UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

TEORIA DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS

(APLICACION A ECUACIONES DIFERENCIALES)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

HORACIO SORIA SALAZAR

HERMOSILLO, SONORA, MEXICO

ABRIL DE 1974

A mis Padres,

en reconocimiento a la ayuda, apoyo, confianza

y cariño que siempre me han brindado.

A la memoria de mis Abuelos

Prof. Félix Soria Bañuelos

Profa. Concepción Larrea de Soria

Sr. Alberto Salazar Soto

A mi Mamá Chata: Sra. Emilia Aïnza de Salazar

A mi querida esposa Margarita

A mi futuro hijo.

Al Mat. Enrique Valle Flores,

agradeciéndole la ayuda que siempre me brindó durante mi carrera profesional y en la elaboración de la presente Tesis.

A mis hermanos, familiares y amigos.

INTRODUCCION

El concepto de función, como la mayoría de los conceptos matemáticos, ha sufrido una marcada evolución al través de los años.

Leibnitz, el creador de la palabra función por el año de 1694, consideraba ésta como una cantidad relacionada con una curva. Bernoulli en 1718 la consideró como una expresión formada por variables y constantes y, poco después, Euler consideró la Función como una cantidad definida por cualquier ecuación o fórmula que estaba constituída por variables y constantes. Este concepto de Euler permaneció invariable hasta que Joseph Fourier, en sus investigaciones sobre calor, consideró que las llamadas series trigonométricas, las cuales encierran mayor cantidad de relaciones entre variables que las que se habían estudiado anteriormente, también definían funciones.

Dirichlet dió una definición más amplia y que no utilizaba expresiones analíticas para indicar la relación entre variables de dos conjuntos numéricos. El nacimiento de la Teoría de Conjuntos permitió extender el concepto de Función estableciendo relaciones entre dos conjuntos cuyos elementos son objetos arbitrarios. Esta definición es la usualmente aceptada por el "matemático medio".

En este trabajo se da una extensión del concepto de Función mediante la Teoría de Cocientes de Convolución debida al matemático polaco Jan Mikusinski. Estos son introducidos como cocientes de enteros.

Asi como algunos racionales se identifican con enteros, algunos cocientes de convolución se identifican con funciones continuas, otros con algunas - funciones discontinuas. La Función Delta de Dirac, la Función de Heavyside se identifican con cocientes de convolución. Lo mismo pasa con los - Operadores de Diferenciación e Integración, que permiten dar un método para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. De lo anterior se vé la razón por la que los cocientes de convolucion sean consideradas como funciones generalizadas.

Este trabajo se divide en dos capítulos. En el primero se define el campo de Cocientes de Convolución, se identifican los complejos, las funciones continuas, algunas funciones discontinuas y la función de Dirac.

En el segundo capítulo se estudian los Operadores de Diferenciación e Integración y se aplica la teoría antes desarrollada en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

CAPITULO I

Sea $\mathbb{C}$ el campo complejo y $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ elementos de dicho campo. Poniendo

$$\mathcal{C} = \{ f : [0,\infty) \mid f \text{ es continua} \} ,$$

sea $\mathcal{C}$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de éstas por escalares. Esto es

$$\mathcal{C} = \{ \mathcal{C}, +, \cdot \}$$

DEFINICION 1.1

En $\mathcal{C}$ se define la operación convolución $*$ mediante:

$$(a * b)(t) = \int_0^t a(u)\, b(t-u)\, du .$$

(Nótese que la integral siempre existe, gracias a la continuidad).

Por conveniencia utilizaremos $ab(t)$ en lugar de $(a*b)(t)$, cuidando de distinguir esta función "producto" del producto usual $(a \times b)(t) = a(t) b(t), (\in \mathbb{C})$

TEOREMA 1.1

$(\mathcal{C}, +, \cdot, *)$ constituye un álgebra conmutativa.

Demostración:

Basta demostrar que $\mathcal{C}$ bajo las operaciones de adición y convolución constituye un anillo conmutativo.

Sean $a, b, c \in \mathcal{C}$.

i) Se ve directamente de la definición de convolución que esta operación es cerrada en $\mathcal{C}$.

ii) $ab = ba$

$$ab(t) = \int_0^t a(u) b(t-u)\, du$$ y con el cambio de variable $v = t - u$

$$= \int_t^0 a(t-v) b(v) (-dv) = \int_0^t b(v) a(t-v)\, dv = ba(t).$$

iii) $a(bc) = (ab)c$

$$[a(bc)](t) = \int_0^t a(u)(bc)(t-u)\,du = \int_0^t a(u)\left[\int_0^{t-u} b(t-u-v)\,c(v)\,dv\right]du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t]}(u)\,a(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t-u]}(v)\,b(t-u-v)\,c(v)\,dv\right]du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t]}(u)\,I_{[0,t-u]}(v)\,a(u)\,b(t-u-v)\,c(v)\,dv\right]du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t]}(u)\,I_{[0,t-u]}(v)\,a(u)\,b(t-u-v)\,c(v)\,du\right]dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t]}(u)\,I_{[0,t-u]}(v)\,a(u)\,b(t-u-v)\,du\right]c(v)\,dv$$

Veamos que

$$I_{[0,t]}(u)\,I_{[0,t-u]}(v) = I_{[0,t]}(v)\,I_{[0,t-v]}(u) \qquad \ldots \quad (1.1)$$

$I_{[0,t-u]}(v) = I_{[0,t-v]}(u)$ pues $v \in [0,t-u] \Longrightarrow u \in [0,t-v]$

y $I_{[0,t-u]}(v) = 1 = I_{[0,t-v]}(u)$. También $v \notin [0,t-u] \Longrightarrow u \notin [0,t-v]$

y $I_{[0,t-u]}(v) = 0 = I_{[0,t-v]}(u)$

Si $\quad I_{[0,t-u]}(v) = 0 \quad$ fácilmente se sigue (1.1), tanto para

$I_{[0,t]}(u) = 0 \quad$ como para $\quad I_{[0,t]}(u) = 1$

Si $\quad I_{[0,t-u]}(v) = 1 \quad$ y $\quad I_{[0,t]}(u) = 1 \quad$ entonces $\quad v \leq t-u \leq t$

pues $\quad 0 \leq u \leq t, \quad$ por tanto $\quad I_{[0,t]}(v) = 1 \quad$ y se sigue (1.1)

Si $\quad I_{[0,t-u]}(v) = 1 \quad$ y $\quad I_{[0,t]}(u) = 0$, entonces $\quad t < u \leq t-v \Rightarrow v < 0$

por tanto $\quad v \notin [0,t] \quad$ y $\quad I_{[0,t]}(v) = 0 \quad$ y se sigue (1.1)

Ya que se demostró (1.1) tenemos que

$$[a(bc)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t]}(v)\, I_{[0,t-v]}(u)\, a(u)\, b(t-u-v)\, du \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t]}(v)\, c(v) \left[\int_{0}^{t-v} a(u)\, b(t-u-v)\, du \right] dv$$

$$= \int_{0}^{t} c(v)(ab)(t-v)\, dv$$

$$= [(ab)c](t)$$

iv) $a(b+c) = ab + ac$

$$
\begin{aligned}
a(b+c)(t) &= \int_0^t a(u)(b+c)(t-u)\,du \\
&= \int_0^t a(u)\left[b(t-u) + c(t-u)\right]du \\
&= \int_0^t \left[a(u)\,b(t-u) + a(u)\,c(t-u)\right]du \\
&= \int_0^t a(u)\,b(t-u)\,du + \int_0^t a(u)\,c(t-u)\,du \\
&= ab(t) + ac(t)
\end{aligned}
$$

TEOREMA 1.2

El álgebra conmutativa $\mathfrak{C}$ constituye, respecto a la estructura anular, un dominio de integridad (no tiene divisores de cero).

Demostraremos 4 lemas que permitirán obtener la demostración del Teorema 1.2

Lema 1.1

Si g es continua en $[0,T]$ y $t \in [0,T]$ entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} g(u)\,du \longrightarrow \int_0^t g(u)\,du \ , \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

Demostración:

Por la definición de exponencial

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kx(t-u)} = 1 - \exp\left[-e^{x(t-u)}\right]$$

y para x, t fijos, se puede demostrar, utilizando el criterio de Weierstrass para series uniformemente convergentes, que esta serie converge uniformemente para $u \in [0,T]$

Debido a la convergencia uniforme de la serie,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{k\alpha(t-u)} g(u)\,du = \int_0^T \left\{1 - \exp\left[-e^{\alpha(t-u)}\right]\right\} g(u)\,du$$

Hagamos

$$I(\alpha) = \int_0^T \left\{1 - \exp\left[-e^{\alpha(t-u)}\right]\right\} g(u)\,du - \int_0^t g(u)\,du .$$

$I(\alpha) \longrightarrow 0$ cuando $\alpha \longrightarrow \infty$. Para esto hagamos

$$I_1 = -\int_0^{t-\delta} \exp\left[-e^{\alpha(t-u)}\right] g(u)\,du$$

$$I_2 = -\int_{t-\delta}^{t} \exp\left[-e^{\alpha(t-u)}\right] g(u)\,du$$

$$I_3 = \int_t^{t+\delta'} \left\{1 - \exp\left[-e^{\alpha(t-u)}\right]\right\} g(u)\,du$$

$$I_4 = \int_{t+\delta'}^{T} \left\{1 - \exp\left[-e^{\alpha(t-u)}\right]\right\} g(u)\,du .$$

donde $\delta = 0$ si $t = 0$ ó $\delta \in (0,t)$; $\delta' = 0$ si $t = T$ ó $\delta' \in (0, T-t)$.

En cualquier caso se cumple $I(\alpha) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$.

Como g es continua sobre $[0,T]$ entonces $|g(u)| \leq M$ para algún $M \geq 0$ y $u \in [0,T]$ y tenemos las siguientes estimaciones:

$$|I_1| \leq M \int_0^{t-\delta} \exp\left[-e^{\alpha(t-u)}\right] du .$$

Como $0 \leq u \leq t-\delta \Longrightarrow \delta - u \leq \delta \leq t-u \Longrightarrow x\delta \leq x(t-u)$.

$$\Longrightarrow -e^{x\delta} \geq -e^{x(t-u)} \Longrightarrow \exp\left[-e^{x\delta}\right] \geq \exp\left[-e^{x(t-u)}\right].$$

Entonces

$$|I_1| \leq M\int_0^{t-\delta} \exp\left[e^{-x\delta}\right] du = M\exp\left[-e^{x\delta}\right](t-\delta),$$

de donde

$$|I_1| \leq MT\exp\left[-e^{x\delta}\right]$$

Asimismo, se cumple

$$|I_2| \leq M\int_{t-\delta}^{t} \exp\left[-e^{x(t-u)}\right] du.$$

ya que $\exp\left[-e^{x(t-u)}\right] \leq 1$, por lo tanto

$$|I_2| \leq M\int_{t-\delta}^{t} du = M\delta$$

$$|I_2| \leq M\delta.$$

Asímismo, se cumple

$$|I_3| \leq M\int_t^{t+\delta'} \left\{1-\exp\left[-e^{x(t-u)}\right]\right\} du,$$ ya que

$1-\exp\left[-e^{x(t-u)}\right] \leq 1$, por lo tanto

$$|I_3| \leq M\delta'$$

Asímismo, se cumple

$$|I_4| \leq M\int_{t+\delta'}^{T} \left\{1-\exp\left[-e^{x(t-u)}\right]\right\} g(u)\,du.$$

Como $\exp\left[-e^{x(t-u)}\right] \geq \exp\left[-e^{-x\delta'}\right]$, entonces tenemos que

$$|I_4| \leq M\int_{t+\delta'}^{T}\left\{1-\exp\left[-e^{x\delta'}\right]\right\} du$$

de donde

$$|I_4| \leq MT\left\{1-\exp\left[-e^{-x\delta'}\right]\right\}$$

Dado $\varepsilon > 0$ escojamos $\delta = \delta' = \dfrac{\varepsilon}{4M}$ de tal manera que

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad y \qquad |I_3| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Sea $x_0 = \max\{x_0', x_0''\}$, donde

$$x_0' = -\frac{4M}{\varepsilon}\ln\left(\ln\frac{MT}{MT-\varepsilon}\right)$$

$$x_0'' = \frac{4M}{\varepsilon}\ln\left(\ln\frac{4MT}{\varepsilon}\right)$$

Entonces si $x \geq x_0$ se tendrá

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad y \qquad |I_4| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Por lo tanto

$$|I(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{para} \quad \delta = \delta' = \frac{\varepsilon}{4M} \quad y \quad x \geq x_0 .$$

Por lo que queda demostrado el Lema.

<u>Lema 1.2</u>

Si f es continua en $[0,T]$ y $\left|\int_0^T e^{nt} f(t)\,dt\right| \leq M$, $n=1,2,\cdots$, entonces $f(t)=0$, $\forall t \in [0,T]$.

Demostración:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^T e^{kn(t-u)} f(T-u)\,du\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left|\int_0^T e^{kn(t-u)} f(T-u)\,du\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)}\left|-\int_0^T e^{kn(T-u)} f(T-u)(-du)\right|$$

$$\le M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kn(T-t)}}{k!} = M\left\{\exp\left[e^{-n(T-t)}\right]-1\right\}$$

Si $t<T$, esta última expresión se aproxima a cero cuando $n \to \infty$ y utilizando el lema 1.1 con $g(u) = f(t-u)$ tenemos que

$\int_0^t f(T-u)\,du = 0 \quad \forall t \in [0,T) \Longrightarrow f(t)=0 \quad \forall t \in [0,T)$; y como f es continua en T, entonces $f(t)=0 \quad \forall t \in [0,T]$.

Lema 1.3

Si f es continua en $[0,U)$ y $\int_0^U u^n f(u)du=0$ para $n=1,2,\cdots$, entonces $f(u)=0 \quad \forall u \in [0,U]$.

Demostración:

Fijemos $u_0 \in (0,U)$. Como

$$\int_0^U \left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\,du = 0$$

$$\int_0^U \left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\,du = \int_0^{u_0} \left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\,du + \int_{u_0}^U \left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\,du = 0.$$

$$\left|\int_{u_0}^U \left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\,du\right| = \left|-\int_0^{u_0} \left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\,du\right| \le \int_0^{u_0} \left|\left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\right| du$$

$$\le M\int_0^{u_0} du = Mu_0$$

donde $\left|\left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\right| \leq M$ para algún $M > 0$.

Sea T tal que $U = u_0 e^T$ y hagamos el cambio de variable $u = u_0 e^t$

$$\left| \int_{u_0}^{U} \left(\frac{u}{u_0}\right)^n f(u)\, du \right| = \left| \int_0^T e^{nt} f(u_0 e^t) u_0 e^t\, dt \right| = u_0 \left| \int_0^T e^{nt} F(t)\, dt \right| \leq M u_0$$

donde $F(t) = f(u_0 e^t) e^t$.

Entonces

$$\left| \int_0^T e^{nt} F(t)\, dt \right| \leq M .$$

Aplicando el lema 1. 2 obtenemos

$$F(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T] .$$

Pero

$$F(t) = f(u_0 e^t) e^t = 0 \implies f(u_0 e^t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T] .$$

Entonces

$$f(u) = 0 \qquad \forall u \in [u_0, U]$$

Y como $u_0 \in (0, U)$ entonces

$$f(u) = 0 \qquad \forall u \in (0, U]$$

y como f es continua en 0

$$f(u) = 0 \qquad \forall u \in [0, U]$$

Lema 1. 4

Si f es continua en $[0, 2T]$ y $f^2(t) = 0$ $\forall t \in [0, 2T]$ entonces

$$f(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T] .$$

Demostración:

Ya que

$$f^2(t) = \int_0^t f(u) f(t-u)\, du = 0 \qquad \forall t \in [0, 2T] ,$$

tenemos

$$0 = \int_0^{2T} e^{n(2T-t)} \left[\int_0^t f(u) f(t-u)\, du \right] dt$$

$$= \int_0^{2T} \int_0^t e^{n(2T-t)} f(u) f(t-u)\, du\, dt$$

$$= \iint_{\tau} e^{n(2T-t)} f(u) f(t-u)\, du\, dt \qquad \ldots (1.2)$$

donde

$$\tau = \{ (u,t) \mid 0 \le u \le t \le 2T \}$$

Introduzcamos nuevas variables de integración v, w por las fórmulas

$u = T - v$, $t = 2T - v - w$ y la integral (1. 2) quedará

$$\iint_{\Delta} e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)(-dv)(-dv-dw)$$

$$= \iint_{\Delta} e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)\, dv\, dw = 0 \qquad \ldots (1.3)$$

donde $\Delta = \{ (v,w) \mid v+w \geq 0 \ , \ v \le T \ , \ w \le T \}$.

Sea $\Delta' = \{ (v,w) \mid v+w \le 0 \ , \ v \geq -T \ , \ w \geq -T \}$.

Entonces $\Delta + \Delta' = \{ (v,w) \mid -T \le v \le T \ , \ -T \le w \le T \}$.

Entonces según (1. 3) la integral sobre $\Delta + \Delta'$ es igual a la integral sobre Δ'. Ademas en Δ', $v+w \le 0$ por lo que $e^{n(v+w)} \le 1$ y como la integral sobre el cuadrado $\Delta + \Delta'$ se puede escribir como el producto de dos integrales sencillas, tenemos que:

$$\left| \left[\int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right]^2 \right| = \left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right|$$

$$= \left| \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} e^{nv} e^{nw} f(T-v) f(T-w)\, dv\, dw \right|$$

$$= \left| \iint_{\Delta+\Delta'} e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)\, dv\, dw \right|$$

$$= \left| \iint_{\Delta'} e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)\, dv\, dw \right|$$

$$\leq \iint_{\Delta'} e^{n(v+w)} |f(T-v)|\, |f(T-w)|\, dv\, dw$$

$$\leq \iint_{\Delta'} |f(T-v)|\, |f(T-w)|\, dv\, dw, \text{ pues como se vió antes } e^{n(v+w)} \leq 1$$

$$\leq 2T^2A^2$$

donde A es una cota superior de $f(t)$ $\forall t \in [0, 2T]$ y $2T^2$ es el área de Δ'. Entonces

$$\left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leq \sqrt{2}\, TA .$$

Ahora

$$\left| \int_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leq \int_{-T}^{0} e^{nu} |f(T-u)|\, du \leq A \int_{-T}^{0} du = AT$$

Entonces

$$\left| \int_{0}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| = \left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du - \int_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\, du \right|$$

$$\leq \left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| + \left| \int_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\, du \right|$$

$$\leq \sqrt{2}\, TA + TA$$

$$= (\sqrt{2} + 1) TA ,$$

y por el lema 1.2

$$f(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

Corolario 1.1

Si $f \in \mathfrak{C}$ y $f^2(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$, entonces $f(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Este corolario es inmediato del lema 1.4 pues tanto la hipótesis como la conclusión se cumplen para todo $T > 0$.

Ahora estamos listos para demostrar el Teorema 1.2

Para $a, b \in \mathfrak{C}$ supóngase que

$$0 = ab(t) = \int_0^t a(u)\, b(t-u)\, du \quad , \qquad \forall t \geq 0$$

y hagamo s

$$a_n(t) = t^n a(t) \quad , \qquad b_n(t) = t^n b(t) \; . \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

Demostraremos por inducción que $ab_n(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ y $n = 1, 2, \cdots$.

i) $ab_1 + a_1 b = ba_1 + b_1 a$

$$\begin{aligned}(ba_1 + b_1 a)(t) &= ba_1(t) + b_1 a(t)\\ &= \int_0^t (t-u)\, b(u)\, a(t-u)\, du + \int_0^t u\, b(u)\, a(t-u)\, du\\ &= t\int_0^t b(u)\, a(t-u)\, du = 0 .\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}&ab_1 + a_1 b = 0\\ &ab_1(ab_1 + a_1 b) = 0\\ &(ab_1)^2 + (ab)(a_1 b_1) = 0\\ &\qquad (ab_1)^2 = 0\\ &\Longrightarrow \quad ab_1 = 0 .\end{aligned}$$

ii) Supongamos vale para n, ie, $ab_n(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

$$(a_{n+1}b + ab_{n+1})(t) = (ba_{n+1} + b_{n+1}a)(t)$$
$$= ba_{n+1}(t) + b_{n+1}a(t)$$
$$= \int_0^t (t-u)^{n+1}\, b(u)\, a(t-u)\, du + \int_0^t u^{n+1} b(u)\, a(t-u)\, du$$
$$= (-1)^{n+1}\int_0^t u^{n+1} b(u)\, a(t-u)\, du + \int_0^t u^{n+1} b(u)\, a(t-u)\, du$$
$$= \left[1 + (-1)^{n+1}\right]\int_0^t u^{n+1} b(u)\, a(t-u)\, du$$

$$(a_{n+1}b + ab_{n+1})(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2\, b_{n+1}\, a(t) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Si n es par:

$$(ab)(a_{n+1}b_{n+1})(t) + (ab_{n+1})^2(t) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (ab_{n+1})^2(t) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad ab_{n+1}(t) = 0$$

Si n es impar:

$$a_{n+1}b + ab_{n+1} = 2ab_{n+1}$$
$$a_{n+1}b - ab_{n+1} = 0$$
$$(ab)(a_{n+1}b_{n+1}) - (ab_{n+1})^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (ab_{n+1})^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad ab_{n+1} = 0$$

Por lo tanto

$$ab_n(t) = 0 \qquad \forall t \geq 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Ahora

$$ab_n(t) = b_n a(t) = \int_0^t u^n\, b(u)\, a(t-u)\, du = 0$$

y aplicando el lema 1.3, tenemos que

$$a(t-u)\, b(u) = 0 \quad \forall u \in [0,t], \quad \forall t \geq 0.$$

Si existe $u_0 \in [0,t]$ para el cual $b(u_0) \neq 0$ entonces $a(t-u_0) = 0$ $\forall t \geq u_0$ ó $a(v) = 0$ $\forall v \geq 0$. Por lo tanto $a(v) = 0$ $\forall v \geq 0$ ó $b(u) = 0$ $\forall u \geq 0$ con lo que queda demostrado el teorema 1.2.

Recuérdese que $\mathfrak{C}$ como dominio de integridad, se puede sumergir[1] en el campo de cocientes $\mathfrak{F}$ formado por clases de equivalencia de parejas (a,b), $a, b \in \mathfrak{C}$, $b \neq 0$, con la relación $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc$. Los elementos $\frac{a}{b} \in \mathfrak{F}$ se llamarán Funciones Generalizadas (Funciones de Schwartz).

Demostraremos a continuación que los elementos de $\mathfrak{F}$ se identifican con complejos, funciones continuas, algunas funciones discontinuas, con los operadores de diferenciación e integración, con la Función Delta de Dirac y -- con la función de Heavyside.

DEFINICION 1.2

Una función f es localmente integrable en $[a,b]$ si:

$i)$ $f(x)$ está definida en $[a,b]$ salvo quizás en un conjunto finito de puntos aislados llamados las singularidades de f

$ii)$ f es continua en $[a,b]$ salvo quizás en sus singularidades.

$iii)$ La integral de f sobre cualquier subintervalo cerrado de $[a,b]$ que no contenga ninguna singularidad de f en su interior, existe como una integral propia de Riemann o como una integral impropia de Riemann absolutamente convergente.

1 Construcción del campo de cocientes de un dominio de integridad abstracto (Algebra superior. Marie Weiss, Roy Dubisch, Editorial Limusa-Wiley, S. A., página 83).

TEOREMA 1. 3

Si f y g son localmente integrables en el intervalo $[0,\infty)$ entonces la integral

$$h(x)=\int_0^x f(x-y)\,g(y)\,dy$$

existe para $x \geq 0$ excepto quizás en un conjunto de puntos aislados y defi ne una función $h(x)$ que es localmente integrable en $[0,\infty)$[1]

DEFINICION 1. 3

Dos funciones localmente integrables son equivalentes si son iguales en la intersección de sus conjuntos de continuidad

Observación: Esta relación constituye una relación de equivalencia.

TEOREMA 1. 4

Si f es continua y celularmente derivable[2] en $[0,t_0]\ \forall t_0>0$ y Df[3] es localmente integrable allí, entonces

$$\int_a^b Df\,dx = f(b)-f(a)\ , \qquad a,b\in[0,t_0].$$

Demostración:

Sean $c_1<\cdots<c_{n-1}$ las singularidades de Df en (a,b) y $c_0=a\,,c_n=b$

Para un K fijo, $K=1,2,\cdots,n-1$, sea $c_k<\alpha<\beta<c_{k+1}$.

Como $f\in C^1$ en $[\alpha,\beta]$, tenemos que

1 Generalized Functions and Operational Calculus, A. Ederly. Editorial Rine-Holt. Página 10.

2 f es celularmente derivable en si es derivable allí salvo quizás en un número finito de puntos.

3 La derivada de f se denotará por Df.

$$\int_{\alpha}^{\beta} Df\, dx = f(\beta) - f(\alpha)$$

Si $\alpha \to c_k$ y $\beta \to c_{k+1}$ entonces $f(\beta) \longrightarrow f(c_{k+1})$ y $f(\alpha) \longrightarrow f(c_k)$ ya que f es continua en $[0\ t_0]$.

Además

$$\int_{\alpha}^{\beta} Df\, dx \longrightarrow \int_{c_k}^{c_{k+1}} Df\, dx$$

Esta última integral existe ya que Df es localmente integrable.

Entonces

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} Df\, dx = f(c_{k+1}) - f(c_k)\ .$$

$$\int_{a}^{b} Df\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} Df dx = \sum_{k=0}^{n-1} \{f(c_{k+1}) - f(c_k)\}$$

$$= f(b) - f(a)$$

y el Teorema queda demostrado.

Observación: La relación definida en DEFINICION 1.3 divide al conjunto $\mathcal{R}$ de funciones localmente integrables en clases de equivalencia. Al conjunto de estas clases lo denotaremos por $\overline{\mathcal{R}}$ Consideraremos funciones localmente integrables equivalentes como idénticas y no haremos distinción entre una función f localmente integrable y la clase $\bar{f}$ de la que f es representativa. En este sentido escribimos $f \in \overline{\mathcal{R}}$ aunque la clase que contiene a f sea el elemento de $\overline{\mathcal{R}}$.

Las operaciones entre elementos de $\bar{\mathcal{R}}$ corresponden a operaciones entre clases y las definiremos por medio de elementos representativos de cada clase.

DEFINICION 1.4

Para $\bar{f}, \bar{g} \in \bar{\mathcal{R}}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ definimos $\bar{f} + \bar{g}$ y $\alpha\bar{f}$ como las clases en que se encuentran respectivamente $f+g$ y αf con $f \in \bar{f}$ y $g \in \bar{g}$.

Para que la definición anterior tenga sentido debemos demostrar que las operaciones no dependen de los representantes de las clases.

Sean $f, f_1 \in \bar{f}$ y $g, g_1 \in \bar{g}$. Entonces

$i)$ $f = f_1$ en $A \cap A_1$ donde A y A_1 son los conjuntos de continuidad de f y f_1 respectivamente.

$g = g_1$ en $B \cap B_1$ donde B y B_1 son los conjuntos de continuidad de g y g_1 respectivamente.

$f + g = f_1 + g_1$ en $(A \cap A_1) \cup (B \cap B_1)$.

$ii)$ $f = f_1$ en A

$\alpha f = \alpha f_1$ en A.

La definición de adición de funciones y producto por escalar para elementos de $\mathcal{C}$ se puede extender para funciones localmente integrables y $\bar{\mathcal{R}}$ equipado con estas operaciones constituye un espacio vectorial.

Por TEOREMA 1.3 se puede definir la convolución para funciones localmente integrables y es una operación sobre clases de equivalencia de funciones localmente integrables por lo que $\bar{\mathcal{R}}$ es un anillo conmutativo y por lo tanto un álgebra.

Con el siguiente teorema demostraremos que algunos cocientes de convolución pueden ser identificados con funciones continuas, otros con funciones discontinuas y otros con números reales o complejos.

TEOREMA 1.5

Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $a,b,c \in \mathfrak{C}$, $c \neq 0$ y $f,g \in \bar{R}$.

i) $F(\alpha) = \dfrac{\alpha c}{c}$ define una inmersión de $\mathbb{C}$ en $\mathfrak{F}$.

ii) $K(a) = \dfrac{ac}{c}$ define una inmersión de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{F}$.

iii) $M(f) = \dfrac{fc}{c}$ define una inmersión de $\bar{R}$ en $\mathfrak{F}$.

Demostración:

iii) M conserva las operaciones ya que

$$M(\alpha f) = \frac{(\alpha f)c}{c} = \frac{\alpha(fc)}{c} = \alpha\frac{fc}{c} = \alpha M(f)$$

$$M(f+g) = \frac{(f+g)c}{c} = \frac{fc+gc}{c} = \frac{fc}{c} + \frac{gc}{c} = M(f) + M(g)$$

$$M(fg) = \frac{(fg)c}{c} = \frac{(fg)c^2}{c^2} = \frac{(fc)(gc)}{c^2} = \frac{fc}{c}\,\frac{gc}{c} = M(f)\,M(g)$$

M 1-1 $\quad M(f) = M(g) \Longrightarrow \dfrac{fc}{c} = \dfrac{gc}{c} \Longrightarrow \dfrac{(f-g)c}{c} = 0$

$$\Longrightarrow (f-g)c = 0 \Longrightarrow f = g^{(1)}.$$

(1) $\bar{R}$ no tiene divisores de cero. Véase "Theory of Functions of a Complex Variable". Tischmarsh. Oxford, University Press.

Observación: Conceptualmente existe diferencia entre $\alpha \in \mathfrak{C}$ y $\frac{\alpha h}{h} \in \mathfrak{F}$.

Sin embargo se comportan de la misma manera bajo las operaciones. Por lo tanto se denotan por el mismo símbolo α . En cambio $\alpha \in \mathfrak{C}$ y $\mu(t) = \alpha \in \mathfrak{C}$ ni son iguales conceptualmente ni tienen el mismo comportamiento bajo la operación de convolución. Así

$$\alpha\left[c(t)\right] = \alpha\, c(t) \qquad \text{y} \qquad (\mu c)(t) = \int_0^t c(u)\mu(t-u)\,du = \alpha\int_0^t c(u)\,du$$

Por lo tanto se debe distinguir entre α y la función que es igual a α .

La única excepción a la observación anterior la constituye el número cero 0 que bajo la operación de convolución se comporta igual que el operador $\frac{0h}{h}$ y la función $\theta(t) = 0$

Veamos ahora cual va a ser el elemento de $\mathfrak{F}$ que se identifica con la Función Delta de Dirac.

La Función de Dirac, denotada por δ se define con las condiciones:

i) $\delta(x-x') = 0$ si $x \neq x'$,

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\,dx = 1$

Ahora $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\,dx = \int_a^b \delta(x-x')\,dx = 1 \qquad x' \in (a,b)$

Sea $f \in \mathfrak{F}$ y calculemos la convolución de δ con f

$$(\delta f)(t) = \int_0^t f(u)\,\delta(t-u)\,du = \int_0^t f(t)\,\delta(t-u)\,du = f(t)\int_0^t \delta(t-u)\,du = f(t).$$

Por lo tanto $\delta f = f$ lo que quiere decir que 1 interpretado como el unitario de $\mathfrak{F}$ es el sustituto para la Función Delta de Dirac. Nótese que 1 es unitario de $\mathfrak{F}$ pero no de $\mathfrak{C}$ ya que $\mathfrak{C}$ no tiene unitario, pues si lo tuviera, denotésmoslo por e , tendríamos por un lado que $ae = a$ y por otro $(ae)(t) = \int_0^t a(u)\,e(t-u)\,du = \int_0^t a(u)\,du = a(t)$ lo que es absurdo.

CAPITULO II

DEFINICION 2.1

Sea la función $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante $h(t) = 1$

h se llama la restricción unitaria a la función de Heavyside.

Observación:

$$hf(t) = \int_0^t f(u)\, h(t-u)\, du = \int_0^t f(u)\, du$$

por lo que h viene siendo el operador de integración.

$h^2 f$ viene siendo la integral repetida de f y en general $h^n f$ significa la aplicación de la integral a la función f n veces.

PROPOSICION 2.1

$$h^n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Demostración:

Vale para $n = 1$ por DEFINICION 2.1

Supongamos vale para n.

$$h^{n+1}(t) = h^n h(t) = \int_0^t h^n(u)\, h(t-u)\, du$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t u^{n-1}\, du = \frac{t^n}{n!}$$

Observación:

Debido a la PROPOSICION 2.1, $h^n f(t)$ se puede interpretar también como la convolución de las funciones $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ y $f(t)$

Así tenemos la fórmula

$$\int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t)\,dt = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,d\tau$$

conocida como la fórmula de Cauchy.

DEFINICION 2.2

$$h^{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\,\alpha > 0.$$

PROPOSICION 2.2

$$h^{\alpha} h^{\beta} = h^{\alpha+\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \ \mathrm{Re}\,\beta > 0.$$

Demostración:

$$h^{\alpha} h^{\beta}(t) = \int_0^t h^{\alpha}(t-u)\, h^{\beta}(u)\,du$$

$$= \int_0^t \frac{(t-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{u^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}\,du^{(1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = h^{\alpha+\beta}(t).$$

(1) Véase Mathematical Methods in the Physical Sciences. Mary L. Boos. Editorial Wiley.

Observación:

Si α es un entero positivo, DEFINICION 2.2 se reduce a PROPOSICION 2.1.

h^{α} se considera como el operador de integración de orden fraccional α.

Todavía podemos extender más el operador h^{α}. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ hagamos

$$h^{\alpha} = \frac{h^{\alpha+n}}{h^{n}} \qquad (2.1)$$

donde n es el menor entero^{+} para el cual $\operatorname{Re} \alpha + n > 0$

Si $\operatorname{Re} \alpha > 0$ entonces $n = 1$ y (2.1) se reduce a DEFINICION 2.2.

Si $\alpha = -\beta$

$$1 = \frac{h^{\beta}}{h^{\beta}} = h^{\alpha} h^{\beta} = h^{-\beta} h^{\beta} = h^{0}$$

Como $h \in \mathcal{F}$, el inverso de h, $h^{-1} = \frac{b}{bh}$, $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, debe existir y pertenecer a $\mathcal{F}$. Como h es el operador de integración es lógico pensar que h^{-1} en cierta forma sea el operador de diferenciación.

Denotaremos $h^{-1} = s$.

PROPOSICION 2.3

$i)$ $s^{0} = 1$

$ii)$ $s^{\alpha} = h^{-\alpha}$

$iii)$ $s^{\alpha} s^{\beta} = s^{\alpha+\beta}$

DEFINICION 2.3

Sea a una función diferenciable y hagamos

$$a^{(k)}(t) = \frac{d^{k} a(t)}{dt^{k}}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Diremos que a posee n-ésima derivada localmente integrable si $a \in C^{n-1}$, $a^{(n-1)}$ es celularmente derivable.

Según el TEOREMA 1.4

$$\int_n^m a^{(k)}(u)\,du = a^{(k-1)}(m) - a^{(k-1)}(n), \qquad m, n \geq 0.$$

TEOREMA 2.1

Si a posee una derivada localmente integrable de orden n entonces

$$s^n a = a^{(n)} + a^{(n-1)}(0) + a^{(n-2)}(0)\,s + \cdots + a(0)\,s^{n-1}$$

Demostración:

Para $n = 1$

Como a' es localmente integrable, entonces

$$\int_0^t a'(u)\,du = a(t) - a(0) \implies a = a(0)h + a'h \implies sa = a' + a(0)$$

Supongamos que (2.2) es válido para $n-1$ es decir

$$s^{n-1}b = b^{(n-1)} + b^{n-2}(0) + b^{(n-3)}(0)\,s + \cdots + b(0)\,s^{n-2}$$

Suponiendo que b posee derivada localmente integrable de orden $n-1$

Como $a^{(n)}$ es localmente integrable, a' posee derivada localmente integrable de orden $n-1$

Escojamos $b = a'$,

$$s^{n-1} b = s^{n-1}[sa - a(o)] = s^n a - a(o) s^{n-1}$$

$$= a^{(n)} + a^{(n-1)}(o) + \cdots + a'(o) s^{n-2}$$

de donde

$$s^n a = a^{(n)} + a^{(n-1)}(o) + \cdots + a'(o) s^{n-2} + a(o) s^{n-1}$$

Observación:

Si a satisface las condiciones del TEOREMA 2.1 y además
$a(o) = a'(o) = \cdots = a^{(n-1)}(o) = 0$,
entonces $s^n a = a^{(n)}$

Si la condición de diferenciabilidad o las condiciones iniciales fallan, $s^n a$ no es una función, pero pertenece a $\mathfrak{F}$ siempre y cuando a también pertenezca. Así, consideraremos $s^n a$ como una derivada extendida de orden n de la función a pudiéndose de esta manera hablar de derivadas de objetos que no sean funciones necesariamente sino solo elementos del campo cociente.

El TEOREMA 2.1 no siempre se puede aplicar directamente como lo ilustraremos en el siguiente ejemplo. Primero consideraremos dos funciones que permitirán simplificar el ejemplo.

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$h_\alpha(x) = h^{\alpha-1} H(t-x), \qquad t>0,\ x>0,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

H representa la función de Heavyside.

Ejemplo 1:

Encontrar $S^2 f$ donde

$$f(t) = \phi(t+x) + \phi(|t-x|), \qquad x>0,\ \phi \in C^2$$

Según TEOREMA 2.1,

$$Sf = f' + f(0) = \phi'(t+x) + \phi'(|t-x|)\,\mathrm{sgn}\,(t-x) + 2\,\phi(x)$$

Hagamos

$$g(t) = \phi'(t+x) + \phi'(|t-x|)\,\mathrm{sgn}\,(t-x)$$

Si $\phi'(0) \neq 0$, g tiene una discontinuidad en $t = x$. Entonces consideremos

$$\Psi(t) = g(t) - 2\,\phi'(0)\,H(t-x)$$

Esta función es continua para toda t. Además

$$\Psi(0) = g(0) - 2\,\phi'(0)\,H(-x) = 0.$$

Según TEOREMA 2.1,

$$\begin{aligned} S\Psi &= S\left[g - 2\,\phi'(0)\,h_1(x)\right] \\ &= S\left[\phi'(t+x) + \phi'(|t-x|)\,\mathrm{sgn}\,(t-x) - 2\,\phi'(0)\,H(t-x)\right] \\ &= \phi''(t+x) + \phi''(|t-x|). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S^2 f = S\left[g + 2\,\phi(x)\right] = S\left[\Psi + 2\,\phi'(0)\,h_1(x) + 2\,\phi(x)\right]$$

$$= s\Psi + 2\phi'(0)\,h_1(x)\,s + 2\phi(x)s$$

$$= s\Psi + 2\phi'(0)\,h_1(x)\,h^{-1} + 2\phi(x)s$$

$$= s\Psi + 2\phi'(0)\,h_0(x) + 2\phi(x)s$$

$$= \phi''(t+x) + \phi''(|t-x|) + 2\phi'(0)\,h_0(x) + 2\phi(x)s$$

Observación:

Note que $sh = 1$ por lo que la función delta de Dirac es la derivada extendida de la restricción unitaria a la función de Heavyside.

PROPOSICION 2.3

$$(s-\alpha)^{-n}(t) = \frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}, \qquad n=1,2,\cdots,\ t>0,\ \alpha\in\mathbb{C}.$$

Demostración:

$$sa = a' + a(0)$$

Escojamos $a(t) = e^{\alpha t}$

$$s\,e^{\alpha t} = \alpha\,e^{\alpha t} + 1 \implies e^{\alpha t}(s-\alpha) = 1 \implies (s-\alpha)^{-1} = e^{\alpha t}$$

Supongamos que PROPOSICION 2.3 es válida para $n-1$

$$(s-\alpha)^{-n}(t) = (s-\alpha)^{-1}(s-\alpha)^{-n+1}(t)$$

$$= e^{\alpha t}\,\frac{t^{n-2}e^{\alpha t}}{(n-2)!}(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-u)}\,\frac{u^{n-2}e^{\alpha u}}{(n-2)!}\,du$$

$$= \frac{e^{\alpha t}}{(n-2)!}\int_0^t u^{n-2}\,du$$

$$= \frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}$$

DEFINICION 2.4

p es una función racional de s si

$$p = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_m s^m}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_n s^n}, \qquad \alpha_0, \ldots, \alpha_m, \beta_0, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C} \quad \beta_n \neq 0$$

Observación:

p es una función continua de t pues si $m \geq n$ se efectúa la división y se expresa como un polinomio en s más una función racional, cuyo numerador es un polinomio de grado menor que el polinomio que está en el denominador. Esta función racional se descompone utilizando el método de fracciones parciales y se expresa cada sumando, utilizando PROPOSICION 2.3, como suma de productos de polinomios en t con exponenciales.

Ilustraremos la observación anterior mediante un ejemplo.

Ejemplo 2:

Expresar $p(s) = \dfrac{\lambda s + \mu}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$ como una función continua de t.

$$\frac{\lambda s + \mu}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{A}{s + \alpha + \beta i} + \frac{\beta}{s + \alpha - \beta i}$$

$$= \frac{s(A+B) + A(\alpha - \beta i) + B(\alpha - \beta i)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$$

Resolviendo el sistema

$$A + B = \lambda$$

$$(\alpha - \beta i)A + (\alpha + \beta i)B = \mu$$

encontramos que las soluciones son:

$$A = \frac{\lambda\beta i - \mu + \lambda\alpha}{2\beta i} \quad , \qquad B = \frac{\mu - \lambda\alpha + \lambda\beta i}{2\beta i}$$

Por lo tanto

$$\frac{\lambda s + \mu}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{\lambda\beta i - \mu + \lambda\alpha}{2\beta i} e^{(-\alpha-\beta i)t} + \frac{\mu - \lambda\alpha + \lambda\beta i}{2\beta i} e^{(-\alpha+\beta i)t}$$

$$= \lambda \cos\beta t \, e^{-\alpha t} + \frac{\mu - \lambda\alpha}{\beta} \operatorname{sen}\beta t \, e^{-\alpha t}$$

y obtenemos entonces

$$\frac{\lambda s + \mu}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \lambda \cos\beta t \, e^{-\alpha t} + \frac{\mu - \lambda\alpha}{\beta} \operatorname{sen}\beta t \, e^{-\alpha t} \tag{2. 3}$$

Con lo visto hasta aquí podemos proceder a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes y sistemas de estas ecuaciones.

Consideremos la ecuación

$$\alpha_0 \, z^{(n)}(t) + \alpha_1 \, z^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_{n-1} \, z'(t) + \alpha_n \, z(t) = f(t) \tag{2.4}$$

y supongamos que $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ y $f \in \overline{\mathcal{R}}$.

La solución de (2. 4) debe poseer derivada n-ésima localmente integrable para aplicar el TEOREMA 2. 1 y

$$z^{(k)}(t) = s^k z - \sum_{j=1}^{k} z^{(k-j)}(0) \, s^{j-1} \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{2.5}$$

Sustituyendo (2. 5) en (2. 4) obtendremos

$$P(s) \, z = Q(s) + f$$

donde

$$P(s) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k} \, s^k \qquad\qquad Q(s) \doteq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n-k} \, z^{(k-j)}(0)$$

de donde

$$z = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{f}{P(s)}$$

Observación:

$Q(s)$ es un polinomio de grado $n-1$ y $P(s)$ un polinomio de grado n, entonces $\frac{Q(s)}{P(s)}$ puede calcularse utilizando el método de descomposición en fracciones parciales como se hizo en el ejemplo 2.

Lo mismo se hace para $\frac{1}{P(s)}$ y entonces $\frac{f}{P(s)}$ es la convolución de $\frac{1}{P(s)}$ y f

Observe que $Q(s)$ queda completamente determinado y consecuentemente Z si $Z(0), Z'(0), \dots, Z^{(n-1)}(0)$ son dados.

Resolveremos varias ecuaciones tratando de abarcar los más casos posibles.

Ejemplo 3:

Determine la función que satisface la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales.

$$Z''(t) - 2Z'(t) + (1+\alpha^2)Z(t) = (1+4\alpha^2)\cos\alpha t$$

con $Z(0) = 1$ y $Z'(0) = 0.$

Por TEOREMA 2.1

$$Z'' = s^2 Z - Z'(0) - Z(0)s = s^2 Z - s$$

$$Z' = sZ - Z(0) = sZ - 1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial obtendremos:

$$s^2 Z - s - 2\alpha Z + 2 + (1+\alpha^2)Z = (1+4\alpha^2)\cos\alpha t$$

$$Z = \frac{s + (1+4\alpha^2)\cos\alpha t - 2}{(s-1)^2 + \alpha^2}$$

y según el ejemplo 2

$$(1+4\alpha^2)\cos\alpha t = \frac{(1+4\alpha^2)s}{s^2+\alpha^2}$$

de donde

$$Z = \frac{s^3 - 2s^2 + (1+5\alpha^2)s - 2\alpha^2}{\left[(s-1)^2+\alpha^2\right](s^2+\alpha^2)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{s^3 - 2s^2 + (1+5\alpha^2)s - 2\alpha^2}{\left[(s-1)^2+\alpha^2\right](s^2+\alpha^2)} = \frac{As+B}{(s-1)^2+\alpha^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\alpha^2}$$

de donde obtenemos el sistema

$$A + C = 1$$
$$B - 2C + D = -2$$
$$A\alpha^2 + C(1+\alpha^2) - 2D = 1 + 5\alpha^2$$
$$B\alpha^2 + D(1+\alpha^2) = -2\alpha^2$$

cuyas soluciones son

$$A = 0, \quad B = 2\alpha^2, \quad C = 1, \quad D = -2\alpha^2,$$

de donde

$$Z = \frac{2\alpha^2}{(s-1)^2+\alpha^2} + \frac{s-2\alpha^2}{s^2+\alpha^2}$$

y utilizando el resultado del ejemplo 2 obtenemos finalmente

$$z(t) = 2\alpha e^t \operatorname{sen}\alpha t + \cos\alpha t - 2\alpha \operatorname{sen}\alpha t$$

que es la solución a la ecuación diferencial planteada.

Resolvamos ahora un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes y condiciones iniciales dadas.

Ejemplo 4

$$\begin{aligned} 2x' + y' - 3x &= 0 \\ x'' + y' - 2y &= e^{2t} \end{aligned} \qquad x(0) = -1,\ x'(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Según TEOREMA 2.1

$$x' = sx + 1$$

$$y' = sy$$

$$x'' = s^2 x + s - 1$$

de donde el sistema se transforma en el sistema

$$\begin{aligned} (2s-3)x + sy &= -2 \\ s^2 x + (s-2) y &= \frac{-s^2+3s-1}{s-2} \end{aligned}$$

Al resolver este sistema encontramos soluciones

$$x = \frac{-s^3+5s^2-9s+8}{(s-1)(s-2)(s^2-s+6)}, \qquad y = \frac{-5s^2+11s-3}{(s-1)(s-2)(s^2-s+6)}$$

Utilizando el método de descomposición en fracciones parciales, obtenemos

$$x = \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{4}}{s-2} + \frac{-\frac{3}{4}s + \frac{7}{4}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{23}{4}}$$

$$y = \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{8}}{s-2} + \frac{\frac{5}{8}s - \frac{39}{8}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{23}{4}}$$

y utilizando la PROPOSICION 2.3 y el ejemplo 2, obtenemos

$$x = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t + \frac{11}{4\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{23}}{2}t,$$

$$y = -\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t - \frac{73}{8\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{23}}{2}t$$

que es la solución del sistema planteado.

Hemos resuelto ya ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes y condiciones iniciales en $t=0$. Los métodos usados pueden ser utilizados para encontrar la solución general de la ecuación.

Se vió que la solución de (2.4) se puede escribir en la forma

$$z = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{f}{P(s)}$$

donde los coeficientes de $Q(s)$ dependen de las condiciones iniciales en $t=0$. Si estas condiciones iniciales no se dan, los coeficientes de Q son constantes arbitrarias y entonces el trabajo de descomponer $\frac{Q(s)}{P(s)}$ en fracciones parciales se simplifica bastante pues no se necesita calcular

en las fracciones

$$\frac{A}{(s-\lambda)^{J}} \quad , \quad \frac{B+Cs}{\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]^{K}}$$

que resultan de la descomposición de $\dfrac{Q(s)}{P(s)}$

Ejemplo 5:

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$z''' - 3az'' + 3a^2 z' - a^3 z = e^{at}$$

Sabemos por el TEOREMA 2.1 que

$$z''' = s^3 z - z''(0) - z'(0)s - z(0)s^2$$

$$z'' = s^2 z - z'(0) - z(0)s$$

$$z' = sz - z(0)$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial obtendremos:

$$s^3 z - 3as^2 z + 3a^2 sz - a^3 z = U + e^{at}$$

donde U es un polinomio de segundo grado en s dado por

$$U(s) = \sum_{J=0}^{2} z^{(J)}(0)\, s^{2-J} - 3a \sum_{J=0}^{1} z^{(J)}(0)\, s^{1-J} + 3a^2 z(0)$$

Entonces

$$Z = \frac{U}{s^3 - 3as^2 + 3a^2s - a^3} + \frac{1}{s^3 - 3as^2 + 3a^2s - a^3} e^{at}$$

$$= \frac{U}{(s-a)^3} + \frac{1}{(s-a)^4}$$

$$= \frac{A}{s-a} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{(s-a)^3} + \frac{1}{(s-a)^4}$$

$$= Ae^{at} + Bte^{at} + \frac{1}{2}Ct^2 e^{at} + \frac{1}{6}t^3 e^{at},$$

de donde

$$Z(t) = \left(A + Bt + \frac{1}{2}Ct^2 + \frac{1}{6}t^3\right) e^{at}$$

es la solución general de la ecuación.

En el caso de ecuaciones diferenciales con condiciones en la frontera, se busca la solución general de la ecuación y utilizando las condiciones en la frontera se construye un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son las constantes $A, B, C, \ldots$ de las fracciones

$$\frac{A}{(s-\lambda)^J} \quad y \quad \frac{Bs + C}{\left[(s-\alpha)^2 + \beta^2\right]^K}$$

En algunos casos el sistema de ecuaciones no tiene solución y entonces la ecuación diferencial bajo las condiciones dadas no tiene solución. En general la existencia de la solución bajo condiciones dadas se reduce a la existencia de solución del sistema.

Ejemplo 6:

Resolver la ecuación diferencial con condiciones en la frontera dadas.

$$x'' - x = 0 \quad , \qquad x(0) = 0 \ , \quad x(2\pi) = 1$$

Utilizando el TEOREMA 2.1 la ecuación diferencial se transforma en la ecuación

$$s^2 x - x = U$$

donde U es un polinomio en s de grado 1 .

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \frac{U}{s^2 - 1} = A e^{-t} + B e^{t}$$

Ahora utilizando las condiciones en la frontera, formamos el sistema

$$A + B = 0$$
$$A e^{-2\pi} + B e^{2\pi} = 1$$

cuyas soluciones son:

$$A = \frac{1}{e^{-2\pi} - e^{2\pi}} , \qquad B = \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}$$

de donde

$$x(t) = \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} e^{t} - \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} e^{-t}$$

$$x(t) = \frac{sh\, t}{sh\, 2\pi}$$

es la solución a la ecuación diferencial dada.

Cuando se busca la solución de una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes y condiciones iniciales en $t \neq 0$ se utiliza el mismo procedimiento que para las ecuaciones con condiciones iniciales en $t = 0$. Lo único que hay que tener cuidado es en trasladar los ejes al punto donde se dan las condiciones iniciales.

Ejemplo 7:

Determine la función que satisface la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales

$$z'' + 3z' + 2z = 2t\, e^{-t} , \qquad z(1) = z'(1) = 0.$$

Utilizando el TEOREMA 2.1 y haciendo $t=\tau+1$ la ecuación diferencial se transforma en

$$s^2 z + 3sz + 2z = 2(\tau+1)e^{-(\tau+1)}$$

$$z = \left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right]\left[2(\tau+1)e^{-(\tau+1)}\right]$$

Como

$$\frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = e^{-\tau} - e^{-2\tau}$$

de donde

$$z(t) = 2\left[e^{-\tau} - e^{-2\tau}\right]\left[(\tau+1)e^{-(\tau+1)}\right]$$

$$= 2\int_0^{\tau}(\nu+1)e^{-(\nu+1)}\left[e^{-(\tau-\nu)} - e^{-2(\tau-\nu)}\right]d\nu$$

$$= 2\int_0^{\tau}(\nu+1)e^{-(\tau+1)}d\nu - 2\int_0^{\tau}(\nu+1)e^{\nu-2\tau-1}d\nu$$

$$= \tau^2 e^{-(\tau+1)} + 2\tau e^{-(\tau+1)}(\tau+1) - e^{-(\tau+1)} - e^{-(2\tau+1)} + e^{-(2\tau+1)}$$

$$= \tau^2 e^{-(\tau+1)}$$

y como $t=\tau+1 \Longrightarrow \tau = t-1$, por lo que

$$z(t) = (t-1)^2 e^{-t}$$

es la solución a la ecuación diferencial dada.