

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México siendo las 18:00 horas del día 18 de noviembre de 1988 se reunieron en el aula Didáctica del Departamento de matemáticas de la Universidad de Sonora, los señores:

Jorge Ontiveros Almada  
Ruben Flores Espinosa  
Oscar Mario Rodríguez Sánchez

Bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último para efectuar el Examen Profesional de la Carrera de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

al señor: FRANCISCO JAVIER TAPIA LORENO

Después de haber presentado su tesis intitulada: "ALGUNAS APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFICAS AL ALGEBRA LINEAL", la que previamente le fue aprobada por el Jurado.

Los señores sinodales replicaron al sustentante y después de debatir entre sí resuelta y libremente lo declararon:

Aprobado por Unanimidad

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente y firman los que han intervenido

Señalado de sustentante.

J. Ontiveros  
Presidente

Acta No. 51  
Foja No. 50  
Libro 02  
No de Exp. 77-11062

Algunas Aplicaciones de la Teoría  
de gráficas del Algebra Lineal

Lic. en matemáticas

Universidad de Sonora

Fco. Javier Tapia M.

1988

C. EXACTAS  
1975

I N D I C E

|   |    |
|---|----|
| INTRODUCCION. -----                               | 1  |
| CAPITULO I. -----                                 | 3  |
| Digráficas de K8nig y multiplicación de matrices. |    |
| CAPITULO II. -----                                | 16 |
| Digráficas Cubiertas y el Determinante.           |    |
| CAPITULO III. -----                               | 27 |
| Una vieja prueba de la Forma Canónica de Jordan.  |    |
| CODA. -----                                       | 43 |

## I N T R O D U C C I O N .

La teoría de gráficas ha existido por muchos años, no solo como un área del estudio matemático, sino también como una herramienta intuitiva e ilustrativa. El uso de gráficas en diagramas de redes, es una representación íntegra de circuitos eléctricos en elementos de Física; un mapa de una ciudad es también una gráfica con las calles como bordes, intersecciones de calles como vértices y los nombres de las calles como etiquetas de los bordes. Las gráficas semejan a objetos físicos que ellas mismas representan en estos casos y tanto la aplicación (y algunas veces el origen) como las ideas de la teoría de gráficas es inmediata. Un diagrama de flujo de un programa de computadoras y un mapa de caminos con calles en un solo sentido son ejemplos de gráficas las cuales contienen el concepto de dirección o flujo en los bordes; estas son llamadas gráficas dirigidas (digráficas).

Existen aplicaciones de gráficas dirigidas en casi todas las áreas de la Física y Matemáticas, algunas de ellas ya conocidas desde hace cincuenta años o más, pero muy pocas de estas ideas tienen filtración para estudiantes no graduados. Nuestro propósito es aplicar las ideas de la teoría de gráficas a algunos tópicos fundamentales en álgebra lineal. Dado que existen muchas aplicaciones, nos enfocaremos sólo a dos de las más elementales, es decir, multiplicación de matrices y la teoría del determinante

y uno menos elemental como lo es la forma canónica de Jordan.

La principal herramienta que utilizaremos es la teoría de gráfica dirigida. Esto intuitivamente puede pensarse como un conjunto de puntos (o vértices) con flechas (o arcos) uniendo algunos de estos puntos. A un arco podemos ponerle una etiqueta. Más formalmente una digráfica consiste en un conjunto de vértices  $V$  y un subconjunto de pares ordenados de vértices llamados arcos. Un etiquetamiento de la digráfica es una función de los arcos en los números reales. Una digráfica etiquetada usualmente se visualiza considerando los vértices como puntos y los arcos como flechas las cuales van desde el vértice  $i$  al vértice  $j$  siempre que  $(i,j)$  pertenezca al conjunto de arcos. Al vértice  $i$  del arco  $(i,j)$  se le llama vértice inicial y al vértice  $j$  se le llama vértice final. Al arco se le concede entonces una etiqueta la cual es la imagen de este arco bajo la función etiquetadora. Cuando el vértice inicial y el vértice final son idénticos, el arco recibe el nombre de lazo. Diremos algunas veces que el arco "sale de" su vértice inicial y que éste "entra en" el vértice final. Al número de arcos que salen de un vértice se le llama valencia externa, mientras que al número de arcos que entran a un vértice se le llama valencia interna.

Una digráfica  $G$  es una subgráfica de una digráfica  $H$  si los vértices y arcos de  $G$  están contenidos en el conjuntos de vértices y arcos de  $H$ . Un ejemplo de subgráfica de  $H$  es un camino; éste consiste de una sucesión de vértices  $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  tal que  $(v_{i-1}, v_i)$  es un arco en  $H$  para  $i=1, 2, 3, \dots, n$ . Usaremos la notación

$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$  para denotar un camino (la cual es consistente con la notación de un arco); diremos que la longitud de este camino es  $n$ . Una vereda es un camino donde todos sus vértices son distintos, y un ciclo tiene  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vértices distintos y  $v_0 = v_n$ . Otro tipo de subgráficas es el factor, éste tiene la valencia interna y la externa de cada vértice igual a 1. Hasta ahora los conceptos revelan que un factor es simplemente una unión ajena de ciclos. El peso de una subgráfica es el producto de las etiquetas de los arcos de esta subgráfica, el cual denotaremos  $W(G)$ . El peso de caminos, veredas, lazos y factores se definen similarmente.

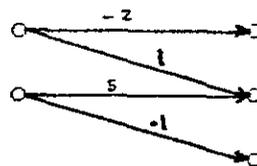
## CAPITULO I

### DIGRAFICAS DE KÖNIG Y MULTIPLICACION DE MATRICES.

En este capítulo examinaremos una digráfica dirigida particular asociada con una matriz  $A$  ( $m \times n$ ). La multiplicación de dos matrices es equivalente a una pegadura de estas digráficas tomando la forma de una sola digráfica. Una entrada en el producto de matrices está relacionada con los pesos de ciertas veredas en la nueva digráfica. Pruebas más estándar acerca de la multiplicación de matrices envuelve la manipulación de símbolos y/o el intercambio de símbolos. Estas técnicas poco válidas tienden a oscurecer las ideas fundamentales; esto se puede esquivar mediante la prueba de teoría de gráficas.

Definición. Sea  $A$  una matriz con  $m$  renglones y  $n$  columnas. La digráfica de König.  $G(A)$  es una digráfica etiquetada con  $m+n$  vértices,  $m$  de estos vértices corresponden a los renglones y  $n$  corresponden a las columnas. El arco del vértice  $i$  al vértice  $j$  tiene  $a_{ij}$  como etiqueta. Cuando hagamos la gráfica omitiremos los arcos con etiqueta cero; esto aclarará la relación entre varias matrices y operaciones gráficas. Como una convención futura, pondremos los vértices renglón a la izquierda y los vértices columna a la derecha. El vértice superior corresponderá al primer renglón o columna, después, el segundo corresponderá al segundo renglón o columna, etc. Una ilustración de la matriz  $A$  y su digráfica de König  $G(A)$  se muestra en la figura 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$



G(A)

Figura 1.1. La matriz 2x3 A y su digráfica de König G(A).

### SUMA Y MULTIPLICACION DE MATRICES.

**SUMA:** Si A y B son matrices  $m \times n$  entonces  $G(A)$  y  $G(B)$  son esencialmente las misma gráficas con diferentes etiquetas. La matriz suma  $A + B$  está definida y la digráfica  $G(A + B)$  es obviamente obtenida por la suma de las etiquetas en los arcos correspondientes de  $G(A)$  y  $G(B)$ . Las propiedades usuales de aditividad de matrices se sigue directamente de las digráficas. Las pruebas de estas propiedades como lo son las leyes de asociatividad, conmutatividad, existencia del la matriz neutra (la cual carece de arcos) y la matriz inversa aditiva (la cual consiste de los mismos arcos que A pero con etiquetas cambiadas de signo) son idénticas a las usuales, nadamás que el enfoque en un renglón y una columna en particular entra en toda la matriz. Una etiqueta de un arco en particular se utiliza para determinar la validéz de estas propiedades.

**MULTIPLICACION:** La multiplicación de una matriz por un un escalar es muy fácil de visualizar. La digráfica  $G(rA)$  se se obtiene de  $G(A)$  multiplicando la etiqueta de cada arco por r. Las propiedades usuales de la multiplicación por un escalar son fáciles de verificar.

Definición. Dada una matriz  $A$   $m \times n$  y una matriz  $B$   $n \times r$ , la digráfica eslabonamiento  $G(A)*G(B)$  está definida tomando las digráficas  $G(A)$  y  $G(B)$  e identificando los  $n$  vértices columna de  $G(A)$  y los  $n$  vértices renglón de  $G(B)$ . Un ejemplo de un eslabonamiento de dos gráficas se muestra en la siguiente figura 1.2.

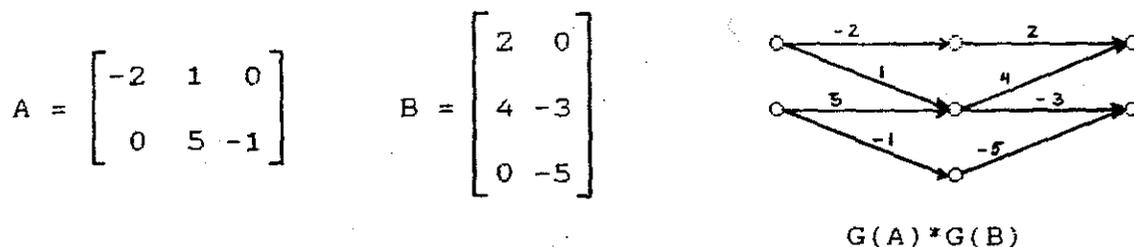


Figura 1.2. Eslabonamiento de dos digráficas de König.

Teorema 1.1. La entrada  $(i,j)$  de la matriz producto  $AB$  es igual a la suma de los pesos de las veredas en  $G(A)*G(B)$  desde el  $i$ -ésimo vértice renglón de  $G(A)$  hasta el  $j$ -ésimo vértice columna de  $G(B)$ .

Prueba: Cada vereda de dos longitudes del vértice  $i$  al vértice  $j$  pasa directamente de un único vértice  $k$ . Por definición, el peso de la vereda es el producto de las etiquetas de estos arcos, el cual es  $a_{ik}b_{kj}$ , sumando todos los posibles  $k$  da en resultado deseado.

Nótese que la exclusión de bordes de peso cero de la digráfica de acuerdo a nuestra convención permite aún la validez del teorema. Vemos, por ejemplo, que para la digráfica anterior (figura 2), la entrada  $(1,2)$  del producto  $AB$  es  $-3$ , entonces hay únicamente una vereda entre los vértices asignados.

## PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION.

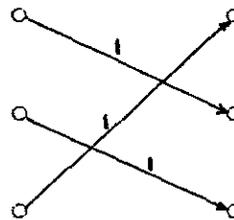
Varias propiedades de la multiplicación de matrices son consecuencias inmediatas del teorema 1.1. Por ejemplo, para probar que la multiplicación de matrices es asociativa, supóngase que las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son de órdenes adecuados y consideremos la gráfica  $G(A)*G(B)*G(C)$ , entonces la entrada  $(i,j)$  de  $A(BC)$  y  $(AB)C$  son claramente iguales que la suma de los pesos de las veredas de tres longitudes desde el  $i$ -ésimo vértice renglón de  $G(A)$  hasta el  $j$ -ésimo vértice columna de  $G(C)$ . Para la demostración de que la multiplicación de matrices es distributiva bajo la adición, es un fácil ejercicio, observando una vereda particular  $(i,j,k)$  en las digráficas de König  $G(A)*G(B)$ ,  $G(B)*G(C)$  y  $G(A)*G(B+C)$ .

Definición: Una matriz  $P$  ( $n \times n$ ), cuyas entradas son 0 y 1 de tal forma que hay un único 1 en cada renglón y en cada columna recibe el nombre de matriz permutación o matriz de permutación.

Si  $P$  es una matriz permutación, entonces  $G(P)$  consiste de un conjunto de arcos con los vértices no comunes. En otras palabras, la valencia externa de cada vértice renglón y la valencia interna de cada vértice columna son iguales a 1 y todas las etiquetas de los arcos son 1. Ver fig. 1.3. Existen  $n!$  matrices permutación ( $n \times n$ ) y el producto entre ellas da como resultado una matriz permutación del mismo orden. Esto es fácil de visualizar observando la digráfica eslabonamiento.

Nótese que el efecto que produce una matriz permutación  $P$  de orden  $n$  al multiplicar a una matriz  $M$  ( $r \times n$ ) es fácil de visualizar observando la digráfica de König  $G(P)$ . Por ejemplo, en

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



G(P)

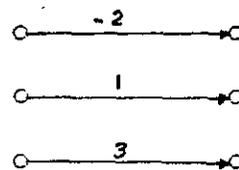
Fig. 1.3. Una matriz permutación P (3x3) y su digráfica de König.

la digráfica G(P) de la figura 1.3 se puede visualizar el efecto que producirá P al multiplicar a una matriz  $rx3$ . Esto es, cambiará la segunda columna por la primera, la tercera por la segunda y la primera por la tercera.

#### MATRICES DIAGONALES Y TRIANGULARES.

Definición: Una matriz diagonal es una matriz  $n \times n$  donde las componentes que no están en la diagonal son todas cero. La digráfica de una matriz diagonal produce los siguientes casos triviales. Ver fig. 1.4. El producto de matrices diagonales de orden  $n$  da como resultado matrices diagonales de orden  $n$ . Cada entrada diagonal del producto es el producto de las entradas diagonales correspondientes a los factores.

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



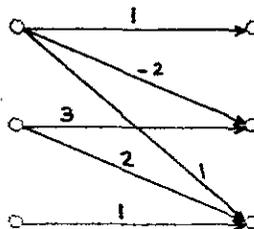
G(D)

Fig. 1.4. Una matriz diagonal D (3x3) y su digráfica de König G(D).

Definición: Una matriz es triangular superior (o inferior) si  $a_{ij}=0$  con  $i > j$  o ( $i < j$ ). Así  $G(A)$  es la digráfica de König de una matriz triangular superior (o inferior) si y sólo si todos los arcos en el dibujo son horizontales o inclinados (o ascendentes) ver fig 1.5. El producto de matrices triangulares superiores (o inferiores) de orden  $n$  son matrices triangulares superiores (o inferiores) de orden  $n$ .

Nótese que el eslabonamiento de las digráficas de dos matrices triangulares superiores (o inferiores)  $n \times n$  dará una nueva digráfica de una matriz triangular superior (o inferior) de orden  $n$ .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

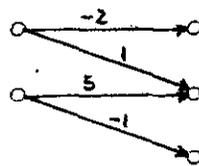


G(T)

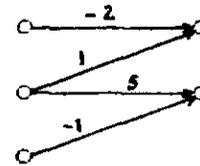
Fig. 1.5. Una matriz triangular superior T y su digráfica de König G(T).

### MATRICES TRANSPUESTAS

La digráfica de König de la transpuesta de A se obtiene de  $G(A)$  invirtiendo la dirección de todos los arcos. Si deseamos incluir la convención teniendo vértices renglón en la izquierda y vértices columna en la derecha, entonces reflejaríamos la nueva gráfica con respecto a una línea através de los vértices columna. (ver figura 1.6).



$G(A)$



$G(A^{\sim})$

Figura 6.

Teorema 1.2. Sean  $A^{\sim}$  y  $B^{\sim}$  las transpuestas de las matrices  $A$  y  $B$  respectivamente; entonces

- 1)  $(A^{\sim})^{\sim} = A$
- 2)  $(A + B)^{\sim} = A^{\sim} + B^{\sim}$
- 3)  $(cA)^{\sim} = cA^{\sim}$
- 4)  $(AB)^{\sim} = B^{\sim}A^{\sim}$

Nótese como la transposición de los arcos hace que la transposición de las matrices  $A$  y  $B$  en la ecuación sean intuitivamente clara.

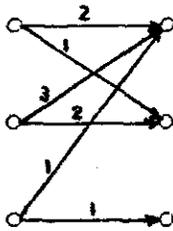
#### MULTIPLICACION POR BLOQUES.

Como el elemento  $(i, j)$  del producto matricial  $AB$  está determinado completamente por la subgráfica de  $G(A) * G(B)$  consistente del vértice renglón  $i$  de  $G(A)$ , el vértice columna  $j$  de  $G(B)$  y todas las veredas de longitud dos uniéndose. Una partición de los vértices columna de  $G(A)$  (igual a los vértices renglón de  $G(B)$ ) produce una partición de estas veredas. La validez de la multiplicación por bloques surge de una partición de los renglones y columnas de la matriz. Ver ejemplo 1.1.

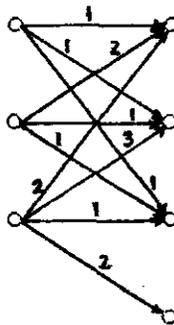
Ejemplo 1.1. Hallar  $AB$  efectuando particiones de las digráficas de König  $G(A)$  y  $G(B)$ , siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

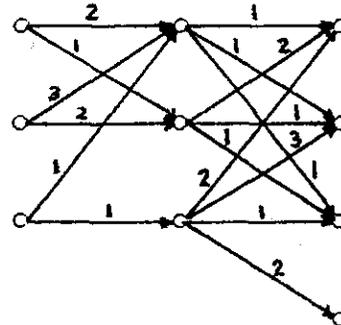
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$G(A)$

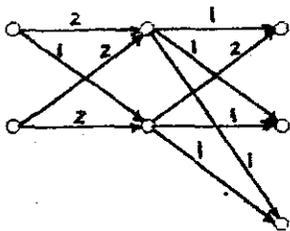


$G(B)$

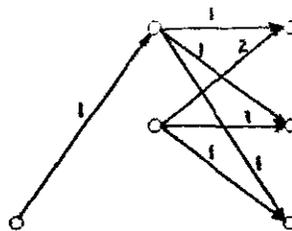


$G(A)*G(B)$

Podemos efectuar la partición siguiente:

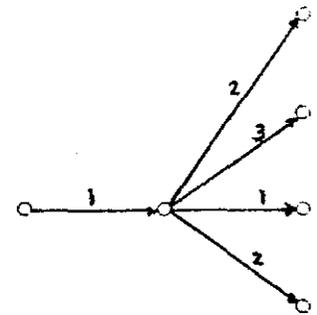


$G(A1)*G(B1)$



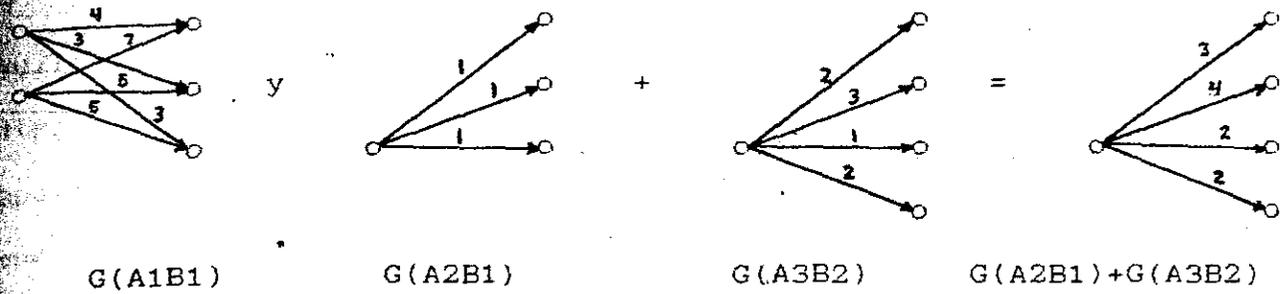
$G(A2)*G(B1)$

+

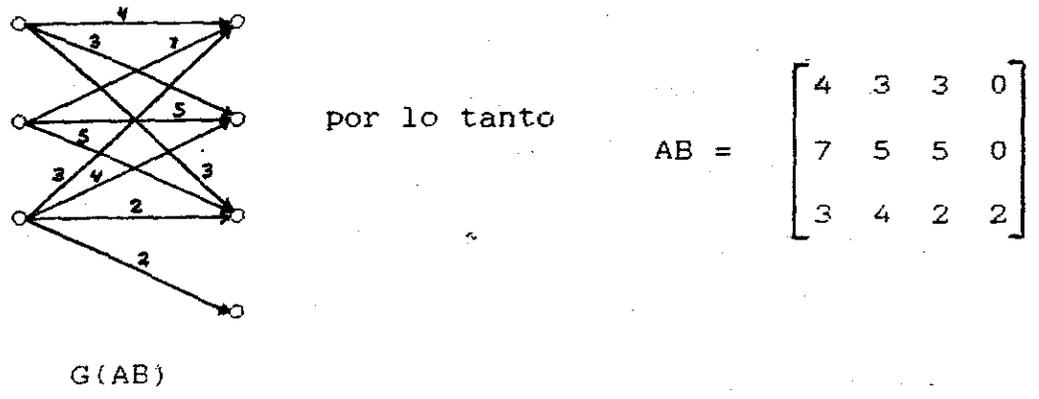


$G(A3)*G(B2)$

Efectuando las multiplicaciones en los eslabonamientos se tiene:



Uniendo las particiones de vértices renglón ajenos tenemos  $G(A1B1) + G(A2B1) + G(A3B2) = G(AB)$ . Nótese que no es la única partición que se puede hacer de los vértice columna de  $G(A)$ .



OPERACIONES ELEMENTALES POR RENGLONES Y COLUMNAS.

Las propiedades de matrices asociadas con operaciones elementales por renglones son fáciles de ver usando las digráficas de König. Por ejemplo, si se desea multiplicar el  $i$ -ésimo renglón de una matriz  $A$   $m \times n$  por  $k$  y sumar a éste el  $j$ -ésimo renglón, simplemente encadenamos a la digráfica de  $G(A)$  la digráfica que se muestra en la figura 1.7 (a). Este es un ejercicio fácil para construir la digráfica de König que representa el intercambio de dos renglones de una matriz o la

multiplicación de un renglón por  $k$  ver figuras 1.7 (b) y (c). Las digráficas en la figura 1.7, se les llama digráficas de König para operaciones elementales por filas. Un vistazo rápidamente a esto, muestra que las digráficas de König para operaciones por filas y operaciones inversas son idénticas excepto tal vez para el etiquetamiento en el primer caso  $k$  se reemplaza por  $-k$  y en el otro caso por  $1/k$ .

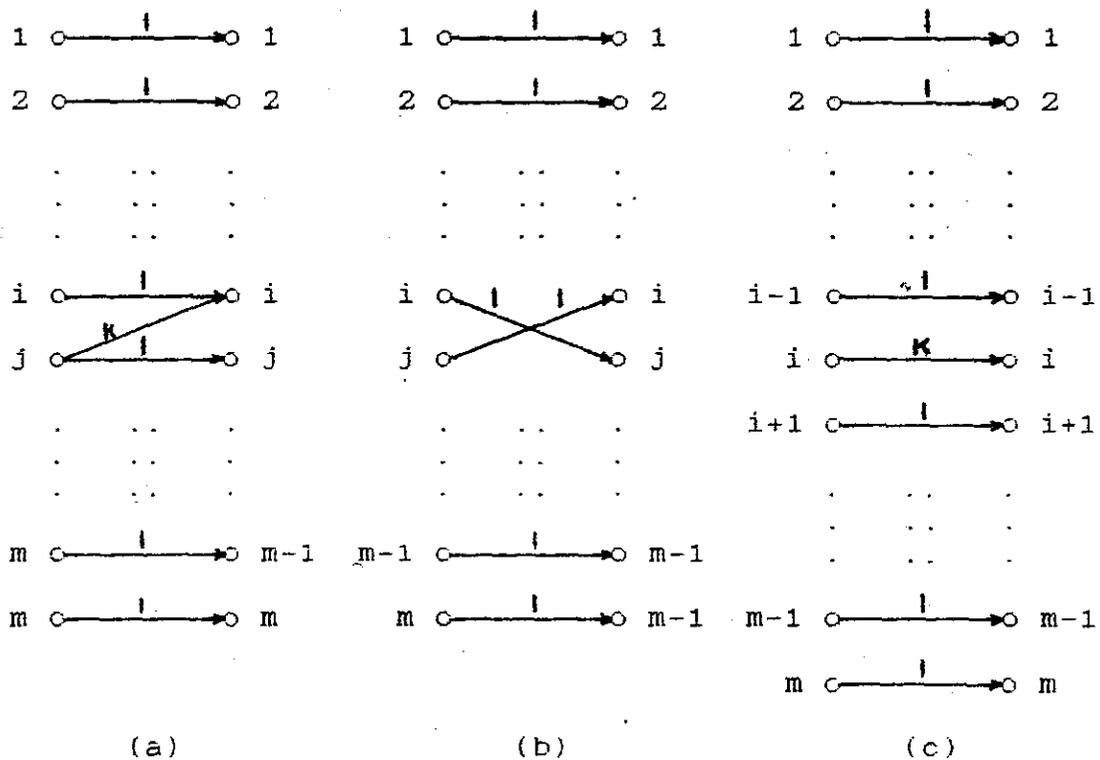
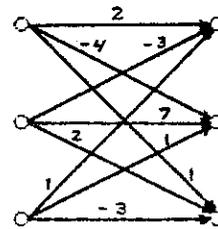


Figura 1.7. Digráficas de König para operaciones elementales por renglones de una matriz  $m \times n$ : (a) suma de un múltiplo del  $i$ -ésimo renglón y el  $j$ -ésimo renglón; (b) intercambio del  $i$ -ésimo renglón con el  $j$ -ésimo renglón; (c) multiplicación del  $i$ -ésimo renglón por  $k$ .

Definición. Se dice que la matriz A es equivalente por filas a la matriz B, si B se puede obtener de A por medio de una sucesión finita de las operaciones elementales por filas. Nótese que una matriz cuadrada A de orden n será equivalente por columnas a la matriz identidad I del mismo orden, si la digráfica de König G(I) (la cual consta de n arcos horizontales con etiqueta 1), se puede obtener de G(A) mediante el eslabonamiento sucesivo de las digráficas de la figura 1.7. Ver ejemplo 1.2.

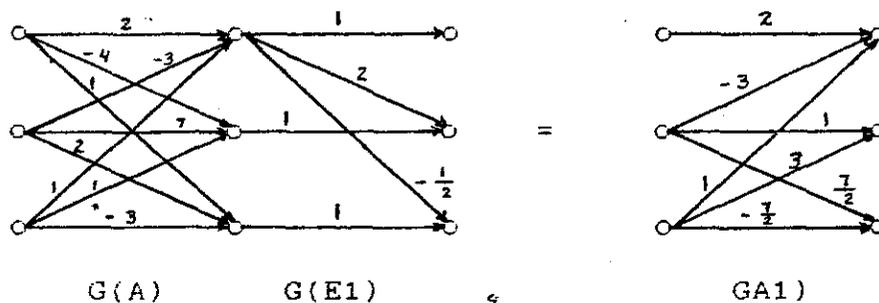
Ejemplo 2. Verificar que la matriz A dada enseguida es equivalente por filas a la matriz identidad mediante las digráficas de König.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

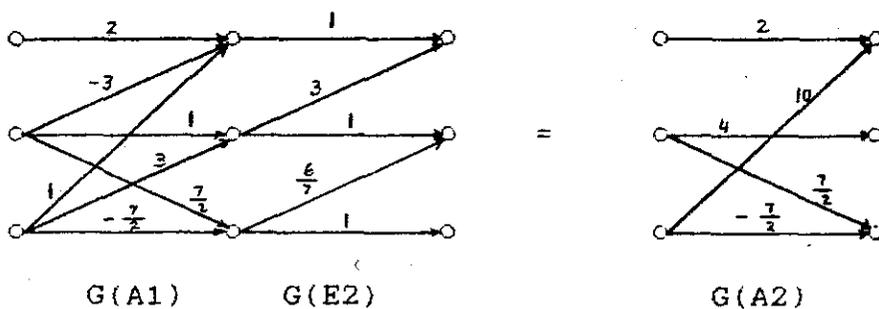


G(A)

Encadenamos a la digráfica G(A), la digráfica que multiplica a la primer columna por 2 y la suma a la segunda columna y, que multiplica por  $-1/2$  a la primer columna y la suma a la tercera. Con esto, la segunda y tercera componentes del primer renglón serán cero. Esto es:



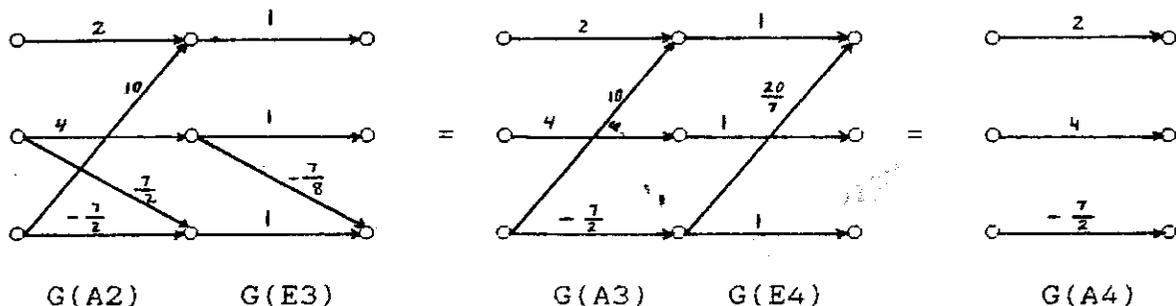
Después encadenamos a la digráfica obtenida  $G(A1)$ , la digráfica que multiplica a la segunda columna por 3 y la suma a la primera columna y, multiplica por  $6/7$  a la tercera columna y la suma a la segunda columna, con esto los arcos  $(2,1)$  y  $(3,2)$  de  $G(A1)$  (cuyas etiquetas son  $-3$  y  $3$  respectivamente) serán ceros en  $G(A2)$ . Así que:



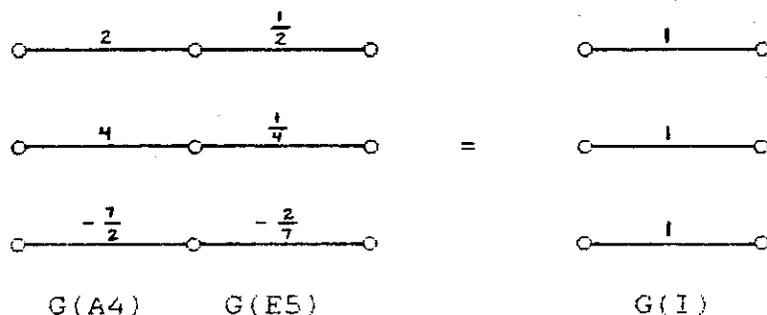
Nótese que el arco  $(i,j)$  que se va a eliminar en la digráfica es también el arco  $(i,j)$  en la digráfica que se eslabona y los pesos de las veredas  $(j,i,i)$  y  $(j,j,i)$  son inversos aditivos.

Ahora encadenamos a la digráfica  $G(A2)$  la digráfica que multiplica a la segunda columna por  $-7/8$  y se la suma a la tercera. Con esto se eliminará el arco  $(2,3)$  de  $G(A2)$ .

Seguidamente encadenamos a  $G(A_4)$  la digráfica que multiplica a la tercer columna por  $20/7$  y se la suma al primer columna, con esto se eliminará el arco  $(3,1)$  de  $G(A_3)$ .



Por último encadenamos a  $G(A_4)$  la digráfica que multiplica por  $1/2$ ,  $1/4$  y  $-2/7$  a la primer, segunda y tercer columna respectivamente para obtener el resultado deseado.



### INVERSA DE UNA MATRIZ.

Definición. Una matriz  $A$  es inversible si existe una matriz  $B$  con la propiedad de que  $AB = BA = I$  donde  $I$  es la matriz identidad llamamos a  $B$  la inversa de  $A$  y la denotamos por  $A'$ . Denotaremos a la digráfica de  $A'$  por  $G(A')$ .

Según la definición tenemos que  $G(AB) = G(BA) = G(I)$ . Además,  $G(AB) = G(A)*G(B)$ , entonces  $G(A)*G(B) = G(I) = G(B)*G(A)$ .

Suponiendo que A es una matriz de orden n equivalente a la matriz identidad I por filas y sean  $G(E_1), G(E_2), \dots, G(E_n)$ , las digráficas de König mediante las cuales  $G(A)$  es equivalente por filas a  $G(I)$  entonces:

$$G(A) * G(E_1) * G(E_2) * \dots * G(E_n) = G(I)$$

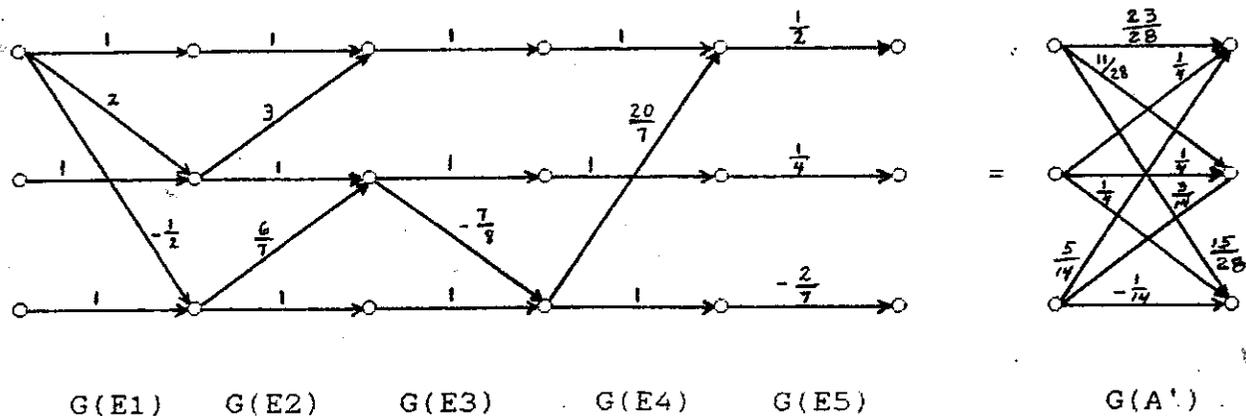
$$\text{y } G(A') * G(A) * G(E_1) * G(E_2) * \dots * G(E_n) = G(A') * G(I)$$

$$\text{así que: } G(I) * G(E_1) * G(E_2) * \dots * G(E_n) = G(A').$$

Por lo que el cálculo de la matriz inversa de una matriz A existe si  $G(A)$  puede llevarse a  $G(I)$  mediante las digráficas de König para operaciones elementales por filas. Ver ejemplo 1.3.

Ejemplo 1.3. Encontrar la matriz inversa  $A'$  de la matriz del ejemplo 1.2.

Encadenando las digráficas  $G(E_1), G(E_2), G(E_3), G(E_4), G(E_5)$  se tiene el resultado deseado. Esto es:



Las propiedades comunes de las matrices inversas son fáciles de ver con las digráficas de König. Por ejemplo, para demostrar que  $(AB)' = B'A'$ , sean A Y B matrices de orden n inversibles; basta observar la digráfica  $G(A)*G(B)$  se ve claramente que primero se tiene que encontrar las digráficas  $G(E_i)$  para operaciones elementales por filas de  $G(B)$  para obtener  $G(I)$  y después las de  $G(A)$  de manera que al tratar de encontrar la matriz inversa de AB tendrían que aparecer primero las digráficas de las operaciones elementales de  $G(B)$  y después las de  $G(A)$ .

## CAPITULO II

### LAS GRAFICAS CUBIERTAS Y EL DETERMINANTE

En este capítulo veremos una digráfica diferente asociada con una matriz cuadrada. El determinante de una matriz puede ser calculado de los pesos de los ciclos de estas digráficas. Esto, permite relativamente el cálculo del determinante de una matriz de orden arbitrario, especialmente si hay muchos ceros. Usualmente los determinantes se definen huyéndole a la teoría de permutaciones, una presentación la cual por su naturaleza y, por el mismo concepto de determinante es profunda y exige una dificultad relativa. Una alternativa común es la definición del determinante, usando los cofactores inductivamente pero se tienen muchos caminos inductivos, los resultados de las pruebas son frecuentemente aceptadas pero no muy bien comprendidas. El camino de la teoría de gráficas evita ambos enredos. En la prueba, por ejemplo, de que el determinante de una matriz  $A$  y el determinante de la matriz transpuesta  $A^T$  son iguales, evitamos la convención confusa en la notación cuando se usa cualquiera de las dos pruebas, por permutaciones o por la prueba inductiva. La prueba de la teoría de gráficas de este resultado se obtiene rápidamente.

Recalcamos que un factor  $F$  de una digráfica  $H$  es una subgráfica que contiene todos los vértices de  $H$  en la cual cada

vértice tiene la valencia externa y la valencia interna iguales a 1. En otras palabras, consiste en la colección ajena de ciclos que van a través de cada vértice de H. Al número de ciclos del factor F se denota por  $n(F)$ . Si la digráfica H está etiquetada, entonces  $W(F)$  denota el peso del factor.

### DIGRAFICAS CUBIERTAS.

Definición. Dada una matriz cuadrada  $A=[a_{ij}]$  de orden n. La digráfica cubierta  $D(A)$  es una digráfica etiquetada con n vértices en donde el arco del vértice i al vértice j tiene  $a_{ij}$  como etiqueta. La siguiente figura muestra una gráfica cubierta  $D(A)$  de una matriz A 3x3.

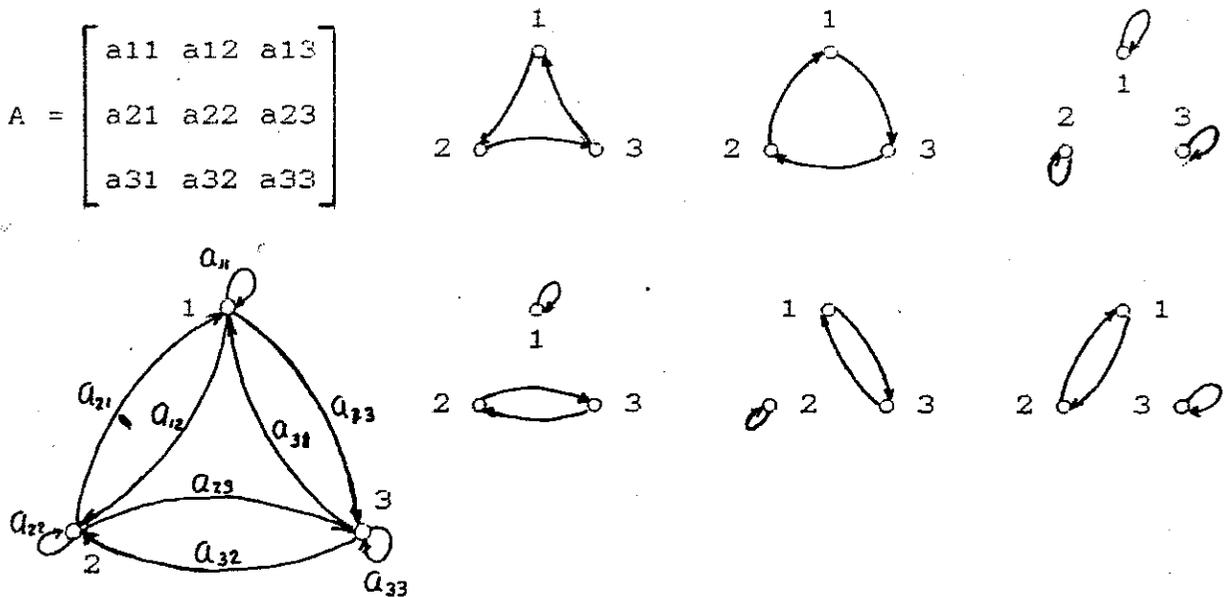


Figura 2.1 . La digráfica cubierta  $D(A)$  de una matriz A de  $n=3$ , y los seis factores de  $D(A)$ .

La digráfica  $D(A)$  para  $n=3$  tiene seis factores; los que no tienen lazos son los ciclos  $(1,2,3,1)$  y  $(1,3,2,1)$ , los tres con un lazo son  $(1,1) (2,3,2)$ ,  $(2,2) (1,3,1)$  y  $(3,3) (1,2,1)$ ; finalmente,  $(1,1) (2,2) (3,3)$  consiste de tres lazos.

#### DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Definición. Dada una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$ ,  $D(A)$  es su digráfica cubierta y  $F$  es el conjunto de todos los factores de  $D(A)$ , entonces el determinante de  $A$  está definido por:

$$\text{Det } A = (-1) \sum_{F \in \mathcal{F}} (-1)^{n(F)} W(F). \quad (1)$$

En el ejemplo de la matriz  $3 \times 3$  (figura 2.1), los factores que no tienen lazos contribuyen  $-a_{12}a_{23}a_{31}$  y  $-a_{13}a_{32}a_{21}$  a la sumatoria, aquellos que tienen un lazo contribuyen  $a_{11}a_{23}a_{32}$ ,  $a_{13}a_{22}a_{31}$  y  $a_{12}a_{21}a_{33}$  a la sumatoria y el factor final agrega  $-a_{11}a_{22}a_{33}$ . Ya que  $(-1)^3 = -1$ , observamos que la ecuación (1) concede el resultado estándar. Directamente se verifica la validez de la fórmula (1) para el determinante de  $n=1$ ,  $n=2$  y  $n=4$ . Notemos que para  $n=4$ , el conjunto de todos los factores pueden ser divididos en 9 factores sin lazos, 8 factores con un lazo, 6 factores con dos lazos y un factor con cuatro lazos.

Probemos ahora que la formulación (1) del determinante es idéntica con la definición usual por permutaciones.

Teorema 2.1. Las definiciones del  $\det A$  por teoría de gráficas y por permutaciones son equivalentes es decir, si  $\det A$  está definido por la ecuación (1), entonces

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \dots a_{n, \sigma(n)},$$

donde  $S_n$  es el conjunto de todas las permutaciones de los enteros  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Prueba: Para cualquier permutación  $\sigma$ , el conjunto de arcos  $\{(i, \sigma(i)) / i=1, 2, \dots, n\}$  forma un factor  $F$ . Recíprocamente todo factor  $F$  también corresponde a una permutación  $\sigma$ . De aquí que para completar la prueba sólo necesitamos mostrar que las dos definiciones producen valores con el mismo signo, es decir, que  $(-1)^n (-1)^{n(F)} = \operatorname{sgn}(\sigma)$ . Los vértices en un ciclo del factor  $F$  corresponden precisamente a los enteros en un ciclo en la descomposición de la correspondiente permutación  $\sigma$ . Además, una permutación cíclica es par, si y sólo si, el ciclo correspondiente en la digráfica tiene un número impar de vértices. Denotemos por  $e(\sigma)$  y  $o(\sigma)$  al número de ciclos pares y nones en la permutación (o equivalentemente, los ciclos pares y nones en el factor). Entonces:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{o(\sigma)}, \quad n(F) = e(\sigma) + o(\sigma)$$

donde  $n$  y  $e(\sigma)$  tienen la misma paridad. Entonces:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{o(\sigma)} = (-1)^{n(F) - e(\sigma)} = (-1)^{e(\sigma)} (-1)^{n(F)} = (-1)^n (-1)^{n(F)}$$

DETERMINANTE DE MATRICES TRANSPUESTAS, TRIANGULARES,  
DIAGONALES Y EQUIVALENTES POR RENGLONES O COLUMNAS.

Usando la definición (1), he aquí la prueba de que el determinante de una matriz y su transpuesta son iguales. La digráfica cubierta  $D(A^T)$  se obtiene de  $D(A)$  invirtiendo la orientación de cada arco; esto deja los factores, el peso de cada factor y el número de ciclos de cada factor sin cambio alguno y de aquí que el determinante no cambia.

En la última sección del capítulo I consideramos matrices que corresponden a las operaciones elementales por renglones. La matriz que intercambia dos renglones tendrá digráfica cubierta de un sólo factor, es decir,  $n-2$  lazos y un ciclo de longitud dos. Ya que todos los pesos son iguales a 1, el determinante es  $(-1)^n (-1)^{n-1} = -1$ . La suma de un múltiplo de un renglón a otro también corresponde a una digráfica cubierta con sólo un factor y el determinante es 1 en tal caso. Finalmente, multiplicando un renglón por  $k$  corresponde a una matriz diagonal y esta matriz tiene una digráfica cubierta con sólo lazos de aquí que su determinante es  $k$ .

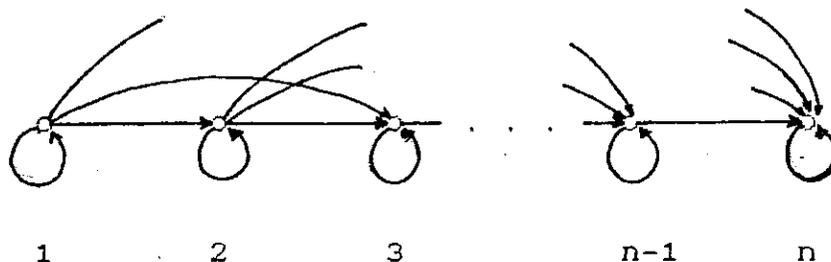


Figura 2.2. La gráfica cubierta de una matriz triangular superior.

Consideremos una matriz triangular superior como un ejemplo futuro. Como se puede ver en la figura 2.2, si los vértices de esta digráfica cubierta son colocados horizontalmente o en un orden creciente, entonces todos los arcos son lazos o van de izquierda a derecha y, en consecuencia, los únicos ciclos posibles son lazos. Pero esto significa, que el único factor (distinto de cero) es  $(1,1) (2,2) (3,3) \dots (n,n)$  de aquí que:

$$\det A = (-1)^n (-1)^n a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Hemos probado que el determinante de una matriz triangular superior es el producto de sus elementos en la diagonal.

Veamos ahora el efecto de las operaciones elementales por filas en la digráfica cubierta y consecuentemente en el determinante.

**Teorema 2.2.** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , y sea  $B$  una matriz obtenida de  $A$  por multiplicación del  $i$ -ésimo renglón por  $k$ .

$C$  obtenida de  $A$  por intercambio del  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo renglones.

$E$  obtenida de  $A$  por suma del  $j$ -ésimo y el  $i$ -ésimo renglón:

Entonces:

$$\det B = k \det A,$$

$$\det C = -\det A \quad \text{y}$$

$$\det E = \det A.$$

**Prueba:**  $D(B)$  se obtiene de  $D(A)$  multiplicando la etiqueta de cada arco que sale del  $i$ -ésimo vértice por  $k$ . Así  $F$  es un factor de  $D(A)$  si y sólo si  $F$  es un factor de  $D(B)$ . Ya que la valencia

externa de cada vértice en  $F$  es 1, los pesos de todos los arcos de  $F$  en  $D(A)$ , excepto uno, son los mismos que los pesos de  $F$  en  $D(B)$ , la excepción es que ese único arco sale del  $i$ -ésimo vértice el cual ha sido multiplicado por  $k$ . Así, el peso de  $F$  en  $D(B)$  es  $k$  veces que en  $D(A)$ , y sumando sobre todos los factores,  $\det B = k \det A$ .

La digráfica cubierta  $D(A)$  y  $D(C)$  puede ser relatada como sigue: deseamos tomar la digráfica  $D(A)$  y mover algunos de sus arcos. Ya que  $a_{ik} = c_{jk}$  y  $a_{jk} = c_{ik}$ ,  $D(C)$  se obtiene de  $D(A)$  tomando cada arco que sale del  $i$ -ésimo y moverlo hasta que éste salga del  $j$ -ésimo vértice, e inversamente moviendo los arcos que salen del  $j$ -ésimo vértice hasta que éstos salgan del  $i$ -ésimo vértice (el lado terminal del arco permanece fijo). El cambio neto de estos movimientos de arcos está en el intercambio  $a_{ik}$  y  $a_{jk}$  para toda  $k$ , la cual, por supuesto, es justamente lo que se desea. Ahora consideremos un factor particular  $F$ , y supóngase que las etiquetas de los arcos que salen del vértice  $i$  y del vértice  $j$  son  $a$  y  $b$  respectivamente. Cómo afectan estos intercambios a  $F$ ? Permanece un factor con  $W(F)$  inalterable! Como se puede ver en la figura 2.3, si ambos vértices  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo están en el mismo ciclo para empezar, entonces el movimiento de los arcos separa al ciclo en dos nuevos ciclos con el mismo peso (figura 2.3 de izquierda a derecha). Por otra parte, si el  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo vértices están en diferentes ciclos entonces el movimiento de los arcos conduce a que se combinen en un solo ciclo con el mismo peso (figura 2.3 de derecha a izquierda).

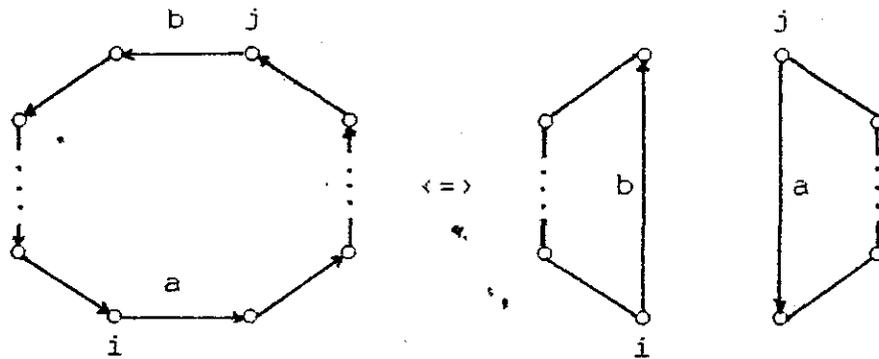


Figura 2.3. El cambio en un factor bajo un intercambio de renglones.

En ambos casos,  $W(F)$  es inalterable y  $n(F)$  es aumentado o disminuido en 1. Así, el signo de cada sumando cambia y,  $\det C = -\det A$ .

Nótese que si  $A$  tiene dos renglones idénticos, entonces intercambiándolos conserva a  $A$  idéntica pero inversa al signo de  $\det A$ , y así  $\det A = 0$ . Ahora sea  $A'$  obtenida de  $A$  reemplazando el  $i$ -ésimo renglón de  $A$  por el  $j$ -ésimo renglón de  $A$  (tal que  $\det A' = 0$ ). Consideremos un factor  $F$  de  $D(E)$ ; es también un factor de  $D(A)$  y  $D(A')$ , y todos los pesos de los arcos son idénticos excepto para el arco  $F$  que sale del  $i$ -ésimo vértice. El peso de este arco es  $a_{ik} + a_{jk}$  en  $E$ ,  $a_{ik}$  en  $A$  y  $a_{jk}$  en  $A'$ . Así, el peso de  $F$  en  $D(E)$  es la suma del peso de  $F$  en  $D(A)$  y el peso de  $F$  en  $D(A')$ . Sumando sobre todos los factores  $F$ , obtenemos  $\det E = \det A + \det A' = \det A$ .

Si uno ya sabe como reducir una matriz a su forma escalonada por renglones, entonces es fácil ver del teorema 2.2 que  $\det EA = \det E \det A$  para una matriz elemental  $E$  y consecuentemente  $\det AB = \det A \det B$  se tiene en general (véase

apéndice A).

Algunas veces el determinante se define abstractamente como una función del conjunto de matrices cuadradas de orden  $n$  al conjunto de los números reales, que vista como una función de  $n$  variables de las columnas, es recíproca, multilineal y toma la matriz identidad como 1. Ya que  $\det A^T = \det A$ , podemos usar renglones en lugar de columnas, por supuesto. Supóngase que  $F$  es un factor de una gráfica dirigida con  $n$  vértices. Entonces, por el argumento del teorema 2.2, el mapeo que toma una matriz cuadrada  $M$  en  $(-1)^n W(F)$  es una función lineal en cada renglón de  $M$ . De aquí sumando todos los renglones, vemos de (1) que el determinante es de hecho una forma multilineal recíproca en los renglones de  $M$ . y el determinante de la matriz identidad es 1. Ya que es bien conocido que estas formas son únicas. Ahora veremos que la definición gráfica es equivalente a la definición abstracta.

#### EXPANSION DEL DETERMINANTE POR COFACTORES.

Ahora, consideremos la expansión del determinante por cofactores. Dada una matriz cuadrada  $A$ , sea  $D_{ij}$  definido como el determinante de la matriz obtenida por cofactores quitando el  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna de  $A$ . El cofactor  $(i, j)$  de  $A$  denotado  $A_{ij}$ , está entonces definido por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Ahora consideremos el conjunto  $F$  de todos los factores de  $D(A)$  y en particular el vértice  $i$ . Todo factor contiene un arco único que sale del vértice  $i$ . Sea  $F_j$  el conjunto de factores que contienen al arco  $(i, j)$ . Luego, claramente  $F$  está dividido por  $F_j$ ,  $j=1, 2, 3, \dots, n$ . El cofactor  $(i, j)$  puede ahora expresarse en términos de  $F_j$ .

Teorema 2.3. Sea  $A=[a_{ij}]$  una matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $1 \leq j \leq n$  y sea  $F_j$  el conjunto de factores de  $D(A)$  que contienen al arco  $(i, j)$ . Entonces,

$$a_{ij}A_{ij} = (-1)^n \sum_{F \in F_j} (-1)^{n(F)} W(F). \quad (2)$$

Prueba: Primero, supóngase que  $i=j$ , y sea  $A'$  la matriz cuadrada de orden  $n-1$  obtenida por cofactores suprimiendo el  $i$ -ésimo renglón y la  $i$ -ésima columna de  $A$ . Por definición algún  $F$  en  $F_i$  contendrá al lazo  $(i, i)$ . Así, los factores en  $F_i$  son precisamente los factores de  $D(A')$  más el lazo  $(i, i)$ . Ya que, el peso de un factor en  $F_i$  es el producto de  $a_{ii}$  y los pesos de un factor en  $D(A')$ , el resultado está claro excepto, posiblemente, por el signo: El factor en  $F_i$  tiene un ciclo más que el correspondiente factor en  $D(A')$ , así un múltiplo extra de  $-1$  se introduce en la sumatoria. Sin embargo, el orden de  $D(A)$  es mayor en 1 que el orden de  $D(A')$  y así un múltiplo de  $-1$  aparece fuera de la sumatoria; así, el teorema es válido cuando  $i=j$ .

Para completar la prueba del teorema, debemos ver el efecto del intercambio de dos columnas adyacentes de  $A$  en el lado

izquierdo y derecho de la ecuación (2). Sea  $A'$  obtenida de  $A$  intercambiando las columnas  $r$  y  $r+1$ . Ciertamente tenemos  $a_{ir}=a'_{ir+1}$  y

$$A_{ir} = (-1)^{i+r} \quad D_{ir} = -[(-1)^{i+r+1} D'_{ir+1}].$$

Así, intercambiando dos columnas adyacentes, causa que el valor del lado izquierdo de la ecuación (2) cambie sólo de signo. Para el lado derecho, procedemos como en la prueba del teorema 2.2 y reacomodamos los arcos de  $D(A)$  para formar  $D(A')$ . Ya intercambiando columnas, movemos el lado terminal y después el lado inicial de los arcos. Así todo arco que termina en el  $r$ -ésimo vértice es movido, hasta terminar en el  $r+1$ -ésimo vértice y viceversa. En una manera análoga a la ilustrada en la figura 2.3, todo factor  $F$  en  $Fr$  se convierte en un factor  $F'$  en  $Fr+1$  con  $W(F)=W(F')$  y  $[n(F)-n(F')]=1$ . Sumando sobre todos los  $F$  en  $Fr$ , tenemos:

$$(-1)^n \sum_{F \in Fr} (-1)^{n(F)} W(F) = -[(-1)^n \sum_{F' \in Fr+1} (-1)^{n(F')} W(F')].$$

Así, el lado derecho de la ecuación (2) también cambia de signo cuando dos columnas adyacentes se intercambian. De aquí que la ecuación (2) es válida para  $A$  si y sólo si es válida para  $A'$ . En otras palabras, si el teorema es válido para una  $i$  y una  $j$  particular, entonces también es válido para  $i$  y  $j+1$ .

Ahora supóngase que  $i > j$ , entonces sucesivamente intercambiamos las columnas  $j$  y  $j+1$ ,  $j+1$  y  $j+2$ ,  $j+2$  y  $j+3$ , etc., hasta que finalmente intercambiamos las columnas  $i-1$  e  $i$ . Por el

argumento anterior, todas las matrices resultantes simultáneamente satisfarán o no la ecuación (2) del teorema.

Ya que la matriz final es sólo el caso donde  $i=j$ , vemos que el teorema es válido para todas las matrices y en particular para  $A$ . El argumento para  $i < j$  es simétrico.

Corolario (Expansión por cofactores). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ; entonces,

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}.$$

Prueba: Como se hizo notar previamente,  $F$  es dividido por  $F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Así:

$$\det A = (-1)^n \sum_{F \in \mathcal{F}} (-1)^{n(F)} W(F) = \sum_{k=1}^n (-1)^n \sum_{F \in \mathcal{F}_k} (-1)^{n(F)} W(F) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}.$$

### CAPITULO III

#### UNA VIEJA PRUEBA DE LA FORMA CANONICA DE JORDAN.

Es una prueba maravillosamente fácil. Es de hace 50 años y cuando uno usa el lenguaje moderno de la teoría de gráficas puede hacerse muy visual. La parte más difícil de la prueba está en lograr la forma triangular. Después de esto, los detalles son extremadamente fáciles de seguir ya que se reduce al uso de las operaciones elementales por renglones seguidas por las correspondientes operaciones elementales por columnas. Así, para quienes estén más familiarizados con eliminación gaussiana y otros aspectos del álgebra lineal es un buen camino para introducir la forma canónica de Jordan.

La prueba consiste en que dada una matriz  $A$  de orden  $n$ , uno busca listas de Jordan de vectores  $w_1, w_2, w_3, \dots$  donde

$$Aw_1 = kw_1, \quad Aw_2 = kw_2 + w_1, \quad Aw_3 = kw_3 + w_2, \quad \dots$$

La existencia de  $n$  vectores, los cuales pueden arreglarse en listas de Jordan se verifica por restricción de  $A$  a su espacio columna (o, cuando  $A$  es no singular, por restricción de  $A - kI$  a su espacio columna, donde  $k$  es cualquiera de los valores propios de  $A$ ) y se usa inducción. Los  $n$  vectores se convierten entonces en columnas de una matriz la cual lleva a la matriz  $A$  a la forma canónica de Jordan. La única parte técnica de la prueba es la verificación de la independencia lineal de los  $n$  vectores.

## ESTRUCTURA COMBINATORIA.

3.1 Estructura Combinatoria. A continuación veremos algunos conceptos del Algebra Lineal y recordaremos algunos de la teoría de gráficas vistos en los capítulos anteriores. Esto nos permitirá visualizar la prueba que se dará aquí.

Sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  matrices complejas  $n \times n$  (o matrices  $n \times n$  sobre un campo algebraicamente cerrado). Se dice que  $A$  es similar a  $B$  si existe una matriz invertible  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$  donde  $P^{-1}$  es la inversa de  $P$ . La idea de la forma canónica de Jordan es de encontrar tan simple como sea posible la matriz  $B$  que es similar a  $A$ . Lo sencillo en el contexto está destinado a que se piense que la estructura de las entradas distintas de cero fuera de la diagonal de  $B$  es simple (elementos en la diagonal, 0 y/o 1 en la supradiagonal). Esta estructura se toma para hacer la digráfica  $D(B)$  de  $B$  la cual se define como sigue: Los vértices de  $D(B)$  son los enteros  $1, 2, 3, \dots, n$  (correspondientes simultáneamente a los renglones columna de  $B$ ). Los arcos de  $D(B)$  están ordenados por pares de vértices distintos. Precisamente hay un arco  $(i, j)$  desde  $i$  hasta  $j$  siempre que  $i \neq j$  y  $b_{ij} \neq 0$ . Un ejemplo de una matriz  $4 \times 4$  y su digráfica se ilustra en la figura 3.1.

Como se puede ver, las digráficas con la estructura más simple son aquellas sin arcos, es decir, las que consisten de un número de vértices aislados. Decimos que estas digráficas tienen la estructura trivial. Son las digráficas las cuales son asociadas con la sentido anterior

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

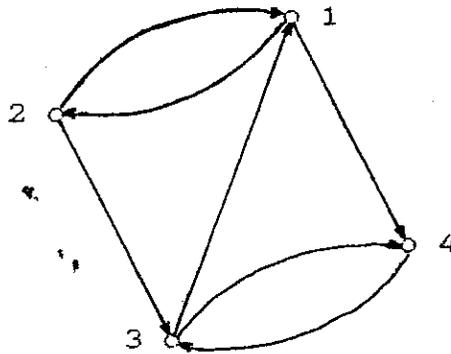


Figura 3.1. Una matriz 4x4 y su digráfica.

matrices cuyas entradas fuera de la diagonal son 0. Tal matriz y su digráfica se ilustra en la figura 3.2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Figura 3.2. Una matriz diagonal y su digráfica.

Teorema 3.1 (Jacobi). La matriz compleja  $n \times n$  es similar a una matriz triangular superior  $T$ . Las entradas en la diagonal de  $T$  son los  $n$  valores propios de  $A$ , y  $T$  puede ser escogida de tal forma que los valores propios aparecen en su diagonal principal en cualquier orden especificado.

(Una prueba de este teorema puede ser encontrada en casi cualquier libro de álgebra lineal o de teoría de matrices. El teorema de Schur afirma que  $A$  es unitariamente similar a una

matriz triangular superior véase apéndice B para la demostración de estos teoremas ). ¿Qué clase de digráficas tienen las matrices triangulares superiores? Si en el dibujo de la digráfica de una matriz triangular superior arreglamos los vértices en una columna con el vértice 1 en la parte superior y el vértice n en la parte inferior entonces todos los arcos apuntarán hacia abajo. Una matriz triangular superior y su digráfica se ilustra en la figura 3.3.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Figura 3.3. Una matriz triangular superior y su digráfica.

Un ciclo en una digráfica D es una sucesión  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k, i_1)$  de  $k + 1$  vértices ( $k \geq 2$ ) donde  $i_1, i_2, \dots, i_k$  son distintos y  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)$  son arcos de D. A una digráfica que no tiene ciclos se le llama aciclica. Ya que en el dibujo de una matriz triangular superior todos los arcos apuntan hacia abajo, la digráfica de una matriz triangular superior es aciclica. La reciprocidad de esta aseveración no es verdadera en un sentido estricto. Una matriz puede tener una digráfica aciclica sin ser triangular superior (o triangular inferior). Un ejemplo de este tipo de matrices se da en la figura 3.4. Pero,

esta matriz puede hacerse triangular superior por medio de una similaridad por permutación: Si la matriz B tiene una digráfica acíclica, entonces existe una matriz permutación P tal que P'BP es una matriz triangular superior. Puesto de otra forma, si B tiene una digráfica acíclica, entonces es posible reordenar las filas y las columnas en la misma forma y obtener una matriz triangular superior. Poniendo las filas y columnas de la matriz de la figura 3.4 en el orden 3,2,1,4 obtenemos la matriz triangular superior de la figura 3.3. Cuando la matriz permutación P, corresponde a la transposición decimos que P'BP se obtiene de B por una similaridad elemental por permutación. Ya que toda permutación es un producto de transposiciones, toda similaridad por permutación se puede acompletar por una sucesión de similaridades elementales por permutación. No nos molestaremos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Figura 3.4. Una matriz no triangular con una digráfica acíclica.

en probar que una matriz B con digráfica acíclica puede hacerse triangular superior por medio de una similaridad, no se necesita para la prueba de la forma canónica de Jordan, además de que se puede encontrar en muchos libros. Bien, ahora podemos dar una declaración combinatoria del teorema de Jacobi:

Teorema de Jacobi: (Declaración combinatoria ). La matriz  $A$   $n \times n$  es una matriz similar a  $B$  cuya digráfica es acíclica.

La forma canónica de Jordan muestra que la digráfica puede hacerse significativamente más simple que la acíclica. Para esto necesitamos recordar algunos conceptos de la teoría de gráficas . Una vereda en una digráfica  $D$  es una sucesión  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  de  $k$  vértices distintos tales que  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$  son arcos de  $D$ . La longitud de la vereda es  $k-1$ , es decir, el número de sus arcos, mientras que el tamaño de la vereda es  $k$ , es decir, el número de sus vértices. Permitimos la posibilidad de que  $k=1$ , esto es, una vereda de longitud 0 y tamaño 1. Una digráfica cuyo conjunto de vértices y arcos son  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  y  $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)\}$  respectivamente, será llamada una digráfica-vereda. Una digráfica-vereda es una clase especial de digráfica acíclica. Un ejemplo de una matriz cuya digráfica es una digráfica-vereda se ilustra en la figura 3.5.

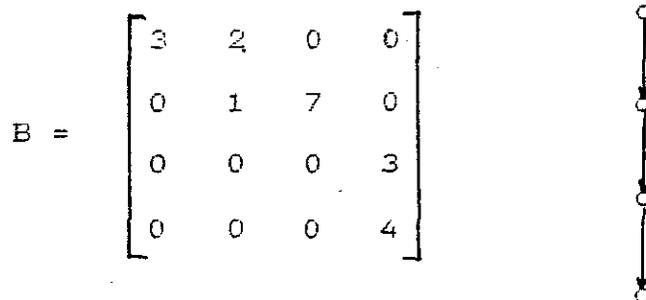


Figura 3.5. Una matriz  $4 \times 4$  y su digráfica-vereda.

Toda matriz cuya digráfica es una vereda, puede ser llevada a esta forma donde las entradas distintas de cero fuera de la

diagonal son precisamente aquellas inmediatamente arriba de la diagonal, por medio de una similaridad por permutación (el orden de los renglones y columnas es el orden de los vértices de la vereda).

La matriz B en la figura 3.5 puede hacerse numéricamente más simple sin cambiar su estructura por medio de una similaridad diagonal. Una matriz diagonal elemental es una matriz diagonal con entradas en la diagonal distintas de cero, la mayoría de las cuales son diferentes de 1. Toda matriz diagonal invertible es un producto de matrices diagonales elementales. La matriz diagonal  $n \times n$  con entradas en la diagonal iguales a  $d_1, d_2, \dots, d_n$  será denotada por  $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Sea  $D_1 = \text{diag}(1, 1/2, 1, 1)$ . Luego con B como en la figura 3.5,

$$D^{-1}BD = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Si ahora hacemos  $D_2 = \text{diag}(1, 1, 1, 1/14)$  y  $D_3 = \text{diag}(1, 1, 1, 1/42)$  y luego  $D = D_1 D_2 D_3 = \text{diag}(1, 1/2, 1/14, 1/42)$ , vemos que B es diagonalmente similar a



pueden estar asociadas con el mismo valor propio. Por ejemplo, una matriz en la forma canónica de Jordan y su digráfica están ilustradas en la figura 3.6.

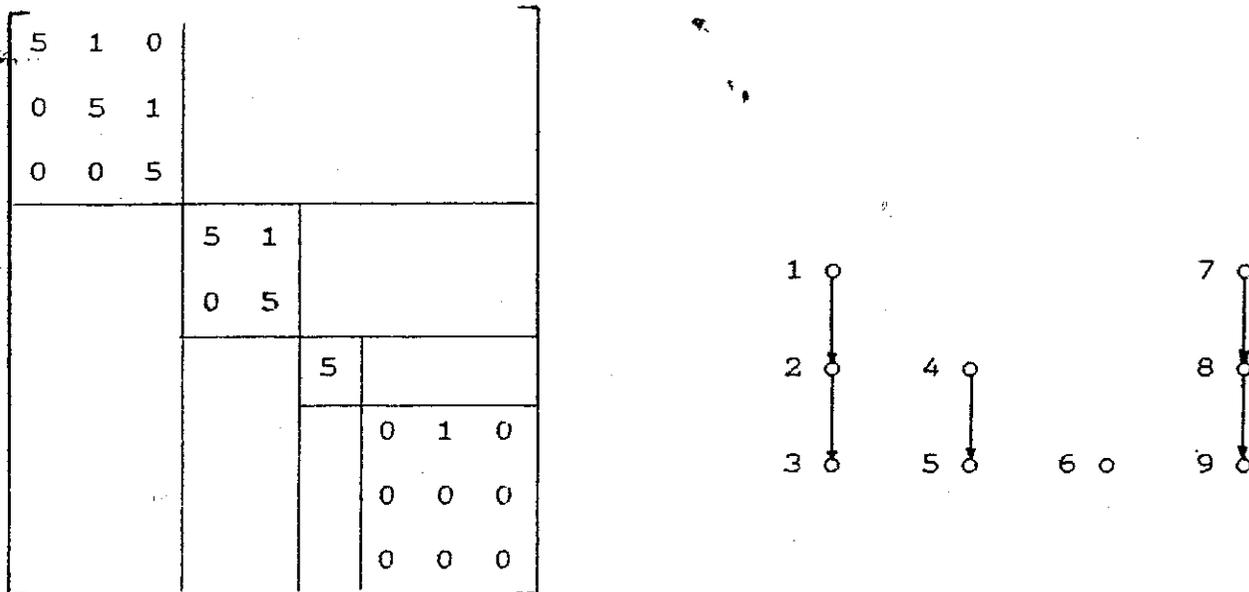


Figura 3.6. Una matriz en la forma canónica de Jordan y digráfica. (Las entradas no especificadas en la matriz son 0).

La digráfica de la matriz consiste de 4 veredas de vértices ajenos por pares. Los 3 primeros corresponden al valor propio 5 y el cuarto corresponde al valor propio 0.

Ahora podemos declarar la existencia de la forma canónica de Jordan de la matriz  $n \times n$   $A$  como sigue:

**Teorema 3.2.** (Declaración combinatoria de la forma canónica de Jordan). La matriz  $n \times n$   $A$  es similar a una matriz  $A$  cuya digráfica es una colección de veredas de vértices ajenos por pares donde cada vereda está asociada exactamente con un valor propio.

Hemos introducido dos clases de similaridad, llamadas similaridad por permutación y similaridades diagonales (elementales). Para probar el teorema necesitamos una clase adicional de similaridad. Sea  $i$  y  $j$  enteros con  $1 \leq i, j \leq n$  e  $i \neq j$ , y sea  $h$  un número complejo distinto de cero. Sea  $P$  la matriz  $n \times n$  la cual se obtiene de la matriz identidad poniendo  $h$  en la posición  $(i, j)$ . (Así la digráfica de  $P$  tiene exactamente un arco, llamado  $(i, j)$ ). La matriz  $P$  es invertible y  $P'$  se obtiene de  $P$  reemplazando  $h$  por  $-h$ . La matriz  $C = P'BP$  se obtiene de  $B$  sumando  $h$  veces la columna  $j$  y luego  $-h$  veces el renglón  $j$  de  $BP$  al renglón  $i$ . Decimos que  $C$  se obtiene de  $B$  por una similaridad elemental por combinación.

Supongase ahora, que  $B = [b_{kl}]$  es una matriz triangular superior e  $i < j$ . Entonces el renglón  $j$  de la matriz  $PB$  de arriba y el renglón  $j$  de  $B$  son iguales, y de aquí  $C$  se obtiene de  $B$  sumando  $h$  veces la columna  $i$  de  $B$  a la columna  $j$  y  $-h$  veces el renglón  $j$  de  $B$  al renglón  $i$  en cualquier orden. Por otra parte, la matriz  $C = [c_{kl}]$  es también una matriz triangular superior, la cual difiere de  $B$  sólo en aquellas posiciones del renglón  $i$  en columnas  $j, j+1, \dots, n$  y de columnas  $j$  en renglones  $1, 2, 3, \dots, i$ . Esto se ilustra en la figura 3.7. La entrada  $(i, j)$  de  $C$  está dada por  $c_{ij} = b_{ij} + h(b_{ii} - b_{jj})$ . Así, si  $b_{ii} \neq b_{jj}$ , podemos escoger  $h = -b_{ij}/(b_{ii} - b_{jj})$  y entonces  $c_{ij} = 0$ .



Jordan como una matriz  $k \times k$  de la forma

$$J_k(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a \end{bmatrix}$$

donde  $J_1(a) = [a]$ .

**Teorema 3.3.** (Declaración clásica de la forma canónica de Jordan). La matriz compleja  $A$  de orden  $n$  es similar a una matriz la cual es la suma directa de bloques de Jordan.

**Prueba:** La reducción es en tres pasos, el primero de los cuales fué dado en la última sección.

(I) Por el teorema de Jacobi (o Schur) (teorema 3.1) existe una matriz invertible  $P$  tal que  $T = P^{-1}AP$  es una triangular superior donde las entradas iguales en la diagonal ocurren consecutivamente.

Ya que la similaridad es una relación transitiva, ahora tratamos exclusivamente con  $T$ .

(II) Supóngase que  $T$  tiene por lo menos dos entradas diferentes en la diagonal principal. Entonces podemos escribir

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

donde  $T_1$  es una matriz triangular superior cuyas entradas en la diagonal es una misma constante  $c$ , y  $T_2$  es una matriz triangular superior en donde ninguna de las entradas en la diagonal son iguales a  $c$ . Usando similaridad elemental por combinación, podemos hacer cada entrada de  $X$  igual a cero sin cambiar  $T_1$  ni  $T_2$ . Hacemos esto por renglón, empezando con la ultima fila de  $X$ , y tratando cada entrada del renglón en común empezando con la primera. Recuerde la figura 3.7. Así,  $T$  es similar a la suma directa de  $T_1$  y  $T_2$ . Si  $T_2$  no tiene una constante en la diagonal principal, repetimos este paso en  $T_2$ . Por último encontramos que  $T$  es similar a la suma directa de matrices triangulares superiores cada una de las cuales tiene una constante en la diagonal principal. La reducción de  $T$  a la forma canónica de Jordan será completa una vez que cada una de las matrices triangulares superiores en la suma directa es reducida a la forma canónica de Jordan. Esto ahora nos habilita a suponer que  $T$  tiene una constante en la diagonal principal, esto es, todos los valores propios de  $T$  son iguales.

(III) Ahora  $T$  puede ser tomada como una matriz triangular superior de orden  $n$  de la forma:

$$\begin{bmatrix} c & & * \\ & c & \\ & & \ddots \\ & 0 & & c \end{bmatrix}$$

Que esta matriz puede reducirse a la forma canónica de Jordan está establecido por inducción en  $n$ . Cuando  $n=1$ ,  $T=[c]$  la cual siempre está en la forma canónica de Jordan. Supongáse que  $n=2$  de modo que

$$T = \begin{bmatrix} c & p \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Si  $p=0$ ,  $T$  está en la forma canónica de Jordan. De otro modo, una similaridad elemental diagonal transforma  $T$  a

$$\begin{bmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

la cual está en la forma canónica de Jordan. Ahora suponemos que  $n > 2$  y procedemos por inducción. Por la hipótesis inductiva, la primer submatriz principal de orden  $n-1$   $S$  de  $T$  puede transformarse por una similaridad a la forma canónica de Jordan de  $F$ :  $Q'SQ=F$ . Si ahora hacemos  $P$  la suma directa de  $Q$  con la matriz identidad  $1 \times 1$ , obtenemos que  $P'TP=T_1$ , donde

$$T_1 = \left[ \begin{array}{c|c} F & \begin{matrix} * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & c \end{array} \right]$$

Primero supongamos que existe una entrada  $h$  distinta de cero en la última columna de  $T_1$ , la cual está en el mismo renglón en donde hay un 1 en uno de los bloques de Jordan de  $F$ . Por ejemplo, podríamos tener

$$T_1 = \left[ \begin{array}{cc|ccc|c} c & 1 & & & & * \\ 0 & c & & & & * \\ \hline & & c & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 0 & c & 1 & 0 & h \\ & & 0 & 0 & c & 1 & * \\ & & 0 & 0 & 0 & c & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array} \right] \quad (*)$$

Mostraremos que podemos eliminar entradas iguales a  $h$  las cuales están en la última columna y opuesto a 1. Por supuesto que la similaridad elemental por combinación la cual suma  $-h$  veces la columna 5 de  $T_1$  a la columna 7 y suma  $h$  veces el renglón 7 al renglón 5 reemplaza  $h$  por 0 y no cambia a ninguna otra entrada de  $T_1$ . Así una sucesión de similaridades elementales por combinación nos da una matriz triangular superior  $T_2$  la cual tiene la misma forma que  $T_1$ , con  $F$  como la primer submatriz principal  $n-1 \times n-1$ , pero tiene a lo más una entrada distinta de cero fuera de la diagonal en cada renglón. Para la matriz  $T_1$ , en (\*) la matriz  $T_2$  está dada por:

$$T_2 = \begin{array}{c|ccc|c} c & 1 & & & 0 \\ 0 & c & & & s \\ \hline & & 0 & & \\ \hline & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & c & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & c & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array} \quad (**)$$

Si la última columna de  $T_2$  no tiene una entrada distinta de cero fuera de la diagonal, entonces  $T_2$  está en la forma canónica de Jordan. Como supusimos  $T_2$  tiene a lo más una entrada distinta de cero fuera de la diagonal en la columna  $n$ .

Ahora mostraremos que podemos reemplazar por 0 a todas las entradas distintas de cero fuera de la diagonal en la columna  $n$  de  $T_2$  excepto una, sin cambiar alguna otra entrada de  $T_2$ . Hacemos esto, para mostrar como de cada par de entradas distintas de cero fuera de la diagonal en la columna  $n$  de  $T_2$ , una de ellas (una al lado del block de Jordan más pequeño) puede ser cero por medio de una sucesión de similaridades elementales por combinación.

La digráfica de  $T_2$  es muy simple. Esta consiste, en general, de un número de veredas con vértices ajenos por pares excepto para el caso en que todos terminan en el vértice  $n$  (correspondiente a la columna  $n$ ). El número total de veredas iguales al número de bloques de Jordan de  $F$ . El número de veredas

que terminan en el vértice  $n$  son iguales al número de entradas distintas de cero fuera de la diagonal en la columna  $n$  de  $T_2$ . Las veredas que no terminan en el vértice  $n$  ya corresponden a los bloques de Jordan de  $T_2$  (recalcamos la estructura combinatoria de la forma canónica de Jordan teorema 3.2). Si existe tal vereda, entonces la hipótesis inductiva inmediatamente se aplica. Así podemos asegurar que todas las veredas de la digráfica de  $T$  terminan en el vértice  $n$ . Estas veredas son de correspondencia uno a uno con entradas distintas de cero fuera de la diagonal en la columna  $n$ .

Nos referimos a  $T_2$  en (\*\*\*) fuera de la descripción, pero el procedimiento, como será aclarado, es completamente general. La vereda de tamaño más grande termina en  $n=7$  es la vereda  $(3,4,5,6,7,)$  cuyo último arco está etiquetado  $(t)$ . (si ambas veredas son del mismo tamaño, entonces arbitrariamente escogemos una). Usando similaridad elemental diagonal podemos suponer  $t=1$ . Consideramos la vereda  $(1,2,7)$  cuyo último arco está etiquetado  $(s)$ . Sucesivamente llevamos a cabo las siguientes similaridades elementales por combinación (recalcando que hemos tomado a  $t$  como 1):

(i) Sume  $-s$  veces el renglón 6 al renglón 2 y después sume  $s$  veces la columna 2 a la columna 6.

(ii) Sume  $-s$  veces el renglón 5 al renglón 1 y después sume  $s$  veces 1 a la columna 5.

La digráfica de la matriz inicial de  $T_2$ , y aquellas de las matrices resultantes después de cada paso precedente son ilustradas en la figura 3.8.

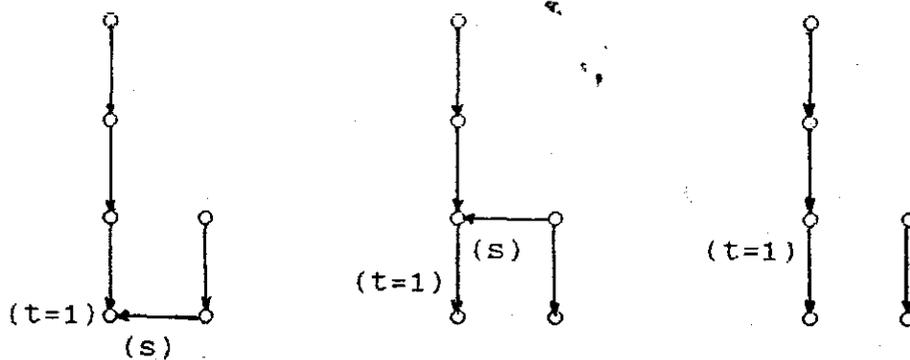


Figura 3.8. La digráfica de  $T$  en (\*\*\*) y todos sus resultados cuando se aplican los pasos (1) y (II).

Así, por similitudes elementales por combinación hemos logrado reemplazar  $s$  por  $0$  sin tener otro cambio en la matriz  $T$

De aquí, la matriz  $T_2$  en (\*\*\*) es similar a la matriz  $T_3$  que resulta cuando  $s$  es puesto igual a  $0$ . El block de Jordan  $4 \times 4$  de  $F$  de orden mas grande,  $4$  y terminando en  $n=7$  ahora se une através de la entrada  $t=1$  con la última entrada diagonal  $c$  para dar un block de Jordan  $5 \times 5$ . Más exáctamente, la matriz  $T_3$  es una similitud por permutación a la suma directa de los bloques de Jordan  $J_3(c)$ ,  $J_2(c)$ ,  $J_5(c)$  y  $J_2(c)$ .

Si la forma canónica de jordan de la matriz  $S$  tiene más de dos bloques de Jordan, entonces las matrices  $T_1$  y  $T_2$  tienen mas que 3 bloques, luego la estrategia precedente se puede aplicar a los 9 bloques construyendo la esquina derecha mas baja. De aquí

hemos logrado la forma canónica de Jordan y la inducción, y por lo tanto la prueba es completa.

Coda. Apelando a la inducción y eliminación Gaussiana, hemos descrito dos de los tres pasos principales en la reducción de una matriz a la forma canónica de Jordan. El primer paso, llamado reducción a la forma triangular, puede razonarse también inductivamente.

La prueba entera de la existencia de la forma canónica de Jordan de una matriz puede razonarse desde el principio hasta el final usando las formas básicas de inducción y eliminación de Gauss.

El punto de vista tomado en muchas discusiones de la forma canónica de Jordan es el cambio de bases de un espacio vectorial  $V$  así, la representación de la matriz de una transformación lineal  $T$  actuando en  $V$  tiene la forma canónica de Jordan. Este punto de vista se puede acomodar en la propuesta dada aquí, para etiquetar los vértices de la digráfica de  $A$  poniendo los vectores bases  $v_1, v_2, \dots, v_n$  en lugar de los enteros  $1, 2, \dots, n$ .

Por supuesto, es un trabajo formidable de hecho, computar la forma canónica de Jordan de una matriz compleja de orden  $n$ . Sin embargo, si una matriz está en forma triangular con entradas racionales, entonces es un ejercicio interesante de programación (usando puntos aritméticos fijos (o compuestos), representando las fracciones como pares de enteros ordenados) para completar la

forma canónica de Jordan.

Finalmente debería ser señalado que no hay relación general entre la digráfica de una matriz triangular con la diagonal principal constante y la forma canónica de Jordan de la matriz.

Por ejemplo, las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tienen la misma digráfica (las entradas distintas de cero ocupan la misma posición en ambas matrices), no obstante, tienen diferentes formas canónicas de Jordan. (A es nilpotente de índice dos, mientras que B es nilpotente de índice tres.

Las digráficas tienen aplicación en otras áreas del álgebra lineal incluyendo potencias de matrices y teoría espectral, aunque estas aplicaciones generalmente se enfocan sobre las veredas en la digráfica así como en los ciclos. Para brevedad estas aplicaciones las omitiremos, pero aún los resultados presentados aquí establecen la conexión natural entre las digráficas cubiertas y el álgebra lineal.

forma canónica de Jordan.

Finalmente debería ser señalado que no hay relación general entre la digráfica de una matriz triangular con la diagonal principal constante y la forma canónica de Jordan de la matriz.

Por ejemplo, las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tienen la misma digráfica (las entradas distintas de cero ocupan la misma posición en ambas matrices), no obstante, tienen diferentes formas canónicas de Jordan. (A es nilpotente de índice dos, mientras que B es nilpotente de índice tres).

Las digráficas tienen aplicación en otras áreas del álgebra lineal incluyendo potencias de matrices y teoría espectral, aunque estas aplicaciones generalmente se enfocan sobre las veredas en la digráfica así como en los ciclos. Para brevedad estas aplicaciones las omitiremos, pero aún los resultados presentados aquí establecen la conexión natural entre las digráficas cubiertas y el álgebra lineal.

## A P E N D I C E A

### OTRO VISTAZO AL DETERMINANTE.

Ahora regresemos al determinante del producto de dos matrices. Nuestro propósito es dar una prueba gráfica teórica, no sólo como una conclusión en si misma, sino también como un medio para revelar algunas de las estructuras combinatorias fundamentales. Para una matriz cuadrada de orden  $n$ , debemos observar primero, como un factor en la digráfica cubierta se cambia a la digráfica de König. Así un factor es simplemente un conjunto de vértices ajenos de  $n$  arcos, y así, desatendiendo la asignatura, por el momento, los sumandos del determinante (ecuación (1)) son precisamente los pesos de las subgráficas que contienen  $n$  arcos con vértices ajenos.

Ahora consideremos el eslabonamiento de las digráficas de König de dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  de orden  $n$ . Cómo relaciona esto al producto del  $\det A$  y  $\det B$ ? Si  $F_1$  es el conjunto de factores de  $G(A)$  y  $F_2$  el conjunto de factores de  $G(B)$  entonces:

$$\begin{aligned} \det A \det B &= \left[ \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1} (-1)^{n(F_1)} W(F_1) \right] \left[ \sum_{F_2 \in \mathcal{F}_2} (-1)^{n(F_2)} W(F_2) \right] = \\ &= \sum_{\substack{F_1 \in \mathcal{F}_1 \\ F_2 \in \mathcal{F}_2}} (-1)^{n(F_1) + n(F_2)} W(F_1)W(F_2). \end{aligned}$$

En otras palabras, cada sumando corresponde al peso de una subgráfica en  $G(A)*G(B)$  que consiste de  $n$  veredas de vértices

ajenos de longitud 2. Desatendiendo el signo por el momento, vemos que estas subgráficas de hecho corresponden precisamente a los sumandos del  $\det A \det B$ . Qué hay acerca de los sumandos de  $\det AB$ ? Cada arco en  $AB$  se obtiene de las veredas de longitud 2 en  $G(A)*G(B)$ . Además cada arco de longitud 2 en  $G(A)*G(B)$  contribuirán a algún elemento en  $AB$  y de ahí el  $\det AB$ . Otra vez expandiendo los productos de sumas vemos que los sumandos del  $\det AB$  son los pesos de las subgráficas de  $G(A)*G(B)$  que consisten de  $n$  veredas de longitud 2 donde los vértices inicial y terminal (pero, no necesariamente la mitad) son distintos. La no distinción del vértice de enmedio cuenta para el número más grande de términos ( $n!n^n$ ) en el  $\det AB$  comparado con el número  $(n!)^2$  en el  $\det A \det B$ .

Para acompletar la prueba regresamos a la consideración pospuesta de los signos de los términos. Mostraremos que cada uno de los sumandos en  $\det A \det B$  también aparecen en  $\det AB$  con el mismo signo y que los términos que quedan del  $\det AB$  suman cero. Para hacer esto, primero veremos una nueva relación entre la paridad de una permutación y la digráfica de König. Sea la digráfica de König de una permutación  $\sigma$ , la digráfica de la matriz correspondiente a la permutación, así la digráfica de König de  $\sigma$  consiste simplemente de un conjunto de arcos  $(i, \sigma(i))$ .

**Teorema 2.4.** La paridad de una permutación y la paridad del número de intersecciones de arcos en la digráfica de König son los mismos.

Prueba: Supóngase que  $\sigma(i)=i$  para  $i=1,2,\dots,n$ . Entonces el número de intersecciones en la digráfica de König de  $\sigma$  es 0 y  $\sigma$  tiene paridad par. Si  $\sigma$  es una permutación arbitraria, procederíamos a cruzar los arcos por pares, después observando que la paridad de ambas permutaciones y el número de intersecciones del arco cambia con cada cruce.

De hecho, si los arcos  $(i, \sigma(i))$  y  $(j, \sigma(j))$  se intersectan, podemos decir, sin pérdida de generalidad, que  $i < j$  y  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Definamos  $\sigma'$  por  $\sigma'(i)=\sigma(j)$ ,  $\sigma'(j)=\sigma(i)$ , y  $\sigma'(k)=\sigma(k)$  para toda  $k$  restante. ¿Cómo se compara el número de intersecciones del arco de  $\sigma'$  con las de  $\sigma$ ? Cualquier  $k$  distinta de  $i$  o  $j$  debe satisfacer  $1 \leq k < i$ , o  $i < k < j$ , o  $j < k \leq n$ . Similarmente  $1 \leq \sigma(k) < \sigma(j)$ ,  $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$ , o  $\sigma(i) < \sigma(k) \leq n$ . Así hay nueve configuraciones posibles para  $k$  y  $\sigma(k)$ . Por ocho de ellas, el número de intersecciones del arco es intercambiable por los arcos no cruzados  $(i, \sigma(i))$  y  $(j, \sigma(j))$ . En la configuración donde  $i < k < j$  y  $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$  el número de intersecciones caen por pares. Así, el número total de intersecciones del arco han sido decrecido en dos veces el número de arcos de la forma  $\{(k, \sigma(k)) / 1 < k < j, \sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)\}$  más uno. La intersección extra que viene de los arcos  $(i, \sigma(i))$  y  $(j, \sigma(j))$  en si mismos. De aquí la transposición  $(ij)$  que toma  $\sigma$  por  $\sigma'$  causa un cambio en la paridad del número de intersecciones del arco. Eventualmente, llegamos a la permutación de identidad y de aquí que el resultado está establecido.

Corolario: La permutación  $(ij)$  y el número de pares en el conjunto  $\{(i, j) / 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq \sigma(j) < \sigma(i) \leq n\}$  tiene la misma paridad.

Al conjunto definido en el corolario se le llama conjunto de inversiones de la permutación .

Nótese que en la prueba del teorema 2.4, cada no cruzamiento representa una transposición y, la sucesión de no cruzamientos que se usa para obtener la permutación identidad deja el producto de transposiciones que igualan a la permutación original. Así, la prueba también muestra que cualquier permutación es el producto de transposiciones, y la gráfica deja una representación intuitiva de como el producto de transposiciones.

Ahora apliquemos estos resultados a los productos de determinantes. Un sumando de  $\det A \det B$  corresponde a  $n$  arcos de longitud dos. El signo de este término es el producto de los signos de los términos en  $\det A$  y  $\det B$ , cada uno de los cuales se puede obtener del número de intersecciones del arco en su caso particular. ¿Cómo se compara esto con el mismo término que aparece en  $\det AB$ ? El signo de este término viene de la paridad del número de intersecciones de las veredas de longitud dos. Un par de veredas se intersectarán si los primeros arcos de las veredas se intersectan en  $G(A)$  o si los segundos arcos se intersectan en  $G(B)$ . Pero nótese que si el primer y segundo arco se intersectan entonces dejan un par de arcos no intersectados tanto como en  $\det AB$  está constatado. Así el número de arcos intersectados en  $\det AB$  y el producto de estos en  $\det A \det B$  tienen la misma paridad, que es lo que se deseaba.

Finalmente, cuidemos aquellos términos extra que estuvieron en  $\det AB$  pero no aparecieron en  $\det A \det B$ . Sea  $(i,k,l)$  y  $(j,k,m)$  dos veredas de longitud dos en  $G(A)*G(B)$ . Cómo pueden estas veredas aparecer en  $\det AB$ ? Hay dos formas: o vienen de términos de la forma  $(aik,bkl)(aik,bkm)x$  o de términos de la forma  $(aikbkm)(ajkbkl)x$  donde  $x$  representa los términos restantes en cada uno de los productos. De aquí las permutaciones que dan elevación a estas veredas se pueden aparear tanto que sólo difieren por un intercambio de  $l$  a  $m$ . Así el mismo producto aparece con signo opuesto, y suman cero.

Es interesante notar que si uno considera más de dos veredas pasando através del vértice  $k$ , entonces el hecho de que el grupo alternante contiene exactamente la mitad de los números del grupo simétrico que puede dejar el mismo resultado.

## A P E N D I C E B

### • UNA PRUEBA DEL TEOREMA DE JACOBI.

Para una demostración del teorema de Jacobi necesitamos primero demostrar el siguiente teorema:

Teorema: (Teorema de Schur). Toda matriz cuadrada es semejante a una matriz triangular superior con los valores propios de A en la diagonal principal.

Prueba: Si A es una matriz  $n \times n$ , debemos mostrar que existe una matriz invertible P tal que  $PAP' = T$  donde T es una matriz triangular superior, es decir,  $t_{ij} = 0$  para  $i > j$ . Demostraremos por inducción para n. Para  $n=1$ , A ya es triangular superior y así,  $P = I$ . Suponemos que el teorema es válido para toda matriz  $(n-1) \times (n-1)$ . Sabemos que A tiene al menos un valor propio  $k_1$  y un vector propio  $X_1$  tales que  $AX_1 = k_1X_1$ . Tomando una base para C de la forma  $X_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ . Si Q es la matriz que representa a la transformación de coordenadas de la base canónica en la nueva base, tenemos

$$QAQ' = \begin{bmatrix} k_1 & U \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

donde U es  $1 \times (n-1)$ , 0 es  $(n-1) \times 1$  y B es  $(n-1) \times (n-1)$ . Ahora B es  $(n-1) \times (n-1)$  y existe una matriz regular R  $(n-1) \times (n-1)$  tal que:

$$RBR' = \begin{bmatrix} k_2 & v_{23} & \dots & v_{2n} \\ 0 & k_3 & \dots & v_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

es triangular superior. Ahora, si

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

y  $P = SQ$ , tenemos

$$PAP' = S(QAQ')S'$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & U \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & UR' \\ 0 & BR' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 & UR' \\ 0 & RBR' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1n} \\ 0 & k_2 & v_{23} & \dots & v_{2n} \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & v_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

Como  $T$  es triangular superior, sus valores propios son  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Pero  $A$  tiene los mismos valores propios. Esto completa la demostración.

#### TEOREMA DE JACOBI.

Teorema de Jacobi. Toda matriz cuadrada  $A$  es semejante a una matriz triangular superior de la forma:

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & T_m \end{bmatrix}$$

donde cada  $T_i$  es una matriz triangular superior con elementos  $k_i$  en la diagonal, el orden de  $T_i$  es la multiplicidad de  $k_i$  como valor propio de  $A$  y  $m$  es el número de valores propios diferentes.

Prueba: El teorema anterior nos dice que  $A$  es semejante a una matriz triangular superior. En efecto, podemos suponer que existe  $P$  tal que

$$PAP' = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1m} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & T_{mm} \end{bmatrix} = T$$

donde  $T_{ii}$  es triangular superior con los elementos de su diagonal iguales a  $k_i$ . El orden de  $T_{ii}$  es la multiplicidad de  $k_i$  como

valor propio de  $A$  y los  $k_1, k_2, \dots, k_m$  son diferentes. Lo anterior se justifica con la demostración del teorema de arriba. Claramente podemos colocar cualquier valor propio  $k_1$  en la esquina superior izquierda de  $T$ . Si  $k_1$  tiene multiplicidad mayor que 1, podemos colocar a  $k_1$  en la esquina superior izquierda de  $RBR'$ . Si  $k_1$  tiene multiplicidad mayor que dos, lo colocamos otra vez en la tercera posición a lo largo de la diagonal  $T$ . Este proceso se puede repetir un número de veces igual a la multiplicidad de  $k_1$  y luego con  $k_2, k_3, \dots$ . Consideremos un elemento dado por  $tpq \neq 0$  para  $p < q$ . Si  $Q = I + C$ , donde  $C$  es una matriz con todos sus elementos iguales excepto es  $(p, q)$ -ésimo, que es  $c$ , la inversa de  $Q$  es  $Q' = I - C$ . Si multiplicamos por  $QTQ'$ , encontramos que el elemento  $tpq$  se cambia en  $tpq - c(tpp - tqq)$ . Si  $tpp - tqq \neq 0$  podemos elegir a  $c$  de tal forma que ahora el elemento  $(p, q)$ -ésimo sea cero. De otra parte, la transformación  $QTQ'$  afecta únicamente a los elementos de la  $p$ -ésima fila a la derecha de  $tpq$  y a la  $q$ -ésima columna sobre  $tpq$ . Usando una sucesión finita de tales transformaciones semejantes podemos reducir a  $T$  a la forma que da el teorema.

R E F E R E N C I A S :

- [1] C. L. Coates. Flow Graph Solutions of Linear Algebraic Equations, IREE Trans. Circuit Theory, CT-6 (1959)
- [2] D. M. Cvetkovic. The Determinant Concept Defined by means of Graph Theory. Mat Vesnik, 12 (1975).
- [3] G. W. Stewart Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1969-1970.
- [4] Serge Lang. Algebra Lineal, Fondo Educativo Interamericano, S. A. 1973.
- [5] I. N. Herstein. Algebra Moderna. Trillas, 1976.
- [6] A. F. Filippov, A Short Proof of the Theorem on Reduction of a Matrix to Jordan Form, vestnik, Moscow University, 1971.