

Tesis: Oscar Aldama

Director Dr. Ruben Flores E

MATS  
Matemáticas



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS  
PARA MI GRANDEZA

T E S I S

TEOREMAS DE PUNTO FIJO APLICADOS A  
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

*Handwritten signature*

1988

*Handwritten signature*

# C O N T E N I D O

	PAGINA
1.- Introducción -----	1
Parte A	
2.- Teorema de:	
a) Punto fijo de contracción de Banach -----	5
b) Dependencia continua y diferenciable -----	11
2.1 Aplicación del teorema 2 a) a ecuaciones diferenciales ordinarias (demostración del teorema de Picard, problema de condición inicial). -----	18
Parte B	
3.- Mención del teorema de punto fijo de Schauder. -----	26
3.1 Aplicación del teorema 3 a ecuaciones di- ferenciales ordinarias (demostración del teorema de Peano, problema de condición inicial). -----	27
3.2 Aplicación del teorema 3 a un problema de condición de frontera -----	33
Parte C	
4.- Teorema de Existencia de Soluciones periódicas. -----	58
4.1 Aplicación del teorema 4 a ecuaciones diferenciales. -----	64



**BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES**

EL SABER DE MIS HELIOS  
HARA MI GRANDEZA

4.2	Aplicación de los teoremas 3, 4 a un problema que relaciona la existencia de soluciones periódicas con la existencia de un problema de condición de frontera de una ecuación diferencial ordinaria.	69
5.-	Bibliografía	75



La importancia que han adquirido algunos teoremas de punto fijo en diversas áreas de Matemática, como son: Topología, Análisis, Cálculo Numérico, Ecuaciones Diferenciales, etc., es debido a que diversas demostraciones y cálculos pueden plantearse de tal manera que se reducen a determinar la existencia de un punto fijo.

Los Teoremas de Punto Fijo son aquellos que bajo ciertas condiciones a satisfacerse, garantizan la existencia de algún punto fijo de una aplicación  $T$ , definido de un conjunto  $A$  en sí mismo. Lo anterior hace importante considerar la existencia de un punto fijo para una función  $T$ , así como el mecanismo a seguir para hallarlo.

En este material se utilizarán los Teoremas de Punto Fijo de Contracción de Banach, así como el Teorema de Punto Fijo de Schauder. Dichos Teoremas se aplicarán a ecuaciones diferenciales ordinarias

Se tiene como objetivo hacer énfasis sobre la utilidad de los diferentes teoremas de punto fijo, al aplicarlos en la demostración de teoremas de existencia y unicidad o existencia de soluciones de ecuaciones diferencia

les ordinarias con condiciones iniciales o condiciones de frontera.

El contenido de esta Tesis se desarrollará en tres partes principales:

**PARTE A.**

A.- En esta parte se probará el Teorema de Punto Fijo de Contracción de Banach, así como el Teorema de Dependencia Continua y Diferenciable, en espacios euclidianos  $R^n$ , y la aplicación del primero a la demostración del Teorema de Picard, que prueba la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach con condición inicial en cierto intervalo:

$$|t-t_0| \leq \alpha CR \alpha > 0$$

**PARTE B.**

B.- Se hará mención del Teorema de Punto Fijo de Schauder en espacios de Banach (espacios euclidianos), y la aplicación de éste a la demostración del Teorema de Peano, el cual prueba la existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach con condición inicial en cierto intervalo:  $|t-t_0| \leq \alpha CR$ . Además se aplicará el Teorema de Punto Fijo a ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach con condiciones de frontera, en donde es necesario introducir la función de

Green por construcción para encontrar una solución a dicho problema, bosquejando con ejemplos.

**PARTE C.**

C.- Se enunciará un Teorema de Existencia de Solución Periódica de una ecuación diferencial en espacios de Banach (espacio euclidiano  $R^n$ ), el cual se aplicará a la demostración de otro teorema de existencia de soluciones periódicas, el cual tiene como hipótesis la equivalencia asintótica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por último se combinarán el Teorema de Existencia de Soluciones Periódicas con el Teorema de Punto Fijo de Schauder para solucionar un problema de condición de frontera, es decir, se busca una solución de una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach (espacios euclidianos  $R^n$ ) que sea periódica y satisfaga las condiciones de frontera, en cierto intervalo:

$[A, B]$  CR, real.



EL SABER DE MIS HIJOS  
PARA MI GRANDEZA

**BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES**

## PARTE A.

En esta parte se presentará material bibliográfico a desarrollar con ciertas variantes con respecto a la forma usual de presentarlo en clases.

Se empezará por definir el concepto de punto fijo de una aplicación  $T$  definida de un conjunto  $A$  en sí mismo,-- presentando algunos ejemplos elementales, donde se observará que una aplicación  $T$  definida de un conjunto  $A$  en sí mismo puede poseer uno o más puntos fijos sobre  $A$ , así como no poseer punto fijo en  $A$ , además una aplicación elemental de transformación de un problema físico a un problema de punto fijo.

Se definirá también el concepto de aplicación contraída de una aplicación  $T$  definida de un conjunto  $A$  en sí mismo, la cual se aplicará a la demostración del Teorema de Punto Fijo de Contracción de Banach, donde, por la necesidad de la misma demostración se hace necesaria la definición de la Sucesión de Cauchy.

Como una consecuencia del teorema de punto fijo de contracción de Banach, se hace necesario definir el Teorema de Dependencia Continua y Diferenciable de un operador  $T_y$ .

Se aplicará el teorema de punto fijo de contracción de Banach a la demostración de un teorema de existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial (Teorema de Picard), en un intervalo dado, además se presentará una conclusión con respecto a la parte A.

2.0.- TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CONTRACCION DE BANACH.

2.0.1.- Definición de Punto Fijo.

2.0.2.- Definición de Aplicación Contraída.

2.0.3.- Definición de Sucesión de Cauchy.

2.0.4.- Demostración del Teorema de Punto Fijo de Contracción de Banach.

2.0.1. DEFINICION DE PUNTO FIJO.

Sea  $X$  un espacio de Banach y  $T$  una aplicación definida  $T: X \rightarrow X$  entonces un punto  $x \in X$  es un punto fijo de  $T$  si se satisface  $Tx = x$ , es decir,  $T$  deja fijo a  $x$ .

- Ejemplos:

a).- Sea  $X = R$  y  $T: R \rightarrow R$ , donde  $T(x) = x + 1$

se concluye que no existe un  $x \in R$  tal que  $T(x) = x$  es decir,  $T$  no posee un punto fijo

en  $R$ , calculando se tiene que  $T(x) = x + 1$ ; para que existiera un punto fijo debe cumplirse

que  $T(x) = x$ , por igualación se tiene que:

$x = x + 1 \Rightarrow 1 = 0$ , por lo tanto no cualquier

aplicación posee punto fijo en un conjunto de terminado.

b).- Sea  $X = [0,1]$  ,  $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$  donde  $T(x) = x^2$

se satisface que  $T(x) = x$  para  $x = 0, 1$  , lo

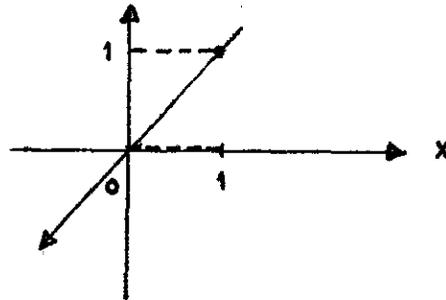
que indica es que  $x = 0$  ó  $x = 1$  son los puntos

fijos de la aplicación  $T$  sobre  $x = [0,1]$ , se pueden encontrar si reemplazamos  $T(x) = x$  se convierte en  $x = x^2$ , es decir,  $x^2 - x = 0$  se cumple  $x = 0$  ó  $x = 1$ , obsérvese que pueden existir más de un punto fijo de la aplicación  $T$  sobre el conjunto  $x = [0,1]$ .

c).-Sea  $x = [0,1]$ ,  $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$

El único punto fijo de la aplicación  $T(x)$  sobre el conjunto  $x = [0,1]$  es  $x = 0$ , dado que  $T(0) = 0$ .

Graficando la función  $T(x)$ :



d).-Una aplicación práctica de la definición de punto fijo:

Sea  $x = \mathbb{R}$  y  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $T$  sea la ecuación definida  $T = \frac{9}{5}C + 32$ , la cual transforma una lectura de grados centígrados a grados Fahrenheit:

¿A que temperatura las dos escalas termométricas marcan la misma lectura? :

Si  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $T(C) = \frac{9}{5}C + 32$ , la pregunta la podemos transformar a otra equivalente:



¿ T tiene un punto fijo, es decir,  $T(C) = C$  ?

$$C = \frac{9}{5} C + 32 \implies C = -40 \quad \text{por lo tanto}$$

$T(-40) = -40$  , lo que indica que  $T(C)$  posee un punto fijo en  $R$ , entonces la temperatura que marca la misma lectura en ambos termómetros es  $-40$ .

### 2.0.2. DEFINICION DE APLICACION CONTRAIDA

Sea  $F$  un subconjunto cerrado de un espacio de Banach  $X$  y  $T$  una aplicación definida de  $T:F \rightarrow F$  entonces  $T$  será una aplicación contraída, si existe un valor  $K \in [0,1]$  tal que:

$$|TU_1 - TU_2| \leq K |U_1 - U_2| \quad \forall U_1, U_2 \in F$$

- Al valor  $K$  se le llama constante de contracción.

- En particular la aplicación será contraída si la función tiene en el conjunto  $F$  una derivada  $T'(x)$  tal que:  $|T'(x)| \leq K < 1$ .

### 2.0.3. DEFINICION DE SUCESION DE CAUCHY.

Una sucesión  $\{x_n\}$  en  $X$  es una sucesión de Cauchy si  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$ , tal que  $|x_m - x_n| < \epsilon$ , si  $n, m \geq N(\epsilon)$ .

### 2.0.4. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CONTRACCION DE BANACH.

TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CONTRACCION DE BANACH.

Sea  $F$  un subconjunto cerrado de un espacio de Banach  $X$  y  $T$  una aplicación contraída  $T:F \rightarrow F$  entonces  $T$  tiene un único punto fijo  $\bar{x}$ ,  $\bar{x} \in F$  tal que  $T\bar{x} = \bar{x}$ . Además, si  $x_0 \in F$  es un punto arbitrario del conjunto  $F$ , entonces la sucesión  $\{x_{n+1} = Tx_n \text{ donde } n=0,1,2,\dots\}$  converge al punto fijo  $\bar{x}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  y  $|\bar{x} - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$  donde  $K \in [0,1)$  es la constante de contracción de  $T$  sobre  $F$ .

PRUEBA:

Existencia:

Sea  $x_0 \in F$  un punto arbitrario de  $F$ , y si definimos una sucesión de aproximaciones sucesivas  $x_{n+1} = Tx_n$  donde  $n=0,1,2,\dots$ , de tal manera que cada uno de los  $x_{n+1} \in F$ , esto es por hipótesis, dado que  $T$  es una contracción definida  $T:F \rightarrow F$ , tenemos también que:

$$1) \quad |x_{n+1} - x_n| = |Tx_n - Tx_{n-1}| \leq K |x_n - x_{n-1}| = K |Tx_{n-1} - Tx_{n-2}| \leq K \cdot K |x_{n-1} - x_{n-2}| = K^2 |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

y así sucesivamente, de tal manera que:

$$1) \quad |x_{n+1} - x_n| \leq K^n |x_1 - x_0|, \text{ donde } n=0,1,2,\dots$$

probaremos que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy,

sea  $m > n$  entonces:

$$2) \quad |x_m - x_n| \leq K^n |x_{m-n} - x_0| \quad \text{por 1)}$$

$$|x_m - x_n| \leq K^n |x_{m-n} - x_{m-n-1} + x_{m-n-1} - x_{m-n-2} + \dots + x_1 - x_0| \leq K^n \left[ K^{m-n-1} |x_1 - x_0| + K^{m-n-2} |x_1 - x_0| + K^{m-n-3} |x_1 - x_0| + \dots + |x_1 - x_0| \right] =$$

$$= K^n |x_1 - x_0| \left[ K^{m-n-1} + K^{m-n-2} + K^{m-n-3} + \dots + 1 \right] \leq$$

$$\leq K^n |x_1 - x_0| \frac{1}{1-K} = \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$$



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS  
PARA MI GRANDEZA

Entonces tenemos que:

$$2) \quad |x_m - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$$

Ahora dado a que  $K \in [0, 1)$  se tiene que para  $n$  muy grande, es decir, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , el miembro del lado derecho se puede hacer tan pequeño como se quiera, es decir, se satisface que  $|x_m - x_n| < \epsilon$ , lo cual indica que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy en  $F$ , y si es de Cauchy implica que existe un elemento  $\bar{x}$  en  $F$  al cual converge, es decir,

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \text{ por ser } F \text{ un conjunto cerrado.}$$

-Dado a que definimos:

$Tx_n = x_{n+1}$  tenemos que calculando límites:

$$4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$$

-por la ecuación 3) se tiene que:

$$5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x}$$

Ahora, puesto que  $T$  es una aplicación continua:

$$6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = T \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = T\bar{x}$$

usando 5) y 6) en 4) se tiene que:

$$4) \quad T\bar{x} = \bar{x}$$

-Lo que indica es que existe un punto fijo  $\bar{x}$  en  $F$ , de la aplicación  $T$  sobre  $F$ .

Lo que falta probar es la convergencia, es decir, que:

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$$

-Calculando el límite a la ecuación 2) se tiene:

$$7) \lim_{m \rightarrow +\infty} |x_m - x_n| \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$$

Por la continuidad de T se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (x_m - x_n) \right| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \\
& \left| \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m - \lim_{m \rightarrow +\infty} x_n \right| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \\
& |\bar{x} - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que existe un punto fijo  $\bar{x}$  de la aplicación T sobre F, el cual lo encontramos a partir de cualquier punto  $x_0$  dado.

UNICIDAD:

Sea  $K \in [0, 1]$  la constante de contracción de T sobre F, y si  $\bar{x}, \bar{y}$  son dos puntos fijos de la aplicación T, es decir,  $T\bar{x} = \bar{x}, T\bar{y} = \bar{y}$  donde  $\bar{x}, \bar{y} \in F$  supóngase que  $\bar{x} \neq \bar{y}$ .

$$\text{Entonces: } |\bar{x} - \bar{y}| = |T\bar{x} - T\bar{y}| \leq K |\bar{x} - \bar{y}|$$

puesto que suponemos que  $\bar{x} \neq \bar{y}$  entonces  $K \geq 1$  y esto no puede ser porque K es la constante de contracción de T sobre F, lo que indica que  $\bar{x} = \bar{y}$ , por lo tanto, existe un único punto fijo  $\bar{x}$  de la aplicación T sobre F.

2.6).- TEOREMA DE DEPENDENCIA CONTINUA Y DIFERENCIABLE.

DEFINICION DE CONTRACCION UNIFORME:

Sea F un subconjunto de un espacio de Banach X, G es un subconjunto de un espacio de Banach Y y sea:

$A = \{T_y : y \in G\}$  una familia de operadores definido  $T_y : F \rightarrow F$

El operador  $T_y$  se define como contracción uniforme sobre F, si  $T_y : F \rightarrow F$  y existe un valor  $k \in [0,1)$  tal que:

$$|T_y x - T_y \bar{x}| \leq k |x - \bar{x}| \quad \forall y \in G, x, \bar{x} \in F.$$

TEOREMA:

Si F es un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X, G es un subconjunto <sup>abierto</sup> de un espacio de Banach Y,  $T_y : F \rightarrow F$   $y \in G$  es una contracción uniforme sobre F, y  $T_y x$  es continuo en y para todo x fijo en F, entonces el único punto fijo  $g(y)$  de  $T_y$ ,  $y \in G$  es continuo en y.

Además si F, G son las cerraduras de los conjuntos abiertos  $F^\circ$ ,  $G^\circ$  y  $T_y x$  tiene primeras derivadas continuas  $A(x,y)$ ,  $B(x,y)$  con respecto a y, x respectivamente. Entonces  $g(y)$  tiene primera derivada continua con respecto a  $y \in G^\circ$ .

PRUEBA: 1a. PARTE (La continuidad de  $g(y)$ )

Puesto que  $T_y : F \rightarrow F$  es una contracción uniforme, indica que existe  $k \in [0,1)$  tal que:

$|T_y x - T_y \bar{x}| \leq k |x - \bar{x}| \quad \forall y \in G, x, \bar{x} \in F$ , sea  $g(y)$  el único punto fijo del operador  $T_y$  en F, el cual existe por el teorema anterior.

Sea  $h \in Y$  un valor pequeño, entonces se tiene que:

$$1). \quad T_y g(y) = g(y)$$

$$2). \quad T_{y+h} g(y+h) = g(y+h)$$

Calculando la diferencia de 2) - 1) entonces tenemos:

$$3). \quad g(y+h) - g(y) = T_{y+h} g(y+h) - T_y g(y)$$

$$\begin{aligned} 3). \quad g(y+h) - g(y) &= T_{y+h} g(y+h) - T_y g(y) \\ &= T_{y+h} g(y+h) - T_{y+h} g(y) + T_{y+h} g(y) - T_y g(y) \end{aligned}$$

Calculando la norma en a 3):

$$\begin{aligned} 3). \quad |g(y+h) - g(y)| &= |T_{y+h} g(y+h) - T_{y+h} g(y) + T_{y+h} g(y) - T_y g(y)| \leq \\ &\leq |T_{y+h} g(y+h) - T_{y+h} g(y)| + |T_{y+h} g(y) - T_y g(y)| \leq \\ &\leq k |g(y+h) - g(y)| + |T_{y+h} g(y) - T_y g(y)| \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 3). \quad |g(y+h) - g(y)| &\leq \frac{|T_{y+h} g(y) - T_y g(y)|}{1-k} = \\ &= (1-k)^{-1} |T_{y+h} g(y) - T_y g(y)| \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$3). \quad |g(y+h) - g(y)| \leq (1-k)^{-1} |T_{y+h} g(y) - T_y g(y)|.$$

Puesto que  $T_{yx}$  es continuo en  $y$  para cada  $x$  fijo en  $F$ , entonces la función  $g(y)$  es continua en  $y$ .

En ecuaciones diferenciales ordinarias, es muy característico presentarlas sujetas a un conjunto de restricciones, las cuales todas ellas pueden estar sujetas a únicamente un solo punto ó más puntos dependiendo de la finalidad que se persiga al analizar determinado fenómeno.

Si una ecuación diferencial ordinaria está sujeta a un conjunto de restricciones y éstas únicamente en un solo punto A, se le llama problema de condición inicial, donde se busca una solución al problema dado, si es que existe, ó existe y es única en cierto intervalo de definición de la misma solución, la cual debe de verificar la ecuación diferencial ordinaria y satisfacer al conjunto de restricciones, en dicho intervalo.

Un teorema de ecuación diferencial ordinaria lo es el teorema de existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria (Teorema de Picard), el cual se demostrará haciendo uso del teorema de punto fijo de contracción de Banach.

Se iniciará por la transformación del problema de condiciones I\*a una ecuación integral equivalente donde todas las soluciones de la ecuación integral en un intervalo dado, son también las soluciones del problema de condición inicial en el mismo intervalo.

I\* = iniciales

Se hace necesario definir el espacio completo de funciones vectoriales continuas  $\varphi \in \mathcal{C}[I, \mathbb{R}^n]$  con cierta métrica específica, en el cual definimos el operador  $T$  para cada función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{C}[I, \mathbb{R}^n]$  de tal manera que el problema de condición inicial es equivalente a probar la existencia de un punto fijo del operador  $T$  en el espacio completo de función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{C}[I, \mathbb{R}^n]$  es decir, probar que existe una función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{C}[I, \mathbb{R}^n]$  tal que se satisface  $T\varphi = \varphi$  en un intervalo dado.

Entonces decimos que el problema de condición inicial tiene solución en el intervalo, donde se utilizará el teorema de punto fijo de contracción de Banach.

#### ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Aplicación del teorema de punto fijo de contracción de Banach, a la demostración de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio de Banach.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y conexo, y  $T$  es un intervalo real abierto  $T = (T_1, T_2) \subset \mathbb{R}$ ,  $U$  puede ser todo  $\mathbb{R}^n$  y  $T$  puede ser todo  $\mathbb{R}$ , es decir,  $T = \mathbb{R}$ ,  $U = \mathbb{R}^n$  sea  $U^*$  un conjunto abierto y conexo definido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $U^* = T \times U$ , donde  $U^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria:

1).-  $\dot{x} = f(t, x)$

con condición inicial.

2).-  $x(t_0) = x_0$        $t \in T$ , donde  $f(t, x)$

satisface las siguientes condiciones:

a)  $f(t, x)$  está definida y continúa en  $U^*$

3).- b)  $f(t, x)$  satisface la condición de Lipschitz, es decir, existe un valor  $L > 0$  tal que:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in U, \forall t \in T$$

El problema de condición inicial se puede transformar a la siguiente ecuación integral equivalente, es decir, las ecuaciones 1) y 2) se transforman a la ecuación 4).

4).-  $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad t \in |t - t_0| \leq \bar{\delta} \subset T$

Donde todas las soluciones  $x(t)$  de la ecuación 4) en el intervalo  $|t - t_0| \leq \bar{\delta}$  son también soluciones del problema de condición inicial, es decir, satisfacen la ecuación 1) y verifica la ecuación 2) en el intervalo  $|t - t_0| \leq \bar{\delta}$ .

#### TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

(Teorema de Picard)

Dada una ecuación diferencial ordinaria 1) con condición 2), donde  $f(t, x)$  satisface las condiciones 3),

y dado cualquier punto  $P_0 = (t_0, x_0) \in U^*$ , es decir,  $x_0 \in U$ ,  $t_0 \in T$ ; probamos que existe en un intervalo  $|t - t_0| \leq \bar{S}$  donde  $\bar{S} > 0$  una única solución  $x(t) = \varphi(t)$  definida en  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ , con valores en  $U$ , que satisface la ecuación 1) y verifica la ecuación 2).

PRUEBA:

Sean  $\bar{S}, B$  valores positivos, donde  $\bar{S}M \leq B$ , de tal manera que definen el rectángulo cerrado y acotado:

$$\bar{B}(\bar{S}, B, t_0, x_0) = \bar{B}(\bar{S}, B) = \{(t, x) : |t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq B\} \subset U^*$$

el punto  $P_0 = (t_0, x_0) \in \bar{B}(\bar{S}, B)$  por la continuidad de la función  $f(t, x)$  existe un valor  $M > 0$  tal que:

$$|f(t, x)| \leq M \quad \forall (t, x) \in \bar{B}(\bar{S}, B).$$

Escogamos un valor  $\bar{S} > 0$  de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

- a).-  $(t, x) \in \bar{B}(\bar{S}, B)$  siempre que  $|t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq B$
- b).-  $\bar{S}L < 1$

Sea  $\mathcal{C} [|t - t_0| \leq \bar{S}, R^n]$  el espacio completo de todas las funciones vectoriales continuas  $\varphi$ , definidas del intervalo cerrado y acotado  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ , sobre el espacio  $R^n$ . Si en el conjunto  $\bar{B}(\bar{S}, B)$  definimos por  $\bar{\mathcal{C}} [|t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq B]$  el subespacio completo de funciones vectoriales continuas  $\varphi$ , definidas del intervalo cerrado y acotado  $|t - t_0| \leq \bar{S}$  sobre  $|x - x_0| \leq B$ , tal que  $|\varphi(t) - x_0| \leq B$ , y con métrica

$$P(\varphi_1, \varphi_2) = \max_t |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Se define para cada función vectorial continua

$\varphi \in \bar{E} \left[ |t-t_0| \leq \bar{s}, |x-x_0| \leq B \right]$  la transformación  $T\varphi$ , por la relación:

$$5) \quad T\varphi(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad t \in |t-t_0| \leq \bar{s}$$

De tal manera que el problema de condición inicial es equivalente al problema de probar la existencia de un punto fijo de la transformación  $T$  sobre el espacio de funciones vectoriales continuas  $\varphi \in \bar{E} \left[ |t-t_0| \leq \bar{s}, |x-x_0| \leq B \right]$ , es decir, si en el espacio de funciones vectoriales continuas  $\bar{E} \left[ |t-t_0| \leq \bar{s}, |x-x_0| \leq B \right]$  existe una función vectorial continua  $\varphi$  tal que satisfaga  $T\varphi = \varphi$ , para  $t \in |t-t_0| \leq \bar{s}$ , entonces decimos que existe una única solución  $x(t)$  de la ecuación 4) en el intervalo  $|t-t_0| \leq \bar{s}$ .

Probaremos la existencia de un único punto fijo de la transformación  $T$  sobre el espacio de funciones vectoriales continuas  $\bar{E} \left[ |t-t_0| \leq \bar{s}, |x-x_0| \leq B \right]$  aplicando el Teorema de Punto Fijo de Contracción de Banach.

Condiciones a probar:

6)  $T: \bar{E} \longrightarrow \bar{E}$

7)  $T$  es una contracción sobre  $\bar{E}$

PRUEBA:

6)  $T: \bar{E} \longrightarrow \bar{E}$

Sea  $\varphi \in \bar{E}$  definida en  $|t-t_0| \leq \bar{s}$  calculemos:



EL SABER DE MIS HIJOS  
PARA MI GRANDEZA

BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

$$\begin{aligned}
 |T\varphi(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \right| \leq M \left| \int_{t_0}^t ds \right| \\
 &= M |t - t_0| \leq M\bar{S} \leq B
 \end{aligned}$$

Entonces:  $|T\varphi(t) - x_0| \leq B$ , lo que indica es que:

$T(\bar{K}) \subset \bar{K}$ , es decir,  $T\varphi \in \bar{K}$  donde se observa que  $T$  transforma funciones vectoriales continuas en funciones vectoriales continuas, por lo tanto se cumple que  $T: \bar{K} \rightarrow \bar{K}$

7).  $T$  es una contracción sobre  $\bar{K}$

Sean  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{K}$  definidas en  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ , calculemos:

$$\begin{aligned}
 |T\varphi_1(t) - T\varphi_2(t)| &= \left| x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) ds - x(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, \varphi_2(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \varphi_2(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds \right| \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \right| \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t L \max_t |\varphi_1 - \varphi_2| ds \right| \leq L\bar{S} \max_t |\varphi_1 - \varphi_2|
 \end{aligned}$$

Entonces:  $|T\varphi_1 - T\varphi_2| \leq L\bar{S} \max_t |\varphi_1 - \varphi_2|$ , puesto que  $L\bar{S} < 1$ , entonces  $T$  es una aplicación contraída sobre  $\bar{K}$ .

Dado a que  $T$  satisface las condiciones del teorema de punto fijo de contracción de Banach, entonces existe una única función vectorial continua  $\varphi \in \bar{K}$  que satisface  $T\varphi = \varphi$  sobre el intervalo  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ , esto im

## CONCLUSION DE LA PARTE A.

Por lo general, las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial, nos dan información sobre la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial en un intervalo dado, más no un método para encontrar dicha solución. A diferencia, se tiene que el Teorema de Punto fijo de contracción de Banach aplicado a la demostración de un teorema de existencia y unicidad de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial en un intervalo dado (Teorema de Picard), el cual, aparte de garantizar la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial en un intervalo dado, aporta el método de aproximaciones sucesivas mediante el cual a veces se puede encontrar la solución al problema de condición inicial, en un intervalo dado, digo a veces porque en ocasiones la integral a resolver es realmente compleja e irresoluble mediante los métodos tradicionales.

### OBSERVACION:

La función  $f$  se condiciona a que sea continua y Lipschitziana, dichas condiciones son suficientes más no necesarias; hay funciones que no satisfacen ninguna condición o a lo más una y posee solución única. Si  $f$  es función continua y Lipschitziana, entonces el problema de condición inicial tiene solución única; en caso de que  $f$  sea únicamente una función continua, entonces a lo más se puede asegurar la existencia de solución para el problema de condición inicial. Para detallar esta última idea, pasaremos a demostrar un teorema de existencia de solución (Teorema de Peano), donde en su demostración es necesario hacer mención del Teorema de Punto Fijo de Schauder.

## PARTE B.

Empezaremos por mencionar el Teorema de Punto Fijo de Schauder, así como dar referencia de su demostración. Se continuará con la aplicación del teorema de punto fijo de Schauder a la demostración de un teorema de existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria con condiciones iniciales en un intervalo dado (Teorema de Peano), donde se hace necesario introducir el teorema de Arzela-Ascoli [8]. Además, se aplicará el teorema de punto fijo de Schauder a la demostración de existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria de 2do. orden con condiciones de frontera en un intervalo dado, donde se observará que en el problema de condición de frontera es necesario introducir la función de Green por construcción ver [1], [2], para su demostración, aparte del teorema de Arzela-Ascoli.

Se ilustrará mediante algunos ejemplos la construcción de la función de Green para el problema de condición de frontera (usando 2 formas) y obtendremos la ecuación de la curva integral que satisfaga a la ecuación diferencial ordinaria de 2do. orden y verifique las condiciones de frontera en un intervalo dado. Además, se dará una conclusión de la parte B.

3. MENCION DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE SCHAUDER.

Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $C \subset X$  un conjunto cerrado y convexo, y suponer que  $T$  es una aplicación continua y definida de  $C$  en sí mismo,  $T: C \rightarrow C$ , tal que  $T(C)$  es relativamente compacto, entonces existe un punto  $x \in C$  tal que  $Tx = x$ .

Para su demostración ver [4] pag. 10 y [II] pag. 415.

probar la existencia de un punto fijo del operador  $T$  en el espacio completo de función vectorial continua  $\varphi \in \bar{C}[I, \mathbb{R}^n]$ , tal que se satisface  $T\varphi = \varphi$  en un intervalo da-

Si una ecuación diferencial ordinaria está sujeta a un conjunto de restricciones y éstas únicamente en un solo punto  $A$ , se le llama problema de condición inicial, donde se busca una solución al problema dado, si es que existe, o existe y es única en cierto intervalo de definición de la misma solución, la cual debe de verificar la ecuación diferencial ordinaria y satisfacer al conjunto de restricciones, en dicho intervalo.

Un teorema de ecuación diferencial ordinaria lo es el teorema de existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria (Teorema de Peano), el cual se demostrará haciendo uso del teorema de punto fijo de Schauder.

Se iniciará por la transformación del problema de condiciones iniciales a una ecuación integral equivalente, donde todas las soluciones de la ecuación integral en un intervalo dado, son también las soluciones del problema de condición inicial en el mismo intervalo.

Se hace necesario definir el espacio completo de funciones vectoriales continuas  $\varphi \in C[I, \mathbb{R}^n]$  con cierta métrica específica, en el cual definimos el operador  $T$  para cada función vectorial continua  $\varphi \in \bar{C}[I, \mathbb{R}^n]$ , de tal manera que el problema de condición inicial es equivalente a

probar la existencia de un punto fijo del operador  $T$  en el espacio completo de función vectorial continua  $\varphi \in \bar{C}[I, AC\mathbb{R}^n]$ , tal que se satisface  $T\varphi = \varphi$  en un intervalo dado.

Entonces decimos que el problema de condición inicial tiene solución en el intervalo, donde se utilizará el teorema de punto fijo de Schauder .

### ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Aplicación del teorema de punto fijo de Schauder a la demostración de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio de Banach.

#### TEOREMA DE EXISTENCIA (TEOREMA DE PEANO)

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  en un conjunto abierto y conexo, y  $T$  es un intervalo real y abierto:

$T = (T_1, T_2) \subset \mathbb{R}$ ,  $U$  puede ser todo  $\mathbb{R}^n$  y  $T$  puede ser todo  $\mathbb{R}$ ,  $U = \mathbb{R}^n$  y  $T = \mathbb{R}$ ; sea  $U^*$  un conjunto abierto y conexo definido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $U^* = T \times U$ ,  $U^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria:

$$1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

con condición inicial

$$2) \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{para } t \in T, \text{ donde } f(t, x) \text{ satisface la siguiente condición:}$$

3)  $f(t,x)$  está definida y continua en  $U^*$ .

El problema de condición inicial se puede transformar en una expresión equivalente, es decir, a la siguiente ecuación integral que contiene a la ecuación 1) y 2):

$$4) \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

$$t \in |t-t_0| \in S \subset T, \quad t \in T.$$



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MEN HOMBRES  
HARA MI GRANDEZA

Donde todas las soluciones  $x(t)$  de la ecuación 4) sobre un intervalo  $|t-t_0| \leq \bar{S}$ , son también soluciones del problema de condición inicial, es decir, satisfacen las ecuaciones 1) y 2) en el intervalo  $|t-t_0| \leq \bar{S}$ .

#### TEOREMA DE EXISTENCIA (TEOREMA DE PEANO)

Dada una ecuación diferencial ordinaria 1) con condiciones 2) y donde  $f(t,x)$  satisface la condición 3) y dado cualquier punto  $P_0 = (t_0, x_0) \in U^*$ , es decir,  $x_0 \in U, t_0 \in T$  probaremos que al menos existe en un intervalo  $|t-t_0| \leq \bar{S}$  y donde  $\bar{S} > 0$ , una solución  $x(t)$  definida en  $|t-t_0| \leq \bar{S}$  y con valores en  $U$ , que satisface la ecuación 1) y verifica la ecuación 2).

PRUEBA:

Sean  $S, B$  valores positivos de tal manera que definimos el rectángulo cerrado:

$$J(S, B, t_0, x_0) = J(S, B) = \{(t, x) : |t-t_0| \leq S, |x-x_0| \leq B\} \subset U^*,$$

el punto  $P_0 = (t_0, x_0) \in J(S, B)$ , por la continuidad de la fun-

ción  $f(t, x)$  existe un valor  $M > 0$ , tal que:

$$|f(t, x)| \leq M \quad \forall (t, x) \in J(S, B).$$

Sean  $\bar{S}$ ,  $\bar{B}$  valores positivos, donde  $0 < \bar{S} \leq S$ ,  $0 < \bar{B} \leq B$ ,  $M\bar{S} \leq \bar{B}$  y definimos el rectángulo cerrado y acotado:

$$A(\bar{S}, \bar{B}, t_0, x_0) = A(\bar{S}, \bar{B}) = \{(t, x) : |t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq \bar{B}\} \subset J(S, B).$$

Sea  $\mathcal{E} \left[ |t - t_0| \leq \bar{S}, \mathbb{R}^n \right]$  el espacio completo de todas las funciones vectoriales continuas  $\varphi$ , definidas en el intervalo cerrado y acotado  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ , sobre el espacio  $\mathbb{R}^n$ , si en el conjunto  $A(\bar{S}, \bar{B})$ , definimos el subespacio completo de funciones vectoriales continuas  $\varphi$ , por  $\bar{\mathcal{E}} \left[ |t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq \bar{B} \right]$ , las cuales están definidas en el intervalo cerrado y acotado  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ , y con valores en  $|x - x_0| \leq \bar{B}$ , donde además se satisface que para alguna función vectorial continua:

$$\varphi \in \bar{\mathcal{E}} \left[ |t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq \bar{B} \right] \quad \varphi(t_0) = x_0, \quad \text{y para toda función } \varphi \in \bar{\mathcal{E}} \left[ |t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq \bar{B} \right] \quad |\varphi(t) - x_0| \leq \bar{B}.$$

En la forma en que está definido el conjunto  $A(\bar{S}, \bar{B})$ , este es un conjunto cerrado, acotado y convexo.

Se define para cada función vectorial continua  $\varphi \in \bar{\mathcal{E}} \left[ |t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq \bar{B} \right]$  la transformación  $T\varphi$  por la relación:

$$5) \quad T\varphi(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad t \in |t - t_0| \leq \bar{S}$$

De tal manera que el problema de probar la existencia de un punto fijo de la transformación  $T\varphi$  (relación 5), es equivalente al problema de condición inicial, es de

cir, si en el espacio de función vectorial continua:

$\bar{E} \left[ |t-t_0| \leq \bar{S}, |x-x_0| \leq \bar{B} \right]$  existe una función vectorial continua  $\varphi$ , tal que satisfaga  $T\varphi = \varphi$  para  $t \in |t-t_0| \leq \bar{S}$  entonces decimos que existe una solución  $x(t)$  de la ecuación 4) en el intervalo  $|t-t_0| \leq \bar{S}$ .

Probaremos la existencia de un punto fijo de la transformación  $T$  sobre el espacio de función vectorial continua  $\bar{E} \left[ |t-t_0| \leq \bar{S}, |x-x_0| \leq \bar{B} \right]$  aplicando el teorema de punto fijo de Schauder.

Condiciones a probar:

- 1).  $T: \bar{E} \longrightarrow \bar{E}$
- 2).  $T(\bar{E})$  es relativamente compacto.

$$1). \quad T: \bar{E} \longrightarrow \bar{E}$$

Sea  $\varphi \in \bar{E}$ ,  $T\varphi(t_0) = x_0$ ,  $t \in |t-t_0| \leq \bar{S}$ , calculemos:

$$\begin{aligned} |T\varphi(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \right| \leq M \left| \int_{t_0}^t ds \right| \leq \\ &\leq M |t-t_0| \leq M \bar{S} \leq \bar{B} \end{aligned}$$

Entonces:  $|T\varphi(t) - x_0| \leq \bar{B}$ , lo que indica es que  $T(\bar{E}) \subset \bar{E}$ , es decir  $T\varphi \in \bar{E}$ , donde se observa que  $T$  transforma el espacio de función vectorial continua,  $\varphi$ ,  $T\varphi \in A(\bar{S}, \bar{B})$ , por lo tanto  $T: \bar{E} \longrightarrow \bar{E}$ .

- 2)  $T(\bar{E})$  es relativamente compacto.

Sea  $\varphi \in \bar{E}$ ,  $t \in |t-t_0| \leq \bar{S}$ , calculemos:

$$\begin{aligned}
|T\varphi(t) - T\varphi(s_1)| &= \left| x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - x(t_0) - \int_{t_0}^{s_1} f(s, \varphi(s)) ds \right| = \\
&= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds + \int_{s_1}^{t_0} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_{s_1}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \int_{s_1}^t |f(s, \varphi(s))| ds \\
&\leq M \left| \int_{s_1}^t ds \right| \leq M |t - s_1|
\end{aligned}$$

Entonces  $|T\varphi(t) - T\varphi(s_1)| \leq M |t - s_1|$  para  $t, s_1 \in |t - t_0| \leq \bar{S}$  lo cual indica que  $T(\bar{E})$  es una familia equicontinua en  $\bar{E}$  y por el teorema de Ascoli [8],  $T(\bar{E})$  es relativamente compacto. Por lo tanto  $T(\bar{E})$  es relativamente compacto.

Dado a que  $T$  satisface las condiciones de existencia de un punto fijo del teorema de Schauder, entonces existe una función vectorial continua:

$\varphi \in \bar{E} \left[ |t - t_0| \leq \bar{S}, |x - x_0| \leq \bar{B} \right]$  que satisface la relación  $T\varphi = \varphi$  en el intervalo  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ , esto implica que el problema de condición inicial 4) posee una solución  $x(t)$  en el intervalo  $|t - t_0| \leq \bar{S}$ .

Nota:

Es esencial la dimensión finita del espacio para establecer que  $T(\bar{E})$  es relativamente compacto.

La continuidad de  $f(t,x)$ , no garantiza la existencia de soluciones en espacios infinitos, etc. véase [3] .

### ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Si la ecuación diferencial ordinaria está sujeta a un conjunto de restricciones y éstas a dos puntos  $A,B$ , se le llama problema de condición de frontera, donde se busca una solución al problema dado, si es que existe, o si existe y es única, de tal manera que la solución que buscamos está limitada al intervalo  $[A,B]$ , es decir, donde se va a definir la solución, así como verificar la ecuación diferencial ordinaria y satisfacer el conjunto de restricciones preasignadas.

El siguiente problema de condiciones de frontera, se va a resolver utilizando el Teorema de Punto Fijo de Schauder para probar la existencia de solución, y donde en su desarrollo es necesario introducir la función de Green, la cual se definirá en dos formas distintas, pero dando el mismo resultado. En una de las formas es necesario introducir el concepto de función escalón unidad para obtener el resultado, y en la otra es necesario el manejo del wronskiano de las soluciones linealmente independiente.

Se darán algunos ejemplos, a los cuales se les

calcula la función de Green por las dos formas, para visualizar cual de los métodos es más fácil de obtener la función de Green.

Un problema de condición de frontera se puede transformar a una ecuación integral equivalente, de tal manera que las soluciones de la ecuación integral en un intervalo  $[A, B]$ , son también soluciones del problema de condición de frontera en el intervalo  $[A, B]$ .

Se hace necesario definir el espacio completo de funciones vectoriales continuas  $\varphi \in \mathcal{K} [T, R^n]$ , con cierta métrica específica, en el cual definimos el operador T para cada función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{B} [T, \mathcal{B}C R^n]$ , de tal manera que el problema de condición de frontera es equivalente a probar la existencia de un punto fijo del operador  $\bar{T}$  en el espacio de función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{K} [T, \mathcal{B}C R^n]$ , es decir, probar que existe una función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{B} [T, \mathcal{B}C R^n]$ , tal que se satisface  $\bar{T}\varphi = \varphi$ , en un intervalo dado, entonces decimos que el problema de condición de frontera tiene solución en el intervalo donde se utilizará el teorema de punto fijo de Schauder.

### ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Schauder, a la demostración de existencia de soluciones de



las ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Problema de condición de frontera -

El problema de condición de frontera, a diferencia del problema de condición inicial, es que la solución general está sujeta a más de un punto; cuando son dos puntos, por lo general son los puntos extremos del intervalo en definición, y es de esperarse que el número de condiciones a dicho problema sean más de una. Se resolverá el problema de condición de frontera haciendo uso de la función de Green, construida de acuerdo a las condiciones de [1] y [2] y del Teorema de Punto Fijo de Schauder

Sea  $UCR^n$  un conjunto abierto y conexo, y  $T$  es un intervalo real cerrado y acotado:

$T = [0, P] \subset \mathbb{R}$ , sea  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definido por  $U^* = T \times U$ .

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

1).  $\ddot{y}(x) = f(x, y(x))$

con condiciones de frontera

2).  $y(0) = 0$  ,  $y(P) = 0$   $x \in [0, P] = T$  donde  $f(x, y)$  satisface la siguiente condición:

3).  $f(x, y)$  está definida y continua en  $U^*$ .

El problema de condición de frontera se puede transformar a la siguiente ecuación integral equivalente, es

decir, las ecuaciones 1), 2) se transforman a la ecuación:

$$4) \quad y(x) = \int_0^P G(x,t) f(t, y(t)) dt \quad x \in [0, P]$$

Donde  $G(x,t)$  es la función de Green y está definida:  $G(x,t) : T \times T \rightarrow R$ , y se expresa por la ecuación:

$$5) \quad G(x,t) = \int_0^P U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds \quad \text{--- forma A}$$

Obtención de la ecuación 4):

Dado que:

$$1) \quad \ddot{y}(x) = f(x, y(x)) \quad x \in [0, P]$$

con condiciones de frontera

$$2) \quad y(0) = y(P) = 0 \quad , \text{ suponiendo que se satisface 3)}$$

Integrando dos veces la ecuación 1):

$$\int_0^s d\dot{y} = \int_0^s f(t, y(t)) dt$$

$$\dot{y}(s) = \int_0^s f(t, y(t)) dt + C_1$$

$$\int_0^x dy = \int_0^x \int_0^s f(t, y(t)) dt ds + C_1 \int_0^x ds$$

$$4) \quad y(x) = \int_0^x \int_0^s f(t, y(t)) dt ds + C_1 x + C_2$$

Ahora, utilizando las condiciones de frontera izquierda  $y(0)=0$  en  $x=0$ , y condición de frontera derecha  $y(P)=0$  en  $x=P$ , en la ecuación 4), para obtener  $C_1, C_2$ .

Calculemos:

$$6) \quad y(0) = \int_0^P \int_0^S f(t, y(t)) dt ds + C_1(0) + C_2 = 0 \implies C_2 = 0$$

$$7) \quad y(P) = \int_0^P \int_0^S f(t, y(t)) dt ds + C_1 P + 0 = 0 \implies C_1 = -\frac{1}{P} \int_0^P \int_0^S f(t, y(t)) dt ds$$

Llevando 6) y 7) a 4):

$$4) \quad y(x) = \int_0^x \int_0^S f(t, y(t)) dt ds - \frac{x}{P} \int_0^P \int_0^S f(t, y(t)) dt ds \quad x \in [0, P]$$

Definiendo la función escalón unitario:

$$8) \quad U_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

Definamos la función escalón unidad:

$$9) \quad U_0(x-s) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-s \leq 0 \\ 1 & \text{si } x-s > 0 \end{cases}$$

Aplicando 9) a la ecuación 4) se transforma en:

$$\begin{aligned} 4) \quad y(x) &= \int_0^P U_0(x-s) \int_0^S f(t, y(t)) dt ds - \frac{x}{P} \int_0^P \int_0^S f(t, y(t)) dt ds \\ &= \int_0^P \int_0^S \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] f(t, y(t)) dt ds \quad x \in [0, P] \end{aligned}$$

Definamos la función escalón unidad:

$$10) \quad U_0(s-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s-t \leq 0 \\ 1 & \text{si } s-t > 0 \end{cases}$$

Aplicando 10) a la ecuación 4) se transforma en:

$$4) \quad y(x) = \int_0^P \int_0^P U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] f(t, y(t)) dt ds$$

$$= \int_0^P \left[ \int_0^P U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds \right] f(t, y(t)) dt \quad x \in [0, P]$$

Por lo tanto; la ecuación 4) queda definida:

$$4) \quad y(x) = \int_0^P G(x, t) f(t, y(t)) dt \quad x \in [0, P]$$

Donde  $G(x, t) = \int_0^P U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds$  es la función de Green descrita.

Para obtener la función de Green del problema en cuestión, se usará la ecuación 5):

$$5) \quad G(x, t) = \int_0^P U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds$$

Puesto que la función de Green está definida:

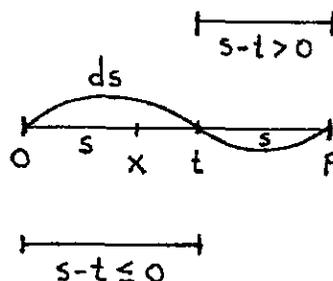
$G(x, t) = [0, P] \times [0, P] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces fijando un valor  $t \in [0, P]$

Calculemos la función de Green:

- a).  $x \leq t$  es decir  $x \in [0, t]$  condición de frontera izquierda.
- b).  $x \geq t$  es decir  $x \in [t, P]$  condición de frontera derecha.

Desarrollando a):

Sea  $x \leq t$ ,  $t$  fijo fig. a)



$$5) \quad G(x,t) = \int_0^t U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds + \int_t^P U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds$$

Analicemos a la función escalón unidad en los intervalos:

$$[0,t] , [t,P] \text{ puesto que } U_0(s-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s-t \leq 0 \\ 1 & \text{si } s-t > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

i). En el intervalo  $[0,t]$  , ver fig. a)

$$s-t \leq 0 \Rightarrow U_0(s-t) = 0$$

ii). En el intervalo  $[t,P]$  , ver fig. a)

$$s-t > 0 \Rightarrow U_0(s-t) = 1$$

De acuerdo a i), ii)  $\Rightarrow$  5) se transforma en:

$$5) \quad G(x,t) = \int_t^P \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds$$

Por ii) se tiene que  $s > t$ , y dado que  $t \geq x$  entonces  $s > x$  por lo tanto  $x-s < 0 \Rightarrow U_0(x-s) = 0$

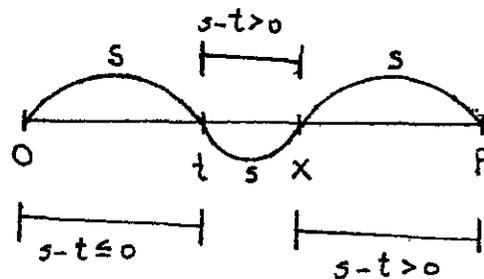
Llevado a 5)

$$5) \quad G(x,t) = \int_t^P \left( -\frac{x}{P} \right) ds \\ = -\frac{x}{P} (P-t) = \frac{(t-P)x}{P} \quad \text{si } t \geq x$$

Desarrollando b)

Sea  $x \geq t$  ,  $t$  fijo

fig. b)



$$5) \quad G(x,t) = \int_0^t U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds + \\ + \int_t^x U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds + \int_x^P U_0(s-t) \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds$$

Analizamos a la función escalón unidad en los intervalos:

los:  $[0, t]$  ,  $[t, x]$  ,  $[x, P]$  puesto que  $U_0(S-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } S-t \leq 0 \\ 1 & \text{si } S-t > 0 \end{cases}$

i) En el intervalo  $[0, t]$  , ver fig. b)

$$s \leq t \implies S-t \leq 0 \implies U_0(S-t) = 0$$

ii) En el intervalo  $[t, x]$  ver fig. b)

$$s > t \implies S-t > 0 \implies U_0(S-t) = 1$$

iii) En el intervalo  $[x, P]$  ver fig. b)

$$s > t \implies S-t > 0 \implies U_0(S-t) = 1$$

De acuerdo a i), ii), iii), 5) se transforma en:

$$5) \quad G(x,t) = \int_t^x \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds + \int_x^P \left[ U_0(x-s) - \frac{x}{P} \right] ds$$

Analizamos la función escalón unidad en los intervalos:

$[t, x]$  ,  $[x, P]$  puesto que  $U_0(x-S) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-S \leq 0 \\ 1 & \text{si } x-S > 0 \end{cases}$

iv) En el intervalo  $[x, t]$  ver fig. b),

$$x > S \implies x-S > 0 \implies U_0(x-S) = 1$$

v) En el intervalo  $[x, P]$  ver fig b) ,

$$x \leq S \implies x-S \leq 0 \implies U_0(x-S) = 0$$

De acuerdo a iv) y v), 5) se transforma en:

$$\begin{aligned}
 5) \quad G(x,t) &= \int_t^x \left[1 - \frac{x}{P}\right] ds + \int_x^P \left(-\frac{x}{P}\right) ds = \frac{P-x}{P} \int_t^x ds - \frac{x}{P} \int_x^P ds = \\
 &= \frac{P-x}{P} \cdot (x-t) - \frac{x}{P} (P-x) = \frac{P-x}{P} [x-t-x] \\
 &= \frac{P-x}{P} [-t] = \frac{t}{P} [x-P] \quad \text{si } x \geq t
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se define que la función de Green para el problema descrito es:

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{P} (t-P) & \text{si } 0 \leq x \leq t \quad \text{condición de} \\ & \text{frontera izquierda} \\ \frac{t}{P} (x-P) & \text{si } t \leq x \leq P \quad \text{condición de} \\ & \text{frontera derecha} \end{cases}$$

Nota: Para mayor detalle véase [2]

Otra forma de definir la función de Green es la siguiente:

Sea  $G(x,t) : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$5)' G(x,t) = \begin{cases} C_1(t)y_1(x) & 0 \leq x \leq t \quad \text{condic. de frontera izq.} \\ C_2(t)y_2(x) & t \leq x \leq P \quad \text{condic. de frontera der.} \end{cases}$$

5)' forma B

Dicha construcción de la función de Green está definida en [1], se bosquejará la obtención 5)' (forma B) al problema que se está tratando, de acuerdo a [1].

Construcción:



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE NUESTROS  
DÍAS HACE SU GRANDEZA

6)'  $C_1(t)$  es una función que depende de  $t$ , y se calcula mediante la expresión:

$$C_1(t) = \frac{y_2(t)}{w(t)P(t)}$$

7)'  $C_2(t)$  es una función que depende de  $t$ , y se calcula mediante la expresión:

$$C_2(t) = \frac{y_1(t)}{w(t)P(t)}$$

8)'  $y_1(x)$  ,  $y_2(x)$  son las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden homogénea, donde  $y_1(x)$  es la solución de la condición de frontera izquierda,  $y_2(x)$  es la solución de la condición de frontera a la derecha, entonces  $y_1(t)$  ,  $y_2(t)$  son las soluciones evaluadas en  $x=t$  dado que  $y_1(x)$  ,  $y_2(x)$  son soluciones linealmente independientes, sucede que:

$$y_1(0) \neq y_2(0) \quad \text{y} \quad y_1(P) \neq y_2(P).$$

9)' Dado a que  $y_1(x)$  ,  $y_2(x)$  son linealmente independientes, entonces su wronskiano está definido por:

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces  $w(t)$  es el wronskiano evaluado  $x=t$ .

10)'  $P(t)$  es la función factor de la mayor derivada evaluada  $x=t$ . De acuerdo a lo anterior, la función de Green a tra

bajar queda definida por:

$$5)' \quad G(x,t) = \begin{cases} \frac{y_2(t) y_1(x)}{w(t) P(t)} & \text{si } 0 \leq x \leq t & \text{condición de} \\ & & \text{front. izq.} \\ \frac{y_1(t) y_2(x)}{w(t) P(t)} & \text{si } t \leq x \leq P & \text{condición de} \\ & & \text{front. derecha} \end{cases}$$

Nota: véase con mayor detalle en [1] .

- Problema a resolver utilizando la forma B)-

Dada la ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden:

- 1)'  $\ddot{y} = f(x,y)$  , con condiciones de frontera
- 2)'  $y_1(0) = 0$  ,  $y_2(P) = 0$   $x \in T = [0, P]$  ,
- 3)'  $f(x,y)$  está definida y continua en  $U^*$

- Construcción de la función de Green:

Considerando la ecuación 1)' como homogénea, es decir,  
 $f(x,y) = 0$  , entonces 1)' se transforma en 1)'':

$$1)'' \quad \ddot{y} = 0$$

donde las soluciones de la ecuación 1)'', que satisfacen las condiciones de frontera, son:

- 6)'  $y_1(x) = x$  verifica la condición de frontera izquierda, es decir,  $y_1(0) = 0$
- 7)'  $y_2(x) = x - P$  verifica la condición de frontera derecha, es decir,  $y_2(P) = 0$



$$8)' \quad y_1(t) = t$$

$$9)' \quad y_2(t) = t - P$$

$$10)' \quad P(t) = 1$$

$$11)' \quad w(x) = \begin{vmatrix} x & x-P \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - (x-P) = P \neq 0 \implies w(t) = P$$

$$12)' \quad C_1(t) = \frac{y_2(t)}{P(t)w(t)} = \frac{t-P}{(1)(P)} = \frac{t-P}{P}$$

$$13)' \quad C_2(t) = \frac{y_1(t)}{P(t)w(t)} = \frac{t}{(1)(P)} = \frac{t}{P}$$

Reemplazando las ecuaciones 6)', 7)', 12)', 13)' en 5)', obtenemos que la función de Green queda definida por:

$$5)' \quad G(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{P}(t-P) & 0 \leq x \leq t \quad \text{cond. de front. izq.} \\ \frac{t}{P}(x-P) & t \leq x \leq P \quad \text{cond. de front. der.} \end{cases}$$

Se puede observar que la función de Green es la misma. Todas las soluciones  $y(x)$  de la ecuación 4) en el intervalo  $T = [0, P]$ , son también soluciones del problema de condiciones a la frontera, en el intervalo  $T = [0, P]$ , es decir, se satisface la ecuación 1), y verifica la ecuación 2).

--Problema de condiciones a la frontera--

Dada una ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden 1), con condición 2), y donde  $f(x,y)$  satisface la

condición 3), y dada la pareja de puntos  $(0,0), (P,0) \in U^*$ , es decir  $0, P \in T = [0, P]$ ,  $0 \in U$ , probaremos que existe en el intervalo  $T = [0, P]$ , al menos una solución  $y(x)$  definida en el intervalo  $T = [0, P]$ , y con valores en  $U$ , que satisface la ecuación 1) y verifica la ecuación 2).

**PRUEBA:**

Sean  $P, r$  valores positivos, que definen al rectángulo cerrado y acotado:

$$B(P, r) = \{ (x, y) : x \in [0, P] = T \mid |y - 0| \leq r \} \subset U^*$$



**BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

SABER DE MIS HIJOS  
ES LA MI GRANDEZA

los puntos:

$(0,0), (P,0) \in B(P,r)$ , por la continuidad de la función  $f(x,y)$  existe un valor  $M > 0$  tal que  $M \leq \frac{8r}{P^2}$  tal que:

$$|f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in B(P,r).$$

Sea  $\mathcal{E} \left[ [0, P], \mathbb{R}^n \right]$  el espacio completo de todas las funciones vectoriales continuas  $\varphi$ , definidas del intervalo cerrado y acotado  $T = [0, P]$  sobre el espacio  $\mathbb{R}^n$ .

Si en el conjunto  $B(P,r)$  definimos por:

$\mathcal{E} \left[ [0, P], |y| \leq r \right]$  el subespacio completo de funciones vectoriales continuas  $\varphi$ , definidas en el intervalo cerrado y acotado  $T = [0, P]$  sobre  $|y| \leq r$ , donde se satisface que para alguna función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{E} \left[ [0, P], |y| \leq r \right]$ ,  $\varphi(0) = 0, \varphi(P) = 0$  y para toda función  $\varphi$  se tiene:

$$|\varphi(x) - 0| \leq r, \quad x \in T = [0, P].$$

Por la forma en que está definido el conjunto  $B(P,r)$ , es un conjunto cerrado, acotado y convexo, se define para cada función vectorial continua  $\varphi \in \mathcal{E}([0,P], |y| \leq r)$  la transformación  $\bar{T}\varphi$  por la relación:

$$14) \quad \bar{T}\varphi(x) = \int_0^P G(x,t) f(t, \varphi(t)) dt \quad x \in T = [0,P]$$

De tal manera que el problema de existencia de un punto fijo de la transformación  $\bar{T}\varphi$ , ecuación 14) es equivalente al problema de condición de frontera, ecuación 4), es decir, si en el espacio de funciones vectoriales continuas  $\mathcal{E}([0,P], |y| \leq r)$ , existe una función vectorial continua  $\varphi$ , tal que satisfaga  $\bar{T}\varphi = \varphi$  para  $t \in T = [0,P]$  entonces decimos que existe una solución  $y(x)$  de la ecuación 4) en el intervalo  $T = [0,P]$ .

Probaremos la existencia de un punto fijo de la transformación  $\bar{T}$  sobre el  $\mathcal{E}([0,P], |y| \leq r)$  aplicando el teorema de punto fijo de Schauder:

Condiciones a probar:

- 1).  $\bar{T}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$
- 2).  $\bar{T}(\mathcal{E})$  es relativamente compacto.

i). Si  $S, x \in T$ , tal que  $0 \leq x \leq S \leq t$  y usando la condición de frontera izquierda de la función de Green se tiene que:

$$a). |G(x,t) - G(s,t)| = \left| \frac{x}{p}(t-p) - \frac{s}{p}(t-p) \right| = \frac{(t-p)}{p} \cdot (x-s) = \frac{p-t}{p} |x-s|$$

ii). Si  $S, x \in T$ , tal que  $t \leq S \leq x \leq P$ , y usando la condición de frontera derecha de la función de Green se tiene que:

$$b). |G(x,t) - G(s,t)| = \left| \frac{t}{p}(x-p) - \frac{t}{p}(s-p) \right| = \left| \frac{t}{p}[x-p-s+p] \right| = \left| \frac{t}{p}(x-s) \right| = \frac{t}{p} |x-s|$$

iii). Probar que:

$$c). \left| \int_0^P G(x,t) dt \right| \leq \frac{P^2}{8}$$

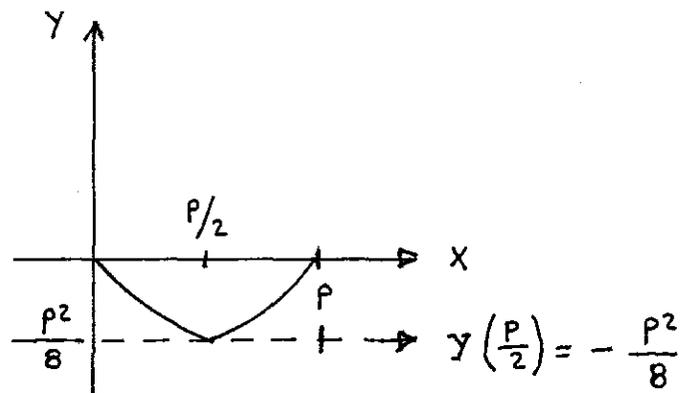
$$y(x) = \int_0^P G(x,t) dt = \int_0^x G(x,t) dt + \int_x^P G(x,t) dt = \int_0^x \frac{(x-p)}{p} dt + \int_x^P \frac{x}{p}(t-p) dt =$$

$$= \frac{x-p}{p} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + \frac{x}{p} \left( \frac{t^2}{2} - tp \right) \Big|_x^P = \frac{x^2(x-p)}{2p} + \frac{x}{p} \left[ -\frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2} + xp \right]$$

$$= \frac{x^3}{2p} - \frac{px^2}{2p} - \frac{px}{2} - \frac{x^3}{2p} + x^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{px}{2} = \frac{x}{2}(x-p)$$

Por lo tanto:  $y(x) = \frac{x^2 - px}{2}$

Si graficamos la función  $Y(x)$  en el intervalo  $[0, P]$ , donde su mínimo relativo se obtiene en el punto crítico  $x = \frac{P}{2}$ .



Por lo tanto si  $x \in [0, P]$   $|y(x)| \leq \frac{P^2}{8}$ , es decir,

$$c). \quad \left| \int_0^P G(x,t) dt \right| \leq \frac{P^2}{8}$$

PRUEBA:

$$1). \quad \bar{T}: \bar{E} \longrightarrow \bar{E}$$

Sea  $\varphi \in \bar{E}$ , donde  $\bar{T}\varphi(0)=0$ ,  $\bar{T}\varphi(P)=0$ ,  $x \in T$ , usando c):

Calculemos:

$$\begin{aligned} |\bar{T}\varphi(x)| &= \left| \int_0^P G(x,t) f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq |f(t, \varphi(t))| \left| \int_0^P G(x,t) dt \right| \leq \\ &\leq M \left| \int_0^P G(x,t) dt \right| \leq M \frac{P^2}{8} \leq \frac{P^2}{8} \cdot \frac{8}{P^2} r = r \end{aligned}$$

Por lo tanto:  $|\bar{T}\varphi(x)| \leq r$

Entonces:

$|\bar{T}\varphi(x)| \leq r$  lo que indica es que  $\bar{T}(\bar{E}) \subset \bar{E}$ , es decir,

$\bar{T}\varphi \in \bar{E}$  donde se observa que  $\bar{T}$  transforma funciones vectoriales continuas en funciones vectoriales continuas,  $\varphi$ ,  $\bar{T}\varphi \in B(P, r)$ , por lo tanto  $\bar{T}: \bar{E} \rightarrow \bar{E}$ .

2).  $\bar{T}(\bar{E})$  es relativamente compacto

Sea  $\varphi \in \bar{E}$ ,  $x \in [0, P] = T$

calculemos:

$$\begin{aligned} \left| \bar{T}\varphi(x) - \bar{T}\varphi(s) \right| &= \left| \int_0^P G(x, t) f(t, \varphi(t)) dt - \int_0^P G(s, t) f(t, \varphi(t)) dt \right| = \\ &= \left| \int_0^P [G(x, t) - G(s, t)] [f(t, \varphi(t))] dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^P |G(x, t) - G(s, t)| |f(t, \varphi(t))| dt \leq \\ &\leq M \int_0^P |G(x, t) - G(s, t)| dt \leq M |x - s| \frac{P}{2} \end{aligned}$$

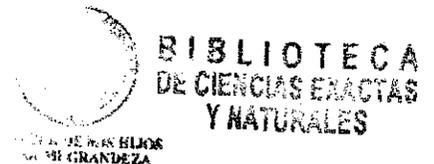
Entonces:

$$\left| \bar{T}\varphi(x) - \bar{T}\varphi(s) \right| \leq \frac{MP}{2} |x - s|, \text{ donde } s, x \in T = [0, P], \text{ se}$$

llega al mismo resultado si en 2) usamos i) ó ii).

Lo que indica es que  $\bar{T}(\bar{E})$  es una familia equicontinua en el  $\bar{E}[[0, P], |y| \leq r]$  y por el teorema de Ascoli [8],  $\bar{T}(\bar{E})$  es relativamente compacto. Por lo tanto:  $\bar{T}(\bar{E})$  es relativamente compacto.

Dado a que  $\bar{T}$  satisface las condiciones de exis-



tencia de un punto fijo del teorema Schauder, entonces existe una función vectorial continua  $\varphi \in \bar{E}[[0, P], |\gamma| \leq r]$  que satisface la relación  $\bar{T}\varphi = \varphi$  en el intervalo  $T = [0, P]$ ; esto implica que el problema de condición de frontera 4) posee una solución  $y(x)$  en el intervalo  $T = [0, P]$ .

Nota:

Es esencial la dimensión finita del espacio, para establecer que  $\bar{T}(\bar{E})$  es relativamente compacto.

La continuidad de  $f(x, y)$  no garantiza la existencia de soluciones en espacios infinitos, etc.

véase [3] .

Ejemplos:

- 1.- Resolución del problema en cuestión, considerando 3)  $f(x, y) = x$ , la cual es una función continua y definida en  $U^*$ . Ahora, puesto que la solución particular al problema, está determinada por la ecuación 4).

$$4) \quad y(x) = \int_0^P G(x, t) f(t, y(t)) dt \quad x \in [0, P]$$

Donde  $G(x, t)$  es la función de Green propuesta en 5), la cual está definida por:

$$5). \quad G(x, t) = \begin{cases} \frac{x}{P}(t-P) & \text{si } 0 \leq x \leq t \quad \text{cond. de frontera} \\ & \text{izquierda} \\ \frac{t}{P}(x-P) & \text{si } t \leq x \leq P \quad \text{cond. de frontera} \\ & \text{derecha} \end{cases}$$

Desarrollando 4):



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

$$4). \quad y(x) = \int_0^x G(x,t) f(t, y(t)) dt + \int_x^P G(x,t) f(t, y(t)) dt$$

Substitución de 3) en 4):

$$4). \quad y(x) = \int_0^x G(x,t) \cdot t dt + \int_x^P G(x,t) \cdot t dt$$

Aplicando la ecuación 5) en 4):

$$\begin{aligned} 4). \quad y(x) &= \int_0^x \frac{t}{P} (x-p) t dt + \int_x^P \frac{x}{P} (t-p) t dt \\ &= \frac{x-p}{P} \int_0^x t^2 dt + \frac{x}{P} \int_x^P (t^2 - pt) dt \\ &= \frac{x-p}{P} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^x + \frac{x}{P} \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{pt^2}{2} \Big|_x^P \right] \\ &= \frac{x-p}{P} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x}{P} \left[ \frac{P^3}{3} - \frac{P^3}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 p}{2} \right] \\ &= \frac{x^4}{3P} - \frac{x^3}{3} - \frac{x p^2}{6} - \frac{x^4}{3P} + \frac{x^3}{2} \\ &= \frac{x^3}{6} - \frac{x p^2}{6} = \frac{x}{6} (x^2 - p^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$4). \quad y(x) = \frac{x}{6} (x^2 - p^2)$$

Verificación de 1), 2) en  $[0, P]$ , evaluando 4) en  $x=0, P$

$$4) \quad y(0) = \frac{0}{6} (0 - P^2) = 0$$

$$4) \quad y(P) = \frac{P}{6} (P^2 - P^2) = 0 \quad , \quad \text{se cumple 2)}$$

Derivando dos veces 4):

$$y(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{xP^2}{6}$$

$$y'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{P^2}{6}$$

$$y''(x) = x \quad , \quad \text{se cumple 1)}.$$

Ejemplo 2:

Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden:

$$1). \quad \ddot{y}(x) = -y + x \quad , \quad \text{con condiciones de frontera}$$

$$2). \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \quad x \in [0, 1]$$

3). Sea  $f(x, y) = x - y$  la cual es una función continua.

Encontrar su función de Green, así como la solución particular que satisfaga a 1) y verifique a 2) en el intervalo  $[0, 1]$ , usando la forma B).

Desarrollando 1):

$$1) \quad \ddot{y} + y = x \quad , \quad \text{donde la ecuación homogénea de 1) es}$$

$$1)' \quad \ddot{y} + y = 0 \quad , \quad \text{entonces las soluciones de frontera de 1)' son:}$$

$$a) \quad y_1(x) = \text{Sen } x \quad \text{para } x=0 \quad \text{condición de frontera izq.}$$

$$b) \quad y_2(x) = \text{Sen } (x-1) \quad \text{para } x=1 \quad \text{cond. de frontera derecha}$$

Por la forma en que están definidos  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  se puede verificar que son soluciones linealmente independientes de 1)', y donde su wronskiano es el siguiente:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \text{Sen } x & \text{Sen } (x-1) \\ \text{Cos } x & \text{Cos } (x-1) \end{vmatrix} = \text{Sen } x \text{ Cos } (x-1) - \text{Cos } x \text{ Sen } (x-1) = \\ = \text{Sen } (1) \neq 0$$

c)  $w(t) = \text{Sen } 1$

d)  $p(t) = 1$

e)  $y_1(t) = \text{Sen } t$

f)  $y_2(t) = \text{Sen } (t-1)$

g)  $C_1(t) = \frac{\text{Sen } (t-1)}{\text{Sen } (1)}$

h)  $C_2(t) = \frac{\text{Sen } t}{\text{Sen } (1)}$

Puesto que la función de Green está definida por:

$$5)' \quad G(x, t) = \begin{cases} C_1(t) y_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq t \quad \text{cond. de front.} \\ & \text{izquierda} \\ C_2(t) y_2(x) & \text{si } x \leq t \leq 1 \quad \text{cond. de front.} \\ & \text{derecha} \end{cases}$$

Llevando a), b), g), h) a 5)' se tiene que:

$$5)' \quad G(x, t) = \begin{cases} \frac{\text{Sen } (t-1)}{\text{Sen } (1)} \text{Sen } x & \text{si } 0 \leq x \leq t \quad \text{cond. de front.} \\ & \text{izquierda} \\ \frac{\text{Sen } t}{\text{Sen } (1)} \text{Sen } (x-1) & \text{si } t \leq x \leq 1 \quad \text{cond. front.} \\ & \text{derecha} \end{cases}$$

Utilizando la función de Green, 5)' en la ecuación 4) se tiene que:

$$4). \quad y(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t,y(t)) dt \quad x \in [0,1]$$

$$\begin{aligned}
 4). \quad y(x) &= \int_0^x G(x,t) t dt + \int_x^1 G(x,t) t dt \\
 &= \int_0^x \frac{\text{Sen } x-1}{\text{Sen } (1)} \cdot t \text{ Sen } t dt + \int_x^1 \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen } (1)} + \text{Sen } (t-1) dt \\
 &= \frac{\text{Sen } (x-1)}{\text{Sen } (1)} \int_0^x t \text{ Sen } t dt + \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen } (1)} \int_x^1 t \text{ Sen } (t-1) dt \\
 &= \frac{\text{Sen } (x-1)}{\text{Sen } (1)} \left[ \text{Sen } t - t \text{ Cos } t \Big|_0^x \right] + \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen } (1)} \left[ \text{Sen } (t-1) - t \text{ Cos } (t-1) \Big|_x^1 \right] \\
 &= \frac{\text{Sen } (x-1)}{\text{Sen } (1)} \left[ \text{Sen } x - x \text{ Cos } x \right] + \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen } (1)} \left[ -1 - \text{Sen } (x-1) + x \text{ Cos } (x-1) \right] \\
 &= \frac{\text{Sen } (x-1) \text{ Sen } x - x \text{ Sen } (x-1) \text{ Cos } x - \text{Sen } x - \text{Sen } x \text{ Sen } (x-1) + x \text{ Sen } x \text{ Cos } (x-1)}{\text{Sen } (1)} \\
 &= \frac{-x \text{ Sen } (x-1) \text{ Cos } x - \text{Sen } x + x \text{ Sen } x \text{ Cos } (x-1)}{\text{Sen } (1)} \\
 &= \frac{x \left[ \text{Sen } x \text{ Cos } (x-1) - \text{Sen } (x-1) \text{ Cos } x \right] - \text{Sen } x}{\text{Sen } (1)} \\
 &= \frac{x \text{ Sen } (1) - \text{Sen } x}{\text{Sen } (1)}, \text{ por lo tanto:}
 \end{aligned}$$

$$4). \quad y(x) = x - \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen } (1)}$$

Verificación de 1), 2) en  $0,1$  , evaluando 4) en  $x=0,1$

$$4) \left. \begin{aligned} y(0) &= 0 - \frac{\text{Sen}(0)}{\text{Sen}(1)} = 0 \\ y(1) &= 1 - \frac{\text{Sen}(1)}{\text{Sen}(1)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ entonces se cumple 2)}$$

Derivando dos veces 4):

$$y(x) = x - \frac{\text{Sen}(x)}{\text{Sen}(1)}$$

$$\dot{y}(x) = 1 - \frac{\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(1)}$$

$$\ddot{y}(x) = \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}$$

Sumando  $\ddot{y} + y = x - \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)} + \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)} = x$

por lo tanto se verifica 1), es decir:

$$\ddot{y} + y = x$$

garantiza la existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria.



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

SABER DE MIS HIJOS  
PARA MI GRANDEZA

CONCLUSION DE LA PARTE B.

El Teorema de Punto Fijo de Schauder aplicado a la--  
demostración de existencia de solución de una ecuación di-  
ferencial ordinaria con condición inicial ó condición de-  
frontera, solamente nos garantiza la existencia de solu-  
ción, más no la unicidad, debido a que la función  $f$  se con-  
diciona únicamente a que sea una función continua y defi-  
nida en  $U^*$ .

Se tiene que en el problema de condición de frontera es  
ventajosa la construcción de la función de Green debido a  
que a que se facilita en ocasiones la obtención de la fun-  
ción solución que a la ecuación diferencial ordinaria de-  
2do. orden y verifique las condiciones de frontera en un-  
intervalo dado.

Se puede observar que existe una diferencia entre el  
teorema de punto fijo de contracción de Banach y el teore-  
ma de punto fijo de Schauder, debido a que el primero ga-  
rantiza la existencia y unicidad de solución y el segundo  
garantiza la existencia de solución de una ecuación dife-  
rencial ordinaria.

PARTE C.

Se empezará por demostrar un Teorema de Existencia-- de Soluciones Periódicas de las ecuaciones diferenciales-- ordinarias en un intervalo dado, donde la función  $f$  está-- sujeta a ciertas condiciones específicas. Además se rela-- ciona el teorema de existencia de soluciones periódicas-- de una ecuación diferencial ordinaria con la existencia-- de solución de un problema de condición de frontera de -- una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo dado.

Por último, utilizando el teorema de existencia de -- soluciones periódicas se demuestra que éste es equivalen-- te a la hipótesis de equivalencia asintótica de una ecua-- ción diferencial ordinaria que posee una solución  $y(t)$ , la cual es  $p$ -periódica ó  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  existe.

UN CRITERIO DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA.

Sea  $UCR^n$  un conjunto abierto y conexo,  $T$  un intervalo real, es decir  $T = [a, +\infty)$ , sea  $U^*$  un conjunto abierto y conexo definido por  $U^* = T \times U \subset R^{n+1}$ .

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria por:

1).-  $\dot{x} = f(t, x) \quad t \in I \subset J$

donde  $f(t, x)$  satisface las siguientes condiciones:

- 2).  $\left\{ \begin{array}{l} \text{i).- } f(t, x) \text{ es una función continua y está definida en } U^*. \\ \text{ii).- } f(t, x) \text{ es una función } p\text{-periódica, es decir, existe un valor } P > 0 \text{ tal que:} \\ f(t, x) = f(t+p, x) \quad \forall (t, x) \in U^*. \end{array} \right.$

4. TEOREMA DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS.

Dada una ecuación diferencial 1), donde  $f(t, x)$  satisface 2), entonces existe una función continua  $y(t)$  solución de 1) en  $I \subset T$ , la cual es  $p$ -periódica si y sólo si existe una función solución  $x(t)$  que satisface las siguientes condiciones:

- i).-  $\overline{x(I)}$  es compacta y está contenido en  $U$ .  
 ii).- Existe una sucesión  $(n_k)_k$  de enteros positivos tendiendo a  $+\infty$ , tal que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x(a + (n_k + 1)P) - x(a + n_k P)| = 0$$

PRUEBA:

La ecuación 1) la podemos transformar en la siguiente ecuación integral equivalente:

3).-  $x(t) = x(a) + \int_a^t f(s, x(s)) ds \quad t \in I \subset T,$

donde todas las soluciones de la ecuación 3) en un intervalo  $I \subset T$  son también soluciones de la ecuación 1) en el intervalo  $I \subset T$ .

Sean  $P, R$  valores positivos donde  $PM \leq R$  que definen un rectángulo:

$$B(P, R) = \{(t, x) : t \in [a, a+P] \subset \mathbb{T}, x \in \{x(t) - x(a) \mid |x(t) - x(a)| \leq R\} = ACU\} \subset U^*$$

por la continuidad de la función  $f$ , se tiene que existe un valor  $M > 0$ , tal que  $|f(t, x)| \leq M \forall (t, x) \in B(P, R)$ .

- Necesidad:

Si  $x(t)$  es una solución  $p$ -periódica en el intervalo  $I = [a, a+P] \subset \mathbb{T}$ , es decir,  $x(I) = x([a, a+P])$ , donde  
3).  $x(t) = x(a) + \int_a^t f(s, x(s)) ds \quad t \in I$ , por la forma en que está definido  $x(I)$ , se tiene que  $\overline{x(I)} = x(I)$ , ahora, puesto que  $x(I)$  es la imagen de un conjunto compacto  $I = [a, a+P]$ , donde  $x(I) \subset B(P, R)$ , entonces  $x(I)$  es un conjunto compacto.

- Probemos que  $x(I) \subset U$ :

Sean  $t, a \in I$ , usando 3), calculemos:

$$|x(t) - x(a)| = \left| \int_a^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \left| \int_a^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M \left| \int_a^t ds \right| \leq M |t - a| \leq MP \leq R$$

lo que implica es que:

$x(t) \in U \quad \forall t \in I$ , es decir,  $x(I) \subseteq U$ , por lo tanto se cumple i).

Si  $x(t)$  es una solución  $p$ -periódica de la ecuación 1) en el intervalo  $I$ , entonces tenemos que:

$$x(a + (n_k + 1)P) = x(a + n_k P), \quad \text{lo que implica es que:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(a + (n_k + 1)P) - x(a + n_k P)| = 0, \text{ por lo tanto se cumple ii).}$$

- Suficiencia:

Tenemos que para  $K \in \mathbb{Z}^+$ , definimos una transformación de funciones continuas  $X_K: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde:

$$4). \quad X_K(t) = x(t + n_K P) \quad \forall n_K \geq 1$$

Siendo  $X_K$  una sucesión de funciones continuas.

Dado que  $f$  es una función  $p$ -periódica, se tiene que:  $X_K(t)$  es una solución de la ecuación 1), es decir:

$$5). \quad X_K(t) = X_K(a) + \int_a^t f(s, X_K(s)) ds \quad t \in I$$

Donde cada una de las funciones  $X_K$  toman sus valores en el conjunto compacto  $\overline{X(I)}$ , entonces se satisface que existe un valor  $M > 0$ , tal que:

$$|f(t, X_K(t))| \leq M \quad \forall (t, X_K(t)) \in B(p, R)$$

La sucesión de funciones  $X_K$  es equicontinua por que: Seant  $t_1, t \in I$ , calculemos:

$$\begin{aligned} |X_K(t) - X_K(t_1)| &= \left| X_K(a) + \int_a^t f(s, X_K(s)) ds - X_K(a) - \int_a^{t_1} f(s, X_K(s)) ds \right| = \\ &= \left| \int_a^t f(s, X_K(s)) ds - \int_a^{t_1} f(s, X_K(s)) ds \right| = \left| \int_a^t f(s, X_K(s)) ds + \int_{t_1}^a f(s, X_K(s)) ds \right| = \\ &= \left| \int_{t_1}^t f(s, X_K(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_1}^t |f(s, X_K(s))| ds \right| \leq M \left| \int_{t_1}^t ds \right| \leq M |t - t_1| \leq M P \leq R \end{aligned}$$

Ahora, puesto que  $X_K(t)$  toma sus valores en el conjunto compacto  $\overline{X(I)}$ , aplicando el teorema de Ascoli, llegamos a que existe una subsucesión de funciones continuas  $(X_{K_i})$ ; de  $(X_K)$ , que converge uniformemente sobre  $I$ , a una función continua y, es decir:

$$6). \lim_{k_i \rightarrow +\infty} X_{k_i} = y$$

Aplicando el teorema de convergencia de Lebosgue a

5), se tiene que:

$$7). y(t) = y(a) + \int_a^t f(s, y(s)) ds \quad t \in I$$

Calculemos:

$$8). |y(a+p) - y(a)| = |y(a+p) - X_{k_i}(a+p) + X_{k_i}(a+p) - X_{k_i}(a) + X_{k_i}(a) - y(a)| \leq \\ \leq |y(a+p) - X_{k_i}(a+p)| + |X_{k_i}(a+p) - X_{k_i}(a)| + |X_{k_i}(a) - y(a)|$$

Aplicando:

$$\lim_{k_i \rightarrow +\infty} \quad a \quad 8).$$



BIBLIOTECA

$$8) \lim_{k_i \rightarrow \infty} |y(a+p) - y(a)| \leq \lim_{k_i \rightarrow \infty} |y(a+p) - x_{k_i}(a+p)| + \\ + \lim_{k_i \rightarrow \infty} |x_{k_i}(a+p) - x_{k_i}(a)| + \lim_{k_i \rightarrow \infty} |x_{k_i}(a) - y(a)|$$

Por la continuidad de la función  $y$  se tiene que:

$$8) |y(a+p) - y(a)| \leq \lim_{k_i \rightarrow \infty} |x_{k_i}(a+p) - x_{k_i}(a)|$$

ya que en el 1º y 3º términos tienden a cero, debido a que:

$$6) \lim_{k_i \rightarrow \infty} x_{k_i} = y$$

Calculemos:

$$9) \lim_{k_i \rightarrow \infty} |x_{k_i}(a+p) - x_{k_i}(a)| = ?$$

Usando 4) tenemos que:

$$10) x_{k_i}(a+p) = x(a+p + n_{k_i}P)$$

$$11) x_{k_i}(a) = x(a + n_{k_i}P)$$

Calculando la diferencia de 10) y 11) tenemos:

$$12) x_{k_i}(a+p) - x_{k_i}(a) = x(a+p + n_{k_i}P) - x(a + n_{k_i}P)$$

Entonces aplicando  $\lim_{k_i \rightarrow \infty}$  a la expresión de 12)

tenemos que:

$$12) \lim_{k_i \rightarrow \infty} |x_{k_i}(a+p) - x_{k_i}(a)| = \lim_{k_i \rightarrow \infty} |x(a+p + n_{k_i}P) - x(a + n_{k_i}P)| = 0$$

Esto es por ii), entonces:

$$9) \lim_{k_i \rightarrow \infty} |x_{k_i}(a+p) - x_{k_i}(a)| = 0, \text{ lo que indica es que:}$$

$$8) |y(a+p) - y(a)| \leq 0 \text{ entonces } y(a+p) = y(a),$$

Por lo tanto, la función  $y$  es una función  $p$ -periódica sobre el intervalo  $I \subset \mathbb{T}$ , y es una solución de la ecuación 1), en el intervalo  $I \subset \mathbb{T}$ , la cual la podemos definir también como una función:  $z: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde:

$$z(t) = y(t - n_k P), \quad n_k = \max\{n \in \mathbb{N} : a + nP \leq t\}.$$

EJEMPLO:

Si reemplazamos en la ecuación diferencial ordinaria 1), la función  $f(t,x)$ , por  $f(t,x)=2\sqrt{x+3}$

1) se transforma en:

$$1)' \quad \dot{x}=2\sqrt{x-3} \quad t \in [4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}] = I \subset T$$

por la forma en que está definida la función  $f(t,x)$ , ésta satisface 2), entonces por el teorema anterior 1)' po ~~see~~ se ~~es~~ una solución  $p$ -periódica en el intervalo  $I = [4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}] \subset T$ , de periodo  $p=2\sqrt{3}$

Se tiene que la solución  $x(t)$  de la ecuación 1)' en el intervalo:  $I = [4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}] \subset T$ , está determinada por la siguiente expresión:

$$3). \quad x(t)=(t-4)^2 - 3 \quad t \in I \subset T$$

2) La cual es  $p$ -periódica en el intervalo  $I$ , siendo  $p=2\sqrt{3}$ , evaluando 3) en  $t=4-\sqrt{3}$ ,  $t=4+\sqrt{3}$  se tiene que:

$$4) \quad x(4-\sqrt{3})=0$$

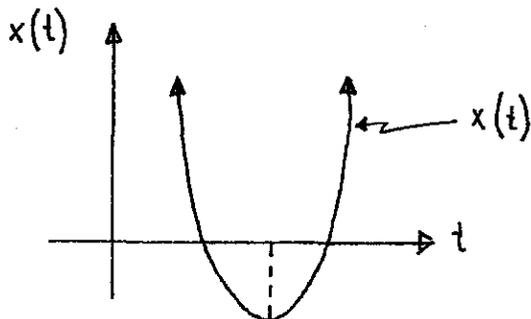
$$4) \quad x(4+\sqrt{3})=0$$

Derivando la ecuación 3) se tiene que:

$$\frac{dx}{dt}=2(t-4)=2\sqrt{x+3}$$

$$1)' \quad \dot{x}=2\sqrt{x+3} \quad t \in I \subset T$$

Graficando la ecuación 3):



Se pueden deducir las condiciones del Teorema de existencia de soluciones periódicas de la ecuación 1)'

PRUEBA:

La ecuación I) se puede transformar a la siguiente ecuación integral equivalente:

$$5).- \quad x(t) = x(a) + \int_a^t f(s, x(s)) ds \quad t \in [a, a+P] = I C T$$

donde todas las soluciones de la ecuación 5) en un intervalo I C T, son también soluciones de la ecuación I) - en el intervalo I C T.

Sean P, R valores positivos que definen un rectángulo cerrado y conexo, donde  $PM \leq R$  :

$$B(P, R) = \left\{ (t, x) : t \in [a, a+P] = I C T, x(t) \in [x(t) - x(a)] \leq R = ACU \right\} \subset U^*$$

Por la continuidad de la función  $f(t, x)$  se tiene -- que existe una constante positiva  $M > 0$  tal que:

$$|f(t, x)| \leq M \quad \forall (t, x) \in B(P, R) .$$

Sea  $y(t)$  una solución de la ecuación diferencial -- ordinaria:

$$4).- \quad \dot{y}(t) = g(t, y) \quad t \in I C T$$

donde  $y(t)$  es una solución con las siguientes características:

a).  $y(t)$  es una solución p-periódica de 4) en el -- intervalo I, ó :

$$b). \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \text{ existe en } R^n$$

Ahora, por definición de equivalencia asintótica se -- tiene que existe una solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial ordinaria:

$$1).- \quad \dot{x} = f(t, x) \quad t \in I C T \quad , \text{ tal que :}$$

$$3).- \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - y(t)| = 0$$

4. I. APLICACION DEL TEOREMA DE EXISTENCIA A LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado y conexo, y  $T$  un intervalo real, es decir:

$T = [a, +\infty) \subset \mathbb{R}$ , sea  $U^*$  un conjunto abierto y conexo-  
definido en el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  donde  $U^* = T \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria por:

1).-  $\dot{x} = f(t, x) \quad t \in I \subset T$

donde  $f(t, x)$  satisface las siguientes condiciones:

- 2).-  $\left\{ \begin{array}{l} \text{i). } f(t, x) \text{ es una función continua y está defini-} \\ \text{da en } U^* . \\ \text{ii). } f(t, x) \text{ es una función } p\text{-periódica, es decir,} \\ \text{existe un valor } P > 0 \text{ tal que:} \\ f(t, x) = f(t+P, x) \quad \forall (t, x) \in U^* . \end{array} \right.$

DEFINICION DE EQUIVALENCIA ASINTOTICA.

Dadas dos ecuaciones diferenciales ordinarias, son --  
equivalentemente asintóticas si para cada solución  $x(t)$  --  
de una ecuación diferencial ordinaria existe una solución  
 $y(t)$  de la otra ecuación diferencial ordinaria, tal que:

3).-  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - y(t)| = 0$

TEOREMA DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS.

Dada una ecuación diferencial ordinaria I), donde ---  
 $f(t, x)$  satisface 2), entonces existe una función continua-  
 $x(t)$  la cual es solución de la ecuación I), en cierto in---  
tervalò  $I \subset T$ , y es  $p$ -periódica si (y sólo si) es equiva---  
lentemente asintótica a una ecuación diferencial ordina---  
ria

4).-  $\dot{y} = g(t, y) \quad t \in I \subset T$   
la cual posee una solución  $y(t)$  que es  $p$ -periódica  
ó  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  existe en  $\mathbb{R}^n$ .

Probemos que dadas las suposiciones anteriores  $x(t)$  es una solución  $p$ -periódica de la ecuación diferencial ordinaria 1) en el intervalo ICT, donde para ello se usará el teorema anterior, T. 4.

Tenemos que  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned}
 4)' \quad & |x(a+(n+1)p) - x(a+np)| = |x(a+(n+1)p) - y(a+(n+1)p) + \\
 & + y(a+(n+1)p) - y(a+np) + y(a+np) - x(a+np)| \leq \\
 & \leq |x(a+(n+1)p) - y(a+(n+1)p)| + |y(a+(n+1)p) - y(a+np)| + \\
 & + |y(a+np) - x(a+np)|.
 \end{aligned}$$

Calculando  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  a la ecuación 4)' :

$$\begin{aligned}
 4)'' \quad & \lim |x(a+(n+1)p) - x(a+np)| \leq \lim |x(a+(n+1)p) - \\
 & - y(a+(n+1)p)| + \lim |y(a+(n+1)p) - y(a+np)| + \\
 & + \lim |y(a+np) - x(a+np)|
 \end{aligned}$$

Revisando los términos que componen el miembro del lado lado derecho, y puesto que el

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$  , entonces el 1o. y tercer términos tienden a cero, es decir,

6).  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(a + (n+1)p) - y(a + (n+1)p)| = 0$

7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y(a + np) - x(a + np)| = 0$



BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS PARA MI GRANDEZA

En lo que respecta al 2o. término tenemos que:

a). Si  $y(t)$  es una solución  $p$ -periódica, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y(a + (n+1)p) - y(a + np)| = 0$$

b). Si  $y(t)$  tiene un  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  existe en  $\mathbb{R}^n$  entonces:

4) i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y(a + (n+1)p) - y(a + np)| = 0$  Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(a + (n+1)p) - x(a + np)| = 0$$

Donde se puede observar que se comprueba la parte ii) del teorema 1.

- Probemos i), usando la misma hipótesis:

Sea  $n \in \mathbb{Z}^+$  y definimos una sucesión de funciones continuas  $(U_n)_n$  en  $x(1)$  de tal manera que  $t_n \in \mathbb{Z}^+$  ,

$t_n \in I = [a, a+p]$  tal que:

8).  $x(t_n) = U_n = x(a) + \int_a^{t_n} f(s, x(s)) ds$   $t_n \in I = [a, a+p] \subset \mathbb{T}$ .

Si la sucesión  $t_n$  está acotada, por consiguiente está contenida en un conjunto compacto, entonces, la continuidad de la función  $x$  implica que existe un compacto que contiene a la sucesión  $(U_n)_n$  , lo que indica es que cualquier subsucesión de  $(U_n)_n$  es convergente.

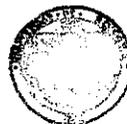
Si la sucesión  $t_n$  no está acotada, entonces por 5), implica la existencia de una subsucesión  $(t_{n_k})$ , tal que:

$$9). \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |x(t_{n_k}) - y(t_{n_k})| = 0$$

Ahora, si  $y(t)$  es una solución  $p$ -periódica, entonces  $y(I)$  es un conjunto compacto y allí existe una subsucesión convergente  $y(t_{n_k})$ , por consiguiente  $(U_{n_k})$  por 9).

Si  $y(t)$  tiene límite al infinito, entonces el  $\lim_{k \rightarrow \infty} y(t_{n_k})$  existe, y por consiguiente, por 9)., el  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_{n_k})$  existe también.

Por lo anterior tenemos que  $\mathcal{H}(U_n)_n$  en  $x(I)$  tiene una subsucesión convergente, lo cual implica que  $x(I)$  es un conjunto compacto, y por consiguiente la parte i) del teorema 1 se cumple, entonces por el teorema 1 la ecuación diferencial ordinaria  $\dot{x} = f(t, x)$   $t \in I$  posee una solución continua  $x(t)$ , la cual es  $p$ -periódica en el intervalo  $I$ .



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

-- relación de existencia de soluciones periódicas con la existencia de soluciones al problema de condición de frontera de una ecuación diferencial ordinaria.--

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y conexo,  $T$  es un intervalo real  $T = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ , sea  $U^*$  un conjunto abierto y conexo definido por  $U^* = T \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Consideramos una ecuación diferencial ordinaria

por:

- 1).  $\dot{x} = f(t, x) \quad t \in I$ , con condición de frontera
- 2).  $x(0) = x(P) = 0 \quad 0, P \in I = [0, P] \subset T$

Donde  $f(t, x)$  satisface las siguientes proposiciones:

- 3). {
  - i)  $f(t,x)$  es una función continua y definida en  $U^*$
  - ii)  $f(t,x)$  es una función  $p$ -periódica, es decir, existe un valor  $P > 0$  tal que  $f(t,x) = f(t+P,x), \forall (t,x) \in U^*$

-- Usando el teorema de existencia de soluciones periódicas.--

Dada una ecuación diferencial ordinaria 1), que esté sujeta a 2) y que satisfaga a 3), decimos que existe una función continua  $y(t)$  solución de 1) en ICT, la cual es  $p$ -periódica y satisface a 2), si y solo si existe una función solución  $x(t)$  que satisface las siguientes condiciones:

- i).  $\overline{X(I)}$  es compacto y está contenida en  $U$
- ii). Existe una sucesión  $(n_k)_k$  de enteros positivos tendiendo a  $+\infty$ , tales que:

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} |X(n_k P) - X((n_k - 1) P)| = 0, \quad n_k \geq 1$$

La ecuación 1) la podemos transformar en la siguiente ecuación integral equivalente:

$$4). \quad x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad t \in [0, P] = ICT$$

Donde todas las soluciones  $x(t)$  de la ecuación 4), en un intervalo  $I \subseteq T$ , son también soluciones de la ecuación 1) en el intervalo  $I \subseteq T$ , y satisfacen 2).

PRUEBA:

Sean  $P, R$  valores positivos donde  $P \leq R$  que definen un rectángulo:

$$B(P, R) = \left\{ (t, x) : t \in [0, P] = ICT, x \in \left\{ x(t) - x(0) \right\} \leq R = ACU \right\} \subset U^*,$$

Por la continuidad de la función  $f(t,x)$ , tenemos que existe un valor  $M > 0$ , tal que  $|f(t,x(t))| \leq M \quad \forall (t,x) \in B(p, R)$

- Necesidad:

Si  $x(t)$  es una solución  $p$ -periódica de 1) en el intervalo  $I = [0, p] \subset T$ , es decir,  $x(I) = x([0, p])$ , donde:

$$4) \quad x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I = [0, p] \subset T$$

Por la forma en que está definida  $x(I)$ , tenemos que

$x(I) = \overline{x(I)}$ , ahora dado que  $x(I)$  es la imagen de un conjunto compacto  $I = [0, p]$ ,  $x(I) \subset B(p, R)$ ,

$x(I)$  es un conjunto compacto.

Probemos que  $\overline{x(I)} \subseteq U$ :

Sea  $x(t) \in \overline{x(I)}$ ,  $t \in I$ , entonces calculemos:

$$\begin{aligned} |x(t) - x(0)| &= \left| \int_0^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \left| \int_0^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M \left| \int_0^t ds \right| = \\ &= M|t| \leq Mp \leq R \text{ lo que implica es que:} \end{aligned}$$

$x(t) \subseteq U$ ,  $\forall t \in I$ , entonces,  $\overline{x(I)} \subseteq U$  vale i).

Si  $x(t)$  es una solución  $p$ -periódica de la ecuación 1),

en  $I = [0, p]$ , entonces  $x(n_k p) = x((n_k - 1)p)$   $n_k \geq 1$

y esto implica que  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} |x(n_k p) - x((n_k - 1)p)| = 0$

Por lo tanto vale ii). Entonces si  $x(t)$  es una solución

$p$ -periódica de 1) en  $I$ , tenemos que  $x(t)$  satisface la e

cuación 2) en  $I$ , es decir,  $x(0) = x(p)$  para  $n_k = 1$

- Suficiencia:

Tenemos que para cada  $K \in \mathbb{Z}^+$ , definimos una transformación de funciones continuas  $X_K$ , tal que  $X_K: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,



$$y \quad X_k(t) = x(t + \eta_k p), \quad \eta_k \geq 1,$$

$X_k$  es una sucesión de funciones continuas que toma sus valores en el conjunto compacto  $x(I)$ , ahora, dado que  $f$  es una función  $p$ -periódica, se tiene que  $X_k$  es una solución de la ecuación 1), es decir:

$$a) \quad X_k(t) = X_k(0) + \int_0^t f(s, X_k(s)) ds \quad t \in I$$

Ahora, dado que cada una de las  $X_k$  toma sus valores en  $\overline{x(I)}$ , tenemos que existe un valor  $M > 0$  tal que:

$$|f(t, X_k(t))| \leq M \quad \forall (t, X_k) \in B(p, R)$$

Probemos que  $X_k$  es una sucesión equicontinua:

Sean  $t, t_1 \in I$ , calculemos

$$\begin{aligned} |X_k(t) - X_k(t_1)| &= \left| X_k(0) + \int_0^t f(s, X_k(s)) ds - X_k(0) - \int_0^{t_1} f(s, X_k(s)) ds \right| = \\ &= \left| \int_0^t f(s, X_k(s)) ds - \int_0^{t_1} f(s, X_k(s)) ds \right| = \left| \int_{t_1}^t f(s, X_k(s)) ds \right| \leq R \\ &= \left| \int_{t_1}^t |f(s, X_k(s))| ds \right| \leq M \left| \int_{t_1}^t ds \right| = M |t - t_1| \leq M p \end{aligned}$$

Dado que  $X_k(t)$  toma sus valores en el conjunto compacto  $\overline{x(I)}$  y es una sucesión equicontinua en  $[0, p] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , por el teorema de Ascoli tenemos que es relativamente compacto en ese espacio de Banach, dado que  $X_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Por lo anterior, tenemos que existe una subsucesión  $(X_{k_i})_i$  de  $(X_k)$  la cual converge uniformemente sobre el intervalo  $I$ , a una función continua  $y$ , donde

$y$  está formado por las restricciones de la sucesión  $X_k$  y está definida  $y: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , usando el T. 4. llegamos a que  $y$  es una solución  $p$ -periódica de 1) en el intervalo  $I$ , y que satisface 2), porque tenemos que:

$$y(p) = \lim X_{k_i} = y(0).$$



**BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES**

CENTRO DE INVESTIGACIONES  
Y ESTUDIOS

B I B L I O G R A F I A

- [1].- Makarenko, G. (1977). Ecuaciones Integrales. 2a. edición. Ed. MIR Moscú. URSS. Págs. 123-135.
- [2].- Kreider, Kuller y otros. (1971). Introducción al Análisis Lineal. Parte 2. Fondo Educativo Interamericano S.A. México. Págs. 607-623.
- [3].- Antosiewicz, H.A. (1977). Studies in Ordinary Differential Equations. Vol. 14. Ed. MAA. USA. Págs. 169-201.
- [4].- Hale, Jack. (1969). Ordinary Differential Equations. Vol. XXI. Ed. Wiley-Interscience. USA.
- [5].- Becker, Ronald., Vidossich, Giovanni. (1974). Journal of Mathematical Analysis and Applications. Núm. 48. Academic Press, Inc. Págs. 51-60.

Article:

"Some Applications of a Simple Criterion  
for the Existence of Periodic Solutions  
of Ordinary Differential Equations".

- [6].- Spiegel, Murray. (1983). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. 1a. edición. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericano. México.
- [7].- Haaser, N., Sullivan, J. (1978). Análisis Real. 1a. Edición. Ed. Trillas. México
- [8].- Kolmogorov, A. N. (1978). Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. 3a. edición. Ed. MIR. Moscú. URSS.
- [9].- Imaz, C., Vorel, Z. (1968). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. 1a. edición. Ed. LIMUSA. México.
- [10].- Iribarren, Ignacio. (1973). Topología de Espacios Métricos. 1a. edición. Ed. LIMUSA. México.
- [11].- Dugunoji, James. (1966). Topology. 1a. edición. Allyn and Bacon, Inc. USA.
- [12].- Bromberg, Shirley., Rivaud, J. José. (1976). Análisis Diferencial. 1a. edición. Fondo de Cultura Económica. México.