TESIS:

"Modelo de programación lineal para la producción del papel carbón en la empresa producto Pelikan, S.A. de C.V."

T 87

PRESENTACION

Una parte importante del presente trabajo, consiste en mostrar la elaboración de un modelo de programación lineal hecha en el área de producción de papel carbón en la empresa Productos Pelikan, S.A., con el fin de dar criterios para establecer programas de producción mas eficientes y del cual se obtuvieron muy buenos resultados. Actualmente este modelo se está llevando a la práctica en la empresa obteniendose un ahorro significativo en sus gastos de producción.

Hacemos la aclaración que los datos que aquí se presentan, sobre aspectos específicos de la producción de esta compañía, están alterados, ya que así lo solicitó la empresa por cuestiones de seguridad interna.

Tesis de Florencio Ruiz Moreno
Mª del Socorro del Olivero Jiménez
Lic. en Matemáticas

1988

PRODUCTOS
PELIKAN, S.A. de C.V.

Pelikan

Pelikan
150 años

MEXICO

Productos Pelikan, S.A. de C.V. Apartado 293, 53000 Naucalpan, Méx.

L.M. ENRIQUE HUGES
COORDINADOR EJECUTIVO
DEPARTAMENTO MATEMATICAS
UNISON

Av. San Andrés Atoto 151
Naucalpan de Juárez, Edo. de Méx.

Teléfono: 358-24-66 Conmutador
Cables: Pelikan, Naucalpanmex
Telex: 76255 PELIME
TELEFAX: 359 21 41

Junio 30 de 1988.

Estimado L.M. Huges:

Por medio de la presente comunico a usted, que la Srita. **SOCORRO DEL RIVERO JIMENEZ** y el Sr. **LEONSIO RUIZ MORENO**, desarrollaron un modelo para elaborar el **Plan Optimo de Producción de Papel Carbón** (anual), de ésta Empresa con los siguientes resultados:

1. Ahorro potencial significativo para la Empresa.

2. Mejorar nuestra planeación de la producción y la toma de de decisiones.

Por otro lado creo conveniente recordar a ustedes, que como procedimiento normal de la Compañía, requerimos que antes de ser publicado el trabajo se envíe el manuscrito final, mecanografiado y con los diagramas correspondientes; a fín de ser revisado y modificado, según se requiera.

Nuevamente reiteramos a usted nuestra confianza y mejor disposición para continuar apoyándonos en proyectos que promuevan el desarrollo de los estudiantes.

A T E N T A M E N T E.

Gonzalez

ING. MANUEL GONZALEZ TAPIA
DIRECTOR DE PLANTA
PRODUCTOS PELIKAN/MEXICO

INDICE

INTRODUCCION

Las motivaciones que nos indujeron a realizar este trabajo resultaron de un seminario de programación lineal, que se impartió en el departamento de matemáticas en el cual nos dimos cuenta de la gran área de aplicaciones reales que la investigación de operaciones ofrece, en especial el área de programación lineal, lo cual nos inclinó a elaborar unas notas sobre un curso de progamación lineal y además presentar alguna aplicación real, ya que en la carrera de matemáticas no se ofrece ningún curso con aplicaciones reales.

Primeramente se pensó en crear un modelo para un problema relacionado con la ganadería que se presentó en la Escuela de Agricultura y Ganadería de la Universidad de Sonora, el cual consistía en hacer un plan para mejorar la producción de leche del ganado al menor costo. La razón por la que no se llevó a cabo este proyecto fue el de no contar con un registro de datos precisos los cuales permitieran obtener resultados aceptables con un modelo de programación lineal a mediano plazo.

Después de esto se nos presentó la oportunidad de trabajar en la empresa Productos Pelikan, S.A., con personas con conocimientos en aplicaciones reales de la programación lineal, con las cuales tuvimos la oportunidad de elaborar un modelo para eficientar el plan de producción de papel carbón. Hacemos la aclaración que el modelo se corrió con datos reales obteniéndose muy buenos resultados, pero los datos que aquí se muestran están alterados ya que así lo solicitó la empresa para su seguridad.

Los objetivos esenciales del trabajo son: presentar en forma coherente la teoría mínima necesaria para un curso básico de programación lineal que sea de utilidad para posibles cursos en la carrera de matemáticas y en las carreras en las que se imparten cursos de optimización, en la Universidad de sonora. Además, presentar la experiencia obtenida al realizar una aplicación real de la programación lineal en el área de producción de papel carbón, en la empresa *Productos Pelikan, S.A.*

La forma como se eligió el material fue de la siguiente manera: La teoría se seleccionó de diferentes libros de programación lineal con el objetivo de presentarla de una manera clara y sensilla, en cuanto a la notación se presenta de tal forma que lleve uniformidad en todo el desarrollo de la tesis, además acompañando a la teoría se muestran algunos problemas que son de ayuda para comprender el problema central del trabajo. Se hace la aclaración que aquí no se trata ningún punto relacionado con la teoría de programación de la implementación de los algoritmos de optimización en computadoras.

El contenido de la tesis está distribuido de la siguiente manera:

El capitulo 1 contiene la teoría mínima clásica de la programación lineal. El capitulo 2 contiene el método simplex, su justificación y criterios de optimalidad, no se ve el problema del ciclado ni su implementación numérica en una computadora. El capítulo 3 contiene la teoría de dualidad y de análisis de sensibilidad.

En el capítulo 4 se presenta la aplicación real hecha en la empresa. El modelo de esta aplicación resultó demasiado grande y en virtud de que no se disponía de una computadora con capacidad suficiente para resolverse, se le hizo una modificación dando por resultado un modelo de menor tamaño.

CAPITULO 1

TEORIA DE PROGRAMACION LINEAL

En este capitulo se presenta la teoría mínima necesaria para comprender el algoritmo del método simplex que se presenta en el capitulo 2.

Se empieza por dar una breve reseña histórica de la programación lineal, enseguida se plantean la forma general y la forma estándar de los problemas de programación lineal y se muestra la equivalencia entre las soluciones de estas. Después se cubre la teoría de convexidad, donde se muestra que la región factible de un problema de programación lineal es un conjunto convexo. Además se presentan los teoremas fundamentales de la programación lineal y se cubren aspectos sobre la teoría de cambio de base.

1.1 RESEÑA HISTORICA

En esta sección se da una breve reseña histórica sobre la programación lineal, sin pretender hacer un trabajo exhaustivo sino mas bien presentar los primeros trabajos que dieron origen a la programación lineal realizados tanto en la Unión Soviética como en los Estados Unidos. Además, se presentan algunas de las primeras aplicaciones que tuvieron lugar en la industria. Por último se citan empresas mexicanas donde se han hecho aplicaciones de la programación lineal.

Los primeros trabajos sobre programación lineal según [ ], se le reconocen al matemático y economista soviético L. V. Kantorovich, el cual en 1939 formuló y resolvió un problema relacionado con la organización y planeación de la produccion titulado "Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production". Estos escritos no despertaron gran interés entre los matemáticos soviéticos de ese tiempo, por lo que lo dejaron olvidado por algunos años y fueron reconocidos hasta 1959 al publicar un segundo artículo titulado "Economic Computation of the Optimal Utilization of Resources". Estos trabajos ocasionaron que en 1975 Kantorovich recibiera el Premio Nobel en economía juntamente con Leonid, Koopmans y Tjalling, por desarrollar la teoria matemática de la programación lineal y aplicarla al problema económico de distribución óptima de recursos. Kantorovich habria ido mucho mas lejos con la programacion lineal si no hubiera caido en problemas con los marxistas ortodoxos quienes objetaron el uso de la idea de los precios.

No fue sino hasta 1947 cuando el matemático George B. Dantzig y su grupo de trabajo, integrado por Marshall Wood y asociados del departamento de la fuerza aérea norteamericana, que desarrollaron y aplicaron el método general de la programación lineal a problemas militares y de planeación ocasionados por la Segunda Guerra Mundial. En 1948 a este grupo se le dió el titulo oficial de *Proyecto scoop* (Scientific Comptutation of Optimum Programs). La contribución mas importante de este grupo fue el desarrollo formal y la aplicacion del modelo de programación lineal.

Al algoritmo desarrollado por Dantzig en 1947 se le conoce con el nombre de *METODO SIMPLEX*, el cual es la culminación del esfuerzo de muchos matemáticos que trabajaron en forma independiente en problemas de optimización. A finales de este mismo año,John Von Newmann, al conocer el método simplex, propuso las bases para la teoria de la dualidad, acreditándosele hoy en dia el teorema de dualidad y a A. Tucker y sus discipulos, H. Kuhn y D. Gale, como los primeros en dar una prueba rigurosa de este teorema [ ] .

Entre los primeros problemas de programación lineal que se resolvieron con el método simplex, se encuentra el problema de la dieta de Stigler, el cual era bastante largo y complejo. consistia en determinar las cantidades que se debian comprar de 77 comidas para dar no sólo el costo minimo sino también para satisfacer las necesidades mínimas de 9 elementos nutritivos. Otro era el problema de transporte de Hitchcock y Koopmans, el cual consiste en determinar, para cierto producto, las cantidades a enviar de m orígenes a n destinos de tal forma que se minimice el costo total de transporte.

La primera y más común aplicación industrial de la progrmación lineal fue desarrollada en el control óptimo de las refinerías de petróleo, trabajo realizado en 1951 por Charnes, Cooper y Mellon. Este tipo de aplicaciones tuvo un desarrollo muy notable en los años de 1955 a 1960, con lo que el uso de la programación lineal empezó a ser mas importante en el sector industrial que en el militar.

Otro problema de gran importancia para diversas industrias es la supresión de desperdicios por corte. Por ejemplo, al cortar rollos de papel, textiles, celofán, papel metálico, etc.. Este consiste en el corte de un material sólido en un número deseado de subpartes de modo tal que la cantidad de desperdicios sea minimizada. Paull fue el primero en formularlo y ha llevado a algunas consideraciones teóricas y formulativas importantes [ ].

La programación lineal ha servido para aplicaciones industrales de distintas maneras:

1.- Ha inducido la investigación en el análisis, desde un punto de vista matemático, de la estructura de sistemas industriales.

2.- Ha llegado a ser una herramienta en los negocios y en el manejo industrial para estimar la eficiencia de estas operaciones.

3.- Ha servido para reducir los costos en la planeación y operación de diversos problemas.

Así que la aplicación de la programación lineal a negocios o a problemas industriales ha requerido la formulación matemática del problema y el establecimiento explicito de los objetivos deseados.

Por otra parte, casi todas las dificultades que se presentan en el desarrollo de un problema de programación lineal están relacionados con su tamaño. Por ejemplo, el costo de recopilar la información, la preparacon de la matriz de coeficientes del programa lineal, los costos de computo y la validez del modelo lineal. Esto ha llevado a crear nuevos algoritmos, los cuales resuelven el problema en un tiempo mucho menor. Ejemplos de estos son, el algoritmo simplex revisado, el algoritmo primal-dual, el algoritmo de descomposición de Dantzig - Wolfe el cual se aplica cuando la matriz de coeficientes tiene una estructura diagonal por bloques, etc.

Estos últimos años se ha trabajado bastante sobre algoritmos que resuelven los problemas de programación lineal de manera mas eficiente que el método simplex. Uno de estos es un algoritmo desarrollado en 1984 por el matemático hindú Karmakar llamado *Algoritmo Proyectivo*, el cual, él asegura que es 50 ó 100 veces mas rápido que el método simplex. La verdad es que en la práctica no se ha podido verificar si realmente lo es, por el contrario, en mayo de 1985 en un minisimposio en Londres, se reportó que mediante algunos experimientos se probó que el algoritmo proyectivo de Karmakar es 50 veces mas lento que el método simplex. Hasta ahora no se ha podido comprobar que el método simplex ha sido superado [ ].

En México, la programación lineal ha sido aplicada tanto en el sector público como en el sector privado. Ejemplo de esto lo son: Petróleos Mexicanos (Instituto Mexicano del Petróleo), Comisión Federal de Electricidad (Instituto de Investigaciones Eléctricas), Secretaria de Agricultura y Recursos Hidráulicos (Instituto mexicano de Tecnologia del Agua), Conasupo, Fertimex, Banco de México, entre otros. En lo referente al sector privado se pueden citar: Celanese Mexicana, Cementera, Industria Editorial, Alimentos Balanceados, Compañia Minera, Maderas Ponderosa, Casas de Bolsa, etc.

Por último podriamos decir que la programación lineal ha venido a ser una herramienta muy importante en matemáticas, ya que con esta se resuelve una cantidad enorme de problemas prácticos donde tomar una desición de politica óptima es de gran importancia y utilidad.

1.2. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL

En esta sección se presenta la forma de los PPL; se muestran algunos ejemplos que dan origen a los mismos y que, posteriormente, serán útiles para comprender el problema central de la tesis que se presenta en el capitulo 4. Además, se define la forma estándar y se prueba la equivalencia entre las soluciones de ésta y cualquier otra forma de los PPL, por último se da la interpretación geométrica de las variables de holgura.

Los problemas de optimización son aquellos en los cuales se desea maximizar ó minimizar una función real sujeta a ciertas restricciones, los PPL son un tipo especial de problemas de optimización donde la función a optimizar y las restricciones se pueden plantear por ecuaciones lineales. A continuación se muestran ejemplos que dan origen a éstos.

Ejemplo 1.2.1. Cierta compañia produce dos articulos, los cuales para su producción requieren de los procesos A y B. Para realizar el proceso A se cuenta con las máquinas A_1 y A_2 y para el B las máquinas B_1 y B_2. Los articulos pueden ser procesados en cualquier máquina y en todos los casos se obtiene cierto desperdicio que depende del articulo y de la máquina procesadora. En la Tabla 1.2.1 se muestran los costos de producción y en la Tabla 1.2.2 el porcentaje de desperdicios. Además, se requiere producir 4000 y 5000 unidades de los articulos 1 y 2 respectivamente para cubrir la demanda comprometida. La capacidad de producción está limitada por la capacidad de las máquinas las cuales se representan en la Tabla 1.2.3.

	Máquina			
Artículo	A_1	A_2	B_1	B_2
1	3	4	2	6
2	6	3	4	3

Tabla 1.2.1. Costos en $ de producción por unidad.

	Máquina			
Artículo	A_1	A_2	B_1	B_2
1	.05	.07	.03	.01
2	.04	.04	.02	.04

Tabla 1.2.2. Porcentaje de desperdicios.

Máquina	Capacidad
A_1	8000
A_2	6000
B_1	3000
B_2	6000

Tabla 1.2.3. Capacidad de producción.

Se desea conocer la distribución del proceso de producción de tal forma que se minimicen costos. Aquí se pueden resolver varios problemas relacionados con este esquema, por ejemplo: minimizar desperdicios, maximizar ganancias, etc.

En la Figura 1.2.1 se muestra el diagrama del proceso de producción.

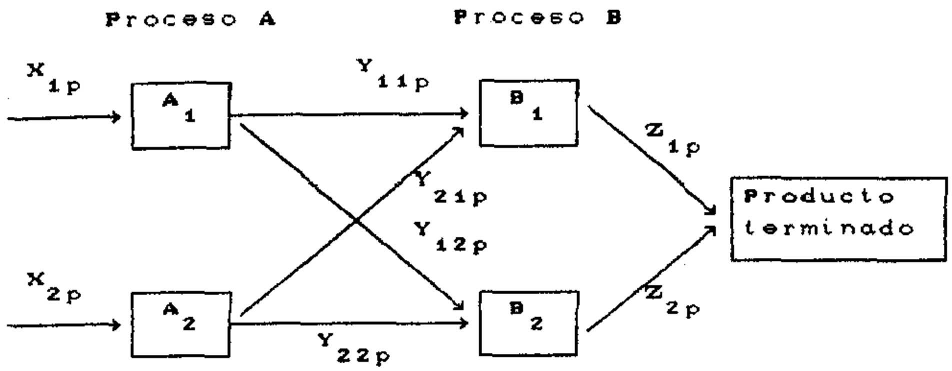


Figura 1.2.1.

Sean:

$i = 1,2$

$j = 1,2$

$p = 1,2$

Definimos las variables:

x_{ip} = Número de unidades del artículo p que entran al proceso A en la máquina i.

y_{ijp} = Número de unidades del artículo p procesados en la máquina i que pasan a la máquina j.

z_{jp} = Número de unidades del artículo p (terminado) procesados en la máquina j.

El costo total de producción está dado por:

$$3x_{11} + 4x_{12} + 6x_{21} + 3x_{22} + 2y_{111} + 2y_{211} +$$
$$+ 4y_{112} + 4y_{212} + 6y_{121} + 6y_{221} + 3y_{122} + 3y_{222}$$

el cual se desea minimizar.

Se debe de tener un Balance de Producto, es decir, lo que entra en una máquina menos el desperdicio debe de ser igual a lo que sale, de aquí que:

$$x_{11} - .05x_{11} = y_{111} + y_{121}$$

$$x_{12} - .04x_{12} = y_{112} + y_{122}$$

$$x_{21} - .07x_{21} = y_{211} + y_{221}$$

$$x_{22} - .04x_{22} = y_{212} + y_{222}$$

$$y_{111} + y_{211} - .03(y_{111} + y_{121}) = z_{11}$$

$$y_{112} + y_{212} - .02(y_{112} + y_{212}) = z_{12}$$

$$y_{121} + y_{221} - .01(y_{121} + y_{221}) = z_{21}$$

$$y_{122} + y_{222} - .04(y_{122} + y_{222}) = z_{22}$$

Además, no se debe exceder la capacidad de producción de cada máquina, esto es:

$$y_{111} + y_{121} + y_{112} + y_{122} \leq 8000$$

$$y_{211} + y_{221} + y_{212} + y_{222} \leq 6000$$

$$z_{11} + z_{12} \leq 3000$$

$$z_{21} + z_{22} \leq 6000$$

Y se debe satisfacer la demanda.

$$z_{11} + z_{21} \geq 4000$$

$$z_{12} + z_{22} \geq 5000$$

Está claro que x_{ip}, y_{ijp} y z_{jp} no pueden ser negativos.

El planteamiento del problema en términos matemáticos queda expresado como:

Minimizar $$3x_{11} + 4x_{12} + 6x_{21} + 3x_{22} + 2y_{111} + 2y_{211} +$$
$$+ 4y_{112} + 4y_{212} + 6y_{121} + 6y_{221} + 3y_{122} + 3y_{222}$$

Sujeto a:

$$x_{11} - .05x_{11} = y_{111} + y_{121}$$

$$x_{12} - .04x_{12} = y_{112} + y_{122}$$

$$x_{21} - .07x_{21} = y_{211} + y_{221}$$

$$x_{22} - .04x_{22} = y_{212} + y_{222}$$

$$y_{111} + y_{211} - .03(y_{111} + y_{121}) = z_{11}$$

$$y_{112} + y_{212} - .02(y_{112} + y_{212}) = z_{12}$$

$$y_{121} + y_{221} - .01(y_{121} + y_{221}) = z_{21}$$

$$y_{122} + y_{222} - .04(y_{122} + y_{222}) = z_{22}$$

$$y_{111} + y_{121} + y_{112} + y_{122} \leq 8000$$

$$y_{211} + y_{221} + y_{212} + y_{222} \leq 6000$$

$$z_{11} + z_{12} \leq 3000$$

$$z_{21} + z_{22} \leq 6000$$

$$z_{11} + z_{21} \geq 4000$$

$$z_{12} + z_{22} \geq 5000$$

con $x_{ip} \geq 0$, $y_{ijp} \geq 0$ y $z_{jp} \geq 0$

Ejemplo 1.2.2. La demanda de marcadores de punto fino para los próximos 3 meses se ha pronosticado en 3200, 4000 y 5800 unidades respectivamente. El costo de producción por unidad para el primer mes es de $250, para el segundo es de $285 y $305 para el tercero. El costo de inventario por unidad es de $8 para los tres meses. La capacidad máxima mensual de producción es de 8000 unidades y la capacidad máxima mensual de almacenamiento es de 5500. Determinar la producción para los tres meses siguientes de tal forma que se minimicen los costos totales de producción.

En la Figura 1.2.2. se muestra el diagrama de Balance de Inventario.

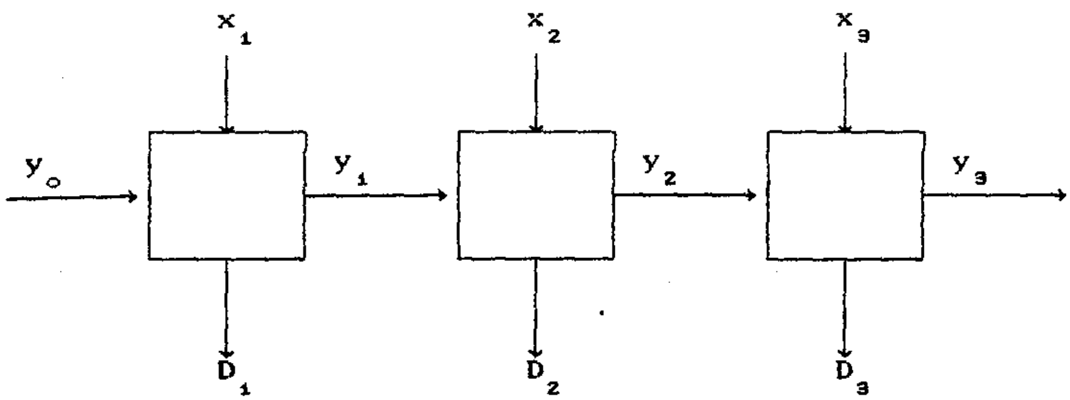


Fig. 1.2.2.

Definimos las variables:

x_t = Cantidad de marcadores producidos en el período t (t= 1,2,3).

y_t = Cantidad de marcadores almacenados al final del período t (t= 1,2,3). t = período mensual

El costo total está dado por el costo de producción mas el costo de inventario

$$250x_1 + 285x_2 + 305x_3 + 8(y_1 + y_2 + y_3)$$

el cual se desea minimizar.

Se debe tener un Balance de Producto, es decir, lo que se produce en el período t mas lo almacenado al final de período $t-1$ debe ser igual a la demanda del período t mas lo almacenado al final del período t.

$$x_1 + y_o = y_1 + 3200$$

$$x_2 + y_1 = y_2 + 4000$$

$$x_3 + y_2 = y_3 + 5800$$

donde Y_o es la cantidad almacenada inicial.

No se debe de exceder la capacidad de producción

$$x_1 \leq 8000$$

$$x_2 \leq 8000$$

$$x_3 \leq 8000$$

Además no debe excederse la capacidad de almacenamiento

$$y_1 \leq 5500$$

$$y_2 \leq 5500$$

$$y_3 \leq 5500$$

Está claro que x_t y y_t no pueden ser negativos.

El planteamiento del problema en términos matemáticos queda expresado como:

Minimizar $\quad 250x_1 + 285x_2 + 305x_3 + 8(y_1 + y_2 + y_3)$

Sujeto a:

$$x_1 + y_o = y_1 + 3200$$

$$x_2 + y_1 = y_2 + 4000$$

$$x_3 + y_2 = y_3 + 5800$$

$$x_1 \leq 8000$$

$$x_2 \leq 8000$$

$$x_3 \leq 8000$$

$$y_1 \leq 5500$$

$$y_2 \leq 5500$$

$$y_3 \leq 5500$$

$$\text{con} \quad x_t \geq 0 \quad y \quad y_t \geq 0$$

Nótese que los problemas anteriores son de programación lineal pues, la función a optimizar y las restricciones son lineales. Aún mas, el ejemplo 2.2.2. es un PPL en el tiempo, a éste tipo de problemas se les conoce como problemas de *PROGRAMACION DINAMICA* (no todos los problemas de programación dinámica son PPL).

Los PPL son los que se representan por el modelo:

Maximizar (o minimizar) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C^t X = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ (\le)(=)(\ge)\ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ (\le)(=)(\ge)\ b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ (\le)(=)(\ge)\ b_m
\end{array}
$$

con $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \dots\ x_n \ge 0$

A este modelo se le llama *MODELO GENERAL O FORMA GENERAL (FG)* de la programación lineal, donde

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se le llama *función objetivo*

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ se le llama *vector de decisión* y a sus componentes *variables de decisión*

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ se le llama *vector de costos*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se le llama *matriz de restricciones* y a sus elementos *coeficientes tecnológicos*.

Al vector $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$ se le llama *vector de requerimientos* y a las ecuaciones ó desigualdades se les llama *restricciones* donde se da solo uno de los tres casos: $\leq$, $=$, $\geq$.

Existen varias formas equivalentes de presentar un problema de programación lineal. Dependiendo de la teoría que se vaya a desarrollar se tomará la mas conveniente. En la teoría del método simplex se trabajará con la forma estándar que se define a continuación.

La forma estándar de un PPL se define como maximizar o minimizar una función lineal sujeta a un sistema de ecuaciones lineales donde las variables x_i y los términos b_i son no negativos.

Aquí trabajaremos la forma estándar para problemas de minimización, es decir:

Diremos que un problema de programación lineal está escrito en *FORMA ESTANDAR (FE)* si está expresado de la siguiente manera:

Minimizar $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

con $\quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \; b_1 \geq 0, \; b_2 \geq 0, \dots, \; b_m \geq 0$

Usando notación matricial lo anterior se representa como:

Minimizar $\quad C^t X$

Sujeto a:

$$AX = b$$

con $\quad X \geq 0, \; b \geq 0$

donde:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

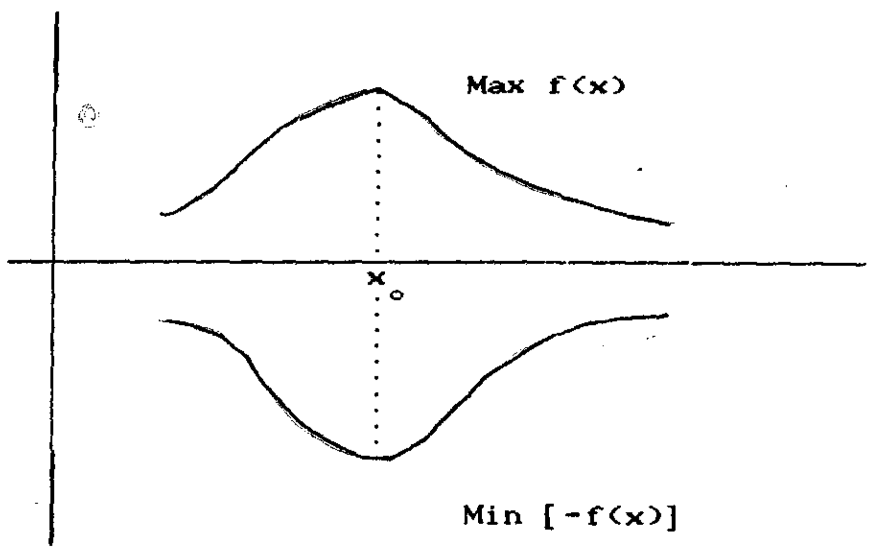
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta presentación es importante porque los paquetes computacionales para resolver problemas de programación lineal manejan internamente alguna forma estándar (aunque en general hay detalles adicionales).

A continuación se mostrará que cualquier problema de programación lineal se puede llevar a la forma estándar atendiendo las siguientes reglas:

1.- Cambiar la función objetivo de maximizar a minimizar. Los problemas de maximización y minimización son equivalentes en el sentido de que, para cualquier función real f

$$\text{Max } f(x) = - \text{Min } [-f(x)]$$



es decir, x_o maximiza a f(x) si y solo si x_o minimiza a -f(x).

Ejemplo 1.2.3. Maximizar $2x_1 - x_2 + x_3$ es equivalente a Minimizar $-(2x_1 - x_2 + x_3)$.

2.- Si en alguna restricción aparece un término $b_i < 0$, se multiplica la restricción por (-1). Debe tenerse cuidado en cambiar el sentido de la desigualdad.

Ejemplo 1.2.4. Supongase que en el modelo general se tiene una restricción. de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_i$$

donde $b_i < 0$, multiplicando por (-1) la restricción se obtiene

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \{ \geq, =, \leq \} (-) b_i$$

3.- Las *variables de holgura* son las que permiten transformar una desigualdad en igualdad. Considérese las restricciones en el siguiente orden:

a).- Restricciones con signo $\leq$

b).- Restricciones con signo de $\geq$

c).- Restricciones con signo de =

Restricción del tipo a)

Supongase que la restricción i se puede escribir como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Aquí se introduce una nueva variable $x_{n+i} \geq 0$, llamada *variable de holgura positiva* para obtener

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

Restricción del tipo b)

Supongase que la restricción j se puede escribir como

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \geq b_j$$

Aquí se introduce otra nueva variable $x_{n+j} \geq 0$ llamada *variable de holgura negativa* obteniendose

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + x_{n+j} = b_j$$

Las restricciones del tipo c)

Permanecen invariantes.

En un problema de programación lineal, las variables de holgura se pueden interpretar como un excedente del recurso (variables de holgura negativa) ó como un faltante del recurso (variables de holgura positivas).

4.- Las *variables libres* son aquellas que por las características del problema pueden tomar cualquier valor real, positivo ó negativo. En este caso las podemos eliminar de la siguiente manera:

Cada variable real x_i libre que aparezca en el problema se puede expresar de la forma:

$$x_i = u_i - v_i \qquad \text{donde} \qquad u_i \geq 0 \qquad \text{y} \qquad v_i \geq 0$$

este cambio se introduce tanto en la función objetivo como en las restricciones donde aparezca x_i.

Nótese que por cada variable de holgura y libre se agrega una variable mas y en consecuencia se está en un espacio de dimensión mayor que en el modelo original.

<u>Ejemplo</u> 1.2.5. Dado el siguiente problema en su forma original, pasarlo a su FE.

Maximizar $\quad 2x_1 - x_2 + x_3$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 8$$
$$2x_1 + x_2 = 3$$

con $\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

La función objetivo se transforma en minimizar $-2x_1+x_2-x_3$, agregando las variables de holgura x_4 y x_5 en la primera y segunda restricción respectivamente, se obtiene:

Minimizar $\quad -2x_1 + x_2 - x_3$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 8$$
$$2x_1 + x_2 = 3$$

con $\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$

Ejemplo 1.2.6. Dado el siguiente problema en su forma original pasarlo a su FE.

Maximizar $\quad 3x_1 - x_2 + 4x_3$

Sujeto a:

$$-x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$$
$$3x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 1$$

con $\quad x_1 \geq 0$ y $x_3 \geq 0 \quad$ (x_2 libre)

La función objetivo se transforma en minimizar $-3x_1+x_2-4x_3$, agregando las variables de holgura x_4 y x_5 en la segunda y tercera restricciones respectivamente, multiplicando por (-1) la primera y haciendo $x_2 = u_2 - v_2$ con $u_2 \geq 0$ y $v_2 \geq 0$ se obtiene:

Minimizar $\quad -3x_1 + (u_2 - v_2) - 4x_3$

Sujeto a:

$$x_1 - 4(u_2 - v_2) + 5x_3 = 4$$

$$3x_1 - 5(u_2 - v_2) + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 + 3(u_2 - v_2) - 5x_3 - x_5 = 1$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ v_2 \geq 0$$

En las modificaciones que se hacen a un PPL para transformarlo a su FE, las reglas 1 y 2 no lo alteran respecto a su solución. Además el caso de las variables libres (regla 4) queda comprendido como una modificación de agregar variables de holgura.

El siguiente resultado es muy importante porque permite trabajar cualquier PPL en su FE ya que al obtener una solución de éste se obtiene una solución del problema original igualando a cero las variables de holgura que aparecen en la solución del problema en su FE.

Proposición 1.2.1. Sea un problema de programación lineal en su FG y FE , entonces existe una relación uno a uno entre sus conjuntos solución.

Demostración: Dado un conjunto de restricciones en la forma

$$DX \{\leq, =, \geq\} b \qquad (1)$$

donde

D es una matriz de orden mxp

X es un p-vector no negativo

b es un m-vector

agregando a (1) n-p variables de holgura se obtiene lo siguiente

$$AY = b \qquad (2)$$
$$Y \geq 0$$

donde

A es una matriz de mxn

Y es un n-vector

Consideremos la matriz A en forma particionada, $A= [D,S]$ donde S es la submatriz de orden $mxn-p$ que corresponde a los coeficientes de las variables de holgura x_s.

Sean

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x^o \quad \text{una solución arbitraria de (1)}$$

sustituyendo x^o en (2) podemos hallar el valor de las variables de holgura x_s^o de tal forma que se pueda definir el vector

$$Y = \begin{pmatrix} x^o \\ x_s^o \end{pmatrix} \quad \text{que es solución de (2).}$$

Reciprocamente dada una solución de (2) digamos Y^1, siempre es posible expresarla en la forma

$$Y^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x_s^1 \end{pmatrix} \quad \text{con la condición de que } x^1 \text{ se solución de (1).}$$

Para ayudar a visualizar la proposición 1.2.1., a continuación se da la interpretación geométrica de una variable de holgura.

<u>Definición</u>: A un vector que satisface las restricciones de un PPL incluyendo a las de no-negatividad se le llama *SOLUCION FACTIBLE* y al conjunto de todas las soluciones factibles se le llama *REGION FACTIBLE*.

Consideremos la restricción $x_1 + x_2 \leq b_1$ con $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. La región factible se muestra en la Figura 1.2.3. Al agregar la variable de holgura x_3 se obtiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = b_1$ con $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, cuya región factible se muestra en la Figura 1.2.4.

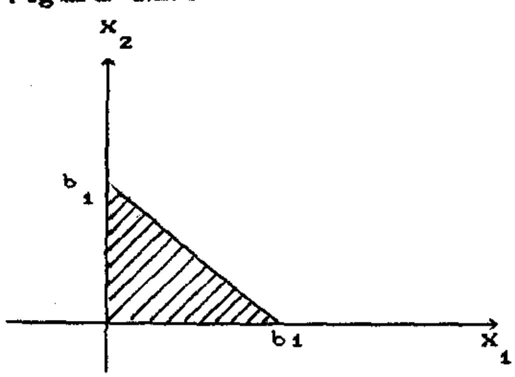


Fig. 1.2.3.

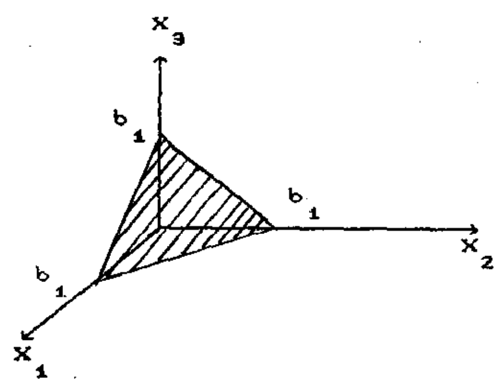


Fig. 1.2.4.

x_3 se puede interpretar como la distancia entre una solución del problema original a una solución del nuevo problema.

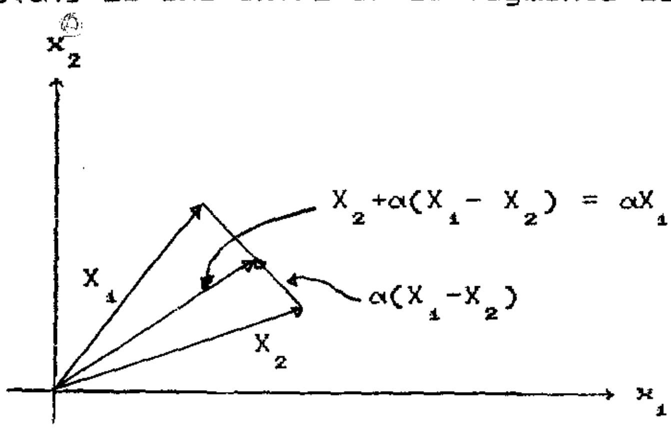
Notese que para cada punto del plano de la Fig. 1.2.4. existe un punto correspondiente de la Fig. 1.2.3. Esta correspondencia se obtiene como la proyección ortogonal del plano de la Fig. 1.2.4. en el plano X_1X_2.

1.3 REGION DE FACTIBILIDAD

En esta sección se define el concepto de conjunto convexo y se dan algunos ejemplos de los mismos que serán de utilidad en el desarrollo de la teoría de la programación lineal. Además, se caracteriza a la región factible de un PPL como un conjunto convexo.

<u>Definición</u>. Un conjunto $A \subset R^n$ es *convexo* si para cualesquier X_1, $X_2 \in A$ y $0 < \alpha < 1$, $\alpha \in R$, se tiene que el punto $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2 \in A$.

Obsérvese que cualquier punto de la forma $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$ con $0<\alpha<1$ se encuentra en el segmento de línea que une a X_1 con X_2.



es decir, un conjunto A es convexo si para cualesquier dos puntos en A el segmento de línea que los une está totalmente contenida en A.

Proposición 1.3.1. Sean A y B conjuntos convexos, entonces $A \cap B$ también es convexo.

Demostración. Dados X_1, $X_2 \in A \cap B$ debemos probar que

$$\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in A \cap B$$

dado que $X_1 \in A \cap B$, se tiene que $X_1 \in A$ y $X_1 \in B$

dado que $X_2 \in A \cap B$, se tiene que $X_2 \in A$ y $X_2 \in B$

como X_1, $X_2 \in A$ y A es convexo, entonces

$$\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in A$$

como X_1, $X_2 \in B$ y B es convexo, entonces

$$\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in B$$

lo cual implica que

$$\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in A \cap B$$

por lo tanto $A \cap B$ es convexo.

Este resultado se puede generalizar a intersecciones finitas de conjuntos convexos, es decir, si A_1, $A_2, \ldots,$ A_n son convexos, entonces $A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n$ es convexo.

Definición. A los conjuntos

$$H_i^+ = \{X \in R^n / \ x_i \geq 0\}$$

y

$$H_i^- = \{X \in R^n / \ x_i \leq 0\}$$

se les llama *semiplanos*.

En un problema de programación lineal los conjuntos H^+

corresponden a las restricciones de no negatividad.

<u>Ejemplos</u>: En R^2 los conjuntos:

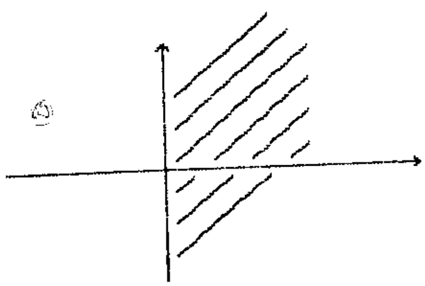
$$H_1^+ = \{ X \in R^2 / x_1 \geq 0 \}$$

$$H_2^+ = \{ X \in R^2 / x_2 \geq 0 \}$$

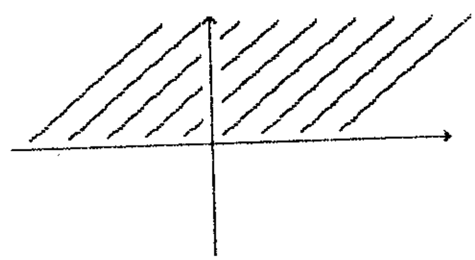
$$H_1^- = \{ X \in R^2 / x_1 \leq 0 \}$$

$$H_2^- = \{ X \in R^2 / x_2 \leq 0 \}$$

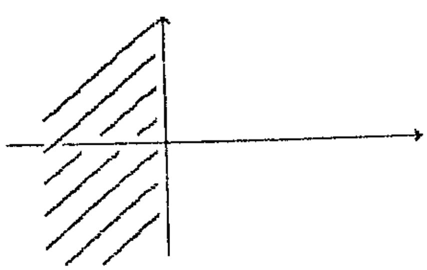
son convexos, ya que al tomar dos puntos distintos en cualquier conjunto la recta que los une está totalmente contenida en él.



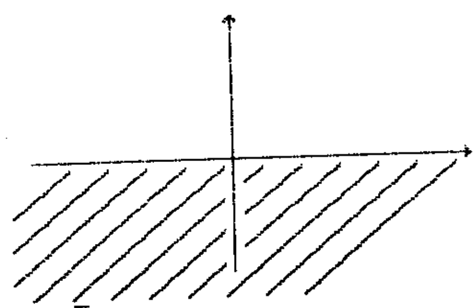
H_1^+



H_2^+



H_1^-



H_2^-

<u>Proposición</u>: 1.3.2. Los semiplanos H_i^+ y H_i^- son conjuntos convexos.

<u>Demostración</u>: Probaremos que H_i^+ es convexo (la prueba para H_i^- es análoga).

Sean X^1, $X^2 \in H_i^+$, entonces $x_i^1 \geq 0$ y $x_i^2 \geq 0$ y sea $0<\alpha<1$, entonces $\alpha x_i^1 \geq 0$ y $(1-\alpha)x_i^2 \geq 0$, de aquí que

$\alpha x_i^1+(1-\alpha)x_i^2 \geq 0$ lo cual implica que $\alpha X^1+(1-\alpha)X^2 \in H_i^+$ y por lo tanto H_i^+ es convexo.

Definición: Sea A un vector n-dimensional y b un número real al conjunto $H = \{X \in R^n / A X = b\}$ se le llama *hiperplano*.

Un hiperplano en R^n generaliza el concepto de linea recta en R^2 y el concepto de plano en R^3.

Proposición: 1.3.3. Un hiperplano es un conjunto convexo.

Demostración: Sean X_1, $X_2 \in H$, entonces $A X_1 = b$ y $A X_2 = b$ por otra parte

$$
\begin{aligned}
A(\alpha X_1+(1-\alpha)X_2) &= A(\alpha X_1) + A[(1-\alpha)]X_2 \\
&= \alpha A X_1 + (1-\alpha)A X_2 \\
&= \alpha A X_1 + A X_2 + \alpha A X_2 \\
&= \alpha b + b - \alpha b \\
&= b
\end{aligned}
$$

de aquí que

$\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 \in H$ lo cual implica que H es convexo.

Se puede generalizar el concepto de semiplano definido anteriormente de la siguiente forma.

Al conjunto $H_+ = \{X \in R^n / A X \geq b\}$ se le llama *semiplano positivo cerrado*.

Al conjunto $H_- = \{X \in R^n / A X \leq b\}$ se le llama *semiplano negativo cerrado*

Proposición: 1.3.4. Los conjuntos H_+ y H_- son convexos.

La demostración de esta proposición es un procedimiento análogo al de la proposición 2.3.3.

Proposición: 1.3.5. La región factible de un PPL es un conjunto convexo.

Demostración: Se hará un bosquejo de la demostración para el caso en que las restricciones sean del tipo (≤).

Considerese las restricciones de un PPL

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x \geq 0$$

Nótese que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \qquad \text{con} \quad i=1,2,\dots,m$$

se puede expresar de la forma

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$$

o lo que es lo mismo

$$A_i\ X \leq\ b_i \qquad \text{con} \quad i=1,2,\dots,m$$

por la proposición 1.3.4 se tiene que

$$A_i\ X \leq b_i \qquad \text{con}\ i=1,2,\dots,m$$

son conjuntos convexos.

Por otra parte las restricciones de no negatividad $x_i \geq 0$ son los conjuntos H_i^+ con $i=1,2,\ldots,m$ los cuales son conjuntos convexos. Y por ser intersección finita de conjuntos convexos, la región de factibilidad es convexa.

Proposición: 1.3.6. Sea un PPL donde la región factible es no vacía y acotada, entonces el problema tiene al menos una solución.

Demostración. Por ser la función objetivo contínua y la región factible compacta (es decir, cerrada y acotada), entonces la función tiene un valor máximo y un valor mínimo.

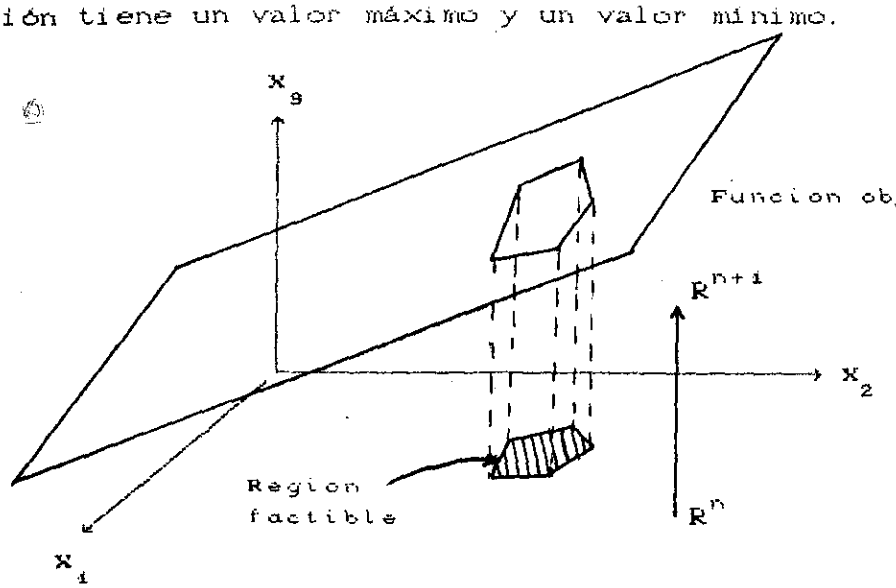


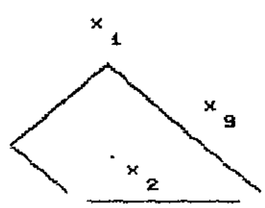
Fig. 1.3.1.

El concepto de punto extremo que se define a continuación desempeña un papel muy importante en la teoría de la programación lineal.

Definición. Sea X un punto de un conjunto convexo A, entonces se dice que X es un *punto extremo* de A, si no existen puntos distintos X_1, $X_2 \in A$ tales que $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$ con $0 < \alpha < 1$.

Un punto extremo de A no puede ser un punto intermedio de rectas contenidas en A.

En la figura 1.3.2. se muestran algunos ejemplos de puntos extremos y no extremos de un conjunto convexo.



x_1 es punto extremo

x_2 y x_3 no son puntos extremos.

Fig. 1.3.2.

De la Figura 1.3.1. se intuye que el óptimo se obtiene en un punto extremo. En la siguiente sección se justifica éste resultado.

1.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACION LINEAL

En esta sección se define el concepto de solución factible básica (SFB), Se enuncia el teorema fundamental de la programación lineal y el teorema de equivalencia entre las SFB y los puntos extremos de la región de factibilidad K. Además, se prueba que el óptimo de PPL se obtiene en los puntos extremos de K.

A continuación se dan algunas definiciones necesarias para demostrar el teorema fundamental de la programación lineal.

<u>Definición</u>: Se dice que un conjunto de vectores $A^1, A^2, \ldots, A^K$ en $\mathbf{R}^n$ son linealmente independientes si

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A^i \qquad \text{implica} \quad \text{que} \quad \alpha_i = 0, \quad i=1,2,\ldots,k$$

<u>Definición</u>: Se dice que un conjunto de vectores $A^1, A^2, \ldots, A^K$ en $\mathbf{R}^n$ son linealmente dependientes si existen escalares α_i en $\mathbf{R}$ no todos ceros tales que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A^i = 0$$

<u>Definición</u>: El rango de una matriz A se define como el número máximo de renglones (ó columnas) linealmente independientes de A. Para cualquier matriz A el número máximo de renglones linealmente independientes es igual al número máximo de columnas linealmente independientes de A.

Así, si A es de orden mxn entonces

$$\text{rango } (A) \leq \text{mínimo } (m,n)$$

si rango $(A) = $ mínimo (m,n) se dice que A es de rango completo.

En lo que sigue de esta sección se considerará la FE de un PPL donde las restricciones son de la forma $A X = b$, con A una matriz de orden $m \times n$, $m \leq n$ y el rango de A completo, es decir, $r(A) = m$.

<u>Definición</u>. Sea K la región de factibilidad de un PPL en su FE, entonces

a) $X \in K$ es una *SOLUCION FACTIBLE BASICA* si X tiene a lo mas "m" componentes positivas.

b) $X \in K$ es una *SOLUCION FACTIBLE OPTIMA* si X óptimiza la función objetivo.

El siguiente teorema es muy importante porque a través de su demostración se aprende a construir las SFB las cuales, en el teorema 1.4.2, se caracterizan como los puntos extremos de K.

<u>Teorema</u> 1.4.1. (Fundamental de la Programación Lineal).

i) Si existe una solución factible, entonces existe una solución factible básica.

ii) Si existe una solución factible óptima, entonces existe una solución factible básica óptima.

<u>Demostracion</u> i) Sea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ una solución factible, la restricción $A X = b$ se puede representar de la forma.

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ . \ . \ . \ x_n A^n = b$$

donde A^i es la i-ésima columna de A. Sin pérdida de generalidad supóngase que solo p componentes de X son distintas de cero y que estas son las primeras, entonces se tendría

$$x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_pA^p = b \qquad (1)$$

se pueden dar dos casos:

<u>Caso</u> a). Los vectores columna $A^1, A^2, \ldots A^p$ son linealmente independientes . En este caso puesto que $r(A)=m$, necesariamente se tiene $p\leq m$ de donde se concluye que

$$X = (x_1,x_2, \ldots x_p,0,0, \ldots 0)^t$$

es ya una solución factible básica.

<u>Caso</u> b). Los vectores columna $A^1, A^2, \ldots A^p$ son linealmente dependientes lo cual implica que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p$ no todos iguales a cero tales que:

$$\alpha_1A^1 + \alpha_2A^2 + \ldots \alpha_pA^p = 0 \qquad (2)$$

donde podemos suponer que al menos una de las α_i con $i=1,2,\ldots p$ es positiva. Multiplicando (2) por δ y restando de (1) se obtiene

$$(x_1 - \delta\alpha_1)A_1 + (x_2 - \delta\alpha_2)A_2 + \ldots + (x_p - \delta\alpha_p)A_p = b \qquad (3)$$

nótese que (3) es el desarrollo de la expresión $A\,\bar{X} = b$ donde

$$\bar{X} = (x_1 - \delta\alpha_1,x_2 - \delta\alpha_2, \ldots , x_p- \delta\alpha_p,0,0, \quad 0)^t$$

pero no necesariamente se satisface que $\bar{X}\geq 0$. Si $\delta\geq0$ Para las α_i negativas no hay problema pues $x_i - \delta\alpha_i\geq 0$ pero para las $\alpha_i\geq 0$ necesitamos que

$$x_i - \delta\alpha_i\geq 0$$

o lo que es lo mismo $x_i/\alpha_i\geq \delta$. Si tomamos

$$\delta = \min \ \{x_i/\alpha_i \ / \ i = 1,2,\ldots,p \quad y \quad \alpha_i > 0\}$$

entonces $\bar{X}$ es una solución factible y además se tendrá que

$$x_i - \delta\alpha_i = 0$$

para al menos un índice i, entonces la solución factible tendrá p-1 componentes pues una se anula. Este argumento se puede repetir hasta obtener una solución factible que tenga a lo mas m componentes positivas o equivalentemente hasta que se obtengan vectores linealmente independientes, con lo cual ya será una solución factible básica.

<u>Demostración</u> ii). Sea Y una solución factible óptima, supóngase igual que la anterior, que las primeras p-componentes de Y son positivas y las restantes iguales a cero. Así tendremos

$$y_1A^1 + y_2A^2 + \ldots + y_pA^p = b \qquad (4)$$

de nuevo se dan dos casos.

<u>Caso</u> a). Los vectores columna $A^1, A^2, \ldots, A^p$ son linealmente independientes, con lo cual podemos concluir que

$$Y = (y_1,y_2,\ldots,y_p,0,\ldots,0)^t$$

es una solución factible básica óptima pues necesariamente $p \leq r(A) = m$.

<u>Caso</u> b). Los vectores columna $A^1, A^2, \ldots, A^p$ son linealmente dependientes lo cual implica que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ no todos iguales a cero tales que

$$\alpha_1A^1 + \alpha_2A^2 + \ldots + \alpha_pA^p = 0 \qquad (5)$$

de (4) y (5) podemos obtener la relación

$$(y_1 + \theta\alpha_1)A^1 + (y_2 + \theta\alpha_2)A^2 + \ldots + (y_p + \theta\alpha_p)A^p = b \qquad (6)$$

para cualquier número real θ. Analicemos (6) por casos, primero para $\alpha_i \geq 0$, cuando se les multiplique por $\theta \geq 0$ seguirán siendo solución y de hecho se pueden multiplicar por cualquier θ que cumpla la condición

$$y_i + \theta\alpha_i \geq 0$$
$$\theta\alpha_i \geq -y_i$$
$$\theta \geq -y_i/\alpha_i$$

sea $-a = \text{Max } \{ -y_i/\alpha_i \ , \ \alpha_i > 0 \}$, nótese que $-a < 0$, es decir, para $-a \leq \theta$ se sigue teniendo solución. De la misma manera para $\alpha_i < 0$ cuando se les multiplique por $\theta < 0$ seguiran siendo solución y de hecho se pueden multiplicar por cualquier θ que cumpla la condición

$$y_i + \theta\alpha_i \geq 0$$
$$\theta\alpha_i \geq -y_i$$
$$\theta \leq -y_i/\alpha_i$$

es decir, si tomamos

$b = \text{Inf } \{ -y_i/\alpha_i \ , \ \alpha_i < 0 \}$, nótese que $b > 0$. Asi que para $-a \leq \theta \leq b$, las soluciones que se obtienen son SFB. Además si llamamos

$$\overline{Y} = (y_1 + \theta\alpha_1, \ldots, y_p + \theta\alpha_p, 0, \ldots 0)$$

se tiene que

$$C\ \overline{Y} = C\ Y + \theta C\ \alpha \qquad \text{con} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0, \ldots 0)$$

si $C\alpha \neq 0$, entonces $C\alpha > 0$ o $C\alpha < 0$. En el caso en que $C\alpha > 0$, basta tomar $\theta = -a$ para tener una solución $\overline{Y}$ tal que

$$C\,\overline{Y} < C\,Y$$

lo cual contradice que Y sea solución óptima. Y para $C\alpha < 0$, basta tomar $\theta = b$ y se obtiene la misma conlución, por lo tanto

$$C\alpha = 0$$

y $\overline{Y}$ es una solución que al evaluar θ en b ó en $-a$ tiene una componente menos, se prosigue este procedimiento hasta obtener que son m componentes distintas de cero o que los vectores $A^1, \ldots, A^p$ son linealmente independientes.

Esto asegura que si hay soluciones se pueden buscar entre las básicas y además si hay soluciones óptimas están también entre las básicas y se puede suponer que siempre provienen de vectores linealmente independientes.

Veamos el siguiente ejemplo que ilustra como se construyen las SFB.

<u>Ejemplo</u> 1.4.1. Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (1)$$

el cual se puede representar como

$$x_1A^1 + x_2A^2 + x_3A^3 = b$$

donde

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\; A^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\; A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

nótese que una solución factible para (1) es

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

y el rango de la matriz A es 2. Por el teorema 2.4.1. existe una SFB con no mas de dos variables distintas de cero. Nótese que

$$3A^1 - A^2 - A^3 = 0$$

en notación del teorema mencionado se tiene

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -1$$

para reducir el numero de variables positivas, se toma

$$\delta = \text{Min } \{x_i/\alpha_i,\ \alpha_i > 0\} = \text{Min } \{1/3\} = 1/3$$

por tanto eliminamos al vector A^1 para el cual $x_1/\alpha_1 = 1/3$ y se obtiene una nueva solución con no mas de dos variables positivas, es decir, una SFB la cual es

$$\bar{X} = (x_1-\delta\alpha_1,\ x_2-\delta\alpha_2,\ x_3-\delta\alpha_3)$$

$$\bar{X} = (1-1/3(3),\ 1-1/3(-1),\ 1-1/3(-1))$$

$$\bar{X} = (0,\ 4/3,\ 4/3)$$

<u>Teorema</u> 1.4.2. (de equivalencia). X es un punto extremo de K si y solo si X es una solución factible básica.

<u>Demostración</u>: Primero probaremos que si X es un punto extremo de K entonces X es una SFB.

Se puede suponer sin pérdida de generalidad que X es de la forma

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) \qquad \text{con} \quad x_i \geq 0 \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,p$$

para probar que X es una SFB basta con demostrar que el conjunto de vectores

$$\{A^1, A^2, \ldots, A^p\} \qquad (5)$$

es linealmente independiente.

Supóngase que (5) es linealmente dependiente, lo cual implica que existen escalares $y_1, y_2, \ldots, y_p$ no todos ceros tales que

$$y_1A^1 + y_2A^2 + \ldots + y_pA^p = 0$$

definamos el vector $Y = (y_1,y_2,\ldots,y_p,0,\ldots,0)$ y tomemos

$$\varepsilon = \min \{x_i/|y_i| \ / \ y_i \neq 0\}$$

obsérvese que los vectores $X + \varepsilon Y$, $X - \varepsilon Y$ son elementos diferentes que pertenecen a K tales que

$$X = 1/2\ (X - \varepsilon Y) + 1/2(X + \varepsilon Y)$$

por lo tanto X no es un punto extremo de K lo cual contradice nuestra hipótesis. Asi que (5) debe ser linealmente independiente.

Ahora se probará que si X es una SFB, entonces X es un punto extremo de K.

Sea $X = (x_1,x_2,\ldots,x_p,0,\ldots,0)$ con $p \leq m$, entonces

$$x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_pA^p = b$$

donde $\{A^1, A^2, \ldots, A^p\}$ son linealmente independientes. Supóngase que X no es un punto extremo de K, entonces existen Y y Z elementos de K tales que

$$X = \alpha Y + (1-\alpha)Z \qquad \text{con} \qquad Y \neq Z\ ,\ \ 0 < \alpha < 1$$

Esta relación y las condiciones de α nos aseguran que las últimas n-p componentes de Y y Z son nulos; con lo cual se tiene que

$$y_1A^1 + y_2A^2 + \ldots + y_mA^m = b$$
$$z_1A^1 + z_2A^2 + \ldots + z_mA^m = b$$

restando estas dos ecuaciones y teniendo presente que

$$\{A^1, A^2, \ldots, A^p\}$$

es linealmente independiente se obtiene que $X = Y = Z$, en consecuencia X es un punto extremo de K.

A continuación se dan algunas conclusiones que se desprenden del Teorema Fundamental y del Teorema de Equivalencia.

Corolario 1. Si la región de factibilidad K del problema de programación lineal es no vacia, entonces K tiene al menos un punto extremo.

Demostración. Como $K \neq \emptyset$, existe una solución factible X en K, luego, por el teorema fundamental existe una SFB X_o en K y por el teorema de equivalencia a X_o le corresponde un punto extremo de K.

Corolario 2. Si la región de factibilidad K es no vacia, entonces tiene un número finito de puntos extremos.

Demostración. Cada conjunto de m-vectores columna linealmente independientes dan en general una solución básica, como la matriz de restricciones tiene n vectores columna, el total de soluciones básicas se obtiene tomando el número de formas en que se pueden seleccionar m vectores de un total de n vectores, es decir.

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\ m!}$$

el cual es finito. El número de soluciones factibles básicas (o puntos extremos) es a lo mas C_m^n .

Corolario 3. La función objetivo alcanza su mínimo en un punto extremo de K.

Demostración: Sea X_o la solución donde se alcanza el óptimo, es decir, X_o es una solución factible óptima, por el teorema 2.4.1.(ii) se tiene que X_o es una solución factible básica óptima, y por el teorema 2.4.2. se tiene que X_o es un punto extremo óptimo.

Este resultado es importante porque si K es una región acotada, entonces para determinar una solución óptima basta considerar los puntos extremos de K que es un número finito. Asi que para obtener la solución de un PPL en teoría se tendria que evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y seleccionar el mejor. Para efectos prácticos esto no funciona, pues existen una gran cantidad de problemas en la realidad con miles de variables y cientos de restricciones en los cuales sería "imposible" evaluar todos los puntos extremos y elegir aquel que optimice la función objetivo.

Para salvar esta dificultad se utiliza el método simplex creado por Dantzig en 1947 el cual permite resolver un PPL sin necesidad de analizar explicitamente el valor de la función objetivo en todos los puntos extremos de K. En la sección 2.6 se mostrará como funciona este método.

1.5 CAMBIO DE BASE

En la sección 1.6 se muestra que el algoritmo del método simplex es un procedimiento en el que en cada iteración se genera una nueva base, en las que un vector de la última base se sustituye por otro vector. En esta sección se muestran algunos aspectos de la teoría sobre cambio de base los cuales serán necesarios para la comprensión del algoritmo del método simplex. Además, se muestra que las operaciones elementales llevan a cambios de base.

A continuación se dan algunas definiciones que se requieren en la teoría de cambio de base.

Definición: Se dice que un vecto b en R^n es una combinación lineal de los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^k$ en R^n si

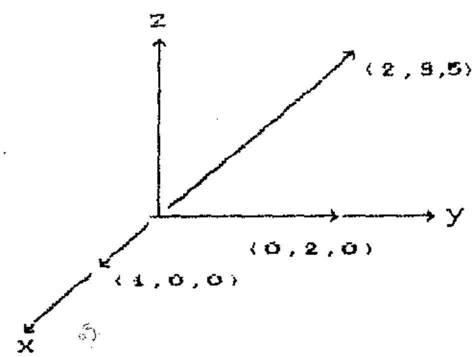
$$b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A^i \qquad \text{con} \quad \alpha_i \in R.$$

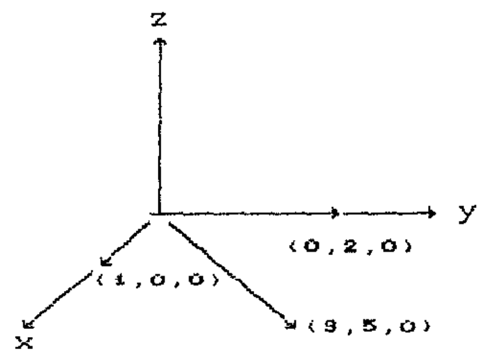
Definición: Al conjunto de vectores $A^1, A^2, \ldots, A^n$ en R^n es llamado *GENERADOR* de R^n si cualquier vector en R^n es posible expresarlo como combinación lineal de los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^n$.

Definición: Una *BASE* para R^n es cualquier subconjuntos de vectores en R^n linealmente independientes los cuales generan a R^n.

Debe tenerse cuidado al escoger los vectores que entran y salen de la base, ya que de lo contrario los nuevos vectores podrían no ser linealmente independientes y en consecuencia no formarían una base.

Ejemplo: 1.5.1. En R^3 los vectores (2,3,5), (1,0,0), (0,2,0) son linealmente independientes y forman una base para R^3. No se puede reemplazar el vector (2,3,5) por el vector (3,5,0) ya que este vector se encuentra contenido en el plano generado por los vectores (1,0,0) y (0,2,0) y por tanto no forman una base para R^3.





La siguiente proposición garantiza la condición bajo la cual al cambiar un vector de la base, digamos A^i por otro vector b, entonces el nuevo conjunto de vectores siguen formando una base.

Proposición: 1.5.1. Dado un conjunto de vectores básicos A^1, $A^2, \ldots, A^n$ en R^n y cualquier otro vector $b \neq 0$ en R^n, entonces b se puede expresar como combinación lineal de A^i con $i=1,2,\ldots,n$, esto es:

$$b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^i \qquad (1)$$

si cualquier vector A^j para el cual $\alpha_j \neq 0$ es removido del conjunto A^1, $A^2, \ldots, A^n$ y b es sumado al conjunto la nueva colección de n vectores A^1, $A^2, \ldots, A^{j-1}, b, A^{j+1}, \ldots, A^n$ es también una base para $\mathbf{R}^n$.

<u>Demostración</u>: Se demostrará que el conjunto de vectores

$$\{A^1,\ A^2,\ldots,A^{j-1},b,A^{j+1},\ldots,A^n\}$$

son linealmente independientes y por tanto forman una base para $\mathbf{R}^n$.

Supóngase que existen escalares λ y λ_i $(i\neq j)$ tales que:

$$\sum_{i\neq j} \lambda_i A^i + \lambda b = 0 \qquad (1)$$

sustituyendo b en (1) se obtiene:

$$\sum_{i\neq j} \lambda_i A^i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^i = 0$$

$$\sum_{i\neq j} (\lambda_i + \lambda\alpha_i) A^i + \lambda\alpha_j A^j = 0$$

pero como $A^1,\ A^2,\ldots,A^j,\ldots,A^n$ son linealmente independientes entonces $\lambda_i + \lambda\alpha_i = 0$ para $i\neq j$ y $\lambda\alpha_j=0$. Por hipótesis $\alpha_j\neq 0$ lo cual implica que $\lambda=0$ lo que a su vez implica que $\lambda_i=0$ para $i\neq j$, por lo tanto el nuevo conjunto de vectores es linealmente independiente y forman una base para $\mathbf{R}^n$.

Nótese que la condición $\alpha_j\neq 0$ es suficiente para que el nuevo conjunto de vectores sea linealmente independiente. Además, esta condición es necesaria por que si $\alpha_j=0$ entonces:

$$b - \sum_{i\neq j} \alpha_i A^i = 0$$

por lo tanto b y A^i $(i\neq j)$ serían linealmente dependientes.

METODO DE PIVOTAJE PARA SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Considérese el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

lo podemos expresar como:

$$AX = b \tag{2}$$

donde

$$A = (A^1\ A^2 \ldots A^n)^t$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$$

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$$

con $\quad A^i = (a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{im}) \quad$ i-ésimo renglón de A.

Ahora supóngase que $m < n$ y además que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ii} = 1$ para $i = 1,2,\ldots,m$.

A un sistema con estas características se le llama *sistema canónico* y es de la forma:

$$\begin{array}{l} x_1 + \ldots\ldots + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 + \ldots + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{3}$$

la matriz asociada a este sistema es llamada *MATRIZ CANONICA*, a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, se les llama *variables básicas* y a las variables x_{m+1}, x_{m+2}, . . . , x_n se les llama *variables no básicas*.

Una solución básica para este sistema es la que cumple que:

$$x_i = b_i \qquad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_i = 0 \qquad \text{para} \quad i = m+1,\ldots,n$$

esto es $X = (b_1,b_2,\ldots,b_m,0,\ldots,0)^t$.

A continuación se muestra la transformación de una variable básica en una no básica y viceversa, determinar el nuevo sistema canónico y una solución básica de este nuevo sistema.

Supóngase que se quiere reemplazar la variable básica x_p con $1 \le p \le m$ por la variable no básica x_j con $m+1 \le j \le n$, en el sistema de ecuaciones lineales (3), esto es posible hacerlo si y solo si $a_{pj} \neq 0$.

Usando el método de eliminación de Gauss-Jordan se transforma x_j en una variable básica, esto es, la p-ésima ecuación de (3) se divide por a_{pj} para tener coeficiente 1 en el lugar de la variable x_j de la p-ésima ecuación. A continuación se hacen las operaciones necesarias de tal forma que los elementos restantes de la j-ésima columna de la matriz canónica sean cero.

Al realizar estos cambios en dicho sistema se obtiene un nuevo sistema canónico con los siguientes coeficientes de las variables x_i.

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{iq}/a_{pq}\,(a_{pj}) \qquad \text{si} \quad i \neq p$$

$$a'_{pj} = a_{pj}/a_{pq}$$

a estas ecuaciones se les llama *ecuaciones de pivoteo*, a_{pq} es llamado *elemento pivote* y a x_q se le llama *variable pivote*.

REPRESENTACION MATRICIAL DE CAMBIO DE BASE

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales (1) dado anteriormente. Si A^i es el i-ésimo vector columna entonces el sistema (1) se puede representar como:

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b$$

Supóngase que $m<n$ y que (1) es canónico con la siguiente representación matricial

$$\begin{array}{c c}
\text{vectores en la base} & \begin{array}{cccccccc} A^1 & A^2 & \dots & A^m & A^{m+1} & \dots & A^n \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}$$

donde las componentes de la matriz representan las coordenadas de cada vector en la parte superior respecto a la base. Nótese que A^i, $i = 1,2,\dots,m$ forman una base de $\mathbf{R}^m$ y de hecho son los vectores canónicos $e_1, e_2, \dots, e_m$ de $\mathbf{R}^m$. Así para A^i, $m+1 \le i \le n$ se puede expresar como:

$$A^i = a_{1i} A^1 + a_{2i} A^2 + \dots + a_{mi} A^m \qquad (2)$$

esto es, la columna i-ésima representa las coordenadas del vector A^i es términos de la base.

Ahora Supóngase que se desea reemplazar el vetor básico A^p, $1 \leq p \leq m$ por el vector no básico A^q, $m+1 \leq q \leq n$, asegurando que el nuevo conjunto de vectores sigan formando una base, por la proposición 1.5.1 sabemos que esto sucede si y solo si $a_{pq} \neq 0$.

como:

$$A^q = a_{1q}A^1 + a_{2q}A^2 + \ldots + a_{mq}A^m \quad \text{y} \quad a_{pq} \neq 0$$

tenemos que:

$$A^p = (1/a_{pq})A^q - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} (a_{ip}/a_{pq})A^i$$

sustituyendo A^p en (2) se tiene:

$$A^j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} [\, a_{ij} - (a_{iq}/a_{pq})a_{pj}] \, A^i + (a_{pj}/a_{pq})A^q$$

si a'_{ij} son las coordenadas del vector A^i en términos de la nueva base, se tiene que:

$$a'_{ij} = a_{ij} - (a_{iq}/a_{pq})a_{pj} \qquad \text{si} \quad i \neq p$$

$$a'_{pj} = a_{pj}/a_{pq}$$

las cuales son las ecuaciones de pivoteo, por lo tanto, se tiene que diagonalizar es cambiar de base.

Cabe hacer la aclaración de que en el método simplex el vector que sale de la base no es arbitrario, sino que se elige con el criterio:

$$\delta = \text{mínimo} \left\{ \frac{x_i}{\alpha_i} \;/\; \alpha_i > 0 \right\}$$

para asegurar que la solución que se obtiene es factible

donde: $\quad x_i = b_i \quad$ y $\quad \alpha_i = a_{ij}$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 10$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_5 = 20$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

lo cual es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$Z + 3x_1 + 7x_2 = 0$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 18$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 10$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_5 = 20$$

con Z lo menor posible.

Lo anterior puede representarse por la siguiente tabla que se llama *TABLA DEL METODO SIMPLEX.*

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	Z	b
A^3	1	6	1	0	0	0	18
A^4	1	1	0	1	0	0	10
A^5	4	5	0	0	1	0	20
Z	3	7	0	0	0	1	0

donde los vectores A^i debajo de B son los vectores en la base.

Notese que con $x_1=0$ y $x_2=0$ se obtiene la SFB (0,0,18,10,20) y se desea pasar a otra SFB asegurando que Z decrezca lo mas posible; observese que esto sucede mas en términos de x_2 que de x_1, como ya se dijo en la sección 2.4 a la columna que está arriba del coeficiente correspondiente a x_2 en la función objetivo, se le llama columna pivote (encerrado); en este caso son los coeficientes del vector A^2. Seguidamente se hace la división de los elementos del vector b, entre los elementos correspondientes a la columna pivote y se toma el mínimo de los números obtenidos, este es el mayor valor que puede tomar x_2 sin salirse de la region de factibilidad, en este caso se tiene:

$$\text{Min } \{18/6,\ 10/1,\ 20/5\} = 18/6 = 3$$

el valor máximo que puede tomar x_2 sin salirse de K es 3 y el elemento pivote es 6.

El siguiente paso es hacer cero los elementos de la columna pivote excepto el elemento pivote, el cual se debe de hacerse uno, esto es, hacer lo mencionado en la sección 2.5 referente a convertir vectores no básicos en vectores básicos. Realizando lo anterior se obtiene la siguiente tabla del simplex y se observa que el vector A^3 sale de la base y A^2 es el vector que entra a la nueva base:

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	Z	b
A^2	1/6	1	1/6	0	0	0	3
A^4	5/6	0	-1/6	1	0	0	7
A^5	19/6	0	-5/6	0	1	0	5
Z	11/6	0	-7/6	0	0	1	-21

con $x_1=0$ y $x_3=0$ se obtiene una nueva SFB la cual es (0,3,0,7,5) y Z toma el valor:

$$Z = -3(0) - 7(3) = -21$$

se repite el procedimiento para encontrar otra SFB con la cual decrezca aún mas la función objetivo. Nótese que x_2 ya no se puede mover, pues de lo contrario, Z aumentaría su valor, por lo que la nueva columna pivote es A^1 y lo mas que puede valer x_1 sin salirse de K es

$$\text{Min }\{18/1,\ 42/5,\ 30/19\} = 30/19$$

de aquí que el elemento pivote es 19/6. Ahora se procede a hacer cero la columna pivote, excepto el elemento pivote el cual debe de ser uno, obtieniendose la nueva tabla del simplex:

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	Z	b
A^2	0	1	4/19	0	-1/19	0	52/19
A^4	0	0	1/19	1	5/19	0	108/19
A^1	1	0	-5/19	0	6/19	0	30/19
Z	0	0	-13/19	0	-11/6	1	-454/19

Nótese que ya no es posible mover los valores de x_1 y x_2 de tal forma que la función objetivo decrezca mas, por lo que la SFB que minimiza el problema es (30/19,52/19,0,108/19,0) con el valor de $Z = -3(30/19) - 7(52/19) = -454/19$

Obsérvese que la solución es óptima cuando todos los c_j son negativos, este es un resultado que se probará mas adelante.

ALGORITMO DEL METODO SIMPLEX

Para los siguientes pasos se supone la existencia de una base de vectores canónicos, es decir, una SFB con la cual empezar a operar.

Paso 1. Construir la tabla de la matriz aumentada.

Paso 2. Si todos los c_j son negativos ya se está en el óptimo, si no, ir al paso 3.

Paso 3. Determinar la columna pivote, que es la que tiene la entrada mas positiva en la fila correspondiente a los coeficientes de la función objetivo.

Paso 4. Determinar el elemento pivote, que es el elemento de la columna pivote que hace menor la razón entre los elementos del vector b y los de la columna pivote.

Paso 5. Con el método de Gauss-Jordan convertir el elemento pivote a 1 y hacer ceros arriba y abajo de él.

Paso 6. Volver al paso 2.

Un problema de maximización se puede resolver también directamente de la siguiente manera, a diferencia del caso de minimización tomar como columna pivote la que tiene la entrada mas negativa en la fila correspondiente a la función objetivo y el criterio para detener el proceso es cuando todos los c_j son positivos. Los demás pasos permanecen invariantes.

OBSERVACIONES SOBRE EL METODO SIMPLEX

a).- Si en el paso 3 existe posibilidad de escoger 2 ó mas columnas pivote, se puede escoger cualquiera.

b).- Si en paso 4 hay dos relaciones mas pequeñas iguales se escoge cualquiera de ellas. Teóricamente esto puede dar origen al problema que se conoce como "*ciclado*" sin obtener solución; la práctica ha mostrado que dificilmente esto se presenta en problemas reales. Para evitar el problema del ciclado existen las llamadas reglas lexicográficas, ver referencia [ ].

c).- Si en la columna pivote no existen valores positivos, posteriormente se mostrará, que el problema tiene solución no acotada.

JUSTIFICACION DE LOS PASOS DEL METODO SIMPLEX

Considerese la forma estándar de un PPL al agregar m variables de holgura, obteniendose la tabla siguiente

A^1	A^2		A^j		A^{n+m}	Z	b
a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1j}	. . .	a_{1n+m}	0	b_1
a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2j}	. . .	a_{2n+m}	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i1}	a_{i2}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{in+m}	0	b_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mj}	. . .	a_{mn+m}	0	b_m
$-c_1$	$-c_2$	. . .	$-c_j$	. . .	$-c_{n+m}$	1	W

Tabla 2.1.1.

Supongase que la columna pivote es A^j y el elemento pivote es a_{ij}, es decir, si $a_{ij} \neq 0$, mediante el paso 5 del método simplex se obtiene una tabla de la forma:

A^1	A^2		A^j		A^{n+m}	Z	b
a^*_{11}	a^*_{12}	$\ldots$	0	$\ldots$	a^*_{1n+m}	0	$b_1 - a_{1j}(b_i/a_{ij})$
a^*_{21}	a^*_{22}	$\ldots$	0	$\ldots$	a^*_{2n+m}	0	$b_2 - a_{2j}(b_i/a_{ij})$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a^*_{i1}	a^*_{i2}	$\ldots$	1	$\ldots$	a^*_{in+m}	0	b_i/a_{ij}
$\vdots$							
a^*_{m1}	a^*_{m2}	$\ldots$	0	$\ldots$	a^*_{mn+m}	0	$b_m - a_{mj}(b_i/a_{ij})$
c^*_1	c^*_2	$\ldots$	0	$\ldots$	c^*_{n+m}	1	$W + c_j(b_i/a_{ij})$

Tabla 2.1.2.

Como x_j (variable de entrada) debe ser igual a b_i/a_{ij} y como $b_i \geq 0$, entonces debe de tenerse que $a_{ij} > 0$, es decir, el elemento pivote (coeficiente a_{ij}) debe de ser positivo para que la nueva tabla de una solución factible. Para que esto suceda se requiere que:

$$b_k - a_{kj}(b_i/a_{ij}) \geq 0 \qquad \text{para} \quad k = 1,2,\ldots,m$$

si alguna a_{kj} es negativa no hay problema pues $b_k \geq 0$, $b_i \geq 0$ y $a_{ij} \geq 0$. Por otra parte si alguna a_{kj} es positiva se requiere que.

$$b_k - a_{kj}(b_i/a_{ij}) \geq 0$$

lo cual se puede representar de la forma

$$b_k/a_{kj} \geq b_i/a_{ij}$$

es decir, basta tomar el renglon pivote que haga minima de la relación b_i/a_{ij}

Analicemos el valor de la nueva función objetivo W^* de la tabla 2.1.2. se ve que:

$$W^* = W + c_j(b_i/a_{ij}) \qquad (1)$$

Idealmente se desearia que la funcion objetivo decrezca lo mayor posible, pero esto solo se lograria si se conocieran todos los valores de

$$+c_j(b_i/a_{ij}) \qquad \text{para todos los valores de } i,j$$

como esto no es "posible" se escoge el valor de la entrada $-c_j$ mas positiva , entonces como $b_i \geq 0$ y $a_{ij} > 0$, la ecuación (1) garantiza que:

$$W^* - W \leq 0$$

es decir la función objetivo siempre decrece.

Si ninguna de las entradas de la función objetivo es positiva, con excepción de la entrada del extremo derecho, la tabla dá la solución óptima.

Lo anterior se resume como sigue: Escoger la columna pivote que contenga la entrada más positiva de la fila objetivo con excepción de la columna del extremo derecho.

CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

Considérese el PPL en su forma estándar:

Minimizar $\qquad Z = C^t X$

Sujeto a:

$$A\ X = b$$

$$X \geq 0$$

Donde A es de orden mxn, m≤n, C y X vectores de orden nx1 y b un vector de orden mx1. El problema anterior se puede escribir de la forma:

Minimizar $$Z = c_1x_1+c_2x_2+. . . +c_nx_n$$

Sujeto a:

$$A^1x_1+A^2x_2+. . . +A^nx_n=b \qquad (1)$$

$$\text{con } x_i \geq 0 \qquad i= 1,2, . . . n$$

donde A^i es la i-ésima columna de A. *Sea* $B= [B^1,B^2,. . .,B^m]$ una base para R^m con $\{B^1,B^2,. . .,B^m\} \subset \{A^1,A^2,. . .,A^n\}$. Asi que dado $A^j \notin B$ esta se puede escribir como

$$A^j = y_{1j}B^1 + y_{2j}B^2 + . . . + y_{mj}B^m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}B^i$$

sustituyendo A^j en (1), se tiene

$$x_1 (y_{11}B^1 + . . . + y_{m1}B^m) + x_2 (y_{12}B^1 + . . . + y_{m2}B^m) + . . . +$$
$$x_n (y_{1n}B^1 + . . . + y_{mn}B^m) = (x_1y_{11} + . . . + x_ny_{1n})B^1 + (x_1y_{21} +$$
$$. . . + x_ny_{2n})B^2 + . . . + (x_1y_{m1} + . . . + x_ny_{mn})B^m = b.$$

lo cual implica que

$$X_{B^1} = x_1y_{11} + . . . + x_ny_{1n}$$

$$X_{B^2} = x_1y_{21} + . . . + x_ny_{2n}$$

$$\vdots$$

$$X_{B^m} = x_1y_{m1} + . . . + x_my_{mn}$$

ahora sea

$$y_j = \begin{bmatrix} y_{ij} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} = [A^j]_B$$

entonces $A^j = By^j$ y dado que B es invertible se tiene que $y^j = B^{-1}A^j$. Notese que y^j es lo que queda en el lugar de la columna A^j cuando la matriz B se hace unitaria.

$$
\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{array}
\begin{array}{c} A^1 \quad A^2 \; . \; . \; . \; A^j \; . \; . \; . \; A^n \\ \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \right] \end{array}
\cong
\begin{array}{c} \\ B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^m \end{array}
\begin{array}{c} A^1 .. A^j \qquad\qquad B \\ \left[\begin{array}{cc} \left[Y^j \right] & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & . & 1 \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array}
$$

la solución básica asociada a la base B es $X_B = B^{-1}b$.

Sea $c_B = (c_{B^1}, c_{B^2}, \; . \; . \; . \; , c_{B^m})$ donde c_{B^i} es el costo de X_{B^i}.

Aquí se puede observar que los coeficientes de la función objetivo en el lugar j-ésimo al hacer unitaria la matriz B queda de la forma

$$-c_j + c_{B^1}\, y_{1j} + c_{B^2}\, y_{2j} + \; . \; . \; . + c_{B^m}\, y_{mj}$$

definamos

$$z_j = c_{B^1}\, y_{1j} + \; . \; . \; . + c_{B^m}\, y_{mj}$$

$$z_j = C_B \, Y^j$$

así que la tabla final del simplex es de la forma

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & A^1 \quad A^2 \; . \; . \; . \; A^j \qquad\qquad B & B^{-1}b \\ \hline
\begin{array}{c} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^m \end{array} & \qquad\qquad \left[Y^j \right] \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{array} \right] & \left[\quad \right] \\ \hline
 & Z_1 - C_1 \; . \; . \; . \quad Z_j - C_j \quad 0 \; 0 \; . \; . \; 0 &
\end{array}
$$

En particular si A^j es la columna i de B entonces $c_j = c_B{}^i$ y después de hacer unitaria a B se tendría $Y^j = e_j$ lo cual implica que $z_j = c_B\ e_j = c_B{}^i$ por lo tanto $z_j - c_j = c_B{}^i - c_B{}^i = 0$. Esto es los coeficientes de la función objetivo debajo de la base B son ceros.

<u>Teorema</u>: 2.1.1. Si $z_j - c_j < 0$ para las $A^j \notin B$, entonces X_B es la solución óptima al PPL en su forma estándar.

<u>Demostración</u>: Sea $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una solución factible al sistema $A\ X = b$, entonces

$$x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = b \quad \text{y} \quad Z^* = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

además como $z_j - c_j < 0$ se tiene que $z_j < c_j$ para toda j tal que $A^j \notin B$, entonces

$$z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n \leq c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = Z^*$$

y dado que $z_j = c_B{}^1\ y_{1j} + \ldots + c_B{}^m\ y_{mj}$, entonces

$$(c_B{}^1\ y_{11} + \ldots + c_B{}^m\ y_{m1}) x_1 + \ldots + (c_B{}^1\ y_{1n} + \ldots + c_B{}^m\ y_{mn}) x_n =$$

$$(y_{11} x_1 + \ldots + y_{1n} x_n) c_B{}^1 + \ldots + (y_{m1} x_1 + \ldots + y_{mn} x_n) c_B{}^m \leq Z^*$$

$x_B{}^1\ c_B{}^1 + \ldots + x_B{}^m\ c_B{}^m \leq Z^*$ por lo tanto X_B es una solución óptima.

<u>Teorema</u>: 2.1.2 Si existe j tal que $z_j - c_j > 0$ y $y_{ij} \leq 0$ para todo i con al menos uno distinto de cero, entonces la función a minimizar es no acotada.

<u>Demostración</u>: Supongase que $X_B = (x_B{}^1, x_B{}^2, \ldots, x_B{}^m)$ es una SFB, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} X_{B^i} B^i = b \quad (1) \qquad y \qquad z = C_B X_B$$

tómese $A^j \notin B$ con $z_j - c_j > 0$. Si se suma y se resta θA^j a la expresión (1) con $\theta < 0$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} X_{B^i} B^i + \theta A^j - \theta A^j = b \qquad (2)$$

pero

$$\theta A^j = \theta \sum_{i=1}^{m} y_{ij} B^i = \sum_{i=1}^{m} \theta y_{ij} B^i$$

de donde sustituyendo θA^j en (2) se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} (X_{B^i} + \theta y_{ij}) B^i - \theta A^j = b$$

entonces:

$$X_{B^i} + \theta y_{ij} \geq 0$$

pues $\theta < 0$ y $y_{ij} \leq 0$

de aqui que se tiene una solucion no básica con m+1 componentes y el valor de la función objetivo para esta solución es:

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_{B^i}(x_{B^i} + \theta y_{ij}) + c_j(-\theta) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{B^i} \, x_{B^i} + \theta \left[\sum_{i=1}^{m} c_{B^i} \, y_{ij} - c_j \right]$$

$$= Z + \theta(z_j - c_j)$$

y dado que $\theta < 0$ y $z_j - c_j > 0$, entonces $\tilde{Z} < Z$. Por lo tanto la funcion es no acotada por debajo y no tiene minimo.

2.2 METODO DE DOS FASES

En esta sección se introducen los conceptos necesarios para mostrar el método de dos fases, éste consiste en su primera fase en dar una solución factible básica inicial con la cual el método simplex empiece a operar y en la segunda fase, pasar de ésta solución factible básica a una solución factible básica óptima. Para resolver este tipo de problemas también existe el método llamado de Penalización ó de la Gran M, por efectos prácticos aquí se trabajará solo el método de dos fases. Si se quiere profundizar sobre este tema ver [ ].

Las *variables artificiales* se introducen cuando se tiene que un PPL en su FE, $AX = b$ con $X \geq 0$ y $b \geq 0$ donde A, es una matriz de orden mxn, la cual no contiene una submatriz de vectores unitarios de orden m para empezar a operar con el método simplex.

Esto es cuando se tiene que:

a) El problema original contiene restricciones de igualdad.

b) Al pasar el problema original a su FE se agregan agregan variables de holgura negativas.

El sistema resultante al ser agregadas las variables artificiales es:

$$AX + I\tilde{X} = b$$

donde $\tilde{X} \geq 0$ es el vector formado por las variables artificiales.

La solución factible básica de este problema queda definida por $X = 0$ y $\tilde{X} = b$, con esta solución se inicia el algoritmo del método simplex; pero como $AX = b$ si y solo si $AX + I\tilde{X} = b$ con $\tilde{X} = 0$ es necesario eliminar las variables artificiales. Para esto se requiere el método, que a continuación se enuncia, el cual, además de eliminarlas encuentra la solución factible básica del problema original en caso de que ésta exista.

METODO DE DOS FASES

<u>FASE I</u>. En esta etapa el objetivo es hacer cero la suma de las variables artificiales, esto es:

Minimizar $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \tilde{X}_i$ ($\tilde{X}_i$ variables artificiales)

Sujeto a:

$$AX + I\tilde{X} = b$$

$$X \geq 0,\ b \geq 0 \quad y \quad \tilde{X} \geq 0$$

En el caso en que alguna variable artificial sea distinta de cero se concluye que el problema original no tiene solución, en caso en que se logre el objetivo la solución óptima es una solución factible básica del problema original.

<u>FASE II</u>. En la fase I se encuentra una solución factible básica y con ésta se inicia el método simplex para encontrar la solución óptima del problema.

La tabla final de la fase I viene a ser la tabla inicial de la fase II, diferenciándose ésta en que se le agrega una fila con los coeficientes de la función objetivo original, además se calculan los coeficientes relativos $(z_j - c_j)$. Para ilustrar lo anterior se muestra el siguiente

<u>Ejemplo</u>: 2.2.1.

Minimizar $\quad 3x_1 + 4x_2$

Sujeto a: *Problema original*

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 16$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Pasarlo a su FE

Minimizar $\quad 3x_1 + 4x_2$

Sujeto a: *Problema en su FE*

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 16$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0$$

Aquí se observa que el sistema no contiene una base de vectores canónicos por lo que es necesario agregarle variables artificiales, esto es:

Minimizar $\quad 3x_1 + 4x_2$

Sujeto a: *Problema con variables artificiales*

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 16$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0, \; x_5 \geq 0, \; x_6 \geq 0$$

esto se expresa de la siguiente manera:

$$AX + I\tilde{X} = b$$

con $\quad X \geq 0,\ \tilde{X} \geq 0,\ b \geq 0.$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix} \quad AX = b \quad \text{si y solo si} \quad AX + I\tilde{X} = b \quad \text{con } \tilde{X} = 0$$

Alicando el *METODO DE DOS FASES* para resolver el problema.

<u>FASE I</u>.

Minimizar $\qquad x_5 + x_6$

Sujeto a:

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 16$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

FASE I

	c_j	0	0	0	0	1	1	
c_B	B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	b
1	A^5	2	1	-1	0	1	0	3
1	A^6	1	1	0	-1	0	1	16
$z_j - c_j$		3	2	-1	-1	0	0	19

Tabla 1

El vector que entra a la base es A^1 y el vector que sale de la base es A^5, de aqui construimos la siguiente tabla de la fase I sin considerar A^5.

FASE I

	c_j	0	0	0	0	1	
c_B	B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^6	b
0	A^1	1	1/2	-1/2	0	0	3/2
1	A^6	0	1/2	1/2	-1	1	29/2
$z_j - c_j$		0	1/2	1/2	-1	0	29/2

Tabla 2

En este caso los vectores que pueden entrar a la base son A^2 y A^3 se puede tomar cualquiera de ellos. Aquí se tomará A^3 como vector de entrada.

El vector que sale de la base es A^6 puesto que es el único que hace que:

$$b_i/(a_{ij}) \geq 0$$

de aquí construimos la siguiente tabla sin considerar A^6.

FASE I

	c_j	0	0	0	0	
c_B	B	A^1	A^2	A^3	A^4	b
0	A^1	1	1	0	-1	16
0	A^3	0	1	1	-2	29
$z_j - c_j$		0	0	0	0	0

Tabla 3

como todos los $z_j - c_j$ son ceros se termina la fase I. Pasamos a la siguiente fase.

<u>FASE II</u>.

En esta fase se resuelve el problema total, esto es se consideran los c_j de la función objetivo original.

FASE I

	c_j	3	4	0	0	
c_B	B	A^1	A^2	A^3	A^4	b
3	A^1	1	1	0	-1	16
0	A^3	0	1	1	-2	29
$z_j - c_j$		0	-1	0	-3	48

Tabla 1

de aqui concluimos que la solución factible básica para el problema total es (16, 0, 29, 0) ya que todos los $z_j - c_j$ son negativos ó ceros, con esto el algoritmo del método simplex asegura que se está en el óptimo. El valor de la función objetivo es $Z = 3(16) + 4(0) = 48$.

3.1 DUALIDAD

En esta sección se muestra que dado cualquier PPL en su forma original que ahora se llamará forma primal (P), con los mismos datos de éste, se puede formular un nuevo problema denominado problema dual (D), el cual en ciertas circunstancias es mas fácil resolver computacionalmente. Además se prueba que al resolver el problema dual es posible obtener soluciones del problema primal; por último se dan algunas propiedades importantes del problema dual, las cuales nos llevan a un nuevo algoritmo para resolver problemas lineales denominado método dual simplex.

Como ya se enunció en la sección 2.2.2. existen varias formas de representar un PPL en esta sección se trabajará con la forma canónica que se define a continuación.

FORMA CANONICA DE DUALIDAD

Supóngase que el problema original o *PROBLEMA PRIMAL* está escrito en la *FORMA CANONICA* la cual es

Maximizar $\qquad Z = C^t X$

Sujeto a: $\qquad\qquad$ (P)

$$A\,X \leq b$$

$$X \geq 0$$

entonces con estos mismos datos se define la siguiente estructura la cual se denomina *PROBLEMA DUAL*

Minimizar $\qquad W = b^tY$

Sujeto a: $\qquad$ (D)

$$A^tY \geq C$$

$$Y \geq 0$$

Ejemplo 3.1.1. Considérese el siguiente problema primal el cual ya está en la forma canónica.

Maximizar $\qquad Z = 2x_1 + 6x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 1$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

su problema dual es:

Minimizar $\qquad W = 4y_1 + y_2$

Sujeto a:

$$y_1 + 3y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + 6y_2 \geq 6$$

$$\text{con} \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

A continuación se dan algunas observaciones importantes referentes a lo anterior.

1.- Si A es una matriz de orden mxn, entonces A^t es de orden nxm.

2.- Si el problema primal es de minimizar su problema dual es de maximizar.

3.- A cada variable del problema primal le corresponde una restricción del problema dual.

4.- El vector de costos en el problema primal aparece como el vector de requerimientos del problema dual.

5.- Si el problema primal tiene m variables su problema dual tiene n variables.

6.- Las variables en ambos casos son positivas.

El teorema que se da a continuación muestra que no importa cual de los dos problemas inicialmente formulados es el primal ya que el otro será el dual.

<u>Teorema</u>: 3.1.1. El problema dual del problema dual es el problema primal.

<u>Demostración</u>: Considérese el problema dual (D)

Minimizar $\qquad W = b^tY$

Sujeto a:

$$A^tY \geq C$$

$$Y \geq 0$$

para encontrar su problema dual se requiere que esté en la forma canónica. Como $\min(W = b^tY) = -\mathrm{Max}(W' = -b^tY)$ se tiene el problema equivalente

Maximizar $\qquad W' = -b^tY$

Sujeto a:

$$-A^tY \leq -C$$

$$Y \geq 0$$

el cual ya está en forma canónica. El dual de este problema es

Minimizar $\qquad Z' = -C^tX$

Sujeto a:

$$-AX \geq -b$$

$$X \geq 0$$

o lo que es lo mismo

Maximizar $\qquad Z = c^t X$

Sujeto a:

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0 \quad .$$

el cual es el problema primal (P).

Es claro que un PPL en su forma primal no siempre va a tener la forma canónica, pero se puede llevar a ésta atendiendo las reglas de la sección 1.2. y con la siguiente aclaración.

Si la i-ésima restricción de un PPL es una ecuación de igualdad, es decir,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ . \ . \ . + a_{in}x_n = b_i$$

la podemos sustituir por las siguientes dos desigualdades

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ . \ . \ . + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ . \ . \ . + a_{in}x_n \leq b_i$$

<u>Ejemplo</u>: 3.1.2. Encontrar el problema dual de

Maximizar $\qquad Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

Sujeto a:

$$3x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 4$$

$$5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

primero pasemos el problema a la forma canónica, donde se obtiene

Maximizar $\quad Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

Sujeto a:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$-3x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -4$$

$$-5x_1 - 2x_2 - 6x_3 \leq -8$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$-x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -5$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

y su dual correspondiente es

Minimizar $\quad W = 4y_1 - 4y_2 - 8y_3 + 5y_4 - 5y_5$

Sujeto a:

$$3y_1 - 3y_2 - 5y_3 + y_4 - y_5 \geq 2$$

$$2y_1 - 2y_2 - 2y_3 + y_4 - y_5 \geq 4$$

$$y_1 - y_2 - 6y_3 + 3y_4 - 3y_5 \geq 3$$

$$\text{con} \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0,\ y_5 \geq 0$$

Nótese que si tomamos $y_1 - y_2 = u$ y $y_4 - y_5 = v$ se obtiene

Minimizar $\quad W = 4u - 8y_3 + 5v$

Sujeto a:

$$3u - 5y_3 + v \geq 2$$

$$2u - 2y_3 + v \geq 4$$

$$u - 6y_3 - 3v \geq 3$$

con $y_3 \geq 0$, u y v irrestrictas en signo.

en éste problema se puede observar que por cada ecuación de igualdad en el problema primal aparece una variable irrestricta en signo en el problema dual. En general éste resultado es verdadero y se prueba en el siguiente

<u>Teorema</u>: 3.1.2. Si la restricción j-ésima del problema primal es una igualdad, entonces la variable j-ésima del problema dual es irrestricta en signo.

<u>Demostración</u>: Supóngase que la forma primal de un PPL es

Maximizar $\qquad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ . \ . \ . + c_nx_n$

Sujeto a:

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + \ . \ . \ . + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\
a_{j-1,1}x_1 + \ . \ . \ . + a_{j-1,n}x_n & \leq & b_{j-1} \\
a_{j1}x_1 + \ . \ . \ . + a_{jn}x_n & = & b_j \\
a_{j+1,1}x_1 + \ . \ . \ . + a_{j+1,n}x_n & \leq & b_{j+1} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + \ . \ . \ . + a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

con $\quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ . \ . \ . \ , \ x_n \geq 0$

Al pasarlo a la forma canónica se obtiene

Maximizar $\qquad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ . \ . \ . + c_nx_n$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j-1,1}x_1 & +\ldots+ & a_{j-1,n}x_n & \leq & b_{j-1} \\
a_{j1}x_1 & +\ldots+ & a_{jn}x_n & \leq & b_j \\
-a_{j1}x_1 & -\ldots- & a_{j1}x_n & \leq & -b_j \\
a_{j+1,1}x_1 & +\ldots+ & a_{j+1,n}x_n & \leq & b_{j+1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}
$$

con $\quad x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

cuyo problema dual es:

Minimizar $\quad W = b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_{j-1}y_{j-1}+b_jy_j-b_jy_{j+1}+\ldots+b_my_m$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}y_1+\ldots+a_{j-1,1}y_{j-1}+a_{j1}y_j-a_{j1}y_{j+1}+\ldots+a_{m1}y_m \geq c_1 \\
\vdots \\
a_{1n}y_1+\ldots+a_{j-1,n}y_{j-1}+a_{jn}y_j-a_{jn}y_{j+1}+\ldots+a_{mn}y_m \geq c_n
\end{array}
$$

con $\quad y_1 \geq 0, \ldots, y_{j-1} \geq 0, y_j \geq 0, y_{j+1} \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$

tomando $\quad y_j - y_{j+1} = u \quad$ se obtiene

Minimizar $\quad W = b_1y_1 + \ldots + b_ju + \ldots + b_my_m$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}y_1 + \ldots + a_{j1}u + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
\vdots \\
a_{1n}y_1 + \ldots + a_{jn}u + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_m
\end{array}
$$

con $\quad y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0 \quad$ y u irrestricta en signo.

por tanto la j-ésima variable del dual es irrestricta en signo.

En la tabla 3.1.1 se muestran los resultados obtenidos de los teoremas anteriores.

Maximización del problema	minimización del problema
Restricciones	Variables
$i \leq b_i$	$i \geq 0$
$i \geq b_i$	$i \leq 0$
$i = b_i$	i irrestricta en signo
Variables	Restricciones
$i \geq 0$	$i \geq c_i$
$i \leq 0$	$i \leq c_i$
i irrestrictas en signo	$i = c_i$

Tabla 3.1.1. Relaciones entre los problemas primal y dual.

<u>Teorema</u>: 3.1.3. Cualquier solución factible del problema primal da un valor en la función objetivo del problema primal menor o igual al valor que tiene la función objetivo del dual en cualquier solución factible de ésta.

<u>Demostración</u>: Sean X^* y Y^* soluciones factibles de los problemas primal y dual respectivamente, lo cual implica

$$AX^* \leq b \quad (1) \qquad \text{y} \qquad A^tY^* \geq C \quad (2)$$

$$X^* \geq 0 \qquad\qquad\qquad Y^* \geq 0$$

tomando la transpuesta en ambos lados de (1) se tiene

$$(AX^*)^t \leq b^t$$

$$(X^*)^t A^t \leq b^t$$

y multiplicando por $Y^* \geq 0$ por la derecha se obtiene

$$(X^*)^t A^t Y^* \leq b^t Y^* \qquad (3)$$

de la misma manera tomando la transpuesta en ambos lados de (2) se tiene

$$(A^t Y^*)^t \geq C^t$$
$$(Y^*)^t A \geq C^t$$

y multiplicando por $X^* \geq 0$ por la derecha se tiene

$$(Y^*)^t A X^* \geq C^t X^* \qquad (4)$$

dado que $(X^*)^t A^t Y^* = (Y^*)^t A X^*$ las relaciones (3) y (4) implican

$$Z = C^t X^* \leq (Y^*)^t A X^* = (X^*)^t A^t Y^* \leq b^t Y^* = W$$

que es lo que se queria demostrar.

Este teorema es importante ya que relaciona los valores de las funciónes objetivo en ambos problemas y además se obtienen consecuencias importantes de él en los siguientes corolarios.

Corolario 1: Si X^* y Y^* son soluciones factibles de los problemas primal y dual con la condición de que $C^t X^* = b^t Y^*$, entonces X^* y Y^* son soluciones óptimas.

Demostración: Sea X cualquier solución factible del problema primal. Como Y^* es solución factible del problema dual, por el teorema 2.8.3. se tiene:

$$C^t X \leq b^t Y^* = C^t X^*$$

lo cual implica que X^* es una solución óptima. (Analogamente se prueba que Y^* también lo es).

El siguiente corolario indica que el no acotamiento en uno de los problemas implica no factibilidad en el otro problema.

Corolario 2. Si el problema primal tiene solución no acotada, entonces el problema dual no tiene ninguna solución factible y viceversa.

Demostración: Probaremos que si el problema primal tiene solución no acotada, entonces el problema dual no tiene solución factible y dado que el dual del dual es el primal quedará probado en los dos sentidos.

Considérese el problema primal en la forma canónica, por el teorema 3.1.3. se tiene que para cualquier solución factible Y^* del dual

$$\text{Max} \quad Z = C^tX \leq b^tY^*$$

por hipótesis Max $Z = \infty$ lo cual implica que no existe solución factible Y^* en las cuales todas componentes sean finitas.

Además cabe aclarar que si uno de los problemas no tiene solución factible entonces su dual correspondiente, o bien tiene solución no acotada o no tiene soluciones factibles. Veamos esto através de un ejemplo.

Ejemplo: 3.1.3. Considerese el problema primal

Maximizar $\qquad Z = 2x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0 \qquad (P)$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Nótese que este problema no tiene soluciones factibles ya que el sistema es inconsistentes (ver Fig. 3.1.1.). Similarmente su problema dual, que se da a continuación, no tiene soluciones factibles, (ver Fig. 3.1.2.).

Minimizar $\qquad Z = -y_1$

Sujeto a:

$$y_1 - y_2 \geq 2$$

$$-y_1 + y_2 \geq 3 \qquad (D)$$

$$\text{con} \quad y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0$$

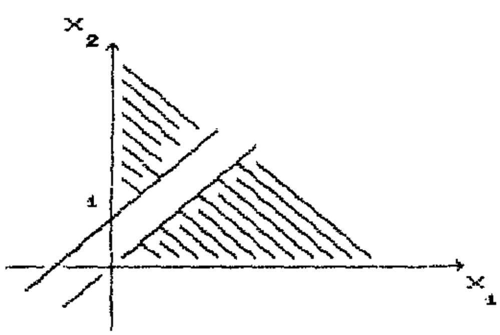


Figura 3.1.1.

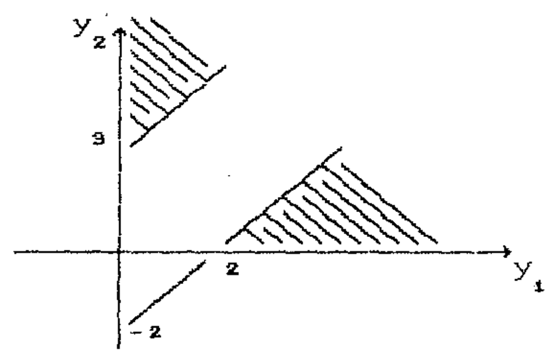


Figura 3.1.2.

El teorema que se a a continuación es el principal en la teoria de dualidad porque asegura que una vez que se conoce la solución del problema primal, la solución del problema dual se puede obtener facilmente.

<u>Teorema</u>: 3.1.4. (Fundamental de dualidad). Si existe una solución

óptima del problema primal, entonces existe una solución óptima del problema dual y en ambas soluciones los valores de las respectivas funciones objetivo coinciden.

Demostración: Considerese el problema primal en la forma estándar (problema de maximización)

Maximizar $$Z = C^t X$$

Sujeto a:

$$AX = b$$

$$\text{con} \quad X \geq 0$$

el tableu inicial para este problema es:

variables originales	variables de holgura	
A	I	b
$-C^t$	0	0

Sea $A = [B,N]$ donde B es la base donde se alcanza el óptimo y el N el complemento de la partición. Entonces el problema anterior puede escribirse como:

Maximizar $$Z = C_B X_B + C_N X_N$$

Sujeto a:

$$BX_B + NX_N = b$$

$$\text{con} \quad X_B \geq 0 \quad y \quad X_N = 0$$

y la solución se obtiene al hacer cero el vector que no está en la base, X_N y resolver el vector básico. Así la solución de este problema es $X_B = B^{-1}b$ y la función objetivo se convierte en

$Z = C_B B^{-1} b$ por lo tanto el tableu donde se alcanza el óptimo es de la forma:

$z_j - c_j$ correspondientes a las variables originales	$z_j - c_j$ correspondientes a las variables de holgura	
$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$C_B B^{-1}A - C^t$	$C_B B^{-1}$	$C_B \bar{B}^{-1} b$

de aqui que $-C^t + C_B B^{-1}A \geq 0$ y $C_B B^{-1} \geq 0.$ (*)

Ahora se probará que el vector $Y^t = C_B B^{-1}$ es una solución óptima del dual. De (*) se obtiene la factibilidad de Y, pues

$$Y^t = C_B B^{-1} \geq 0$$

$$Y^t A \geq c^t$$

$$A^t Y \geq C$$

por otra parte la función objetivo del dual es

$$W = b^t Y = b^t (C_B B^{-1})^t = b^t (B^{-1})^t C_B^t = C_B B^{-1} b = Z$$

por lo tanto $Y^t = C_B B^{-1}$ es una solución óptima del dual.

Notese por lo anterior, que cuando se tiene un tableu inicial para el método simplex en el problema primal y se llega al óptimo, en los coeficientes de la función objetivo que aparecen abajo de la matriz, que era inicialmente la identidad, se tiene la solución óptima del problema dual.

INTERPRETACION ECONOMICA DE LAS VARIABLES DUALES

Ya se probó que la solución donde alcanza el óptimo el problema dual es:

$$Y^t = C_B B^{-1} \qquad (1)$$

donde B es la base óptima del problema primal. Si multiplicamos a ambos lados de (1) por B se tiene:

$$Y^t B = C_B B^{-1} B = C_B$$

que a su vez se puede reescribir como

$$Y^t A^j = C_{Bj} \qquad \text{con} \qquad j \in B$$

ahora supobgase que el vector de requerimientos tiene un pequeño cambio de b a b + Δb de tal forma que la base óptima B no cambia. Para que la nueva solución siga siendo óptima se requiere que sea no negativa, es decir:

$$X_B = B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

Además los valores de $z_j - c_j$ no han cambiado, esto es:

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} A^j - c_j \qquad \text{para toda } j \in A$$

por otra parte la función dual ahora toma el valor

$$\begin{aligned} W' &= Y^t(b + \Delta b) \\ &= Y^t b + Y^t \Delta b \\ &= W + Y^t \Delta b \\ &= Z + Y^t \Delta b \end{aligned}$$

donde W es el valor óptimo dual ó primario anterior.

Así que un pequeño incremento en el vector de requerimientos cambia el valor óptimo de la función objetivo dual y primal en $Y^t \Delta b$. En el caso particular que el cambio en b sea unitario, la función objetivo cambia en Y unidades, es decir, si la i-ésima componente de b sufre un cambio unitario, entonces la función objetivo sufrirá un cambio de Y unidades. Así que:

$$Y_i = \frac{\partial Z}{\partial b_i}$$

es decir, las variables duales representan la rapidez de cambio de la función objetivo con respecto a un incremento unitario de b.

A continuación se muestran algunos de los usos mas importantes sobre dualidad.

1.- Dado que el grado de dificultad y el número de iteraciones del método simplex está en función del número de restricciones y no en el número de variables, es conveniente resolver por dualidad aquellos problemas en el que el número de restricciones es mayor que el número de variables.

2.- Da interpretación económica de cambios marginales en el vector de requerimientos y sus efectos en el valor de la función objetivo.

3.- Da solución a PPL con un nuevo algoritmo llamado "Método Simplex Dual" el cual, como se verá mas adelante, solo se puede aplicar en circunstancias especiales.

A continuación se muestra el algoritmo del método simplex dual el cual trabaja sobre el tableu simplex (primal), donde en cada iteración se pasa de una SFB dual a una SFB dual mejorada hasta obtener el óptimo dual ó bien hasta concluir que el dual es no acotado y que el primal es no factible.

Considerese el siguiente PPL que está en forma primal.

Maximizar $\qquad Z = C^t X$

Sujeto a:

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Considerese el siguiente tableu donde B es una base no necesariamente factible.

	X_1	X_2	$\cdots$	X_n	X_{n+1}	$\cdots$	X_{n+m}	b^*
X_{B_1}	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1,n+1}$	$\cdots$	$y_{1,n+m}$	b^*_1
X_{B_2}	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2,n+1}$	$\cdots$	$y_{2,n+m}$	b^*_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
X_{B_m}	y_{m1}	y_{m2}	$\cdots$	y_{mn}	$y_{m,n+1}$	$\cdots$	$y_{m,n+m}$	b^*_m
	z_1-c_1	z_2-c_2	$\cdots$	z_n-c_n	$z_{n+1}-c_{n+1}$	$\cdots$	$z_{n+1}-c_{n+1}$	$C_B b^*$

El tableu representa solución factible primal si $b_i \geq 0$ $i=1,2,..m$, es decir, si $b^* = B^{-1}b \geq 0$. Además el tableu es óptimo si:

$$z_j - c_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,n+m$$

como $z_j = Y^t A^j$ $j = 1,2,\dots,n+m$, entonces, se tiene que:

$$Y^t A^j - c_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n+m$$

en notación condensada se tiene que:

$$Y^t A - C^t \geq 0$$

$$Y^t A \geq C^t$$

$$A^t Y \geq C$$

así se tiene que factibilidad dual es precisamente el criterio de optimalidad $z_j - c_j \geq 0$ $j=1,2,\dots,n+m$.

METODO DUAL SIMPLEX

Considérese el siguiente PPL

Maximizar $Z = C^t X$

Sujeto a:

$$AX = b$$

$$\text{con} \quad X \geq 0$$

Como se sabe en muchos casos no existe una SFB con la cual el método simplex empiece a operar, en tales casos se utiliza el método de dos fases dado en la sección 2.7. En estos mismos casos, a veces, se encuentra una solución básica inicial no necesariamente factible pero si dual factible, es decir, $z_j - c_j \geq 0$ para todo j. Para problemas con estas condiciones se desarrolla una variante del método simplex que mantenga factibilidad dual y que se puedan manejar para obtener factibilidad primaria.

Considérese el siguiente tableu que representa una solución básica inicial.

	X_1	X_2	$\cdots$	X_j	$\cdots$	X_k	$\cdots$	X_n	Z	b
X_{B_1}	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{1n}	0	b_1
X_{B_2}	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2k}	$\cdots$	y_{2k}	$\cdots$	y_{2n}	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_{B_r}	y_{r1}	y_{r2}	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	y_{rk}	$\cdots$	y_{rn}	0	b_r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_{B_m}	y_{m1}	y_{m2}		y_{mj}		y_{mk}		y_{mn}	0	b_m
	z_1-c_1	z_2-c_2		z_j-c_j		z_k-c_k		z_n-c_n	1	$C_B b$

Supóngase que $z_j-c_j \geq 0$ para toda j, es decir, se tiene factibilidad dual, si también $b_i \geq 0$ para toda i, es decir, se tiene factibilidad primal, entonces ya se tiene la solución óptima. En caso contrario considerese algún $b_r<0$, en este caso seleccionando el renglón r como renglón pivote y alguna k tal que $y_{rk}<0$ como columna pivote, entonces es posible hacer que el lado derecho sea $b_r^* > 0$. Así de esta manera se desea hacer todos los $b_i \geq 0$ mediante una serie de pivoteos manteniendo al mismo tiempo todos los $z_j-c_j \geq 0$ para así alcanzar optimalidad. Ahora la pregunta es como seleccionar la columna pivote de tal forma que la factibilidad dual se siga manteniendo después de pivotear. La columna pivote k se determina mediante el siguiente criterio:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \underset{j}{\text{Max}} \{(z_j - c_j)/y_{rj} \ / \ y_{rj} < 0\} \qquad (1)$$

nótese que los nuevos elementos después del pivoteo estan dados por:

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$$

el caso en que $y_{rj} \geq 0$, como $z_k - c_k \geq 0$ y $y_{rk} < 0$, entonces:

$$(y_{rj}/y_{rk})(z_k - c_k) < 0$$

y por tanto:

$$(z_j - c_j)' \geq z_j - c_j \geq 0$$

el caso en que $y_{rj} < 0$, por (1) se tiene que:

$$(z_k - c_k)/y_{rk} \geq (z_j - c_j)/y_{rj}$$

multiplicando ambos lados por $y_{rj} < 0$, se obtiene:

$$[(z_j - c_j)/y_{rk}] \leq z_j - c_j$$

ó

$$(z_j - c_j) - (y_{rj}/y_{rk})(z_k - c_k) \geq 0$$

esto es $(z_j - c_j)' \geq 0$. Así que al determinar la columna pivote k bajo el criterio (1) entonces la nueva base que se obtiene al pivotear en y_{rk} sigue siendo dual factible.

Por otra parte el objetivo dual, después del pivoteo, está dado por:

$$C_B B^{-1} b - (z_k - c_k)(b_r / y_{rk})$$

y como $z_k - c_k \geq 0$, $b_r < 0$ y $y_{rk} < 0$, entonces:

$$-(z_k - c_k)(b_r / y_{rk}) > 0$$

de esta manera se ve que el objetivo dual mejora sobre el valor actual de

$$C_B B^{-1} b = b^t Y$$

En el caso particular en que $y_{rj} \geq 0$ para todo j, el problema original no tiene solución.

ALGORITMO DEL METODO SIMPLEX DUAL

Paso 1. Verificar que $z_j - c_j \geq 0$ para todo j y construir el tableu inicial.

Paso 2. Si $X_{Bi} \geq 0$ para todo $i = 1,2,\ldots,m$ el proceso termina, sino seleccionese el vector de salida de la base aquel cuyo correspondiente x_{Bi} sea el mas negativo.

Paso 3. Seleccionar la columna pivote k (vector que entra a la base) mediante el siguiente criterio

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \underset{j}{\mathrm{Max}} \{ (z_j - c_j)/y_{rj} \ / \ y_{rj} < 0 \}$$

Paso 4. Poner un 1 en la posición y_{rk}, ceros arriba y abajo de el y regresar al paso 2.

Ejemplo 3.1.4. Aplicando el método dual simplex, resolver el siguiente PPL.

Minimizar $\qquad Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\text{con } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Este problema puede escribirse como:

Maximizar $\qquad G = -Z = -3x_1 - 2x_2$

Sujeto a:

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$$

$$-3x_1 - 4x_2 + x_4 = -6$$

$$-2x_1 - x_2 + x_5 = -2$$

$$\text{con } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

cuyo tableu correspondiente es:

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	G	b
A^3	-1	-2	1	0	0	0	-4
A^4	-3	-4	0	1	0	0	-6
A^5	-2	-1	0	0	1	0	-2
$z_j - c_j$	3	2	0	0	0	1	0

Nótese que existe factibilidad dual pues $z_j - c_j \geq 0$ para todo j, pero la solución actual no es óptima pues $X_B \geq 0$. El vector que sale de la base es A^4, pues $x_{B4} = -6$ es el mas negativo. El vector que entra a la base es A^2 ya que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \underset{j}{\text{Max}} \{(z_j - c_j)/y_{rj} \;\; / \;\; y_{rj} < 0\}$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \text{Max} \{(2/-4),(3/-3)\} = -1/2$$

el elemento pivote es $y_{22} = -4$, pivoteando y_{22} se obtiene el siguiente tableu

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	θ	b
A^3	2/4	0	1	-1/2	0	0	-1
A^2	3/4	1	0	-1/4	0	0	6/4
A^5	-1/4	0	0	-1/4	1	0	2/4
$z_j - c_j$	6/4	0	0	1/2	0	1	-3

otra vez nótese que la solución actual no es óptima pues $X_B \geq 0$. Repitiendo el mismo procedimiento se tiene que el vector que sale de la base es A^3 y el que entra a la base es A^4 ya que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \text{Max} \{(1/2)/-(1/2)\} = -1$$

el elemento pivote es $y_{14} = -1/2$, pivoteando y_{14} se obtiene el siguiente tableu

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	G	b
A^4	-1	0	-2	1	0	0	2
A^2	1/2	1	-1/2	0	0	0	2
A^5	-1/2	0	-1/2	0	1	0	1
$z_j - c_j$	2	0	1	0	0	1	-4

nótese que $X \geq 0$ por lo que ya se está en el óptimo, con:

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ \hline x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el valor de $G = -Z = -3(0) - 2(2) = -4$, por lo tanto $Z = 4$.

Obsérvese que el método dual simplex tiene ventajas con respecto al método de dos fases ya que no requiere del uso de variables artificiales y se alcanza optimalidad en un número mucho menor de iteraciones. El inconveniente de este método es que requiere factibilidad dual, es decir, $z_j - c_j \geq 0$ para toda j, para empezar a iterar.

3.2 ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Cuando se tiene un PPL el cual ya ha sido resuelto y se le queiere hacer cambios en uno o mas de sus parámetros, no es necesario resolverlo nuevamente desde el principio, en estos casos son aplicados métodos llamados de análisis de sensibilidad los cuales son de gran ayuda ya que proporcionan un ahorro en el costo de utilización de computadoras.

Los cambios que se pueden presentar son los siguientes:

a) Cambios en el vector de requerimientos, esto es, en el vector b.

b) Cambios en el vector de costos, esto es, en el vector c.

c) Cambios en los coeficientes tecnológicos a_{ij}, es decir, en la matriz A.

d) Cambios en el vector de decisión, esto es, en el vector X.

e) Cambios en el número de restricciones.

Aquí se tratan solamente los cambios del tipo a) y b). Si se desea profundizar en el tema ver [ ].

Estos cambios pueden ocurrir por separado o simultaneamente; cuando en el vector b ó c del problema original (PO), cambia una o varias de sus componentes se dice que ocurre un *cambio discreto* y en el caso que dichos vectores tienen cambios del tipo:

$$b + \theta \Delta b \qquad\qquad -\infty < \theta < \infty$$

$$c + \alpha \Delta c \qquad\qquad -\infty < \alpha < \infty$$

donde

Δb y Δc son vectores con las dimensiones de los vectores b y c respectivamnente y α y θ son escalares que pueden tomar cualquier valor real, se dice que ocurre un *cambio continuo*.

Sea un PPL en forma canónica (PO), esto es:

Maximizar $\qquad Z = CX$

Sujeto a:

$$AX \leq b \qquad\qquad (PO)$$

$$X \geq 0$$

Cuyo Tableu correspondiente es de la forma:

Z	A^1 A^2 . . . . A^n	A^{n+1} A^{n+2} . . . . A^{n+m}	
0	A	I	b
1	$-$ C	0	0

sea B la base del tableu, entonces el Tableu óptimo es de la forma:

0	$B^{-1}A$	B^{-1}	$X_B = B^{-1}b$
1	$C_B B^{-1}A - C$	$C_B B^{-1}$	$Z = C_B X_B$

es decir, la solución es

$$X_B = B^{-1}b \geq 0$$

$$\text{con} \qquad Z = C_B X_B$$

ANALISIS DE SENSIBILIDAD PARA CAMBIOS DISCRETOS

1.- Cambios discretos en el vector de requerimientos b.

Supóngase que se desea que el vector b cambie cambie al vector $b + \Delta b$, donde Δb es un vector de m componentes. Entonces se tendría un nuevo problema a resolver de la forma:

Maximizar $\quad Z = CX$

Sujeto a:

$$AX \leq b + \Delta b \qquad \text{(PN)}$$

$$X \geq 0$$

Nótese que la solución óptima X_B cambia a X_B^* dada por:

$$X_B^* = B^{-1}(b + \Delta b)$$

se pueden dar dos casos:

<u>Caso</u> a) $X_B^* \geq 0$ en donde X_B^* será la nueva solución óptima.

<u>Caso</u> b) $X_B^* \geq 0$, en este caso se aplica el método dual simplex en la tabla simplex óptima del problema original, cambiando la columna X_B por X_B^* hasta llegar al óptimo.

Obsérvese que en el caso a) cambia el valor de la solución y el valor de la función objetivo, pero la solución se obtiene con las mismas variables básicas. Veamos el siguiente ejemplo:

<u>Ejemplo</u> 3.2.1. En una fábrica se producen los artículos A y B. En la siguiente tabla se presentan los costos y tiempos de producción por unidad, asi como la disponibilidad de recursos.

	A	B	
costos de produccion	2	5	16
tiempos de produccion	1	2	20

Los precios de venta de A y B son \$3 y \$2 respectivamente.

La formulación matemática para éste problema es:

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a: (PO)

$$2x_1 + 5x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

el tableu simplex inicial es:

C_B	vectores básicos	Z	A^1	A^2	A^3	A^4	
0	A^3	0	2	5	1	0	16
0	A^4	0	1	2	0	1	20
	Z	1	-3	-2	0	0	0

resolviendo (PO) se obtiene la tabla simplex final siguiente

C_B	vectores básicos	Z	A^1	A^2	A^3	A^4	
3	A^1	0	1	5/2	1/2	0	8
0	A^4	0	0	-1/2	-1/2	1	4
	$z_j - c_j$	1	0	11/2	3/2	0	24

donde:

$$X = \left(\frac{X_B}{X_N} \right) = \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_4 \\ \hline X_2 \\ X_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

$Z = 3(8) + 2(0) = 24$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

ahora sopóngase que se desea que el vector de requerimientos sea:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ entonces:}$$

el nuevo problema a resolver es:

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a: (PN)

$$2x_1 + 5x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$\text{con} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

usando el método de análisis de sensibilidad para resolverlo se tiene que:

$$X_B^* = B^{-1}(b + \Delta b)$$

donde:

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{y}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$ con esto se obtiene:

$$X_B^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

por ser $X_B^* \geq 0$ es solución óptima de (NP) con $x_1=4$, $x_2=0$ y el valor de Z es:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 = 3(4)=12$$

obsérvese que al disminuir la disponabilidad de recursos la producción desciende y también el valor de la función objetivo.

En el caso que se desee que las horas de trabajo sean como máximo 10 y que haya destinado para producir a lo mas $4, entonces la formulación del nuevo problema es

Maximizar $\qquad Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a: $\qquad$ (PN)

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$\text{con} \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

utilizando el análisis de sensibilidad

$$X_B^* = B^{-1}(b + \Delta b)$$

$$b + \Delta b = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de aquí que:

$$X_B^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como $X_B^* \geq 0$, se aplica el dual simplex para que haya factibilidad y obtener solución óptima para el (PN).

En este caso se toma la tabla simplex óptima del (PO) y se cambia el vector columna X_B por X_B^*.

C_B	vectores básicos	Z	A^1	A^2	A^3	A^4	
3	A^1	0	1	5/2	1/2	0	5
0	A^4	0	0	-1/2	-1/2	1	-1
	$z_j - c_j$	1	0	11/2	3/2	0	

aplicando el método dual simplex se obtiene el siguiente tableu óptimo.

C_B	vectores básicos	Z	A^1	A^2	A^3	A^4	
3	A^1	0	1	2	0	1	4
0	A^3	0	0	1	1	-2	2
	$z_j - c_j$	1	0	4	0	3	

la nueva solución es $x_1=4$, $x_2=0$ con $Z=3(4)+2(0)=12$ y se observa que disminuye Z al disminuir el vector b.

2.- Cambios discretos en el vector de costos C.

Supóngase que deseamos que el vector de costos C cambie a $C+\Delta C$, donde ΔC es un vector de n componentes. Entonces se tendría un nuevo problema a resolver de la forma:

Maximizar $\qquad Z = (C+\Delta C)X$

Sujeto a:

$$AX \le b \qquad \text{(PN)}$$
$$X \ge 0$$

Nótese que si $z_j - c_j = C_B B^{-1}A^j - c_j$ en el (PO) entonces, en el (PN) se tendrá:

$$z_j - (c_j + \Delta c_j) = C_B B^{-1}A^j - (c_j + \Delta c_j)$$

donde A^j es la columna j-ésima de la matriz A.

De nuevo se pueden dar dos casos:

Caso a) $z_j - (c_j + \Delta c_j) \ge 0$ para cualquier j en A y cero para cualquier j en B, entonces la solución óptima del problema original, X_B, permanece óptima con un nuevo valor de la función objetivo $Z = (C_B + \Delta C_B)X_B$.

Caso b) En caso contrario al caso anterior se procede a hacer $z_j - (c_j + \Delta c_j) = 0$ para j en B mediante operaciones elementales y $z_j - c_j \ge 0$ para j en A, j no en B, mediante el método simplex.

Ejemplo 3.2.2. Retomemos el ejemplo anterior

Maximizar $\qquad Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a: $\qquad$ (PO)

$$2x_1 + 5x_2 \le 16$$
$$x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

cuyo tableu óptimo es:

C_B	vectores básicos	Z	A^1	A^2	A^3	A^4	
3	A^1	0	1	5/2	1/2	0	8
0	A^4	0	0	-1/2	-1/2	1	4
	$z_j - c_j$	1	0	11/2	3/2	0	

Supóngase que el precio unitario del artículo A se reduce a de \$3 a \$1, entonces el problema nuevo a resolver será de la forma:

Maximizar $Z = x_1 + 2x_2$

Sujeto a: (PO)

$$2x_1 + 5x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Nótese que la única componente que cambió del vector C es c_1 por lo que solo combia $z_1 - c_1$ a

$$z_1 - (c_1 + \Delta c_1) = C_B B^{-1} A^1 - (c_1 + \Delta c_1)$$

$$= (3/2,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1$$

$$= 2$$

como $j=1$ está en la base óptima del (PO), primero hay que hacer cero las $z_j - (c_j + \Delta c_j)$ con $j \in B$ mediante operaciones elementales. De aqui que el tableu

C_B	vectores básicos	Z	A^1	A^2	A^3	A^4	
1	A^1	0	1	5/2	1/2	0	8
0	A^4	0	0	-1/2	-1/2	1	4
	$z_j - c_j$	1	2	11/2	3/2	0	

se transforma en

C_B	vectores básicos	Z	A^1	A^2	A^3	A^4	
1	A^1	0	1	5/2	1/2	0	8
0	A^4	0	0	-1/2	-1/2	1	4
	$z_j - c_j$	1	0	1/2	1/2	0	

y como $z_j - c_j \geq 0 \;\; \forall\, j$, entonces ya se está en el óptimo con

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \\ \hline X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \qquad Z = 8(1) + 0(2) = 8.$$

Si en el problema anterior hubiera resultado que $z_j - c_j < 0$ para algún j, entonces se aplicaría el método simplex para llegar al óptimo.

ANALISIS DE SENSIBILIDAD PARA CAMBIOS CONTINUOS

1.- Cambios continuos (ó paramétricos) en el vector de requerimientos b.

Supóngase que se desea hacer un cambio continuo en el vector b. Como ya se dijo en el inicio de esta sección, este cambio es de la forma: $b + \theta\Delta b$ con $-\infty < \theta < \infty$ y con Δb un vector de m componentes. Ahora se tendría un nuevo problema a resolver de la forma:

Maximizar $\qquad Z = CX$

Sujeto a: $\qquad$ (PN)

$$AX \leq b + \theta\Delta b$$

$$X \geq 0$$

Nótese que al variar el vector b a $b + \theta\Delta b$, también varía el vector X_B, la pregunta es ¿ cuánto puede variar θ para que la solución que se obtenga con $b + \theta\Delta b$ "siga siendo óptimo" ?.

Analicemos el problema por casos.

<u>Caso</u> a) $\theta > 0$.

Sea B la base del óptimo y evaluemos

$$X_B^* = B^{-1}(b + \theta\Delta b) = B^{-1}b + \theta B^{-1}\Delta b$$

si $X_B^* \geq 0$ se sigue teniendo solución óptima.

Para el caso en que $B^{-1}\Delta b \geq 0$ no se tiene ningún problema pues, $B^{-1}b \geq 0$ y para el caso en que $B^{-1}\Delta b \geq 0$ se requiere que:

$$(B^{-1}b)_i + \theta(B^{-1}\Delta b)_i \geq 0$$

donde i indica la i-ésima componente y $(B^{-1}\Delta b)_i < 0$, entonces:

$$\theta(B^{-1}\Delta b)_i \geq -(B^{-1}b)_i$$

$$\theta \leq -\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}\Delta b)_i}$$

es decir, basta tomar:

$$\theta^{**} = \min -\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}\Delta b)_i} \quad \text{donde } (B^{-1}\Delta b)_i < 0$$

para asegurar que se sigue teniendo solución óptima.

Caso b) Para $\theta < 0$ se calcula análogamente y se obtiene que tomando

$$\theta^{*} = \max \; - \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}\Delta b)_i} \quad \text{donde } (B^{-1}\Delta b)_i > 0$$

se sigue teniendo solución óptima. Por lo tanto el rango de variación de θ para asegurar que la solución siga siendo óptima es

$$\theta^{*} \leq \theta < \theta^{**}$$

2.- Cambios continuos (ó paramétricos) en el vector de costos C.

Supóngase que se desea hacer un cambio continuo en el vector C. Es decir, un cambio de de la forma $C + \theta\Delta C$ con $-\infty < \theta < \infty$ y con ΔC un vector de n componentes. El problema nuevo a resolver será de la forma:

Maximizar $\quad Z = (C + \theta\,\Delta C)X$

Sujeto a: $\quad$ (PN)

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Nótese que al variar el vector C a $C + \theta\Delta C$, también varían los elementos $z_j - c_j$ con $j \in A$, entonces el nuevo valor de $z_j - c_j$ que denotaremos por $z_j^{*} - c_j^{*}$ está dado por:

$$z_j^{*} - c_j^{*} = (C_B + \theta\Delta C_B)B^{-1}A^{j} - (c_j + \theta\Delta C_j) \qquad \text{con } j \in A$$

$$= C_B B^{-1}A^{j} - c_j + \theta(\Delta C_B B^{-1}A^{j} - \Delta c_j)$$

$$= z_j - c_j + \theta(\Delta C_B B^{-1}A^{j} - \Delta c_j)$$

Ris T971

la pregunta es ¿ qué tanto puede variar θ de tal forma que B siga siendo la base óptima, es decir, $z^*_j - c^*_j \geq 0 \quad \forall \ j \in A$?.

Caso 1. $\theta > 0$

Como $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \ j \in A$, entonces lo único que se requiere es:

$$\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j \geq 0$$

se pueden dar dos casos:

Caso a). $\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j \geq 0 \quad \forall \ j \in A$. entonces la base B sigue siendo óptima para cualquier valor de $\theta \geq 0$.

Caso b). Si existe alguna j en A tal que $\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j < 0$ entonces se requiere encontrar los valores de θ tales que:

$$C_B B^{-1} A^j - c_j + \theta(\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j) \geq 0$$

$$\theta(\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j) \geq - C_B B^{-1} A^j - c_j$$

$$\theta \leq \frac{- C_B B^{-1} A^j - c_j}{\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j}$$

es decir, basta tomar:

$$\theta^* = \min \frac{z_j - c_j}{\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j} \qquad \text{con} \qquad \Delta C_B B^{-1} A^j - A c_j < 0$$

para asegurar que se sigue teniendo solución óptima.

Caso 2). Para el caso $\theta < 0$ se calcula análogamente y se obtiene que para:

$$\theta^{**} = \max \quad \frac{z_j - c_j}{\Delta C_B B^{-1} A^j - \Delta c_j} \qquad \text{con} \qquad \Delta C_B B^{-1} A^j - Ac_j > 0$$

se sigue teniendo solución óptima. Por lo tanto el rango de variación de θ para asegurar que se sigue teniendo solución óptima es:

$$\theta^{**} \leq \theta \leq \theta^{*}$$

CAPITULO 4

APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL A LA INDUSTRIA

En este capítulo se mostrará una aplicación de la programación lineal para la optimización de la producción de papel carbón en la empresa Productos Pelikan, S.A.

Se empieza el capítulo presentando el proceso de producción y el planteamiento del problema. Seguidamente se da la formulación del mismo el cual, como se verá mas adelante, debido a su gran tamaño es modificado dando origen a un nuevo problema a resolver.

Por último se muestran las soluciones del modelo nuevo y se hacen comentarios respecto a estas.

4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta sección se mostrará una aplicación de la programación lineal en la optimización de la producción de papel carbón hecha por *PRODUCTOS PELIKAN, S.A.* Los tipos de papel carbón que aquí se producen son de consumo nacional y algunos de exportación.

Papel carbón que Productos Pelikan produce:

Papel carbón 1010

Papel carbón 1015

Papel carbón interplastic 1022

Papel carbón interplastic 1027

Papel carbón plenticopy 1200

Ultrafilm 1410

Además de los productos de línea mencionados anteriormente, la empresa surte pedidos especiales a instituciones tanto privadas como gubernamentales, como el I.M.S.S., Gestetner, Poder Judicial, etc. Los tipos solicitados son el 1010, 1015, 1022, 1027 y 1200. Los tipos de papel especiales son aquellos que llevan impreso el logotipo de la compañía solicitante.

La materia prima utilizada para la fabricación del papel carbón es la siguiente:

a) Papel base negro

b) Papel base rojo

c) Papel base azul

d) Película de poliester melinex

e) Papel base americano

f).- Tinta C interplastic

g).- Tinta negra brillante

h).- Tinta azul brillante

i).- Tinta oro

j).- Tinta plata

k).- Tinta violeta

l).- Cera

m).- Papel glassine

n).- Carpetas

El proceso completo de producción esta dividido en 5 etapas:

1.- Teñido

2.- Sellado

3.- Entintado

4.- Devanado y guillotinado

5.- Confección y empaque

Para la fabricación del papel carbón la empresa cuenta con la siguiente maquinaria:

MAQUINA ENTINTADORA Y SELLADORA (ES). Es capaz de hacer el teñido, sellado y entintado (ó cualquiera de ellos por separado) de los siguientes tipos de papel carbón: 1010, 1015, 1022, 1027 y 1200, y el teñido y sellado del ultrafilm 1410.

MAQUINA SELLADORA (S). Hace el teñido y sellado de los 6 productos de linea.

NOTA: El teñido para pedidos especiales lo puede hacer cualquiera de las dos máquinas anteriores.

MAQUINA SELLADORA ESPECIAL (SE). Se usa cuando hay pedidos especiales, ya que es la que aplica el sello (logotipo) de la compañía que solicita el papel carbón.

ENTINTADORAS (E) #2, #3 y #4. La entintadora #2 aplica al papel carbón interplastic 1022 una capa de tinta azul brillante y otra de cera al dorso. Las otras dos contienen tinta negra brillante y cera la cual es aplicada a los papeles carbón : 1010, 1015, 1200 y 1027.

ENTINTADORA (E) #5. Esta máquina aplica tinta negra brillante y cera al papel ultrafilm 1410.

DEVANADORAS. Existen dos de estas máquinas, las cuales disponen el papel teñido, sellado, entintado y encerado en un tambor, en capas de 100, 50 ó 25 vueltas, colocando un papel intermedio o separador entre cada capa, hasta colocar seis capas, esto es con el objeto de facilitar el empaque de papel carbón.

GUILLOTINAS. Hay dos de éstas y su función es dar el tamaño adecuado al papel carbón, esto es, hacer los cortes a tamaño carta, oficio, extendido y tamaños especiales.

Devanado y guillotinado (DG). Se toma como una sola etapa de proceso.

CONFECCION Y EMPAQUE (E). Este es el último paso del proceso de fabricación del papel carbón, en él se toman conjuntos de 100, 25 y 10 hojas las cuales son envueltas en papel glassine y empacadas en carpetas.

En la figura 4.1.1. se muestra un esquema del proceso de producción de la planta y en la figura 4.1.2. se especifican los tipos de papel que pueden ser procesados en cada máquina.

Los costos, las mermas y los desperdicios en las diferentes etapas de producción dependen del tipo de papel y de la máquina procesadora. Se entenderá por merma y desperdicio a las pérdidas de papel obtenidas durante el proceso de producción. Por ejemplo, al principio del funcionamiento de cualquier máquina, se obtiene cierta cantidad de papel que se desecha debido al calentamiento de la misma (merma), ejemplo de desperdicio es al haber rupturas en el papel en alguna etapa del proceso, entre otros.

Para la empresa es muy importante tener cantidades almacenadas de cada tipo de papel en cada mes, aqui debe tomarse en cuenta que la capacidad de almacenamiento es limitada. Además, se cuenta con una cantidad inicial de almacenamiento y se desea tener cierta cantidad final. Considerando también que en cada máquina existen limitaciones de capacidad de producción mensual.

Por otra parte se conoce la demanda esperada de producto para todo el horizonte de planeación. Por horizonte de planeación se entiende un período determinado.

El problema consiste en encontrar un plan óptimo de producción para un horizonte de planeación dado, que satisfaga la demanda esperada, así como las restricciones operativas y de almacenamiento.

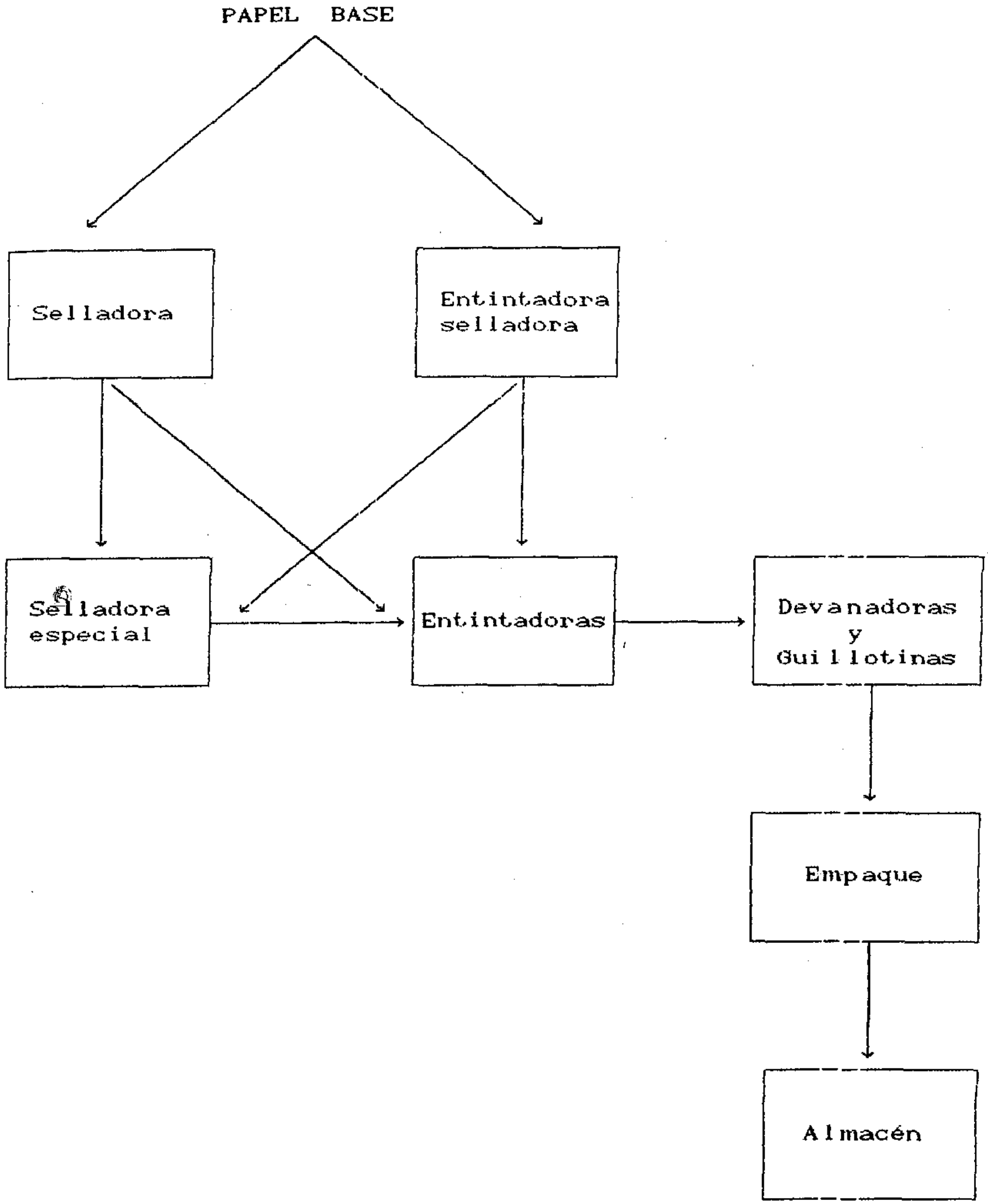
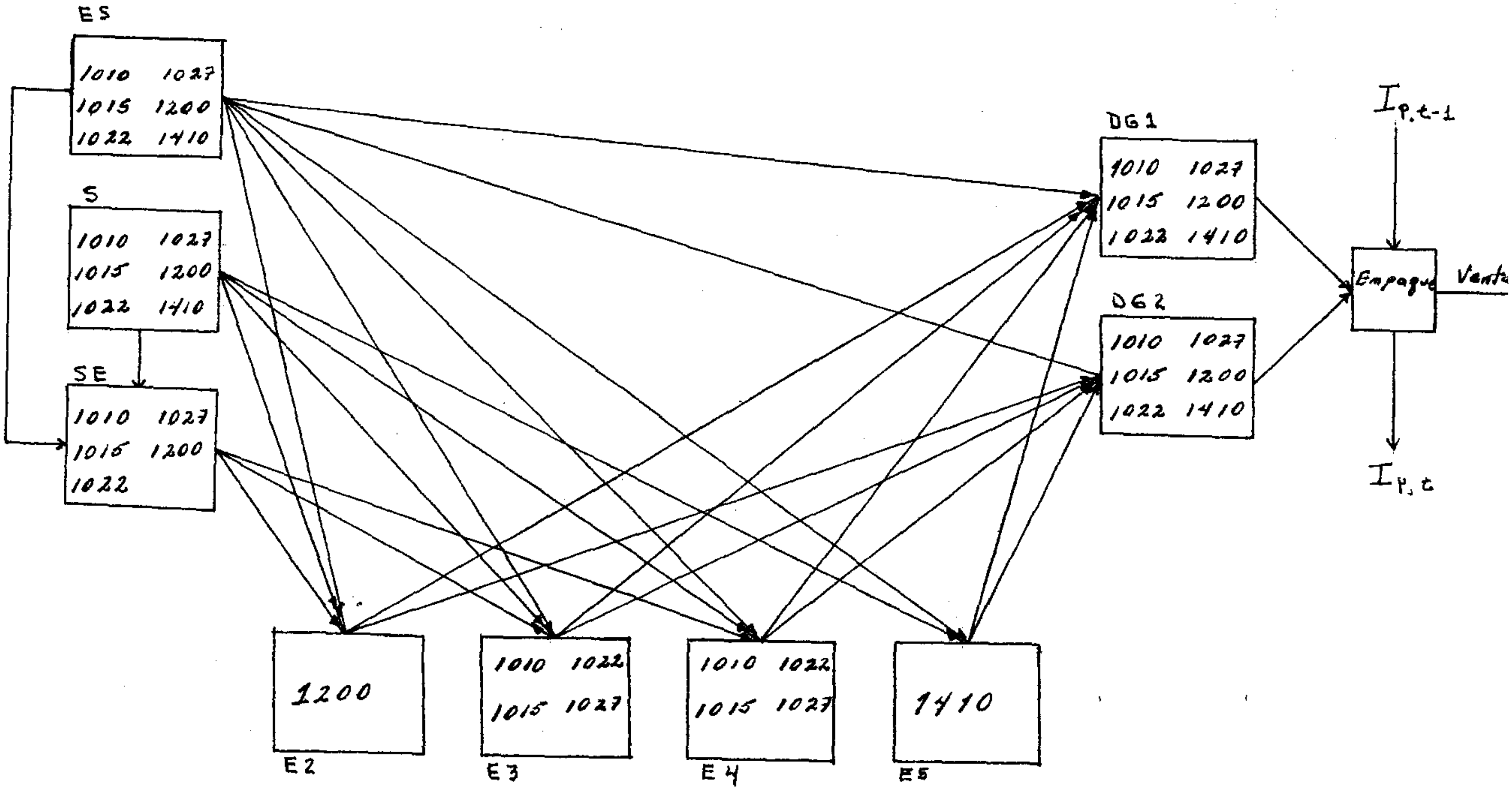


Figura 4.1.1. Diagrama del proceso de producción.



- Los cuadros corresponden a la maquinaria existente.
- Los números en el interior indican los tipos de papel que pueden ser procesados en esa máquina.
- Las flechas indican la secuencia de los caminos.
- I_{pt} representa papel tipo p en inventario el periodo t.

Figura H.1.2.

4.2 FORMULACION DEL MODELO

En esta sección se formula un modelo de programación lineal que describe las relaciones existentes del problema planteado anteriormente.

La empresa suguirió que se podían establecer relaciones de linealidad en el proceso de produción de papel carbón dada la experiencia obtenida en esta área.

En la Fig. 4.2.1. se muestra graficamente el modelo, esto es, los posibles caminos que se pueden seguir en el proceso de producción del papel carbón.

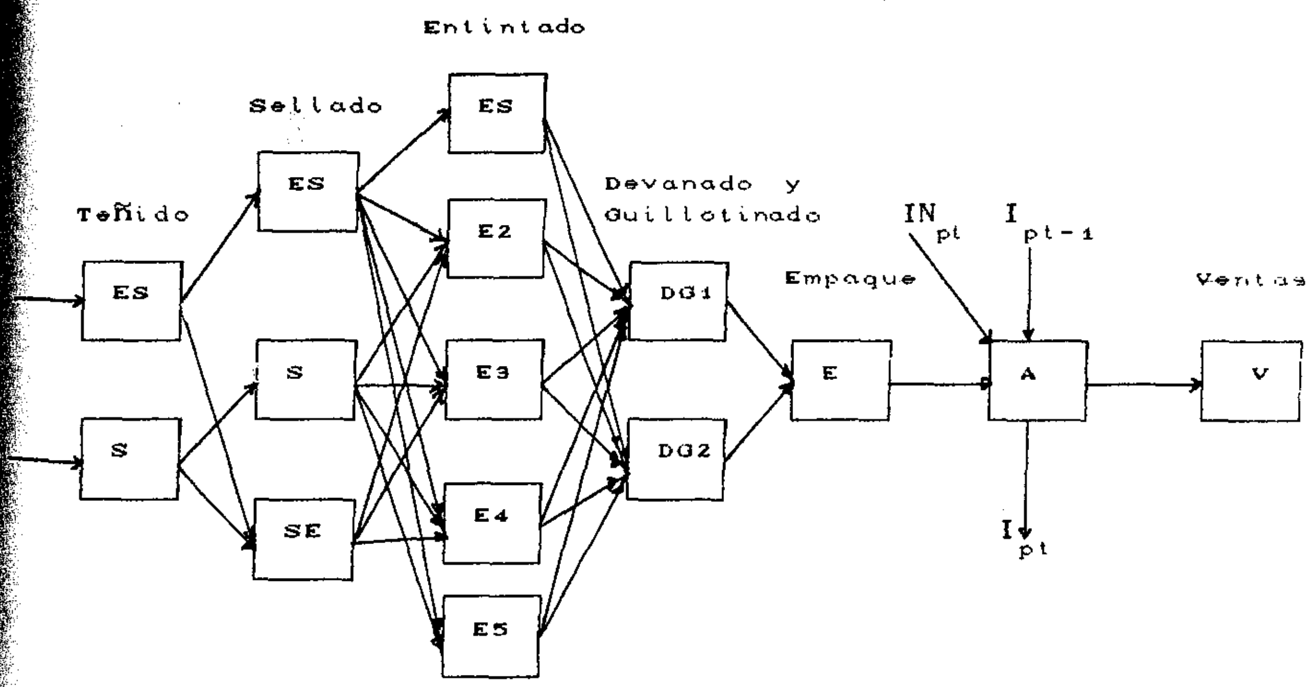


Figura 4.2.1.

Para facilitar notación tomaremos la siguiente relación:

Tipo de papel	p
1010	1
1015	2
1022	3
1027	4
1200	5
1410	6

Sean

$p = \{1,2,...,P\}$ conjunto de tipos de papel.

$i = \{1,2,...,I\}$ conjunto de máquinas teñidoras.

$j = \{1,2,...,J\}$ conjunto de máquinas selladoras.

$k = \{1,2,...,K\}$ conjunto de máquinas entintadoras.

$l = \{1,2,...,L\}$ conjunto de máquinas devanadoras y guillotinas.

$t = \{1,2,...,T\}$ número de periodos del horizonte de planeación.

Definimos las variables como sigue:

VARIABLES

X_{pit} = Cantidad en m^2 de papel base tipo p que entran a la máquina i en el periodo t.

Y_{pijt} = Cantidad en m^2 de papel tipo p teñidos en la máquina i que pasan a la máquina j en el periodo t.

Z_{pjkt} = Cantidad en m^2 de papel tipo p sellados en la máquina j que pasan a la máquina k en el período t.

W_{pklt} = Cantidad en m^2 de papel tipo p entintados en la máquina k que pasan a la devanadora y guillotina l en el período t.

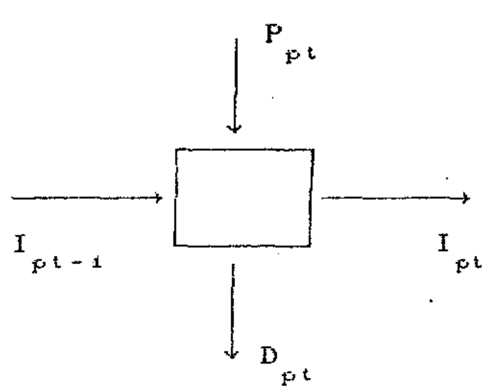
U_{plt} = Cantidad en m^2 de papel tipo p devanados y guillotinados en la máquina l que pasan a empaque en el período t.

E_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p empacadas en el período t.

I_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p almacenadas al final del período t.

IN_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p incumplidas en el período t.

Esta última variable, llamada de incumplimiento, se define por la siguiente razón: Supóngase que en un período particular t se tiene que la cantidad almacenada de papel tipo p, al final del período $t-1$, mas la cantidad de este mismo papel que se produce en el período t, es menor que la demanda pronosticada de este tipo en el período t, esto es:



$$I_{pt-1} + P_{pt} < D_{pt}$$

Lo cual no debe darse puesto que la empresa está comprometida a cubrir la demanda requerida en cada uno de los meses. Para salvar el problema anterior, la empresa Productos Pelikan tendría que comprar a otra compañía (competencia) la cantidad necesaria de papel tipo p para cubrir la demanda. Es ésta cantidad comprada la que llamamos incumplimiento.

En este caso $P = 6$, $I = 2$, $J = 3$, $K = 5$, $L = 2$, $T = 12$.

RESTRICCIONES

Se debe de tener un *BALANCE DE PRODUCTO*, es decir, lo que entra a cada máquina menos cierta cantidad de merma y desperdicio debe de ser igual a lo que sale de la misma máquina.

I.- BALANCE DE PRODUCTO.

a).- Merma y desperdicio en el proceso de teñido.

$$X_{p1t} - kX_{p1}\%(X_{p1t}) = \sum_{j=1}^{3} Y_{p1jt} \qquad \forall\ p,t$$

$$X_{p2t} - kX_{p2}\%(X_{p2t}) = \sum_{j=2}^{3} Y_{p2jt} \qquad \forall\ p,t$$

b).- Merma y desperdicio en el proceso de sellado.

$$Y_{p11t} - kY_{p1}\ \%(Y_{p11t}) = \sum_{k=1}^{5} Z_{p1kt} \qquad \forall\ p,t$$

$$Y_{p22t} - kY_{p2}\ \%(Y_{p22t}) = \sum_{k=2}^{5} Z_{p2kt} \qquad \forall\ p,t$$

$$\sum_{i=1}^{2} Y_{pi3t} - kY_{p3} \%(\sum_{i=1}^{2} Y_{pi3t}) = \sum_{k=2}^{4} Z_{p3kt} \qquad \forall\ p,t \quad \text{con } p\neq 6$$

c).- Merma y desperdicio en proceso de entintado.

$$Z_{p11t} - kZ_{p1} \%(Z_{p11t}) = \sum_{l=1}^{2} W_{p1lt} \qquad \forall\ p,t$$

$$\sum_{j=1}^{3} Z_{pj2t} - kZ_{p2} \%(\sum_{j=1}^{3} Z_{pj2t}) = \sum_{l=1}^{2} W_{p2lt} \qquad p=5 \quad y \quad \forall\ t$$

$$\sum_{j=1}^{3} Z_{pj3t} - kZ_{p3} \%(\sum_{j=1}^{3} Z_{pj3t}) = \sum_{l=1}^{2} W_{p3lt} \qquad \forall\ p,t \quad \text{con } p\neq 5,\ p\neq 6$$

$$\sum_{j=1}^{3} Z_{pj4t} - kZ_{p4} \%(\sum_{j=1}^{3} Z_{pj4t}) = \sum_{l=1}^{2} W_{p4lt} \qquad \forall\ p,t \quad \text{con } p\neq 5,\ p\neq 6$$

$$\sum_{j=1}^{2} Z_{pj5t} - kZ_{p5} \%(\sum_{j=1}^{3} Z_{pj5t}) = \sum_{l=1}^{2} W_{p5lt} \qquad p=6 \quad y \quad \forall\ t$$

d).- Merma y desperdicio en el proceso de devanado y guillotinado.

$$\sum_{k=1}^{5} W_{pk1t} - kW_{p1} \%(\sum_{k=1}^{5} W_{pk1t}) = U_{p1t} \qquad \forall\ p,t$$

$$\sum_{k=1}^{5} W_{pk2t} - kW_{p2} \%(\sum_{k=1}^{5} W_{pk2t}) = U_{p2t} \qquad \forall\ p,t$$

e).- Merma y desperdicio en el proceso de empaque.

$$\sum_{l=1}^{2} U_{plt} - kU_{p} \%(\sum_{l=1}^{2} U_{plt}) = \gamma E_{pt} \qquad \forall\ p,t$$

El coeficiente de E_{pt}, γ = 8.3, se usa para la conversión de carpetas de 100 hojas tamaño carta a metros cuadrados.

En las ecuaciones anteriores kX_{pi}, kY_{pij}, etc., representan el porcentaje de merma y desperdicio de papel tipo p en cada uno de los procesos.

f) $$E_{pt} + I_{p,t-1} + IN_{pt} = I_{pt} + V_{pt} \qquad \forall \; p,t$$

II.- CAPACIDAD DE PRODUCCION.

Existen limitaciones de capacidad de producción de cada máquina en cada periodo ($CAPRO_t$), de aqui que:

$$\sum_{p=1}^{6} [X_{p1t} + Y_{p11t} + Z_{p11t}] \leq CAPRO_t \text{ (ES)} \qquad \forall \; t$$

$$\sum_{p=1}^{6} [X_{p2t} + Y_{p22t}] \leq CAPRO_t \text{ (S)} \qquad \forall \; t$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{p=1}^{5} Y_{pi3t} \leq CAPRO_t \text{ (SE)} \qquad \forall \; t$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{p=5}^{5} Z_{pj2t} \leq CAPRO_t \text{ (E2)} \qquad \forall \; t$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{p=1}^{4} Z_{pj3t} \leq CAPRO_t \text{ (E3)} \qquad \forall \; t$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{p=1}^{4} Z_{pj4t} \leq CAPRO_t \text{ (E4)} \qquad \forall \; t$$

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{p=6}^{6} Z_{pj5t} \leq CAPRO_t \text{ (E5)} \qquad \forall \; t$$

$$\sum_{k=1}^{5} \sum_{p=1}^{6} W_{pk1t} \leq CAPRO_t \text{ (DG1)} \qquad \forall\ t$$

$$\sum_{k=1}^{5} \sum_{p=1}^{6} W_{pk2t} \leq CAPRO_t \text{ (DG2)} \qquad \forall\ t$$

$$\sum_{l=1}^{2} \sum_{p=1}^{6} U_{plt} \leq CAPRO\ E_t \qquad \forall\ t$$

III.- CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO.

No se debe exceder la capacidad disponible para almacenamiento (CAPALM).

$$\sum_{p=1}^{6} I_{pt} \leq CAPALM_t \qquad \forall\ t$$

IV.- INVENTARIO DE SEGURIDAD.

La empresa desea tener un inventario de seguridad, el cual debe de satisfacer.

$$V_{p,t+1} \leq I_{pt} \leq V_{p,t+1} + V_{p,t+2} \qquad \forall\ p,t$$

donde V_{pt} representa la demanda esperada del producto p en el periodo t.

FUNCION OBJETIVO

Se desea minimizar el costo total de producción durante 12 meses, esto es:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_t \sum_p C_{1pt}(X_{p1t} + X_{p2t}) + \sum_t \sum_p C_{2pt}(Y_{p11t} + Y_{p13t}) +$$

$$+ \sum_t \sum_p C_{3pt}(Y_{p22t} + Y_{p23t}) + \sum_t \sum_p C_{4pt}(Z_{p11t} + \ldots + Z_{p15t}) +$$

$$+ \sum_t \sum_p C_{5pt}(Z_{p22t} + \ldots + Z_{p25t}) + \sum_t \sum_p C_{6pt}(Z_{p32t} + Z_{p33t} + Z_{p34t})$$

$$+ \sum_t \sum_p C_{7pt}(W_{p11t} + W_{p12t}) + \sum_t \sum_p C_{8pt}(W_{p21t} + W_{p22t}) +$$

$$+ \sum_t \sum_p C_{9pt}(W_{p31t} + W_{p32t}) + \sum_t \sum_p C_{10,pt}(W_{p41t} + W_{p42t}) +$$

$$+ \sum_t \sum_p C_{11,pt}(W_{p51t} + W_{p52t}) + \sum_t \sum_p C_{12,pt}U_{p1t} + \sum_t \sum_p C_{13,pt}U_{p2t} +$$

$$+ \sum_t \sum_p C_{14,pt}E_{pt} + \sum_t \sum_p C_{15,pt}I_{pt} + \sum_t \sum_p C_{16,pt}IN_{pt} .$$

Como se puede apreciar este problema resulta ser demasiado grande, ya que contiene 888 variables y 1032 restricciones y dado que por el momento no se disponía de una computadora con capacidad suficiente para resolver este problema. Se consideró conveniente pensar en un modelo global en el que no intervenga el proceso de cada una de las máquinas y el cual permitiera decidir que cantidad de cada tipo de papel se debe de producir y tener en inventario en cada uno de los meses de tal forma que se minimicen los costos totales durante un año.

La formulación de este modelo viene a ser la última parte del modelo anterior con la diferencia de que la variable empaque (E) ahora le llamaremos variable de producción (P).

FORMULACION DEL NUEVO MODELO

En la fig. 3.3.2. se muestra el diagrama del nuevo modelo

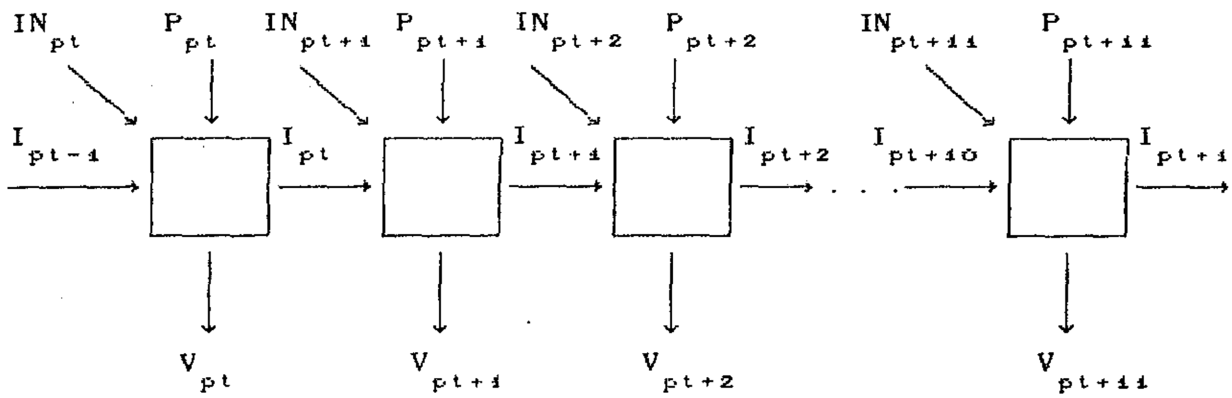


Figura 3.3.2.

Sean

$p = 1,2,\ldots,6$

$t = 1,2,\ldots,12.$

Definimos las variables como sigue:

P_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p producidas en el periodo t.

I_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p almacenadas al final del periodo t.

IN_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p en incumplimiento en el periodo t.

RESTRICCIONES

I.- BALANCE DE PRODUCTO. La cantidad de carpetas de papel tipo p que se producen en el periodo t mas la cantidad de carpetas en

FORMULACION DEL NUEVO MODELO

En la fig. 4.2.2. se muestra el diagrama del nuevo modelo

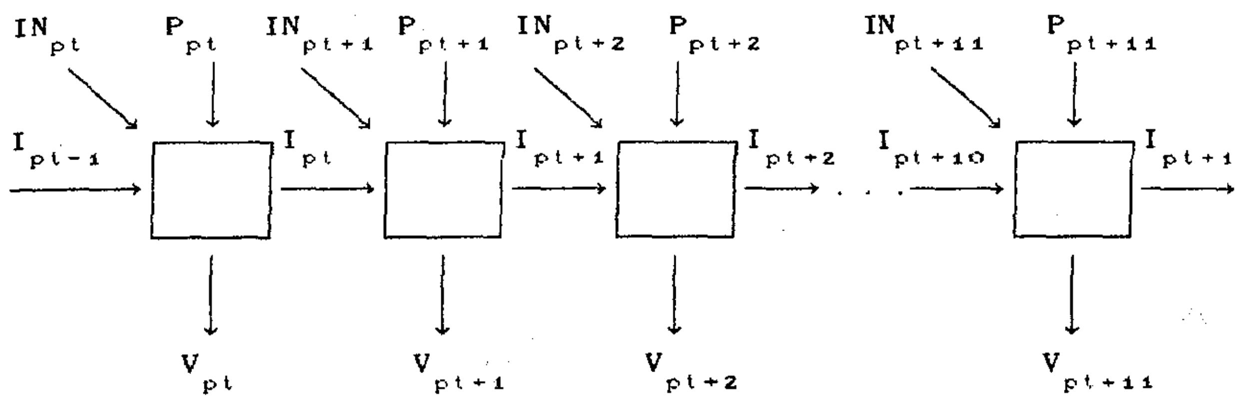


Figura 4.2.2.

Sean

$p = 1,2,...,6$

$t = 1,2,...,12$

Definimos las variables como sigue:

P_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p producidas en el período t.

I_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p almacenadas al final del período t.

IN_{pt} = Cantidad de carpetas de papel tipo p en incumplimiento en el período t.

RESTRICCIONES

I.- BALANCE DE PRODUCTO. La cantidad de carpetas de papel tipo p que se producen en el periodo t mas la cantidad de carpetas en inventario al final del periodo $t-1$ mas la cantidad de carpetas en incumplimiento en el periodo t debe de ser igual a la cantidad de carpetas vendidas en el periodo t mas la cantidad de carpetas que quedaran en almacenamiento al final del peiodo t.

$$P_{pt} + I_{pt-1} + IN_{pt} = V_{pt} + I_{pt} \qquad \forall\ p,t$$

II. CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO. No se debe de exceder la capacidad de almacenamiento de cada periodo.

$$\sum_{p=1}^{6} I_{pt} \leq CAPALM_t \qquad \forall\ t$$

III. INVENTARIO DE SEGURIDAD. Se debe de tener un inventario de seguridad para cada uno de los meses los cuales se rigen por la inecuación.

$$V_{pt+1} \leq I_{pt} \leq V_{pt+1} + V_{pt+2} \qquad \forall\ p,t$$

IV. CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN. Existe limitación de capacidad de producción para cada periodo.

$$\sum_{p=1}^{6} P_{pt} \leq CAPPRO_t \qquad \forall\ t$$

FUNCION OBJETIVO

Se desea maximizar las ganancias totales durante 12 meses, esto es:

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{t=1}^{12} \; \sum_{p=1}^{6} [\; PV_{pt} * V_{pt} - CP * P_{pt} - CI_{pt} * I_{pt} - CIN_{pt} * IN_{pt} \;]$$

Donde:

- PV_{pt} Representa el precio de venta del producto p en el periodo t.
- CP_{pt} Representa el costo de producción del producto p en el periodo t.
- CI_{pt} Representa el costo de inventario del producto p en el periodo t.
- CIN_{pt} Representa el costo por incumplimiento del producto p en el periodo t.

4.3 SOLUCIONES DEL MODELO

En esta sección se muestran los datos de entrada del modelo y los resultados obtenidos del mismo al hacer dos corridas, a las que llamamos Alternativa I y Alternativa II. Además se hacen comentarios respecto a las soluciones, Las gráficas de estas se obtuvieron con un paquete de Lotus 123 en donde thounsands significa miles de unidades.

En el modelo anterior se consideraron dos alternativas. La alternativa I considera todas las restricciones del modelo y la alternativa II considera todas las restricciones del modelo excepto las del invetario de seguridad. Esto es con el fin de ver si hay diferencias significativas en las utilidades.

En las siguientes tablas se muestran los datos de entrada al modelo, esto es, costos de producción, costos de inventario, costos por incumplimiento, precios de venta, demanda, capacidad de producción y capacidad de almacenamiento.

Las primeras cuatro fueron obtenidas en el departamento de contabilidad y las tres restantes del departamento de logística.

Las corridas del modelo se hicieron con un paquete de programación lineal en una microcomputadora.

TIPO DE PAPEL

PERIODO	1010	1015	1022	1027	1200	1410
ENERO	3260	5004	7435	5664	7803	15457
FEBRERO	3423	5254	7804	5947	8193	16229
MARZO	3595	5517	8195	6244	8602	17041
ABRIL	3774	5793	8604	6557	9032	17893
MAYO	3962	6082	9035	6884	9484	18788
JUNIO	4161	6387	9486	7229	9558	19747
JULIO	4369	6706	9961	7590	10456	20713
AGOSTO	4588	7041	10459	7970	10979	21749
SEPT.	4817	7393	10982	8368	11528	22836
OCTUBRE	5058	7763	11531	8787	12104	23978
NOVIEMBRE	5311	8151	12107	9226	12710	25177
DICIEMBRE	5577	8559	12713	9687	13345	26436

TABLA 4.3.1. COSTOS DE PRODUCCION ($).

TIPO DE PAPEL

PERIODO	1010	1015	1022	1027	1200	1410
ENERO	102	215	254	203	282	533
FEBRERO	102	215	254	203	282	533
MARZO	102	215	254	203	282	533
ABRIL	102	215	254	203	282	533
MAYO	102	215	254	203	282	533
JUNIO	107	226	266	213	297	560
JULIO	107	226	266	213	297	560
AGOSTO	112	237	280	223	312	588
SEPT.	112	237	280	223	312	588
OCTUBRE	118	249	294	235	327	618
NOVIEMBRE	118	249	294	235	327	618
DICIEMBRE	130	275	322	259	361	715
ENERO	130	275	322	259	361	715

TABLA 4.3.2. COSTOS POR INVENTARIO ($).

	TIPO DE PAPEL					
PERIODO	1010	1015	1022	1027	1200	1410
ENERO	40000	40000	40000	40000	40000	40000
FEBRERO	44000	44000	44000	44000	44000	44000
MARZO	44000	44000	44000	44000	44000	44000
ABRIL	44000	44000	44000	44000	44000	44000
MAYO	48200	48200	48200	48200	48200	48200
JUNIO	48400	48400	48400	48400	48400	48400
JULIO	53240	53240	53240	53240	53240	53240
AGOSTO	58564	58564	58564	58564	58564	58564
SEPT.	64420	64420	64420	64420	64420	64420
OCTUBRE	70862	70862	70862	70862	70862	70862
NOVIEMBRE	77948	77948	77948	77948	77948	77948
DICIEMBRE	85742	85742	85742	85742	85742	85742

TABLA 4.3.3. COSTOS POR INCUMPLIMIENTO ($).

	TIPO DE PAPEL					
PERIODO	1010	1015	1022	1027	1200	1410
ENERO	25918	22972	34996	25918	30237	35985
FEBRERO	28512	25269	36119	28512	33264	35584
MARZO	28509	25268	36450	28509	33128	39584
ABRIL	28512	25269	36545	28512	33264	39584
MAYO	31363	27795	39653	31363	36545	43543
JUNIO	31358	27795	39651	31358	36542	43544
JULIO	34499	30576	43580	34499	40199	47898
AGOSTO	39742	33632	48127	37942	44274	52686
SEPT.	41740	36997	52833	41740	48848	57954
OCTUBRE	45922	40695	58115	45922	53503	63752
NOVIEMBRE	46937	44765	63899	46937	58854	70127
DICIEMBRE	55553	49241	71197	55553	64737	77139

TABLA 4.3.4. PRECIOS DE VENTA ($).

TIPO DE PAPEL

PERIODO	1010	1015	1022	1027	1200	1410	TOTAL
ENERO	0	45820	104310	6156	21190	856	178332
FEBRERO	0	45180	102842	6068	20892	844	175826
MARZO	0	45308	114486	6086	20952	848	187680
ABRIL	0	35644	92952	4788	16482	666	150532
MAYO	0	43260	96558	5812	20006	808	166444
JUNIO	0	40956	91380	5500	18938	766	157540
JULIO	0	62936	139466	10478	31446	1044	245370
AGOSTO	0	62288	140628	8366	28804	1164	241250
SEPTIEMBR	0	61950	139876	8322	28650	1156	239954
OCTUBRE	0	63818	144070	8574	29518	1192	247172
NOVIEMBRE	0	99182	222828	13324	45868	1856	383058
DICIEMBRE	0	56646	128140	7608	26192	1058	219644
ENERO	0	48108	109522	6462	22248	896	187236
TOTAL	0	711096	1627058	97544	331186	13154	2780038

TABLA 4.3.5. DEMANDA DE PAPEL CARBON (VENTAS).

TIPO DE PAPEL

PERIODO	1010	1015	1022	1027	1200	1410
INVENTARIO INICIAL	0	46000	106000	6000	22000	1000
INVENTARIO FINAL	0	59478	134558	7998	27512	1110

TABLA 4.3.6. INVENTARIO INICIAL Y FINAL DE PAPEL CARBON.

CAPACIDAD MENSUAL DE PRODUCCION 400000 CARPETAS

CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO 772800 CARPETAS

Se muestran a continuación las soluciones dadas de cada una de las alternativas.

ALTERNATIVA 1

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	TOTAL
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90128	35824	43260	40956	62936	62288	63480	62288	99182	56646	48108	11370	676466
215638	92952	96558	91380	139466	140628	143318	140628	222828	128140	109522	25026	1546084
12292	4788	5830	5500	10478	8366	8530	8366	13324	7608	6462	1526	93070
41174	16342	20006	18938	0	60270	29364	28804	45868	26192	22248	5254	314460
1548	666	808	766	1044	1164	1184	1164	1856	1058	896	214	12368
360780	150572	166462	157540	213924	272716	245876	241250	383058	219644	187236	43390	2642448

4.3.1 PRODUCCION DE PAPEL CARBON

DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	TOTAL
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46000	90308	80952	78904	84216	103892	125224	125768	125768	163000	155828	104754	59478	1344092
106000	217328	207438	189510	187938	230846	280094	283946	283946	366898	350968	237662	134548	3077122
6000	12136	10856	10600	11312	15978	18344	16896	16896	21898	20932	14070	7988	184406
22000	41984	37434	36488	38944	18938	60250	58168	58168	75386	72060	48440	27502	595762
1000	1692	1514	1474	1574	1810	2208	2348	2348	3048	2914	1954	1110	24994
181000	363448	338194	316976	323984	371464	486620	487126	487126	630230	602702	406880	230626	5226376

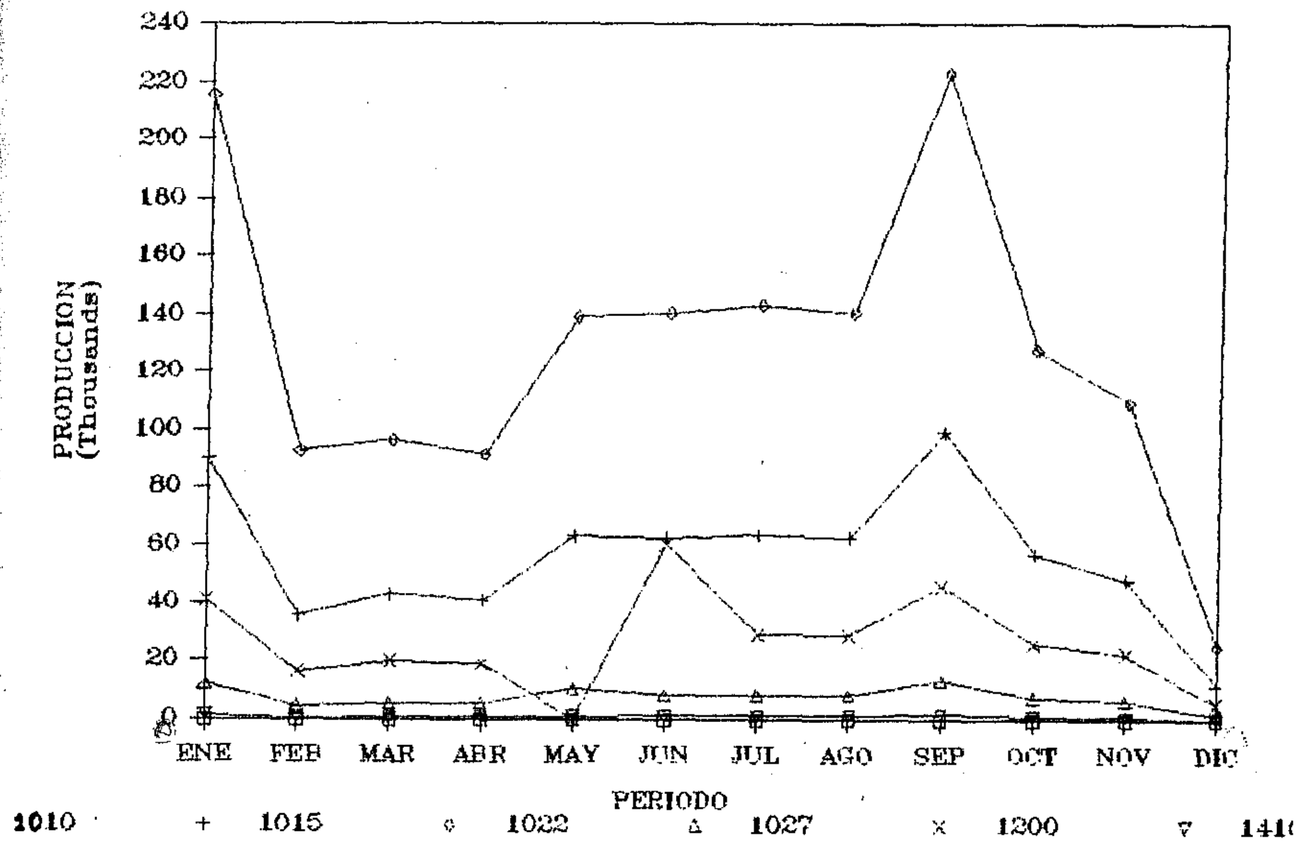
4.3 2 INVENTARIO DE PAPEL CARBON

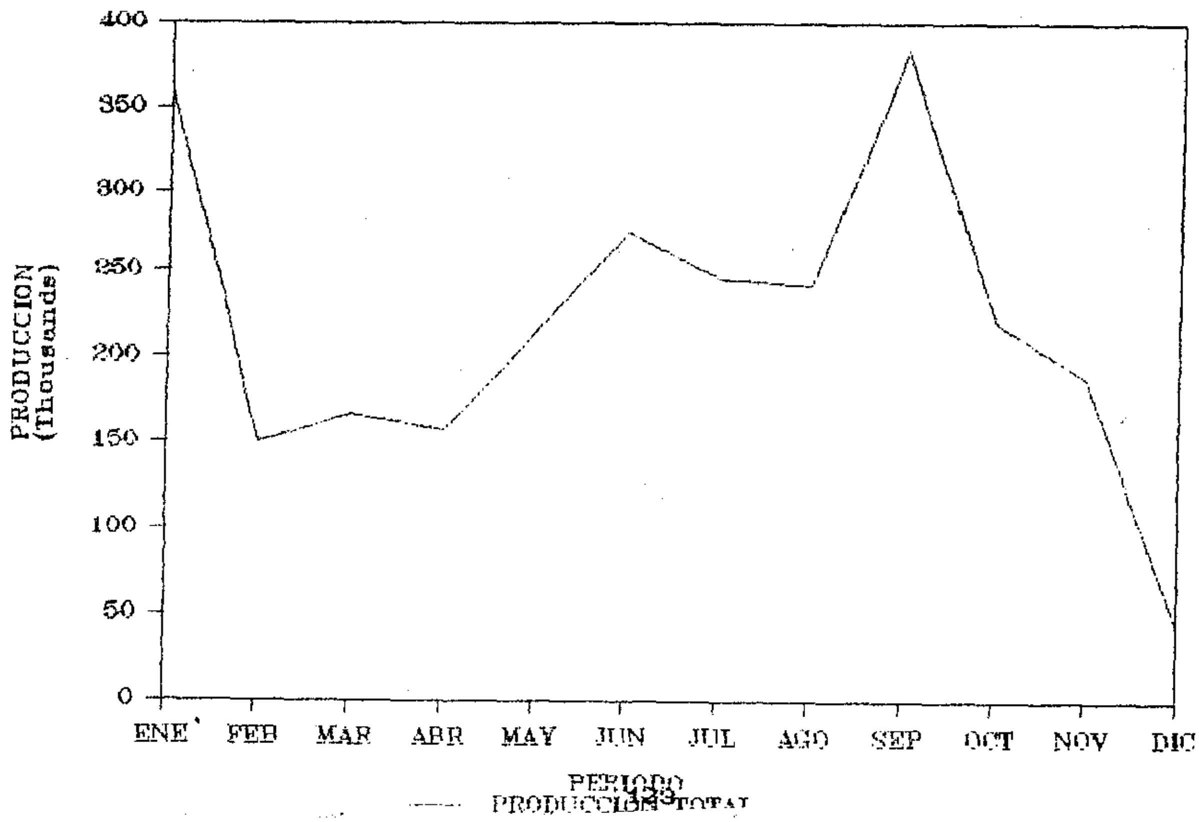
ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	TOTAL
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4.3 3 INCUMPLIMIENTO DE PAPEL CARBON

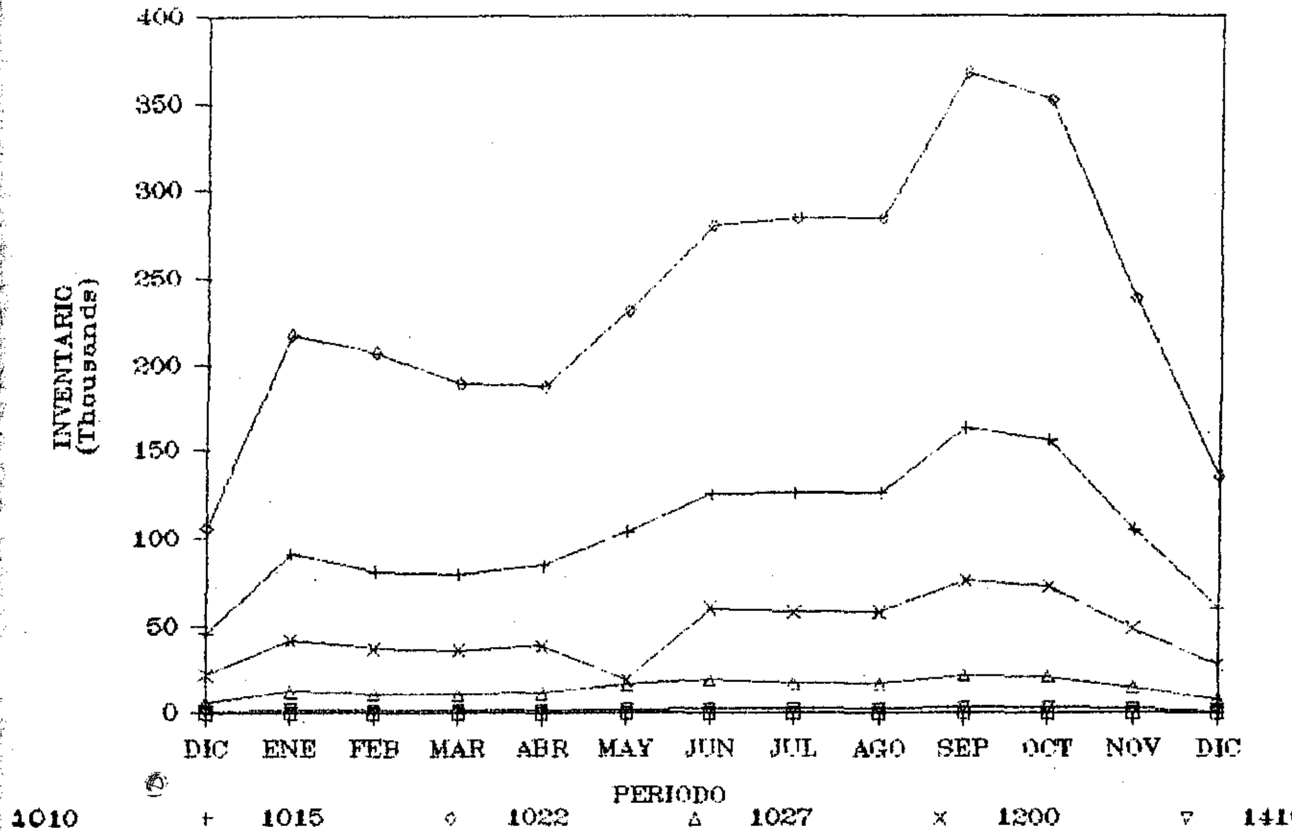
NCIA TOTAL $44,604'670,056
O TOTAL DE PRODUCCION $11,762'000,000
O TOTAL DE INVENTARIO $ 343'000,000

ALTERNATIVA 1

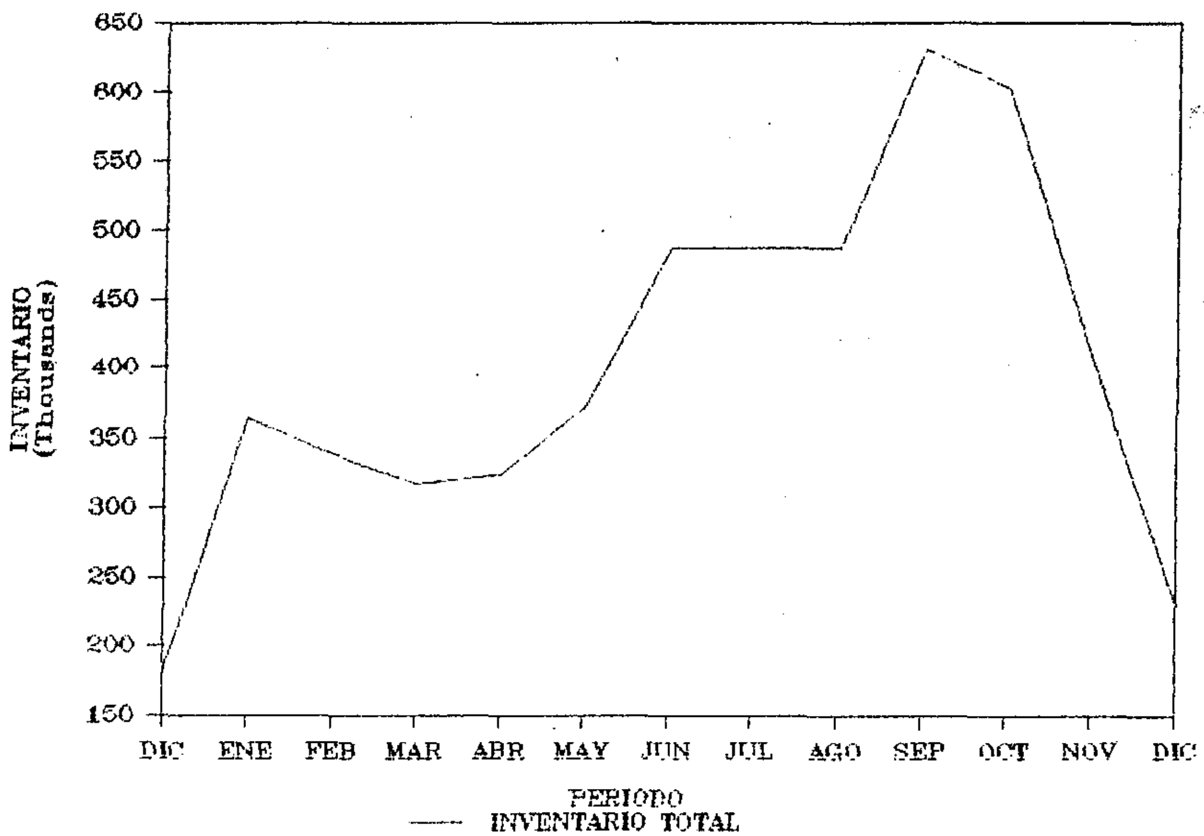




AII A1



INVENTARIO (Thousands)
400
350
300
250
200
150
100
50
0
DIC ENE FEB MAR ABR MAY JUN JUL AGO SEP OCT NOV DIC
PERIODO
1010 + 1015 ◇ 1022 △ 1027 × 1200 ▽ 141



INVENTARIO (Thousands)
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
DIC ENE FEB MAR ABR MAY JUN JUL AGO SEP OCT NOV DIC
PERIODO
INVENTARIO TOTAL

ALTERNATIVA 2
PRODUCCION DE PAPEL CARBON

APEL	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	TOTAL
010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
015	0	45000	45308	35644	84216	0	62936	62288	61950	218596	60528	0	676466
)22	387476	328850	261292	65150	0	0	171956	170596	160764	0	0	0	1546084
)27	156	6068	6086	13250	2850	0	10478	8366	17240	28576	0	0	93070
200	0	20082	20952	36488	0	236918	0	0	0	0	0	0	314440
410	12368	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12368
)TAL	400000	400000	333638	150532	87066	236918	245370	241250	239954	247172	60528	0	2642426

BLA 4.3.4. PRODUCCION DE PAPEL CARBON

PEL	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	TOTAL
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	46000	180	0	0	0	40956	0	0	0	0	154778	116124	59478	417516
22	106000	389166	615174	761980	734178	637620	546240	578730	608698	629586	485516	262688	134548	6490124
27	6000	0	0	0	8462	5500	0	0	0	8918	28920	15596	7988	81384
00	22000	810	0	0	20006	0	217980	186534	157730	129080	99562	53694	27502	914898
10	1000	12512	11668	10820	10154	9346	8580	7536	6372	5216	4024	2168	1110	90506
TAL	181000	402668	626842	772800	772800	693422	772800	772800	772800	772800	772800	450270	230626	7994428

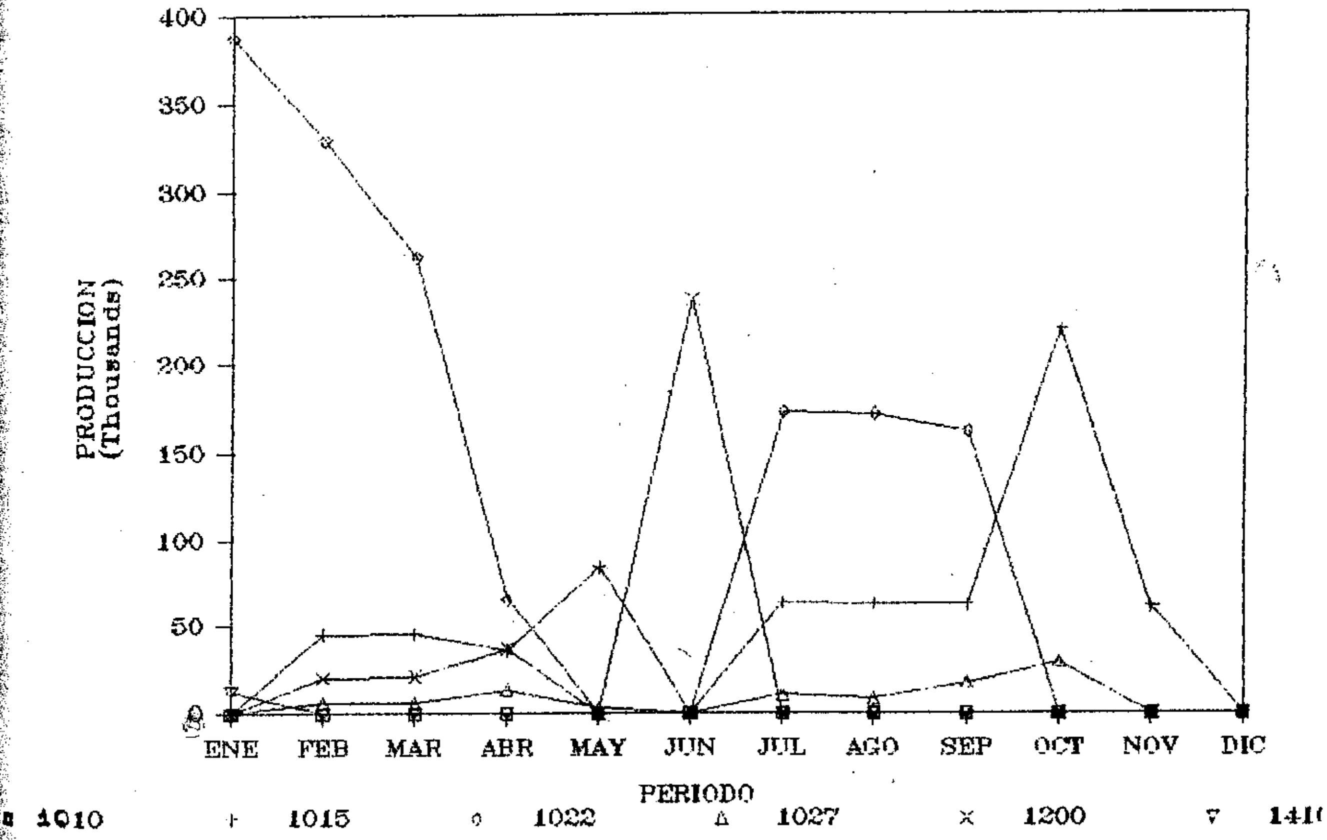
BLA 4.3 5. INVENTARIO DE PAPEL CARBON

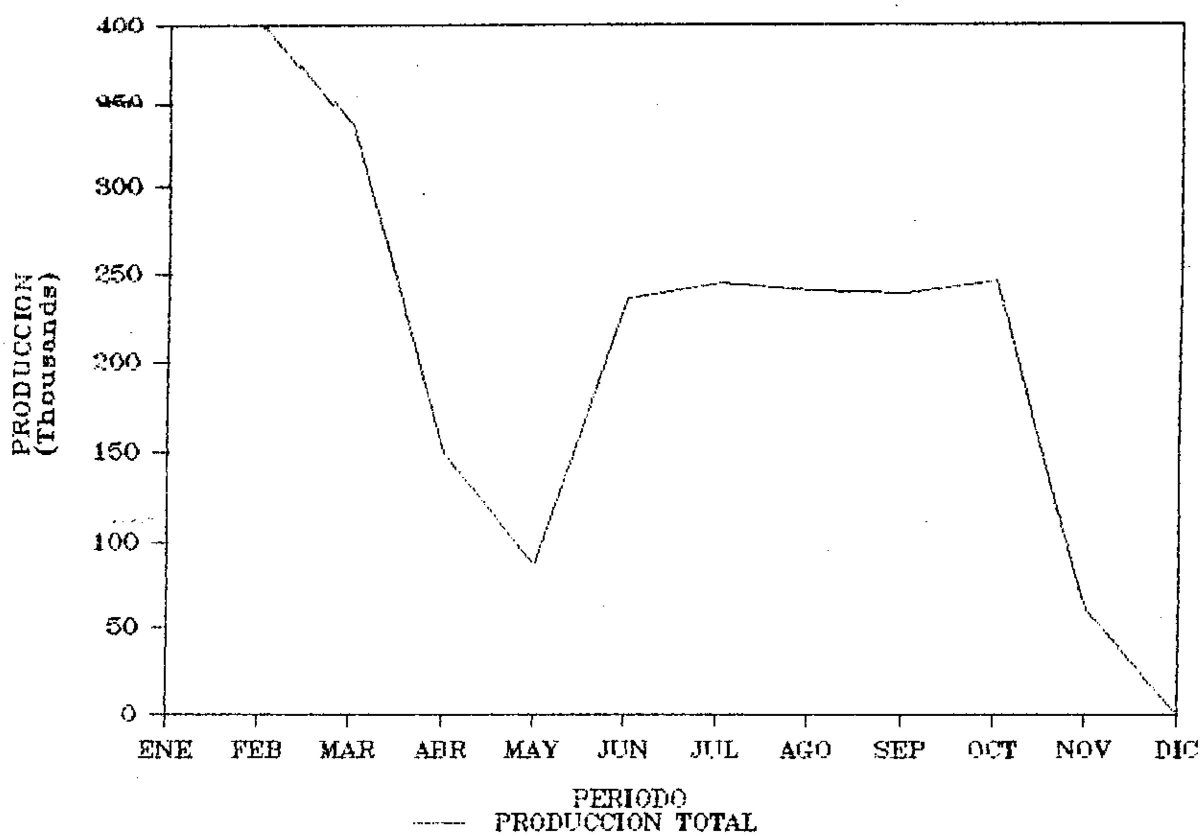
EL	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	TOTAL
:0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
:5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

LA 4.3.6. INCUMPLIMIENTO DE PAPEL CARBON

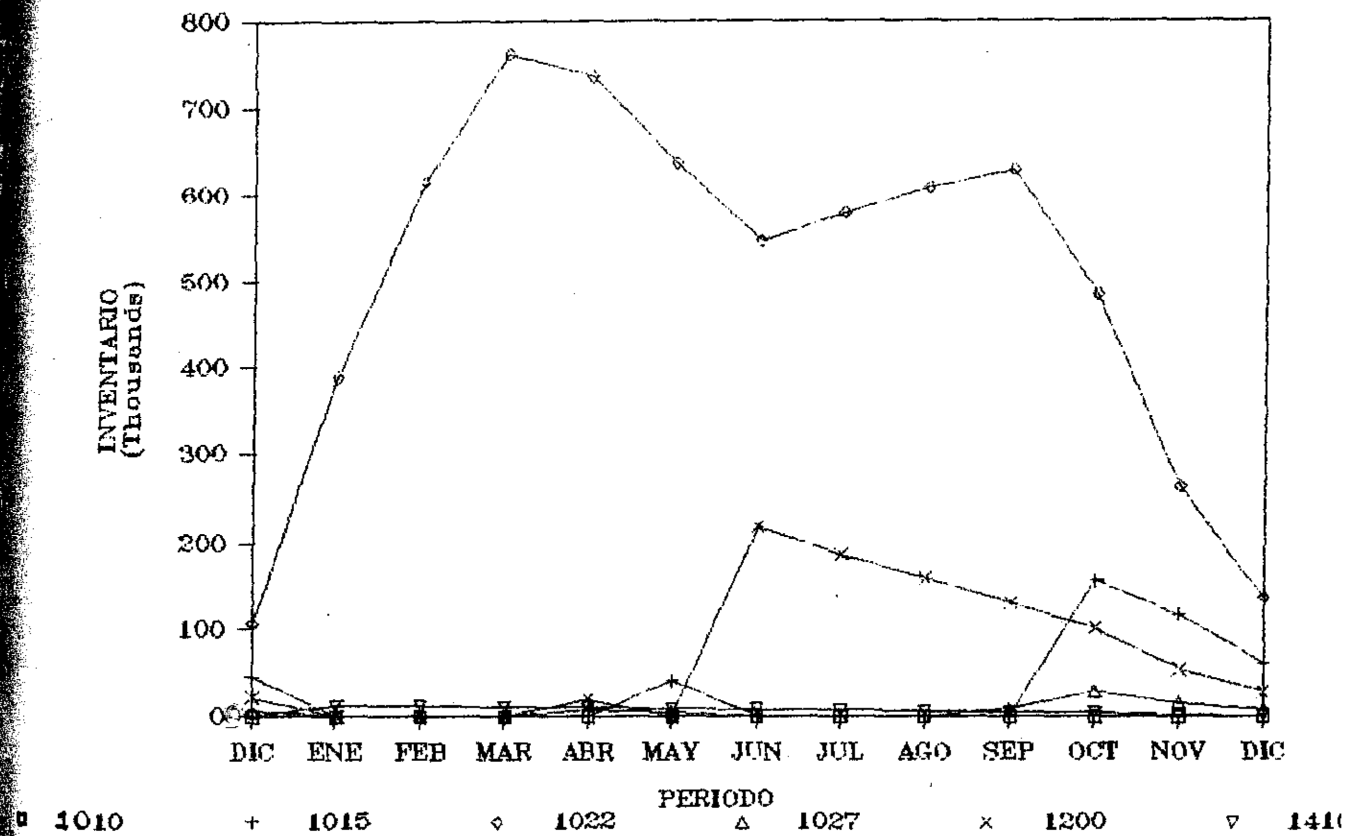
ANCIA TOTAL	$44,970'967,534
TO TOTAL DE PRODUCCION	$10,990'000,000
TO TOTAL DE INVENTARIO	$1,092,000,000

ALTERNATIVA 2

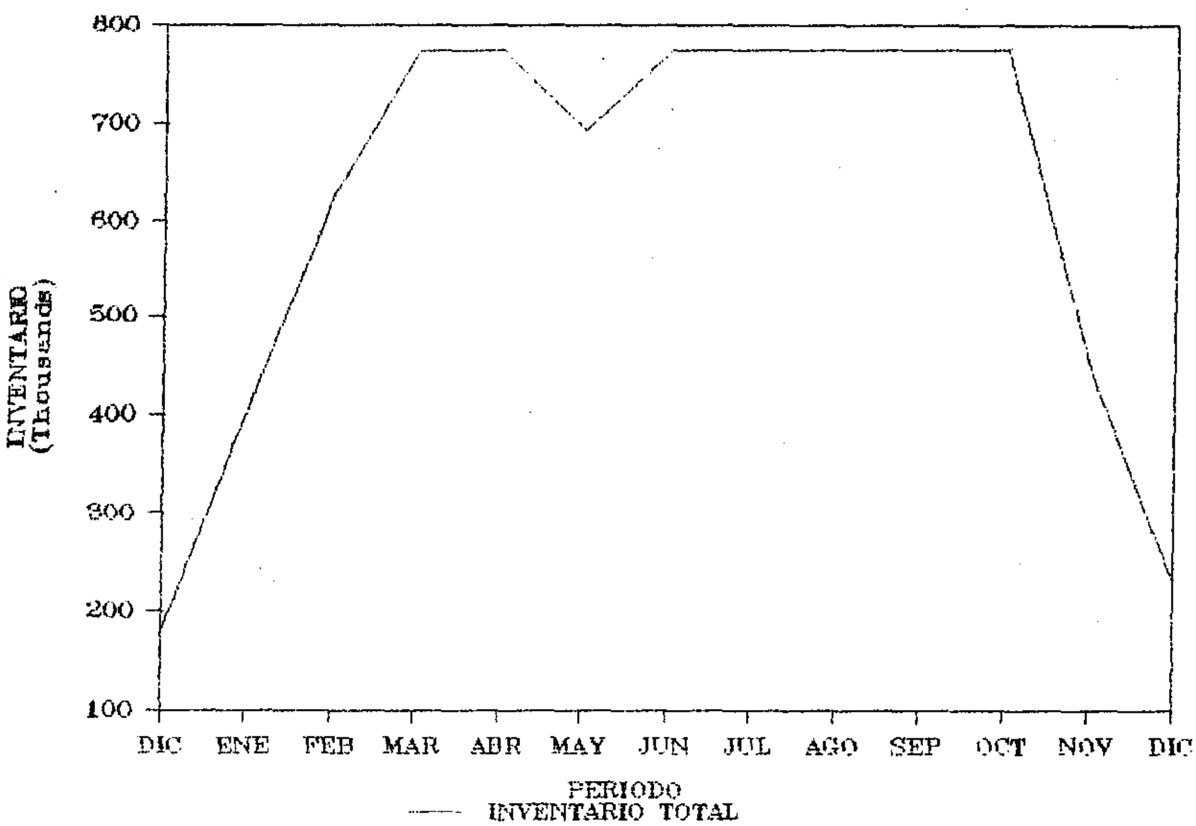




A IV



800
700
600
500
400
300
200
100
0
INVENTARIO
(Thousands)
DIC
ENE
FEB
MAR
ABR
MAY
JUN
JUL
AGO
SEP
OCT
NOV
DIC
PERIODO
1010
1015
1022
1027
1200
141(



800
700
600
500
400
300
200
100
INVENTARIO
(Thousands)
DIC
ENE
FEB
MAR
ABR
MAY
JUN
JUL
AGO
SEP
OCT
NOV
DIC
PERIODO
INVENTARIO TOTAL

A N E X O

DESARROLLO DE UN PROYECTO PARA UNA GRANJA LECHERA

RESUMEN. El objetivo de éste estudio fue el de construir un modelo de operación de una extensa granja lechera para la cual puede ser desarrollada y analizada una política óptima de operación en el tiempo. Fue un problema típico de expansión de un pequeño negocio en uno de tamaño mediano, en el cual la contabilidad y la aritmética ya no fueron adecuadas para el control y la optimización. El propietario de la granja lechera contrató un consultor privado para ayudar al plan de expansión de operación.

La programación lineal por etapas temporales proporcionó un plan operativo de crecimiento de largo alcance, en el cual se integró un adecuado balance del cultivo y compras de cosechas con un rebaño de ganado (vacuno) cuyo crecimiento es una función exponencial. Los resultados indican que la productividad puede ser triplicada y la utilidad incrementada 10 veces.

Actualmente, el modelo está siendo utilizado en una granja lechera en el valle de Ohio para determinar el número de acres a plantar cada año de cada cosecha, la cantidad de granos y heno para comprar cada año, la disposición de ganado recién nacido, asù como mantener una mezcla óptima de ganadería, junto con la proyección de tazas de crecimiento y utilidades para años futuros. Al administrador de la granja particularmente le gustó usar el modelo de programación lineal porque asegura una clara evaluación

de nuevas ideas. El encontró que la imaginación de los empleados se inspiraba mas para hacer innovaciones, cuando hay un recurso para evaluarlas a la luz de la operación total.

I.- INTRODUCCION

La granja lechera especifica para la cual éste estudio fue realizado, se localiza en el valle de Ohio. Tuvo, en ese tiempo, un rebaño de 1000 cabezas de ganado vacuno, lo cual la hizo una de las granjas lecheras mas grandes en el área.

Durante el año anterior, el propietario de la granja encontró problemas que él no pudo resolver a su satisfacción através del uso de métodos tradicionales, basados en contabilidad y aritmética, los cuales habian resultado satisfactorios en el pasado. Como el propietario lo vió su problema incluia:

1.- Un exceso de tres años de algunos alimentos cultivados en la granja, en tanto que otros alimentos que fueron comprados podrian ser cultivados con una inversión adicional de capital.

2.- Decisiones sobre construcción de nuevos establos, y otros renglones que requieren desembolsos de capital, habian sido retrasados por las incertidumbres respecto a la tasa y dirección de crecimiento y capacidad.

3.- Algunas alternativas estaban disponibles tales como rentar la tierra, mantener novillos de cria para la carne de res y construir facilidades de almacenamiento.

Para seleccionar un curso de acción apropiado, a fin de remediar lo antes dicho y otros problemas, el dueño puede ejercer control sobre dos recursos básicos pero interactuantes, concretamente la tierra existente usadas exclusivamente para cultivar varios alimentos para el ganado vacuno y el ganado vacuno. El tamaño del rebaño de vacas cambia sobre el tiempo debido a las tasas de nacimiento y mortalidad las cuales son un factor integral e inevitable en la operación de una granja lechera.

Para propósitos alimenticios, el ganado se dividió en cuatro grupos, el ganado del grupo 1 es el mas joven (0-3 meses), mientras que el ganado del grupo 4 es de vacas desarrolladas completamente y productoras de leche. Cada grupo es alimentado variando las proporciones de grano de maíz, ensilaje, heno y heno viejo. De esas cosechas las únicas que el dueño quería considerar para comprar eran granos de maiz y heno. De las otras cosechas deberian producirse bastantes para producir los requisitos de alimentación de todo el rebaño aunque era posible almacenar ciertas cantidades de todas las cosechas, excepto granos de maiz de año en año.

A fin de controlar el tamaño del rebaño fue posible vender una porción de las vaquillas y toros jóvenes en varios puntos de su desarrollo. Tipicamente, los terneros recién nacidos podrian ser vendidos asi como algunas vaquillas del grupo 3, mientras todoslos toros eran despachados antes o durante el tiempo que estaban en el grupo 3. La venta de las vacas bien desarrolladas no fue considerada como una alterativa dado que habia virtualmente una demanda ilimitada de leche y por tanto los reditos anuales de leche hacen su venta no provechosa.

El propietario de la granja lechera deseaba tener sus preguntas resueltas para poder expander el rebaño ganadero actual haciendo al mismo tiempo uso de los recursos de la cosecha y utilizando una minima cantidad de nuevo capital. Fue el objetivo de éste estudio construir un modelo de la combinación de de las operaciones de la granja y el ganado que produjera números específicos de ganado vacuno para mantenerlos un tiempo óptimo para la venta, una política para determinar que cosechas se plantarian en las acres disponibles, y pautas para decidir cultivar ó comprar adicionalmente un modelo que integre un creciente rebaño ganadero con el uso de tierra de cosecha que permitiría a la administración de la granja investigar alternativas para enfrentar tales elecciones como la utilización del espacio de almacenamiento y la renta de tierras adicionales.

II.- EL MODELO, FORMULACION.

Con el fin de desarrollar un modelo, fue muy útil visualizar la granja lechera como se muestra en la figura 2, la progresión del ganado vacuno através de los primeros dos grupos requieren un año, mientras la progresión del grupo 3 hacia el grupo 4, grupo productor de leche, toma un año mas. En cada etapa de tiempo, la granja debe cultivar y comprar suficientes cosechas para cumplir los requerimientos de alimentación al rebaño entero. Desarrollaremos ahora un conjunto de relaciones que describen el sector ganado: el sector cosecha es modelado después e incluye la interacción con el sector ganado.

EL SUBSISTEMA GANADO

Cuando fijamos la atención sobre la progresión de ganado vacuno através del tiempo, las relaciones del número de vacas productoras de leche (ganado del grupo 4) al ganado de otros grupos depende del número y tipo de ganado conservado y vendido durante cada período. En particular, las relaciones pueden ser representadas como en la figura 1.

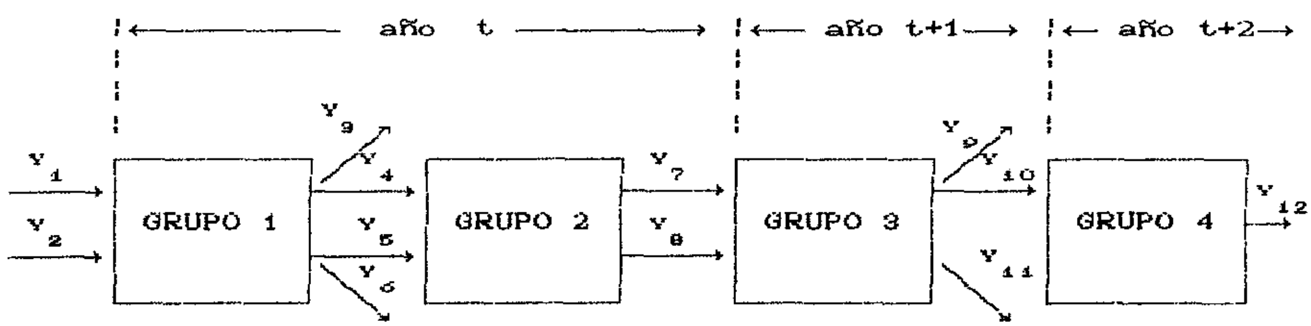


Figura 1. representación gráfica del subsistema ganado.

Donde las variables están definidas como sigue.

Y_1 - El número de vaquillas nacidas del grupo 1.

Y_2 - El número de toros nacidos del grupo 1.

Y_3 - El número de vaquillas vendidas en nacimiento.

Y_4 - El número de vaquillas no vendidas en nacimiento.

Y_5 - El número de toros no vendidos en nacimiento.

Y_6 - El número de toros vendidos en nacimiento.

Y_7 - El número de vaquillas del grupo 2.

Y_8 - El número de toros del grupo 2.

Y_9 - El número de vaquillas vendidas del grupo 3.

Y_{10} - El número de vaquillas no vendidas del grupo 3.

Y_{11} - El número de toros del grupo 3.

Y_{12} - El tamaño del rebaño del ganado del grupo 4 (es decir, el tamaño de la producción de leche).

Las relaciones entre éstas variables como se conseptualizan en la figura 1, son dependientes del periodo particular de tiempo, t, bajo consideración. durante cada periodo de tiempo (año), cada vaca productora de leche (ganado del grupo 4) tiene un becerro y aproximadamente la mitad de todos los becerros serán toros y la otra mitad vaquillas. Consecuentemente, las siguientes relaciones son verdaderas para cada periodo t (1 periodo = 1 año):

$$Y_{3,t} + Y_{4,t} = 0.5\ Y_{12,t} \qquad (1)$$

$$Y_{5,t} + Y_{6,t} = 0.5\ Y_{12,t} \qquad (2)$$

Las crías no serán vendidas mientras estén en edad del grupo 2. También, debe recordarse que la progresión del grupo 1 al grupo 2 es hecha en el mismo año. Por lo tanto, para cada t, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$Y_{7,t} = Y_{4,t} \qquad (3)$$

$$Y_{8,t} = Y_{5,t} \qquad (4)$$

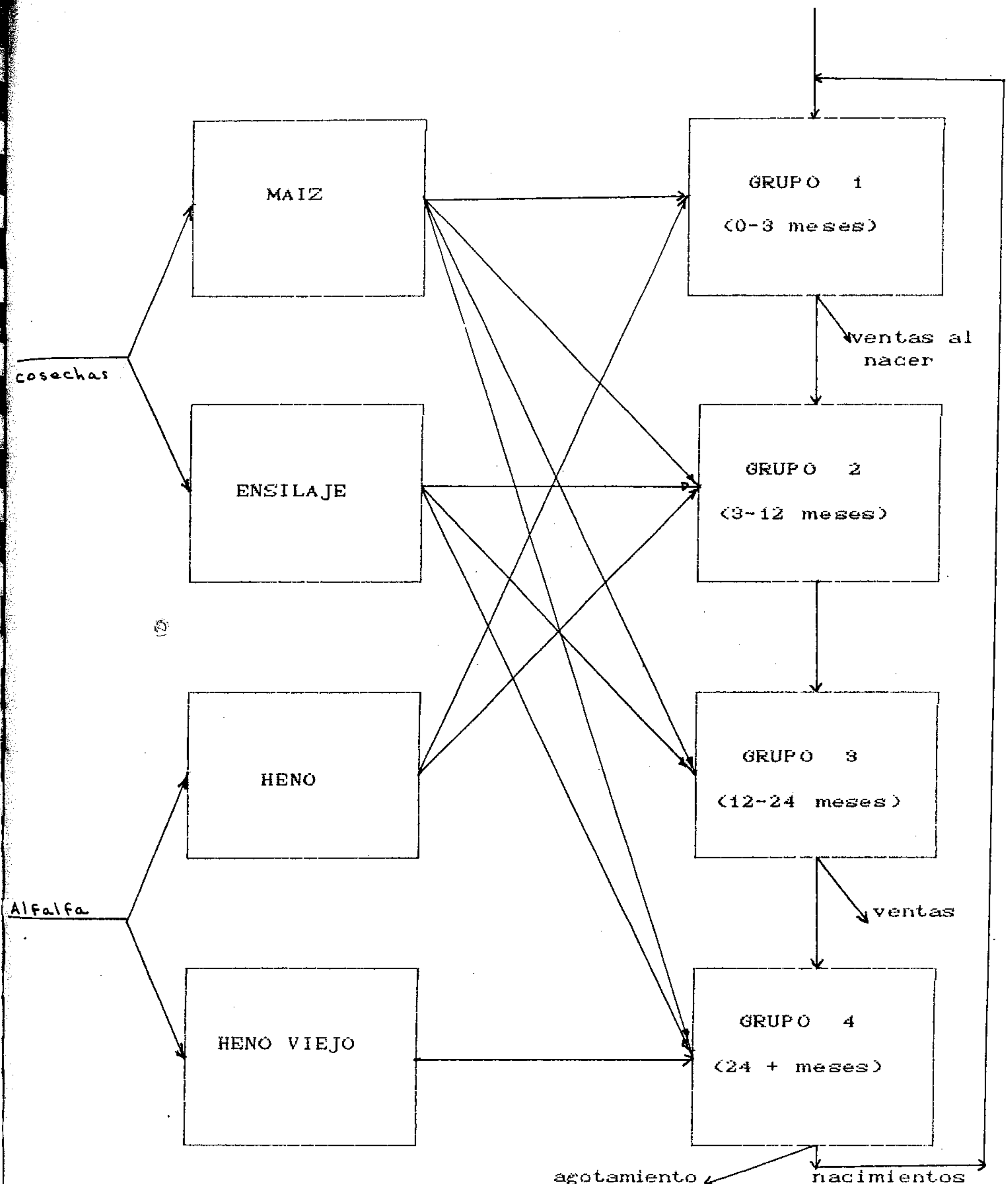


Figura 2. Representación conceptual de la granja lechera.

El ganado del grupo 2 se convertirá en ganado del grupo 3 en el próximo periodo. Puesto que todos los toros de esta edad deberán venderse, para cada t,tenemos las siguientes igualdades:

$$Y_{10,t+1} + Y_{9,t+1} = Y_{7,t} \quad (5)$$

$$Y_{11,t+1} = Y_{8,t} \quad (6)$$

Finalmente el ganado del grupo 4, sufre aproximadamente una tasa de mortalidad del 30% cada año, pero al mismo tiempo, la población del grupo 4 es aumentada por la infusión de vaquillas del grupo 3 del periodo anterior que se conservaron. Consecuentemente,

$$Y_{12,t+1} = Y_{10,t} + 0.7\ Y_{12,t} \quad (7)$$

Las ecuaciones de la (1) a la (7), involucran todas las relaciones necesarias para describir el subsistema ganado de la granja con la excepción de algunas condiciones iniciales indicando el número de ganado que existe actualmente dentro de cada grupo. Ahora describiremos el subsistema cosecha juntamente con las interacciones cosecha-ganado.

EL SUSBSISTEMA COSECHA

Una gran parte del subsistema cosecha puede ser representado adecuadamente por una serie de ecuaciones, cada una de las cuales iguala la cantidad de un cierto cultivo de la cosecha durante un periodo particular mas la cantidad disponible en almacén, a la cantidad que deberá consumirse en ese período mas la cantidad que permanecerá en almacén para usarse en periodos subsecuentes. Esquematicamente éste balance de materia se exhibe en la figura 3.

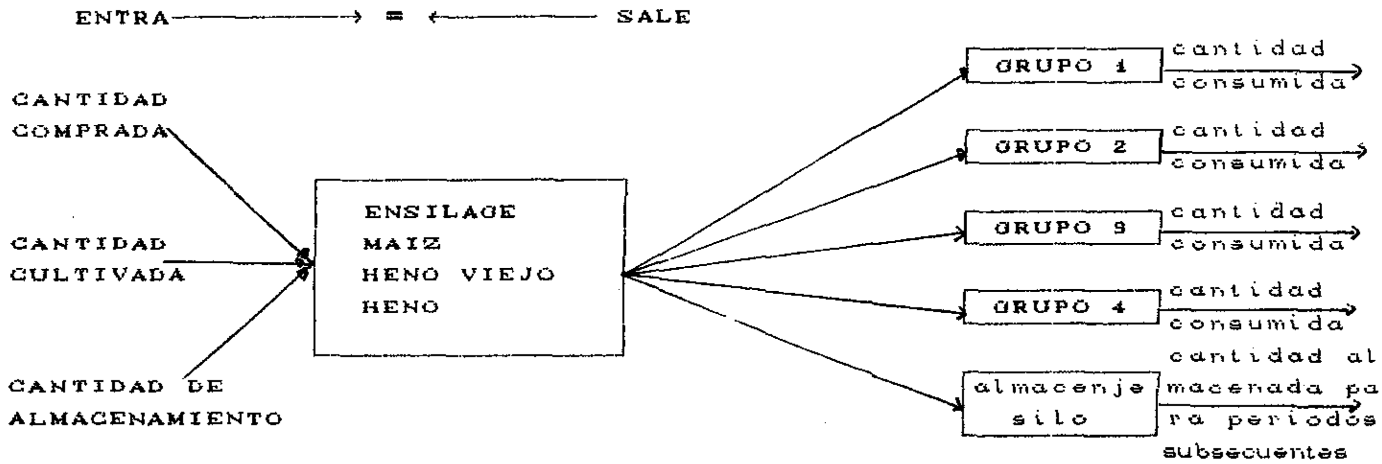


Figura 3. Esquema de ecuaciones de balance de materia para el subsistema cosecha.

Además de las ecuaciones de balance de materia, es también necesario incorporar las relaciones que describen las limitaciones que existen de la cantidad de cada cosecha que puede ser almacenada debido a la capacidad del silo o granero.

Sean las variables, bajo el control del dueño, definidas como sigue:

$X_{1,t}$ - El número de acres dedicadas para producir ensilage en el año t.

$X_{2,t}$ - El número de acres dedicadas para producir maiz en el año t.

$X_{3,t}$ = El número de acres dedicadas para producir heno viejo en el año t.

$X_{4,t}$ = El número de acres dedicadas para producir heno en el año t.

$X_{5,t}$ = El número de bushels de maíz compradas en el año t.

$X_{6,t}$ = El número de pacas de heno compradas en el año t.

$Z_{1,t}$ = El número de toneladas de ensilage en almacenamiento al final del año t.

$Z_{2,t}$ = El número de toneladas de heno viejo en almacenamiento al final del año t.

$Z_{9,t}$ = El número de toneladas de heno en almacenamiento al final del año t.

$W_{i,t}$ = El total del consumo de cultivo i en el año t por todos los grupo de ganado.

Los $W_{i,t}$ (i = 1,2,3,4) son variables las cuales relacionan las variables del subsistema ganado a las variables del subsistema cosecha.

Entonces, la ecuación que describe el balance de matria para ensilage está dado por

$$Z_{1,t} + 20\ X_{1,t} - W_{1,t} - Z_{1,t+1} = 0 \qquad (8)$$

donde

$$W_{1,t} = 2.45(Y_{7,t}+Y_{8,t}) + 4.9(Y_{9,t}+Y_{10,t}+Y_{11,t}) + 5.6\ Y_{12,t} \qquad (9)$$

El coeficiente de $X_{1,t}$, 20, indica que cada acre produce 20 toneladas de ensilage, la cantidad $W_{1,t}$ representa el consumo anual de ensilage por los diversos grupos de ganado y los coeficientes en (9) representan el consumo por ganado de ensilage en toneladas por cada grupo del rebaño. (El ganado del grupo 1 no consume ensilage).

El limite de almacenamiento para el ensilage es igual a la capacidad del silo, la cual es de 18,000 toneladas.

Así

$$Z_{1,t} \leq 18{,}000 \qquad (10)$$

Similarmente, podemos definir las restricciones de las otras cosechas como se muestra abajo.

Para maiz:

$$X_{5,t} + 150\ X_{2,t} - W_{2,t} = 0 \qquad (11)$$

$$W_{2,t} = 4(Y_{4,t} + Y_{5,t}) + 17(Y_{7,t} + Y_{8,t}) + 4.8(Y_{9,t} + Y_{10,t} + Y_{11,t}) + 93.2Y_{12,t} \qquad (12)$$

$$150\ X_{2,t} \leq 38{,}600 \qquad (13)$$

para heno viejo:

$$Z_{2,t} + 12\ X_{3,t} - W_{3,t} - Z_{2,t+1} = 0 \qquad (14)$$

$$W_{3,t} = Y_{12,t} \qquad (15)$$

$$Z_{2,t} \leq 2{,}400 \qquad (16)$$

para heno:

$$Z_{3,t} + 100\ X_{4,t} + X_{6,t} - W_{4,t} - Z_{3,t+1} = 0 \qquad (17)$$

$$W_{4,t} = 5(Y_{4,t} + Y_{5,t}) + 14\ Y_{8,t} \qquad (18)$$

$$Z_{3,t} \leq 12{,}000 \qquad (19)$$

Además de las relaciones anteriores, ciertas condiciones de operación debieron ser satisfechas. En particular, fue necesario para la granja cultivar continuamente en todos los 530 acres disponibles para el cultivo, dado que cualquier tierra para cultivar no usada durante un año se convierte en inservible para cultivar por un cierto tiempo después de eso. Como una alternativa para extender la capacidad de cultivo, el dueño pudo decidir rentar hasta 160 acres en cualquier instante en el tiempo. Por lo tanto su capacidad disponible, incluyendo la restricción de su uso continuo por 530 acres, puede ser expresada por:

$$X_{1,t} + X_{2,t} + X_{3,t} + X_{4,t} + V_t = 690 \qquad (20)$$

$$V_t \leq 160 \qquad (21)$$

donde V_t representa el número de acres no rentadas en el periodo t. (Note que cuando todos los 160 acres son rentados, $V_t = 0$, mientras que si ninguno se renta $V_t = 160$). Finalmente, como una condición operacional, el rpopietario desea dedicar por lo menos 80 acres para el cultivo de alfalfa (ambos, heno y heno viejo son cosechas de alfalfa). Esta condición nos da :

$$X_{3,t} + X_{4,t} \geq 80 \qquad (22)$$

LA MEDIDA DE EFECTIVIDAD

Una asignación específica de valores para las variables definidas en los subsistemas ganado y cosecha, los cuales satisfacen de las relaciones (1) hasta la (22) asi como las necesarias condiciones iniciales y requisitos de no negatividad, constituyen una politica de operación factible para la granja lechera. Ya que es muy probable que existan mas de un conjunto de valores para las variables de decisión que satisfagan todas las relaciones derivadas hasta aquí,es necesario desarrollar un criterio, o medida de efectividad, donde por la relativa "bondad" de una política de operación factible con respecto a otras pueda ser establecida.

Después de una reflexión cuidadosa, el dueño de la granja lechera planteó, que un criterio aceptable para elegir una política viable de operación para la granja sería las ganancias resultantes, las cuales él deseaba maximizar. Para propósito del estudio, fue apropiado definir ganancias como la diferencia entre la suma de ingresos y la suma de todos los costos asociados con las variables de desición. La cantidad de ingresos o costos asociados con cada variable de desición se exhiben en la tabla 1. Estos valores fueron obtenidos de Libro mayor general, en el cual se enlistan todos los gastos de la granja y redactan sobre la experiencia y conocimiento práctico del propietario y empleados. Los costos al almacenamiento de cosechas, son derivados considerando el costo decultivar un acre de la cosecha,dividiendo el costo por el tonelaje o pacas producidas por acres, y multiplicando este costo por la taza de interés que hubiera sido aplicada si este dinero hubiera sido depositado en un banco. Por lo tanto este costo simplemente representa saldos inevitables de la inversión por utilización del dinero para cultivar la tierra en vez de depositarlo en un banco. La utilidad por año t, R_t,esta entonces dada por la suma de los productos de las variables tiempo por sus correspondientes costos o ingresos apropiados; esto es,

$$R_t = 35(Y_{3,t}+Y_{6,t}) + 500\ Y_{9,t} + 258.3\ Y_{11,t} + 662\ Y_{12,t} - 54.9(Y_{4,t}+Y_{5,t}) - 23.5(Y_{7,t}+Y_{8,t}) - 18.7\ Y_{10,t} - 87.2\ X_{1,t} - 97.2\ X_{2,t} - 67.4\ X_{3,t} - 68.4\ X_{4,t} - 1.5\ X_{5,t} - 2.25\ X_{6,t} - 0.39\ Z_{2,t} - 0.30\ Z_{1,t} - 0.047 Z_{3,t}.$$

EL MODELO

Las relaciones (1) a la (23) comprenden una representación de la granja lechera para un periodo particular t. Sin embargo, estas relaciones tienen que ser satisfechas para todos los años en que la granja lechera esté en operación. Así mismo el criterio para el cual el propietario desea operar la granja lechera no fue la maximización de utilidades durante un solo t sino la maximización de utilidades de las utilidades totales sobre la vida de la granja. Por conveniencia y a fin de que el problema no llegue a ser demasiado grande, se decidió representar la granja lechera para un periodo de 25 años y así determinar la política óptima de operación para cada uno de esos 25 años. Para un periodo sencillo, la matriz de coeficientes se exhibe en la figura 4 (Notese que las expresiones para $W_{i,t}$ han sido sustituidas en las relaciones del balance de materia). El modelo de programación lineal completo para 25 años de la granja lechera consiste en 25 block de datos, similares al que se muestra en la figura 4, con el objetivo global de maximizar las utilidades totales, donde las utilidades en el futuro son ajustadas por un factor de interés que refleja el valor

	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	a_1	a_2	a_3	v	n	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	a_1	a_2	a_3	
	1	1								-0.5																			= 0
			1	1						-0.5																			= 0
		1			-1																								= 0
			1			-1																							= 0
					1																	-1	-1						= 0
						1																		-1					= 0
								1		0.7															-1				= 0
					-2.45	-2.45	-4.9	-4.9	-4.9	-5.6	20						1									-1			= 0
		-4	-4		-17	-17	-4.8	-4.8	-4.9	-93.2		150			1														= 0
										-2.2			12					1									-1		= 0
		-5	-5		-14	-14								100		1			1									-1	= 0
																	1												≤ 18,000
																		1											≤ 2,400
																			1										≤ 12,000
												150																	≤ 38,500
											1	1	1	1						1									= 690
																				1									≤ 360
													1	1															≥ 80
Y	35	-346	-346	35	-235	-235	500	-187	2588	662	-872	-972	-674	-684	-15	-225	-031	-039	-005	0	-1								

del dinero en el tiempo. Consisamente, el objetivo es maximizar el valor presente de las utilidades de la granja

variables	monto de ingresos o costos	Monto de ingresos o costos ($)
$Y_{3,t}, Y_{6,t}$	Ganado grupo 1 puede ser vendida a precio de mercado.	+35
$Y_{9,t}$	Una vaquilla del grupo 3 puede - ser vendida a precio de mercado.	+500
$Y_{11,t}$	Un toro del prupo 3 puede ser - vendida para carne.	+285.3
$Y_{12,t}$	Una vaca produce ingresos por su leche.	+662
$Y_{4,t}, Y_{5,t}$	Cuidados y otros gastos del gana do grupo 1.	-54.9
$Y_{7,t}, Y_{8,t}$	Cuidados y otros gastos de ganado grupo 2	-23.5
$Y_{10,t}$	Cuidados y otros gastos de vaqui- llas grupo 3.	-18.7
$X_{1,t}$	Costo de cultivar un acre de ensi lado.	-87.2
$X_{2,t}$	Costo de cultivar un acre de maiz.	-97.2
$X_{3,t}$	Costo de cultivar un acre de heno viejo.	-67.4
$X_{4,t}$	Costo de cultivar un acre de heno.	-68.4
$X_{5,t}$	Costo de comprar un bushels de maiz	- 1.5
$X_{6,t}$	Costo de comprar una paca de heno	- 2.25
$Z_{1,t}$	Costo de almacenar una tonelada de ensilaje en un año.	$\frac{-(0.07)(87.2)}{20}$
$Z_{2,t}$	Costo de almacenar una tonelada de heno viejo en un año.	$\frac{-(0.07)(67.4)}{12}$
$Z_{3,t}$	Costo de almacenar una paca de - heno en un año.	$\frac{-(0.07)(68.4)}{100}$

Tabla 1. Información de ingresos y costos para el modelo.

III RESULTADOS COMPUTACIONALES.

El modelo de programación lineal desarrollado en la sección anterior, es especializado en el sentido que basicamente el mismo proceso se repite de un período a otro, pero en el cual cada decisión del problema en un periodom es dependiente de las decisiones del periodo anterior. Este tipo de problemas de programación lineal se refiere normalmente como un programa lineal de etapas en el tiempo como un problema de programación lineal dinámico. Puesto que este tipo de problemas aparece frecuentemente, son discutidos en varios libros.

La naturaleza y origen de los datos usados para nuestro problema fueron discutidos, junto con el desarrollo del modelo a lo largo de la sección anterior. Para resolver el problema de la granja fue utilizado un sistema de computación comercial disponible de programación lineal, desarrollado por IBM. Los resultados obtenidos están tabulados en la tabla 1 y son expuestos graficamente en la figura 5.

Un análisis preliminar de los resultados indicaron que, como una estrategia para maximizar utilidades, el número de ganado vacuno en el grupo 4 debiera ser permitido de incrementarse tan rapidamente como fuera posible. Ya que inicialmente mas cosecha puede ser cultivada que consumida, las cantidades en almacén se incrementan mientras el terreno disponible se dedica a cultivar maiz y heno (artículos que pueden ser comprados) tanto bien como heno viejo y ensilaje. Durante el año 7, la tierra que era dedicada al cultivo de maiz y heno es cambiada a heno viejo y ensilaje de la plantación adicional incrementa la tasa a lo cual el ensilaje es almacenado puesto que, en ese tiempo, no hay capacidad adicional para almacenar heno viejo. Para el año 11, se hace necesraio duplicar el heno viejo tan larga porción de la extensión de la tierra destinada al ensilaje para que algunos de los requerimentos alimenticios son satisfechos con el ensilaje previamente en existencia. Finalmente, para el año 15, el ganado del grupo 4, llega a ser tan numeroso que el almacenaje acumulado es agotado y se hace necesario reducir la cantidad de ganado en este grupo. Para efectuar esto en una manera óptima, las vaquillas del grupo 1 deberán empezarse a vender en el periodo 14, mientras también sería necesario vender unas pocas de vaquillas del grupo 3 en el año 15, Después de esta rebaja inicial del rebaño, el cual es directamente una consecuencia del atesoramiento de cosecha durante los primeros 11 años, el tamaño del rebaño del grupo 4 llega aser mas estable y regulado solo por suficientes vaquillas del grupo 1 para sostener la población del ganado del grupo 4, mientras todas las otras pariciones son vendidas al nacer.

De acuerdo a los resultados de la solución al problema de programación lineal, la estrategia descrita arriba, para el funcionamiento de la granja es óptima, cuando se le presentó al dueño aunque la reacción fue de incredulidad y desagrado alimentada principalmente por las necesidades de que el propietario debería reducir el tamaño de su rebaño durante varios puntos en el tiempo. En resumidas cuentas, a menudo sucede que cuando se formulan los modelos de programación lineal la versión inicial del modelo no captura todas las consideraciones, las cuales el dueño considera importantes, pero supuestamente evidentes para cualquiera (esto es, el negocio de vaqueria). Después de consultas y discusiones, se sintió con relativa certeza que la primera modificación requerida del modelo para satisfacer al dueño de la granja deberia ser una afirmación en el sentido de que el tamaño del rebaño no deberia decrecer en cualquier punto del tiempo. Este requisito, aunque no es conveniente desde un estricto punto de vista económico, fue muy deseable para la imágen y reputación de la granja lechera entre sus colegas de la industria donde la estabilidad y crecimiento continuo eran sinónimos con la prosperidad y buena administración.

Para incorporar los requisitos de un tamaño no decreciente del ganado del grupo 4, las restricciones

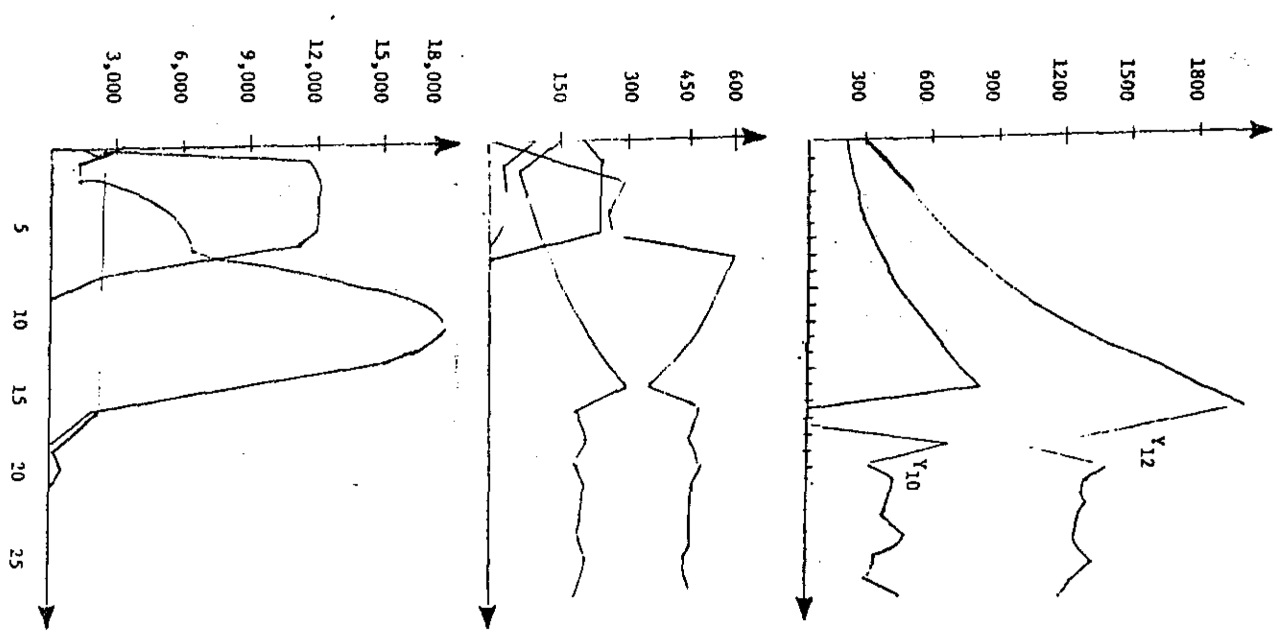
$$Y_{12,t} \leq Y_{12,t+1} \qquad (24)$$

fueron agregadas al modelo. La solución obtenida para esta versión revisada del modelo de la es tabulada en la tabla 2 y mostrada graficamente en la figura 6. Como puede verse, la solución a este modelo exhibe la estabilidad deseada por el dueño y él encuentra esta solución mucho mas aceptable que la obtenida del modelo original.

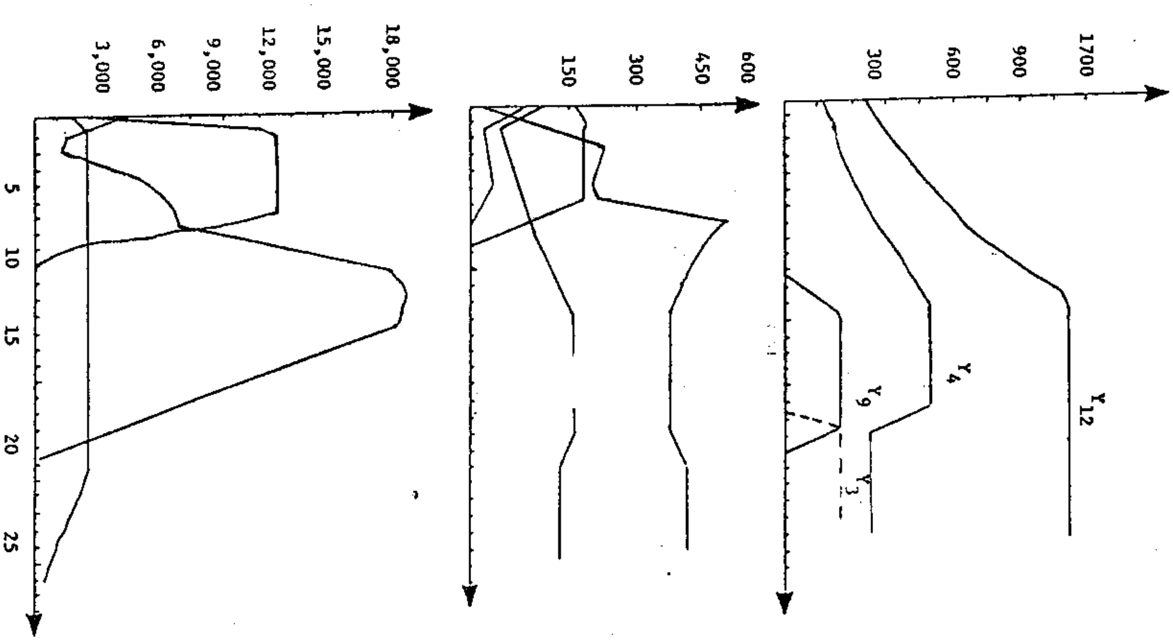
IV CONCLUSIONES

Los resultados de la computadora del modelo revisado implica

t	Y_3	Y_4, Y_7	Y_9	Y_{10}	Y_{12}	z_1	z_2	z_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R
1	0	159	0	154	317	4200	1000	1500	0	224	175	131	0	0	155886
2	0	188	0	159	376	1326	2400	11602	164	257	69	40	1142	0	187514
3	0	211	0	188	422	1318	2400	12000	315	257	77	40	6025	0	195140
4	0	242	0	211	483	3885	2400	12000	298	257	89	46	12508	0	223892
5	0	274	0	242	549	5586	2400	12000	280	257	101	52	19489	0	254880
6	0	313	0	274	626	6330	2400	12000	289	257	115	29	27616	0	290911
7	0	356	0	313	713	6582	2400	8946	559	0	131	0	75396	0	276503
8	0	406	0	356	812	11472	2400	2176	541	0	149	0	85885	5535	310192
9	0	462	0	406	924	15124	2400	0	521	0	169	0	97817	8783	355679
10	0	526	0	462	1053	17365	2400	0	497	0	193	0	111415	10003	413570
11	0	600	0	526	1199	18000	2400	0	470	0	220	0	126899	11394	480086
12	0	683	0	600	1366	16805	2400	0	440	0	250	0	144537	12977	556448
13	0	778	0	683	1556	13526	2400	0	405	0	285	0	164625	14781	644016
14	842	45	0	778	1772	7873	2400	0	365	0	325	0	169834	847	902236
15	1009	0	45	0	2018	1578	2400	0	483	0	207	0	188333	0	1089607
16	36	671	0	0	1413	0	443	0	468	0	222	0	145765	12740	605864
17	234	260	0	671	989	0	0	0	466	0	224	0	100860	4942	429432
18	299	383	0	260	1363	0	510	0	483	0	207	0	136303	7272	624890
19	263	344	0	383	1214	0	0	0	467	0	223	0	122225	6543	546507
20	264	352	0	344	1232	0	0	0	464	0	226	0	123929	6691	556430
21	172	431	0	352	1207	0	0	0	469	0	221	0	123260	8194	527140
22	288	310	0	431	1197	0	0	0	471	0	219	0	120167	5897	542146
23	351	284	0	310	1269	0	0	0	457	0	233	0	125743	5388	590742
24	0	599	0	284	1199	0	0	0	470	0	220	0	125685	11389	492696
25	310	251	171	428	1123	0	0	0	484	0	206	0	112797	4771	595945



t	Y_3	Y_4,Y_7	Y_9	Y_{10}	Y_{12}	s_1	s_2	s_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R
1	0	159	0	154	317	4200	1000	1500	0	224	175	131	0	0	155886
2	0	188	0	159	375	1326	2400	11602	164	257	69	40	1142	0	187514
3	0	211	0	188	422	1318	2400	12000	315	257	77	40	6025	0	195140
4	0	242	0	211	483	3885	2400	12000	298	257	89	46	12058	0	223892
5	0	274	0	242	549	5586	2400	12000	280	257	100	52	19489	0	254880
6	0	313	0	274	626	6330	2400	12000	289	257	115	29	27616	0	290911
7	0	356	0	313	712	6582	2400	8946	559	0	131	0	75396	0	270503
8	0	406	0	356	812	11472	2400	2176	541	0	149	0	85885	5535	310192
9	0	462	0	406	924	15124	2400	0	521	0	169	0	.97817	8783	355679
10	0	526	0	462	1053	17365	2400	0	497	0	193	0	111415	10003	413570
11	0	600	95	432	1199	18000	2400	0	470	0	220	0	126899	11394	529103
12	0	636	218	381	1272	16805	2400	0	457	0	233	0	134737	12080	625477
13	0	636	254	381	1272	14504	2400	0	457	0	233	0	134910	12080	653979
14	·0	636	254	381	1272	12026	2400	0	457	0	233	0	134910	12080	644748
15	0	636	254	381	1272	9548	2400	0	457	0	233	0	134910	12080	645515
16	0	636	254	381	1272	7071	2400	0	457	0	233	0	134910	12080	646284
17	0	636	254	381	1272	4593	2400	0	457	0	233	0	134910	12080	647052
18	254	381	254	381	1272	2115	2400	0	457	0	233	0	129570	7248	695533
19	254	381	0	381	1272	260	2400	0	474	0	216	0	128349	7248	570441
20	254	381	0	381	1272	0	2191	0	487	0	203	0	128349	7248	570346
21	254	381	0	381	1272	0	1826	0	487	0	203	0	128349	7248	570481
22	254	381	0	381	1272	0	1461	0	487	0	203	0	128349	7248	570631
23	254	381	0	381	1272	0	1095	0	487	0	203	0	128349	7248	570774
24	254	381	0	381	1272	0	730	0	487	0	203	0	128349	7248	570916
25	254	381	0	381	1272	0	365	0	487	0	203	0	128349	7248	571058



una estrategia un tanto diferente de la obtenida del modelo inicial. La diferencia mas significativa fue el tiempo y las manera en la cual el tamaño del rebaño iba a ser revisado. El modelo revisado indica que una politica de máximo crecimiento deberia ser adoptada para los primeros 11 años del horizonte de planeación. Esta tasa de crecimiento dada se detendria al iniciar la venta de las vaquillas del grupo 3 en el año 11. Suficientes vaquillas del grupo 3 serian vendidas cada año para mantener el tamaño del rebaño del ganado del grupo 4 en 1272 cabezas. Por el año 18 la cantidad de cosecha en almacén es pronosticada para que se agote lo cual necesita hacer que todos los alimentos disponibles sean para vacas productoras de leche, de aqui que no mas vaquillas son vendidas en la etapa del grupo 3 y alternativamente aquellas vaquillas, las cuales no serán sumadas eventualmente el rebaño productor de leche, son vendidas al nacer.(Esta estrategia de estado estable fue apoyado directamente por el modelo inicial). Desde el punto de vista del subsistema cosecha, el último año en el cual la superficie de terreno es destinada para el cultivo de heno es el año 6, mientras el último año de cultivo de maiz es año 7. De ahi en adelante estos son comprados en el mercado. Bastante heno viejo se desarrollo en y despues del año 7 para alimentar el ganado y conservar los silos llenos, mientras el resto del terreno es usado para cultivar ensilage. En el año 19, cuando el abasto de ensilage está abatido, más tierra es dedicada a cosechar ensilage.

Esta estrategia, y en particular la estabilidad implicaron con respecto al tamaño del rebaño y terreno dedicado a cultivar cosecha, facilidades al propietario concernientes a las fluctuaciones en el tamaño del rebaño y variabilidad en las políticas de cultivo de cosechas. No obstante, el dueño, al principio no podía aceptar el aparente optimismo del modelo en llegar a una posición inesperadamente favorable y de utilidades. El dio obscuras razones por lo que no estaba de acuerdo, pero prometio pensar sobre eso.

Poco tiempo despues, el repartó que estaba listo para reconsiderar las desiciones por que el habia suministrado las entradas y por consiguiente habia rechasado sus propios datos. Despues de este comienzo escabroso, los resultados fueron cuidadosamente revisados. En particular, la "corriente" de rendimientos asosiados con las políticas derivadas con los modelos inicial y revisados fueron comparados, como se ilustra graficamente en la figura 7, para evaluar la perdida potencial de dinero asociado al modelo revisado. De esos resultados, se decidio a usar el modelo revisado para hacer política de toma de decisiones para la granja lechera.

La primera acción positiva como un resultado del estudio implico dos decisiones de largamente-demoradas en el desmbolso de capital. La capacidad de un nuevo establo para becerros fue determinado y la decision de abastecer un almacenaje adicional de maiz fue hecho y construido inmediatamente.

Con un plan completo basado en el modelo de programación lineal, se hizo posible pronosticar flujo de efectivo, necesidades de capital, utilidades y necesidades de poder.

Previo al uso de programación lineal, no habia un enfoque de evaluación de las oportunidades de inversión alternativas. Ahora la granja esta cuantitativamente balanceada en las decisiones de compra a venta de ganado y alimentos. Puesto que la granja es adyasente a una area urbana, hay oportunidades favorables crecientes cada año para dar a la tierra otros usos. El modelo sera benefico en ayudar a elegir la dirección y tiempo conveniente en el uso de la tierra.

Al encargado de la granja particularmente le gusta usar el modelo de programación lineal porque le aseguran una clara evaluación de claras ideas. El encontro que la imaginación de los gmpleados se inspiraba mas para innovar cuando hay un medio para evaluar a la luz de la operación total.

Los subproductos del estudio fueron altamente utilisados por la granja. El requisito riguroso de clasificación, calculo de costos y producción y desarrollo de relaciones conectadas causaron que la administración de la granja viera el negocio de nuevas formas. De esto vienen nuevos conocimientos y persepciones que conducen a mejoras en el procedimiento de operación, y asignar responsabilidades y politicas de personas.

Quizá el beneficio mas grande de este estudio es la confianza que la administración de la granja siente ahora que ellos saben hacia a donde el negocio se encamina y como tomar mejores decisiones en un medio ambiente el cual llega a ser muy complejo. Esta confianza es aparente en los empleados de la granja, los bancos y los negocios publicos con quien trata.

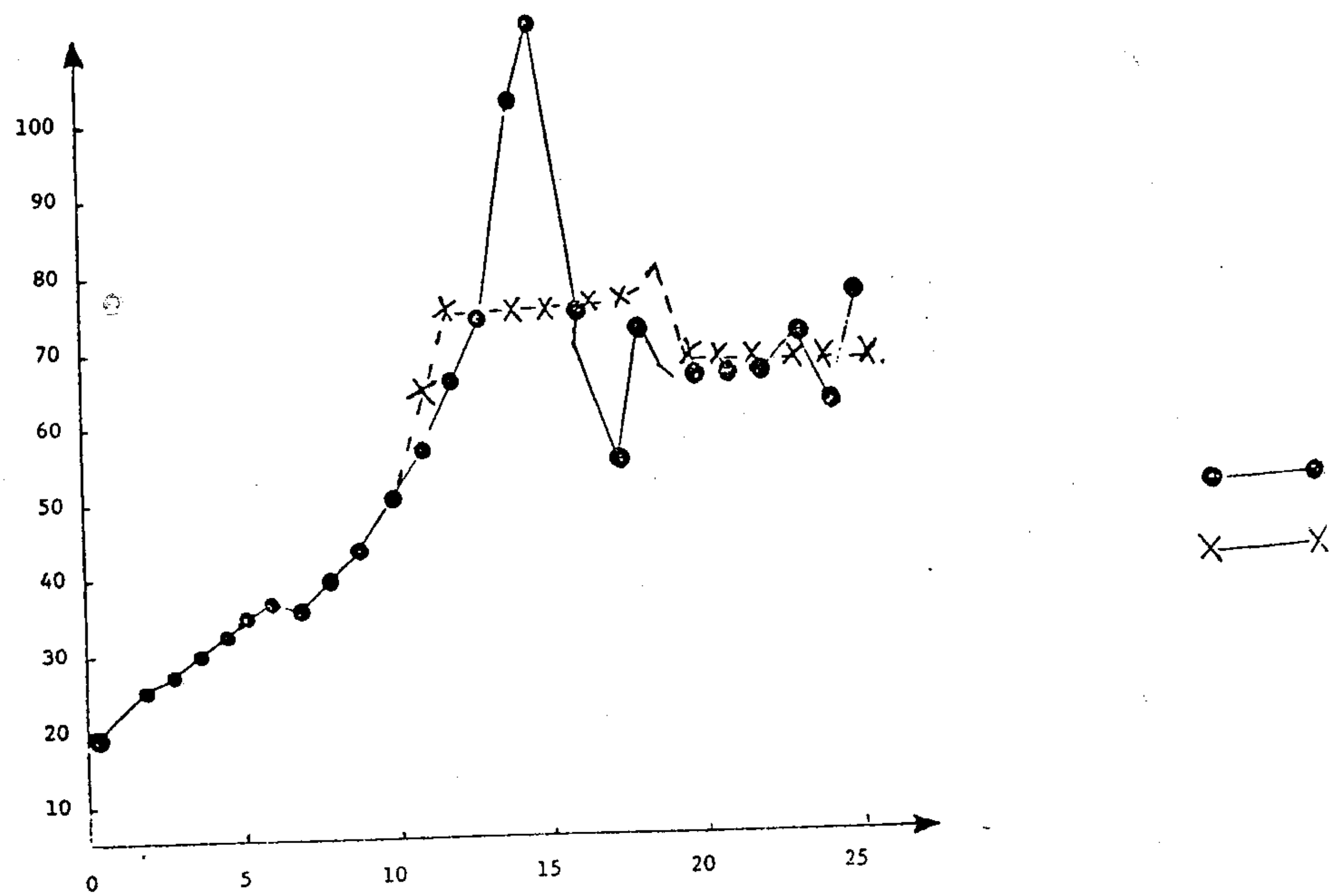


FIGURE 7.