi(x)-\Phi(a)-\ell_2(x-a)| \\ &\leq 2\varepsilon|x-a|\end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene $0\leq|\ell_1(x-a)-\ell_2(x-a)\leq 2\varepsilon|x-a|$. Si $\ell_1 \neq \ell_2$, existe $z\varepsilon R^n$ con $\ell_1(z)\neq\ell_2(z)$, debido a la linealidad de $\ell_1$ y $\ell_2$ se tiene que $z\neq 0$. Ahora sea $\bar{z}=(\delta)|z|)z$ de modo que $|\bar{z}|=\delta$ de donde $|\ell_1(\bar{z})-\ell_2(\bar{z})|\leq 2\varepsilon|\bar{z}|$. Por tanto $|\ell_1(z)-\ell_2(z)|\leq 2\varepsilon|z|$ para todo $\varepsilon>0$, asi $\ell_1(z)=\ell_2(z)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\ell_1=\ell_2$.

Se dice que el mapeo $\Phi$ es diferenciable en U si $\Phi$ es - diferenciable en todo punto de U. Entonces el elemento - $\Phi'(a)\varepsilon\ell(R^n,R^m)$ depende de $a\varepsilon U$. Tenemos, pues, una aplicación $a\to\Phi'(a)$ que representamos por $\Phi'$;

$$\Phi':U\to\ell(R^n,R^m)$$

es, por definición, la aplicación derivada del Mapeo Diferenciable $\Phi:U\to R^m$. Debe observarse que la aplicación derivada - $\Phi'$ no toma sus valores en el mismo espacio $R^m$ que la aplicación $\Phi$.

*Definición de Mapeo Continuamente Diferenciable.* Se dice que $\Phi:U\to R^m$ es diferenciable con continuidad, o también de clase $C^1$, si:

i) $\Phi$ es diferenciable en U, es decir, diferenciable en todo punto de U;

ii) La aplicación derivada $\Phi':U\to\mathcal{L}(R^n,R^m)$ es continua. Para ser más explícitos, se requiere que para cada $x\in U$ y cada $\varepsilon>0$ exista un $\delta>0$ tal que: $|\phi'(Y)-\phi'(x)|<\varepsilon$ si $y\in U$ y $|x-y|<\delta$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Supóngase que f es una aplicación continua de $[a,b]$ en $R^n$ y f diferenciable en (a,b). Entonces existe x en (a,b) tal que:

$$|f(b)-f(a)|\leqslant (b-a)|f'(x)|$$

*Demostración:* Haciendo $z=f(b)-f(a)$, definiendo

$$\gamma(t)= z\cdot f(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b).$$

Entonces $\gamma$ es una función continua de valores reales sobre $[a,b]$ que es diferenciable en (a,b). Entonces, por el teorema del valor medio para funciones reales, se tiene:

$$\gamma(b)-\gamma(a)= (b-a)\gamma'(x)= (b-a)z\cdot f'(x)$$

para algún x en (a,b). Por otro lado,

$$\gamma(b)-\gamma(a)=z\cdot f(b)-z\cdot f(a)= z\cdot z =|z|^2.$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz obtenemos:

$$|z|^2=(b-a)z\cdot f'(x)|\leqslant(b-a)|z|f'(x)|.$$

Por consiguiente $|z|\leqslant(b-a)|f'(x)|$,que es la conclusión que deseabamos obtener.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO. Sean U un subconjunto abierto de $R^n$ y $\Phi:U\to R^m$ una aplicación continua. Si $\Phi$ es diferenciable en U, y si el segmento de extremos a y b está contenido en U, se verifica

$$|\Phi(b)-\Phi(a)|\leqslant |b-a|\cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\Phi'((1-t)a+tb)|.$$

*Demostración:* Definiendo $f(t)=\Phi((1-t)a+tb)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.Entonces, $f(t)$ es una aplicación diferenciable de t con

$$f'(t)= \Phi'((1-t)a+tb)\cdot(b-a)$$

de donde

$$|f'(t)|\leqslant|\Phi'((1-t)a+tb)|\,|b-a|$$

ahora bien, puesto que $f:[0,1]\to R^m$ es una aplicación diferenciable, el teorema del valor medio es aplicable a f, por tanto

$$|f(1)-f(0)|\leq|f'(t)| \qquad 0\leq t\leq 1$$

puesto que $f(1)=\Phi(b)$ y $f(0)=\Phi(a)$, se tiene

$$\begin{aligned}|\Phi(b)-\Phi(a)| &\leq |b-a|\cdot|\phi'((1-t)a+tb| \\ &\leq |b-a|\cdot \sup_{0\leq t\leq 1}|\phi'((1-t)a+tb|\end{aligned}$$

que es lo que se quería.

COROLARIO A. Sea U un subconjunto abierto en $R^n$ y sea $\Phi:U\to R^m$ una aplicación diferenciable en U. Si el segmento de extremos a y b está contenido en U y $x_0\in U$. Entonces se tiene:

$$|\Phi(b)-\Phi(a)-\phi'(x_0)\cdot(b-a)|\leq|b-a|\cdot \sup_{x\in[a,b]}|\Phi'(x)-\Phi'(x_0)|$$

*Demostración:* Defina $\zeta:U\to R^m$ para $x\in U$ como

$$\zeta(x)=\Phi(x)-\Phi'(x_0)(x)$$

y aplíquese el teorema anterior a $\zeta$.

2.3 APLICACIONES FUERTEMENTE DIFERENCIABLES. En los libros de texto de cálculo avanzado se presentan, usualmente, algunas variantes sobre la noción de derivada débil, como la definida anteriormente. Sin embargo, para nuestros propósitos será necesario establecer un nuevo concepto de diferenciabilidad, a la cual le llamaremos diferenciabilidad fuerte.

*Definición de Derivada Fuerte.* Sean U un subconjunto abierto en $R^n$, $\Phi:U\to R^m$ una aplicación continua, y $\ell:R^n\to R^m$ un mapeo lineal. Entonces, $\Phi$ es fuertemente diferenciable en a que está en U con derivada fuerte $\ell=\Phi'(a)$, si para todo $\varepsilon>0$ existe - $\delta>0$ tal que:

$$x_1,x_2 \text{ en } U \text{ y } |x_1-a|\leqslant\delta, |x_2-a|\leqslant\delta \quad \text{implica}$$
$$|\Phi(x_2)-\Phi(x_1)-\Phi'(a)(x_2-x_1)|\leqslant \varepsilon|x_2-x_1|$$

algunas propiedades importantes de los mapeos fuertemente - diferenciables son las siguientes:

PROPIEDAD 1. Diferenciabilidad fuerte implica diferenciabilidad.

Prueba. Si $\Phi$ es una aplicación fuertemente diferenciable en a con derivada fuerte $\Phi'(a)$ entonces $x_1=a$, lo cual está permitido en la definición, se obtiene el resultado deseado.

PROPIEDAD 2. Si $\Phi:U\to R^m$ es diferenciable en U, y si la aplicación $\Phi':U\to\ell(R^n;R^m)$ es continua en el punto a en U, entonces $\Phi$ es fuertemente diferenciable en el punto a, con derivada - fuerte $\ell=\Phi'(a)$.

Prueba. Puesto que, por hipótesis, $\Phi':U\to R^m$ es continua, entonces dada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$|x-a|<\delta$ y $x$ en U implican $|\phi'(x)-\phi'(a)|<\varepsilon$

Ahora, sean $x_1,x_2$ en la $\delta$-bola cerrada $B_\delta(a)$ contenida en el abierto U. Por lo que $|x_1-a|\leqslant\delta$ y $|x_2-a|\leqslant\delta$, y puesto que la $\delta$-bola $B_\delta(a)$ es un conjunto convexo se tiene que el segmento de recta que une a $x_1$ y $x_2$, $[x_1,x_2]$, está contenido en $B_\delta(a)$, y, por lo tanto, dentro de U. Aplicando el corolario A, tenemos:

$$
\begin{aligned}
|\phi(x_2)-\phi(x_1)-\phi'(a)(x_2-x_1)| &\leqslant |x_2-x_1|\cdot \sup_{x\varepsilon[x_1,x_2]}|\phi'(x)-\phi'(a)| \\
&\leqslant \varepsilon|x_2-x_1|
\end{aligned}
$$

Lo cual demuestra que $\phi'(a)$ es una derivada fuerte en el punto a.

Es posible aún debilitar las hipótesis y obtener un criterio de diferenciabilidad local fuerte.

PROPIEDAD 3. Sea U un subconjunto abierto en $R^n$. Si $\Phi:U\to R^m$ es una aplicación diferenciable en una vecindad del punto a en U y si $\phi'(x)$ es continua en a, entonces la aplicación $\phi$ es fuertemente diferenciable en el punto a con derivada fuerte $\ell=\phi'(a)$.

## 2.4 TEOREMAS DE MAPEO INTERIOR.

Los teoremas de Mapeo Interior juegan un papel fundamental en la teoría de optimización con restricciones. Estos resultados proporcionan condiciones que aseguran que: si a es un punto interior de U entonces la imagen $\phi(a)$ pertenece al interior de la imagen $\phi(U)$. Para establecer dichos resultados en forma directa, haremos uso del teorema de punto fijo de Lipschitz.

PRINCIPIO DEL MIN/MAX. Una función continua de valores reales definida sobre un subconjunto no vacío, cerrado y acotado de $R^m$, alcanza su máximo y su mínimo sobre este conjunto.

*Definición de Mapeo Contractivo.* Sea C contenido en $R^m$. Un Mapeo $\psi:C\to R^m$ se dice que es contractivo si existe una constante $\alpha$ con $0\leq\alpha<1$ tal que:

$$|\psi(p)-\psi(q)|\leq\alpha|p-q| \text{ para todo } p,q \text{ en } C.$$

TEOREMA DE PUNTO FIJO DE LIPSCHITZ. Sea C un subconjunto cerrado de $R^m$, y sea $\psi:C\to C$ una contracción. Entonces $\psi$ tiene un punto fijo único en C, es decir, un punto p para el cual $\psi(p)=p$.

*Demostración:* Definimos $f:C\to R$ por $f(x)=|x-\psi(x)|$. Entonces se tiene que un cero para f es un punto fijo para $\psi$. Para probar la continuidad de f, obsérvese que:

$$f(x)-f(y)=|x-\psi(x)|-|y-\psi(y)|\leqslant|x-\psi(x)-(y-\psi(y))|$$
$$=|x-y-(\psi(x)-\psi(y))|\leqslant|x-y|+|\psi(x)-\psi(y)|$$
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|+|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant|x-y|+\alpha|x-y|$$
$$|f(x)-f(y)|\leqslant(1+\alpha)|x-y|$$

si C es acotado, el principio del Min/Max asegura que existe p en C tal que f(p) es un mínimo. Entonces $f(p)\leqslant f(\psi(p))\leqslant \alpha f(p)$. Puesto que $f(p)\geqslant 0$ y $\alpha<1$, tenemos $f(p)=0$. Lo cual demuestra que p es un punto fijo de $\psi$.

Si C no es acotado, elijamos q en C, fijemos

$$\bar{C}=\{x\varepsilon C/f(x)\leqslant f(q)\}$$

si x en $\bar{C}$, entonces

$$|x-q|=|x-\psi(x)+\psi(x)-\psi(q)+\psi(q)-q|$$
$$\leqslant|x-\psi(x)|+|\psi(x)-\psi(q)|+|\psi(q)-q|$$
$$\leqslant f(x)+\alpha|x-q|+f(q)$$
$$|x-q|\leqslant 2f(q)+\alpha|x-q|.$$

por tanto

$$|x-q| \leqslant \frac{2f(q)}{1-\alpha},$$ esto prueba que $\bar{C}$ es cerrado y acotado.

Ahora, de $f(\psi(p)) \leqslant \alpha f(p)$, se sigue que $\psi$ preserva a $\bar{C}$, y podemos proceder como se hizo arriba.

Finalmente, si p,q en C son ambos puntos fijos de $\psi$, entonces

$$|p-q| = |\psi(p)-\psi(q)| \leqslant \alpha |p-q|,$$

implica que $|p-q|=0$ y el punto fijo es único.

**TEOREMA DEL MAPEO INTERIOR.** Si U es un subconjunto abierto de $R^n$, si $\Phi$ mapea U en $R^m$, y si la derivada fuerte en el punto a en U, $\ell=\Phi'(a)$, existe y mapea $R^n$ sobre $R^m$, entonces $\Phi(a)\varepsilon$ Int $\Phi(U)$.

*Demostración:* Dado que, por hipótesis, $\ell:R^n \to R^m$ es una aplicación suproyectiva, cada uno de los vectores de la base canónica $e_1=(1,0,\ldots,0)$, $e_2=(0,1,\ldots,0),\ldots,e_m=(0,\ldots,1)$ en $R^m$ es la imagen bajo $\ell$ de algún vector en $R^n$, digamos $v_1,\ldots,v_m$. Ahora, sea $M:R^m \to R^n$ el mapeo lineal que aplica $e_i$ en $v_i$ para $i=1,2,\ldots,m$; es decir

$$M\left(\sum_{i=1}^{m} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i.$$

Se sigue que $\ell \cdot M$ es la aplicación identidad en $R^m$, es decir $\ell \cdot M(y)=y$ para toda y en $R^m$. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, supongamos que $a=0$ y $\Phi(a)=0$. Fijemos $\alpha>0$ y sea $\bar{B}_\alpha(0)=\{y \text{ en } R^m \mid |y|\leq\alpha\}$ la bola cerrada en $R^m$. Por tanto $M(y)$ está en U siempre que y esté en $\bar{B}_\alpha$, por que $|M(y)|\leq m|y|$. Si $\psi$ mapea $\bar{B}_\alpha$ en $R^m$ con $\psi(y)=y-\Phi M(y)$, entonces $\psi'(0)$ es una derivada fuerte, por tanto existe un $\delta>0$, $0<\delta<\alpha$ tal que:

(*) $y_1$ y $y_2$ en $\bar{B}_\alpha$ implica $|\psi(y_2)-\psi(y_1)|\leq \frac{1}{2}|y_2-y_1|$.

Ahora escojamos algún $\bar{y}$ en $\bar{B}_{\delta/2}$, y sea $\bar{\psi}$ la correspondencia $y \to \bar{\psi}(y)=\bar{y}+\psi(y)$ de $\bar{B}_\delta$ en $R^m$. De la desigualdad (*) puede observarse que el mapeo $\bar{\psi}$ es un mapeo contractivo de $\bar{B}_\delta$ en si mismo. Si $\omega\in\bar{B}_\delta$ es el punto fijo de $\bar{\psi}$, entonces $\bar{y}+\psi(\omega)=\omega$, o $\bar{y}=\Phi M(\omega)$. Pero $M(\omega)$ está en U porque $\omega\in\bar{B}_\delta$, así $\bar{y}=\Phi(x)$ para algún $x\in U$, y tenemos probado que $\bar{B}_{\delta/2} \subset \Phi(U)$.

TEOREMA DEL MAPEO INTERIOR CONVEXO. Si U es un subconjunto abierto de $R^n$, si C es un subconjunto convexo de U, si $\Phi$ mapea U en $R^m$, y si la derivada fuerte $\ell$ de $\Phi$ en $a\in U\cap\bar{C}$ existe y satisface $\ell(a)\in \operatorname{int} \ell(C)$, entonces $\Phi(a)\in \operatorname{int}\Phi(C)$.

# CAPITULO III

## III. DEDUCCION GEOMETRICA DE LAS REGLAS DE MULTIPLICADORES.

3.1 INTRODUCCION. Un problema matemático bien conocido, el cual surge en numerosos contextos de la matemática y sus aplicaciones, es la determinación de los extremos locales de una función sujeta a restricciones de igualdad. El método utilizado en la solución de dichos problemas es el llamado método de los multiplicadores de Euler-Lagrange.

Sin embargo, en los textos de cálculo avanzado tradicionales, los problemas de optimización con restricciones de desigualdad, y las reglas de multiplicadores utilizadas en la solución de estos, son generalmente ignoradas.

El presente capítulo está dedicado, principalmente, a establecer geométricamente los resultados de las reglas de multiplicadores que admiten desigualdades como restricciones. La idea clave en la obtención de las reglas de multiplicadores, que admiten sólo desigualdades como restricciones; consiste en la separación, mediante un Hiperplano, de dos conjuntos convexos particulares. La deducción se realiza en el espacio imagen de un cierto mapeo $\Phi$, cuyas componentes son la función a minimizar (maximizar) y las restricciones.

3.2 UN PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD. En esta sección establecemos el concepto de conjunto factible y un nuevo principio de optimalidad, que será utilizado en el resto del presente trabajo.

CARACTERIZACION DE PUNTO FACTIBLE. Sean U un subconjunto de $R^n$ y $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_p, \phi_{p+i}, \ldots, \phi_{p+q}$ p+q+1 funciones reales definidas sobre U. Supóngase que se desea minimizar la función $\phi_o$ sujeta a las p restricciones de desigualdad $\phi_1 \leqslant 0, \phi_2 \leqslant 0, \ldots, \phi_p \leqslant 0$ y a las q restricciones de igualdad $\phi_{p+1}=0, \ldots, \phi_{p+q}=0$. Decimos que $X \varepsilon U$ es un punto factible o que es una solución factible al problema del mínimo, si satisface las p restricciones de desigualdad $\phi_1(x) \leqslant 0, \ldots, \phi_p(x) \leqslant 0$ y las q restricciones de igualdad $\phi_{p+1}(x)=0, \ldots, \phi_{p+q}(x)=0$. Denotaremos por S - la colección de todos los puntos factibles, dado por:

$$S=\{X \varepsilon U | \phi_i(x) \leqslant 0 \ (i=1, \ldots, p) \text{ y } \phi_i(x)=0 (i=p+1, \ldots, p+q\}.$$

Un punto $a \varepsilon U$ que minimiza a $\phi_o(x)$, sujeta a las p restricciones de desigualdad $\phi_1(x) \leqslant 0, \ldots, \phi_p(x) \leqslant 0$ y a las q restricciones de igualdad $\phi_{p+1}(x)=0, \ldots, \phi_{p+q}(x)=0$, le llamaremos punto óptimo o solución óptima al problema del mínimo. Esto - significa que; $a \varepsilon S$ y $\phi_o(a) \leqslant \phi_o(x)$ para toda $x \varepsilon S$. Si a es un - punto interior de S, decimos que a es una solución interior. Si a es un punto frontera de S, decimos que a es una solución frontera.

PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD. Sean U un subconjunto de $R^n$ y $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{p+q}$ funciones reales definidas sobre U. Sea $\Phi: U \to R^{p+q+1}$ el mapeo definido por $\Phi(x) = (\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_p(x), \ldots, \phi_{p+q}(x))$ y $W_a = \{y = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{p+q}) \varepsilon R^{p+q+1} \mid \eta_0 < \phi_0(a), \eta_i \leqslant 0$ $(i=1, \ldots, p)$, $\eta_j = 0 (j=p+1, \ldots, p+q)\}$. Un punto $a \varepsilon U$ es una solución óptima al problema:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } \phi_0(x) \\
&\text{sujeta a } \quad \phi_i(x) \leqslant 0, \text{ para } i=1, \ldots, p \\
&\qquad\qquad\quad \phi_j(x) = 0, \text{ para } j=p+1, \ldots, p+q,
\end{aligned}
$$

si y sólo si $\Phi(U) \cap W_a = \phi$ y $\Phi(a) \varepsilon \Phi(U) \cap \bar{W}_a$.

Dicho de otra forma; un punto $a \varepsilon U$ que minimiza a la función $\phi_0(x)$ sujeta a las restricciones $\phi_i(x) \leqslant 0$ $(i=1, \ldots, p)$ y $\phi_j(x) = 0$ $(j=p+1, \ldots, p+q)$, está caracterizado por la intersección vacía de los conjuntos $\Phi(U)$ y $W_a$ en el espacio imagen $R^{p+q+1}$.



*Demostración:* Necesidad. Supongamos que $a \varepsilon U$ es una solución óptima al problema del mínimo. Es decir, $a \varepsilon U$ satisface la desigualdad $\phi_0(a) \leqslant \phi_0(x)$, $\phi_i(x) \leqslant 0 (i=1, \ldots, p)$, $\phi_j(x) = 0 (j=p+1, \ldots, p+q)$ para toda $x \varepsilon U$ y además $\phi_i(a) \leqslant 0 (i=1, \ldots, p)$, $\phi_j(a) = 0 (j=p+1, \ldots p+q)$. Supongase que existe $z \varepsilon U$ tal que $\Phi(z) \varepsilon \Phi(U) \cap W_a$, de donde $\Phi(z) \varepsilon W_a$. Pero, por la definición de $W_a$, $\Phi(z) \varepsilon W_a$ solamente si z satisface la desigualdad $\phi_0(z) < \phi_0(a)$ y las p+q restricciones $\phi_i(z) \leqslant 0 (i=1, \ldots, p)$, $\phi_j(z) = 0 (j=p+1, \ldots, p+q)$. Pero esto contradice la optimalidad de a, por tanto -

$\Phi(U)\cap W_a=$ . Para ver que $\Phi(a)\varepsilon\Phi(U)\cap\bar{W}_a$, basta observar que $\Phi(U)\cap W_a=\sigma$ y que $\Phi(a)$ está sobre la frontera de $\Phi(U)$ y sobre la frontera de $W_a$.

Suficiencia. Supóngase que $\Phi(U)\cap W_a=\phi$ y $\Phi(a)\varepsilon\Phi(U)\cap\bar{W}_a$. Sea $\Phi(a)=(\phi_o(a),\phi_1(a),\ldots,\phi_{p+q}(a))=(\eta_o,\eta_1,\ldots,\eta_{p+q})\varepsilon\Phi(U)\cap\bar{W}_a$. Puesto que $\Phi(a)\varepsilon\bar{W}_a$ se tiene que $\Phi_o(a)=\eta_o\leqslant\phi_o(a)$, $\phi_i(a)=\eta_i\leqslant 0$ $(i=1,\ldots,p)$ y $\phi_j(a)=\eta_j=0$ $(j=p+1,\ldots,p+q)$. Lo cual demuestra que el punto a satisface las restricciones, ahora, sea $z\varepsilon U$ tal que satisfaga las p+q restricciones $\phi_i(z)\leqslant 0$ $(i=1,\ldots,p)$ y $\phi_j(z)=0$ $(j=p+1,\ldots,p+q)$. Esto es, $\Phi(z)\varepsilon\Phi(U)$ y $\Phi(z)=(\phi_o(z),\phi_1(z),\ldots,\phi_{p+q}(z))\notin W_a$. Pero puesto que, por hipótesis, los puntos a y $z\varepsilon U$ satisfacen las restricciones, $(\phi_o(z),\phi_1(z),\ldots,\phi_{p+q}(z))=\Phi(z)\notin W_a$ implica que $\phi_o(z)>\phi_o(a)$. Esto demuestra que $a\varepsilon U$ es un mínimo.

Cuando el conjunto imagen $\Phi(U)$ es un subconjunto convexo, no vacío de $R^{p+q+1}$; la separación de los conjuntos $\Phi(U)$ y $W_a$ mediante un hiperplano $H=\{y=(\eta_o,\ldots,\eta_{p+q})\varepsilon R^{p+q+1}\,|\,\ell\cdot y=\alpha,\alpha\varepsilon R\}$ que pasa a través de la imagen $\Phi(a)$ de la solución óptima $a\varepsilon U$, es una consecuencia inmediata del teorema de separación de conjuntos convexos. La regla de multiplicadores asociada se sigue de dicha separación.

## 3.3 LA GEOMETRIA DE LA OPTIMIZACION RESTRINGIDA.

Esta sección esta dedicada exclusivamente a establecer, GEOMETRICAMENTE, las condiciones necesarias para que un punto a minimice la función $\phi_0$ sujeta a las restricciones $\phi_i \leq 0$ - $\phi_i \leq 0 (i=1,\ldots,p)$, $\phi_i = 0 (i=p+1,\ldots,p+q)$ y a mostrar, mediante - algunos ejemplos, la forma en que funciona la caracterización del punto óptimo como la intersección vacia de los conjuntos $\Phi(U)$ y $W_a$.

Los parámetros $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}$ que aparecen en la deducción geométrica de las reglas de multiplicadores, tienen una interpretación geométrica sencilla, a saber: como las componentes del vector normal al hiperplano separador de los conjuntos $\Phi(U)$ y $W_a$, donde H está dado por el conjunto - de puntos;

$$H=\{y=(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{p+q})\varepsilon R^{p+q+1} \mid \ell\cdot y=\alpha, \alpha\varepsilon R\}$$

y $\ell=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+q})\varepsilon R^{p+q+1}$, $\ell\neq 0$. Los parámetros $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,$ $\lambda_{p+q}$ son los llamados multiplicadores de Lagrange.

Cuando el número de restricciones no excede a dos, entonces el espacio imagen del mapeo $\Phi$ es el plano o el espacio $R^3$, y la configuración geométrica de la imagen de U bajo $\Phi$ se puede bosquejar con relativa facilidad.

RESTRICCIONES DE IGUALDAD. Ejemplo 1. Sea $U=\{(x,y)\varepsilon R^2 | x^2+y^2<1\}$. minimizar $f(x,y)= x^2+y^2$ sujeta a las restricciones de igualdad $x=0$ y $y^2-x=0$.

*Solución:* Escribiendo $\phi_o(x,y)= x^2+y^2$, $\phi_1(x,y)=x$ y $\phi_2(x,y)=y^2-x$, se obtiene, de manera equivalente, el problema:

$$\text{Minimizar } \phi_o(x,y)= x^2+y^2$$
$$\text{sujeto a } \phi_1(x,y)= x$$
$$\phi_2(x,y)= y^2-x$$

Entonces, la solución óptima $a\varepsilon U$ al problema está caracterizada por la intersección vacía de los conjuntos $\Phi(U)$ y W con $\Phi(a)\varepsilon\Phi(U)\cap\bar{W}$, donde $\Phi$ es el mapeo $\Phi: R^2 \to R^3$ dado por $\Phi=(\phi_o,\phi_1, \phi_2)$ y $W= \{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 | \eta_o<\phi_o(a),\ \eta_1=0,\ \eta_2=0\}$. Denotando por $\eta_o=\phi_o$, $\eta_1=\phi_1$ y $\eta_2=\phi_2$, es claro que cumplen con la siguiente relación: $\eta_o=\eta_2+\eta_1+\eta_1^2$. La imagen de U bajo el mapeo $\Phi$ es el subconjunto.

$$\Phi(U)= \{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 | \ \eta_o-\eta_1-\eta_1^2-\eta_2=0,\ 0\leq\eta_o<1\}$$

y

$$W = \{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 | \ \eta_o<\phi_o(0),\ \eta_1=0,\ \eta_2=0\}.$$

En la figura 1 se muestran; el conjunto $\Phi(U)$, W y así como también el hiperplano H y $\lambda=(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2)$.

Donde $H=\{(\eta_o,\eta_1,\eta_2 | \varepsilon R^3 | (\eta_o,\eta_1,\eta_2)=x(0,1,0)+y(0,0,-1)\}$

$=\{(\eta_o,\eta_1,\eta_2 | \varepsilon R^3 | C\eta_o=0,\ C\neq0\}$ y $\lambda=(1,0,0)$ que es un vector normal al plano, y se encuentra en la misma dirección que W pero con sentido contrario.

Obsérvese que, aún cuando la imagen $\Phi(\vec{U})$ no es convexa, $\Phi(U)$ y

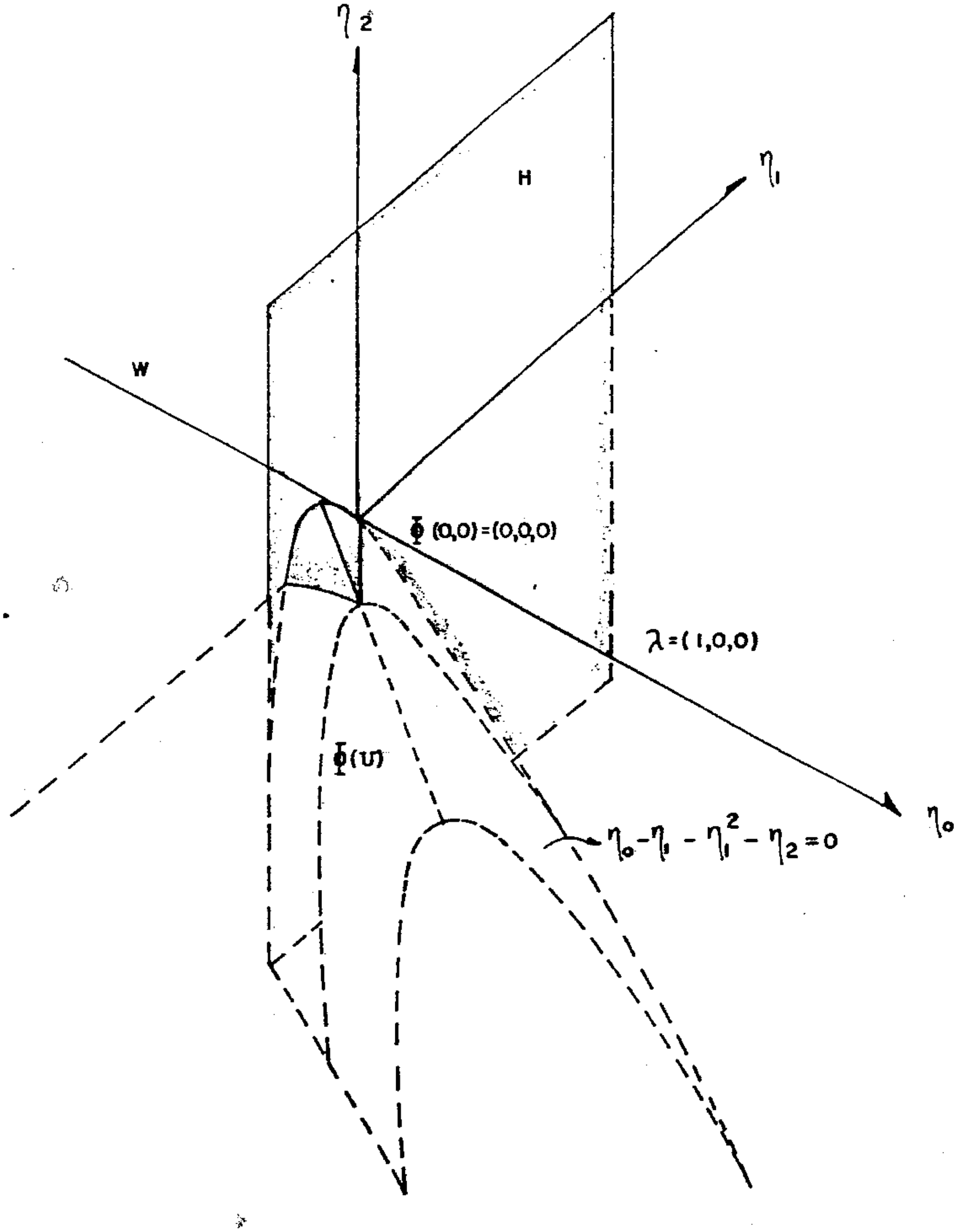



fig.1

W están separados por el plano:

$$H=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 \,|\, C\eta_0=0, \quad C\neq 0\}$$

$$\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 \,|\, (1,0,0)\cdot(\eta_0,\eta_1,\eta_2)=0\}.$$

Escribiendo $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)= (1,0,0)$ y definiendo la función: $\phi(x,y)= \lambda\cdot\Phi(x)= \lambda_0\phi_0(x,y)+\lambda_1\phi_1(x,y)+\lambda_2\phi_2(x,y)$, obtenemos $\phi'(0,0)= \lambda\cdot\Phi'(0)= \lambda_0\phi_0'(0,0)+\lambda_1\phi_1'(0,0)+\lambda_2\phi_2'(0,0)$.
Es decir, $a=(0,0)$ es un mínimo no restringido de la función $\phi(x,y)$, con $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\neq 0, \lambda_0>0$.

De lo anteriormente expuesto, podemos concluir que: si $a\varepsilon U$ es una solución óptima al problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \phi_0(x,y) \\ \text{sujeto a} & \phi_1(x,y)=0 \\ & \phi_2(x,y)=0, \end{array}$$

Entonces, existe $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)=0, \lambda\varepsilon R^3$, tal que;

(i) Si $\phi(x,y)= \sum_{i=0}^{2}\lambda_i\phi_i(x,y)$, entonces $\phi'(a)=0$

(ii) $\lambda_0\geq 0$.



Las conclusiones (i) y (ii) obtenidas, geométricamente, son las condiciones necesarias para que la función $\phi_0$ alcanun mínimo relativo en el punto $a\varepsilon U$, sujeta a las restricciones de igualdad $\phi_1=0$ y $\phi_2=0$. Es decir, el mínimo se encuentra entre los puntos críticos de la función $\phi(x,y)$.

Las condiciones (i) y (ii), son las conclusiones obtenidas en la REGLA DE MULTIPLICADORES DE CARATHEODORY. Supóngase que U es un *subconjunto de* $R^n$, *y que* $\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_p$ *son q+1 funciones* *reales sobre $U$, fuertemente diferenciables en $a\epsilon U$. Si $a\epsilon U$ minimiza $\phi_0$ sujeta a las restricciones de igualdad $\phi_1=0,\ldots,\phi_q=0$, entonces existe $\ell\neq 0$, $\ell=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\epsilon R^{q+1}$ tal que:*

(i) Si $\phi=\sum_{i=0}^{q}\lambda_i\phi_i$, entonces $\phi'(a)=0$ y

(ii) $\lambda_0\geqslant 0$.

EJEMPLO 2.- Sobre el conjunto abierto $U=\{(x,y)\epsilon R^2 | 3x^2+y^2-2y<5/2\}$, minimizar la función $f(x,y)= 3x^2+y^2-2y$ sujeta a las restricciones de igualdad $y+x=0$ y $y-x=0$.

Haciendo $\phi_0(x,y)= 3x^2+y^2-2y$, $\phi_1(x,y)= x+y$ y $\phi_2(x,y)=x-y$, el problema consiste en;

$$\text{Minimizar } \phi_0(x,y)= 3x^2+y^2-2y$$
$$\text{sujeta a } \phi_1(x,y)=y+x$$
$$\phi_2(x-y)= y-x.$$

De las últimas dos ecuaciones, es evidente que la solución óptima al problema del mínimo es $a=(0,0)$. Construyendo el mapeo $\Phi:R^2\longrightarrow R^3$, donde $\Phi=(\phi_0,\phi_1,\phi_2)$, se obtiene que la imagen de la solución óptima es $\Phi(0,0)= (0,0,0)$. Denotando por; $\eta_0= \phi_0, \eta_1=\phi_1, \eta_2=\phi_2$ y realizando algunas operaciones algebraicas, se observa que $\eta_0,\eta_1$, $\eta_2$ cumplen con la relación:

$$\eta_0=\eta_1^2+\eta_2^2-\eta_1\ \eta_2-\eta_1-\eta_2$$

o bien

$$\eta_0-\eta_1^2-\eta_2^2+\eta_1\ \eta_2+\eta_1+\eta_1=0.$$

Por tanto, la imagen de $U=\{(x,y)\varepsilon R^2|3x^2+y^2-2y<5/2\}$ bajo el mapeo $\Phi$ es la superficie

$$\Phi(U)=\{(\eta_0,\eta_1,\ \eta_2)\varepsilon R^3|\eta_0-\eta_1^2-\eta_2^2+\eta_1\eta_2+\eta_1+\eta_2=0,-2\leqslant\eta_0\leqslant 5/2\}\text{y}$$

$$W=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3|\eta_0<0,\eta_1=0,\ \eta_2=0\}$$

La configuración geométrica de los conjuntos $\Phi(U)$ y W se muestra en la figura 2. Obsérvese que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y $(0,0,0)=$ - $\Phi(0,0)\varepsilon\Phi(U)\cap W$. Nótese también que $\Phi(U)$ se encuentra a un sólo lado del plano H, de hecho $\Phi(U)c\bar{H}^+$ y $Wc\bar{H}^-$, donde H es el plano tangente a la imagen de U en el punto óptimo y el cual viene dado por:

$$H=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3|(\eta_0,\eta_1,\eta_2)=\Phi(0,0)+\Phi'(0,0)\ (x,y)\}$$
$$=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3|(1,1,1)\cdot(\eta_0,\eta_1,\eta_2)=0\}.$$

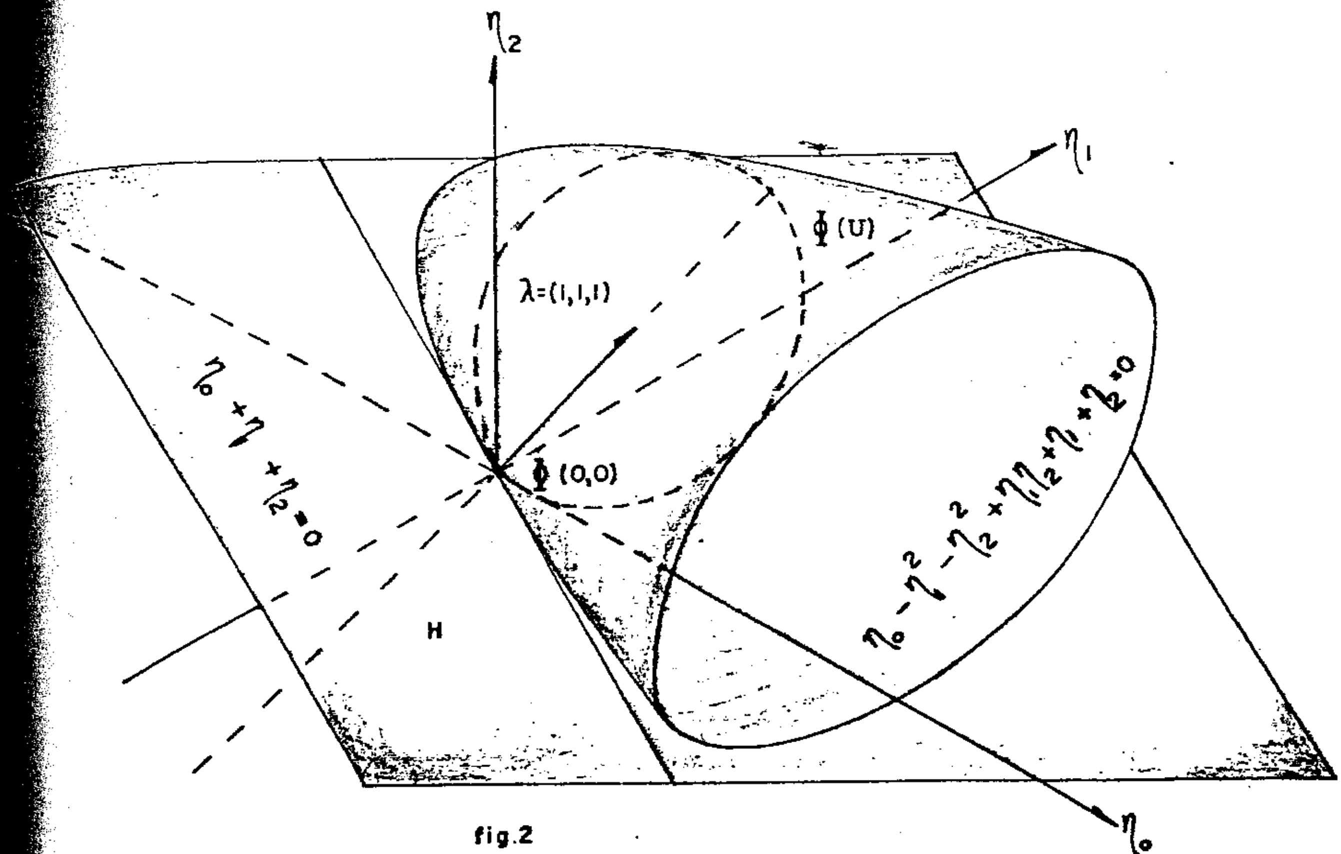



fig.2

Tomando $\ell=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)=(1,1,1)$ y definiendo la función - $\phi(x,y)= \lambda_0\phi_0(x,y)+\lambda_1\phi_1(x,y)+\lambda_2\phi_2(x,y)$, encontramos que:

$$\phi'(0,0)= \lambda_0\phi'(0,0)+\lambda_1\phi_1'(0,0)+\lambda_2\phi_2'(0,0)= (0,0).$$

Es decir,

(i) Si $\phi=\lambda_0\phi_0+\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2$, entonces $\phi'(0,0)=(0,0)$.

Dicho de otra forma; la solución óptima (0,0) el problema del mínimo con restricciones de igualdad, es un punto crítico de la función $\phi$. Además, se cumple adicionalmente que;

(ii) $\lambda_0>0$.

Obsérvese también que las derivadas de las restricciones $\phi_1'(0,0)$, $\phi_2'(0,0)$ son linealmente independientes, como puede - verificarse al realizar los cálculos. Cuando la hipótesis de independencia se verifica, entonces las conclusiones de la regla de los multiplicadores de caratheodory se satisfacen con $\lambda_o$ positivo. Este resultado es generalmente conocido como la regla de los multiplicadores de Euler-Lagrange.

EFECTO DE LAS RESTRICCIONES DE NO NEGATIVIDAD DE LAS VARIABLES. Abordaremos nuestro estudio de tales efectos considerando funciones reales de una variable real, analizando las tres situaciones distintas que pueden ocurrir.

EJEMPLO3. Supóngase que se desea minimizar sobre el conjunto abierto U=R la función $f(x)=(x-1)^2$ sujeto a la restricción de no negatividad $x \geq 0$.

Denotando por $\phi_o(x)= (x-1)^2$ y $\phi_1(x)=-x$, el problema lo podemos plantear en la siguiente forma;

$$\text{Minimizar } \phi_o(x)= (x-1)^2$$
$$\text{sujeto a } \phi_1(x)= x$$

Luego, construimos el mapeo $\Phi:R \to R^2$ escribiendo $\Phi=(\phi_o,\phi_1)$. Haciendo $\eta_o=\phi_o(x)$ y $\eta_1=\phi_1(x)$, se obtiene la relación $\eta_o=(\eta_1+1)^2$. Además debe ser claro que la solución óptima al problema del mínimo restringido es a=1 y cuya imagen bajo el mapeo es -- $\Phi(1)= (0,-1)$. La imagen de U es el conjunto; $\Phi(U)=\{(\eta_o,\eta_1)\varepsilon R^2/ \eta_o \geq 0,\ \eta_o=(\eta_1+1)^2\}$ y $W=\{(\eta_o,\eta_1)\varepsilon R^2/\eta_o<0,\ \eta_1 \leq 0\}$. Los conjuntos se ilustran en la figura 3.

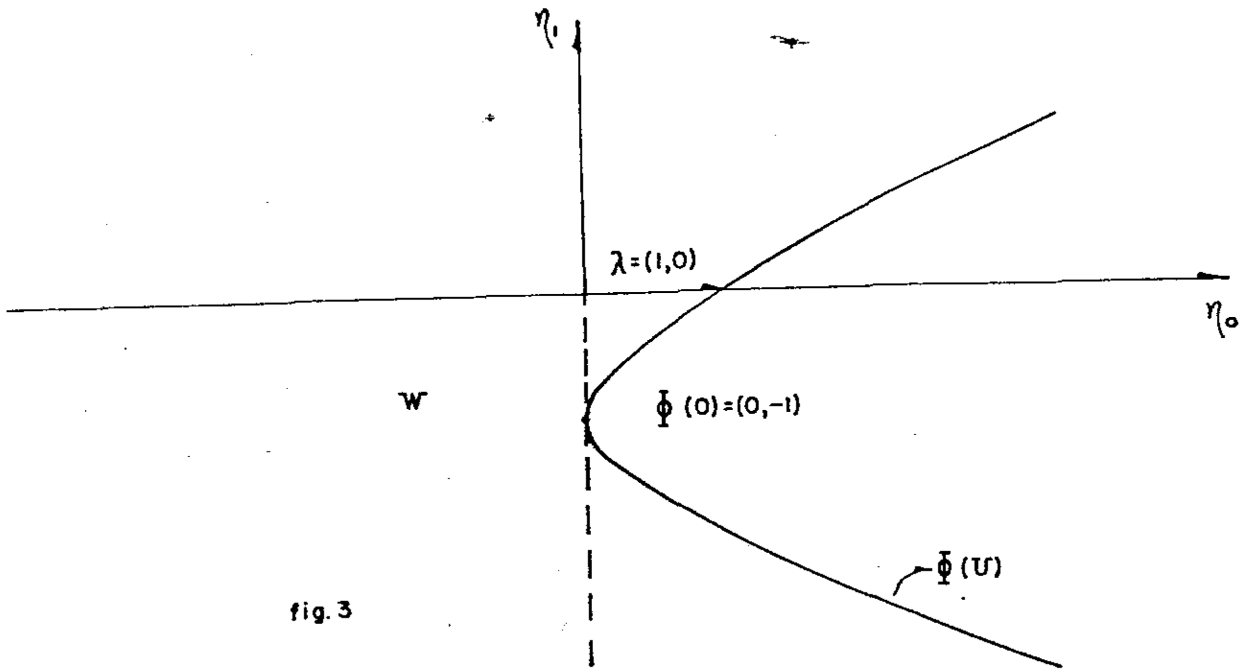



fig. 3

Obsérvese que $\Phi(U) \cap W=\phi$ y $\Phi(0) \varepsilon \Phi(U) \cap \bar{W}$. Nótese también que la recta $\eta_0=0$ pasa por la imagen de la solución óptima — $(0,-1)=\Phi(0)$ y separa a los conjuntos $\Phi(U)$ y W. Es decir, todos los puntos del conjunto $\Phi(U)$ quedan a un sólo lado de la recta. Dado que la solución óptima a=1>0 está en el interior del conjunto restricción (factible) $[0,\infty)$, al punto a se le llama solución interior. Como puede verse en este caso la restricción $x \geqslant 0$ no tubo ningún efecto sobre el óptimo.

*EJEMPLO 4.* Sobre U=R, minimizar la función $f(x)=x^2$ sujeta a $x \geqslant 0$

Escribiendo $\phi_0(x)=x^2$ y $\phi_0(x)=-x$, construimos el mapeo $\Phi: U \longrightarrow R^2$ mediante $\Phi=(\phi_0,\phi_1)$. Con $\eta_0=\eta_0(x)$ y $\eta_1=\phi_1(x)$. La imagen $\Phi(U)=\{(\eta_0 \eta_1) \varepsilon R^2 | \eta_0 \geqslant 0,\ \eta_0=\eta_1^2\}$ y $W=\{(\eta_0,\eta_1) \varepsilon R^2 | \eta_0<\phi_0(a),\ \eta_1<0\}$. El dibujo se ilustra en la figura 4.

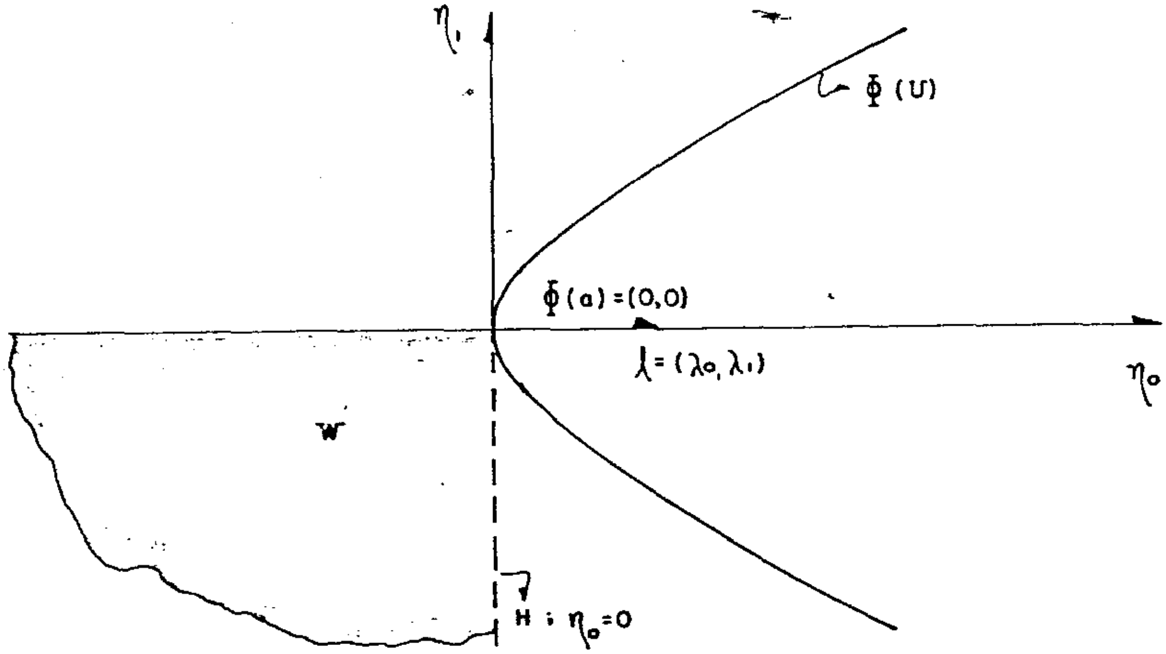


fig 4

De la figura tenemos que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y que $(0,0)=\Phi(a)\epsilon$ $\Phi(U)\cap\bar{W}$. De donde $a=0\epsilon U$ es una solución frontera.

Además, se tiene que el vector $\ell=(1,0)$, ortogonal a la recta $\eta_o=0$ que pasa por la imagen de la solución óptima, cumple con la propiedad de que para todo $y=(\eta_o,\eta_1)\epsilon\Phi(U)$, $\ell\cdot y\geq 0$ y $\ell\cdot\omega<0$ para todo $\omega=(\eta_o,\eta_1)\epsilon W$. Lo anterior demuestra que los conjuntos $\Phi(U)$ y $W$ están separados por la recta $\eta_o=0$ con $\ell\neq 0$. Escribiendo $\ell=(\lambda_o,\lambda_1)$ se tiene $\lambda_o>0,\lambda_1=0$. Definiendo $\phi(x)=\lambda_o\phi_o(x)+\lambda_1\phi_1(x)$, tenemos $\phi'(0)=\lambda_o\phi_o'(0)+\lambda_1\phi'(0)=0$, $x=0$. Es decir, $x=0$ es un mínimo no restringido de la función $\phi(x)$.

*EJEMPLO 5.* Sobre U=R minimizar la función $f(x)=x^2+2x$ sujeta a $x \geq 0$.

*Solución:* Poniendo $\phi_0(x)=x^2+2x$, $\phi_1(x)=-x$ y el mapeo $\Phi: U \to R^2$ como $\Phi=(\phi_0,\phi_1)$. Con $\eta_0=\phi_0(x)$ y $\eta_1=\phi_1(x)$, la imagen $\Phi(U)=\{(\eta_0,\eta_1)\varepsilon R^2 / \eta_0=\eta_1^2-2\lambda_1\}$ y $W=\{(\eta_0,\eta_1)\varepsilon R^2 | \eta_0<\phi_0(a),\ \eta_1\leq 0\}$. La configuración geométrica se muestra en la figura 5.

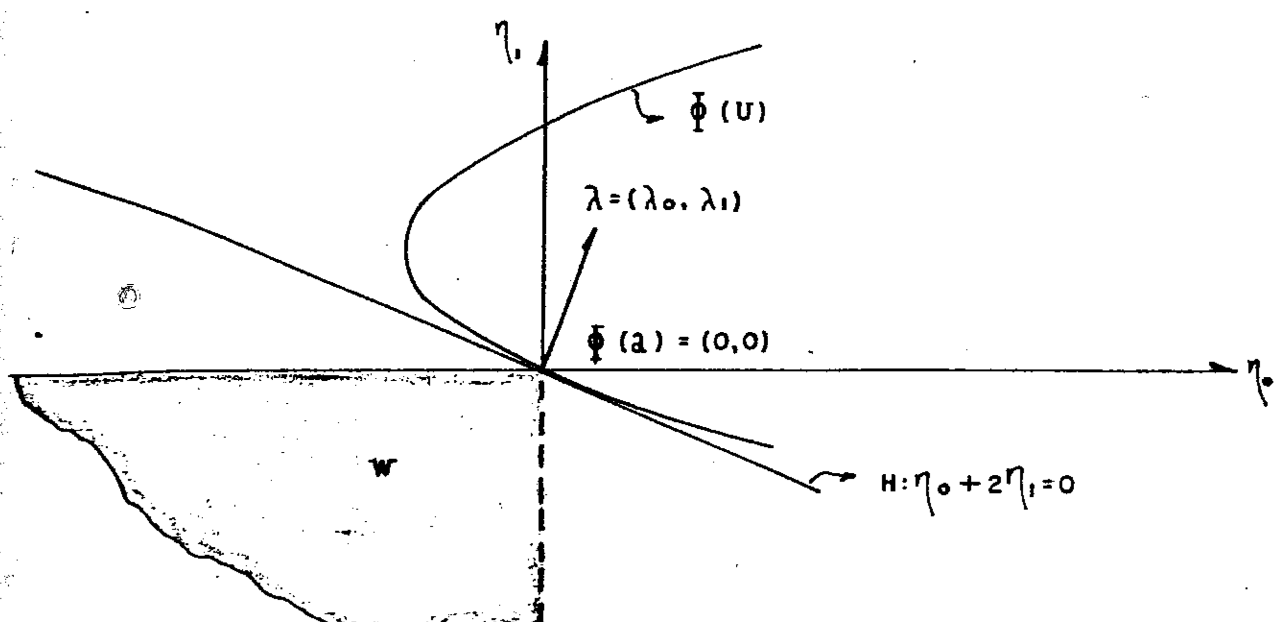



fig 5

De la figura tenemos que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y que $(0,0)=\Phi(a)\varepsilon\ \Phi(U)\cap\bar{W}$. - Aplicando nuestra caracterización del óptimo, $a=0\varepsilon U$ es una solución frontera. El vector $\ell=(1,2)$, ortogonal a la recta $\eta_0+2\eta_1=0$ que pasa por la imagen de la solución óptima (obtenida linealizando la imagen $\Phi(U)$ en $a=0$), cumple con la propiedad de que para todo $y=(\eta_0,\eta_1)\varepsilon\Phi(U); \ell\cdot y\geq 0$ y $\ell\cdot\omega<0$ para todo $\omega=(\eta_0,\eta_1)\varepsilon W$. En base a la argumentación anterior, concluimos que los conjuntos $\Phi(U)$ y W están separados por la recta

$$H=\{(\eta_\circ,\eta_1)\varepsilon R^2 | \eta_\circ+2\eta_1=0\}$$
$$=\{(\eta_\circ,\eta_1)\varepsilon R^2 | (1,2)\cdot(\eta_\circ,\eta_1)=0\}.$$

De hecho $\Phi(U)\subset \bar{H}^+$ y $W\subset \bar{H}^-$. Escribiendo $\ell=(\lambda_\circ,\lambda_1)$ y definiendo la función $\phi(x)=\lambda_\circ\phi_\circ(x)+\lambda_1\phi_1(x)$ tenemos que $\phi'(a)=\lambda_\circ\phi'(a)+\lambda_\circ\phi'(a)+\lambda_1\phi_1'(a)=0$, con $\lambda_\circ>0,\lambda_1>0$. Puede observarse además que se cumple $\lambda_\circ\phi(a)=0$, $\lambda_1\phi(a)=0$.

Dicho de manera diferente; A fin de que el punto $a\varepsilon U$ minimice la función $\phi_\circ$ sujeta a la única restricción de no negatividad $x\geqslant 0$, es condición necesaria que existe $\ell=(\lambda_\circ,\lambda_1)\varepsilon R^2$, $\ell\neq 0$, tal que se verifique:

(i) Si $\phi(x)=\lambda_\circ\phi_\circ(x)+\lambda_1\phi_1(x)$, entonces $\phi'(a)=0$

(ii) $\lambda_i\geqslant 0$, $i=0,1$

(iii) $\lambda_1\phi_1(a)=0$

En los ejemplos 3 y 4, puede observarse que la restricción es inefectiva puesto que la solución óptima no se ve afectada por dichas restricciones. Es decir, el mínimo es un mínimo global de $\phi_\circ$. Nótese además que la derivada de la función $\phi_\circ'(a)=0$, $\lambda_\circ>0$, $\lambda_1=0$ en ambos casos y que la diferencia radica fundamentalmente en que a es una solución interior en el primer caso y un punto frontera en el segundo. Obsérvese también que $\phi_1(a)\neq 0$ en el primer caso y $\phi_1(a)=0$ en el segundo.

El problema 5 representa un caso diferente.

En éste, puede observarse que la restricción es efectiva ya que el punto óptimo cambiaría si se suprime la restricción de no negatividad. Nótese también que la derivada de la función $\phi_\circ$ no se anula en el punto óptimo, sin embargo se tiene, como en ejemplo 4, que $\phi_1(a)=0$.

En todos los casos, como puede observarse en las figuras, el óptimo está caracterizado por la intersección vacía de los conjuntos $\Phi(U)$ y $W$, con $\Phi(a)\varepsilon\ \Phi(U)\cap\bar{W}$. Además se tiene también que los conjuntos $\phi(U)$ y $W$ están separados por una recta que pasa a través de la imagen de la solución óptima con $\Phi(a)\varepsilon H$.

Del análisis anterior podemos concluir que: las condiciones necesarias para que $a\varepsilon U$ minimice la función $\phi_\circ$ sujeta a la restricción de desigualdad $\phi_1\leq 0$ están dadas por:

(i) Si $\phi(x)=\lambda_\circ\phi_\circ(x)+\lambda_1\phi_1(x)$, entonces $\phi'(a)=0$

(ii) $\lambda_i\geq 0$, $i=0,1$

(iii) $\lambda_1\phi_1(a)=0$

que son las conclusiones de la regla de los multiplicadores de JOHN con $\phi=1$.

## RESTRICCIONES DE NO NEGATIVIDAD CUANDO SE TIENEN DOS VARIABLES DE ELECCION.

*EJEMPLO 6.-* Considerese el problema de minimizar sobre -- $U=\{(x,y)\in R^2 | x^2+y^2<4\}$ la función: $f(x,y)=7x^2-6\sqrt{3}\ xy+13y^2-4\sqrt{3}\ x-4y-12$, sujeta a las restricciones de no negatividad $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Escribiendo $\phi_0(x,y)=7x^2-6\sqrt{3}\ xy+13y^2-4\sqrt{3}\ x-4y-12$, -- $\phi_1(x,y)=-x$, y $\phi_2(x,y)=-y$ el problema consiste en:

$$\text{Minimizar } \phi_0(x,y)=7x^2-6\sqrt{3}\ xy+13y^2-4\sqrt{3}\ x-4y-12$$

$$\text{sujeta a; } \phi_1(x,y)=-x$$

$$\phi_2(x,y)=-y$$

Sea $\Phi: R^2 \longrightarrow R^3$, el mapeo definido por $\Phi=(\phi_0,\phi_1, \phi_2)$. Si denotamos por $\eta_0=\phi_0(x,y)$, $\eta_1= \phi_1(x,y)$ y $\eta_2=\phi_2(x,y)$ puede observarse con facilidad que cumplen con la relación; -- $\eta_0=7\eta_1^2-6\sqrt{3}\ \eta_1\eta_2+\eta_2^2+4\sqrt{3}\ \eta_1+4\eta_2-12$. Es fácil ver, mediante una rotación y traslación de los ejes x,y, que la función f(x,y) es un paraboloide elíptico que alcanza el mínimo en el punto $(\sqrt{3}/2,\ 1/2)$, cuya imagen bajo $\Phi$ es $\Phi(\sqrt{3}/2,1/2)= (-16,-\sqrt{3}/2,-1/2)$, que es un punto interior puesto que $x=\sqrt{3}/2>0$ y $y= 1/2>0$.

Ahora bien, para determinar con precisión la imagen de U basta con efectuar una rotación seguida de una traslación de los ejes $\eta_1,\eta_2$, y determinar para que valor de $\eta_0$ el semieje menor tiene longitud 2. Esto ocurre cuando $\eta_0=48$. Entonces, la imagen de U será la colección de puntos

$$\Phi(U)=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 \mid \eta_0-7\eta_1^2+6\sqrt{3}\ \eta_1\eta_2-13\eta_2^2-4\sqrt{3}\eta_1-4\eta_2+12=0,$$
$$-16\leqslant\eta_0\leqslant 48\}$$

y

$$W=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2 \mid \varepsilon R^3 \mid \eta_0<-16,\ \eta_1\leqslant 0,\ \eta_2\leqslant 0\}$$

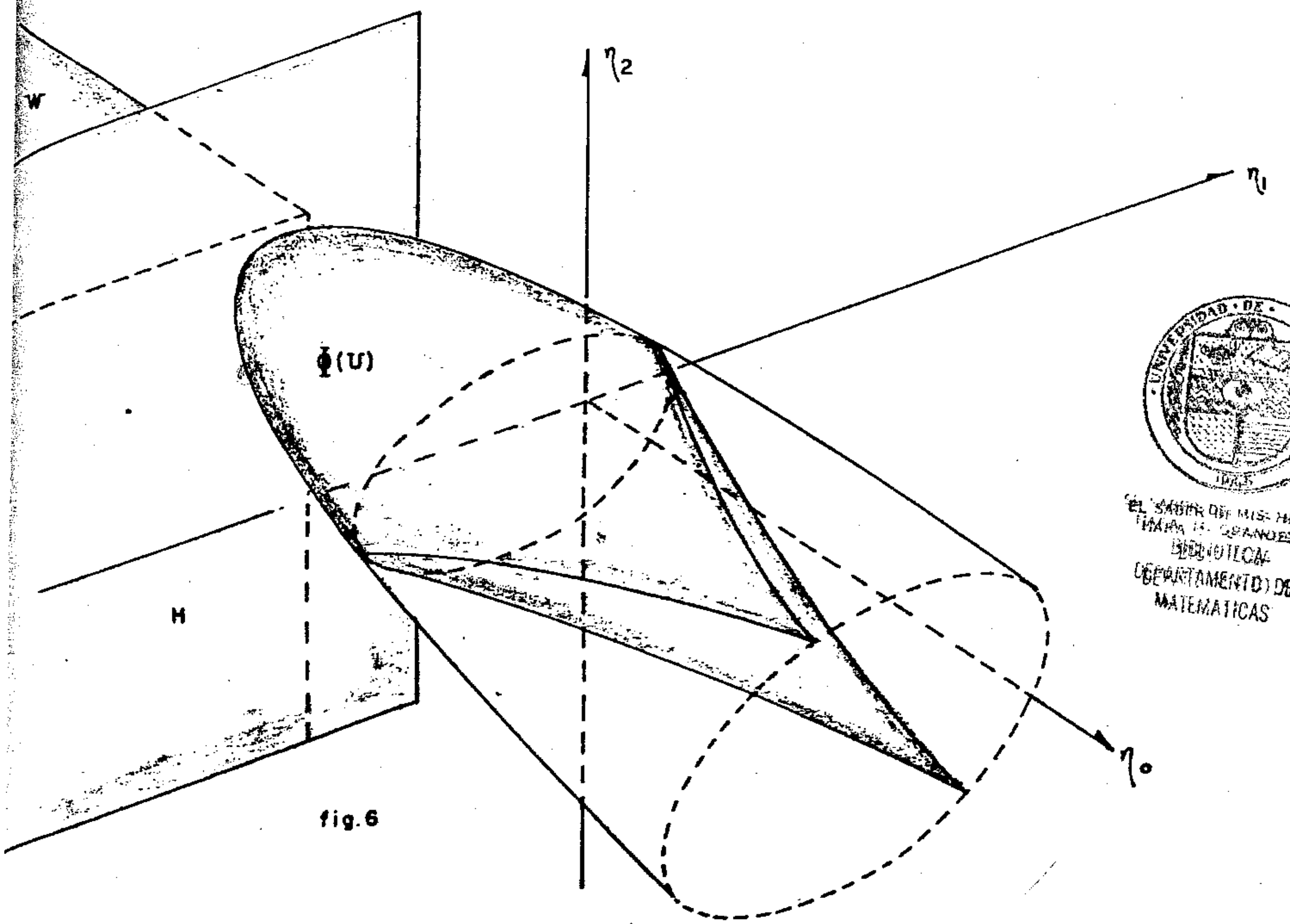



fig.6



La configuración geométrica de los conjuntos $\Phi(U)$ y W se muestra en la figura 6. Nótese que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y $(-16, -\sqrt{3}/2, -1/2)= \Phi(\sqrt{3}/2, 1/2)\varepsilon\Phi(U)\cap\overline{W}$. Obsérvese también que los conjuntos $\Phi(U)$ y W están separados por el plano

$$H=\{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\in R^3 \mid A\eta_o=-16, A\neq 0\}$$

$$\{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\in R^3 \mid (1,0,0)\cdot(\eta_o,\eta_1,\eta_2)=-16\},$$

que pasa por la imagen de la solución óptima. Escribiendo $\ell=(1,0,0)=(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2)$ y definiendo la función $\phi(x,y)=\lambda_o\phi_o(x,y)+\lambda_1\phi_1(x,y)+\lambda_2\phi_2(x,y)$ obtenemos:

$$\text{(i)}\ \phi'(a)=\lambda_o\phi_o'(a)+\lambda_1\phi_1'(a)+\lambda_2\phi_2'(a)=(0,0).$$

Es decir, el punto $(\sqrt{3}/2,\ 1/2)=a\in U$ es un mínimo no restringido de $\phi$. Además se tiene

(ii) $\lambda_o=1,\ \lambda_1=0, \lambda_2=0$ y

(iii) $\lambda_1\phi_1(a)=0,\ \lambda_2\phi_1(a)=0$

Las condiciones (i), (ii) y (iii), obtenidos geométricamente, son las conclusiones establecidas en la REGLA DE LOS MULTIPLICADORES DE JOHN.

*Supóngase que $U$ es un subconjunto abierto de $R^n$, y que $\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_p$ son $p+1$ funciones reales sobre $U$, diferenciables en $a\in U$, Si $a\in U$ minimiza $\phi_o$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1\leq 0,\ldots,\phi_p\leq 0$, entonces exite $\ell\neq 0$, $\ell=(\lambda_o,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in R^{p+1}$ tal que :*

(*i*) *Si* $\phi = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \phi_i$, *entonces* $\phi'(a)=0$,

(*ii*) $\lambda_i \geq 0$, *para* $i=0,1,\ldots,p$ *y*

(*iii*) $\lambda_i \phi_i(a)=0$, *para* $i=1,\ldots,p$.

*Ejemplo 7.* Sea $f:U\to R$, con $U=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2<4\}$. Considérese el problema:

$$\text{Minimizar } f(x,y)=7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2+4\sqrt{3}x+4y-12$$

$$\text{sujeta a } x\geq 0,\ y\geq 0.$$

Haciendo $f(x,y)=\phi_0(x,y)$, $\phi_1(x,y)=-x$, $\phi_2(x,y)=-y$ el problema consiste en:

$$\text{Minimizar } \phi_0(x,y)=7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2+4\sqrt{3}x+4y-12$$

$$\text{sujeta a } \phi_1(x,y)=-x$$

$$\phi_2(x,y)=-y.$$

Sea $\Phi:R^2\to R^3$ el mapeo definido por $\Phi=(\phi_0,\phi_1,\phi_2)$, con $\eta_0=\phi_0$, $\eta_1=\phi_1$, $\eta_2=\phi_2$. Ahora bien, puesto $\eta_0,\eta_1$ y $\eta_2$ satisfacen la relación

$$\eta_0-7\eta_1^2+6\sqrt{3}\eta_1\eta_2-13\eta_2^2+4\sqrt{3}\eta_1+4\eta_2+12=0,$$

la imagen de U bajo el mapeo $\Phi$ es el subconjunto

$$\Phi(U)\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\in R^3 \mid \eta_0-7\eta_1^2+6\sqrt{3}\eta_1\eta_2-13\eta_2^2+4\sqrt{3}\,\eta_1+4\eta_2+12=0,$$
$$-16\leq\eta_0\leq 48\} \text{ y}$$

$$W=\{(\eta_0,\eta_2,\eta_2)\varepsilon R^3 \mid \eta_0<-12,\ \eta_1\leq 0,\ \eta_2\leq 0\}$$

como se muestra en la figura 7.

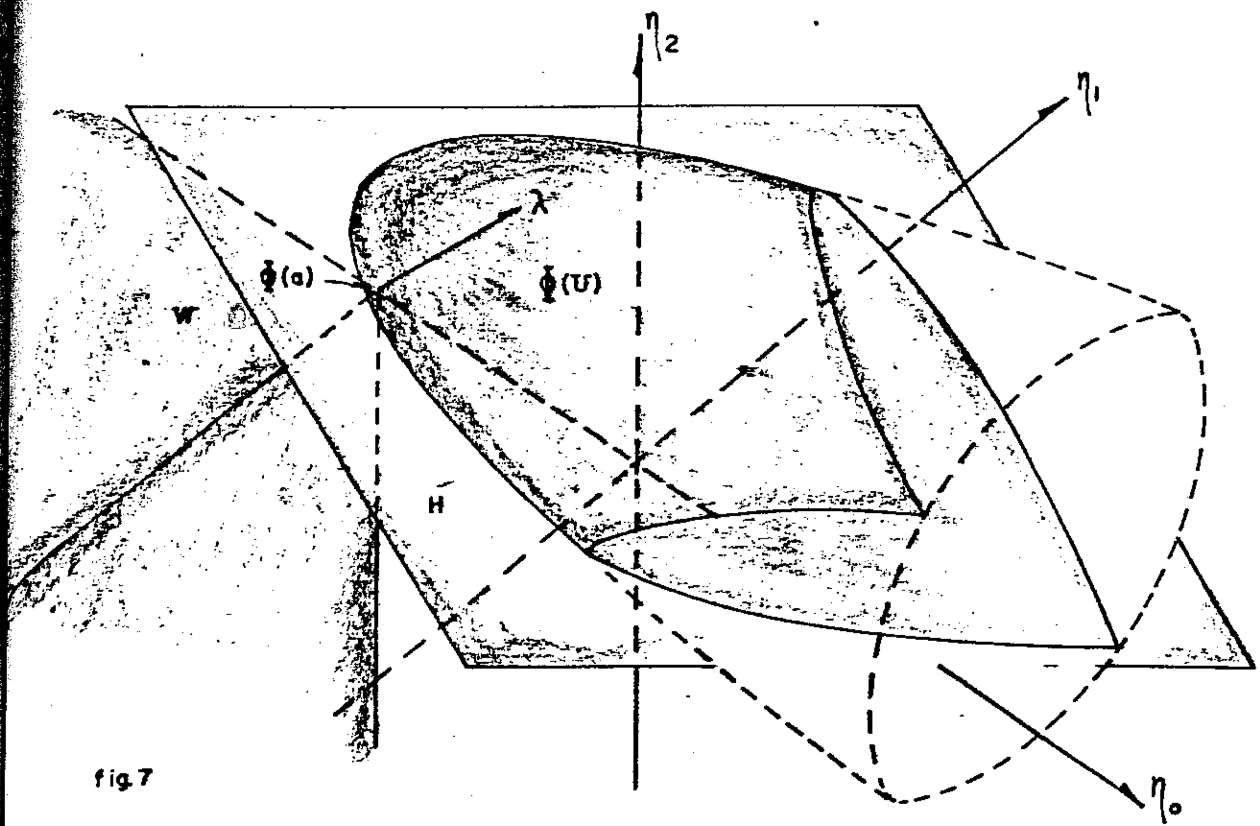



fig.7

De la figura puede observarse que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y que la ima gen de la solución óptima $(-12,0,0)=\Phi(0,0)\varepsilon\Phi(U)\cap\overline{W}$. Nótese tam bién que los conjuntos $\Phi(U)$ y W están separados por el plano:

$$H=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 \mid (\eta_0,\eta_1,\eta_2)=\Phi(0,0)+\phi'(0,0)(x,y)\}$$
$$\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 \mid \eta_0+4\sqrt{3}\ \eta_1+4\eta_2+12=0\}$$
$$\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 \mid (1,4\sqrt{3}\ 4).(\eta_0,\eta_1,\eta_2)=-12\},$$

donde H fué obtenido linealizando la imagen en el punto óptimo.

Tomando $\lambda=(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2)=(1,4\sqrt{3}, 4)$ y definiendo la función

$$\phi(x,y)= \lambda\cdot\Phi(x,y)=\lambda_o\phi_o(x,y)+\lambda_1\phi_1(x,y)+\lambda_2\phi_2(x,y)$$

se tiene:

(i) $\phi'(0,0)=\lambda_o\phi_o'(0,0)+\lambda_1\phi_1'(0,0)+\lambda_2\phi_2'(0,0)=(0,0)$

(ii) $\lambda_o>0,\lambda_1>0$ y $\lambda_2>0$

(iii) $\lambda_1\phi_1(0,0)=0,\ \lambda_2\phi_2(0,0)=0$.

Nótese también que adicionalmente se tiene $\phi_1(0,0)=0$, $\phi_2(0,0)=0$ y $\phi_1'(0,0)h<0$, $\phi_2'(0,0)h<0$, para algún $h\varepsilon R^2$. De hecho cualquier h en el cuadrante positivo cumple con la condición, por ejemplo $h=(1,1)$ y como puede verificarse al calcular las derivadas y efectuando el producto punto con h.

Cuando esta hipótesis adicional se verifica, como es el caso del ejemplo 7, las conclusiones de la regla de los multiplicadores de John Se cumplen con $\lambda_o$ positivo. Este resultado se conoce como la REGLA DE MULTIPLICADORES DE KARUSH-KHUN-TUCKER. Si existe $h\varepsilon R^n$ tal que $\phi_i'(a)h=0$ para todas aquellas $i=1,\ldots,p$ tales que $\phi_i(a)=0$, entonces las conclusiones de la regla de los multiplicadores de John se satisfacen con un $\lambda_o$ positivo.

*EJEMPLO 8*. Sean $U=\{(x,y)\varepsilon R^2 \mid x^2+y^2<1\}$ y $\phi_0:U\to R$ una función de valores reales. Supóngase que deseamos minimizar $\phi_0$ sujeta a la restricción de desigualdad $\phi_1 \leqslant 0$, donde $\phi_0(x,y)=y+x^2+y^3$ y $\phi_1(x,y)=-y$. En otras palabras, minimizar $\phi_0$ sujeta a $y \geqslant 0$.

Porque $y \geqslant 0$, $\phi(x,y) \geqslant 0$ y por tanto la solución óptima es $(0,0)$. Sea $\Phi$ el mapeo $(\phi_0,\phi_1)$ de $U$ en $R^2$, entonces $\Phi(0,0)=(0,0)$. Ahora bien, puesto que $\eta_0=\phi_0(x,y)$ y $\eta_1=\phi_1(x,y)$ satisfacen la identidad $\eta_0+\eta_1+\eta_1^3=x^2 \geqslant 0$, la imagen de $U$ bajo el mapeo $\Phi$ es el subconjunto

$$\Phi(U)=\{(\eta_0,\eta_1)\varepsilon R^2 \mid \eta_0+\eta_1+\eta_1^3 \geqslant 0\}.$$

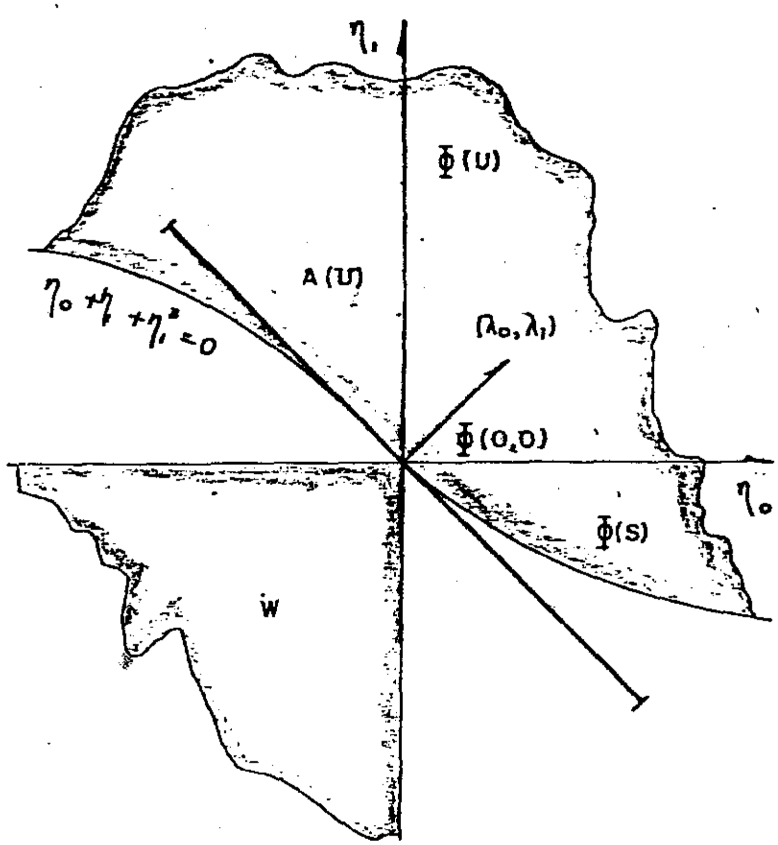



fig. 8

Sea W de todos los puntos $(\eta_0,\eta_1)$ con $\eta_0<\phi_0(a)=0$ y $\eta_1\leq 0$, $W=\{(\eta_0,\eta_1)\varepsilon R^2|\eta_0<0$ y $\eta_1\leq 0\}$, y obsérvese que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y $(0,0)=\Phi(0,0)\varepsilon\Phi(U)\cap W$. como se muestra en la figura 8,.

Nótese que esta vez no existe una recta que separe a $\Phi(U)$ y W, esto se debe a que la imagen $\Phi(U)$ no se encuentra a un sólo lado de una recta que pase por la imagen de la solución óptima. Por tanto linealizamos $\Phi(U)$ en una vecindad del punto -- $\Phi(0,0)=(0,0)$. construyendo el conjunto A(U), donde A es el ma peo afín de $R^2$ en $R^2$ tangente a $\Phi$ en (0,0).

Para ser más precisos, sea L la derivada de $\Phi$ en el punto óptimo (0,0), calculando

$$L=\Phi'(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y definimos A sobre $R^2$ por $A(x,y)=\Phi(0,0)+L(x,y)$. Entonces -- $A(x,y)=y\,(1,-1)$, de donde A(U) es el segmento de recta

$$A(U)=\{(\eta_0,\eta_1)\varepsilon R^2|\eta_0+\eta_1=0,\ -1<\eta_0<1\}$$

Obsérvese que A(U) y W están separados por la recta

$$H=\{(\eta_0,\eta_1)\varepsilon R^2|\eta_0+\eta_1=0\}$$

$$\{(\eta_0,\eta_1)\varepsilon R^2|(1,1).(\eta_0,\eta_1)=0\}.$$

De hecho $A(U) \subset H \subset \bar{H}^{+}$ y $W \subset \bar{H}^{-}$. Poniendo $(\lambda_o,\lambda_1)=(1,1)$, encontramos que $\phi'(0,0)=\lambda_o\phi_o'(0,0)+\lambda_1\phi_1'(0,0)=(0,0)$. Es decir:

(i) Si $\phi(x,y)=\lambda_o\phi_o(x,y)+\lambda_1\phi_1(x,y)$, entonces $\phi'(0,0)=(0,0)$.

Dicho de manera diferente; la solución óptima (0,0) al problema con restricciones es un punto crítico de la función $\phi$. Nótese también que;

(ii) $\lambda_o>0$, $\lambda_1>0$

(iii) $\lambda_1\phi_1(0,0)=0$.

Las condiciones (i), (ii) y (iii) obtenidas geométricamente, son las condiciones necesarias, establecidas en la regla de los multiplicadores de John para minimizar una función sujeta a P restricciones de desigualdad $\phi_1\leq 0,\ldots,\phi_p\leq 0$, donde $\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_p$ están definidas sobre un subconjunto abierto U de $R^n$ y diferenciables en la solución óptima.

RESTRICCIONES DE IGUALDAD Y DESIGUALDAD.

*EJEMPLO 9*. Consideremos el problema de minimizar sobre $U=\{(x,y,z)\in R^3 | x^2+y^2+z^2<1\}$ la función de $\phi_0$ sujeta a las restricciones $\phi_1=0$, $\phi_2\leq 0$, donde

$$\phi_0\ (x,y,z)= x^4+y^4+6x^2y^2+z^2$$
$$\phi_1\ (x,y,z)= x-y$$
$$\phi_2\ (x,y,z)= x+y$$

Debería ser claro que la función $\phi_0$ alcanza su mínimo en el punto $a=(0,0,0)$ y que la imagen del óptimo $\Phi(a)=(0,0,0)$, donde $\Phi:R^3\rightarrow R^3$ es el mapeo definido por $\Phi(\phi_0,\phi_1,\phi_2)$. Denotando por $\eta_0=\phi_0, \eta_1=\phi_1\ \eta_2=\phi_2$ se tiene que $\eta_0,\eta_1,\eta_2$ satisfacen la relación

$$\eta_0-2\eta_1^4-2\eta_2^4=z^2\geq 0$$

De la desigualdad anterior, se sigue que la imagen de U bajo el mapeo $\Phi$ es el subconjunto de $R^3$

$$\Phi(U)=\{(\eta_0,\eta_1,\eta_2)\in R^3 | \eta_0-2\eta_1^4-2\eta_1^4 \geq 0\ \ \eta_0\geq 0\}$$

como se muestra en la figura 9.

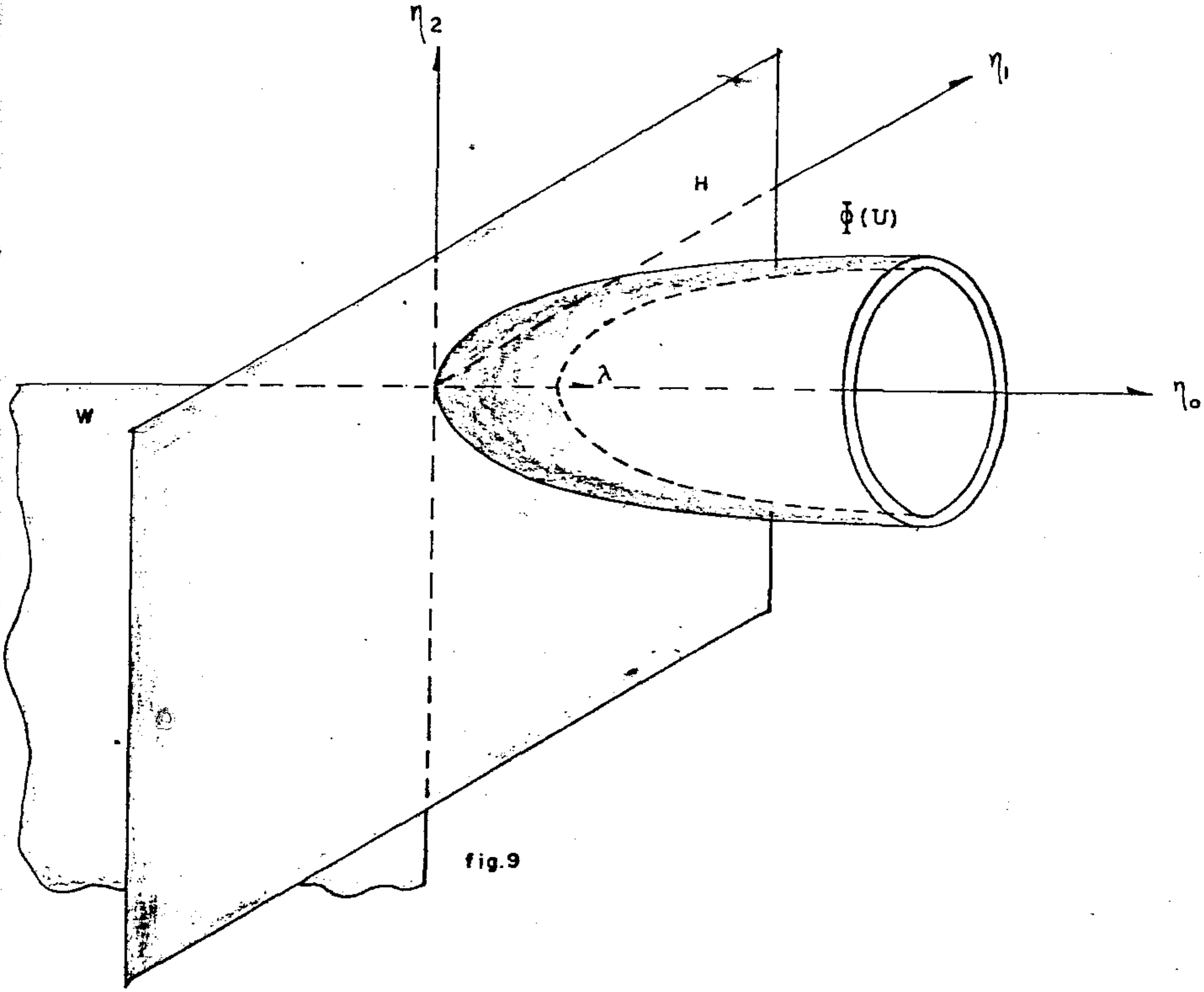


fig.9

Sea W la colección de todos los puntos $W=\{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3/$ $\eta_o<0,\ \eta_1=0,\ \eta_2\leq 0\}$. De la figura puede observarse que los conjuntos $\Phi(U)$ y W tienen intersección vacía y $\Phi(a)\varepsilon\ \Phi(U)\cap\bar{W}$ . Nótese además que los conjuntos $\Phi(U)$ y W están separados por el plano:

$$H=\{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\varepsilon R^3 \mid A\eta_o=0,\ A\neq 0\}$$
$$=\{(\eta_o,\eta_1,\eta_2)\ \varepsilon R^3 \mid (1,0,0)\cdot(\eta_o,\eta_1,\eta_2)=0\},$$

que pasa por la imagen (0,0,0) de la solución óptima (0,0,0). Tomando $\lambda=(\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2)=(1,0,0)$ y definiendo la función

$$\phi(x,y,z)= \lambda_o\phi_o(x,y,z)+\lambda_1\phi_1(x,y,z)+\lambda_2\phi_2(x,y,z)$$

tenemos

(i) $\phi'(a)=\lambda_o\phi_o'(a)+\lambda_1\phi_1'(a)+\lambda_2\phi_2'(a)= (0,0,0)$.

Es decir, la solución óptima al problema del mínimo con restricciones es un punto crítico de la función $\phi$. Adicionalmente se tiene:

(ii) $\lambda_o>0$, $\lambda_1=0$

(iii) $\lambda_1\phi(0,0,0)=0$

Las conclusiones (i), (ii) y (iii), obtenidas geométricamente, son las condiciones necesarias para el óptimo establecidas en la REGLA DE LOS MULTIPLICADORES DE CARATHEODORY- JOHN. Supóngase que U es un subconjunto abierto de $R^n$, y que -- $\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_p\phi_{p+1},\ldots,\phi_{p+q}$ son p+q+1 funciones reales sobre U, fuertemente diferenciables en $a\varepsilon U$. Si $a\varepsilon U$ minimiza $\phi_o$ sujeta a las p restricciones de desigualdad $\phi_1\leq 0,\ldots,\phi_p\leq 0$ y a las q restricciones de igualdad $\phi_{p+1}=0,\ldots,\phi_{p+q}=0$, entonces existe $\ell\neq 0, \ell=(\lambda_o, \lambda_1,\ldots,\lambda_p, \lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+q})\varepsilon R^{p+q+1}$, tal que:

(i) Si $\phi= \Sigma_{i=0}^{p+q} \lambda_i\phi_i$, entonces $\phi'(a)=0$,

(ii) $\lambda_i\geq 0$ para $i=0,1,\ldots,p$ y

(iii) $\lambda_i\phi_i(a)=0$ para $i=1,\ldots,p$.

Ahora consideremos el caso donde la función a minimizar y las restricciones no son diferenciables pero satisfacen la hipótesis, menos restrictiva, de convexidad.

*Ejemplo 10.* Considérese el problema de minimizar en $R^2$ la función $f(x,y)= |x+y+2|$ sujeta a la restricción de desigualdad $\min(x,y)\geq 0$ .

Denotando por $\phi_o(x,y)=|x+y+2|$ y recordando que $-\min(x,y)= \max(-x,-y)$, podemos escribir $\phi_1(x,y)= \max(-x,-y)$ entonces el problema es equivalente a;

$$\text{Minimizar} \quad \phi_o(x,y)= x+y+2$$
$$\text{sujeta a} \quad \phi_1(x,y)= \max(-x,-y)$$

Nótese que $\min(x,y)$ es no negativo, de donde x e y deberán ser no negativas, por tanto $f(x,y)$ alcanza el mínimo en $(x,y)= (0,0)$. Ahora, construyamos el mapeo $\Phi:R^2\to R^2$ mediante $\Phi=(\phi_o,\phi_1)$ y observemos que la imagen de la solución óptima $\Phi(0,0)=(2,0)$.

De las identidades; $\min(x,y)= -\max(-x,-y)$ y $\min(x,y)=1/2(x+y)-1/2|x-y|$, se obtiene $2\max(-x,-y)=-(x+y)+|x-y|$ o bien

$$x+y+2 \max(-x,-y)=|x-y|,$$

de donde $\eta_o=\phi_o(x,y)$ y $\eta_1=\phi_1(x,y)$ satisfacen la desigualdad $\eta_o+2\eta_1-2=|x-y|\geq 0$ siempre que $x+y+2\geq 0$. Por otra parte, si $x+y+2\leq 0$, entonces $-\eta_o+2\eta_1-2\geq 0$. De estas desigualdades se sigue que la imagen del plano bajo $\Phi$ es el subconjunto

$$\Phi(R^2)=\{(\eta_\circ,\eta_1)\in R^2\,|\,\eta_\circ\geq 0,\eta_\circ+2\eta_1-2\geq 0\}$$

como se muestra en la figura 10.

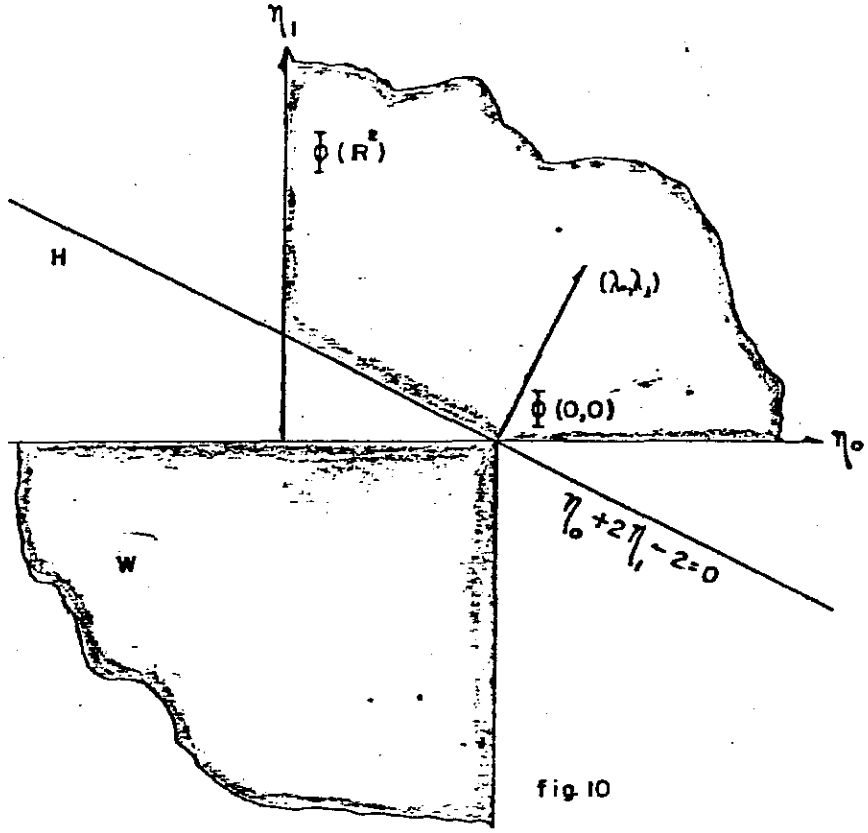


fig. 10

Sea W la colección de todos los puntos $W=\{(\eta_\circ,\eta_1)\in R^2\,|\,\eta_\circ<2,$ $\eta_1\leq 0\}$, entonces de la figura puede observarse que $\Phi(R^2)\cap W=\phi$ y $(2,0)=\Phi\ (0,0)\in\ \Phi(R^2)\cap\bar{W}$. Nótese, además, que la recta

$$\begin{aligned}H&=\{(\eta_\circ,\eta_1)\in R^2\,|\,\eta_\circ+2\eta_1-2=0\}\\&=\{(\eta_\circ,\eta_1)\in R^2\,|\,(1,2)\cdot(\eta_\circ,\eta_1)=2\}\end{aligned}$$

pasa por la imagen (2,0) de la solución óptima (0,0) y separa los conjuntos $\Phi(R^2)$ y $W^*$. De hecho $\Phi(R^2) \subset \bar{H}^+$ y $W \subset \bar{H}^-$. Poniendo $(\lambda_o, \lambda_1) = (1,2)$ y definiendo la función $\phi = \lambda_o \phi_o + \lambda_1 \phi_1$, la primera inclusión implica que $\phi(x,y) \geq 2$ para todo punto $(x,y) \in R^2$. Recordando que $\Phi(0,0) \in H$, tenemos que $\phi(0,0) = \lambda_o \phi_o(0,0) + \lambda_1 \phi_1(0,0) = \lambda_o \phi_o(0,0) = 2 \leq \phi(x,y)$, para todo punto $(x,y) \in R^2$. Por tanto podemos concluir que;

(i) Si $\phi = \lambda_o \phi_o + \lambda_1 \phi_1$, entonces $\phi(0,0) \leq \phi(x,y)$ para todo $(x,y) \in R^2$.

Dicho de otra manera, la solución óptima (0,0) al problema del mínimo restringido es un punto mínimo (global) no restringido para la función $\phi$. Nótese también que;

(ii) $\lambda_o \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, y

(ii) $\lambda_1 \phi_1(0,0) = 0$.

Las condiciones (i), (ii) y (iii) obtenidas geométricamente, son las condiciones necesarias para que un punto $a \in U$ sea la solución óptima al problema del mínimo:

$$\text{Minimizar } \phi_o(x,y)$$
$$\text{sujeta a } \phi_1(x,y) \leq 0,$$

donde U es un subconjunto convexo de $R^2$ y $\phi_o, \phi_1$ son funciones convexas definidas en U.

Las condiciones (i) - (iii) son las conclusiones de la regla de los multiplicadores convexa para el caso p=1, donde p es el número de restricciones. Nótese que en este ejemplo la función $\phi=\lambda_\circ\phi_\circ+\lambda_1\phi_1$, como se mencionó anteriormente, no es diferenciable en la solución óptima (0,0) y que por lo tanto la condición (i) no puede reemplazarse por $\phi'(0,0)=(0,0)$.

REGLA DE LOS MULTIPLICADORES CONVEXA. Supóngase que U es un subconjunto convexo de $R^n$, y que $\phi_\circ, \phi_1, \ldots, \phi_p$ son p+1 funciones convexas sobre U. Si $a \epsilon U$ minimiza $\phi_\circ$ sujeta a las p restricciones de desigualdad $\phi_1 \leq 0, \ldots, \phi_p \leq 0$, entonces existe -- $\ell \neq 0$, $\ell=(\lambda_\circ, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \epsilon R^{p+1}$, tal que:

(i) Si $\phi=\Sigma_{i=0}^{p} \lambda_i \phi_i$ y $x \epsilon U$, entonces

$$\lambda_\circ\phi_\circ(a)=\phi(a)\leq\phi(x),$$

(ii) $\lambda_i \geq 0$ para $i=0,1,\ldots,p$ y

(iii) $\lambda_i\phi_i(a)=0$ para $i=1,\ldots,p$.

# CAPITULO IV

# IV. CUATRO REGLAS BASICAS DE MULTIPLICADORES.

## 4.1 INTRODUCCION.

La teoría de los multip licadores de lagrange se inicia con los estudios clásicos de minimización de funciones sujetas a restricciones. Aunque dichos estudios estuvieron tradicionalmente enfocados a restricciones de igualdad, las restricciones de desigualdad también fueron estudiadas. Este hecho permitió que hubiera un uso y desarrollo creciente del análisis convexo. Probablemente, el descubrimiento más notable para la teoría de los multiplicadores de lagrange fué; la conexión entre la función Lagrangiana y el principio del min/max de Von Neuman.

En su trabajo pionero, publicado en 1951, Kuhn y Tucker mostraron que para problemas de tipo convexo, donde las funciones son convexas diferenciables, una solución óptima $\bar{x}$ y su vector multiplicador $\bar{\lambda}$ constituyen un punto silla de la función Lagrangiana. Esto proporciona una caracterización global de optimalidad, la cual a demostrado ser de gran utilidad desde el punto de vista conceptual y computacional.

Sin embargo, como ya lo señalaban en su trabajo Kuhn y Tucker, la equivalencia entre un máximo con restricciones de desigualdad para $\phi_0(x)$ y un valor silla para la Lagrangiana $\phi(x, \lambda)$, se tiene aún cuando la suposición de diferenciabilidad se elimine.

Inspirado en esta idea H. Uzawa, en 1958, prueba que, sin ninguna calificación sobre las funciones $\phi_1,\dots,\phi_p$; siempre que exista un punto silla $(\bar{x},\bar{\lambda})$ de la Langragiana $\phi(x, \lambda)$, el vector $\bar{x}$ será una solución óptima al problema del máximo con restricciones de desigualdad. Adicionalmente, establece la equivalencia entre un máximo con restricciones de desigualdad y el punto silla para la función Lagrangiana asociada, suprimiendo la hipótesis de diferenciabilidad e introduciendo una calificación diferente.

La idea clave, implícita en dicho trabajo, consiste en la separación de dos ciertos conjuntos convexos en el espacio imagen $R^{p+1}$. El establecimiento de los resultados de las reglas de multiplicadores; que admiten desigualdades como restricciones, hace uso extensivo de esta idea y de una caracterización diferente de optimalidad.

4.2 REGLAS DE MULTIPLICADORES Y SEPARACION.

Supóngase que $\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_p,\phi_{p+1},\dots,\phi_{p+q}$ son $p+q+1$ funciones reales definidas sobre un subconjunto abierto U de $R^n$, y que $a \in U$ minimiza $\phi_0$ sujeta a las p restricciones de desigualdad $\phi_1 \leqslant 0, \ldots\ldots, \phi_p \leqslant 0$ y a las q restricciones de igualdad $\phi_{p+q}=0, \ldots\ldots, \phi_{p+q}=0$.

Si la geometría del problema de optimización restringida se lleva a cabo en el espacio imagen $R^{p+q+1}$ del mapeo $\Phi(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{p+q})$ , entonces la existencia de la solución óptima está caracterizada mediante la intersección vacía de dos ciertos conjuntos, y la regla de multiplicadores se obtiene de la separación de los conjuntos referidos.

CARACTERIZACION DE OPTIMALIDAD. Sea U un subconjunto abierto de $R^n$. Un punto a U es una solución óptima al problema:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } \phi_0(x) \\
&\text{sujeta a } \phi_i(x) \leq 0, \; i=1,\ldots,p \\
&\qquad\qquad \phi_i(x)=0, \; i=p+1,\ldots,p+q.
\end{aligned}
$$

si y sólo si $\Phi(U) \cap W = \phi$ y $\Phi(a) \in \Phi(U) \cap Wa$. Donde son p+q+1 funciones reales definidas sobre U, $\Phi$ es el mapeo definido por $\Phi=(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{p+q})$ y Wa es la colección de todos los puntos $y=(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{p+q}) \in R^{p+q+1}$ tales que:

$$
\begin{aligned}
&\eta_0 < \phi_0(a), \quad a \in U \\
&\eta_i \leqslant 0, \qquad \text{para } i=1,\ldots,p \text{ y} \\
&\eta_i = 0, \qquad \text{para } i=p+1,\ldots,p+q.
\end{aligned}
$$

Dicho de manera diferente, un punto $a\in U$ que minimiza a la función $\phi_\circ$ sujeta a las restricciones $\phi_i \leq 0 (i=1,\ldots,p)$ y $\phi_i = 0 (i=p+1,\ldots,p+q)$ está caracterizado por la intersección vacía de los conjuntos $\Phi(U)$ y Wa en el espacio imagen $R^{p+q+1}$.

Cuando la imagen $\Phi(U)$ es convexa, la regla de multiplicadores asociada es una consecuencia inmediata de la separación, mediante un hiperplano, de los conjuntos convexos $\Phi(U)$ y Wa.

UN PRINCIPIO UNIFICADO DE LAS REGLAS DE MULTIPLICADORES. Sean U un subconjunto de $R^n$, $\phi_\circ,\phi_1,\ldots,\phi_{p+q}$ p+q+1 funciones reales definidas sobre U, y sea $\Phi: U \to R^{p+q+1}$ el mapeo definido por $\Phi(x) = (\phi_\circ(x),\ldots,\phi_{p+q}(x))$. Supóngase que $\Phi(U)$ es un subconjunto convexo, no vacío de $R^{p+q+1}$. Si $a\in U$ minimiza a la función $\phi_\circ$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1 \leq 0,\ldots,\phi_p \leq 0$ y a las restricciones de igualdad $\phi_{p+1}=0,\ldots,\phi_{p+q}=0$, entonces existe $\ell \neq 0$, $\ell = (\lambda_\circ,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+q})$ $R^{p+q+1}$ tal que:

(i) Si $\phi(x) = \sum_{i=0}^{p+q} \lambda_i \phi_i$, entonces $\phi(a) \leq \phi(x)$ para toda $x\in U$. Es decir, $a\in U$ es un mínimo no restringido de $\phi(x)$.

(ii) $\lambda_i \geq 0$, para $i=0,1,\ldots,p$ y

(iii) $\lambda_i \phi_i(a) = 0$, para $i=1,\ldots,p$ .

*Demostración:* Supongamos que $a\varepsilon U$ es una solución óptima. Por tanto, debido a la caracterización del óptimo, $\Phi(U)\cap Wa=\phi$. - Como, por hipótesis $\Phi(U)$ es un conjunto convexo, por el teorema de separación, los conjuntos convexos disjuntos Wa y - $\Phi(U)$ pueden ser separados. Sea $H\varepsilon R^{p+q+1}$ un hiperplano separador de $\Phi(U)$ y Wa, con $\Phi(U) \subset \bar{H}^{+}$, y $Wa \subset \bar{H}^{-}$. Puesto que $\Phi(a)$ . $\Phi(U)\cap\bar{W}a$, H deberá pasar por $\Phi(a)$, indicando que H tiene la forma:

$$H=\{y\in R^{p+q+1}\}\ \ell\cdot\left[y-\Phi(a)\right]=0\}\ \text{para algún}\ \ell\neq 0,$$

$$\ell=(\lambda_\circ,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+q})\varepsilon R^{p+q+1}.$$

De $\Phi(U) \subset \bar{H}^{+}$ y $Wa \subset \bar{H}^{-}$ tenemos;

(a) $\ell\cdot\left[\Phi(x)-\Phi(a)\right]\geqslant 0$ para todo $x\varepsilon U$ y

(b) $\ell\cdot\left[y-\Phi(a)\right]\leqslant 0$ para todo $y\varepsilon Wa$.

De la igualdad (a) tenemos $\ell\cdot\Phi(a)\geqslant\ell\cdot\Phi(a)$ para toda $x\varepsilon U$, la cual se transforma en la primera conclusión de nuestro principio unificado:

(i) Si $\phi(x)=\sum_{i=1}^{p+q}\lambda_i\phi_i(x)$, entonces $\phi(a)\leqslant\phi(x)$, $\forall\ x\varepsilon U$. Es decir, $a\varepsilon U$ es un punto mínimo no restringido de $\phi$.

Para probar (ii), supóngase que $\lambda_i<0$ para $i=0,1,\ldots,p$ y que $\Phi(a)=0$. Puesto que las restricciones sobre $y=(\eta_\circ,\eta_1,\ldots$ $\ldots,\eta_p,\eta_{p+1},\ldots,\eta_{p+q})\varepsilon Wa$ son $\eta_\circ<0,\eta_i\leqslant 0$ para $i=1,\ldots,p,\eta_i=0$ para $i=p+1,\ldots,p+q$, entonces el producto $\ell\cdot y=\sum_{i=0}^{p+q}\lambda_i\eta_i$ será siempre positivo para toda $y\varepsilon Wa$, puesto que $\lambda_\circ\eta_\circ>0,\lambda_i\cdot\eta_i\geqslant 0$

para $i=1,\ldots,p$ y $\lambda_i \eta_i=0$ para $i=p+1,\ldots,p+q$. Esto contradice la desigualdad (b). Por lo tanto $\lambda_i \geqslant 0$ para $i=0,1,\ldots,p$.

Para establecer la conclusión (iii), elegimos -- $\bar{Y}=(\phi_o(a),\ldots, \frac{1}{2}\phi_j(a),\ldots,\phi_{p+q}(a))\varepsilon \bar{W}a$, para cualesquier $j=0,1,\ldots,p$. Puesto que la desigualdad (b) se tiene sobre $\bar{W}a$ si se cumple sobre Wa, tenemos que:

$$\ell\cdot\left[\bar{y}-\Phi(a)\right]=-\frac{1}{2}\lambda_j\phi_j(a)\leqslant 0, \text{ o bien } \lambda_j\phi_j\geqslant 0.$$

Pero, por otro lado, de la conclusión (ii) y la optimalidad de $a\varepsilon U$, se tiene;

$$\lambda_j\geqslant 0 \text{ y } \phi_j(a)\leqslant 0, \text{ lo cual implica que } \lambda_j\phi_j(a)\leqslant 0.$$

Combinando estas dos desigualdades, tenemos $\lambda_j\phi_j(a)=0$ para $j=1,\ldots,p$. Que es la conclusión (iii).

Cuando las funciones, $\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_p,\phi_{p+1},\ldots,\phi_{p+q}$ son diferenciables en el punto $a\varepsilon U$, podemos aún concluir que $\phi'(a)=0$, puesto que la conclusión (i) indica que $a\varepsilon U$ es un punto mínimo no restringido de $\phi$.

Como lo hemos mostrado arriba: cuando la imagen $\Phi(U)$ es convexa, entonces la regla de multiplicadores es una consecuencia inmediata de la separación, mediante un hiperplano, de los conjuntos convexos disjuntos $\Phi(U)$ y Wa. Desafortunadamente, $\Phi(U)$ no es generalmente convexo. Aún cuando U sea un conjunto convexo y $\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_{p+q}$ sean funciones convexas,

$\Phi(U)$ no es necesariamente convexo. Sin embargo, esta dificultad se resuelve reemplazando la imagen $\Phi(U)$ con una aproximación convexa K. Las variaciones en las demostraciones de las cuatro reglas básicas de multiplicadores provienen de dos fuentes: cambios en la elección de la aproximación convexa K y el grado de dificultad para probar que K y Wa son separados. Una vez que sabemos que K y Wa son separados, las reglas de multiplicadores se obtienen sin mucha dificultad.

## 4.3. CUATRO REGLAS BASICAS DE MULTIPLICADORES.

Para probar las cuatro reglas básicas de multiplicadores reemplazaremos la imagen $\Phi(U)$ no necesariamente convexa con una aproximación convexa K y tratamos de imitar el procedimiento utilizado en el establecimiento de las conclusiones del principio unificado. Las varaiciones en esta imitación surgen, como ya se indicó anteriormente, de cambios en la elección de K y el grado de dificultad para probar que K y Wa son separados. Examinemos estas variaciones para las tres reglas de multiplicadores que admiten desigualdades como restricciones.

En la regla de multiplicadores de John, donde las funciones $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p$ se suponen diferenciables en la solución óptima, la aproximación convexa de la imagen $\Phi(U)$ se obtiene; linealizando la imagen $\Phi(U)$ cerca del punto $\Phi(a)$ y construyendo el conjunto A(U), donde A denota el mapeo afín $A(x)= \Phi(x)+ L(x-a)$ y L denota la derivada, $\Phi'(a)=\left[ \partial\phi_i/\partial\phi_i)(a) \right]$, de $\Phi$ en la solución óptima $a \in U$. Ahora, si suponemos sin pérdida de generalidad que U es convexo, la imagen A(U) es convexa, y sólo será necesario confirmar que A(U) y Wa son separados. La separación resultante proporciona las tres conclusiones de la regla de los multiplicadores de John.

La regla de multiplicadores de Caratheodory-John se prueba con el mismo esquema, pero la presencia de restricciones de igualdad hace que la separación de A(U) y Wa sea más difícil de establecer. La separación deseada se obtiene haciendo uso del Teorema del Mapeo Interior convexo.

En la regla de multiplicadores convexa, el conjunto U y las funciones $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p$ se suponen convexas. La imagen $\Phi(U)$ no es necesariamente convexa, pero estas suposiciones de convexidad permiten la construcción de un conjunto convexo K el cual contiene a $\Phi(U)$, permaneciendo no obstante disjunto de Wa. La separación de los conjuntos convexos K y Wa proporciona la separación de los conjuntos $\Phi(U)$ y Wa, la cual será necesaria para derivar esta regla de multiplicadores.

Abordaremos, primero, el resultado clásico en la teoria de optimización restringida. La regla de multiplicadores con restricciones de igualdad.

TEOREMA DE CARATHEODORY. Supóngase que U es un subconjunto abierto de $R^n$, y $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_q$ q+1 funciones reales sobre

U, cada una fuertemente diferenciable en $a\varepsilon U$. Si $a\varepsilon U$ minimiza $\phi_\circ$ sujeta a las restricciones de igualdad $\phi_1=0,\phi_2=0,\ldots,\phi_q=0$, entonces existe $\lambda\neq 0$, $\lambda=(\lambda_\circ,\lambda_1,\ldots,\lambda_q)\varepsilon R^{q+1}$ tal que

(i) si $\phi=\sum_{i=0}^{q}\lambda_i\phi_i$, entonces $\phi'(a)=0$ y

(iii) $\lambda_\circ\geqslant 0$.

*Demostración:* Sea $\Phi$ el mapeo $(\phi_\circ,\phi_1,\ldots,\phi_q)$ de U en $R^{q+1}$, y sea W el conjunto de todas las $Y=(\eta_\circ,\eta_1,\ldots,\eta_q)$ en $R^{q+1}$ tal que $\eta_\circ<\phi_\circ(a)$ y $\eta_i=0$ si $i=1,\ldots,q$. Puesto que, por hipótesis, $a\varepsilon U$ es una solución óptima, el criterio de optimalidad implica que $\Phi(U)\cap W=\phi$. Ahora bien, puesto que la imagen de la solución óptima $\Phi(a)\varepsilon\ \Phi(U)\cap\bar{W}$, se debe tener que $\Phi(a)$ no está en el int $\phi(U)$, por que de lo contrario puntos de W estarían en $\Phi(U)$. Se sigue del teorema del mapeo interior que la derivada fuerte $\ell=\Phi'(a)$ de $\Phi$ en $a\varepsilon U$ no es un mapeo suprayectivo de $R^n$ sobre $R^{q+1}$, lo cual significa que los q+1 renglones $\phi_\circ'(a),\ldots,\phi_q'(a)$ de $\ell$ son linealmente dependientes. Esto implica que existen escalares $\lambda_\circ,\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ no todos cero tal que $\lambda_\circ\phi_\circ'(a)+\lambda_1\phi_1'(a)+\ldots+\lambda_q\phi_q'(a)=0$. Si $\phi=\Sigma_{i=0}^{q}\lambda_i\phi_i$, entonces $\phi'(a)=0$, lo cual prueba (i). Para probar (ii) supongamos que la relación $\alpha_\circ\phi_\circ'(a)+\alpha_1\phi_2'(a)+\ldots+\alpha_q\phi_q'(a)=0$ solamente se satisface para $\alpha_\circ<0$ y $\alpha_i<0$, $i=1,2,\ldots,q$. Dividiendo entre $\alpha_\circ\neq 0$, se tiene que $\phi'(a)+\alpha_1/\alpha_\circ\phi_1'(a)+\ldots+\alpha q/\alpha_q\phi_q'(a)=0$. Esto implica que existen $\lambda_\circ=1\geqslant 0$, $\lambda_1=\alpha_1/\alpha_\circ\geqslant 0,\ldots,\lambda_q=\alpha_q/\alpha_\circ\geqslant 0$, lo cual es una contradicción, por tanto $\alpha_\circ \geq 0$.

COROLARIO. REGLA DE LOS MULTIPLICADORES DE EULER-LAGRANGE. Si las derivadas $\phi_1'(a),\ldots,\phi_q'(a)$ son linealmente independientes, entonces las conclusiones de la regla de los multiplicadores se tiene con un $\lambda_\circ$ positivo.

PRUEBA. Supongamos que $\lambda_\circ=0$ y $\lambda_i\neq 0$ para algún $i=1,\ldots,q$ y que satisfacen la relación $\lambda_1\phi_1'(a)+\ldots+\lambda_q\phi_q'(a)=\phi'(a)=0$, esto implica que las derivadas $\phi_1'(a),\ldots,\phi_q'(a)$ son linealmente dependientes, contrario a la hipótesis. Por tanto $\lambda_\circ>0$.

TEOREMA DE JOHN. Supongamos que U es un subconjunto abierto de $R^n$, y $\phi_\circ,\phi_1,\ldots,\phi_p$ son p+1 funciones reales sobre U, cada una diferenciable en $a\varepsilon U$. Si $a\varepsilon U$ minimiza a $\phi_\circ$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1\leq 0$, $\phi_2\leq 0,\ldots,\phi_p\leq 0$, entonces existe $\lambda\neq 0$, $\lambda=(\lambda_\circ,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ en $R^{p+1}$, tal que;

(i) Si $\phi=\Sigma_{i=0}^{p}\lambda_i\phi_i$, entonces $\phi'(a)=0$

(ii) $\lambda_i\geq 0$ para $i=0,1,\ldots,p$ y

(iii) $\lambda_i\phi_i(a)=0$ para $i=1,\ldots,p$.

*Demostración:* Supongamos, sin pérdida de generalidad, que U es convexo, $a=0$ y $\phi_\circ(a)=0$. Sea $\Phi=(\phi_\circ,\phi_1,\ldots,\phi_p)$ el mapeo de U en $R^{p+1}$, y sea W el subconjunto $\{y=(\eta_\circ,\eta_1,\ldots,\eta_p)\varepsilon R^{p+1}/$

$\eta_0<0$ y $\eta_i \leqslant 0$, $i=1,\ldots,p\}$. La optimalidad de $0\varepsilon U$ asegura que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y $\Phi(0)\varepsilon\Phi(U)\cap\bar{W}$. Supóngase que $\ell=\Phi'(0)$ denota la derivada de $\Phi$ en $0\varepsilon U$, definimos el mapeo afín A por $A(x)=\Phi(0)+\ell(x)$, y asumamos, por el momento, que $A(U)$ y $W$ están separados. Puesto que $\Phi(0)=A(0)$ pertenece a $A(U)\cap\bar{W}$, el hiperplano separador pasa por $\Phi(0)$. Por lo tanto existe $\lambda\neq 0, \lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\varepsilon R^{p+1}$, tal que

(a) $\lambda\cdot\left[y-\Phi(0)\right]\geqslant 0$ para toda $y\varepsilon A(U)$ y

(b) $\lambda\cdot\left[y-\Phi(0)\right]\leqslant 0$ para toda $y\varepsilon W$

De (a) tenemos, para todo $x\varepsilon U$, la desigualdad $\lambda\cdot\left[Ax-\Phi(a)\right]=\lambda\cdot\ell(x)\geqslant 0$. Puesto que U contiene una vecindad de cero, $\lambda\cdot\ell x\geqslant 0$ implica que $\lambda\cdot\ell(x)=0$ para todo $x\varepsilon R^n$. Es decir, $\lambda\cdot(\phi_0'(0)x,\ldots,\phi_p'(0)x)=0$ para toda $x\varepsilon R^n$. Puesto que las derivadas $\phi_i'(0)$ son los renglones de $\ell$, la igualdad anterior la podemos escribir en la forma $\Sigma_{i=0}^{p}\lambda_i\phi_i'(0)x=0$ para toda $x\varepsilon R^n$, lo cual es la conclusión (i). Para probar (ii), supongamos que $\lambda_i<0$ para algún $i\in 0,1,\ldots,p$. Entonces, puesto que las restricciones sobre - $y=(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_p)\varepsilon W$ son $\eta_0<\phi_0(a)=0$, $\eta_i\leqslant 0$, para $i=1,\ldots,p$ el - producto $\lambda\cdot y=\Sigma\lambda_i y_i>0$ para algun $y\varepsilon W$. Esto contradice la desigualdad (b), por tanto $\lambda_i\geqslant 0$ para toda $i=0,1,\ldots,p$. Para probar la condición (iii), elejimos cualesquier $J=1,\ldots,p$ y ponemos $\bar{y}=(0,\phi(0),\ldots,\frac{1}{2}\phi_j(0),\ldots,\phi_p(0))\varepsilon\bar{W}$. Puesto que la desigualdad (b) se cumple para $\bar{W}$ si se cumple para W, tenemos

$\lambda\cdot\left[\bar{y}-\Phi(0)\right]=-1/2\lambda_j\phi_j(0)\leqslant 0$ o $\lambda_j\phi_j(0)\geqslant 0$. Pero por otro lado, de (ii) y la optimalidad de a=0, tenemos $\lambda_j\geqslant 0$ y $\phi_j(0)\leqslant 0$ lo cual implica que $\lambda_j\phi_j(0)\leqslant 0$. Combinando las dos desigualdades obtenidas tenemos $\lambda_j\phi_j(0)=0$ para J=1,...,p, que es la conclusión (iii).

Ahora verificaremos que A(U) y W están necesariamente separados. Supongamos que A(U) y W no están separados. Entonces, puesto, que $\text{int}W=\{y=(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_p)\varepsilon R^{p+1}/\eta_i<0 \text{ para } i=0,1,\ldots,p\}$ es no vacío, la condición (3) del teorema de separación implica que $0\varepsilon A(U)-\text{int}W$. Por lo tanto para algún $\bar{x}$ en U, tenemos que $A\bar{x}\,\varepsilon$ int W. Puesto que $\Phi$ es diferenciable en 0, para todo $\alpha>0$ tal que $\alpha\bar{x}\varepsilon U$ podemos escribir $\Phi(\alpha\bar{x})= A(\alpha\bar{x})+ r(\alpha\bar{x})|\alpha\bar{x}|$, donde $r(\alpha\bar{x})\rightarrow 0$ cuando $\alpha\rightarrow 0$. Siendo el conjunto int W abierto, podemos fijar $\alpha\varepsilon(0,1)$ tal que $\alpha\bar{x}\varepsilon U$ y $A\bar{x} + r(\alpha\bar{x})|\cancel{\alpha}\bar{x}|\varepsilon$int W. Pero $\alpha y\,\varepsilon$ int W siempre que $\alpha>0$ y $y\varepsilon$int W. Entonces $\alpha\left[A\bar{x}+r(\alpha\bar{x})|\bar{x}|\right]\varepsilon$ int W, esto es $\alpha\Phi(0) + \ell(\alpha\bar{x})+ r(\alpha\bar{x})|\alpha\bar{x}|\varepsilon$ int W. para cada - $i=0,1,\ldots,p$ tenemos $\phi_i(0)\leqslant \alpha\,\phi_i(0)$ por que $\alpha\varepsilon(0,1)$ y $\phi_i(0)\leqslant 0$. Esto implica que $\Phi(\alpha\bar{x})=\Phi(0)+\ell(\alpha x)+ r(\alpha\bar{x})|\alpha\bar{x}|\varepsilon$int W C W, indicando que $\Phi(U)\cap W\neq\phi$, una contradicción. Consecuentemente, A(U) y W deben necesariamente estar separados, y la prueba está terminada.

Bajo las hipótesis del teorema anterior y además

COROLARIO. [TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER]. Si algún $h\varepsilon R^n$ satisface $\phi_i'(a)h<0$ para toda $i=1,\ldots,p$ tal que $\phi_i(a)=0$, enton ces las conclusiones de la regla de los multiplicadores se tiene con un $\lambda_{\circ}$ positivo.

PRUEBA. Escojamos $h\varepsilon R^{n}$ que satisfaga la condición de arriba, y supongamos que se cumplen las condiciones de la regla de los multiplicadores de John, pero sólo cuando $\lambda_{\circ}=0$. De la conclusión (i) tenemos $\Sigma_{i=1}^{p}\lambda_{i}\phi_{i}'(0)h=0$. Sean I y J los subconjuntos de $\{1,2,\ldots,p\}$ tal que $\phi_{i}(a)<0$ cuando $i\varepsilon I$ y $\phi_{i}(a)=0$ cuando $i\varepsilon J$. Entonces $I\cup J=\{1,2,\ldots,p\}$. De la conclusión

(iii) Sabemos que $\lambda_{i}=0$ si $i\varepsilon I$, por tanto;

$$\Sigma_{i\varepsilon j}\lambda_{i}\phi_{i}'(a)h=\Sigma_{i=1}^{p}\lambda_{i}\phi_{i}'(a)h=0$$

Pero ningún término de la primera suma es positivo porque $\lambda_{i}\geqslant0$ y $\phi_{i}'(a)h<0$ si $i\varepsilon J$. Esto significa que cada término es cero, forzando a que $\lambda_{i}=0$ para $i\varepsilon J$. Ahora tenemos que $\lambda_{\circ}=0$ y $\lambda_{i}=0$ para i en $IUJ=\{1,2,\ldots,p\}$, contradiciendo que $(\lambda_{\circ},\lambda_{1},\ldots,\lambda_{p})\neq0$.

TEOREMA DE CARATHEODORY-JOHN. Supóngase que U es un subconjunto abierto de $R^{n}$, y $\phi_{\circ},\phi_{1},\ldots,\phi_{p+1},\ldots,\phi_{p+q}$ funciones reales sobre U, cada una fuertemente diferenciable en $a\varepsilon U$. Si $a\varepsilon U$ minimiza a $\phi_{\circ}$ sujeta a las p restricciones de desigualdad $\phi_{1}\leqslant0,\ldots,\phi_{p}\leqslant0$ y a las q restricciones de igualdad $\phi_{p+1=0},\ldots,\phi_{p+q}=0$, entonces existe $\lambda\neq0$, $\lambda=(\lambda_{\circ},\lambda_{1},\ldots\lambda_{p},\ldots,\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+q})\varepsilon R^{p+q+1}$

tal que

(i) Si $\phi = \sum_{i=0}^{p+q} \lambda_i \phi_i$, entonces $\phi'(a)=0$

(ii) $\lambda_i \geqslant 0$ para $i=0,1,\ldots,p$ y

(iii) $\lambda_i \phi_i(a)=0$ para $i=1,\ldots,p$.

*Demostración.* Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a=0$, $U$ es convexo, y $\Phi(a)=0$, donde $\Phi$ es el mapeo $(\phi_\circ,\phi_1,\ldots,\phi_{p+q})$ de $U$ en $R^{p+q+1}$. Sea $W$ la colección de todas las $Y=(\eta_\circ,\eta_1,\ldots,\eta_{p+q})$ en $R^{p+q+1}$ tal que:

$$\eta_\circ<0$$
$$\eta_i \leqslant 0 \text{ para } i=1,\ldots,p \text{ y}$$
$$\eta_i=0 \text{ para } i=p+1,\ldots,p+q.$$

La optimalidad de $0\varepsilon U$ garantiza que $\Phi(U)\cap W=\phi$. También tenemos que $\Phi(0)\varepsilon\Phi(U)\cap\overline{W}$. Sea $\Phi'(0)$ la derivada fuerte de $\Phi$ en $0\varepsilon U$. Si $\ell(U)$ y $W$ están separados, las conclusiones (i), (ii), (iii) se siguen exactamente como se obtuvieron en la regla de los multiplicadores de John.

Supóganse que $\ell(U)$ y $W$ no están separados. Entonces la condición (2) del teorema de separación asegura que $0\varepsilon\left[\ell(U)-W\right]$. Esto es lo mismo que escribir $M(0,0)\varepsilon$ int $M(UXW)$ si $M$ es la derivada de $\psi$ en $(0,0)$ y $\psi$ es el mapeo de $UxR^{p+q+1}$ en $R^{p+q+1}$ dado por $\psi(x,y)=\Phi(x)-y$. Del teorema del mapeo interior convexo, tenemos

$$0=\psi(0,0)\varepsilon \text{ int } \psi(UXW) \subset \psi(UXW),$$

lo cual implica que $0=\Phi(x)-y$ para algún $x\varepsilon U$ y algún $y\,\varepsilon\, W$, contradiciendo la condición $\Phi(U)\cap W=\phi$. Por lo tanto $\ell(U)$ y W deben estar necesariamente separados, completando la prueba.

COROLARIO. [TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER]. Si $\phi'_{p+1},\ldots,\phi'_{p+q}$ son linealmente independientes y algún $h\varepsilon R^n$ satisface; y

(a) $\phi'_i(a)h<0$ para aquellos $i=1,\ldots,p$ tal que $\phi_i(a)=0$ y

(b) $\phi'_i(a)h=0$ para $i=p+1,\ldots,p+q$,

entonces la regla de los multiplicadores de Caratheodory-John se cumple con $\lambda_o$ positivo.

*Demostración:* Supóngase, por el contrario que las condiciones de este corolario se satisfacen, y que las conclusiones (i), (ii) y (iii) de la regla de los multiplicadores de Caratheodory-John se cumplen todavía solamente cuando $\lambda_o=0$. Elíjase $h\varepsilon R^n$ que satisfaga las propiedades (a) y (b). Utilizando la conclusión (i), la propiedad (b), y la suposición de que $\lambda_o=0$, tenemos que $\Sigma^p_{i=1}\lambda_i\phi'_i(a)h=0$. Exactamente como en la prueba del corolario a la regla de los multiplicadores de John, la propiedad (a) ahora implica que $\lambda_i=0$ si $i=1,\ldots,p$. Esto significa que la conclusión (i) se reduce a $\Sigma^{p+q}_{i=p+1}\lambda_i\phi'_i(a)=0$, y de la independencia lineal de $\phi'_{p+1}(a),\ldots,\phi'_{p+q}(a)$ se deduce que -

$\lambda_{p+j}=0$ para $j=1,\ldots,q$. Tenemos mostrado que $\lambda=(\lambda_0\ldots,\lambda_{p+q})=0$, una imposibilidad. Por lo tanto algún, $\lambda\neq 0$, $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+q})$ que satisface las conclusiones de la regla de los multiplicadores de Caratheodory-John deberá tener $\lambda_0>0$.

REGLA DE LOS MULTIPLICADORES CONVEXA. Supóngase que U es un subconjunto convexo de $R^n$, y $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_p$ son p+1 funciones convexas sobre U. Si $a\varepsilon U$ minimiza a $\phi_0$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1\leqslant 0,\ldots,\phi_p\leqslant 0$, entonces existe $\lambda\neq 0$, $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\phi_p)\varepsilon R^{p+1}$ tal que

(i) Si $\phi=\Sigma_{i=0}^{p}\lambda_i\phi_i$ y $x\varepsilon U$, entonces $\lambda_0\phi_0(a)=\phi(a)\leqslant\phi(x)$,

(ii) $\lambda_i\geqslant 0$ para $i=0,1,\ldots,p$ y

(iii) $\lambda_i\phi_i(a)=0$ para $i=1,\ldots,p$.

*Demostración:* Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $\phi_0(a)=0$. Si $\Phi$ denota el mapeo $(\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_p)$ de U en $R^{p+1}$, y W representa el conjunto $\{y=(\eta_0\eta_1,\ldots,\eta_p)\varepsilon R^{p+1}|\eta_0<\phi(a)$ y $\eta_i\leqslant 0$ para $i=1,\ldots,p\}$ de $R^{p+1}$, entonces la optimalidad de $a\varepsilon U$ implica que $\Phi(U)\cap W=\phi$ y $\Phi(a)\varepsilon\Phi(U)\cap\bar{W}$. Ahora, $\Phi(U)$ no es necesariamente convexo, pero, por el momento supongamos que podemos construir un conjunto convexo K tal que $\Phi(U)CK$ y $K\cap W=\phi$. Entonces K y W son disjuntos, no vacíos, y convexos. Además $\Phi(a)\varepsilon\ K\cap\bar{W}$. Por el teorema de separación, K y W son separados por un hiperplano que pasa por $\Phi(a)$: entonces existe $\lambda\neq 0$, $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\varepsilon R^{p+1}$, -

tal que:

(a) $\lambda_\circ \left[ y-\Phi(a) \right] \geqslant 0$ para todo $y \varepsilon K$ y

(b) $\lambda_\circ \left[ y-\Phi(a) \right] \leqslant 0$ para todo $y \varepsilon W$.

Porque K contiene a $\Phi(U)$, la condición (a) implica que:

$\Sigma_{i=0}^{p} \lambda_i \phi_i(a) \leqslant \Sigma_{i=0}^{p} \lambda_i \phi_i(x)$ para todo $x \varepsilon U$,

y ésta es la desigualdad en la conclusión (i). Para probar - (ii), supóngase que $\lambda_i < 0$ para algún $i=0,1,\ldots,p$ y que $\Phi(a)=0$. Puesto que las restricciones sobre $y=(\eta_\circ,\eta_1,\ldots,\eta_p) \varepsilon W$ son $\eta_\circ<0, \eta_i \leqslant 0$ para $i=0,1,\ldots,p$, entonces el producto $\lambda \cdot y = \Sigma_{i=0}^{p} \lambda_i \eta_i$, $y \varepsilon W$, - siempre será positiva, puesto que el producto $\lambda_\circ \eta_\circ > 0$ y $\lambda_i \cdot \eta_i \geqslant 0$ para toda $i=1,\ldots,p$. Esto contradice la desigualdad (b). Por tanto $\lambda_i \geqslant 0$ para toda $i=0,1,\ldots,p$. Para establecer (iii), elijamos cualquier $J=1,\ldots,p$ y $\bar{Y}=(\phi_\circ(a),\ldots,\frac{1}{2}\phi_j(a),\ldots,\phi_p(a)) \varepsilon \bar{W}$. Porque la desigualdad (b) se tiene sobre $\bar{W}$ si se cumple sobre W, se tiene $\lambda \cdot \left[ \bar{y}-\Phi(a) \right] = -\frac{1}{2}\lambda_j\phi_j(a) \leqslant 0$, o bien $\lambda_j \phi_j(a) \geqslant 0$. Pero, por otro lado, por la conclusión (ii) y la optimalidad de a se tiene $\lambda_j \geqslant 0$ y $\phi_j(a) \leqslant 0$, lo cual implica que $\lambda_j \phi_j(a) \leqslant 0$. Combinando estas dos desigualdades tenemos $\lambda_j \phi_j(a) = 0$ para $j=1,\ldots,p$. Que es la conclusión (iii).

Para completar la prueba, debemos mostrar como construir un conjunto convexo K que satisfaga $\Phi(U) \subset K$ y $K \cap W = \phi$. Para cada -

$x\varepsilon U$, denotemos por $K(x)$ al conjunto $\{\vec{y}=(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_p)\varepsilon R^{p+1} \mid \phi_i(x)\leq\eta_i$ si $i=0,1,\ldots,p\}$. Poniendo $K=\bigcup_{x\varepsilon U}K(x)$. De $\Phi(x)\varepsilon K(x)$ se sigue que $\Phi(U)\subset K$. Suponga que $\bar{y}=(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_p)\varepsilon K\cap W$. Entonces existe algún $\bar{x}\varepsilon U$ tal que $\phi_0(\bar{x})\leq\eta_0<\phi_0(a)$ y $\phi_i(\bar{x})\leq\eta_i\leq 0$ para $i=1,\ldots,p$; la existencia de tal $\bar{x}$ contradice la optimalidad de $a\varepsilon U$. Por lo tanto $K\cap W=\phi$. Sólo resta mostrar que $K$ es convexo. Escojamos dos puntos cualesquiera $y=(\eta_i)$ y $w=(\omega_i)$ en $K$ y fijemos $\alpha\varepsilon[0,1]$. Para algún $x$ y algún $z\varepsilon U$, tenemos $y\varepsilon K(x)$ y $w\varepsilon K(z)$. Por la convexidad de las funciones $\phi_i$, $i=0,1,\ldots,p$, se sigue que:

$$\phi_i\left[(1-\alpha)x+\alpha z\right]\leq (1-\alpha)\phi_i(x)+ \alpha\phi_i(z)\leq(1-\alpha)\eta_i+\alpha\omega_i,$$

lo cual implica que $(1-\alpha)\, y + \alpha\, \omega\, \varepsilon\, K\left[(1-\alpha)x+\alpha z\right]\subset K$. Entonces $K$ es convexo, y la prueba está completa.

COROLARIO. [Teorema de Karush-Kuhn-Tucker]. Si ninguna de las funciones $\phi_i$, $i=1,\ldots p$, es idénticamente cero sobre el conjunto factible $S=\{x\varepsilon U/\phi_i(x)\leq 0,\ i=1,\ldots,p\}$, entonces las conclusiones de la regla de los multiplicadores convexa se tiene con un $\lambda_0$ positivo. Recíprocamente si las conclusiones de la regla de multiplicadores convexa se cumplen con $\lambda_0$ positivo, entonces $a\varepsilon U$ minimiza $\phi_0$ sujeta a las restricciones de desigualdad $\phi_1\leq 0,\ldots,\phi_p\leq 0$.

PRUEBA. Suponga que las conclusiones de la regla de los multiplicadores se cumplen sólo cuando $\lambda_o=0$. Puesto que $\lambda_o=0$, de (i) se tiene que $0=\phi_o(a)\leqslant\phi_o(x)$ para toda $x\in U$. Por otro lado, si $i=1,\ldots,p$ y $x\in S$, entonces $\phi_i(x)\leqslant 0$ y $\lambda_i\geqslant 0$, por tanto $\phi(x)\leqslant 0$ para toda $x\in S$. Combinando estas dos desigualdades $(0\leqslant\phi(x)\leqslant 0)$ se tiene que $\phi$ es idénticamente cero sobre S. Puesto que ningún término $\lambda_i\phi_i$ de $\phi$ es positivo sobre S, cada término deberá ser idénticamente cero sobre S. Pero por hipótesis ninguna $\phi_i$ es idénticamente cero sobre S. Por lo tanto $\lambda_i=0$ para $i=1,\ldots,p$, contradiciendo que $\lambda=(\lambda_o,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\neq 0$. Ahora invertimos la dirección, y suponemos que las conclusiones (i), (ii) y (iii) son ciertas con $\lambda_o>0$. Supóngase que X está en el conjunto factible S. Obsérvese que (i) asegura que $\lambda_o\phi_o(a)\leqslant\phi(x)=\lambda_o\phi_o(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi_i(x)$. Pero puesto que cada $\lambda_i$ es no negativo, sabemos que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\phi_i(x)\leqslant 0$, y por lo tanto $\lambda_o\phi_o(a)\leqslant\lambda_o\phi_o(x)$. Dividiendo por $\lambda_o>0$ tenemos que $\phi_o(a)\leqslant\phi_o(x)$.

# CAPITULO V

## V. LOCALIZACION DE EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION SUJETA A RESTRCCIONES.

5.1. INTRODUCCION. El propósito de este capítulo, consiste en establecer un procedimiento analítico, que permita obtener eventualmente el mínimo de una función sujeta a restrcciones de desigualdad. Con esta finalidad se presentan algunos ejemplos en cuya solución se muestra la utilidad práctica del método y su funcionamiento.

Si bien es cierto, que las conclusiones establecidas en las reglas de multiplicadores son las que caracterizan la solución óptima al problema del mínimo; no es fácil deducir de las mismas, donde está localizada dicha solución. Esta dificultad se debe a que dichas condiciones no proporcionan, - por si solas, un método constructivo para obtener la solución, no obstante caracterizarla.

Las secciones (5.3) y (5.4), proporcionan un procedimiento analítico para localizar el mínimo de una función sujeta a restricciones de desigualdad. Dicho método se basa - en las condiciones necesarias que caracterizan a la solución óptima.

Sin embargo, cabe mencionar que la utilidad práctica del método queda limitada a los casos en los cuales; el número de variables y restricciones involucradas sea reducido, y que la función a minimizar y las restricciones sean diferenciables en la solución óptima.

5.2. LOCALIZACION DE EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION SUJETA A RESTRICCIONES DE IGUALDAD. El tratamiento clásico utilizado en la localización de extremos realtivos de una función sujeta a restricciones de igualdad, es el método de multiplicadores de Lagrange. Los máximos y mínimos se localizan entre los puntos críticos de la función lagrangeana definida por:

$$L(x_1,...,x_n)= f(x_1,...,x_n)+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \; g_i(x_1,...,x_n),$$

donde f, $g_i(i=1,...,m)$ son funciones diferenciables en la solución óptima. Sin embargo, dicho método sólo es válido bajo ciertas condiciones de regularidad establecidas en el corolario a la regla de multiplicadores de Caratheodory. El ejemplo siguiente, muestra cuando es posible aplicar la regla de multiplicadores de Euler-Lagrange en la localización de un mínimo relativo.

EJEMPLO A. Encontrar la mínima distancia entre un punto (x,y) del círculo $x^2+y^2=2$ y el punto (w,z) de la recta x+y=4.

*Solución:* Para encontrar los puntos que minimizan la distancia; buscamos un mínimo local de

$$\phi_o(x,w,y,z) = (x-w)^2+(y-z)^2$$

sujeta a las dos restricciones de igualdad

$$\phi_1(x,w,y,z) = x^2+y^2-2=0$$

$$\phi_2(x,w,y,z) = w+z-4=0$$

Sea $U=R^4$. Entonces, puesto la función a minimizar $\phi_o$ - está sujeta a las restricciones de igualdad $\phi_1=0$ y $\phi_2=0$, la solución óptima $a\varepsilon U$ está caracterizada por las conclusiones de la regla de multiplicadores de Caratheodory

(i) Si $\phi=\sum_{i=0}^{3} \lambda_i\phi_i$ , entonces $\phi'(a)=0$ y

(ii) $\lambda_o \geqslant 0$.

por tanto, la solución óptima $a\varepsilon U$ se encuentra entre los puntos críticos de la función $\phi$ y que además satisfacen la condición $\lambda_o \geqslant 0$.

Construimos la función $\phi$ y derivando tenemos:

$$\phi(x,w,y,z) = \lambda_o\left[(x-w)^2+(y-z)^2\right]+\lambda_1(x^2+y^2-2) + \lambda_2(w+z-4)$$

y $$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2\lambda_o(x-w)+2\lambda_1 x = 0$$

(4.1) $$\frac{\partial\phi}{\partial w} = -2\lambda_o(x-w)+\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2\lambda_\circ(y-z)+2\lambda_1 y = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2\lambda_\circ(y-z)+\lambda_2 = 0$$

y

(4.2)
$$x^2+y^2-2=0$$
$$w+z-4 \quad =0$$
$$\lambda_\circ \geqslant 0$$

obsérvese que $\phi_1' = (2x,0,2y,0)$ y $\phi_2'=(0,1,0,1)$ son linelamente independientes para todo $(x,w,y,z)\varepsilon R^4$, excepto para el punto $(0,0,0,0)$ el cual no satisface las restricciones. Por tanto las condiciones de la regla de multiplicadores de Caratheodo ry se satisfacen con $\lambda_\circ$ positivo.

Tomando $\lambda_\circ=1$, construimos el lagrangiano

$$\ell(x,w,y,z) = \left[(x-w)^2+(y-z)^2\right]+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(w+x-4)$$

derivando $\ell$ e igualando a cero las derivadas tenemos:

(1) $\frac{\partial \ell}{\partial x} = 2(x-w)+2\lambda_1 x = 0$

(2) $\frac{\partial \ell}{\partial w} = -2(x-w)+\lambda_2 = 0$

(3) $\frac{\partial \ell}{\partial y} = 2(y-z)+2\lambda_1 y = 0$

(4) $\frac{\partial \ell}{\partial z} = -2(y-z)+\lambda_2 = 0$ y

(5) $x^2+y^2-2 = 0$

(6) $w+z-4 = 0$

resolviendo las ecuaciones (1) - (4) tenemos:

(7) $2\lambda_1 x+\lambda_2=0$

(8) $2\lambda_1 y+\lambda_2=0$

(9) $y-z=x-w$

De las primeras 2 ecuaciones tenemos; $\lambda_1(x-y)=0$. Entonces, $\lambda_1=0$ o bien $x=y$. Si $\lambda_1=0$, a fin de que se satisfagan (1)-(4). $x=w$ y $y=z$. Sustituyendo en (5) y (6).

$$w^2+z^2=2$$
$$w+x=4$$

de donde $2z^2-8z+14=0$, que no tiene solución real ya que $B^2-4AC<0$. Por tanto $\lambda_1\neq 0$. Si $x=y$, entonces $z=w$ y de (5) y (6) tenemos:

$y=x=\pm 1$, $w=z=2$. Las soluciones (1,2,1,2) y (-1,2,-1,2) satisfacen las ecuaciones (1) - (4) si $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$; $\lambda_1=-3, \lambda_2=-6$ respectivamente. Concluimos que la función $\phi_o$ tiene un mínimo local (de hecho un mínimo absoluto) en (1,2,1,2), correspondiente a los puntos (1,1) sobre el círculo y (2,2) sobre la recta, mientras que $\phi_o$ no tiene un extremo local en el punto (-1,2,-1,2), correspondiente a los puntos (-1,-1) sobre el círculo y (2,2) sobre la recta, como puede verificarse al observar la geometría del problema.

Las conclusiones anteriores puede obtenerse analíticamente, mediante el test de la segunda derivada para la loca lización de extremos relativos de una función sujeta a restricciones de igualdad.

## 5.3. LOCALIZACION DE EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION SUJETA A RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD.

Las condiciones necesarias para que un punto a minimice a una función $\phi_0$ sujeta a desigualdades como restricciones, están caracterizadas por las conclusiones establecidas en el teorema de John.

Mostraremos el funcionamiento de las condiciones obtenidas en la regla de multiplicadores de John, mediante un procedimiento analítico. Con éste propósito, resolveremos los ejemplos siguientes:

*EJEMPLO B:* Determinar el mínimo de la función $\phi_0(x,y)=x^2+xy+2y^2-7x+12$, sujeta a las restricciones de no negatividad $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Puesto que la función $\phi_0$ esta sujeta sólo a restricciones de no negatividad, la solución óptima al problema del mínimo está caracterizada por las condiciones necesarias establecidas en la regla de multiplicadores de John.

Haciendo $\phi_1(x,y)=-x$, $\phi_2(x,y)=-y$ y definiendo la función:

$$\phi(x,y)= \lambda_0\phi_0(x,y)+ \lambda_1\phi_1(x,y)+ \lambda_2\phi_2(x,y),$$

entonces las condiciones para el mínimo están dadas por:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \partial\phi/\partial x = \lambda_\circ(2x+y-7)-\lambda_1 = 0\\
&\qquad \partial\phi/\partial y = \lambda_\circ(x+4y) \quad -\lambda_2 = 0\\
&(ii) \quad \lambda_\circ \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0\\
&(iii) \quad \lambda_1\phi_1 = \lambda_1 x = 0\\
&\qquad \lambda_1\phi_2 = \lambda_2 y = 0\\
&\qquad\qquad x \geq 0,\ y \geq 0
\end{aligned}
$$

A fin de que se satisfaga la condición (ii), $\lambda_\circ=0$ o bien $\lambda_\circ>0$.

a) Supóngase que $\lambda_\circ=0$. Entonces, sustituyendo $\lambda_\circ=0$ en las ecuaciones establecidas en la condición (i), obtenemos $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$. Pero esto es imposible, ya que contradice la existencia de $\lambda=(\lambda_\circ,\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$. Por lo tanto $\lambda_\circ>0$.

Tomando $\lambda_\circ=1$ y sustituyendo en (i), obtenemos el sistema de ecuaciones (i)'

$$
\begin{aligned}
(i)' \quad 2x + y - \lambda_1 &= 7\\
x + 4y - \lambda_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Ahora de la condición (iii), $\lambda_1=0$ o $x=0$.

b) Supóngase que $\lambda_1=0$. Entonces, sustituyendo $\lambda_1=0$ en (i)', obtenemos el sistema de ecuaciones

$$
(*) \quad
\begin{aligned}
2x + y &= 7\\
x + 4y &= \lambda_2,
\end{aligned}
$$

eliminando x en el sistema anterior; $7y=2\lambda_2-7$. De la condición (iii), $\lambda_2=0$ o bien $y=0$. 1) Si $\lambda_2=0$, entonces $y=-1$, $x=4$. Sin embargo, aún cuando la solución $(4,-1)$ minimiza a $\phi_o$ (sin restricciones), el punto $(4,-1)$ no es factible, puesto que no satisface la restricción de no negatividad $y\geqslant 0$.

2). Si $y=0$, $\lambda_2=7/2$ y sustituyendo en (*), $x=7/2$.
La solución $(7/2,0)$ satisface el sistema de ecuaciones (i)', sólo cuando $\lambda_1=0$, $\lambda_2=7/2$. Además, se satisfacen las restricciones. Es decir, la solución $(7/2,0)$ satisface las condiciones (i)-(iii). Por lo tanto, podemos concluir que el punto $(7/2,0)$ es un mínimo relativo de la función $\phi_o(x,y)=x^2+xy+2y^2-7x+12$ sujeta a las restricciones $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

c) Supóngase ahora que $x=0$. Sustituyendo $x=0$ en el sistema de ecuaciones (i)' obtenemos el sistema:

$$\begin{array}{lcl} y-\lambda_1=7 & \text{o bien} & y=7+\lambda_1 \\ 4y-\lambda_2=0 & & 4y=\lambda_2 \end{array}$$

De la condición (iii), $\lambda_2=0$ o bien $y=0$.
1) Si $\lambda_2=0$, entonces $y=0$, $\lambda_1=-7$. La solución factible $(0,0)$ satisface el sistema de cuaciones (i)', si $\lambda_1=-7$ , $\lambda_2=0$. Puesto que $\lambda_1<0$, la solución factible $(0,0)$ no satisface la condición (ii) $\lambda_i\geqslant 0 (i=0,1,2)$, por lo tanto $(0,0)$ no es solución óptima.

2) Si $y=0$, entonces $\lambda_2=0$, $\lambda_1=-7$. Por tanto, estamos en el caso anterior.

Puesto que los casos (a), (b) y (c) agotan todas las posibles combinaciones que se pueden presentar, como puede verificarse mediante un diagrama de árbol, concluimos que el punto $(7/2,0)$ minimiza a $\phi_o$ sujeta a las restricciones $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Obsérvese que, como era de esperarse, las condiciones del teorema de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen en la solución óptima $a=(7/2,0)$, con h un vector en el primer o segundo cuadrante de $R^2$. Digamos $h=(1,1)$, se tiene que $\phi_2(7/2,0)=0$ y $\phi_2'(7/2,0)\cdot h= (0,-1)\cdot(1,1)=-1<0$.

*EJEMPLO C:* Determinar el mínimo de $\phi_o(x,y)=x^2-12xy+3y^2$ sujeta a la restricción $x+y\leq 16$.

A fin de determinar el mínimo de $\phi_o$, hacemos uso de las condiciones necesarias para la solución óptima establecidas en la regla de multiplicadores de John. Haciendo $\phi_1(x,y)=x+y-16\leq 0$ y $\phi(x,y)=\lambda_o\phi_o(x,y)+\lambda_1\phi_1(x,y)$ tenemos:

(i) $\partial\phi/\partial x = \lambda_o(2x-12y)+\lambda_1=0$

$\partial\phi/\partial y = \lambda_o(-12x+6y)+\lambda_1=0$

(ii) $\lambda_o\geq 0$ , $\lambda_1\geq 0$

(iii) $\lambda_1\phi_1 = \lambda_1 (x+y-16)=0$

$x+y\leq 16$

De la condición (ii), $\lambda_\circ=0$, o bien $\lambda_\circ>0$.

a) Supóngase que $\lambda_\circ=0$. Entonces, sustituyendo $\lambda_\circ=0$ en el sistema de ecuaciones (i), se tiene $\lambda_1=0$. Pero esto contradice la existencia de $\lambda=(\lambda_\circ,\lambda_1)\neq 0$, por tanto $\lambda_\circ>0$.

Tomando $\lambda_\circ=1$, y sustituyendo en (i) obtenemos el sistema de ecuaciones (i)':

$$
\text{(i)'} \quad \begin{aligned} 2x - 12y + \lambda_1 &= 0 \\ -12x + 6y + \lambda_1 &= 0 \end{aligned}
$$

Ahora bien, de la condición (iii), $\lambda_1=0$, o bien $x+y=16$.

b) Supongase que $\lambda_1=0$. Entonces, sustituyendo en el sistema (i)', tenemos $x=0$, $y=0$. Obsérvese que también se satisface la restricción $x+y-16\leq 0$. La solución factible (0,0) satisface las condiciones (i)-(iii). Por otra parte, $\phi_\circ(0,0)=0$.

c) Supóngase ahora que $x+y=16$. Entonces $x=16-y$ y sustituyendo en la condición (i)' obtenemos el sistema de ecuaciones;

$$
\begin{aligned} 14y - \lambda_1 &= 32 \\ 18y + \lambda_1 &= 192 \end{aligned}
$$

sumando estas dos últimas ecuaciones encontramos que $x=9$, $y=7$, $\lambda_1=66$ 0. Es decir, la solución (9,7) satisface las condiciones (i)-(iii). Por otro lado, $\phi_\circ(9,7)=-528$ que es menor que $\phi_\circ(0,0)=0$.

Por lo tanto, concluimos que la solución $a=(9,7)$ minimiza la función $\phi_\circ(x,y)=x^2-12xy+3y^2$ sujeta a la restricción $x+y-16\leqslant 0$.

Adicionalmente se tiene que; en la solución óptima $a=(9,7)$, $\phi_1(a)=0$ y $\phi_1'(a)\cdot h<0$, para toda h en la región $R=\{(x,y)\varepsilon R^2/x+y<0, x\neq y\}$. Por lo tanto, las condiciones del teorema de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen en la solución óptima $a=(9,7)$, y las conclusiones de la regla de multiplicadores de John se verifican con $\lambda_\circ$ positivo, como se mostró en el inciso (a).

*EJEMPLO D:* Minimizar la función $\phi_\circ(x,y)=4x^2-6xy+5y^2+25x-40y$ sujeta a las restricciones $x+y\leqslant 1$, $x\geqslant 0$.

Haciendo $\phi_1(x,y)=x+y-1\leqslant 0$, $\phi_2(x,y)=-x\leqslant 0$ y definiendo la función $\phi(x,y)=\lambda_\circ\phi_1(x,y)+\lambda_1\phi_1(x,y)+\lambda_2\phi_2(x,y)$, las condiciones necesarias para el mínimo están dadas por:

$$\text{(i)}\quad \partial\phi/\partial x=\lambda_\circ(8x-6y+25)+\lambda_1-\lambda_2=0$$
$$\partial\phi/\partial y=\lambda_\circ(-6x+10y-40)+\lambda_1=0$$

$$\text{(ii)}\quad \lambda_\circ\geqslant 0,\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0,$$

$$\text{(iii)}\quad \lambda_1\phi_1=\lambda_1(x+y-1)=0$$
$$\lambda_2\phi_2=\lambda_2 x=0$$
$$x+y-1\leqslant 0,\quad x\geqslant 0$$



De la condición (ii), tenemos $\lambda_\circ=0$ o bien $\lambda_\circ>0$.

a) Supóngase que $\lambda_\circ=0$. Entonces, sustituyendo $\lambda_\circ=0$ en la condición (i), se obtiene $\lambda_1=\lambda_2=0$. Pero esto contradice la existencia de $\lambda=(\lambda_\circ,\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$, por lo tanto $\lambda_\circ>0$.

Tomando $\lambda_0=1$ y sustituyendo en el sistema de ecuaciones (i), obtenemos el sistema;

$$(i)' \quad \begin{aligned} 8x - 6y + \lambda_1 - \lambda_2 &= -25 \\ -6x + 10y + \lambda_1 &= 40 \end{aligned}$$

La condición (iii) asegura que $\lambda_1=0$, o bien $x+y=1$.

a) Supóngase que $\lambda_1=0$. Entonces, sustituyendo en (i)' tenemos:

$$(*) \qquad \begin{aligned} 8x - 6y - \lambda_2 &= -25 \\ -6x + 10y &= 40 \end{aligned}$$

De la condición (iii), $\lambda_2=0$, o bien $x=0$.

1). Si $\lambda_2=0$, entonces sustituyendo en el sistema anterior, y resolviendo, obtenemos la solución $x=-5/22$, $y=85/22$, Pero el punto $(-5/22,85/22)$ no satisface las restricciones. Por lo tanto $(-5/22,85/22)$ no es solución factible.

2). Si $x=0$, entonces sustituyendo $x=0$ en el sistema (*), obtenemos:

$$\begin{aligned} 6y &= 25 - \lambda_2 \\ 10y &= 40. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior: $Y=4$, $\lambda_2=1$. Sin embargo, la solución $(0,4)$ no satisface la restricción $x+y-1\leq 0$. Por lo tanto $(0,4)$ no es una solución factible.

b) Supóngase ahora que $x+y=1$. Entonces $x=1-y$ y sustituyendo en las ecuaciones (i)' obtenemos el sistema:

$$(**)\qquad \begin{aligned} -14y + \lambda_1 - \lambda_2 &= -33 \\ 4y + \lambda_1 \qquad &= 14 \end{aligned}$$

De la condición (iii), $\lambda_2=0$, o bien $x=0$.

1) Si $\lambda_2=0$. entonces sustituyendo en (**),

$$\begin{aligned} -14y + \lambda_1 &= -33 \\ 4y + \lambda_1 &= 14 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior; $y=47/18$ $x=-29/18$, $\lambda_1=32/9$. La solución $x=-29/18$, $y=47/18$ no es factible, ya que no satisface la restricción $x\geqslant 0$.

2) Si $x=0$, entonces $y=1$. La solución $a=(0,1)$ satisface las ecuaciones (i)' si $\lambda_1=30$, $\lambda_2=49$. Además satisface las restricciones $x+y\leqslant 1$, $x\geqslant 0$.

Por lo tanto, concluimos que el punto (0,1) minimiza la función $\phi_0(x,y)= 4x^2-6xy+5y^2+25x-40y$ sujeta a las restricciones $x+y\leqslant 1$, $x\geqslant 0$.

Nótese que $\phi_1(0,1)=0$, $\phi_2(0,1)=0$ y $\phi_1'(0,1)=(1,1)$, $\phi_2'(0,1)=(-1,0)$. Además, cualquier vector h en la región $R=\{(x,y)\in R^2/x+y<0,\ x>0\}$ satisface $\phi_1'(a)\cdot h<0$ y $\phi_2'(a)\cdot h<0$. Es decir, existe $h\varepsilon R^2$ tal que $\phi_i'(a)\cdot h<0$ y $\phi_i(a)=\theta$ $(i=1,2)$. Por tanto las condiciones del teorema de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen en la solución óptima $a=(0,1)$, y las conclusiones del teorema de John se satisfacen con $\lambda_0$ positivo, como se obtuvo en la conclusión del inciso (a).

*EJEMPLO E:* Determinar el mínimo de la función $\phi_0(x,y)= 5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+29$ sujeta a las restricciones $x-2y\leqslant 0$, $x^2+4x+2y\leqslant 0$.

Haciendo $\phi_1(x,y)=x-2y\leqslant 0$, $\phi_2(x,y)= x^2+y^2+4x+2y\leqslant 0$, y definiendo la función $\phi(x,y)= \lambda_0\phi_0+\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2$, las condiciones necesarias para el mínimo están dadas por:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} \partial\phi/\partial x &= \lambda_0(10x+4y-24)+\lambda_1+\lambda_2(2x+4)=0 \\ \partial\phi/\partial y &= \lambda_0(4x+4y-12)-2\lambda_1+\lambda_2(2y+2)=0 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad \lambda_0\geqslant 0,\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} \lambda_1\phi_1 &= \lambda_1(x-2y)=0 \\ \lambda_2\phi_2 &= \lambda_2(x^2+y^2+4x+2y)=0 \\ & x-2y\leqslant 0,\ x^2+y^2+4x+2y\leqslant 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, de la condición (ii), $\lambda_0=0$, o bien $\lambda_0>0$.

a) Supóngase que $\lambda_0=0$. Entonces, sustituyendo $\lambda_0=0$ en las ecuaciones (i), obtenemos el sistema:

$$(*)\quad \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 x + 4\lambda_2 &=0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 &=0 \end{aligned}$$

RIS 7954

De la condición (iii), $\lambda_1=0$, o bien $x=2y$.

1) Si $\lambda_1=0$, entonces sustituyendo en el sistema (*) obtenemos $\lambda_2(x-y+1)=0$. Esta última identidad se satisface si $\lambda_2=0$, o - bien $x-y+1=0$. Supongamos por el momento que $\lambda_2\neq 0$ y que - $x-y+1=0$. Entonces de la condición (iii) $x^2+y^2+4x+2y=0$ y $y=x+1$. Resolviendo estas últimas dos ecuaciones se tiene; $x=-0.42$, $y=0.58$; $x=-3.58$, $y=2.58$. Sustituyendo estos valores en el sistema (8), con $\lambda_1=0$, en cualesquiera de los casos sólo se satisface cuando $\lambda_2=0$. Por tanto, el supuesto $\lambda_1=0$, nos conduce a $\lambda_2=0$. De donde $\lambda_o=0$ implica $\lambda_1=\lambda_2=0$. Pero esto contradice la existencia de un $\lambda=(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$.

2) Si $x=2y$, entonces sustituyendo en el sistema (*), obtenemos:

$$(**)\quad \begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 y + 4\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

sumando las dos ecuaciones anteriores:

$$5\lambda_2\ (y+1) = 0.$$

La identidad anterior se verifica solamente si $\lambda_2=0$, o bien $y=-1$. Si $\lambda_2=0$. entonces el sistema de ecuaciones (*) se satisface cuando $\lambda_1=0$. Por tanto el supuesto $\lambda_2=0$ nos conduce a $\lambda_1=0$, y por tanto tenemos que $\lambda_o=0$ implica $\lambda_1=\lambda_2=0$; es una imposibilidad.

entonces $x=-2$, $y=-1$ y de la condición (iii), $x^2+y^2+4x+2y=0$. Sustituyendo $y=-1$, $x=-2$, observamos que: la ecuación no se satisface. Por lo tanto, $\lambda_2=0$. Pero este es el caso anterior.

Puesto que en cada uno de los casos el supuesto $\lambda_0=0$ nos conduce a que $\lambda_1=\lambda_2=0$, lo cual es una imposibilidad ya que contradice la existencia de un $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$. concluimos que $\lambda_0>0$.

Tomando $\lambda_0=1$ y sustituyendo en la condición (i), obtenemos el sistema de ecuaciones (i)'

$$\text{(i)'} \quad \begin{aligned} 10x + 4y + \lambda_1 + \lambda_2\,(2x+4) &= 24 \\ 2x + 2y - \lambda_1 + \lambda_2\,(y+1) &= 6 \end{aligned}$$

De la condición (iii), $\lambda_1=0$, o bien $x=2y$.

b) Supóngase que $\lambda_1=0$. Sustituyendo $\lambda_1=0$ en la condición (i)' obtenemos el sistema de ecuaciones

$$(**) \quad \begin{aligned} 10x + 4y + 2\lambda_2 x + 4\lambda_2 &= 24 \\ 2x + 2y + \lambda_2 y + \lambda_2 &= 6 \end{aligned}$$

De la condición (iii), $\lambda_2=0$, o bien $x^2+y^2+4x+4y=0$.

1) Si $\lambda_2=0$, sustituyendo en el sistema anterior

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 12 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

Multiplicando por (-1) la segunda y sumando a la primera: $x=2$, $y=1$. Sin embargo, aún cuando el punto (2,1) es un mínimo absoluto de la función $\phi_o$ sin restricciones (ya que $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$), la solución (2,1) no es factible puesto que no satisface la restricción $x^2+y^2+4x+2y\leq 0$.

2). Si $x^2+y^2+4x+2y=0$, multiplicando por (-2) la segunda ecuación del sistema (**) y dividiendo entre (2) la primera, y sumando obtenemos $(x-2y)(1+\lambda_2)=0$. Pero esta identidad sólo se satisface cuando $x=2y$, puesto que $\lambda_2\geq 0$. Sustituyendo $x=2y$ en la identidad (2), $5y^2+10y=0$. Resolviendo tenemos las soluciones: $x=-4$, $y=-2$, y $x=0$, $y=0$. La solución (-4,-2) no obstante ser factible, de hecho es el punto donde la función $\phi_o$ alcanza su máximo restringido, no es una solución óptima. Esto es debido a que la solución (-4,-2) satisface el sistema (**) solamente cuando $\lambda=-18<0$, contrario a lo establecido en la condición (ii) ($\lambda_2\geq 0$).

La solución (0,0) satisface las restricciones, y el sistema (**) con $\lambda_2=6>0$. Es decir, la solución (0,0) satisface las condiciones (i)'-(iii). Por lo tanto $a=(0,0)$ minimiza a la función $\phi_o(x,y)= 5x^2+4xy+2y^2-24x-23y+29$ sujeta a las restricciones $x-2y\leq 0$ y $x^2+y^2+4x+2y\leq 0$.

c) El supuesto $x=2y$ nos conduce necesariamente a que $\lambda_1=0$. pero este es el caso analizado en el inciso anterior.

Adicionalmente tenemos, como era de esperarse, que las funciones $\phi_1, \phi_2$ se anulan en el óptimo $a=(0,0)$ y que $\phi_1'(a)\cdot h<0$, $\phi_2'(a)\cdot h<0$ para todo $h$ en la región $R=\{(x,y)\varepsilon R^2/2x+y<0$ y $x-2y>0\}$. Por lo tanto, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen en la solución óptima $a=(0,0)$ y las conclusiones de la regla de multiplicadores de John se satisfacen con $\lambda_0$ positivo, como se obtuvo en la conclusión del incicso (a).

Si bien las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker caracterizan una solución, no es fácil deducir de las mismas donde se encuentra dicha solución. Es decir, las condiciones de Karuh-Kuhn-Tucker son en la práctica de escasa utilidad para hallar una solución no obstante caracterizarla.

Como se dijo; las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker caracterizan una solución, pero no proporcionan un método constructivo para poder obtenerla.

5.4. LOCALIZACION DE EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION SUJETA A RESTRICCIONES DE IGUALDAD Y DESIGUALDAD. Las condiciones necesarias para que un punto a minimice a una función $\phi_0$ sujeta a restricciones de igualdad y desigualdad, están caracterizadas por las conclusiones establecidas en el teorema de

Caratheodory-John.

Mostraremos, mediante algunos ejemplos, el funcionamiento de dichas condiciones y proporcionamos un método constructivo que permite eventualmente hallar la solución óptima al problema del mínimo, al menos para funciones de un número reducido de variables y restricciones.

*EJEMPLO F:* Minimizar la función $\phi_\circ(x,y)= x^2+y^2-8x-4y+15$ sujeta a las restricciones $2x+y=5$ y $x\geqslant 0$.

Haciendo $\phi_1(x,y)=-x\leqslant 0$, $\phi_2(x,y)= 2x+y-5=0$, las condiciones necesarias para la solución óptima al problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \phi\ (x,y)= x^2+y^2-8x-4y+15\\ &\text{sujeta a } \ \phi_1(x,y)= -x\leqslant 0\\ &\qquad\qquad\ \ \phi_2(x,y)= 2x+y-5 = 0\end{aligned}$$

están dadas por las condiciones de Caratheodory-John. La función $\phi$ para este problema es:

$$\phi(x,y)= \lambda_\circ(x^2+y^2-8x-4y+15)-\lambda_1 x +\lambda_2(2x+y-5)$$

y las condiciones de Caratheodory-John:

$$\text{(i)}\qquad \begin{aligned} \partial\phi/\partial x&= \lambda_\circ(2x-8)-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\\ \partial\phi/\partial y&= \lambda_\circ(2y-4) \qquad + \lambda_2 = 0\end{aligned}$$

(ii) $\lambda_o \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$.

(iii) $\lambda_1 \phi_1 = \lambda_1 x = 0$

$2x+y=5$, $x \geq 0$

Ahora bien, de la condición (ii), $\lambda_o=0$ o $\lambda_o>0$.

a) Supóngase que $\lambda_o=0$. Entonces sustituyendo en la condición (i) $\lambda_o=0$, obtenemos el sistema

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_2 = 0$$

Por lo tanto, el supuesto $\lambda_o=0$ nos conduce a que $\lambda_1=\lambda_2= 0$. Pero esto es imposible, ya que contradice la existencia de un $\lambda=(\lambda_o,\lambda_1, \lambda_2)\neq 0$. Concluimos que $\lambda_o>0$.

Tomando $\lambda_o=1$ y sustituyendo en la condición (i), obtenemos el sistema de ecuaciones (i)':

$$\text{(i)'} \quad \begin{aligned} 2x - \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 8 \\ 2y + \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

De la condición (iii), $\lambda_1=0$, o bien $x=0$.

b) Supóngase que $\lambda_1=0$. Sustituyendo en (i)' $\lambda_1=0$, tenemos:

$$2x + 2\lambda_2 = 8$$
$$2y + \lambda_2 = 4$$

Multiplicando por (-2) la segunda ecuación y sumando a la primera, obtenemos $x=2y$. Sustituyendo el valor de x en la restricción $2x+y=5$, obtenemos la solución $x=2$, $y=1$. Nótese - que la solución (2,1) satisface las restricciones y la condición (i) con $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=2$.

Puesto que la solución (2,1) satisface las condiciones de Caratheodory-John, concluimos que el punto (2,1) es una solución óptima al problema:

$$\text{Minimizar } \phi_\circ(x,y)= x^2+y^2-8x-4y+15$$

$$\text{sujeto a } \phi_1(x,y)=-x \leqslant 0$$

$$\phi_2(x,y)= 2x+y-5=0$$

*EJEMPLO G:* Minimizar la función $\phi_\circ(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-6z$ sujeta a las restricciones $x+y+z\geqslant 15$ y $x+y+2z=18$.

Haciendo $\phi_1(x,y,z)= 15-x-y-z\leqslant 0$, $\phi_2(x,y,z)= x+y+2z-18=0$. La función $\phi$ para este problema es:

$$\phi(x,y,z)= \lambda_\circ(x^2-4xy+4y^2+z^2-6z)+\lambda_1(15-x-y-z)$$
$$+\lambda_2(x+y+2z-18).$$

y las condiciones de Caratheodory-John:

$$\partial\phi/\partial x = \lambda_\circ(2x-4y) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\text{(i)} \qquad \partial\phi/\partial y = \lambda_\circ(-4x+8y) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\partial\phi/\partial z = \lambda_\circ(2z-6) - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad \lambda_\circ \geqslant 0, \ \lambda_1 \geqslant 0$$

$$\text{(iii)} \qquad \lambda_1\phi_1 = \lambda_1(15-x-y-z) = 0$$

$$x+y+z \geqslant 0$$

$$x+y+2z = 18$$

De la condición (ii), $\lambda_\circ = 0$, o bien $\lambda_\circ > 0$.

a) Supóngase que $\lambda_\circ = 0$, Entonces, sustituyendo $\lambda_\circ = 0$ en la condición (i), obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0,$$

cuya solución es $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Pero esto es imposible ya que $\lambda = (\lambda_\circ, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0$. Por tanto concluimos que $\lambda_\circ > 0$.

Tomando $\lambda_\circ = 1$, y sustituyendo en la condición (i), obtenemos el sistema (i)':

$$\begin{array}{llcl} & 2x - 4y & -\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \text{(i)'} & -4x + 8y & -\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ & & 2z - \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 6 \end{array}$$

De la condición (iii), $\lambda_1=0$, ó bien $x+y+z=15$.

b) Si $\lambda_1=0$, entonces sustituyendo en (i)' se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
2x - 4y \quad + \lambda_2 &= 0 \\
-4x + 8y \quad + \lambda_2 &= 0 \\
2z + 2\lambda_2 &= 6
\end{aligned}
$$

Dividiendo entre (-2) la tercera, y sumando a las dos restantes:

$$
\begin{aligned}
2x - 4y - z &= -3 \\
-4x + 8y - z &= -3
\end{aligned}
$$

Haciendo simultáneas estas dos últimas ecuaciones con la restricción $x+y+2z=18$;

$$
\begin{aligned}
5x - 7y &= 12 \\
-7x + 17y &= 12,
\end{aligned}
$$

cuya solución es: $x=8$, $y=4$. Sustituyendo estos valores en la restricción $z=3$. La solución (8,4,3) satisface las condiciones (i)' con $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$. Además satisface las restricciones. Es decir, el punto (8,4,3) satisface las condiciones de Carateodory-John. Por lo tanto concluimos que el punto (8,4,3) minimiza la función $\phi_o$ sujeta a las restricciones $\phi_1 \leq 0$ y $\phi_1=0$. El mismo resultado se obtiene suponiendo que $z+y+z=15$.

*EJEMPLO H*: Determinar el mínimo de la función:

$$\phi_o(x,y,z) = 5x^2+10y^2+z^2-4xy-2xz-36y$$

sujeta $\phi_1(x,y,z) = -17x+10y-z-12 \leqslant 0$

$$\phi_2(x,y,z) = -x+2y+z-6=0$$

La función $\phi$ para este problema es:

$$\phi(x,y,z) = \lambda_o(5x^2+10y^2+z^2-4xy-2xz-36y)+$$
$$\lambda_1(-17x+10y-z-12)+\lambda_2(-x+2y+z-6)$$

Las condiciones de Caratheodoy-John:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} \partial\phi/\partial x &= \lambda_o(10x-4y-2z)-17\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \partial\phi/\partial y &= \lambda_o(-4x+20y-36)+10\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \partial\phi/\partial z &= \lambda_o(-2x+2z) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

(ii) $\lambda_o \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$.

(iii) $\lambda_1\phi_1 = \lambda_1(-17x+10y-z-12)=0$

$$-17+10y-z \leqslant 12$$
$$-x+2y+z = 6$$

Ahora bien, de la condición iii), $\lambda_o=0$, o bien $\lambda_o>0$.

a) Supóngase que $\lambda_o=0$. Entonces, sustituyendo $\lambda_o=0$ en la condición uno, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -17\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 10\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0\ , \end{aligned}$$

cuya solución es: $\lambda_1=\lambda_2 = 0$. Pero esto contradice la existencia de $\lambda=(\lambda_o,\lambda_1, \lambda_2)\neq 0$, lo cual es imposible. Por tanto $\lambda_o>0$.

Tomando $\lambda_o =1$ y sustituyendo en la condición (i), obtenemos la condición (i)':

$$
\text{(i)'} \quad
\begin{aligned}
10x - 4y - 2z - 17\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\
-4x + 20y \qquad + 10\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 36 \\
-2x \qquad + 2z \quad - \lambda_1 + \lambda_2 &= 0
\end{aligned}
$$

De la condición (iii), $\lambda_1=0$, o bien $-17x+10y-z=12$.

b) Supóngase que $\lambda_1=0$. Sustituyendo en el sistema de ecuaciones (i)', obtenemos el sistema:

$$
(*) \quad
\begin{aligned}
10x - 4y + 2z - \lambda_2 &= 0 \\
-4x + 20y \qquad + 2\lambda_2 &= 36 \\
-2x \qquad + 2z + \lambda_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Eliminando $\lambda_2$ del sistema (*), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
8x + 6y - 2z &= 18 \\
8x - 4y \qquad &= 0 \quad \text{o bien} \quad y=2x
\end{aligned}
$$

Además se debe satisfacer la restricción de igualdad -x+2y+z=6. Sustituyendo $y=2x$ en esta última ecuación: $z=6-3x$. Sustituyendo y y z en la primera ecuación: $x=15/13$, $y=30/13$ $z=33/13$.

La solución $x=15/13$, $y=30/13$, $z=33/13$ satisface el sistema de ecuaciones (*) si $\lambda_2=-36$. Además satisface la restricción $-17x+10y-z-12\leqslant 0$. Es decir, el punto $(15/13, 30/13, 33/13)$ satisface las condiciones de Caratheodory-John. Por lo tanto, concluimos que este es un mínimo relativo de la función $\phi_0$ sujeta a las restricciones $\phi_1 \leqslant 0$ y $\phi_2=0$.

c) Supóngase ahora que $-17x+10y-z=12$. Eliminando $\lambda_1,\lambda_2$ del sistema de ecuaciones (i)', obtenemos la ecuación:

$$4x + 13y - 3z = 27$$

Además se deben satisfacer las restricciones:

$$-17x + 10y - z = 12$$
$$-x + 2y + z = 6.$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones con la anterior, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 4x + 13y - 3z &= 27 \\ -17x + 10y - z &= 12 \\ -x + 2y + z &= 6. \end{aligned}$$



Eliminando z del sistema anterior:

$$x + 19y = 45$$
$$-3x + 2y = 3$$

Multiplicando por (3) la primera y sumando la segunda: $Y=138/59$, $X=33/59$, $Z\doteq 111/59$.

La solución (0.56, 2.34, 1.88) satisface las ecuaciones (i)' si $\lambda_1=-0.27$, $\lambda_2=-2.91$. Pero $\lambda_1=-0.27<0$ no satisface la condición (ii)'. Por lo tanto, concluimos que el punto (0.56, 2.34, 1.88) no es un mínimo relativo de la función $\phi_o$ sujeta a las restricciones $\phi_1\leqslant 0$ y $\phi_2=0$.

Obsérvese que en la solución óptima a=(15/13,30/13,33/13) la derivada de la restricción de igualdad $\phi_2'(a)\neq 0$. Por lo tanto, cualquier vector h ortogonal a la derivada $\phi_2'(a)$ satisface $\phi_2'(a)\cdot h=0$. Es decir, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen en la solución óptima. De donde, las conclusiones de la regla de multiplicadores de Carateheodory-John se satisfacen con $\lambda_o$ positivo, como se obtuvo en la conclusión del inciso (a).

5.5. LOCALIZACION DE EXTREMOS DE UNA FUNCION CONEXA SUJETA A DESIGUALDADES COMO RESTRICCIONES. Cuando la función a minimizar y las restricciones son funciones convexas, el mínimo es un mínimo global y está caracterizado por las condiciones establecidas en la Regla de Multiplicadores Convexa. Sin embargo, estas condiciones no proporcionan un método constructivo para obtener la solución óptima, no obstante caracterizarla.

Si además de la hipótesis de convexidad se añade la hipótesis de diferenciabilidad, entonces el mínimo (global) se obtiene procediendo como en el caso de la regla de multiplicadores de John.

# BIBLIOGRAFIA


- BARTLE R.G Introducción al Análisis Matemático.
LIMUSA, MEXICO, 1982.

" J.B. and MOORHOUSE J.C., Lagrange Multiplier Problems in
Economics. AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY. Vol. 91
'984) pp. 404-412.

- and Dynamic Programing. ADDISON-WESLEY,
, MASS., 1964.

, Mathematical Optimization and Economic Theory,
NTICE HALL, N.J., 1971.

inear Programing: A HISTORICAL VIEW, SIAM-AMS Proc.,
9 (1976)1-26.

and TUCKER A.W, Nonlinear Programing, in J. Neyman (ed)
Proccedings of the Second Berkeley Second Berkeley
Simposium on Mathematical Statistics and Probability,
University of California Press, Berkeley, (1951) pp.
481-493.

NIJENHUIS A., Strong Derivatives and Inverse Mappings, American
Mathematical Monthly, Vol. 81 (1974) pp. 969-980.

8.- PORCIAU B.H., Modern Multiplier Rules, American Mathyematical -
Monthly, Vol. 87 (1980), pp. 433-451.

9.- ROCKAFELLAR R.T., Convex Analysis, Princeton, University Press,
Princeton, N.J., 1970.

10.- UZAWA H., The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programing, in -
Studies in Linear and Nonlinear Programing, (ed) K.J.
Arrow, L. Hurwics, and H. Uzawa, Stanford University
Press, Calif. 1958.


idad se añade la hipó
nimo (global) se ob
, de multiplicado