UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

UNA TEORIA DE LAS TEORIAS DE INTEGRACION

(Una Estructura del Concepto de Integral)

TESIS PROFESIONAL

MARCO ANTONIO VALENCIA ARVIZU

HERMOSILLO, SONORA; MEXICO 1974

UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

UNA TEORIA DE LAS TEORIAS DE INTEGRACION

(Una Estructura del Concepto de Integral)

T E S I S

que para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

p r e s e n t a

MARCO ANTONIO VALENCIA ARVIZU

HERMOSILLO, SONORA; MEXICO

1 9 7 4

A MIS PADRES

A MI ESPOSA

A todas las personas e instituciones que de alguna manera contribuyeron a que pudiera llegar a esta etapa de mi vida profesional.

UNA TEORIA DE LAS TEORIAS DE INTEGRACION

(Una Estructura del Concepto de Integral)

INDICE

INTRODUCCION

Es indudable que el Cálculo Diferencial e Integral es una de las herramientas matemáticas más poderosas con que cuenta el hombre y cuya invención (o descubrimiento), aparte de revolucionar el estudio de otras ciencias, como por ejemplo la Física, abrió las puertas al desarrollo de muchas ramas de la Matemática. El propósito del presente trabajo, aparte del de llenar un requisito para obtener mi título profesional, es el de examinar desde un cierto punto de vista uno de los conceptos fundamentales del Cálculo: el concepto de INTEGRAL.

Generalmente, en los cursos de Cálculo se estudia con detenimiento el Cálculo Diferencial, haciéndose un análisis muy ligero, si es que lo hay, del concepto de integral para luego hacer recaer todo el peso en el concepto de derivada con la ayuda del Teorema Fundamental del Cálculo. Este enfoque usual da por resultado el que se le reste importancia a la integral en los cursos que se imparten en las escuelas preparatorias y aún en las de nivel de licenciatura. El punto de vista que intentamos desarrollar en este trabajo permite destacar aquello que es estrictamente necesario para definir el concepto de integral: La notación de Leibniz nos dice que veía al Cálculo Integral como un Cálculo de Sumas; en otras palabras, Límites de Sumas.

El concepto generalizado de límite fue estudiado por McShane

[4]. Trabajando sobre espacios de Hausdorff, se tiene la unicidad; nosotros, como necesitamos sumar y tener cierto tipo de existencia, tomamos el caso particular de un espacio de Banach real (aunque la teoría valdría para un espacio de Banach sobre los complejos o, en general, sobre un campo valuado).

En la primera parte del trabajo se da la teoría general y en la segunda parte se aplica dicha teoría a las integrales más conocidas. Al hacer el estudio del concepto de límite se unifican los conceptos elementales de límite de una sucesión, límite por la derecha, límite por la izquierda y límite de una función.

Casi siempre representa un gran problema para el estudiante el paso del estudio de la integral de Riemann a la de Lebesgue, consecuencia del enfoque usual que las presenta como dos teorías distintas y, lo que es peor, dando la impresión de que son ajenas. El presente enfoque permite unificar "distintas" teorías de integración.

Es nuestro mayor deseo que este trabajo contribuya en algo a aclarar los conceptos, tanto de límite como de Integral, a quienes nos hagan el honor de leerlo. Hemos tratado de hacer la exposición de modo que sea accesible casi en su totalidad para los estudiantes interesados que cursen del cuarto semestre en adelante de la carrera de Matemáticas.

La idea del trabajo es una sugerencia de M. Loève [3], pero la exposición es original y fue lograda gracias a la paciencia del Profesor Enrique Valle Flores, quien me propuso el tema y me orientó en todo momento.

PRIMERA PARTE

I. DEFINICIONES PRELIMINARES

a) Direcciones y Cortaduras Direccionales.

Una <u>función</u> $f:X \longrightarrow S(Y)$ (familia de todos los subconjuntos de Y) se dirá <u>multivaluada</u>. Por abuso de notación, escribiremos "$f:X \longrightarrow Y$ es multivaluada".

Por oposición, una <u>función</u> $f:X \longrightarrow Y$ en el sentido ordinario se dirá <u>univaluada</u>.

Esta definición generaliza el concepto ordinario de función pues toda función univaluada $f:X \longrightarrow Y$ puede pensarse como función multivaluada si identificamos $y \in Y$ con $\{y\} \in S(Y)$.

Haremos la siguiente CONVENCION: Si $f:X \longrightarrow Y$ es una función multivaluada, por "$f(x)$ satisface la proposición p" entenderemos que cada $y \in f(x)$ satisface la proposición p.

Por una <u>relación binaria</u> R en un conjunto X entenderemos un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$.

Si $(x_1, x_2) \in R$, diremos que x_1 <u>está</u> R-<u>relacionado con</u> x_2 y escribiremos $x_1 R x_2$.

Daremos algunos ejemplos de relaciones binarias:

1. Si $\mathfrak{a}$ es una familia de conjuntos,

$$\subset = \left\{(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{a} \text{ y } A \text{ es subconjunto de } B\right\}$$

es una relación binaria en $\mathcal{G}$ que denominaremos inclusión.

2. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales,

$$\leq = \left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ y } a \text{ es menor o igual que } b\right\}$$

es una relación binaria en $\mathbb{R}$, que llamaremos no mayor que.

Dada una relación binaria R en X, la relación binaria inversa de R, denotada R^{-1}, estará dada por $x_1 R^{-1} x_2$ si y sólo si $x_2 R x_1$. Las relaciones binarias inversas de $\subset$ y $\leq$ son, respectivamente, $\supset = \left\{(A,B) \mid A,B \in \mathcal{G} \text{ y } B \text{ es subconjunto de } A\right\}$, que llamaremos contención, y $\geq = \left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ y } a \text{ es mayor o igual que } b\right\}$, que denominaremos no menor que.

Diremos que el conjunto X está ordenado parcialmente por la relación binaria R en X si se cumple que

i) $x_1 \in X$ implica $x_1 R x_1$ (reflexividad),

ii) $x_1 R x_2$ y $x_2 R x_1$ implican $x_1 = x_2$ (antisimetría) y

iii) $x_1 R x_2$ y $x_2 R x_3$ implican $x_1 R x_3$ (transitividad).

Si éste es el caso, diremos que la pareja (X,R) es un orden parcial.

Los siguientes son algunos ejemplos de orden parcial:

1. La familia de todos los subconjuntos de un conjunto dado con la inclusión.

2. El conjunto de los números reales con la relación binaria "no mayor que".

3. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con la (res-

tricción de la) relación binaria "no mayor que".

4. El conjunto de los seres humanos con la relación binaria R definida por $x_1 R x_2$ si y sólo si "x_1 es ascendiente en línea directa de x_2 o x_1 es x_2".

5. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$R = \{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_1,x_2),(x_1,x_3)\}$.

De estos ejemplos podemos obtener otros si observamos que (X,R) es un orden parcial si y sólo si (X,R^{-1}) es un orden parcial.

Un orden parcial (X,R) se dirá <u>orden lineal</u> si $x_1, x_2 \in X$ implican $x_1 R x_2$ o $x_2 R x_1$ (tricotomía). En este caso, diremos que X está <u>ordenado linealmente</u> por R.

Los ejemplos 2 y 3 de orden parcial son también ejemplos de orden lineal; los ejemplos 1, 4 y 5 no cumplen la tricotomía. (X,R) es orden lineal si y sólo si (X,R^{-1}) es orden lineal.

Un orden parcial (X,R) se dirá <u>dirección</u> si $x_1, x_2 \in X$ implican que existe $x \in X$ tal que $x_1 R x$ y $x_2 R x$. En este caso, diremos que X <u>está dirigido por</u> R.

Los ejemplos 1, 2 y 3 de orden parcial son también ejemplos de dirección; los ejemplos 4 y 5 no satisfacen la condición adicional para ser dirección. Todo orden lineal es una dirección. En la segunda parte de este trabajo se verán más ejemplos.

Dada una dirección (X,R), si $x' \in X$ es tal que xRx'

para toda $x \in X$, x' se llamará <u>último elemento de la dirección</u>. De la antisimetría se sigue que, si existe, es único. Si una dirección tiene último elemento, se dirá <u>del primer tipo</u>; en caso contrario, se dirá <u>del segundo tipo</u>.

El ejemplo 1 de orden parcial es una dirección del primer tipo; los ejemplos 2 y 3 son direcciones del segundo tipo. El intervalo $(-\infty, a]$ con la relación binaria "no mayor que" es una dirección del primer tipo.

Conviene observar que una dirección (X,R) es del segundo tipo si y sólo si para cada $x \in X$ existe $x' \in X$, $x' \neq x$, tal que xRx'.

Una dirección (X,R) se dice <u>cortadura direccional</u> si

i) $X = X_1 + X_2$ (+ indica unión de conjuntos ajenos),

ii) (X_1, R) y (X_2, R^{-1}) son direcciones (tomamos las restricciones de R y R^{-1}) y

iii) $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$ implican $x_1 R x_2$.

Los siguientes son ejemplos de cortaduras direccionales:

1. Una familia X de conjuntos contenidos o que contienen a $A \in X$ y cerrada bajo uniones e intersecciones finitas; X_1, la subfamilia de los conjuntos contenidos en A; X_2, la subfamilia de los conjuntos que contienen propiamente a A; R, la inclusión.

2. Si $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, a) + [a, \infty)$ con la relación binaria "no mayor que".

3. Si $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \{a\} = (-\infty, a) + (a, \infty)$ con la relación binaria "no mayor que".

Toda dirección (X, R) es una cortadura direccional. Para verlo, basta hacer $X = X + \phi$.

Una <u>cortadura direccional</u> $(X_1 + X_2, R)$ se dirá <u>del segundo tipo</u> si las dos direcciones (X_1, R) y (X_2, R^{-1}) son del segundo tipo. En caso contrario, se dirá que la <u>cortadura direccional</u> es <u>del primer tipo</u>.

Los ejemplos 1 y 2 de cortaduras direccionales son del primer tipo; el ejemplo 3 es del segundo tipo.

b) Espacios de Banach.

Una pareja (X, d), donde X es un conjunto y $d: X \times X \to \mathbb{R}$ es una función univaluada, se dice <u>espacio métrico</u> si d satisface:

i) $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$,

ii) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

iii) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$,

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$.

En este caso, decimos que d es una <u>métrica</u> para X.

Una <u>sucesión</u> en un espacio métrico (X, d) es una función univaluada $f: \mathbb{N} \to X$ cuya imagen está ordenada linealmente mediante $f(n) R f(m)$ si y sólo si $n \leq m$. Si $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión se denotará $\{x_n\}$. $L \in X$ se dice <u>límite</u> de la sucesión $\{x_n\}$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $d(x_n, L) < \varepsilon$. Una <u>sucesión</u> se dice <u>convergente</u> si tiene límite. La <u>sucesión</u> $\{x_n\}$ se dice <u>de Cauchy</u> si dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N$ implican que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Si una sucesión es convergente, su límite es único. Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco no siempre es cierto.

Un <u>espacio métrico</u> en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente se dice <u>completo</u>.

Un <u>espacio vectorial real</u> $V = (V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ consiste de un conjunto V de elementos $v, w, \ldots$, el campo $\mathbb{R}$ de los números reales y dos operaciones $+, \cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1) $v+w \in V$ para todo $v, w \in V$,

2) $v+w = w+v$ para todo $v, w \in V$,

3) $(v+w)+z = v+(w+z)$ para todo $v, w, z \in V$,

4) existe $0 \in V$ tal que $v+0 = v$ para todo $v \in V$,

5) para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v+(-v) = 0$,

6) $1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$,

7) $(ab)v = a(bv)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $v \in V$,

8) $(a+b)v = av+bv$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $v \in V$,

9) $a(v+w) = av+aw$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $v, w \in V$.

Un <u>espacio vectorial real</u> $V = (V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ se dice <u>normado</u> si está definida una función univaluada $\| \; \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada <u>norma</u>, que satisface:

i) $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$,

ii) $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$,

iii) $\|av\| = |a| \, \|v\|$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $v \in V$,

iv) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todo $v, w \in V$.

En un espacio vectorial real normado V, la función univaluada $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(v,w) = \|v-w\|$ es una métrica para V.

Un espacio vectorial real normado y completo respecto a la métrica dada por la norma se dice <u>espacio de Banach real</u>.

El campo de los números reales con el valor absoluto como norma es un ejemplo de espacio de Banach real.

Las definiciones anteriores y la teoría que se desarrollará en los capítulos siguientes siguen siendo válidas si se sustituye el campo de los números reales por el campo de los complejos, o en general por un campo valuado. Por lo tanto, omitiremos la palabra real aunque estaremos trabajando sobre el campo de los reales.

II. LIMITES

Definición 2.1. Sean (T,R) una dirección, $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y $f:T \longrightarrow \mathbb{B}$ una función multivaluada. Decimos que $L \in \mathbb{B}$ es límite de f en la dirección (T,R) si dado $\varepsilon > 0$ existe $t_1(\varepsilon) \in T$ tal que t_1Rt implica que $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ (recuérdese la convención). Usaremos la siguiente notación:

$$\lim_{(T,R)} f = L.$$

Teorema 2.1. Si la función multivaluada $f:T \longrightarrow \mathbb{B}$ tiene límite en la dirección (T,R), el límite es único.

Demostración. Supongamos que L_1 y L_2 son límites. Dado $\varepsilon > 0$, existen $t_1(\varepsilon)$, $t_1'(\varepsilon) \in T$ tales que t_1Rt implica que $\|f(t)-L_1\| < \varepsilon/2$ y $t_1'Rt$ implica que $\|f(t)-L_2\| < \varepsilon/2$; luego, $0 \leq \|L_1-L_2\| \leq \|f(t)-L_2\| + \|f(t)-L_1\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ si t_1Rt y $t_1'Rt$; por lo tanto, $\|L_1-L_2\| = 0$ y $L_1 = L_2$.

Para la mejor aclaración de la Definición 2.1, es conveniente hacer algunas observaciones:

a) Toda función multivaluada f definida en una dirección (T,R) del primer tipo tiene límite si y sólo si $f(t')$, donde t' es el último elemento de la dirección, consta de un solo elemento; además, $\lim\limits_{(T,R)} f = f(t')$.

b) La Definición 2.1, generaliza el concepto de límite de una sucesión en un espacio de Banach (en particular, el de una sucesión de números reales). Para verlo, basta tomar la dirección $(\mathbb{N},\leq)$ y una función univaluada $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{B}$. Se tiene que $\lim\limits_{(\mathbb{N},\leq)} f = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

c) La Definición 2.1 también generaliza el concepto de límite de una función univaluada $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{B}$ cuando la variable tiende a ∞ ó $-\infty$. Basta tomar la dirección $(\mathbb{R},\leq)$, en cuyo caso $\lim\limits_{(\mathbb{R},\leq)} f = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, o bien tomamos la dirección $(\mathbb{R},\geq)$, para la cual $\lim\limits_{(\mathbb{R},\geq)} f = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$.

d) Por último, la Definición 2.1 también generaliza los conceptos de límite por la izquierda y límite por la derecha de una función univaluada $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{B}$. Para el límite por la izquierda en un punto $a\in\mathbb{R}$, tomamos la dirección $(T_1,R) = ((-\infty,a),\leq)$, en cuyo caso $\lim\limits_{(T_1,R)} f = \lim\limits_{t\to a^-} f(t)$. Para el límite por la derecha en $a\in\mathbb{R}$, tomamos la dirección $(T_2,R) = ((a,\infty),\geq)$, y en este caso $\lim\limits_{(T_2,R)} f = \lim\limits_{t\to a^+} f(t)$.

<u>Teorema</u> 2.2. Sean (T,R) una dirección, $f,g:T\longrightarrow\mathbb{B}$ funciones multivaluadas y $a\in\mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{(T,R)} f = L_1$ y $\lim\limits_{(T,R)} g = L_2$, entonces

i) $\lim\limits_{(T,R)} (f+g) = L_1+L_2$ y

ii) $\lim\limits_{(T,R)} (cf) = cL_1$.

Demostración. Por definición, $(f+g)(t) = f(t)+g(t) = \left\{b \in \mathbb{B} \,|\, b = b_1+b_2 \text{ con } b_1 \in f(t) \text{ y } b_2 \in g(t)\right\}$, $(cf)(t) = cf(t) = \left\{b \in \mathbb{B} \,|\, b = cb_1, \text{ con } b_1 \in f(t)\right\}$.

i) Dado $\varepsilon > 0$, existen $t_1(\varepsilon), t_1'(\varepsilon) \in T$ tales que t_1Rt implica que $\|f(t)-L_1\| < \varepsilon/2$ y $t_1'Rt$ implica que $\|g(t)-L_2\| < \varepsilon/2$.

Sea $t_1''(\varepsilon) \in T$ tal que t_1Rt_1'' y $t_1'R_1''$; se tiene que $\|(f+g)(t)-(L_1+L_2)\| \leq \|f(t)-L_1\|+\|g(t)-L_2\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ si $t_1''Rt$. (La primera desigualdad se toma, dada t, para algún elemento apropiado de $f(t)$ y alguno de $g(t)$).

ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_1(\varepsilon) \in T$ tal que t_1Rt implica que $\|f(t)-L_1\| < \varepsilon/|c|$ $(c \neq 0)$; luego, $\|(cf)(t)-cL_1\| = |c| \; \|f(t)-L_1\| < |c| \; \varepsilon/|c| = \varepsilon$ si t_1Rt.

Si $c = 0$, $cf = 0$ y $\lim\limits_{(T,R)} cf = 0 = cL_1$.

Definición 2.2. Sean $(T' = T_1+T_2, R)$ una cortadura direccional, $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y $f: T' \longrightarrow \mathbb{B}$ una función multivaluada. Decimos que $L \in \mathbb{B}$ es límite de f en la cortadura direccional (T', R) si dado $\varepsilon > 0$ existen $t_1(\varepsilon) \in T_1$ y $t_2(\varepsilon) \in T_2$ tales que $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ si t_1RtRt_2 (t_1Rt y tRt_2). Usaremos la notación siguiente:

$$\lim_{(T',R)} f = L.$$

Teorema 2.3. Si la función multivaluada $f:T' \longrightarrow \mathbb{B}$ tiene límite en la cortadura direccional $(T' = T_1+T_2, R)$, el límite es único.

Demostración. Supongamos que L_1 y L_2 son límites. Dado $\varepsilon > 0$, existen $t_1(\varepsilon), t_1'(\varepsilon) \in T_1$ y $t_2(\varepsilon), t_2'(\varepsilon) \in T_2$ tales que

$$\|f(t)-L_1\| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad t_1 R t R t_2 \quad \text{y} \quad \|f(t)-L_2\| < \varepsilon/2 \text{ si } t_1' R t R t_2'.$$

Sean $t_1'' \in T_1$ y $t_2'' \in T_2$ tales que $t_1 R t_1''$, $t_1' R t_1''$, $t_2 R t_2''$ y $t_2' R t_2''$; entonces $0 \leq \|L_1-L_2\| \leq \|f(t)-L_2\| + \|L_1-f(t)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ si $t_1'' R t R t_2''$, de donde se obtiene que $\|L_1-L_2\| = 0$ y $L_1 = L_2$.

Una propiedad muy importante es la dada por el siguiente

Teorema 2.4. Sean $(T' = T_1+T_2, R)$ una cortadura direccional y $f:T' \longrightarrow \mathbb{B}$ una función multivaluada. Entonces $\lim\limits_{(T',R)} f$ existe si y sólo si $\lim\limits_{(T_1,R)} f$ y $\lim\limits_{(T_2,R^{-1})} f$ existen y además

$$\lim_{(T_1,R)} f = \lim_{(T_2,R^{-1})} f \quad (= \lim_{(T',R)} f).$$

Demostración. Sea $\lim\limits_{(T',R)} f = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $t_1(\varepsilon) \in T_1$ y $t_2(\varepsilon) \in T_2$ tales que $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ si $t_1 R t R t_2$. En particular, $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ si $t_1 R t$ y $t \in T_1$, y $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ si $t R t_2$ y $t \in T_2$, lo que significa que $\lim\limits_{(T_1,R)} f = \lim\limits_{(T_2,R^{-1})} f =$

$\lim\limits_{(T',R)} f = L.$

Recíprocamente, supongamos que $\lim\limits_{(T_1,R)} f = \lim\limits_{(T_2,R^{-1})} f = L.$

Dado $\varepsilon > 0$, existen $t_1(\varepsilon) \in T_1$ y $t_2(\varepsilon) \in T_2$ tales que $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ si t_1Rt y $t \in T_1$, y $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ si $t_2R^{-1}t$ y $t \in T_2$; es decir, $\|f(t)-L\| < \varepsilon$ si t_1RtRt_2. Por lo tanto, $\lim\limits_{(T',R)} f = L.$

Con la ayuda del Teorema 2.4 es más fácil hacer dos observaciones que ilustran la importancia de la Definición 2.2.

a) Toda función multivaluada $f:T' \longrightarrow \mathbb{B}$ definida en una cortadura direccional $(T' = T_1+T_2,R)$ del primer tipo tiene límite sólo si $f(t')$, donde t' es el último elemento de (T_1,R) o de (T_2,R^{-1}), consta de un solo elemento; además, $\lim\limits_{(T',R)} f = f(t').$

b) La Definición 2.2 generaliza el concepto de límite de una función univaluada $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{B}$ cuando la variable tiende al real a. Basta tomar la cortadura direccional $(T',R) = ((-\infty,a)+(a,\infty),\leq)$ para tener que $\lim\limits_{(T',R)} f = \lim\limits_{t \to a} f(t)$. Por lo tanto, el Teorema 2.4 generaliza el conocido teorema que dice que el límite de una función univaluada $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{B}$ existe si y sólo si los límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales.

Por último, obtendremos el análogo del Teorema 2.2.

Teorema 2.5. Sean $(T' = T_1+T_2, R)$ una cortadura direccional, $f,g:T' \longrightarrow \mathbb{B}$ funciones multivaluadas y $c \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{(T',R)} f = L_1$ y $\lim_{(T',R)} g = L_2$, entonces

i) $\lim_{(T',R)} (f+g) = L_1+L_2$ y

ii) $\lim_{(T',R)} (cf) = cL_1$.

Demostración. Usando los teoremas 2.2 y 2.4, obtenemos:

i) $$\lim_{(T_1,R)} (f+g) = \lim_{(T_1,R)} f + \lim_{(T_1,R)} g = L_1+L_2 =$$

$$\lim_{(T_2,R^{-1})} f + \lim_{(T_2,R^{-1})} g = \lim_{(T_2,R^{-1})} (f+g).$$

ii) $$\lim_{(T_1,R)} (cf) = c \lim_{(T_1,R)} f = cL_1 = c \lim_{(T_2,R^{-1})} f = \lim_{(T_2,R^{-1})} (cf).$$

Nota. La teoría aquí expuesta es fácilmente ampliable en el caso particular de que $\mathbb{B}$ sea una álgebra de Banach. Véase "Sobre una Teoría de las Teorías de Integración en Algebras de Banach", Marco Antonio Valencia Arvizu, Revista Sonorense de Matemáticas de próxima publicación.

III. EL CONCEPTO DE INTEGRAL

Definición 3.1. Sean (T,R) una dirección (una cortadura direccional, respectivamente), $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y $\varphi : T \longrightarrow \mathbb{B}$ una función multivaluada dada por $\varphi(t) = \sum_{J=1}^{n} b_J$, $b_J \in \mathbb{B}$. (Cada elemento de $\varphi(t)$ se escribe así, las b_J y n no necesariamente son las mismas para elementos distintos de $\varphi(t)$). Decimos que la integral de φ en la dirección (cortadura direccional, resp.) (T,R) es el $\lim_{(T,R)} \varphi$, si el límite existe, y que φ es integrable en la dirección (cortadura direccional, resp.) (T,R). Usaremos la siguiente notación:

$$\int_{(T,R)} \varphi .$$

Veremos ahora que esta definición de integral cumple con los requisitos que generalmente se piden a un operador para que lleve este nombre. Las primeras propiedades (unicidad y linealidad) son solamente la traducción de las propiedades correspondientes de límites.

Teorema 3.1. Si la integral de una función multivaluada en una dirección (cortadura direccional, resp.) existe, es única.

Teorema 3.2. Sean (T,R) una dirección (cortadura direccional, resp.), $f,g : T \longrightarrow \mathbb{B}$ funciones multivaluadas, $c \in \mathbb{R}$. Si φ y ψ son integrables en (T,R), entonces $\varphi+\psi$ y $c\varphi$ son integrables en (T,R) y se tiene que

i) $\int_{(T,R)} (\varphi+\psi) = \int_{(T,R)} \varphi + \int_{(T,R)} \psi$ y

ii) $\int_{(T,R)} (c\varphi) = c\int_{(T,R)} \varphi$.

Veremos ahora que los símbolos para límite e integral son intercambiables en el sentido expresado por el siguiente

<u>Teorema</u> 3.3. Sean (T,R) y (U,S) dos direcciones (cortaduras direccionales, resp.), $\{\varphi_u | u \in U\}$ una colección de funciones multivaluadas; $\varphi,\varphi_u : T \twoheadrightarrow \mathbb{B}$ integrables en (T,R). Si $\lim_{(U,S)} \varphi_u(t) = \varphi(t)$ uniformemente en T, entonces $\lim_{(U,S)} \int_{(T,R)} \varphi_u = \int_{(T,R)} \varphi$.

<u>Demostración</u>. De la linealidad y del hecho de que el límite de una función univaluada constante es esa constante se sigue que basta demostrar que $\lim_{(U,S)} \varphi_u(t) = 0$ uniformemente en T implica que $\lim_{(U,S)} \int_{(T,R)} \varphi_u = 0$, pues entonces $\lim_{(U,S)} \varphi_u(t) = \varphi(t)$ uniformemente en T implica que $\lim_{(U,S)} (\varphi_u-\varphi)(t) = 0$ uniformemente en T; luego, $\lim_{(U,S)} \int_{(T,R)} (\varphi_u-\varphi) = 0$ y se tiene que

$\lim_{(U,S)} \int_{(T,R)} \varphi_u = \int_{(T,R)} \varphi$.

Sea $\varepsilon > 0$; que $\lim\limits_{(U,S)} \varphi_u(t) = 0$ uniformemente en T quiere decir que existe $u_1(\varepsilon) \in U$ $(u_1(\varepsilon) \in U_1,\ u_2(\varepsilon) \in U_2$, resp.) independiente de t tal que $u_1 S u$ $(u_1 S u S u_2$, resp.) implica que $\|\varphi_u(t)\| < \varepsilon$. Como φ_u es integrable, existe $t_1(\varepsilon,u) \in T$ $(t_1(\varepsilon,u) \in T_1,\ t_2(\varepsilon,u) \in T_2$, resp.) tal que $t_1 R t$ $(t_1 R t R t_2$, resp.) implica que $\|\varphi_u(t) - \int_{(T,R)} \varphi_u\| < \varepsilon$. De lo anterior y la desigualdad $\|\int_{(T,R)} \varphi_u\| - \|\varphi_u(t)\| \leq \|\int_{(T,R)} \varphi_u - \varphi_u(t)\| < \varepsilon$, se sigue que $\|\int_{(T,R)} \varphi_u\| < \varepsilon + \|\varphi_u(t)\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ si $u_1 S u$ $(u_1 S u S u_2$, resp.) y $t_1 R t$ $(t_1 R t R t_2$, resp.). Por lo tanto, $\lim\limits_{(U,S)} \int_{(T,R)} \varphi_u = 0$.

Un caso particular importante de este teorema es cuando $(U,S) = (\mathbb{N}, \leq)$. El teorema también es válido cuando se toma una dirección y una cortadura direccional, en cualquier orden.

Si consideramos funciones con valores reales, obtenemos que la integral es también no negativa y monótona, como lo prueba el siguiente

<u>Teorema</u> 3.4. Sean (T,R) una dirección (cortadura direccional, resp.), $\varphi, \psi : T \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones multivaluadas integrables en (T,R).

i) Si $\varphi \geq 0$ $(\varphi(t) \geq 0$ para cada $t \in T)$, entonces $\int_{(T,R)} \varphi \geq 0$.

ii) Si $\varphi \geq \psi$ $(\varphi(t) \geq \psi(t)$ para cada $t \in T)$, entonces

$$\int_{(T,R)} \varphi \geq \int_{(T,R)} \psi.$$

Demostración. i) Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_1(\varepsilon) \in T$ $(t_1(\varepsilon) \in T_1$, $t_2(\varepsilon) \in T_2$, resp.) tal que $t_1 R t$ $(t_1 R t R t_2$, resp.) implica que $|\varphi(t) - \int_{(T,R)} \varphi| < \varepsilon$; luego $\varphi(t) - \varepsilon < \int_{(T,R)} \varphi < \varphi(t) + \varepsilon$ y se sigue que $0 \leq \varphi(t) < \int_{(T,R)} \varphi + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, obtenemos que $\int_{(T,R)} \varphi \geq 0$.

ii) $\varphi \geq \psi$ implica que $\varphi - \psi \geq 0$; por i) y la linealidad se tiene que $\int_{(T,R)} \varphi - \int_{(T,R)} \psi = \int_{(T,R)} (\varphi - \psi) \geq 0$, de donde se sigue la desigualdad deseada.

Los dos teoremas precedentes nos permiten tener una versión del teorema de la convergencia monótona cuando $\mathbb{B}$ es el espacio de los reales.

Teorema 3.5. Sean (T,R) y (U,S) dos direcciones (cortaduras direccionales, resp.), $\{\varphi_u | u \in U\}$ una colección de funciones multivaluadas; $\varphi, \varphi_u : T \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en (T,R). Si $\lim_{(U,S)} \varphi_u(t) = \varphi(t)$ uniformemente en T y la convergencia es monótona, entonces $\lim_{(U,S)} \int_{(T,R)} \varphi_u = \int_{(T,R)} \varphi$ y la convergencia es monótona.

Para concluir este capítulo, observaremos que la otra propiedad fundamental de las integrales llamada aditividad no tiene sentido en este contexto general ya que depende de la dirección (cortadura direccional, resp.) particular que se esté considerando.

SEGUNDA PARTE

IV. LAS INTEGRALES DE RIEMANN Y DE RIEMANN-STIELTJES

Consideremos el intervalo $[a,b]$.

Definición 4.1. Por una partición P de $[a,b]$ entendemos un conjunto finito de puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. El conjunto de las particiones de $[a,b]$ será denotado por $\mathcal{P}[a,b]$. Decimos que $P \in \mathcal{P}[a,b]$ es más fina que $P_1 \in \mathcal{P}[a,b]$ si $P_1 \subset P$.

De la definición y el hecho de que $P_1 \cup P_2$ es una partición más fina que P_1 y P_2 es inmediato el siguiente

Teorema 4.1. $(\mathcal{P}[a,b], \subset)$ es una dirección.

Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones univaluadas. Construimos con ellas una función multivaluada $\varphi : \mathcal{P}[a,b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})], \text{ donde cada } t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

da uno de los elementos de $\varphi(P)$. Escribiremos $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Definición 4.2. El límite de φ en la dirección $(\mathcal{P}[a,b], \subset)$ (es decir, la integral de φ en esa dirección), si existe, se llama Integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a α en $[a,b]$. Si éste es el caso, decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a α en $[a,b]$, lo que se denotará $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$. La integral se denotará $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ o simplemente $\int_a^b f d\alpha$.

Definición 4.3. En el caso particular en que α es la función identidad, el límite de φ en la dirección $(\mathcal{P}[a,b],\subset)$, si existe, se llama integral de Riemann de f en $[a,b]$. En este caso, decimos que f es Riemann integrable en $[a,b]$, lo que denotamos $f \in R$. La integral se denota $\int_a^b f(x)\,dx$.

No intentaremos desarrollar la teoría de las integrales de Riemann y de Riemann-Stieltjes por ser demasiado conocidas y no ser ese el propósito del presente trabajo. Por lo tanto, únicamente nos limitaremos a los resultados indispensables para hacer algunas observaciones respecto a las definiciones que hemos dado de estas dos integrales.

En primer lugar, la definición de integral de Riemann-Stieltjes que aquí se da es la más frecuentemente usada (por ejemplo, véase [1]). En cambio, la definición de integral de Riemann que se utiliza más a menudo es la que se obtiene de la siguiente definición de integral de Riemann-Stieltjes en el caso particular en que α es la función identidad.

Definición 4.4. Se dice que f es integrable respecto a α en $[a,b]$ si existe $I \in \mathbb{R}$ tal que dado $\varepsilon > 0$ existe

$\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k - I| < \varepsilon$ si $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y $|P| < \delta$. ($|P|$ es la norma de P, dada por $|P| = \max\{\Delta x_k | k = 1,2,\ldots,n\}$, donde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$).

Respecto a esta definición, observaremos que no se puede pensar como integral én una dirección, ya que la norma no ordena parcialmente al conjunto de las particiones (no cumple la antisimetría). Sin embargo, esta definición de integral de Riemann-Stieltjes es más restringida (en un sentido que precisaremos) que la dada por la definición 4.2. Por otra parte la integral de Riemann que de ella resulta es equivalente (en un sentido que también precisaremos) a la de la definición 4.3.

Teorema 4.2. Si $f \in R(\alpha)$ de acuerdo a la definición 4.4 entonces $f \in R(\alpha)$ de acuerdo a la definición 4.2 y las integrales coinciden. El recíproco no es válido.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\varphi(P) - I| < \varepsilon$ si $|P| < \delta$. Sea $P_1 \in \mathcal{P}[a,b]$ con $|P_1| < \delta$. Se tiene que $|P| < \delta$ si $P_1 \subset P$. Por lo tanto, $|\varphi(P) - I| < \varepsilon$ si $P_1 \subset P$, como se quería demostrar.

Para ver que el recíproco no es cierto, considérense las funciones $f, \alpha: [-1,1] \to \mathbb{R}$ definidas de la siguiente manera:

$$f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0) \\ 1 & \text{si } x \in (0,1], \; f(0)=0, \; \alpha(0)=1. \end{cases}$$

Si $P_1 = \left\{-1,0,1\right\}$, $\varphi(P_1) = 0$. Además, $\varphi(P) = 0$ para toda partición P más fina que P_1, lo que demuestra que $f \in R(\alpha)$ de acuerdo a la definición 4.2. Por otra parte, sea $P_\delta = \left\{-1,\frac{-\delta}{2},\frac{\delta}{2},1\right\}$, donde $0<\delta<2$. Entonces $|P_\delta| = \delta$ y $\varphi(P_\delta) = f(t_2)$ con $t_2 \in [\frac{-\delta}{2},\frac{\delta}{2}]$. Por lo tanto, $\varphi(P_\delta) = \left\{0,1\right\}$ y $f \notin R(\alpha)$ de acuerdo a la definición 4.4.

<u>Definición</u> 4.5. Sean $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P \in \mathcal{P}[a,b]$ con $P = \left\{x_0,x_1,\ldots,x_n\right\}$, $M_k(f) = \sup\left\{f(x) \mid x \in [x_{k-1},x_k]\right\}$ y $m_k(f) = \inf\left\{f(x) \mid x \in [x_{k-1},x_k]\right\}$. Entonces $\bar{S}(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k$ y $\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k$ se llaman, respectivamente, <u>suma superior</u> y <u>suma inferior de Darboux</u> de f respecto a α para la partición P.

Se tiene que $m_k(f) \le f(t_k) \le M_k(f)$ para $t_k \in [x_{k-1},x_k]$. Por lo tanto, para α no decreciente en $[a,b]$ se tiene que $\underline{S}(P,f,\alpha) \le \varphi(P) \le \bar{S}(P,f,\alpha)$ para toda $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Es fácil ver que $P_1 \subset P_2$ implica que $\underline{S}(P_1,f,\alpha) \le \underline{S}(P_2,f,\alpha)$ y que $\bar{S}(P_2,f,\alpha) \le \bar{S}(P_1,f,\alpha)$ y que además $\underline{S}(P_1,f,\alpha) \le \bar{S}(P_2,f,\alpha)$ para cualesquiera dos particiones P_1 y P_2.

<u>Definición</u> 4.6. Sea α no decreciente en $[a,b]$. Entonces $\bar{I}(f,\alpha) = \inf\left\{\bar{S}(P,f,\alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\right\}$ y $\underline{I}(f,\alpha) = \sup\left\{\underline{S}(P,f,\alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\right\}$ se llaman, respectivamente, <u>integral superior</u> e <u>integral inferior de Darboux</u> de f respecto a

α en $[a,b]$.

De esta definición y de la observación precedente se sigue fácilmente que $\underline{I}(f,\alpha) \leq \bar{I}(f,\alpha)$.

Teorema 4.3. Sea f acotada y α no decreciente en $[a,b]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$.

ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $P_1(\varepsilon) \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $P_1 \subset P$ implica que $0 \leq \bar{S}(P,f,\alpha) - \underline{S}(P,f,\alpha) < \varepsilon$.

iii) $\underline{I}(f,\alpha) = \bar{I}(f,\alpha)$.

Demostración. i) implica ii). Si $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces $\bar{S}(P,f,\alpha) = \underline{S}(P,f,\alpha) = 0$. Supongamos que $\alpha(a) < \alpha(b)$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $P_1(\varepsilon) \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $|\varphi(P) - I| < \varepsilon/3$ si $P_1 \subset P$. Entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\Delta\alpha_k\right| \leq 2\,|\varphi(P) - I| < \frac{2\varepsilon}{3}, \text{ si } t_k, t_k' \in [x_{k-1}, x_k].$$

Como $M_k(f) - m_k(f) = \sup\left\{ f(x) - f(x') \,|\, x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$, dada $h > 0$ podemos escoger $t_k, t_k' \in [x_{k-1}, x_k]$ de modo que $M_k(f) - m_k(f) < f(t_k) - f(t_k') + h$. En particular, para $h = \dfrac{\varepsilon}{3[\alpha(b) - \alpha(a)]}$ se tiene que

$$\bar{S}(P,f,\alpha) - \underline{S}(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta\alpha_k <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\Delta\alpha_k + h\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ii) implica iii). Dado $\varepsilon > 0$, existe $P_1(\varepsilon) \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $P_1 \subset P$ implica que $\bar{S}(P,f,\alpha) < \underline{S}(P,f,\alpha)+\varepsilon$. Por lo tanto, $\bar{I}(f,\alpha) \leq \bar{S}(P,f,\alpha) < \underline{S}(P,f,\alpha)+\varepsilon \leq \underline{I}(f,\alpha)+\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que $\bar{I}(f,\alpha) \leq \underline{I}(f,\alpha)$.

iii) implica i). Supongamos que $\bar{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha) = I$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $P'(\varepsilon) \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $P' \subset P$ implique que $\bar{S}(P,f,\alpha) < \bar{I}(f,\alpha)+\varepsilon$ y sea $P''(\varepsilon) \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $P'' \subset P$ implique que $\underline{S}(P,f,\alpha) > \underline{I}(f,\alpha)-\varepsilon$. Entonces, para P más fina que $P_1 = P' \cup P''$ se tiene que

$$I-\varepsilon = \underline{I}(f,\alpha)-\varepsilon < \underline{S}(P,f,\alpha) \leq \varphi(P) \leq \bar{S}(P,f,\alpha) < \bar{I}(f,\alpha) + \varepsilon = I+\varepsilon.$$

Por lo tanto, $|\varphi(P)-I| < \varepsilon$ si $P_1 \subset P$.

Vale la pena observar que en ocasiones se utiliza iii) para introducir la integral de Riemann (Integral de Darboux).

<u>Teorema</u> 4.4. Sea f acotada, entonces $f \in R$ de acuerdo a la definición 4.3 si y sólo si $f \in R$ de acuerdo a la definición 4.4 y las integrales coinciden.

<u>Demostración</u>. Sólo falta demostrar que $f \in R$ según la definición 4.3 implica que $f \in R$ de acuerdo a la definición 4.4.

Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos $P_1(\varepsilon)$ tal que $\bar{S}(P_1,f) < I+\varepsilon/2$, I es el valor de la integral. Sean N el número de puntos de

P_1, $M = \sup\left\{|f(x)|\,|\,x \in [a,b]\right\}$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2MN}$. Si $|P| < \delta$, escribimos $\bar{S}(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k = S_1+S_2$, donde S_1 es la suma de los términos correspondientes a los subintervalos de P que no tienen puntos de P_1 y S_2 es la suma de los términos restantes. Se tendrá entonces que $S_1 \leq \bar{S}(P_1,f) < I+\varepsilon/2$, ya que a cada sumando de S_1 corresponde uno no menor de $\bar{S}(P_1,f)$. También, $S_2 \leq NM|P| < NM\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, ya que el número de sumandos de S_2 no excede a N.

Por lo tanto, $\bar{S}(P,f) < I+\varepsilon$ si $|P| < \delta$. Similarmente, $\underline{S}(P,f) > I-\varepsilon$ si $|P| < \delta'$ y se tiene que $I-\varepsilon < \underline{S}(P,f) \leq \omega(P) \leq$ $\leq \bar{S}(P,f) < I+\varepsilon$, es decir $|\omega(P) - I| < \varepsilon$, si $|P| < \min\left\{\delta,\delta'\right\}$.

Para concluir este capítulo, daremos otra definición posible de integral de Riemann-Stieltjes con el objeto de destacar la importancia de la manera en que se escogen las particiones pues, como se verá, esta nueva definición es un poco más general que las anteriormente examinadas.

<u>Definición</u> 4.7. Por una <u>partición</u> P' de $[a,b]$ entenderemos una colección finita $\left\{I_1,I_2,\ldots,I_n\right\}$ de intervalos ajenos dos a dos, no vacíos, cuya unión es $[a,b]$. El conjunto de las particiones de $[a,b]$ en este sentido será denotado $\mathcal{P}'[a,b]$. Dadas dos particiones P_1' y P_2', decimos que P_2' es <u>más</u> <u>fina</u> que P_1' (denotado $P_1' < P_2'$) si todo intervalo de P_2' está contenido en algún intervalo de P_1'.

Dadas $P_1', P_2' \in \mathscr{P}'[a,b]$, la partición $P' = \{ I_k \cap J_\ell \neq \phi \mid I_k \in P_1', J_\ell \in P_2' \}$ es más fina que P_1' y P_2'. Con esta observación, es fácil demostrar el siguiente

Teorema 4.5. $(\mathscr{P}'[a,b], <)$ es una dirección.

Dadas dos funciones univaluadas $f, \alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, construimos una función multivaluada $\varphi' : \mathscr{P}'[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $\varphi'(P') = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$, donde $t_k \in I_k$, intervalo cuyos extremos son x_{k-1} y x_k.

Definición 4.8. El límite de φ' en la dirección $(\mathscr{P}'[a,b], <)$, si existe, se llama integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a α en $[a,b]$. Para α la función identidad, se tiene la integral de Riemann correspondiente.

Compararemos ahora las definiciones 4.2 y 4.8. Con respecto a las particiones, observamos lo siguiente: Cada $P \in \mathscr{P}[a,b]$ determina una colección de intervalos $\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$. Suprimiendo adecuadamente algunos extremos de estos intervalos obtenemos una partición $P' \in \mathscr{P}'[a,b]$ (hay varias posibilidades para escoger P'). Es claro que $\varphi'(P') \subset \varphi(P)$ ya que hemos quitado a t_k la posibilidad de tomar ciertos valores.

Recíprocamente, cada partición $P' \in \mathscr{P}'[a,b]$ determina una partición $P \in \mathscr{P}[a,b]$ (que consiste de los extremos de los intervalos de P') y se tiene que $\varphi'(P') \subset \varphi(P)$ por la consideración anterior y el hecho de que si $I_k \in P'$ consta de un solo punto, entonces se anula el sumando correspondiente de $\varphi'(P')$.

Con la correspondencia anterior, es fácil ver que si $P_1' < P_2'$ entonces $P_1 \subset P_2$.

Teorema 4.6. Si $f \in R(\alpha)$ de acuerdo a la definición 4.2, entonces $f \in R(\alpha)$ de acuerdo a la definición 4.8 y las integrales coinciden. El recíproco no es válido.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $P_1(\varepsilon) \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $|\varphi(P) - I| < \varepsilon$ si $P_1 \subset P$. Tomemos una partición $P_1'(\varepsilon) \in \mathcal{P}'[a,b]$ correspondiente a P_1. Entonces $P_1' < P'$ implica que $P_1 \subset P$ (P es la partición correspondiente a P'). Como $\varphi'(P') \subset \varphi(P)$, se tiene que $|\varphi'(P') - I| < \varepsilon$ si $P_1' < P'$, como se quería demostrar.

Para ver que el recíproco no es cierto, considérense las funciones univaluadas $f, \alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [-1,0) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

Supongamos que $0 \in (x_J, x_{J+1}]$. Entonces $\varphi(P) = f(t_{J+1})$ y como $t_{J+1} \in [x_J, x_{J+1}]$, se tiene que $\varphi(P) = \{0,1\}$ y la integral respecto a la definición 4.2 no existe. Por otra parte, sea $P_1' = \{[-1,0), [0,1]\}$. Se tiene que $\varphi'(P_1') = 0$ y que $P_1' < P'$ implica que $\varphi'(P') = 0$. Por lo tanto, la integral existe respecto a la definición 4.8 y es O.

ciones de Ω se denotará $\mathcal{P}(\Omega)$. $P_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ se dice <u>más fina</u> que $P_1 \in \mathcal{P}(\Omega)$, y lo denotamos $P_1 < P_2$, si todo conjunto de P_2 está contenido en algún conjunto de P_1.

Dados $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P = \left\{A_i \cap A'_J \neq \phi \mid A_i \in P_1, A'_J \in P_2\right\}$ es una partición más fina que P_1 y P_2. Con esta observación es fácil comprobar el siguiente

<u>Teorema</u> 5.1. $(\mathcal{P}(\Omega), <)$ es una dirección.

Sean $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ un espacio con medida, $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función univaluada. Construímos una función multivaluada de la siguiente manera:

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} X(w_k)\mu(A_k), \text{ con } w_k \in A_k \text{ y } P = \left\{A_1, A_2, \ldots, A_n\right\}.$$

<u>Definición</u> 5.4. El límite de φ en la dirección $(\mathcal{P}(\Omega), <)$, si existe, se llama <u>integral de Lebesgue abstracta</u> de X respecto a μ en Ω, que se denotará $\int_\Omega X d\mu$. Si existe, se dirá que X es <u>integrable</u> respecto a μ en Ω.

Al igual que en el capítulo anterior, no pretendemos desarrollar la teoría de la integral de Lebesgue abstracta sino únicamente comparar la definición que hemos dado con la que se da usualmente, recordando para ello las definiciones y resultados de la teoría de la medida que sean necesarios.

Un resultado muy importante de teoría de la medida es que toda función definida en el conjunto de los intervalos de $\mathbb{R}$

V. LAS INTEGRALES DE LEBESGUE, DE LEBESGUE-STIELTJES Y DE LEBESGUE ABSTRACTA

Sea Ω un conjunto.

Definición 5.1. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω se dice σ-álgebra si el complemento y la unión numerable de elementos de $\mathcal{A}$ son también elementos de $\mathcal{A}$. Esto implica que la propiedad vale para todas las operaciones conjuntistas numerables con elementos de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, la pareja $(\Omega,\mathcal{A})$ se dice espacio medible y los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman conjuntos medibles.

Definición 5.2. Una función univaluada $\mu:\mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ (la recta real extendida) se dice una medida si es no negativa ($\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$), $\mu(\phi) = 0$ y es σ-aditiva ($\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, donde $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ significa unión de conjuntos ajenos dos a dos).

La terna $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ se dice entonces espacio con medida. μ se dice una medida finita si $\mu(\Omega) < \infty$ y σ-finita si $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ con $\mu(\Omega_i) < \infty$.

Sea $(\Omega,\mathcal{A})$ un espacio medible.

Definición 5.3. Una partición P de Ω es una colección finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de conjuntos medibles, no vacíos, ajenos dos a dos, tales que $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. El conjunto de las parti-

(o de $\mathbb{R}^n$) que tenga las propiedades de una medida se puede extender de manera única a una medida sobre la mínima σ-álgebra $\mathcal{B}$ (llamada <u>σ-álgebra de Borel</u>) que contiene a los intervalos (Teorema de Extensión de Carathéodory. Véase [3] pág. 87).

La medida $\mu:\mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ que a cada intervalo asocia su longitud (es decir, $\mu[a,b] = \mu[a,b) = \mu(a,b] = \mu(a,b) = b-a$) se llama <u>medida de Lebesgue</u>. Una medida $\mu:\mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que en los intervalos está dada por

$$\mu(a,b) = F(b-)-F(a),$$

$$\mu[a,b] = F(b)-F(a-),$$

$$\mu[a,b) = F(b-)-F(a-) \quad y$$

$$\mu(a,b] = F(b)-F(a),$$

donde F es no decreciente, continua por la derecha y $F(b^-) = \lim\limits_{x \to b^-} F(x)$, $F(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x)$, se llama <u>medida de Lebesgue-Stieltjes</u>. En el caso en que F es la función identidad, se reduce a la medida de Lebesgue.

Se puede hablar de medida de Lebesgue y medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^n$; no lo discutiremos aquí, sólo diremos vagamente que la medida de Lebesgue asocia a cada "intervalo" de $\mathbb{R}^n$ su "hipervolumen" y que una medida de Lebesgue-Stieltjes asocia a cada "intervalo" de $\mathbb{R}^n$ un número finito y se puede dar en términos de una función $F':\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene propiedades similares a las que se pidieron a F en el caso n=1.

Definición 5.5. En el caso particular en que μ sea la medida de Lebesgue o una medida de Lebesgue-Stieltjes, la integral de la definición 5.4 se dice integral de Lebesgue o integral de Lebesgue-Stieltjes respectivamente.

En lo que resta de este capítulo trabajaremos en un espacio con medida $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$; $\mathcal{B}$ denotará la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Definición 5.6. Una función univaluada $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice medible si $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{G}$ y simple si toma un número finito de valores.

Un ejemplo importante de función simple es la función indicador de un conjunto A, denotada 1_A y definida mediante $1_A(w) = 1$ si $w \in A$ y $1_A(w) = 0$ si $w \notin A$. Es fácil ver que 1_A es medible si y sólo si A es medible, o más generalmente, una función simple X que toma los valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es medible si y sólo si los conjuntos $X^{-1}(a_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ son medibles.

Otro resultado muy importante de teoría de la medida establece que para toda función medible no negativa $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ existe una sucesión no decreciente de funciones simples medibles no negativas $\{X_n\}$ que converge (uniformemente si X es acotada) a X, lo que denotaremos $X_n \uparrow X$. Además, X es medible si y sólo si es límite puntual de funciones simples medibles y la clase de las funciones medibles es cerrada bajo las operaciones usuales del análisis. (Teorema de medibilidad [3], pág. 107.)

Toda función univaluada $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede escribir $X = X^{+}-X^{-}$, donde $X^{+} = X1_A$ y $X^{-} = -X1_B$ con $A=\{w\in\Omega \mid X(w) \geq 0\}$ y $B = \{w\in\Omega \mid X(w) < 0\}$. Claramente, X^{+} y X^{-} son no negativas y X es medible si y sólo si X^{+} y X^{-} son medibles.

<u>Teorema</u> 5.2. Si X_1 y X_2 son integrables, c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $c_1X_1+c_2X_2$ es integrable y $\int_\Omega (c_1X_1+c_2X_2)\,d\mu =$

$= c_1\int_\Omega X_1 d\mu + c_2\int_\Omega X_2 d\mu$.

<u>Demostración</u>. Sea $\varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} (c_1X_1+c_2X_2)(w_k)\mu(A_k) =$

$= c_1\sum_{k=1}^{n} X_1(w_k)\mu(A_k)+c_2\sum_{k=1}^{n} X_2(w_k)\mu(A_k) = c_1\varphi_1(P)+c_2\varphi_2(P)$. Como φ_1, φ_2 son integrables en $(\mathcal{P}(\Omega),<)$, φ es integrable en $(\mathcal{P}(\Omega),<)$ y $\int\varphi = c_1\int\varphi_1+c_2\int\varphi_2$, que es sólo otra manera de decir lo que queríamos demostrar.

Es fácil demostrar por inducción que el teorema anterior es válido para cualquier número finito de sumandos. En particular, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son integrables entonces $\sum_{k=1}^{n} X_k$ es integrable y $\int_\Omega (\sum_{k=1}^{n} X_k)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega X_k d\mu$, propiedad llamada <u>aditividad</u>.

Más adelante investigaremos la σ-<u>aditividad</u> de la integral en la clase de las funciones no-negativas: ¿Si $X_1, X_2, \ldots$ son funciones integrables no negativas se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ es integrable y que $\int_\Omega (\sum_{k=1}^{\infty} X_k)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega X_k d\mu$?

Teorema 5.3. Sea μ finita, X integrable. Si $X_n \to X$ ($X_n \uparrow X$, resp.) uniformemente y las X_n son integrables, entonces $\int_\Omega X_n d\mu \to \int_\Omega X d\mu$ ($\int_\Omega X_n d\mu \uparrow \int_\Omega X d\mu$, resp.).

Demostración. Por el teorema anterior, basta demostrar que $Y_n \to 0$ ($\downarrow$, resp.) uniformemente y las Y_n integrables implica que $\int_\Omega Y_n d\mu \to 0$ ($\downarrow$, resp.) pues entonces $X-X_n \to 0$ ($\downarrow$, resp.) uniformemente y $\int_\Omega (X-X_n)d\mu = \int_\Omega X d\mu - \int_\Omega X_n d\mu \to 0$ ($\downarrow$, resp.), de donde se obtiene el resultado buscado.

Sea $\varphi_n(P) = \sum_{k=1}^{m} Y_n(w_k)\mu(A_k)$; por la convergencia uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $|Y_n(w)| < \varepsilon/\mu(\Omega)$. Luego, $|\varphi_n(P)| \leq \sum_{k=1}^{m} |Y_n(w)|\mu(A_k) < \varepsilon$ si $n > N$. Por lo tanto, $\varphi_n \to 0$ uniformemente en $\mathcal{P}(\Omega)$ y se sigue del teorema 3.3 que $\int_\Omega Y_n d\mu \to 0$. La monotonía se obtiene del hecho de que $Y \geq 0$ implica que $\varphi \geq 0$ y por el teorema 3.4, $\int_\Omega Y d\mu \geq 0$; por lo tanto, $\int_\Omega (Y_{n+1}-Y_n)d\mu = \int_\Omega Y_{n+1}d\mu - \int_\Omega Y_n d\mu \geq 0$, de nuevo por el teorema anterior.

Veremos ahora la definición constructiva que generalmente se da de la integral de Lebesgue abstracta ([3], pág. 117 y siguientes) para proceder enseguida a compararla con la que aquí hemos dado.

Definición 5.7. i) Si $X:\Omega \to \mathbb{R}$ es función simple medible, se define $\int_\Omega X d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$, donde $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $A_i = X^{-1}(a_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

ii) Si $X:\Omega \to \mathbb{R}$ es medible no negativa, se define $\int_\Omega X d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega X_n d\mu$, donde $\{X_n\}$ es una sucesión no decreciente de funciones simples medibles y no negativas, tales que $X_n \uparrow X$.

iii) Si $X:\Omega \to \mathbb{R}$ es medible, se define $\int_\Omega X d\mu = \int_\Omega X^+ d\mu - \int_\Omega X^- d\mu$ si la diferencia tiene sentido (es decir, si al menos una de las integrales es finita). En cualquiera de los tres casos, se dice que X es integrable respecto a μ en Ω si $\int_\Omega X d\mu < \infty$.

Se demuestra que la integral está bien definida pues el límite en ii) existe y no depende de la sucesión particular $\{X_n\}$ que se escoja; por lo tanto, se puede escoger de modo que $X_n \uparrow X$ uniformemente en el caso en que X sea acotada.

Teorema 5.4. Sea $X:\Omega \to \mathbb{R}$ una función simple medible. X es integrable respecto a la definición 5.4 si y sólo si X es integrable respecto a la definición 5.7 y las integrales coinciden.

Demostración. Sea $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
$P_1 = \{A_i = X^{-1}(a_i) \mid i = 1,2,\ldots,n\}$ es una partición, que llamaremos partición inducida por X. Es inmediato que $\varphi(P_1) = $
$= \sum_{i=1}^{n} X(w_i)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i)$. Sea $P_1 < P = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$;

entonces $A_iB_k = \phi$ ó $A_iB_k = B_k$ (omitimos el símbolo de intersección); en el primer caso, $\mu(A_iB_k) = 0$, y en el segundo, $X(w_k) = a_i$. Por lo tanto,

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^{m} X(w_k)\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{m} X(w_k)\mu(\sum_{i=1}^{n} A_iB_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} X(w_k)\mu(A_iB_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_iB_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(\sum_{k=1}^{m} A_iB_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i).$$

Teorema 5.5. Sea $X:\Omega \to \mathbb{R}$ una función medible, acotada y no negativa, μ finita. X es integrable respecto a la definición 5.4 si y sólo si X es integrable respecto a la definición 5.7 y las integrales coinciden.

Demostración. Supongamos que X es integrable respecto a la definición 5.4. Sea $\{X_n\}$ una sucesión no decreciente de funciones simples medibles y no negativas tal que $X_n \uparrow X$ uniformemente. Por el teorema 5.3, $\int_\Omega X d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega X_n d\mu$ y ya se probó la equivalencia para funciones simples.

Recíprocamente, sea X integrable respecto a la definición 5.7 y $\{X_n\}$ una sucesión no decreciente de funciones simples medibles y no negativas tal que $X_n \uparrow X$ uniformemente. Sea $\epsilon > 0$.

Por la integrabilidad de X y la definición de límite, existe $N_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_1$ implica que $|\int_\Omega X_n d\mu - \lim \int_\Omega X_n d\mu| < \epsilon/2$. Por la convergencia uniforme, existe $N_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_2$ implica que $|X(w) - X_n(w)| < \frac{\epsilon}{2\mu(\Omega)}$ para todo $w \in \Omega$.

Sea $P_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ la partición inducida por X_{n_1}, donde $n_1 > N_2$; sea $P_1 < P = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$. Si $A_i B_k \neq \phi$, $B_k \subset A_i$ y $X_{n_1}(w_k) = X_{n_1}(w_i)$; luego,

$$|\varphi(P) - \int_\Omega X_{n_1} d\mu| = |\sum_{k=1}^{m} X(w_k)\mu(B_k) - \sum_{i=1}^{n} X_{n_1}(w_i)\mu(A_i)| =$$

$$= |\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [X(w_k) - X_{n_1}(w_i)]\mu(A_i B_k)| =$$

$$= |\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [X(w_k) - X_{n_1}(w_k)]\mu(A_i B_k)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |X(w_k) - X_{n_1}(w_k)|\mu(A_i B_k) < \frac{\epsilon}{2\mu(\Omega)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i B_k) = \epsilon/2.$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, si $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n_0 > N$ se tiene que $|\varphi(P)-\lim\int_\Omega X_n d\mu| \leq |\varphi(P)-\int_\Omega X_{n_0} d\mu|+|\int_\Omega X_{n_0} d\mu-\lim\int_\Omega X_n d\mu|$ $\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ si $P_0 < P$, donde P_0 es la partición inducida por X_{n_0}. (Nótese que el sumando intermedio $\int_\Omega X_{n_0} d\mu$ que utilizamos en la desigualdad del triángulo depende de ε.)

Teorema 5.6. Sea $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada; μ finita. X es integrable respecto a la definición 5.4 si y sólo si X es integrable respecto a la definición 5.7 y las integrales coinciden.

Demostración. Sea X integrable respecto a la definición 5.4 y $X_n^+ \uparrow X^+$, $X_n^- \uparrow X^-$ uniformemente. Entonces $X_n = X_n^+-X_n^- \longrightarrow X$ uniformemente y por el teorema 5.3 obtenemos que $\int_\Omega X_n d\mu \longrightarrow$ $\int_\Omega X d\mu$, pero $\int_\Omega X_n d\mu = \int_\Omega X_n^+ d\mu-\int_\Omega X_n^- d\mu \longrightarrow \int_\Omega X^+ d\mu-\int_\Omega X^- d\mu$. Por la unicidad del límite, se tiene que $\int_\Omega X d\mu = \int_\Omega X^+ d\mu-\int_\Omega X^- d\mu$; luego X^+ y X^- son integrables respecto a la definición 5.4 y ya se tiene la equivalencia para funciones no negativas. Recíprocamente, si X es integrable respecto a la definición 5.7, $\int_\Omega X d\mu = \int_\Omega X^+ d\mu-\int_\Omega X^- d\mu$ y X^+, X^- son integrables respecto a la definición 5.7 y el resto se sigue de la equivalencia para funciones no negativas y del teorema 5.2.

Sea $(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ un espacio con medida, $\Omega_i \in \mathcal{G}$. Si escribimos

$\mathcal{G}_i = \{A\cap\Omega_i | A \in \mathcal{G}\}$ y μ_i es la restricción de μ a $\mathcal{G}_i$, se tiene que $(\Omega_i, \mathcal{G}_i, \mu_i)$ es un espacio con medida. Si $X:\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible en $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ su restricción a Ω_i es medible en $(\Omega_i, \mathcal{G}_i, \mu_i)$. En este nuevo espacio se puede hablar de integración, la que denotamos $\int_{\Omega_i} X d\mu$ y al compararla con la integración en el espacio original se tiene que $\int_{\Omega_i} X d\mu = \int_{\Omega} X 1_{\Omega_i} d\mu$.

Después de observar el papel esencial que tiene el hecho de que μ sea finita en la demostración de los teoremas 5.3 y 5.5, establecemos el siguiente

<u>Teorema</u> 5.7. En espacios de medida σ-finita las siguientes condiciones son equivalentes para funciones X acotadas:

1) X es integrable respecto a la definición 5.4 si y sólo si X es integrable respecto a la definición 5.7 y las integrales coinciden.

2) La integral de la definición 5.4 satisface la propiedad de la convergencia monótona: Si $X_n \uparrow X$ entonces $\int_{\Omega} X_n d\mu \uparrow \int_{\Omega} X d\mu$, donde las X_n son medibles no negativas.

3) La integral de la definición 5.4 es σ-aditiva en la clase de las funciones no negativas.

<u>Demostración</u>. 1) implica 2). Si las definiciones son equivalentes, escogemos funciones simples medibles no negativas

$X_{km} \uparrow X_k$ cuando $m \to \infty$. Entonces la sucesión $Y_n = \max_{k \le n} X_{kn}$ de funciones simples medibles no negativas es no decreciente y

$$X_{kn} \le Y_n \le X_n, \int_\Omega X_{kn} d\mu \le \int_\Omega Y_n d\mu \le \int_\Omega X_n d\mu.$$

Haciendo $n \to \infty$, se sigue que

$$X_k \le \lim Y_n \le X, \int_\Omega X_k d\mu \le \int_\Omega (\lim Y_n) d\mu \le \lim \int_\Omega X_n d\mu,$$

y haciendo ahora $k \to \infty$, obtenemos

$$X \le \lim Y_n \le X, \lim \int_\Omega X_n d\mu \le \int_\Omega (\lim Y_n) d\mu \le \lim \int_\Omega X_n d\mu.$$

Por lo tanto, $X = \lim Y_n$ y $\int_\Omega X d\mu = \lim \int_\Omega X_n d\mu$.

2) implica 3). Si $X_1, X_2, \ldots$ son medibles no negativas, $\sum_{k=1}^{n} X_k \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ y por lo tanto $\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega X_k d\mu =$

$$= \int_\Omega (\sum_{k=1}^{n} X_k) d\mu \uparrow \int_\Omega (\sum_{k=1}^{\infty} X_k) d\mu.$$

3) implica 1). Sea $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ con $\mu(\Omega_i) < \infty$. Entonces $X = \sum_{i=1}^{\infty} X 1_{\Omega_i}$. Si X es no negativa, se tiene que $\int_\Omega X d\mu =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega X 1_{\Omega_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega_i} X d\mu$, y ya se demostró la equivalencia en espacios de medida finita. Si X es medible, escribimos $X = X^+ - X^-$ y el resultado se sigue de la linealidad.

Como se ve en el teorema anterior, en espacios de medida

σ-finita basta demostrar que la integral como límite en la dirección de las particiones satisface la propiedad de la convergencia monótona o la σ-aditividad en la clase de las funciones no negativas para tener la equivalencia con la definición constructiva usual. Sin embargo, las demostraciones que aparecen en los textos son las que hemos dado en el teorema anterior y usan el hecho de que $\int_\Omega X d\mu = \lim \int_\Omega X_n d\mu$ para demostrar esas propiedades. Queda como un problema por resolver el demostrar de manera independiente que la integral como límite en la dirección de las particiones satisface una de estas dos propiedades o, por lo contrario, dar un contraejemplo.

VI. LA INTEGRAL DE BOCHNER

Sea $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ un espacio con medida. Consideraremos ahora funciones univaluadas $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{B}$, donde $\mathbb{B}$ es un espacio de Banach.

Al igual que en el capítulo anterior, definimos las funciones simples como aquellas que toman un número finito de valores y las funciones simples medibles como aquellas para las cuales $X^{-1}(a_i) \in \mathcal{G}$, $(i = 1,2,\dots,n)$ donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son los valores que toma X. Una función se dirá medible si es límite puntual de funciones simples medibles.

Sea $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ una función univaluada. Construimos una función multivaluada de la siguiente manera:

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} X(w_k)\mu(A_k), \text{ con } w_k \in A_k \text{ y } P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}.$$

Definición 6.1. El límite de φ en la dirección $(\mathcal{P}(\Omega), <)$, si existe, se llama integral de Bochner de X respecto a μ en Ω, y se denotará $\int_\Omega X d\mu$. Si existe el límite, se dirá que X es integrable respecto a μ en Ω.

Baiocchi [2] define la integral de Bochner de la siguiente manera:

Considera la familia χ de las funciones medibles X tales que $\int_\Omega \|X\| d\mu < \infty$, a las que llama sumables. i) Si $X \in \chi$ es simple, define $\int_\Omega X d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$, donde $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y

$A_i = X^{-1}(a_i)$. ii) Si $X \in \chi$, define $\int_\Omega X d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega X_n d\mu$, donde X_n es una sucesión de funciones simples medibles tal que $X_n \to X$ y $\|X_n\| \uparrow \|X\|$.

Para ello, demuestra que para cada X medible existe una sucesión $\{X_n\}$ con las propiedades indicadas y que existe el límite de las integrales en ii). Demuestra además que esta integral es la única funcional $\int : \chi \times \mathcal{G} \to \mathbb{B}$ que satisface:

1) $\|\int_\Omega X d\mu\| \leq \int_\Omega \|X\| d\mu$,

2) Si a es constante, $\int_\Omega a d\mu = a\mu(\Omega)$,

3) $\int_\Omega (c_1 X_1 + c_2 X_2) d\mu = c_1 \int_\Omega X_1 d\mu + c_2 \int_\Omega X_2 d\mu$,

4) $\int_\Omega X d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega_i} X d\mu$, si $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i$.

Para funciones simples medibles se puede repetir la demostración del teorema 5.4 y se tiene la equivalencia de las dos definiciones.

En espacios de medida finita, para funciones medibles que son límite uniforme de funciones simples medibles, se pueden repetir las demostraciones de los teoremas 5.3 y 5.5 sin modificaciones sustanciales y se tiene la equivalencia. El caso general queda como un problema por resolver.

BIBLIOGRAFIA

[1] T.M. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley, Second Printing (1965).

[2] C. Baiocchi, Osservazioni sulla definizione di integrale di Bochner, An. Sc. Norm. Sup. di Pisa, Vol. XVII (1963), 239-253.

[3] M. Loève, Probability Theory, Van Nostrand, Thirth Edition (1963).

[4] E.J. McShane, Partial orderings and Moore-Smith limits, Am. Math. Monthly; Vol. 59 (1952), 1-11.

[5] E.J. McShane, A unified theory of integration, Am. Math. Monthly, Vol. 80 (1973), 349-359.

ESTE TRABAJO SE IMPRIMIO EN LOS TALLERES DE GUADARRAMA IMPRESORES, S. A. AVENIDA CUAUHTEMOC 1201, COL. VERTIZ NARVARTE MEXICO 13, D. F., TEL. 559-22-77 CON TRES LINEAS.