

TESIS # 55

HIPERESPACIOS SUAVES POR ARCOS

JOSE LUIS CISNEROS MOLINA



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

LIBRERIA

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quiero dar todo mi agradecimiento y cariño a mi padre, el Sr. José Luis Cisneros García, pues es a él a quien debo todas las enseñanzas que me han servido para lograr mis objetivos y llegar hasta donde ahora me encuentro. Durante toda su vida, nunca dudó en hacer lo necesario para mostrarme el camino correcto, a pesar de que no pudiera comprenderlo hasta mucho tiempo después. Su apoyo siempre ha sido incondicional, brindándome lo necesario, no importando que tanto costara el conseguirlo. Quiero agradecer también su apoyo a mi hermana Myriam, quien siempre ha estado a mi lado en todo momento, en tiempos difíciles, tanto como en los de prosperidad. Generalmente cuando hacemos algo, lo hacemos para alguien, esta tesis es para ellos dos.

Agradezco también a Malú (Dra. Ma. Luisa Pérez Seguí) y a Alejandro (Dr. Alejandro Illanes Mejía) el haberme propuesto el tema, su asesoría durante el desarrollo del trabajo y su ayuda en muchos aspectos no solamente académicos. Gracias también a la Universidad de Sonora y a la Dirección General de Intercambio Académico, por que gracias al convenio que tienen establecido me otorgaron la beca tesis que me ayudó durante mi estancia en la ciudad de Morelia; en especial al M. C. Marco Antonio Valencia Arvizu, Rector de la UNISON, por haberme apoyado para conseguir la beca; y al Lic. Agustín Santiago de Intercambio Académico por sus finas atenciones.

Doy gracias también al M. C. Luis Manuel Rivera, Director de la Escuela de Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por brindarme todas las facilidades para realizar el trabajo en dicha universidad.

Por último quiero agradecer a: Gerardo (Dr. Gerardo Raggi Cárdenas), sus explicaciones sobre la escritura de la tesis y su asesoría sobre cuestiones de cómputo; Hector, el haberme prestado su computadora; Paulina, por toda su ayuda, incluyendo las figuras de la tesis; y a Eddy, Mary, Eduardo y Juan Carlos, por su apoyo y ayuda incondicionales.

INTRODUCCION

El presente trabajo se desarrolla dentro de la Teoría de Hiperespacios, en la cual se trabaja con un tipo de espacios topológicos denominados continuos, a partir de los cuales se obtienen dos nuevos espacios a los que llamamos hiperespacios del continuo. El objetivo principal consiste en estudiar una propiedad llamada suavidad por arcos y ver que tipos de continuos tienen hiperespacios suaves por arcos. En el capítulo 0 damos los preliminares necesarios sobre los cuales se basan los capítulos posteriores, definiendo lo que es un continuo y sus hiperespacios, así como dando la definición de mapeo de Whitney y arco ordenado, además se ven algunos lemas técnicos que se emplean con frecuencia más adelante.

En el capítulo 1 se define la suavidad por arcos y se demuestra la existencia de dos tipos de funciones especiales: las parametrizaciones uniformes y las contracciones libres, que nos permiten interpretar a la suavidad por arcos de dos maneras muy útiles. Posteriormente se dan algunos ejemplos y se introduce un tipo de continuos llamados dendroides.

En el siguiente capítulo se demuestra que los continuos suaves por arcos tienen hiperespacios suaves por arcos; en el capítulo 3 se prueba que los hiperespacios de los continuos localmente conexos son suaves por arcos en cada uno de sus puntos y en el capítulo 4 vemos que los continuos hereditariamente indescomponibles no son suaves por arcos, mientras que sus hiperespacios poseen dicha propiedad.

En el capítulo 5 definimos los niveles de Whitney, las propiedades de Whitney y los mapeos de Whitney admisibles, se muestra además que la suavidad por arcos no es una propiedad de Whitney y se dan condiciones suficientes para que un continuo suave por arcos tenga niveles de Whitney suaves por arcos. Posteriormente se construye un mapeo de Whitney para el cual todos sus niveles son suaves por arcos y se demuestra que la suavidad por arcos es una propiedad de Whitney para la clase de los dendroides suaves por arcos.

CAPITULO 0

PRELIMINARES

En este capítulo vamos a ver las definiciones y resultados básicos de la Teoría de Hiperspacios sobre los cuales se desarrollará el trabajo; únicamente incluiremos algunas de las demostraciones; para mayores detalles se pueden consultar [1] o [2].

Denotaremos por I al intervalo $[0, 1]$, por N a los números naturales, y por R^n al espacio euclidiano n -dimensional.

En la Teoría de Hiperspacios se trabaja con un tipo especial de espacios topológicos denominados continuos, éstos poseen ciertas propiedades que los hacen muy "manejables". Su definición formal es la siguiente:

Def: Un *continuo* es un espacio métrico no vacío compacto y conexo no degenerado. Un subespacio de un continuo que sea, a su vez, continuo, se llama *subcontinuo*.

A menos que se indique explícitamente lo contrario, a lo largo de todo el trabajo. X denotará un continuo con más de un punto y d será una métrica para X .

Los hiperspacios de un continuo son dos nuevos espacios cuyos elementos son subconjuntos del continuo en cuestión. Los hiperspacios que estudiaremos son los siguientes:

$$2^X = \{\emptyset \neq A \subset X | A \text{ es compacto}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X | A \text{ es continuo}\}$$

A 2^X se le conoce como el *Hiperspacio Básico de X* y $C(X)$ es el *Hiperspacio de subcontinuos de X* . A continuación definiremos algunos subconjuntos especiales de X , que nos serán útiles posteriormente.

Def: Para $a \in X$ y $\epsilon \geq 0$ definimos

(1) La *bola abierta* con centro en a y radio ϵ

$$B_d(a, \epsilon) = \{x \in X | d(a, x) < \epsilon\}. \quad (0, a)$$

(2) La *bola cerrada* con centro en a y radio ϵ

$$C_d(a, \epsilon) = \{x \in X | d(a, x) \leq \epsilon\}. \quad (0, b)$$

De manera mas general, si $A \in 2^X$ y $\epsilon \geq 0$

(3) La *nube abierta* de A de radio ϵ

$$N_d(A, \epsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \epsilon). \quad (0, c)$$

(4) La nube cerrada de A de radio ϵ

$$K_d(A, \epsilon) = \bigcup_{a \in A} C_d(a, \epsilon). \quad (0, d)$$

Es fácil demostrar que $K_d(A, \epsilon)$ es cerrado en X . Nótese también que para cualquier $a \in X$, $N_d(\{a\}, \epsilon) = B_d(a, \epsilon)$ y $K_d(\{a\}, \epsilon) = C_d(a, \epsilon)$, que para cualquier $A \in 2^X$, $N_d(A, 0) = \emptyset$ y $K_d(A, 0) = A$.

Ahora vamos a dar a 2^X la métrica de Hausdorff $\mathcal{H}$ inducida por d , definida de la siguiente manera:

Para $A, B \in 2^X$ la distancia en 2^X entre ellos es

$$\mathcal{H}_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \epsilon)\}. \quad (0, \epsilon)$$

En general omitiremos el subíndice de las definiciones anteriores, escribiéndolo únicamente cuando sea necesario por razones de claridad. Por otro lado, cuando se esté trabajando con mas continuos aparte de X denotaremos por $\mathcal{H}_X$ a la métrica de Hausdorff inducida por la métrica en X .

Como $C(X) \subset 2^X$, a $C(X)$ lo veremos como subespacio de 2^X con la métrica de Hausdorff. De ahora en adelante consideraremos a 2^X y a $C(X)$ con la topología obtenida de dicha métrica. Nótese además que $X \cong \{\{x\} \mid x \in X\} \subset C(X)$, por lo que pensaremos a X como subespacio de $C(X)$.

Una vez que hemos dotado a los hiperespacios de una métrica, veamos cómo se define la convergencia en ellos.

Def: Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X . Entonces definimos

$$\liminf A_n = \{x \in X \mid \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal} \quad (0, f)$$

$$\text{que } B(x, \epsilon) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para toda } n > N\}$$

$$\limsup A_n = \{x \in X \mid \text{para toda } \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A_n \neq \emptyset \quad (0, g)$$

$$\text{para una infinidad de } n\text{'s}\}$$

Se demuestra que la convergencia en 2^X de una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ a un A equivale a que $A = \liminf A_n = \limsup A_n$. Es fácil darse cuenta que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Por lo tanto, para demostrar que una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un $A \in 2^X$, basta ver que $\limsup A_n \subset A \subset \liminf A_n$.

Lema 0.1: Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en 2^X que convergen a A y a B respectivamente. Si $A_n \subset B_n$ para una infinidad de n 's, entonces $A \subset B$. En particular, si $A_n \rightarrow A$ y $x_n \rightarrow x$, tal que $x_n \in A_n$, entonces $x \in A$.

Dem: Como $A_n \rightarrow A$ entonces la subsucesión $(A_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $A_{n_k} \subset B_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ también converge a A . Sean $x \in A$ y $\epsilon > 0$, entonces $B(x, \epsilon)$ intersecta a una infinidad de A_{n_k} y por lo tanto a una infinidad de B_{n_k} , por lo que $x \in \limsup B_{n_k} = B$ (por que $B_n \rightarrow B$). Por lo tanto $x \in B$ y $A \subset B$. Para el caso de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ basta aplicar lo anterior a las sucesiones $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$. ■

Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ resultan ser continuos. Para ver que 2^X es compacto, se demuestra que toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión de Cauchy y que toda sucesión de Cauchy en 2^X converge. Posteriormente se prueba que $C(X)$ es cerrado en 2^X y, por lo tanto, compacto. Discutiremos ahora algunos conceptos relacionados con la conexidad de los hiperespacios y que constituyen una herramienta muy útil en el estudio de los hiperespacios. El concepto principal es el de mapeos de Whitney que es una especie de medida para los elementos de 2^X y de $C(X)$.

Def: Un mapeo de Whitney para un hiperespacio H es una función continua $\mu: H \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades

- (1) $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$.
- (2) $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subsetneq B$.

Para ver la existencia de mapeos de Whitney para 2^X y $C(X)$ se pueden consultar las referencias antes señaladas, donde se construyen varios de ellos. Emplearemos este tipo de mapeos frecuentemente a lo largo de todo el trabajo, pero sin referirnos específicamente a ninguno de ellos en particular, sino haciendo uso exclusivamente de las propiedades que cumplen. En el capítulo 6 se verán otros conceptos relativos a los mapeos de Whitney y en el Teorema 6.9 construiremos un mapeo de Whitney con ciertas características especiales.

Otros conceptos de mucha importancia en el estudio de los hiperespacios son los de arco y arco ordenado.

Def: Un arco es un homeomorfismo ς del intervalo I . Por extensión llamaremos también arco a la imagen de un homeomorfismo ς , con el entendimiento de que el contexto aclarará de cual de los dos se trata. Los puntos extremos de un arco son los puntos $\varsigma(0)$ y $\varsigma(1)$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Un arco ordenado de A a B (es decir, con punto inicial A y punto final B) es una función $\varsigma: I \rightarrow 2^X$ tal que $\varsigma(0) = A$ y $\varsigma(1) = B$ y tal que si $s < t$ entonces $\varsigma(s) \subsetneq \varsigma(t)$; llamaremos también arco ordenado a la imagen $\varsigma(I)$ de dicha función.

La existencia de arcos ordenados en 2^X está garantizada por el siguiente teorema, al cual haremos referencia en varias ocasiones posteriormente. La demostración del teorema utiliza la existencia de mapeos de Whitney.

Teorema 0.2: Sean A y $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces son equivalentes

- (1) Existe un arco ordenado en 2^X de A a B .
- (2) Cada componente de B intersecta a A .

Como X es conexo, si $A \in 2^X$, tenemos que $A \subset X$ y por lo tanto se cumple (2) para $B = X$, lo que implica que existe un arco ordenado de A a X para toda $A \in 2^X$. Así 2^X es conexo por trayectorias y, por lo tanto, conexo.

Lema 0.3: Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado con punto inicial $A_0 \in C(X)$, entonces $\mathcal{A} \subset C(X)$.

Dem: Sea $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \neq A_0$. Sea B el subarco ordenado de $\mathcal{A}$ con extremos A_0 y B . Por el Teorema 0.2 tenemos que toda componente de B intersecta a A_0 , como A es conexo y $A \subset B$, entonces existe una componente K de B que contiene a A , pero toda componente de B intersecta a A y las componentes son ajenas entre sí, así que la única componente de B es K , por lo tanto B es conexo y $\mathcal{A} \subset C(X)$. ■

Por el Lema anterior, tenemos que si $A \in C(X)$, entonces el arco ordenado de A a X está contenido en $C(X)$; esto prueba que $C(X)$ es conexo por trayectorias y, por lo tanto, conexo. De lo anterior concluimos que 2^X y $C(X)$ son continuos conexos por trayectorias.

Para algunos continuos, es posible hacer modelos geométricos para $C(X)$, encontrando un homeomorfismo entre $C(X)$ y algún espacio conocido. El siguiente ejemplo es muy sencillo, pero nos ayudará a visualizar muchos de los conceptos que hemos visto.

Ejemplo 0.4: Sea $I = [0, 1]$. Entonces $C(I)$ está formado por todos los intervalos cerrados $[a, b] \subset [0, 1]$ y los conjuntos de un solo punto que denotaremos por $[x, x]$ para $x \in I$. Definimos la función $f: C(I) \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$f([a, b]) = \left(\frac{a+b}{2}, b-a \right)$$

es decir, a cada subintervalo $[a, b]$ de I , le asignamos como coordenadas su punto medio y su longitud. Se puede verificar fácilmente que f es un homeomorfismo entre $C(I)$ y su imagen, que resulta ser un triángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

- (1) La imagen de I es el vértice superior del triángulo, ya que

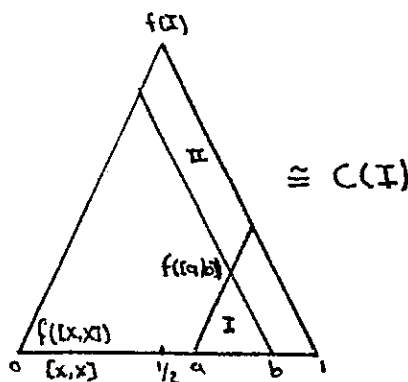
$$f(I) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

- (2) La base del triángulo está formada por la imagen de los conjuntos de un solo punto, porque

$$f([x, x]) = (x, 0)$$

para toda $x \in I$.

- (3) Si tomamos $[a, b] \in C(I)$ y trazamos líneas rectas de los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$ al punto $f([a, b])$, como se muestra en la fig. 1, tenemos que los intervalos que están contenidos en $[a, b]$ son los que se encuentran en el triángulo I y los intervalos que contienen a $[a, b]$ son los que están en la región II, por lo tanto, cualquier arco ordenado de $[a, b]$ a I estará contenido en II (pero no todo arco en II es ordenado).



En el caso de 2^X no podemos encontrar modelos geométricos, ya que estos espacios son muy complejos; simplemente, para el intervalo I , tenemos que $2^I \cong Q$, donde Q es el producto cartesiano de I consigo mismo una cantidad numerable de veces. A Q se le llama *cubo de Hilbert*.

A continuación daremos un poco de notación y veremos algunas definiciones y resultados que emplearemos más adelante.

Sea A un subconjunto de X . Denotaremos su interior, su frontera y su cerradura por A° , ∂A y $\bar{A}$ respectivamente.

Def: Sea $A \subset X$. El diámetro de A , denotado por $diam(A)$, está definido por

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\} \quad (0, h)$$

Por simplicidad en todo el trabajo supondremos que $diam(X) = 1$, mientras no se especifique de otra manera.

Def: Para $x \in X$ y $A \in 2^X$, definimos

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\} \quad (0, i)$$

Lema 0.5: Sea B un subcontinuo con más de un punto de 2^X . Entonces B es un arco ordenado si y sólo si dados A y $B \in \mathcal{B}$ se tiene $A \subset B$ o $B \subset A$.

Dem: $\Rightarrow$ Obvio a partir de la definición de arco ordenado.

$\Leftarrow$ Sea μ un mapeo de Whitney sobre 2^X y sea μ_0 la restricción de μ a B . Veamos que μ_0 es 1 a 1. Sean A y $B \in \mathcal{B}$ con $A \neq B$. Entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Supongamos lo primero; entonces $\mu_0(A) < \mu_0(B)$ y por lo tanto $\mu_0(A) \neq \mu_0(B)$, por lo que μ_0 es inyectiva. Además, como μ_0 va de un compacto a un Hausdorff es homeomorfismo en la imagen. Como B es un subcontinuo no degenerado de 2^X , $\mu_0(B)$ es un intervalo cerrado de $[0, \infty)$. Por lo tanto B es un arco y, por la hipótesis, un arco ordenado. ■

Lema 0.6: si A y $B \in 2^X$ y $\mathcal{H}(A, B) = \eta$ entonces $A \not\subset N(B, \eta)$ o $B \not\subset N(A, \eta)$.

Dem: Supongamos lo contrario; es decir que $A \subset N(B, \eta)$ y que $B \subset N(A, \eta)$. Sea $r = \sup\{d(x, B) | x \in A\}$. Como A es compacto, existe $x_0 \in A$ tal que $d(x_0, B) = r$. Claramente $r < \eta$ o de lo contrario $A \not\subset N(A, \eta)$. Sea $\eta_1 = \frac{r+\eta}{2}$. Como $d(x, B) \leq r < \eta_1 < \eta$ para toda $x \in A$, tenemos que $A \subset N(B, \eta_1)$. Mediante un razonamiento análogo, podemos encontrar $\eta_2 < \eta$ tal que $B \subset N(A, \eta_2)$. Si hacemos $\eta_0 = \max\{\eta_1, \eta_2\}$, entonces $\eta_0 < \eta$ y tenemos que $A \subset N(B, \eta_0)$ y $B \subset N(A, \eta_0)$, lo que contradice la definición de η . ■

Lema 0.7: La función unión $\bigcup: 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ definida por $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ para $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ es continua.

Dem: Primero mostraremos que $\bigcup$ manda a 2^{2^X} en 2^X . Sea $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$; para ver que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es compacto, es suficiente, por la compacidad de X , ver que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es un subconjunto cerrado de X . Supongamos que $x_0 \in X$ es un punto límite de $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$; entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ que converge a x_0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es compacto, existe una subsucesión $(A_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(A_n)_{n=1}^\infty$ que converge a un $A_0 \in \mathcal{A}$. Como $x_{n_k} \in A_{n_k}$, por el Lema 0.1 $x_0 \in A_0$ y, como $A_0 \in \mathcal{A}$, entonces $x_0 \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$; por lo tanto $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es cerrado y por consiguiente, compacto. Como $\mathcal{A}$ es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos, tenemos que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$. Por lo tanto $\bigcup$ manda a 2^{2^X} en 2^X .

Para ver que es continua, basta ver que para cada $\mathcal{A}$ y B en 2^{2^X}

$$\mathcal{H}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right) \leq \mathcal{H}^2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

donde $\mathcal{H}^2$ es la métrica de Hausdorff para 2^{2^X} inducida por la métrica $\mathcal{H}$ para 2^X . Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en 2^{2^X} . Sean $A_0 = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ y $B_0 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Por la parte anterior, tenemos que

A_0 y $B_0 \in 2^X$. Sea $\eta = \mathcal{H}(A_0, B_0)$. Entonces por el Lema 0.6 suponemos sin pérdida de generalidad que $A_0 \not\subset N(B_0, \eta)$, por lo que existe $p \in A_0$ tal que

$$d(p, x) \geq \eta \quad \text{para toda } x \in B_0. \quad (*)$$

Como $p \in A_0 = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, existe $A_p \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A_p$. Entonces, se sigue de (*) que $A_p \not\subset N(B, \eta)$ para ninguna $B \in \mathcal{B}$ y, de la definición de $\mathcal{H}$, tenemos que $\mathcal{H}(A_p, B) \geq \eta$ para toda $B \in \mathcal{B}$, es decir, $A_p \notin N_{\mathcal{H}}(\mathcal{B}, \eta)$ y como $A_p \in \mathcal{A}$ tenemos que $\mathcal{A} \not\subset N_{\mathcal{H}}(\mathcal{B}, \eta)$. Concluimos que $\mathcal{H}^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq \eta$ y, por lo tanto, que

$$\mathcal{H}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right) = \mathcal{H}(A_0, B_0) = \eta \leq \mathcal{H}^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

probando con esto la continuidad de $\bigcup$. ■

Lema 0.8: Si cualquier subsucesión convergente $(x_{n_k})_k$ de una sucesión $(x_n)_n \subset X$ converge a $x_0 \in X$, entonces $x_n \rightarrow x_0$.

Dem: Probaremos que si $(x_n)_n$ no converge a x_0 , entonces existe una subsucesión convergente $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x \neq x_0$. Como x_n no converge a x_0 , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $N \in \mathbb{N}$, existe $n > N$ con $d(x_n, x_0) \geq \epsilon$. Definimos la subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_{k-1} \text{ y } d(x_n, x_0) \geq \epsilon\}$. Como X es compacto, podemos encontrar una subsucesión convergente $(x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ de $(x_{n_k})_k$ tal que $x_{n_{k_l}} \rightarrow x \in X$. Claramente $x \neq x_0$ porque hay una contradicción con la hipótesis. ■

CAPITULO 1

SUAVIDAD POR ARCOS

Una vez vistos los preliminares necesarios, podemos comenzar nuestro estudio de la suavidad por arcos en los hiperespacios de ciertos continuos. Primeramente veamos algunas definiciones y ejemplos.

Def: Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es suave por arcos en p si existe una función $\alpha : X \rightarrow C(X)$ que satisface las siguientes condiciones:

Condición de arcos. $\alpha(p) = \{p\}$ y para cada $x \in X - \{p\}$, $\alpha(x)$ es un arco de p a x .

Condición de suavidad. α es continua.

Condición de compatibilidad. Si $y \in \alpha(x)$, entonces $\alpha(y) \subset \alpha(x)$.

Un continuo es suave por arcos si es suave por arcos en algún punto.

Denotaremos el arco $\alpha(x)$ por $[p, x]$. Si $y, z \in [p, x]$ y $y \in \alpha(z)$, denotaremos por $[y, z]$ el subarco de $[p, x]$ que va de y a z .

El símbolo (X, p) denotará un continuo que es suave por arcos en p .

Una consecuencia de la definición anterior es que todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ son suaves por arcos en cada uno de sus puntos. Así mismo, el cubo de Hilbert es suave por arcos en todos sus puntos.

Ejemplo 1.1: En el Ejemplo 0.3, vimos que $C(I)$ es homeomorfo a un triángulo que, por ser convexo, es suave por arcos en cada uno de sus puntos. El hecho que $C(I)$ sea suave por arcos se verá confirmado por dos teoremas que probaremos en los capítulos 2 y 3. $\square$

Ejemplo 1.2: Sea S^1 la circunferencia unitaria. Veamos que S^1 no es suave por arcos. Supongamos que es suave por arcos en algún punto p ; entonces existe una función α que cumple las condiciones de la definición. Para cualquier $x \in S^1$, tenemos que $\alpha(x)$ es uno de los dos arcos que unen a x con p (el de la izquierda o el de la derecha). Recorriendo a S^1 a partir de p en el sentido de las manecillas del reloj, escojemos al punto x_0 , como el punto más alejado de p (haciendo el recorrido en el sentido señalado) para el cual $\alpha(x_0)$ es el arco de la izquierda, es decir, si tomamos un punto x_1 diferente de x_0 en el arco que une a x_0 con p por la derecha (que denotaremos por A) tenemos que $\alpha(x_1)$ es el arco de la derecha, como se muestra en la fig 2.

Tomamos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A tal que $x_n \rightarrow x_0$, pero tenemos que $\alpha(x_n) \not\rightarrow \alpha(x_0)$ porque los $\alpha(x_n)$ son arcos que unen a x_n con p por la derecha para toda n , y $\alpha(x_0)$ es un arco de x_0 a p por la izquierda, lo que contradice la continuidad de α . Por lo tanto S^1 no es suave por arcos. $\square$

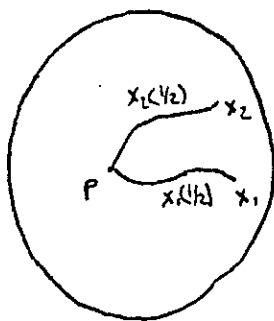
Si tenemos un continuo X que es suave por arcos, podemos definir ciertas funciones de $X \times I$ a X que parametrizan a X , una interpretación física de esto podría ser la siguiente: como X es suave por arcos, existe una función α que cumple con las condiciones de la definición, por lo tanto, para cada x en el continuo, $\alpha(x)$ es un arco de x a un punto p . Lo que hacen las parametrizaciones, es que cualquier punto x en X recorra el arco $\alpha(x)$ en un "tiempo" igual a 1. Dependiendo de la "velocidad" con que un punto x recorra su arco, podemos definir dos tipos de parametrizaciones.

Def: Una parametrización uniforme para (X, p) es una función continua $\Psi: X \times I \rightarrow X$ que satisface:

- (1) Para cada $t \in I$, $\Psi(p, t) = p$.
- (2) Para cada $x \in X - \{p\}$, $\Psi(\{x\} \times I) = [p, x]$ y $\Psi|_{\{x\} \times I}$ es un homeomorfismo con $\Psi(x, 0) = p$ y $\Psi(x, 1) = x$.
- (3) Para cada $x \in X$ y $s, t \in I$, $\Psi(\Psi(x, s), t) = \Psi(x, st)$.

Si Ψ es una parametrización uniforme de (X, p) , denotaremos $\Psi(x, t)$ por $x(t)$.

En la parametrización uniforme, cada punto x hace el recorrido empezando en el punto p ($t = 0$) y terminándolo en x ($t = 1$), con una velocidad constante, es decir, cuando $t = \frac{1}{2}$ se encuentra a la mitad de su recorrido, cuando $t = \frac{3}{4}$ ha caminado las tres cuartas partes del arco; de esta manera los puntos cuyo arco es largo, tendrán que ir con "mayor velocidad" que los puntos cuyo arco es mas corto (fig 3).



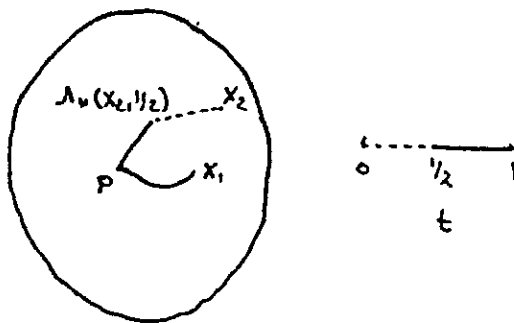
**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

El otro tipo de parametrización es el siguiente.

Def: Una *contracción libre* de un espacio X a un punto $p \in X$ es una función continua $\Lambda: X \times I \rightarrow X$ que satisface:

- (1) Para cada $x \in X$, $\Lambda(x, 0) = x$.
- (2) Para cada $x \in X$, $\Lambda(x, 1) = p$.
- (3) Para cada $x \in X$ y $s, t \in I$, $\Lambda(\Lambda(x, s), t) = \Lambda(x, \max\{s, t\})$.

En esta función cada punto x hace su recorrido de hacia p de modo que parece que el continuo X se contrae hasta quedar solamente el punto p ; de hecho una contracción libre es una contracción, por lo tanto, al probar su existencia en los continuos suaves por arcos, estamos también demostrando que los continuos suaves por arcos son contraíbles. En las contracciones libres, el recorrido también se completa en un "tiempo" igual a 1, y además todos los puntos lo hacen con la misma velocidad; para que esto sea posible, los puntos cuyo arco "mide" poco, "esperan" a que los puntos con arco más largo avancen hasta que les falte por recorrer la misma "distancia" que a ellos y a partir de entonces, se van juntos con la misma "velocidad". Un ejemplo concreto es el siguiente. Supongamos que el arco del punto x_1 "mide" $\frac{1}{2}$ unidad, que el arco del punto x_2 "mide" una unidad y que ambos "caminan" a una velocidad de una unidad por segundo; entonces, mientras el punto x_2 recorre la mitad de su arco para tiempos de 0 a $\frac{1}{2}$, el punto x_1 se espera en el mismo lugar; en el tiempo $t = \frac{1}{2}$, a ambos puntos les queda por recorrer $\frac{1}{2}$ unidad de camino; a partir de entonces ambos siguen con la misma velocidad de una unidad por segundo, hasta llegar a p (fig 4).



La existencia de parametrizaciones uniformes en los continuos suaves por arcos queda demostrada en el siguiente teorema.

Teorema 1.3: Sea (X, p) un continuo suave por arcos. Entonces existe una parametrización uniforme Ψ para (X, p) .

Dem: Sea ν un mapeo de Whitney. Como (X, p) es un continuo suave por arcos, existe una función $\alpha: X \rightarrow C(X)$ que cumple con las propiedades que definen a un continuo suave por

arcos. Definimos $\Psi: X \times I \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$\Psi(x, t) = y \text{ donde } y \text{ es el \uacute{nico elemento de } \alpha(x) \text{ tal que } \nu(\alpha(y)) = t\nu(\alpha(x)) \quad (1.a)$$

Como ν y α son continuas y $0 \leq t\nu(\alpha(x)) \leq \nu(\alpha(x))$, la existencia de y est\u00e1 garantizada por el Teorema del Valor Intermedio. Veamos ahora que y es \u00fanica; para ello, supongamos que existen y y y_0 puntos distintos en $\alpha(x)$ tales que $\nu(\alpha(y)) = \nu(\alpha(y_0)) = t\nu(\alpha(x))$. Como $y, y_0 \in \alpha(x)$, entonces $y \in \alpha(y_0)$ o $y_0 \in \alpha(y)$. Supongamos lo primero; entonces $\alpha(y) \subsetneq \alpha(y_0)$, por lo tanto $\nu(\alpha(y)) < \nu(\alpha(y_0))$, contradiciendo nuestra suposici\u00f3n. Por lo tanto y es \u00fanica.

Para ver que Ψ es continua tomemos una sucesi\u00f3n $((x_n, t_n))_{n=1}^{\infty}$ en $X \times I$ tal que $(x_n, t_n) \rightarrow (x_0, t_0)$. Sean $y_n = \Psi(x_n, t_n)$ y $y_0 = \Psi(x_0, t_0)$. Tomemos una subsucesi\u00f3n $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que converja a un $z \in X$. Tenemos que $y_{n_k} \in \alpha(x_{n_k})$. Como α es continua, $\alpha(x_{n_k}) \rightarrow \alpha(x_0)$, por lo tanto $z \in \alpha(x_0)$. De la definici\u00f3n de Ψ tenemos que $\nu(\alpha(y_{n_k})) = t_{n_k}\nu(\alpha(x_{n_k}))$ y, como $\nu \circ \alpha$ es continua, $\nu(\alpha(y_{n_k})) \rightarrow \nu(\alpha(z))$. Por otro lado, $t_{n_k}\nu(\alpha(x_{n_k})) \rightarrow t_0\nu(\alpha(x_0))$, por lo tanto $\nu(\alpha(z)) = t_0\nu(\alpha(x_0))$. Como el elemento de $\alpha(x_0)$ que cumple lo anterior es \u00fanico, tenemos que $z = y_0$ y, por el Lema 0.8, $y_n \rightarrow y_0$. Por lo tanto Ψ es continua.

Ahora veamos que Ψ cumple que $\Psi(\Psi(x, s), t) = \Psi(x, st)$. De la definici\u00f3n de Ψ , tenemos que $\nu(\alpha(\Psi(x, s))) = s\nu(\alpha(x))$; aplicando nuevamente Ψ a $\Psi(x, s)$ tenemos que

$$\nu(\alpha(\Psi(\Psi(x, s), t))) = t\nu(\alpha(\Psi(x, s))) = ts\nu(\alpha(x)) = \nu(\alpha(\Psi(x, st))),$$

demonstrando as\u00ed la existencia de parametrizaciones uniformes para (X, p) . ■

El siguiente Lema, nos ser\u00e1 \u00fatil en varias ocasiones.

Lema 1.4: Sean X y Y espacios topol\u00f3gicos. Supongamos que $X = A \cup B$, donde A y B son ambos subconjuntos cerrados de X . Si $f: A \rightarrow Y$ y $g: B \rightarrow Y$ son funciones continuas y tales que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A \cap B$, entonces $h: X \rightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A \\ g(x), & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua.

Dem: Como pedimos que $f(x) = g(x)$ si $x \in A \cap B$, h est\u00e1 bien definida. Sea C un cerrado en Y . Entonces

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Como f y g son continuas, $f^{-1}(C)$ y $g^{-1}(C)$ son cerrados, por lo tanto $h^{-1}(C)$ es cerrado y h es continua. ■

En el teorema que sigue demostraremos la existencia de las contracciones libres en los continuos suaves por arcos. La contracción libre que definiremos se empleará en el capítulo 5.

Teorema 1.5: Sea (X, p) un continuo suave por arcos. Entonces existe una contracción libre Λ para (X, p) .

Dem: Sea ν un mapeo de Whitney. Como (X, p) es suave por arcos, existe $\alpha: X \rightarrow C(X)$ que cumple con las condiciones que definen a un continuo suave por arcos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sup\{\nu(\alpha(x)) | x \in X\} = 1$. Definimos $\Lambda_\nu: X \times I \rightarrow X$ por

$$\Lambda_\nu(x, t) = \begin{cases} x, & \text{si } \nu(\alpha(x)) \leq 1 - t \\ \text{la única } y \in \alpha(x) \text{ tal} \\ \text{que } \nu(\alpha(y)) = 1 - t, & \text{si } \nu(\alpha(x)) \geq 1 - t \end{cases} \quad (1, b)$$

La función Λ_ν está bien definida ya que la existencia y unicidad de y están garantizadas por los mismos argumentos del Teorema 1.4 y si $\nu(\alpha(x)) = 1 - t$ las dos definiciones coinciden.

Sea $A = \{(x, t) \in X \times I | \nu(\alpha(x)) \leq 1 - t\}$. Como $A = (\nu \circ \alpha)^{-1}[0, 1 - t]$ y la función $\nu \circ \alpha$ es continua, A es cerrado. Sea $B = \{(x, t) \in X \times I | \nu(\alpha(x)) \geq 1 - t\}$. De una manera análoga tenemos que B es cerrado.

Veamos que $\Lambda_\nu|_B$ es continua. Sea $((x_n, t_n))_{n=1}^\infty$ una sucesión en B tal que $(x_n, t_n) \rightarrow (x_0, t_0)$. Sean $y_n = \Lambda_\nu(x_n, t_n)$ y $y_0 = \Lambda_\nu(x_0, t_0)$. Tomemos una subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ que converja a un $z \in B$. Tenemos que $y_{n_k} \in \alpha(x_{n_k})$ y, como α es continua, $\alpha(x_{n_k}) \rightarrow \alpha(x_0)$ y por lo tanto $z \in \alpha(x_0)$. De la definición de Λ_ν tenemos que $\nu(\alpha(y_{n_k})) = 1 - t_{n_k}$ y, como ν y α son continuas, $\nu(\alpha(y_{n_k})) \rightarrow \nu(\alpha(z))$. Por otro lado, como $t_{n_k} \rightarrow t_0$, tenemos que $\nu(\alpha(z)) = 1 - t_0$. Como el elemento de $\alpha(x_0)$ que cumple lo anterior es único, entonces $z = y_0$ y, por el Lema 0.8, $\Lambda_\nu|_B$ es continua.

Claramente $\Lambda_\nu|_A$ es continua y, como $\Lambda_\nu|_A(x, t) = \Lambda_\nu|_B(x, t)$ para toda $(x, t) \in A \cap B$, por el Lema 1.8, Λ_ν es continua.

Falta ver que $\Lambda_\nu(\Lambda_\nu(x, s), t) = \Lambda_\nu(x, \max\{s, t\})$. Tenemos los siguientes casos:

1) $t \leq s$ y $\nu(\alpha(x)) \leq 1 - s \leq 1 - t$. Aquí $\Lambda_\nu(x, s) = x$ y

$$\Lambda_\nu(\Lambda_\nu(x, s), t) = \Lambda_\nu(x, t) = x = \Lambda_\nu(x, \max\{s, t\}).$$

- (2) $t \leq s$ y $1 - s \leq \nu(\alpha(x))$. Aquí $\Lambda_\nu(x, s) =$ la única $y \in \alpha(x)$ tal que $\nu(\alpha(y)) = 1 - s \leq 1 - t$. Entonces

$$\Lambda_\nu(\Lambda_\nu(x, s), t) = \Lambda_\nu(y, t) = y = \Lambda_\nu(x, \max\{s, t\}).$$

- (3) $t \geq s$ y $\nu(\alpha(x)) \leq 1 - s$. Aquí $\Lambda_\nu(x, s) = x$ y

$$\Lambda_\nu(x, s), t) = \Lambda_\nu(x, t) = \Lambda_\nu(x, \max\{s, t\}).$$

- (4) $t \geq s$ y $1 - t \leq 1 - s \leq \nu(\alpha(x))$. Aquí $\Lambda_\nu(x, s) =$ la única $y \in \alpha(x)$ tal que $\nu(\alpha(y)) = 1 - s$ y $1 - t \leq \nu(\alpha(y))$. Entonces $\Lambda_\nu(\Lambda_\nu(x, s), t) = \Lambda_\nu(y, t) =$ la única $z \in \alpha(y)$ tal que $\nu(\alpha(z)) = 1 - t$.

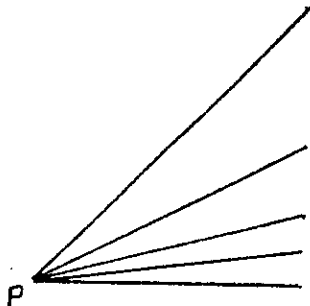
Por otro lado $\Lambda_\nu(x, \max\{s, t\}) = \Lambda_\nu(x, t) =$ la única $w \in \alpha(x)$ tal que $\nu(\alpha(w)) = 1 - t$. Como $y \in \alpha(x)$ y $\alpha(y) \subset \alpha(x)$, tenemos que $z \in \alpha(x)$. Entonces $z = w$ y por lo tanto $\Lambda_\nu(\Lambda_\nu(x, s), t) = \Lambda_\nu(x, \max\{s, t\})$. Demostrando así el Teorema. ■

Ahora, veamos una clase especial de continuos unidimensionales llamados dendroides. Interpretaremos la suavidad por arcos en ellos. la suavidad por arcos en ellos.

Def: Un continuo es *unicoherente* si dados A y B subcontinuos de X tales que $A \cup B = X$ entonces $A \cap B$ es conexo. Un continuo es *hereditariamente unicoherente* si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente.

Def: Un *dendroide* es un continuo arco-conexo hereditariamente unicoherente.

En la fig. 5 se muestra un ejemplo típico de un dendroide parecido a una "escobita" en la cual una serie de segmentos convergen a un segmento dado.



Tenemos que, por ser hereditariamente unicoherentes, los dendroides no contienen círculos. ■ porque de lo contrario tendríamos un caso como el de la fig. 6.

Entonces, dados dos puntos en un dendroide, existe un único arco que los une y, por lo tanto, los dendroides cumplen automáticamente la condición de compatibilidad. De lo anterior, tenemos que la suavidad por arcos en los dendroides se interpreta de la siguiente manera:

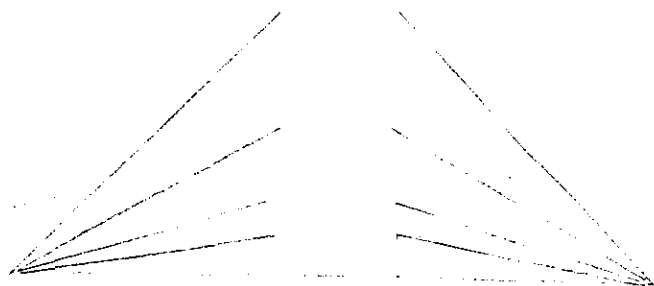
Sean D un dendroide y $p, x \in D$. Denotaremos por $[p, x]$ al único arco de p a x . Un dendroide D es suave por arcos en p si dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en D tal que $x_n \rightarrow x \in D$ tenemos que $[p, x_n] \rightarrow [p, x]$.

Si D es un dendroide suave por arcos en algún punto, diremos simplemente que es un *dendroide suave*.

Ejemplo 1.6: La “escobita” de la figura 5 es suave en p y en todos los demás puntos que no están en el segmento de abajo. $\square$

Para concluir el capítulo, veamos el ejemplo de un dendroide que no es suave.

Ejemplo 1.7: El dendroide de la figura 7 no es suave en ningún punto.



Para ver que no es suave en p , tomamos la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a x como se muestra en la figura. Tenemos que $[p, x_n] \rightarrow [p, q]$ que es diferente de $[p, x]$. Con un razonamiento análogo se puede ver que no es suave en ningún otro punto. $\square$



CAPITULO 2

HIPERESPACIOS DE CONTINUOS SUAVES POR ARCOS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

Una pregunta muy natural al estudiar la suavidad por arcos es si los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo suave por arcos son, a su vez, suaves por arcos. La respuesta es afirmativa, y es lo que demostraremos ahora.

A lo largo de este capítulo, supondremos que X es un continuo suave por arcos en un punto p .

Si tenemos una función continua entre dos continuos, podemos definir una función continua en sus hiperespacios básicos.

Lema 2.1: Si $f : X \rightarrow Y$ es un mapeo, entonces la función imagen $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ definida por $f^*(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ es continua.

Dem: Tenemos que $f^*(A) \in 2^Y$ porque es la imagen continua del compacto A . La función f es uniformemente continua por estar definida sobre un compacto. Por lo tanto, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x') < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Afirmamos que si $A, B \in 2^X$ son tales que $\mathcal{H}_X(A, B) < \delta$ entonces $\mathcal{H}_Y(f^*(A), f^*(B)) < \epsilon$. Sea $f(a) \in f^*(A)$ y sea $b \in B$ tal que $d_X(a, b) < \delta$. Por lo tanto $d_Y(f(a), f(b)) < \epsilon$. Entonces $f(a) \in N(f^*(B), \epsilon)$ y por lo tanto $f^*(A) \subset N(f^*(B), \epsilon)$. Un argumento simétrico nos lleva a que $f^*(B) \subset N(f^*(A), \epsilon)$; por lo tanto $\mathcal{H}_Y(f^*(A), f^*(B)) < \epsilon$, demostrando con esto la continuidad de f^* . ■

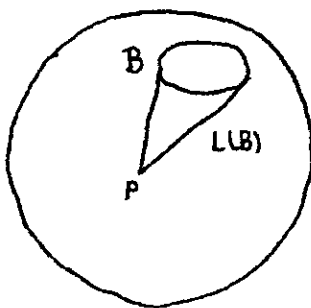
Un concepto que emplearemos frecuentemente al trabajar con continuos suaves por arcos es el siguiente.

Def: Si $B \in 2^X$ entonces la *sombra* de B , denotada por $L(B)$, está definida por $L(B) = \bigcup_{x \in B} \alpha(x)$.

Lema 2.2: Sea (X, p) un continuo suave por arcos. Entonces la función $\hat{\alpha} : 2^X \rightarrow C(X)$ definida por $\hat{\alpha}(B) = L(B)$ es continua.

Dem: Observemos $L(B) = \bigcup \alpha^*(B)$, así que la continuidad de las funciones $\bigcup$ y α^* implica que $L(B)$ es compacto. También tenemos que $L(B)$ es conexo porque es la unión de conexos que contienen a p ; así $L(B) \in C(X)$. Como X es suave por arcos en p , existe una función continua $\alpha : 2^X \rightarrow C(X)$ que satisface las tres condiciones que definen a un continuo suave por arcos. Por el Lema 2.1 la función imagen $\alpha^* : 2^X \rightarrow 2^{C(X)} \subset 2^{2^X}$ definida por $\alpha^*(B) = \{\alpha(x) \mid x \in B\}$ es continua. Pero $\hat{\alpha}(B)$ es la unión de los elementos de $\alpha^*(B)$ y, por el Lema 0.7, la función unión es continua, así que $\hat{\alpha}$ también lo es. ■

La sombra de un conjunto B de 2^X la podemos representar gráficamente como en la fig 8.



Sea Ψ una parametrización uniforme de (X, p) y sea $C \in C(X)$ tal que $C = L(C)$. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definimos las funciones $h_i: 2^X \times I \rightarrow 2^X$ por

$$h_1(B, t) = \bigcup_{x \in B} [x(1-t), x] \quad (2.a)$$

$$h_2(B, t) = \bigcup_{x \in B} [p, x(t)] \quad (2.b)$$

$$h_3(B, t) = L(B) \cup h_2(C, t) \quad (2.c)$$

$$h_4(B, t) = C \cup h_2(B, t) \quad (2.d)$$

Nótese que $h_1(B, 0) = B$, que $h_1(B, 1) = L(B)$, que si $t_1 \leq t_2$ entonces $h_1(B, t_1) \subseteq h_1(B, t_2)$ (porque si $z \in h_1(B, t_1)$ existe $x \in B$ tal que $z \in [x(1-t_1), x] \subset [x(1-t_2), x] \subset h_1(B, t_2)$) y que la función h_1 está bien definida (ya que $h_1(B, t) = \Psi(B \times [1-t, 1])$, que es la imagen continua de un compacto y, por tanto, compacto). Con respecto a h_2 tenemos que $h_2(B, 0) = \{p\}$, que $h_2(B, 1) = L(B)$, que si $t_1 \leq t_2$ entonces $h_2(B, t_1) \subseteq h_2(B, t_2)$ y que la función h_2 está bien definida (ya que $h_2(B, t) = \Psi(B \times [0, t])$). También tenemos $h_4(B, 0) = L(B)$, $h_3(B, 1) = L(B) \cup C$ y si $t_1 \leq t_2$ entonces $h_3(B, t_1) \subseteq h_3(B, t_2)$; la función h_3 está bien definida por ser h_3 la unión de dos cerrados. Para terminar, tenemos $h_4(B, 0) = C$, $h_4(B, 1) = C \cup L(B)$, y si $t_1 \leq t_2$ entonces $h_4(B, t_1) \subseteq h_4(B, t_2)$.

La idea geométrica de lo que hacen las funciones h_1 , h_2 , h_3 y h_4 está representado en la siguiente figura.

Lema 2.3: Las funciones h_1 y h_2 son continuas.

Dem: Por el Lema 2.1 la función imagen $\Psi^*: 2^{X \times I} \rightarrow 2^X$ definida por $\Psi(A) = \{\Psi(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ para toda $A \in 2^{X \times I}$, es continua. Por lo tanto, si $A_1, A_2 \in 2^{X \times I}$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{H}_D(A_1, A_2) < \delta$ entonces $\mathcal{H}(\Psi^*(A_1), \Psi^*(A_2)) < \epsilon$ (aquí D es la métrica producto en $X \times I$ dada por $D((x, t), (y, s)) = \max\{d(x, y), |t - s|\}$). Sean $B_1, B_2 \in 2^X$ y $t_1, t_2 \in I$ tales que $\mathcal{H}(B_1, B_2) < \delta$ y $|t_1 - t_2| < \delta$. Sea $z \in h_1(B_1, t_1)$. Entonces existe $x \in B_1$, tal que $z \in [x(1 - t_1), x]$. Como $x \in B_1$, existe $y \in B_2$ tal que $d(x, y) < \delta$ y, como $|t_1 - t_2| < \delta$, es fácil ver que si $A_1 = \{x\} \times [1 - t_1, 1]$ y $A_2 = \{y\} \times [1 - t_2, 1]$ entonces $\mathcal{H}_D(A_1, A_2) < \delta$ y, por lo tanto, $\mathcal{H}([x(1 - t_1), x], [y(1 - t_2), y]) < \epsilon$. Entonces existe $w \in [y(1 - t_2), y] \subset h_1(B_2, t_2)$ tal que $d(z, w) < \epsilon$. Por lo tanto $h_1(B_1, t_1) \subset N(h_1(B_2, t_2), \epsilon)$. De manera análoga $h_1(B_2, t_2) \subset N(h_1(B_1, t_1), \epsilon)$, de donde

$$\mathcal{H}(h_1(B_1, t_1), h_1(B_2, t_2)) < \epsilon,$$

probando así la continuidad de h_1 .

La demostración de que h_2 es continua es análoga. ■

A continuación daremos algunos lemas que nos ayudarán a verificar la condición de suavidad.

Lema 2.4: Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: C \rightarrow D$ funciones continuas. La función $f \times g: A \times C \rightarrow B \times D$ definida por $(f \times g)(a \times c) = f(a) \times g(c)$ es continua.

Dem: Sea $U \times V$ un elemento básico de $B \times D$ (es decir, U es abierto en B y V es abierto en D). Tenemos que $(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$ y, como f y g son continuas, $f^{-1}(U)$ es abierto en A y $g^{-1}(V)$ es abierto en C , por lo tanto el producto de ambos es abierto en $A \times C$, concluyendo así que $f \times g$ es continua. ■

Lema 2.5: La función natural $\eta: Y \times Y \rightarrow F_2(Y) \subset 2^Y$ definida por $\eta(y_1, y_2) = \{y_1, y_2\}$ es continua.

Dem: Sean (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) \in Y \times Y$ tales que $d_Y(x_1, x_2) < \epsilon$ y $d_Y(y_1, y_2) < \epsilon$. Sea $z \in \{x_1, y_1\}$. Entonces $z = x_1$ o $z = y_1$. En cualquier caso existe un elemento $w \in \{x_2, y_2\}$ tal que $d_Y(z, w) < \epsilon$; así tenemos que $\{x_1, y_1\} \subset N(\{x_2, y_2\}, \epsilon)$. Análogamente, $\{x_2, y_2\} \subset N(\{x_1, y_1\}, \epsilon)$ y entonces $\mathcal{H}(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) < \epsilon$. Por lo tanto η es continua. ■

Lema 2.6: Sean $f_1: A \rightarrow X$ y $f_2: A \rightarrow Y$ y sea $f: A \rightarrow X \times Y$ dada por $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Entonces f es continua si y sólo si las funciones f_1 y f_2 son continuas.

Dem:

$\Rightarrow$ Sean $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ las proyecciones sobre el primer y segundo factor respectivamente. Estas funciones son continuas ya que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ que son abiertos si U y V son abiertos. Entonces $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$, así que, como la función f es continua, f_1 y f_2 también lo son.

$\Leftarrow$ Supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Sea $U \times V$ un elemento básico de $X \times Y$. Sea $a \in f^{-1}(U \times V)$. Entonces $f(a) \in U \times V$ es decir, $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$; por lo tanto $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$. Como $f_1^{-1}(U)$ y $f_2^{-1}(V)$ son abiertos, también su intersección lo es. Por lo tanto f es continua. ■

Lema 2.7: La función $\tau: Y \rightarrow 2^{Y \times I}$ definida por $\tau(y) = \{y\} \times I$ es continua.

Dem: Sea $\epsilon > 0$ y sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $d(y_1, y_2) < \epsilon$. Sea $(y_1, t) \in \tau(y_1)$; entonces $(y_2, t) \in \tau(y_2)$ y $D((y_1, t), (y_2, t)) = \max\{d(y_1, y_2), |t - t|\} < \epsilon$. Por lo tanto $\tau(y_1) \subset N(\tau(y_2), \epsilon)$. Por un argumento simétrico tenemos que $\tau(y_2) \subset N(\tau(y_1), \epsilon)$ y por lo tanto

$$\mathcal{H}_D(\tau(y_1), \tau(y_2)) < \epsilon,$$

de donde concluimos que τ es continua. ■

Lema 2.8: Sea $h: 2^X \times I \rightarrow 2^X$ una función continua. Entonces la función inducida $H: 2^X \rightarrow C(2^X)$ definida por $H(B) = \{h(B, t) | t \in I\}$ es continua.

Dem: Por el Lema 2.7 la función $\tau: 2^X \rightarrow 2^{2^X \times I}$ definida por $\tau(B) = \{B\} \times I$ es continua. Como h es continua, por el Lema 2.1 la función imagen $h^*: 2^{2^X \times I} \rightarrow 2^{2^X}$ también lo es. Como $H = h^* \circ \tau$, H es continua. ■

Con los resultados anteriores, fácilmente podemos demostrar la continuidad de las funciones h_3 y h_4 .

Lema 2.9: La función h_3 es continua.

Dem: Por los Lemas 2.2 y 2.3 las funciones $\hat{\alpha}$ y h_2 son continuas. Es fácil ver que la función $\lambda: I \rightarrow C(X)$ dada por $\lambda(t) = h_2(C, t)$ es continua. Por el Lema 2.4 la función producto $\hat{\alpha} \times \lambda: 2^X \times I \rightarrow C(X) \times C(X)$ definida como $(\hat{\alpha} \times \lambda)(B, t) = (L(B), h_2(C, t))$ es continua, al igual que la función natural η descrita en el Lema 2.5. Como la función unión es continua y $h_3 = \cup \circ \eta \circ (\hat{\alpha} \times \lambda)$, entonces h_3 es continua. ■

Lema 2.10: La función h_4 es continua.

Dem: Consideremos la función constante $f: 2^X \times I \rightarrow 2^X$ dada por $f(B, t) = C$. Por el Lema 2.6 la función $(f, h_2): 2^X \times I \rightarrow 2^X \times 2^X$ definida por $(f, h_2)(B, t) = (f(B, t), h_2(B, t))$ es continua. Por los Lemas 0.7 y 2.5 las funciones unión $\cup$ y natural η son continuas. Como $h_4 = \cup \circ \eta \circ (f, h_2)$ entonces h_4 es continua. ■

Sea $B \in 2^X$. Entonces para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\{h_i(B, t) | t \in I\}$ es un conexo de 2^X ya que es la imagen continua del conexo I . Definimos las funciones $H_i: 2^X \rightarrow C(2^X)$ por $H_i(B) = \{h_i(B, t) | t \in I\}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Lema 2.11: Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ la función H_i es continua. Además para cada $B \in 2^X$, $H_i(B)$ es un arco ordenado en 2^X .

Dem: Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ la función H_i es la función inducida por h_i , así que, por el Lema 2.8, H_i es continua.

Sea $B \in 2^X$. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tenemos que si $t_1 \leq t_2$, entonces $h_i(B, t_1) \subset h_i(B, t_2)$, por lo tanto $H_i(B)$ es un continuo en 2^X que es una cadena respecto a la inclusión de conjuntos, y por el Lema 0.5, $H_i(B)$ es un arco ordenado en 2^X . ■

Los siguientes lemas nos servirán para verificar la condición de compatibilidad.

Lema 2.12: Sean $A, B \in 2^X$ y $t \in I$.

- (i) Si $A = h_1(B, t)$ entonces $L(A) = L(B)$.
- (ii) Si $A = h_2(B, t)$ entonces $A = L(A)$.
- (iii) Si $A = h_3(B, t)$ entonces $A = L(A)$.
- (iv) Si $A = h_4(B, t)$ entonces $A = L(A)$.

Dem:

- (i) Sean $A, B \in 2^X$ y $t \in I$. Supongamos que $A = h_1(B, t)$ y sea $y \in A$. Entonces para alguna $x \in B$, $y \in [x(1-t), x]$ por lo que la condición de compatibilidad nos da $[p, y] \subset [p, x]$ y así $L(A) \subset L(B)$. Como $B \subset A$ y tenemos $L(B) \subset L(A)$, de donde concluimos que $L(A) = L(B)$.
- (ii) Supongamos que $A = h_2(B, t)$ y sea $y \in A$. Entonces existe $x \in B$ tal que $y \in [p, x(t)]$, por lo tanto por la condición de compatibilidad $[p, y] \subset [p, x(t)] \subset A$; así $L(A) = A$.
- (iii) Supongamos que $A = h_3(B, t)$. Entonces $A = L(B) \cup h_2(C, t)$. Tenemos que $L(L(B)) = L(B)$ y, por (ii), $L(h_2(C, t)) = h_2(C, t)$, por lo tanto $L(A) = A$.

(iv) Supongamos que $A = h_4(B, t)$. Entonces $A = C \cup h_2(B, T)$. Como $L(C) = L(L(C)) = C$ y, por (ii), $L(h_2(B, t)) = h_2(B, t)$, tenemos que $L(A) = A$. ■

Lema 2.13: Sean $B \in 2^X$, $t_1 \in I$ y $A = h_1(B, t_1)$. Entonces

- (i) $H_1(A) \subset H_1(B)$,
- (ii) $H_2(A) = H_2(B)$,
- (iii) $H_3(A) = H_3(B)$ y
- (iv) $H_4(A) = H_4(B)$.



**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

Dem:

(i) Vamos a probar que para cada $s \in I$, $h_1(A, s) = h_1(B, t_1 + s(1 - t_1))$ y de aquí ya es claro que $H_1(A) \subset H_1(B)$. Sea $x \in B$. Entonces $[x(1 - t_1), x] \subset h_1(B, t_1) = A$. Como $x(1 - t_1) \in A$, tenemos que $[(x(1 - t_1))(1 - s), x(1 - t_1)] = [x((1 - t_1)(1 - s)), x(1 - t_1)] = [x(1 - (t_1 + s(1 - t_1))), x(1 - t_1)] \subset [x(1 - (t_1 + s(1 - t_1))), x] \subset h_1(B, t_1 + s(1 - t_1))$. Por lo tanto $h_1(A, s) \subset h_1(B, t_1 + s(1 - t_1))$.

Para ver la otra inclusión tomemos también $x \in B$. Entonces $[x(1 - (t_1 + s(1 - t_1))), x] \subset h_1(B, t_1 + s(1 - t_1))$. Como $x(1 - (t_1 + s(1 - t_1))) = (x(1 - t_1))(1 - s)$, tenemos $[x(1 - t_1)(1 - s), x] = [x(1 - t_1)(1 - s), x(1 - t_1)] \cup [x(1 - t_1), x]$. Así que $[x(1 - t_1), x] \subset h_1(B, t_1) = A$ y, como $x(1 - t_1) \in A$, $[x(1 - t_1)(1 - s), x(1 - t_1)] \subset h_1(A, s)$. Por lo tanto $h_1(B, t_1 + s(1 - t_1)) \subset h_1(A, s)$, de donde $h_1(A, s) = h_1(B, t_1 + s(1 - t_1))$.

(ii) Como $B \subset A$, para cada $s \in I$, $h_2(B, s) \subset h_2(A, s)$. Sea $x \in B$. Entonces $[x(1 - t_1), x] \subset h_1(B, t_1) = A$. Como $x(1 - t_1) \in A$, tenemos $[p, (x(1 - t_1))(s)] = [p, x((1 - t_1)s)] \subset h_2(B, s)$, por lo tanto $h_2(A, s) \subset h_2(B, s)$ y $h_2(A, s) = h_2(B, s)$. Entonces $H_2(A) = H_2(B)$.

(iii) Por el Lema 2.11 (i) $L(A) = L(B)$ así que para cada $s \in I$, $h_3(A, s) = h_3(B, s)$ y por lo tanto $H_3(A) = H_3(B)$.

(iv) En la demostración de (ii) vimos que si $A = h_1(B, t_1)$ entonces $h_2(A, s) = h_2(B, s)$ para toda $s \in I$. Por lo tanto $h_4(A, s) = h_4(B, s)$ y $H_4(A) = H_4(B)$. ■

Lema 2.14: Sean $B \in 2^X$, $t_1 \in I$ y $A = h_2(B, t_1)$. Entonces

- (i) $H_1(A) = \{A\} \subset H_2(B)$ y
- (ii) $H_2(A) \subset H_2(B)$.

Dem:

(i) Sean $B \in 2^X$, $t_1 \in I$ y $A = h_2(B, t_1)$. Por el Lema 2.12 (ii) $A = L(A)$ así que para cada $s \in I$, $h_1(A, s) = A$ y, por lo tanto, $H_1(A) = \{A\} \subset H_2(B)$.

(ii) Veamos que $h_2(A, s) = h_2(B, st_1)$. Sea $x \in B$. Entonces $[p, x(t_1)] \subset h_2(B, t_1) = A$. Como $x(t_1) \in A$, $[p, (x(t_1))(s)] = [p, x(st_1)] \subset h_2(A, s)$. Pero $[p, x(st_1)] \subset h_2(B, st_1)$ por lo tanto $h_2(A, s) \subset h_2(B, st_1)$. Por otro lado, si $x \in B$, entonces $[p, x(st_1)] \subset h_2(B, st_1)$ y como $[p, x(st_1)] = [p, (x(t_1))(s)]$ y $x(t_1) \in h_2(B, t_1) = A$, entonces $[p, x(t_1)(s)] \subset h_2(A, s)$ y por lo tanto $h_2(B, st_1) \subset h_2(A, s)$. Tenemos entonces que $h_2(A, s) = h_2(B, st_1)$ y, por lo tanto, que $H_2(A) = H_2(B)$. ■

Lema 2.15: Sean $B \in 2^X$, $t_1 \in I$ y $A = h_3(B, t_1)$. Entonces:

- (i) $H_1(A) = \{A\} \subset H_3(B)$.
- (ii) $H_3(A) \subset H_3(B)$ y
- (iii) $H_4(A) = H_4(B)$.

Dem:

(i) Sean $B \in 2^X$, $t_1 \in I$ y $A = h_3(B, t_1)$. Por el Lema 2.12 (iii) $A = L(A)$, así que para toda $s \in I$, $h_1(A, s) = A$ y por lo tanto $H_1(A) = \{A\} \subset H_3(B)$.

(ii) Como $A = h_3(B, t_1)$, $A = L(B) \cup h_2(C, t_1)$. Si $t \in [0, t_1]$ entonces $h_3(A, t) = A \cup h_2(C, t) = L(B) \cup h_2(C, t_1) \cup h_2(C, t) = L(B) \cup h_2(C, t_1) = h_3(B, t_1) = A$. Si $t \in [t_1, 1]$ entonces $h_3(A, t) = A \cup h_2(C, t) = L(B) \cup h_2(C, t_1) \cup h_2(C, t) = h_3(B, t)$. Por lo tanto $H_3(A) \subset H_3(B)$.

(iii) Como $A = h_3(B, t_1)$, $A = L(B) \cup h_2(C, t_1)$. Como $L(B) = h_1(B, 1)$, por la demostración del Lema 2.13 (ii) tenemos que $h_2(L(B), t) = h_2(B, t)$ para toda $t \in I$. Observemos también que $h_2(h_2(C, t_1), t) \subset C$ y así tenemos $h_4(A, t) = C \cup h_2(A, t) = C \cup h_2(L(B), t) \cup h_2(h_2(C, t_1), t) = C \cup h_2(B, t) = h_4(B, t)$. Por lo tanto $H_4(A) = H_4(B)$. ■

Lema 2.16: Sean $B \in 2^X$, $t \in I$ y $A = h_4(B, t)$. Entonces

- (i) $H_1(A) = A \subset H_4(B)$,
- (ii) $H_3(A) = A \subset H_4(B)$ y
- (iii) $H_4(A) \subset H_4(B)$.

Dem:

(i) Como $A = h_4(B, t)$, por el Lema 2.11 (iv), $L(A) = A$, por lo tanto $h_1(A, s) = A$ para toda $s \in I$ y entonces $H_1(A) = A \subset H_4(B)$.

(ii) Como $A = h_4(B, t_1) = C \cup h_2(B, t_1)$, entonces

$$h_3(A, t) = L(A) \cup h_2(C, t) = A \cup h_2(C, t) = C \cup h_2(B, t_1) \cup h_2(C, t) = A$$

para toda $t \in I$. Por lo tanto $H_3(A) = \{A\} \subset H_4(B)$.

(iii) Tenemos que $A = h_4(B, t_1) = C \cup h_2(B, t_1)$. En la demostración del Lema 2.14 (ii) vimos que $h_2(h_2(B, t_1), s) = h_2(B, st_1)$, entonces

$$h_4(A, s) = C \cup h_2(A, s) = C \cup h_2(C, s) \cup h_2(B, st_1) = C \cup h_2(B, st_1) = h_4(B, st_1)$$

para toda $s \in I$. Por lo tanto $H_4(A) \subset H_4(B)$. ■

Ahora ya estamos en condición de demostrar que los continuos suaves por arcos poseen hiperespacios suaves por arcos.

Teorema 2.17: Sea (X, p) un continuo suave por arcos. Entonces 2^X es suave por arcos en $\{p\}$.

Dem: Sean H_1 y H_2 como se definieron anteriormente. Definimos $\tilde{\alpha}: 2^X \rightarrow C(2^X)$ por $\tilde{\alpha}(B) = H_1(B) \cup H_2(B)$. Vamos a verificar que $\tilde{\alpha}$ satisface las condiciones de suavidad por arcos.

Condición de arcos.

Es claro que $\tilde{\alpha}(\{p\}) = \{\{p\}\}$. Sea $B \in 2^X - \{\{p\}\}$. Entonces $H_1(B)$ es un arco ordenado de $\{p\}$ a $L(B)$. Sea $A \in H_1(B) \cap H_2(B)$. Entonces existen $t_1, t_2 \in I$ tales que $A = h_1(B, t_1) = h_2(B, t_2)$. Por el Lema 2.12 (ii), $A = L(A)$ y, por el Lema 2.12 (i), $L(A) = L(B)$, así $\tilde{\alpha}(B)$ es un arco de $\{p\}$ a B que pasa por $L(B)$.

Condición de suavidad.

Como H_1 , H_2 y la función unión $\cup$ son continuas, $\tilde{\alpha}$ es continua.

Condición de compatibilidad.

Sea $A \in \tilde{\alpha}(B)$; entonces para alguna $t_1 \in I$, $A = h_1(B, t_1)$ o $A = h_2(B, t_2)$. Si $A = h_1(B, t_1)$, por el Lema 2.13 (i) y (ii), $\tilde{\alpha}(A) \subset \tilde{\alpha}(B)$. Si $A = h_2(B, t_1)$, por el Lema 2.14 (i) y (ii), $\tilde{\alpha}(A) \subset \tilde{\alpha}(B)$. Por lo tanto $\tilde{\alpha}$ satisface la condición de compatibilidad. ■

Corolario 2.18: Si (X, p) es un continuo suave por arcos entonces $C(X)$ es suave por arcos en $\{p\}$.

Dem: Esto es inmediato del Teorema 2.17 y del Lema 0.3. ■

Teorema 2.19: Sea (X, p) un continuo suave por arcos y sea $C \in C(X)$ tal que $C = L(C)$. Entonces 2^X es suave por arcos en C .

Dem: Definimos $\tilde{\alpha}: 2^X \rightarrow C(2^X)$ por $\tilde{\alpha}(B) = H_1(B) \cup H_3(B) \cup H_4(B)$. Vamos a comprobar que $\tilde{\alpha}$ satisface las condiciones de suavidad por arcos.

Condición de arcos.

Tenemos que $\tilde{\alpha}(C) = H_1(C) \cup H_3(C) \cup H_4(C) = \{C\}$. Sea $B \in 2^X - \{C\}$. Como H_1 es un arco ordenado de B a $L(B)$, H_3 un arco ordenado de $L(B)$ a $C \cup L(B)$ y H_4 es un arco ordenado de C a $C \cup L(B)$, entonces $\tilde{\alpha}(B)$ es un arco de B a C que pasa por $C \cup L(B)$.

Condición de suavidad.

Como cada H_i es continua y la función unión $\cup$ es continua, tenemos que $\tilde{\alpha}$ es continua.

Condición de compatibilidad.

Sea $A \in \tilde{\alpha}(B)$. Entonces $A = h_1(B, t_1)$ o $A = h_3(B, t_1)$ o $A = h_4(B, t_1)$ para algún $t_1 \in I$. Si $A = h_1(B, t_1)$, por el Lema 2.13 (i), (iii) y (iv), $\tilde{\alpha}(A) \subset \tilde{\alpha}(B)$. Si $A = h_3(B, t_1)$, por el Lema 2.15 (i), (ii) y (iii), $\tilde{\alpha}(A) \subset \tilde{\alpha}(B)$. Si $A = h_4(B, t_1)$, por el Lema 2.16 (i), (ii) y (iii), $\tilde{\alpha}(A) \subset \tilde{\alpha}(B)$. ■

Corolario 2.20: Si (X, p) es un continuo suave por arcos y $C \in C(X)$ es tal que $C = L(C)$, entonces $C(X)$ es suave por arcos en C . ■

Corolario 2.21: Sea (X, p) un continuo suave por arcos. Entonces 2^X y $C(X)$ son suaves por arcos en X .

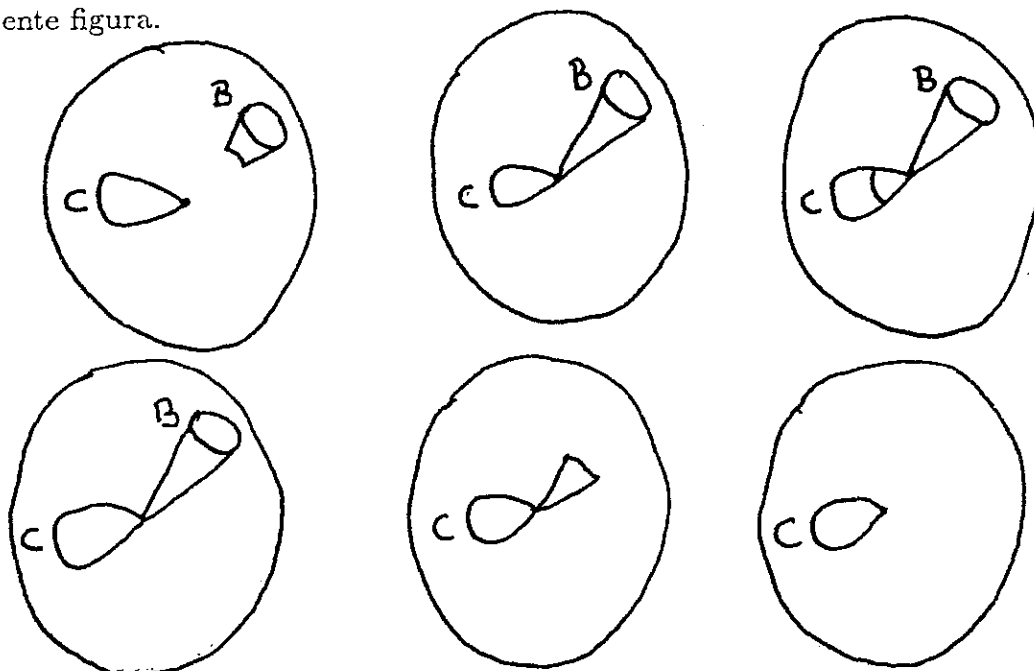
Dem: Se deduce inmediatamente del Teorema 2.19 y del Corolario 2.20 pues $X = L(X)$. ■

Como el intervalo I es suave por arcos, con los corolarios 2.18, 2.20 y 2.21 se confirma el hecho de que $C(I)$ es suave por arcos, como se mencionó en el Ejemplo 1.1.

Interpretación geométrica

La idea geométrica de los teoremas anteriores es la siguiente. Para ver que 2^X es suave por arcos en $\{p\}$, a cada conjunto B de 2^X lo “inflamos” hasta llevarlo a su sombra $L(B)$, posteriormente lo “desinflamos” del lado opuesto, hasta quedarnos solamente con $\{p\}$, como se ilustra en la fig. 10.

Para ver que 2^X es suave por arcos en un conjunto C que es igual a su sombra, lo que se hace es llevar nuevamente al conjunto B a su sombra, después se sigue inflando hasta llenar también a C , y posteriormente se recoge a $L(B)$ hasta obtener a C . Lo anterior se aprecia en la siguiente figura.



Hacemos notar que el recíproco de los Teoremas 2.17 y 2.19, y el de los Corolarios 2.18, 2.20 y 2.21 es falso: Sea S^1 la circunferencia unitaria; por [3] tenemos que 2^{S^1} es el cubo de Hilbert y es fácil comprobar que $C(S^1)$ es homeomorfo al círculo unitario (se puede construir un modelo como en el Ejemplo 0.1); Entonces tenemos que 2^{S^1} y $C(S^1)$ son suaves por arcos, mientras que S^1 no lo es, como lo vimos en el Ejemplo 1.2.

CAPITULO 3

CONTINUOS LOCALMENTE CONEXOS

En esta sección, veremos que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X localmente conexo son suaves por arcos en cada uno de sus puntos. El presente capítulo se dividirá en dos secciones: en la primera veremos condiciones bajo las cuales el tomar nubes cerradas de elementos de 2^X es una función continua; en la segunda demostraremos la suavidad por arcos de los hiperespacios de un continuo localmente conexo.

1.- Continuidad de las nubes cerradas

Vamos a trabajar con un tipo especial de métricas denominadas métricas convexas, las cuales nos garantizarán la continuidad de las nubes cerradas.

Def: Una métrica d es *convexa*, si dados $x, y \in X$ existe $z \in X$ tal que $d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, y)$.

Teorema 3.1: Sea (X, d) un continuo con una métrica convexa d . Entonces para cualesquiera $x, y \in X$ existe un subconjunto γ de X tal que $x, y \in \gamma$ y γ es isométrico al intervalo $[0, d(x, y)]$. En particular $\gamma = \{x\} = \{y\}$ si $x = y$, y si $x \neq y$, γ es un arco con extremos x y y .

Dem: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d(x, y) = 1$. Sean $x_0 = x$ y $x_1 = y$. Sea $x_{\frac{1}{2}}$ un punto tal que $d(x_0, x_{\frac{1}{2}}) = d(x_{\frac{1}{2}}, x_1) = \frac{1}{2}d(x_0, x_1)$. Contruyamos $x_{\frac{1}{4}}$ entre x_0 y $x_{\frac{1}{2}}$ y $x_{\frac{3}{4}}$ entre $x_{\frac{1}{2}}$ y x_1 con la misma propiedad. De esta manera si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $r = \frac{m}{2^n}$ con $0 \leq m \leq 2^n$ podemos construir x_r .

Construimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x_0, x_1\}, \\ A_1 &= \{x_0, x_{\frac{1}{2}}, x_1\}, \\ A_n &= \{x_r \mid r = \frac{m}{2^n}, 0 \leq m \leq 2^n\}, \end{aligned}$$

y definimos el conjunto γ como $\gamma = \overline{\bigcup A_n}$.

Definiremos una función $f: [0, 1] \rightarrow X$ de la siguiente manera:

Sea $\lambda \in [0, 1]$. Nos fijamos en su representación diádica, es decir $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2^n}$ con $a_n \in \{0, 1\}$. Si λ tiene dos representaciones de este tipo, tomamos la que a partir de cierto $N \in \mathbb{N}$ todas las a_n sean cero. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{8}\right) + \dots \text{ y} \\ \frac{1}{2} &= 1\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{8}\right) + \dots; \end{aligned}$$

en este caso tomamos la segunda. Utilizando esta representación diádica de λ definimos $r_k = \sum_{n=1}^k a_n \frac{1}{2^n}$. Tenemos que $r_k \rightarrow \lambda$. Entonces la función f se define por

$$f(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{r_k}.$$

(i) *El límite existe.* Por la construcción de los x_r tenemos que $d(x_{r_n}, x_{r_m}) = |r_n - r_m|$, que tiende a cero cuando $n, m \rightarrow \infty$. Por lo tanto $(x_{r_n})_n$ es una sucesión de Cauchy y, como X es completo, tiene límite.

(ii) *f es isometría.* Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$. Sean $r_n \rightarrow \lambda_1$, $s_n \rightarrow \lambda_2$, $y_1 = \lim x_{r_n}$ y $y_2 = \lim x_{s_n}$. Entonces

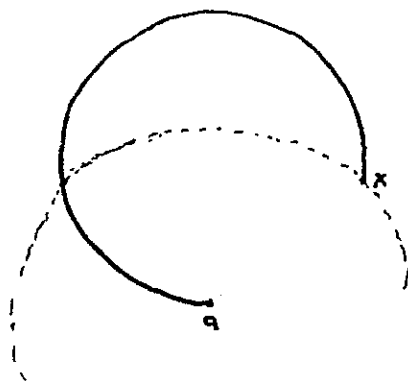
$$d(y_1, y_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{r_n}, x_{s_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} |r_n - s_n| = |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Como $y_1 = f(\lambda_1)$ y $y_2 = f(\lambda_2)$ entonces $d(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = |\lambda_1 - \lambda_2|$; por lo tanto f es isometría. ■

En lo que resta de esta sección, X denotará a un continuo con una métrica convexa d .

En algunas ocasiones, la cerradura de las bolas abiertas y las bolas cerradas no coinciden, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2: Sea $Y = \{(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq \theta \leq 3\pi/2\}$ el continuo representado en la siguiente figura:



Sea d_1 la métrica para Y obtenida de la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^2$. Sea $a = (0, -1)$ y $x = (1, 0)$. Tenemos que $x \in C_{d_1}(a, \sqrt{2})$ y $x \notin B_{d_1}(a, \sqrt{2})$. □

Cuando un continuo X tiene una métrica convexa, las bolas cerradas y la cerradura de las bolas abiertas son iguales.

Teorema 3.3: Sea (X, d) un continuo con una métrica convexa d . Entonces para cualquier $a \in X$ y $\epsilon > 0$,

$$\overline{B(a, \epsilon)} = C(a, \epsilon).$$

Dem: La inclusión $\overline{B(a, \epsilon)} \subset C(a, \epsilon)$ siempre se da puesto que $C(a, \epsilon)$ es cerrado y $B(a, \epsilon) \subset C(a, \epsilon)$. Para probar la otra inclusión tomemos $x \in C(a, \epsilon)$ tal que $d(x, a) = \epsilon$ y, utilizando el Teorema 3.1, tomemos un subconjunto γ de X isométrico al $[0, \epsilon]$. Todos los puntos de γ excepto x pertenecen a $B(a, \epsilon)$, por lo tanto $x \in \overline{B(a, \epsilon)}$ y así $C(a, \epsilon) \subset \overline{B(a, \epsilon)}$. ■

El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir podemos tener la igualdad entre la cerradura de las bolas abiertas y las bolas cerradas sin que la métrica del continuo sea convexa. Esta afirmación quedará probada con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4: Sea S^1 la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ con la métrica obtenida de la métrica euclidiana. En este caso, tenemos que $\overline{B_{d_2}(x, \epsilon)} = C_{d_2}(x, \epsilon)$ para toda $x \in S^1$ y $\epsilon > 0$. Sin embargo, la métrica d_2 no es convexa, ya que si tomamos los puntos $x_1 = (-1, 0)$ y $x_2 = (1, 0)$ no existe ninguna $x \in S^1$ tal que

$$d_2(x_1, x) = \frac{1}{2}d_2(x_1, x_2) = d_2(x, x_2). \quad \square$$

Definimos la función $\Phi: 2^X \times I \rightarrow 2^X$ por $\Phi(A, t) = K(A, t)$ para toda $t \in I$ y $A \in 2^X$. Probaremos que, por ser d una métrica convexa, la función Φ es continua.

Lema 3.5: La función Φ definida arriba es continua.

Dem:

Definimos la función $\phi: X \times I \rightarrow 2^X$ por $\phi(x, t) = C(x, t)$. Veamos que ϕ es continua. Sea $((x_n, t_n))_{n=1}^\infty$ una sucesión en $X \times I$ tal que $(x_n, t_n) \rightarrow (x_0, t_0)$. Sea $y \in \limsup \phi(x_n, t_n)$. Entonces existe una subsucesión $(\phi(x_{n_k}, t_{n_k}))_{k=1}^\infty$ y existen $y_{n_k} \in \phi(x_{n_k}, t_{n_k})$ tales que $y_{n_k} \rightarrow y$. Como $y_{n_k} \in \phi(x_{n_k}, t_{n_k})$ tenemos que $d(y_{n_k}, x_{n_k}) \leq t_{n_k}$; entonces $d(y, x_0) \leq t_0$ y por lo tanto $y \in \phi(x_0, t_0)$, así $\limsup \phi(x_n, t_n) \subset \phi(x_0, t_0)$.

Ahora vamos a demostrar que $\phi(x_0, t_0) \subset \liminf \phi(x_n, t_n)$. Por la hipótesis, tenemos que $\phi(x_0, t_0) = \overline{B(x_0, t_0)}$ y $\phi(x_n, t_n) = \overline{B(x_n, t_n)}$, por lo que bastará probar que $B(x_0, t_0) \subset \liminf \phi(x_n, t_n)$. Sea $y \in B(x_0, t_0)$. Entonces $d(y, x_0) < t_0$. Escogemos y fijamos $\eta > 0$ tal que $d(y, x_0) + \eta < t_0$. Como $(x_n, t_n) \rightarrow (x_0, t_0)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1) \quad d(y, x_0) + \eta < t_n \text{ para } n > N \text{ y}$$

$$(2) \quad d(x_0, x_n) < \eta \text{ para } n > N.$$

Se sigue que $d(y, x_n) \leq d(y, x_0) + d(x_0, x_n) < d(y, x_0) + \eta < t_n$. Entonces $y \in B(x_n, t_n)$ para toda $n > N$. Por lo tanto $y \in \liminf \phi(x_n, t_n)$ y $\phi(x_0, t_0) \subset \liminf \phi(x_n, t_n)$. Por consiguiente, $\phi(x_n, t_n) \rightarrow \phi(x_0, t_0)$ y ϕ es continua.

Por el Lema 2.1 la función imagen $\phi^*: 2^X \times I \rightarrow 2^{2^X}$ es continua y, como $\Phi(A, t) = \bigcup \phi^*(A \times \{t\})$, el Lema 0.7 nos dice que Φ es continua. ■

Ahora veremos algunos resultados sobre la conexidad de las nubes cerradas.

Sea $\beta: 2^X \rightarrow [0, \infty)$ la función definida por:

$$\beta(A) = \inf\{t \geq 0 \mid K(A, t) \text{ es conexo}\}, \text{ si } A \in 2^X.$$

Lema 3.6: Para toda $A \in 2^X$, $K(A, \beta(A))$ es conexo.

Dem: Sea $A \in 2^X$. De la definición de $\beta(A)$ existe una sucesión no creciente $(t_n)_n$ tal que $t_n \rightarrow \beta(A)$ y $K(A, t_n)$ es conexo para toda $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $K(A, t_{n+1}) \subset K(A, t_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y, por la compacidad de A , $K(A, \beta(A)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(A, t_n)$. Entonces $K(A, \beta(A))$ es una intersección "anidada" de continuos y por lo tanto es conexo. ■

Lema 3.7: Sea (X, d) un continuo con una métrica convexa d . Sea $A \in 2^X$ y $t \geq 0$. Entonces $K(A, t)$ es conexo si y sólo si $t \geq \beta(A)$.

Dem:

$\Rightarrow$ Sean $A \in 2^X$ y $t \geq 0$. De la definición de $\beta(A)$ tenemos que si $K(A, t)$ es conexo, entonces $t \geq \beta(A)$.

$\Leftarrow$ Sean $A \in 2^X$ y $t \geq \beta(A)$. Dado $x \in K(A, t)$, sea $a_x \in A$ tal que $d(x, a_x) \leq t$. Usando el Teorema 3.1 tomemos γ_x arco de x a a_x isométrico a $[0, d(x, a_x)]$. Observemos que $A \subset K(A, \beta(A)) \subset K(A, t)$ y que $\gamma_x \subset K(A, t)$, así que $K(A, t) = K(A, \beta(A)) \cup (\bigcup_x \gamma_x)$, por lo que concluimos que $K(A, t)$ es conexo. ■

Corolario 3.8: Sea (X, d) un continuo con una métrica convexa d . Sea $A \in C(X)$. Entonces $K(A, t)$ es conexo para toda $t \geq 0$.

Dem: Si $A \in C(X)$ entonces $\beta(A) = 0$ así que por el Lema 3.7, $K(A, t)$ es conexo para toda $t \geq 0$. ■

El siguiente lema muestra una propiedad aditiva de las nubes cerradas respecto a los radios.



Lema 3.9: Sea (X, d) un continuo con una métrica convexa d . Sean $A \in C(X)$ y $t_1, t_2 \in [0, \infty)$. Entonces $K(K(A, t_1), t_2) = K(A, t_1 + t_2)$.

Dem:

" $\subset$ " Sea $x \in K(K(A, t_1), t_2)$. Entonces existe $y \in K(A, t_1)$ tal que $d(x, y) \leq t_2$. Como $y \in K(A, t_1)$, existe $z \in A$ tal que $d(y, z) \leq t_1$. Entonces $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq t_2 + t_1$ y por lo tanto $x \in K(A, t_1 + t_2)$.

" $\supset$ " Sea $x \in K(A, t_1 + t_2)$ entonces existe $y \in A$ tal que $d(x, y) \leq t_1 + t_2$. Si $d(x, y) < t_1$ es claro que $x \in K(K(A, t_1), t_2)$. Si $t_1 < d(x, y) \leq t_1 + t_2$, por el Teorema 3.1 existe un subconjunto conexo γ isométrico a $[0, d(x, y)]$. Como $t_1 < d(x, y)$ existe $z \in \gamma$ tal que $d(y, z) = t_1$ por lo tanto $z \in K(A, t_1)$. Como $x \in C(z, t_2)$, entonces $x \in K(K(A, t_1), t_2)$. ■

2.- Continuos localmente conexos

Si X es un continuo localmente conexo, por [3] tenemos que $2^X \cong Q$; por lo tanto 2^X es suave por arcos en cada uno de sus puntos. En esta sección, veremos que $C(X)$ también es suave por arcos en cada uno de sus puntos.

Sea (X, ρ) un continuo localmente conexo, con una métrica ρ cualquiera. Entonces, por [4] o [5], X admite una métrica convexa d , es decir, d es convexa y (X, d) es homeomorfo a (X, ρ) . Consideraremos a X con una métrica convexa d .

Sea $M: C(X) \times I \rightarrow C(X)$ la restricción de Φ , es decir, M está dada por $M(A, t) = \Phi(A, t)$. La función M está bien definida por el Corolario 3.8.

Definimos $l: C(X) \times C(X) \rightarrow [0, \infty)$ por

$$l(A, B) = \inf\{t \mid B \subset M(A, t)\}$$

Lema 3.10: La función l es continua.

Dem: Sean $\epsilon > 0$ y $(A, P), (B, Q) \in C(X) \times C(X)$ tales que $H(A, B) < \frac{\epsilon}{2}$ y $H(P, Q) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $q \in Q$. Como $H(P, Q) < \frac{\epsilon}{2}$ existe $p \in P$ tal que $d(p, q) < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado existe $a \in A$ tal que $d(a, p) \leq l(A, P)$. Como $H(A, B) < \frac{\epsilon}{2}$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$d(q, b) \leq d(q, p) + d(p, a) + d(a, b) < l(A, P) + \epsilon.$$

Como q es arbitrario, $Q \subset N(B, l(A, P) + \epsilon)$. Entonces

$$l(B, Q) < l(A, P) + \epsilon.$$

Siguiendo un argumento simétrico tenemos que

$$l(A, P) < l(B, Q) + \epsilon,$$

y por consiguiente

$$|l(A, P) - l(B, Q)| < \epsilon,$$

probando con ello la continuidad de l . ■

En lo que resta del capítulo P denotará un punto fijo de $C(X)$. Definimos las funciones $j: C(X) \rightarrow [0, \infty)$ y $m: C(X) \rightarrow [0, \infty)$ por

$$j(A) = l(A, P) \text{ y}$$

$$m(A) = l(P, M(A, j(A))).$$

Lema 3.11: Las funciones j y m son continuas.

Dem: La continuidad de ambas funciones se sigue directamente de la continuidad de las funciones l y M . ■

Los resultados que siguen nos ayudarán a construir unas funciones que utilizaremos más adelante.

Lema 3.12: La función $\sigma: I \times I \rightarrow C(I)$ definida por $\sigma(s, t) = [s, t]$ es continua.

Dem: Sean $\epsilon > 0$ y $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in I \times I$ tales que $|s_1 - s_2| < \epsilon$ y $|t_1 - t_2| < \epsilon$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $s_1 \leq s_2$. Sea $s \in [s_1, t_1]$. Veamos que $s \in N([s_2, t_2], \epsilon)$. Tenemos dos casos:

(1) $t_1 \leq t_2$

Si $s \in [s_2, t_2]$ obviamente tenemos que $s \in N([s_2, t_2], \epsilon)$. Si $s \notin [s_2, t_2]$, tenemos que $s_1 \leq s \leq s_2$; entonces

$$-\epsilon < s_1 - s_2 \leq s - s_2 \leq 0$$

y

$$0 < s_2 - s < \epsilon.$$

Por lo tanto $|s_2 - s| < \epsilon$ y $s \in N([s_2, t_2], \epsilon)$.

(2) $t_2 \leq t_1$

Si $s \notin [s_2, t_2]$ tenemos dos posibilidades:

(i) $s_1 \leq s \leq s_2$ que es análogo al caso anterior, y por lo tanto $s \in N([s_2, t_2], \epsilon)$.

(ii) $t_2 \leq s \leq t_1$. Entonces

$$0 \leq s - t_2 \leq t_1 - t_2 < \epsilon.$$

Por lo tanto $|s - t_2| < \epsilon$ y $s \in N(s_2, t_2, \epsilon)$.

En todos los casos tenemos que $[s_1, t_1] \subset N([s_2, t_2], \epsilon)$.

Ahora sea $t \in [s_2, t_2]$. Veamos que $t \in N([s_1, t_1], \epsilon)$. Si $t \in [s_1, t_1]$ claramente se cumple. Si $t_1 \leq t_2$ tenemos que $t_1 \leq t \leq t_2$ y entonces:

$$0 \leq t - t_1 \leq t_2 - t_1 < \epsilon.$$

Por lo tanto $|t - t_1| < \epsilon$ y $t \in N([s_1, t_1], \epsilon)$.

Si $t_2 \leq t_1$ tenemos que $[s_2, t_2] \subset [s_1, t_1]$ y por lo tanto $t \in N([s_1, t_1], \epsilon)$.

En ambos casos tenemos que $[s_2, t_2] \subset N([s_1, t_1], \epsilon)$ y por lo tanto

$$\mathcal{H}([s_1, t_1], [s_2, t_2]) < \epsilon$$

y σ es continua. ■

Corolario 3.13: La función $\sigma_0: I \rightarrow C(I)$ definida por $\sigma_0(s) = [0, s]$ es continua.

Dem: Tenemos que $\sigma_0(s) = \sigma(0, s)$. Por el Lema 3.12, σ es continua, por lo tanto dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|s_1 - s_2| < \delta$ y $|t_1 - t_2| < \delta$. Entonces $\mathcal{H}([s_1, t_1], [s_2, t_2]) < \epsilon$. Sean $t_1, t_2 \in I$ tales que $|t_1 - t_2| < \delta$, entonces $\mathcal{H}([0, t_1], [0, t_2]) < \epsilon$. En consecuencia σ_0 es continua.

Lema 3.14: La función $T: C(X) \times C(Y) \rightarrow C(X \times Y)$ definida por $T(A, B) = A \times B$ es continua.

Dem: Sean $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in C(X) \times C(Y)$ tales que $\mathcal{H}_X(A_1, A_2) < \epsilon$ y $\mathcal{H}_Y(B_1, B_2) < \epsilon$. Sea $(a_1, b_1) \in A_1 \times B_1$. Como $a \in A$ y $\mathcal{H}_X(A_1, A_2) < \epsilon$, existe $a_2 \in A_2$ tal que $d_X(a_1, a_2) < \epsilon$. Igualmente, como $b_1 \in B_1$ y $\mathcal{H}_Y(B_1, B_2) < \epsilon$, existe $b_2 \in B_2$ tal que $d_Y(b_1, b_2) < \epsilon$. Entonces $(a_2, b_2) \in A_2 \times B_2$ y $D_{X \times Y}((a_1, b_1), (a_2, b_2)) < \epsilon$. Análogamente, dado $(a_2, b_2) \in A_2 \times B_2$ existe $(a_1, b_1) \in A_1 \times B_1$ tal que $D_{X \times Y}((a_1, b_1), (a_2, b_2)) < \epsilon$. Por lo tanto $\mathcal{H}_{X \times Y}(A_1 \times B_1, A_2 \times B_2) < \epsilon$ y T es continua. ■

Definimos las funciones $\alpha_i: C(X) \rightarrow C(C(X))$, $i \in \{1, 2, 3\}$ por:

$$\alpha_1(A) = \{M(A, t) \mid t \in [0, j(A)]\},$$

$$\alpha_2(A) = \{M(A, j(A)) \cup M(P, t) \mid t \in [0, m(A)]\} \text{ y}$$

$$\alpha_3(A) = \{M(P, t) \mid t \in [0, m(A)]\}.$$

Lema 3.15: Las funciones α_1 , α_2 y α_3 son continuas.

Dem:

α_1 es continua

Claramente la función $\zeta: C(X) \rightarrow C(C(X))$ dada por $\zeta(A) = \{A\}$ es continua. Por los Lemas 3.11, 3.14 y el Corolario 3.13 las funciones j , T y σ_0 definidas anteriormente son continuas. Como M es continua, por el Lema 2.1, la función imagen $M^*: 2^{C(X) \times [0, \infty)} \rightarrow 2^{C(X)}$ definida por $M^*(B) = \{M(B) \mid B \in B\}$ para toda $B \in 2^{C(X) \times [0, \infty)}$, es continua. Como $\alpha_1 = M^* \circ T \circ (\zeta \times (\sigma_0 \circ j))$, α_1 es continua.

α_2 es continua

Como la función M es continua, las funciones $c_1: C(X) \rightarrow C(X)$ y $c_2: [0, \infty) \rightarrow C(X)$ definidas por $c_1(A) = M(A, j(A))$ y $c_2(t) = M(P, t)$ son continuas. Por el Lema 2.4 la función $c_1 \times c_2: C(X) \times [0, \infty) \rightarrow C(X) \times C(X)$ definida por $(c_1 \times c_2)(A, t) = (M(A, j(A)), M(P, t))$ es continua. De los Lemas 0.7 y 2.5 las funciones unión $\cup$ y natural η son continuas. Por lo tanto la función $\hat{M}: C(X) \times [0, \infty) \rightarrow C(X)$ definida por $\hat{M} = \cup \circ \eta \circ (c_1 \times c_2)$ es continua y, por el Lema 2.1, su función imagen $\hat{M}^*: 2^{C(X) \times [0, \infty)} \rightarrow 2^{C(X)}$ dada por $\hat{M}^*(B) = \{M(B) \mid B \in B\}$ para toda $B \in 2^{C(X) \times [0, \infty)}$ es continua. Como $\alpha_2 = \hat{M}^* \circ T \circ (\zeta(A) \times (\sigma_0 \circ m))$, α_2 es continua.

α_3 es continua

La función constante $g: C(X) \rightarrow C(C(X))$ dada por $g(A) = \{P\}$ es continua. Como $\alpha_3(A) = M^* \circ T \circ (g \times (\sigma_0 \circ m))$, α_3 es continua. ■

Los Lemas 3.16, 3.17 y 3.18 nos ayudarán a ver que se cumple la condición de compatibilidad.

Lema 3.16: Sean $A \in C(X)$, $t_1 \in [0, j(A)]$ y $B = M(A, t_1)$. Entonces

- (1) $j(B) = j(A) - t_1$,
- (2) $M(B, j(B)) = M(A, j(A))$ y
- (3) $m(B) = m(A)$.

Dem:

(1) Para cada $t \in [0, \infty)$, $M(B, t) = M(A, t_1 + t)$. Por lo tanto, si $t_1 + t < j(A)$, entonces $P \notin M(B, t)$, pero $P \in M(A, j(A)) = M(A, t_1 + (j(A) - t_1)) = M(B, j(A) - t_1)$, así que $j(B) = j(A) - t_1$.

(2) Como $j(B) = j(A) - t_1$, entonces

$$M(B, j(B)) = M(A, t_1 + j(B)) = M(A, j(A)).$$

(3) Por (2) y la definición de m , tenemos que

$$m(A) = m(B).$$

por lo tanto, el Lema se cumple. ■

Lema 3.17: Sean $A \in C(X)$, $t_1 \in [0, m(A)]$ y $B = M(A, j(A)) \cup M(P, t_1)$. Entonces

(1) $j(B) = 0$ y

(2) $m(B) = m(A)$.

Dem: Tenemos que $P \subset B$ y por lo tanto $j(B) = 0$. Como $B = M(A, j(A)) \cup M(P, t_1)$. $M(A, j(A)) \subset M(P, m(A))$ y $t_1 \leq m(A)$, se sigue que $B \subset M(P, m(A))$. Por (1), $B = M(B, j(B))$, así que $m(B) \leq m(A)$. Como $M(A, j(A)) \subset M(B, j(B))$, tenemos que $m(A) \leq m(B)$. Por lo tanto se cumple (2). ■

Lema 3.18: Sean $A \in C(X)$, $t_1 \in [0, m(A)]$ y $B = M(P, t_1)$. Entonces

(1) $j(B) = 0$ y

(2) $m(B) = t_1$.

Dem: Como $P \subset M(P, t_1) = B$, tenemos que $j(B) = 0$. Como $M(B, j(B)) = B = M(P, t_1)$, entonces $m(B) = t_1$. ■

Finalmente veamos que $C(X)$ es suave por arcos en cada uno de sus puntos.

Teorema 3.19: Sea X un continuo localmente conexo. Entonces $C(X)$ es suave por arcos en cada uno de sus puntos.

Dem: Sean X un continuo localmente conexo, d una métrica convexa para X y $P \in C(X)$. Considérense las funciones α_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ definidas antes del Lema 3.15. Definimos la función $\alpha: C(X) \rightarrow C(C(X))$ por

$$\alpha(A) = \alpha_1(A) \cup \alpha_2(A) \cup \alpha_3(A).$$

Probaremos que α satisface las tres condiciones de suavidad.

Condición de arcos

Por los Lemas 0.5 y 0.3 tenemos que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y $A \in C(X)$, $\alpha_i(A)$ es un arco ordenado en $C(X)$ o un conjunto de un solo punto. De las definiciones de α_1 , α_2 y α_3 , para cada $A \in C(X)$, $\alpha(A) \in C(C(X))$. Es claro que $\alpha(P) = \{P\}$. Sean $A \in C(X)$ tal que $A \neq P$ y $B \in \alpha_1(A) \cap \alpha_2(A)$. Como $B \in \alpha_1(A)$, existe $t_1 \in [0, j(A)]$ tal que $B = M(A, t_1)$. Como $B \in \alpha_2(A)$, existe $t_2 \in [0, m(A)]$ tal que $B = M(A, j(A)) \cup M(P, t_2)$. Entonces $P \subset B$ y $P \subset M(A, t_1)$, por lo tanto $t_1 = j(A)$ y $\alpha_1(A) \cap \alpha_2(A) = \{M(A, j(A))\}$. Si $A \neq M(P, m(A))$ entonces $\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)$ es un arco ordenado de A a $M(P, m(A))$ y si $A = M(P, m(A))$, entonces $\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A) = \{M(P, m(A))\}$. Ahora supongamos que $B \in (\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)) \cap \alpha_3(A)$. Como $B \in \alpha_3(A)$ existe $t_1 \in [0, m(A)]$ tal que $B = M(P, t_1)$ y por lo tanto $P \subset B$. Si $B \in \alpha_1(A)$ entonces $B = M(A, j(A))$. Como $M(P, t_1) = M(A, j(A))$ entonces $t_1 = m(A)$. Si $B \in \alpha_2(A)$, entonces para alguna $t_2 \in [0, m(A)]$, $B = M(A, j(A)) \cup M(P, t_2)$. Como $(A, j(A)) \cup M(P, t_2) = M(P, t_1)$ entonces $t_1 = m(A)$. Por lo tanto

$$(\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)) \cap \alpha_3(A) = \{M(P, m(A))\}$$

Como $\alpha_3(A)$ es un arco ordenado de P a $M(P, m(A))$, concluimos que $\alpha(A)$ es un arco de A a P .

Condición de suavidad

La continuidad de α se sigue de los Lemas 0.7 y 3.15.

Condición de compatibilidad

Sean $A \in C(X)$ y $B \in \alpha(A)$. Si $B \in \alpha_1(A)$ existe $t_1 \in [0, j(A)]$ tal que $B = M(A, t_1)$. Por el Lema 3.16 (1), $j(B) = j(A) - t_1$. Por lo tanto si $t \in [0, j(B)]$ entonces $M(B, t) = M(A, t_1 + t) \in \alpha_1(A)$. Así $\alpha_1(B) \subset \alpha_1(A)$. Por el Lema 3.16 (2) y (3) tenemos que $\alpha_2(B) = \alpha_2(A)$ y $\alpha_3(B) = \alpha_3(A)$, y por lo tanto $\alpha(B) \subset \alpha(A)$.

Si $B \in \alpha_2(A)$ entonces para alguna $t_1 \in [0, m(A)]$, $B = M(A, j(A)) \cup M(P, t_1)$. Por el Lema 3.17 (1), $j(B) = 0$, así que $\alpha_1(B) = \{B\} \subset \alpha_2(A)$. Por el Lema 3.17 (2), $m(B) = m(A)$. Si $t \in [0, m(B)]$ entonces

$$M(B, j(B)) \cup M(P, t) = B \cup M(P, t) = M(A, j(A)) \cup M(P, t_1) \cup M(P, t).$$

Si $0 \leq t \leq t_1$ entonces

$$M(B, j(B)) \cup M(P, t) = M(A, j(A)) \cup M(P, t_1) = B.$$

Si $t_1 \leq t \leq m(B)$ entonces

$$M(B, j(B)) \cup M(P, t) = M(A, j(A)) \cup M(P, t).$$

Tenemos entonces que $\alpha_2(B) \subset \alpha_2(A)$. Como $m(B) = m(A)$, tenemos $\alpha_3(B) = \alpha_3(A)$ y por lo tanto $\alpha(B) \subset \alpha(A)$.

Finalmente supongamos que $B \in \alpha_3(A)$. Entonces para alguna $t_1 \in [0, m(A)]$, $B = M(P, t_1)$. Por el Lema 3.18 (1), $j(B) = 0$, así que $\alpha_1(B) = \{B\} \subset \alpha_3(A)$. Por el Lema 3.18 (2), $m(B) = t_1$. Si $t \in [0, m(B)]$ entonces

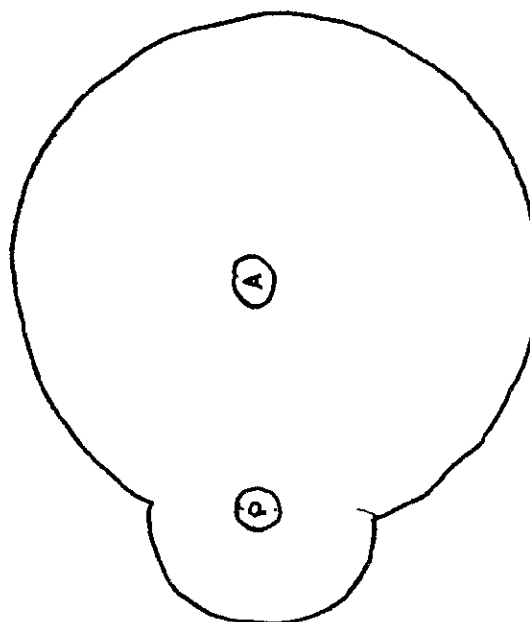
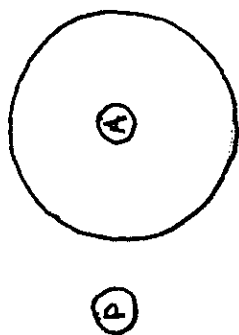
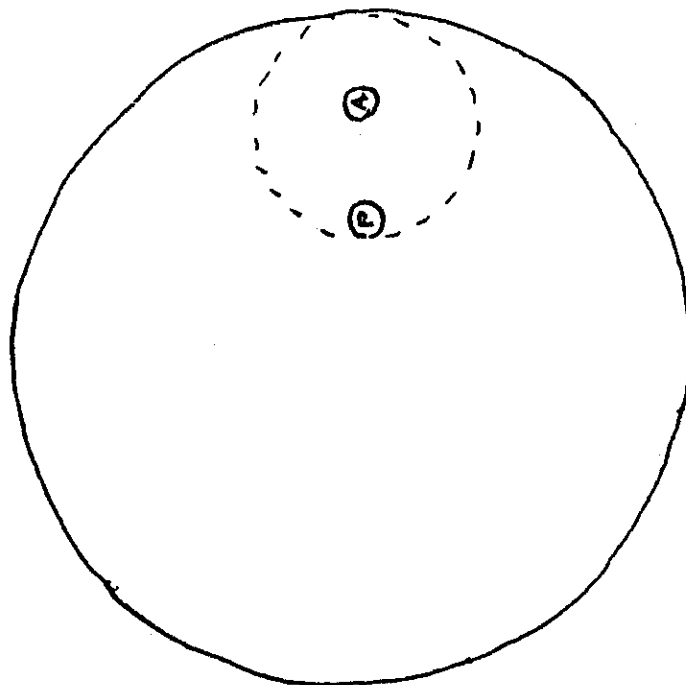
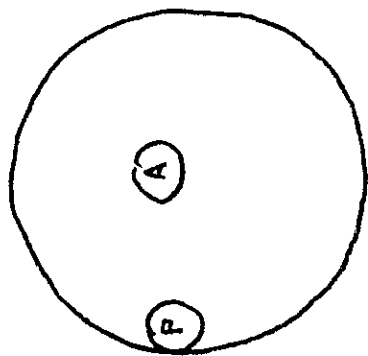
$$M(B, j(B)) \cup M(P, t) = B \cup M(P, t) = M(P, t_1) \cup M(P, t) = M(P, t_1).$$

Entonces $\alpha_2(B) = \{B\} \subset \alpha_3(A)$. Como $m(B) = t_1$ es claro que $\alpha_3(B) \subset \alpha_3(A)$. Por lo tanto $\alpha(B) \subset \alpha(A)$. Así α satisface la condición de compatibilidad en todos los casos.

Como α cumple con las tres propiedades, $C(X)$ es suave por arcos en P y como P fue escogido arbitrariamente, $C(X)$ es suave por arcos en cada uno de sus puntos. ■

Interpretación geométrica

La demostración del Teorema 3.18 la podemos visualizar geoméricamente de la siguiente manera. Escogemos un elemento P cualquiera de $C(X)$; entonces, dado un elemento A de $C(X)$ tomamos nubes cerradas cada vez más grandes hasta que cubran a P (cuando llegamos a $M(A, j(A))$). A partir de aquí, empezamos a "inflar" a $M(A, j(A))$ uniéndole nubes cerradas de P hasta llegar a $M(P, m(A))$; posteriormente, tomando radios cada vez menores, llevamos a $M(P, m(A))$ a $\{P\}$ con nubes cerradas de P . Todo esto se ilustra en la siguiente figura.





EL SABER DE MIS HIJOS
HARÁ MI GRANDEZA

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

CAPITULO 4

CONTINUOS HEREDITARIAMENTE INDESCOMPONIBLES

Estudiaremos ahora la suavidad por arcos en los hiperespacios de los continuos hereditariamente indescomponibles.

Def: Un continuo es *descomponible* si es la unión de dos subcontinuos propios, y es *hereditariamente descomponible* si cada uno de sus subcontinuos es descomponible.

Def: Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible, y es *hereditariamente indescomponible* si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.

Es fácil ver que un continuo es hereditariamente indescomponible si y sólo si dados A y B subcontinuos cualesquiera de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \subset B$ o $B \subset A$.

Hacemos notar que los continuos hereditariamente indescomponibles no son suaves por arcos ya que no contienen ningún arco; sin embargo sus hiperespacios poseen una propiedad que permite que sean suaves por arcos. Dicha propiedad se enuncia en el siguiente teorema.

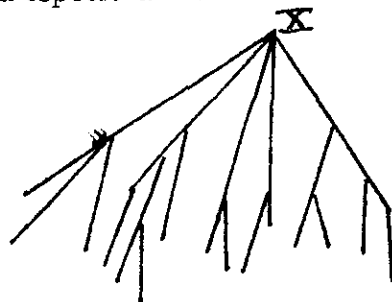
Lema 4.1: *Un continuo es hereditariamente indescomponible si y sólo si para cada subcontinuo propio A de X existe uno y sólo un arco ordenado de A a X .*

Dem:

$\Rightarrow$ Sea μ un mapeo de Whitney. Supongamos que existen dos arcos ordenados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $C(X)$ de A a X . Tenemos que $\mu|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow [\mu(A), \mu(X)]$ y $\mu|_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow [\mu(A), \mu(X)]$ son homeomorfismos. Tomemos $t \in [\mu(A), \mu(X)]$ y consideremos $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(t)$ y $(\mu|_{\mathcal{B}})^{-1}(t)$. Como X es hereditariamente indescomponible y ambos contienen a A , $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(t) = (\mu|_{\mathcal{B}})^{-1}(t)$. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ y por lo tanto existe un único arco de A a X .

$\Leftarrow$ Supongamos que X no es hereditariamente indescomponible. Entonces existen subcontinuos A , B y C de X tales que $A \neq C$, $B \neq C$ y $A \cup B = C$. Sea $\{x\} \in A \cap B$. Como $\{x\} \subset A$, por el Teorema 0.2 existe un arco ordenado ς_1 de $\{x\}$ a A . Igualmente, como $\{x\} \subset B$ existe un arco ordenado ς_2 de $\{x\}$ a B . Sea ς_A el único arco ordenado de A a X y sea ς_B el único arco ordenado de B a X . Tenemos que $\varsigma_1 \cup \varsigma_A$ es un arco ordenado de $\{x\}$ a X y sea ς_B el único arco ordenado de B a X . Tenemos que $\varsigma_1 \cup \varsigma_A$ es un arco ordenado de $\{x\}$ a X . Análogamente, $\varsigma_2 \cup \varsigma_B$ es un arco ordenado de $\{x\}$ a X , lo que contradice la hipótesis de la existencia de un único arco. Por lo tanto, X es hereditariamente indescomponible. ■

Del lema anterior, podemos concluir que para un continuo hereditariamente indescomponible, $C(X)$ es una especie de "árbol" como el que se muestra en la figura 14.



De esta manera, la suavidad por arcos en $C(X)$ se define de una manera muy natural.

Teorema 4.2: Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Entonces $C(X)$ es suave por arcos en X .

Dem: Sea $\alpha: C(X) \rightarrow C(C(X))$ definida por

$$\alpha(A) = \text{al \u00fanico arco en } C(X) \text{ de } A \text{ a } X$$

para toda $A \in C(X)$. Observemos que si $A \subset B$ son subcontinuos de X entonces por el Lema 4.1, $B \in \alpha(A)$ (de no ser as\u00ed, podr\u00edamos encontrar un $B' \in \alpha(A)$ con $\mu(B) = \mu(B')$; pero entonces al no ser ajenos B y B' tendr\u00edamos que $B \subsetneq B'$ o $B' \subsetneq B$, lo cual es imposible pues μ es mapeo de Whitney).

Veamos que cumple con las condiciones que definen a la suavidad por arcos.

Condici\u00f3n de arcos

La condici\u00f3n de arcos se cumple por la manera en que est\u00e1 definida α y adem\u00e1s es claro que $\alpha(X) = \{X\}$.

Condici\u00f3n de suavidad

Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesi\u00f3n en $C(X)$ que converja a $A \in C(X)$ y sea $B \in \limsup \alpha(A_n)$. Consideremos una subsucesi\u00f3n $(\alpha(A_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ tal que cada $\alpha(A_{n_k})$ contenga un conjunto B_{n_k} con $B_{n_k} \rightarrow B$. Como $A_{n_k} \subset B_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $A \subset B$ y, como se se\u00f1al\u00f3 anteriormente, $B \in \alpha(A)$. Por lo tanto $\limsup \alpha(A_n) \subset A$.

Sea $B \in \alpha(A)$. Vamos a probar que $B \in \liminf \alpha(A_n)$. Si $B = A$ o $B = X$, entonces es obvio. Supongamos que $A \subsetneq B \subsetneq X$. Tomemos μ un mapeo de Whitney y sea $t_0 = \mu(B)$. Como $A_n \rightarrow A$, se tiene que $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A) < t_0$, as\u00ed que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

entonces $\mu(A_n) < t_0$. Construyamos la sucesión $(B_n)_{n=1}^\infty$ en $C(X)$ tal que $B_n \in \alpha(A_n)$ y $\mu(B_n) = t_0$ para toda $n > N$. Sea $(B_{n_k})_{k=1}^\infty$ una subsucesión convergente de $(B_n)_{n=1}^\infty$ y sea $B_0 = \lim B_{n_k}$. Tenemos que $A_{n_k} \subset B_{n_k}$, así que $A \subset B_0$; por tanto, por el argumento dado arriba, $B_0 \in \alpha(A)$. Como $\mu(B_0) = t_0$ y X es hereditariamente indescomponible, se sigue que $B = B_0$. Por lo tanto $B \in \liminf \alpha(A_n)$ y α es continua. ■

Condición de compatibilidad

Sean $A \in C(X)$ y $B \in \alpha(A)$. Por la observación hecha al principio es claro que $\alpha(B) \subset \alpha(A)$. Por lo tanto α cumple la condición de compatibilidad.

Como α cumple las tres condiciones, $C(X)$ es suave por arcos en X . ■

Para el caso de 2^X , la suavidad por arcos se define de manera similar.

Teorema 4.3: Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Entonces 2^X es suave por arcos en X .

Dem: Sea μ un mapeo de Whitney para $C(X)$. Supongamos que $\mu(X) = 1$. Definamos $h: X \times I \rightarrow C(X)$ por

$$h(x, t) = \text{el único elemento } A \text{ de } C(X) \text{ tal que } x \in A \in \mu^{-1}(t).$$

(La unicidad de dicho elemento está dada por la observación hecha en el teorema anterior.)

Como X es hereditariamente indescomponible, tenemos que si $t_1 < t_2$ entonces $h(x, t_1) \subsetneq h(x, t_2)$

Veamos que h es continua. Sea $((x_n, t_n))_{n=1}^\infty$ una sucesión en $X \times I$ tal que $(x_n, t_n) \rightarrow (x_0, t_0)$. Sean $A_n = h(x_n, t_n)$ y $A_0 = h(x_0, t_0)$. Tomemos una subsucesión convergente $(A_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(A_n)_{n=1}^\infty$ y sea A su límite. Tenemos que $\mu(A_{n_k}) = t_{n_k}$ y, como $\mu(A_{n_k}) \rightarrow \mu(A)$, entonces $\mu(A) = t_0$. Como $x_{n_k} \rightarrow x_0$ y $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_0 \in A$, así que, por la unicidad de A_0 , concluimos que $A = A_0$. Entonces por el Lema 1.6, h es continua.

Definamos $H: 2^X \times I \rightarrow 2^X$ por $H(A, t) = \bigcup_{x \in A} h(x, t)$. Entonces H es continua, ya que $H(A, t) = \bigcup \circ h^*(A \times \{t\})$ y las funciones unión $\bigcup$ e imagen h^* son continuas por los Lemas 1.5 y 2.1.

Sea $\hat{H}: 2^X \rightarrow C(2^X)$ la función inducida por H definida por

$$\hat{H}(A) = \{H(A, t) | t \in I\}.$$

Veamos que cumple con las condiciones que definen a un continuo suave por arcos.



Condición de arcos

De la definición de $\hat{H}$ es claro que $\hat{H}(X) = \{X\}$. Sea $t_1 < t_2$; entonces $h(x, t_1) \subsetneq h(x, t_2)$ para toda $x \in A$, por lo que $H(A, t_1) \subsetneq H(A, t_2)$. Por lo tanto $\hat{H}(A)$ es un continuo en 2^X que es una cadena respecto a la inclusión de conjuntos y, por el Lema 0.5, es un arco ordenado. Además, como $H(A, 0) = A$ y $H(A, 1) = X$, $\hat{H}(A)$ es un arco ordenado de A a X .

Condición de suavidad

Como H es continua y $\hat{H}$ es la función inducida por H , el Lema 2.8 nos dice que $\hat{H}$ es continua.

Condición de compatibilidad

Sean $A \in 2^X$, $t_1 \in I$ y $B = H(A, t_1)$. Si $t \in I$, entonces

$$\begin{aligned} H(B, t) &= \bigcup_{y \in B} h(y, t) \\ &= \bigcup_{y \in \bigcup_{x \in A} h(x, t_1)} h(y, t). \end{aligned}$$

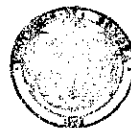
Si $0 \leq t \leq t_1$, entonces para cada $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $h(y, t) \subset h(x, t_1)$. Se sigue de esto que $H(B, t) = B = H(A, t_1)$. Si $t_1 \leq t \leq 1$, entonces para cada $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $h(y, t) = h(x, t)$, de donde $H(B, t) = H(A, t)$. Por lo tanto $\hat{H}(B) \subset \hat{H}(A)$, por lo que se cumple la condición de compatibilidad.

Como $\hat{H}$ cumple las tres condiciones, 2^X es suave por arcos en X . ■

CAPITULO 5

SUAVIDAD POR ARCOS EN CONOS

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES
FEDERALES



Enfocaremos ahora nuestro estudio de la suavidad por arcos a los conos. Antes de hacer esto, recordemos la Propiedad Universal del Cociente y veamos que la función imagen de una identificación en los hiperespacios básicos es a su vez, identificación.

Teorema 5.1: Sea $p: X \rightarrow Y$ una identificación. Sean Z un espacio y $g: X \rightarrow Z$ una función continua que es constante en cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$, para toda $y \in Y$. Entonces g induce una función continua $f: Y \rightarrow Z$ tal que $f \circ p = g$, como lo muestra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ g \downarrow & \swarrow f & \\ Z & & \end{array}$$

Dem: Para cada $y \in Y$, el conjunto $g(p^{-1}(\{y\}))$ es un conjunto de un solo punto en Z porque g es constante en $p^{-1}(\{y\})$. Si definimos $f(y)$ como este punto, entonces hemos definido una función $f: Y \rightarrow Z$, tal que para cada $x \in X$, $f(p(x)) = g(x)$. Para mostrar que f es continua, sea V un conjunto abierto en Z . La continuidad de g implica que

$$g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$$

es abierto en X . Como p es identificación, $f^{-1}(V)$ debe ser abierto en Y . ■

Lema 5.2: Sean X y Y continuos. Si $p: X \rightarrow Y$ es identificación, entonces la función imagen $p^*: 2^X \rightarrow 2^Y$ ($p^*(A) = \{p(a) | a \in A\}$ para toda $A \in 2^X$) es identificación.

Dem: Por el Lema 2.1 p^* es continua. Como p es identificación, dado $B \in 2^Y$, el conjunto $A = \{a \in X | f(a) = b \text{ para toda } b \in B\}$ es cerrado en X y satisface $p^*(A) = B$, por lo tanto p^* es sobre. Además p^* es cerrada por ser 2^X compacto y 2^Y Hausdorff, así que p^* es identificación. ■

Def: El cono de un continuo X , denotado por $\text{Cono}X$, es el espacio cociente de $X \times I$ obtenido identificando los puntos de $X \times \{1\}$ en un solo punto que llamaremos vértice del $\text{Cono}X$ y que denotaremos por v . Denotemos los puntos de $\text{Cono}X - \{v\}$ por (x, t) con $0 \leq t < 1$ y convengamos que $(x, 1) = v$ para toda $x \in X$. Si $Y \subset X$ definamos $\text{Cono}Y$ como el subconjunto de $\text{Cono}X$ dado por $\text{Cono}Y = \{(x, t) \in \text{Cono}X | x \in Y\}$.

Veamos ahora que el cono de cualquier continuo X es suave por arcos en su vértice.

Teorema 5.3: Sea X un continuo. Entonces $\text{Cono}X$ es suave por arcos en v .

Dem: Definamos la función $\Upsilon: \text{Cono}X \rightarrow C(\text{Cono}X)$ por

$$\Upsilon(x, t) = \{(x, s) | t \leq s \leq 1\}.$$

Obsérvese que Υ está bien definida pues para $t = 1$, si $x \in X$ entonces $\{(x, s) | t \leq s \leq 1\} = \{v\}$. Veamos que Υ cumple con las propiedades que definen a un continuo suave por arcos.

Condición de arcos

Como observamos arriba $\Upsilon(v) = \{v\}$; además si $(x, t) \neq v$, entonces $\Upsilon(x, t)$ es un arco de (x, t) a v .

Condición de suavidad

Definamos la función $\Upsilon': X \times I \rightarrow C(X \times I)$ por $\Upsilon'(x, t) = \{(x, s) | t \leq s \leq 1\}$. Vamos a ver que Υ' es continua. La función $\sigma_1: I \rightarrow C(I)$ definida por $\sigma_1(s) = [s, 1]$ es continua (ver Corolario 3.13), al igual que la función $\zeta: X \rightarrow C(X)$ dada por $\zeta(x) = \{x\}$ y que la función $T: C(X) \times C(Y) \rightarrow C(X \times Y)$ descrita en el Lema 3.14. Como $\Upsilon' = T \circ (\zeta \times \sigma_1)$, tenemos que Υ' es continua.

Sea $p: X \times I \rightarrow \text{Cono}X$ la identificación de $X \times I$ a $\text{Cono}X$. Por el Lema 5.2, $p^*: 2^{X \times I} \rightarrow 2^{\text{Cono}X}$ es una identificación. Entonces la función $p^*|_{C(X \times I)}: C(X \times I) \rightarrow C(\text{Cono}X)$ es continua y por lo tanto también lo es la función $g = p^*|_{C(X \times I)} \circ \Upsilon': X \times I \rightarrow C(\text{Cono}X)$.

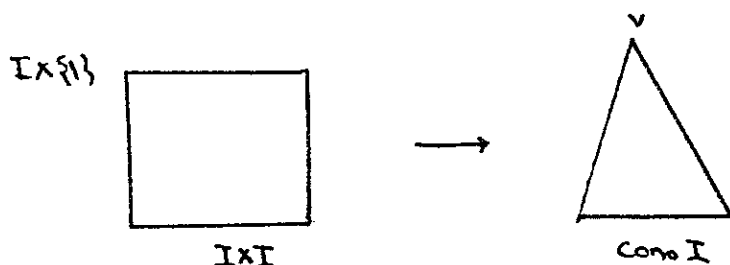
Sea $(x, t) \in \text{Cono}X$. Si $t < 1$ entonces tenemos que $p^{-1}(\{(x, t)\}) = \{(x, t)\}$, por lo tanto $g(\{(x, t)\}) = \{g(x, t)\}$. Si $t = 1$, tenemos que $p^{-1}(\{(x, t)\}) = p^{-1}(\{v\}) = X \times \{1\}$, así que $g(X \times \{1\}) = \{v\}$. Por lo tanto g es constante en $p^{-1}(\{(x, t)\})$ para toda $(x, t) \in \text{Cono}X$. Por el Teorema 5.1 la función $\Upsilon: \text{Cono}X \rightarrow C(\text{Cono}X)$ es continua.

Condición de compatibilidad

Sean $(x, t) \in \text{Cono}X$ y $(y, t_1) \in \Upsilon(x, t)$. Entonces $t_1 \in [t, 1]$ y $(y, t_1) = (x, t_1)$, por lo tanto $\Upsilon(y, t_1) \subset \Upsilon(x, t)$, cumpliéndose la condición de compatibilidad.

Como Υ cumple las tres condiciones anteriores, $\text{Cono}X$ es suave por arcos en v . ■

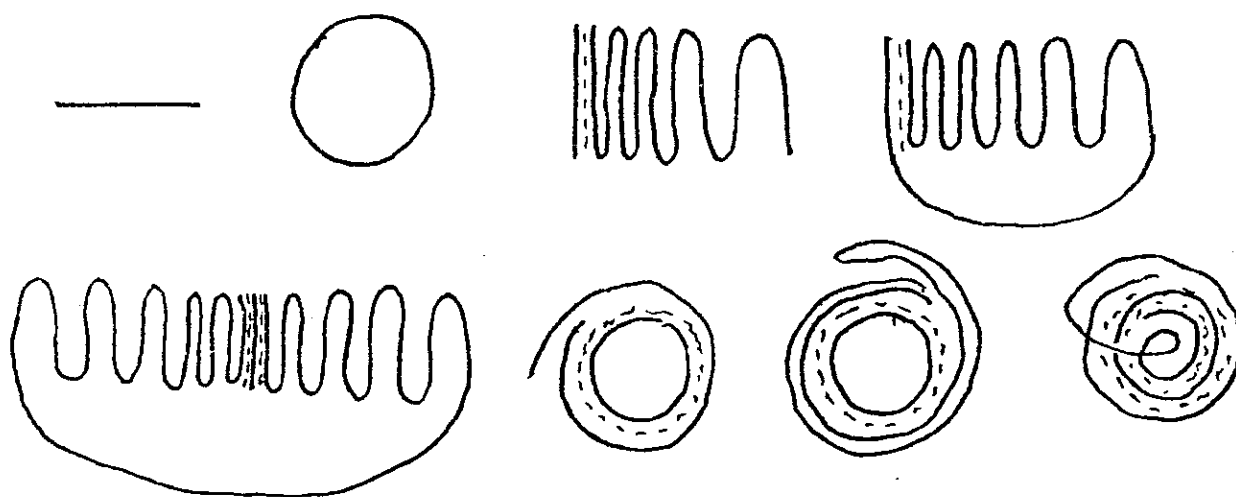
Ejemplo 5.4: Consideremos el intervalo I . Como se puede ver en la figura 15, $\text{Cono } I$ es homeomorfo a un triángulo.



Entonces, del Ejemplo 0.1 tenemos que $\text{Cono } I$ es homeomorfo a $C(I)$, además, el homeomorfismo que tomamos manda a I precisamente al vértice del cono (Ejemplo 0.1 (1)); por lo tanto, $C(I)$ es suave por arcos en I .

Existen más continuos aparte de I que tienen la propiedad de que su cono y su hiperespacio de subcontinuos son homeomorfos. En [6] se demuestra que existen exactamente ocho continuos hereditariamente descomponibles para los cuales $C(X)$ y $\text{Cono } X$ son homeomorfos. Esos ocho continuos son los siguientes y se encuentran representados en la figura 16.

- (1) $I = [0, 1]$;
- (2) $S_0 =$ la cerradura de $\{(x, \sin \frac{1}{x}) | 0 < x \leq 1\}$;
- (3) $S_1^1 = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$;
- (4) $S_2^1 = S_0$ con los puntos $(0, -1)$ y $(1, \sin 1)$ identificados;
- (5) $S_3^1 = S_0 \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) | -1 \leq x < 0\}$ con los puntos $(1, \sin 1)$ y $(-1, \sin -1)$ identificados;
- (6) $(SP)_1 = S^1 \cup \{[1 + (\frac{1}{t})] \cdot e^{it} | t \geq +1\}$;
- (7) $(SP)_2 = (SP)_1 \cup \{[1 - (\frac{1}{t})] \cdot e^{it} | t \geq +1\}$ con los puntos $2e^{i1}$ y $(0, 0)$ identificados;
- (8) $(SP)_3 = (SP)_1 \cup \{[1 + (\frac{1}{t})] \cdot e^{it} | t \leq -1\}$ con los puntos $2e^{i1}$ y $(0, 0)$ identificados.



El continuo S_2^1 se conoce como el círculo de Varsovia. Todos ellos pueden ser inmersos en $\mathbb{R}^2$ excepto $(SP)_3$. Para todos estos continuos, $\text{Cono}X$ y $C(X)$ son homeomorfos pero, dependiendo del continuo X , el homeomorfismo puede o no llevar X al vértice del cono. De esta manera, usando el teorema anterior concluimos que $C(X)$ es suave por arcos, pero no necesariamente en X .

Veremos que en estos ocho casos también $C(X)$ es suave por arcos en X .

Lema 5.5: Sean X y Y espacios topológicos y $(x, y) \in X \times Y$. Entonces $X \times Y$ es localmente conexo en (x, y) si y sólo si X es localmente conexo en x y Y es localmente conexo en y .

Dem: $\Rightarrow$ Sean $U \subset X$ vecindad de x y $V \subset Y$ vecindad de y . Entonces $U \times V$ es una vecindad de (x, y) en $X \times Y$. Sea W una vecindad conexa de (x, y) tal que $W \subset U \times V$. Como las proyecciones $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ son continuas y abiertas, tenemos que $\pi_1(W)$ es una vecindad conexa de x contenida en U , y $\pi_2(W)$ es una vecindad conexa de y contenida en V . Por lo tanto X es localmente conexo en x y Y es localmente conexo en y .

$\Leftarrow$ Sea W una vecindad de (x, y) . Entonces $\pi_1(W)$ es una vecindad de x y $\pi_2(W)$ es una vecindad de y . Como X es localmente conexo en x , existe $W_x \subset \pi_1(W)$ vecindad conexa de x . Análogamente, como Y es localmente conexo en y , existe $W_y \subset \pi_2(W)$ vecindad conexa de y . Entonces $W_x \times W_y$ es una vecindad conexa de (x, y) tal que $W_x \times W_y \subset W$. Por lo tanto $X \times Y$ es localmente conexo en (x, y) . ■

Lema 5.6: Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es localmente conexo en X .

Dem: Sea $\epsilon > 0$ y sea $B_{\mathcal{H}}(X, \epsilon)$ la bola en $C(X)$ centrada en X de radio ϵ (respecto a la métrica de Hausdorff). Vamos a probar que $B_{\mathcal{H}}(X, \epsilon)$ es conexa por trayectorias (por consiguiente, es conexa). Sea $A \in B_{\mathcal{H}}(X, \epsilon)$. De la definición de la métrica $\mathcal{H}$, tenemos que $A \subset N(X, \epsilon) = X$ y $X \subset N(A, \epsilon)$. Como $A \subset X$, por el Teorema 0.1, existe un arco ordenado $\varsigma: I \rightarrow C(X)$ tal que $\varsigma(0) = A$ y $\varsigma(1) = X$. Claramente si $B \in \varsigma(I)$, entonces $B \subset N(X, \epsilon)$ y $X \subset N(A, \epsilon) \subset N(B, \epsilon)$, así tenemos que $\varsigma(I) \subset B_{\mathcal{H}}(X, \epsilon)$. ■

Bajo algunas hipótesis, el cono de un continuo X puede ser suave por arcos en otros puntos aparte de su vértice, como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 5.7: Sea X un continuo y sea $p \in X$. Si existe una vecindad cerrada y conexa M de p , tal que (M, p) es un continuo suave por arcos, entonces para cada $r \in I$, $ConoX$ es suave por arcos en (p, r) .

Dem: Tomemos una función $\alpha: M \rightarrow C(M)$ que cumpla con las tres condiciones que definen a un continuo suave por arcos. Sea μ un mapeo de Whitney y sea $\delta = \inf\{\mu(\alpha(x)) \mid x \in \partial M\}$. Definamos $Q = \{x \in M \mid \mu(\alpha(x)) \leq \delta\}$. Entonces $Q \subset M$ y Q es cerrado ya que $Q = (\mu \circ \alpha)^{-1}([0, \delta])$. Por lo tanto Q es un subcontinuo de M suave por arcos en p . Para simplificar la notación, supongamos que $\delta = 1$. Sea Ψ la parametrización uniforme que determina α según se describe en (1, a). Denotemos a $\Psi(x, s)$ por $x(s)$. Sea Υ la función del Teorema 5.3 usada para demostrar que $ConoX$ es suave por arcos en v ; tomemos $r \in I$ y sea $\theta: X \times I \rightarrow I$ la función definida por

$$\theta(x, t) = \begin{cases} (1-r)\mu(\alpha(x)) + r & \text{si } t \in [0, (1-r)\mu(\alpha(x)) + r] \\ t & \text{si } t \in [(1-r)\mu(\alpha(x)) + r, 1] \end{cases}$$

Esta función es continua por el Lema 1.8.

Definamos la función $\tilde{\alpha}: ConoX \rightarrow C(ConoX)$ por

$$\tilde{\alpha}(x, t) = \begin{cases} \{(x, s) \mid t \leq s \leq \theta(x, t)\} \cup \{(x(s), \theta(x, t)) \mid s \in I\} \\ \cup \{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(x, t)\} & \text{si } x \in ConoQ \\ \Upsilon(x, t) \cup \Upsilon(p, r) & \text{si } x \in ConoX - (ConoQ)^\circ \end{cases}$$

Vamos a ver que $\tilde{\alpha}$ está bien definida. Para esto primero veamos que ambas definiciones coinciden para los puntos de $\partial(ConoQ)$. Sea $(x, t) \in \partial(ConoQ)$. Entonces $\mu(\alpha(x)) = 1$ por lo tanto, $\theta(x, t) = 1$ y, usando la definición de Υ tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(x, t) &= \{(x, s) \mid t \leq s \leq 1\} \cup \{(x(s), 1) \mid s \in I\} \cup \{(p, s) \mid r \leq s \leq 1\} \\ &= \Upsilon(x, t) \cup \{v\} \cup \Upsilon(p, r) \\ &= \Upsilon(x, t) \cup \Upsilon(p, r); \end{aligned}$$

por lo tanto ambas definiciones coinciden en (x, t) . Ahora veamos que $\tilde{\alpha}$ está bien definida para v . Tomemos $(x, 1) \in ConoX$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(x, 1) &= \Upsilon(x, 1) \cup \Upsilon(p, r) \\ &= \{v\} \cup \Upsilon(p, r) \\ &= \Upsilon(p, r); \end{aligned}$$

que no depende de x .

Vamos a verificar que $\tilde{\alpha}$ cumple con las condiciones de la suavidad por arcos.



Condición de arcos

Tenemos que $\tilde{\alpha}(p, r) = \{(p, r)\}$. Claramente, cada una de las partes que constituyen la función $\tilde{\alpha}$ es un arco en $\text{Cono}X$. Es fácil verificar que en cada caso, dichos arcos se unen en sus extremos formando un nuevo arco. Si $(x, t) \in \text{Cono}Q$, $\tilde{\alpha}(x, t)$ es la unión de tres arcos: un arco de (x, t) a $(x, \theta(x, t))$, otro arco de $(x, \theta(x, t))$ a $(x(0), \theta(x, t)) = (p, \theta(x, t))$, y un tercero de $(p, \theta(x, t))$ a (p, r) . Si $(x, t) \notin \text{Cono}Q$, $\tilde{\alpha}(x, t)$ está formado por dos arcos: uno de (x, t) a v , y otro de v a (p, r) . Por lo tanto, en todos los casos $\tilde{\alpha}(x, t)$ es un arco de (x, t) a (p, r) para toda $(x, t) \in \text{Cono}X$.

Condición de suavidad

Definamos las funciones $\tilde{\alpha}_i: \text{Cono}Q \rightarrow C(\text{Cono}QX)$, $i = 1, 2, 3$, por

$$\tilde{\alpha}_1(x, t) = \{(x, s) \mid t \leq s \leq \theta(x, t)\},$$

$$\tilde{\alpha}_2(x, t) = \{(x(s), \theta(x, t)) \mid s \in I\} \text{ y}$$

$$\tilde{\alpha}_3(x, t) = \{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(x, t)\}.$$

Es claro que en $\text{Cono}X - (\text{Cono}Q)^\circ$ la función $\tilde{\alpha}$ es continua. Para probar que es continua en $\text{Cono}Q$, bastará probar que cada una de las funciones $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ y $\tilde{\alpha}_3$ definidas arriba es continua (por el Lema 0.5 y el Teorema 5.1).

$\tilde{\alpha}_1$ es continua

Las proyecciones $\pi_Q: Q \times I \rightarrow Q$ y $\pi_I: Q \times I \rightarrow I$ son continuas. Es claro que la función $\zeta: Q \rightarrow C(Q)$ definida por $\zeta(x) = \{x\}$ es continua. Sea $\sigma: I \times I \rightarrow C(I)$ la función continua descrita en el Lema 4.3. Aplicando el Lema 2.6 a las funciones π_I y θ , tenemos que la función $(\pi_I, \theta): Q \times I \rightarrow I \times I$ definida por $(\pi_I, \theta)(x, t) = (t, \theta(x, t))$ es continua. Empleando nuevamente el Lema 2.6 con las funciones $\alpha \circ \pi_Q$ y $\sigma \circ (\pi_I, \theta)$, la función $h: Q \times I \rightarrow C(Q) \times C(I)$ definida por $h(x, t) = (\{x\}, [t, \nu(x, t)])$ es continua. Sea $T: C(Q) \times C(I) \rightarrow C(Q \times I)$ la función definida en el Lema 3.14. Entonces $\tilde{\alpha}_1 = T \circ h$, así que $\tilde{\alpha}_1$ es continua.

$\tilde{\alpha}_2$ es continua

Consideremos las funciones $\pi_i: Q \times I \times I \rightarrow Q \times I$ con $i \in \{1, 2\}$ definidas por $\pi_1(x, s, t) = (x, t)$ y $\pi_2(x, s, t) = (x, s)$. Sea $\Psi: Q \times I \rightarrow Q$ la parametrización uniforme para Q . Entonces las funciones $\Psi \circ \pi_2: Q \times I \times I \rightarrow Q$ y $\theta \circ \pi_1: Q \times I \times I \rightarrow I$ son continuas. Aplicando el Lema 2.6 a las funciones anteriores, tenemos que la función $\varrho: Q \times I \times I \rightarrow Q \times I$ definida por $\varrho(x, t, s) = (x(s), \theta(x, t))$ es continua y, por el Lema 2.1, su función imagen $\varrho^*: C(Q \times I \times I) \rightarrow C(Q \times I)$ también lo es. Por el Lema 2.7, la función $\tau: Q \times I \rightarrow C(Q \times I \times I)$ definida por $\tau(x, t) = \{(x, t)\} \times I$ es continua. Tenemos $\tilde{\alpha}_2 = \varrho^* \circ \tau$ y, por lo tanto, $\tilde{\alpha}_2$ es continua.

$\tilde{\alpha}_3$ es continua

La función constante $e: I \rightarrow Q$ definida por $e(s) = p$ es continua. Aplicando el Lema 2.6 a la función e y a la identidad en I , tenemos que la función $m: I \rightarrow Q \times I$ definida por $m(s) = (p, s)$ es continua y por el Lema 2.1, también lo es la función imagen $m^*: C(I) \rightarrow C(Q \times I)$. Por otro lado, apliquemos nuevamente el Lema 2.6 a la función constante $k: Q \times I \rightarrow I$ dada por $k(x, t) = r$, y a la función θ , obteniendo la función continua $n: Q \times I \rightarrow I \times I$ dada por $n(x, t) = (r, \theta(x, t))$. Entonces $\tilde{\alpha}_3 = m^* \circ \sigma \circ n$ y, en consecuencia, $\tilde{\alpha}_3$ es continua.

Como $\tilde{\alpha}$ es continua en $ConoQ$ y en $ConoX - (ConoQ)^\circ$ y está bien definida, por el Lema 1.8 y el Teorema 5.1, es continua.

Condición de compatibilidad

Sean $(x, t) \in ConoX$ y $(y, t_1) \in \tilde{\alpha}(x, t)$. Si $(x, t) \in ConoQ$ tenemos tres casos:

(i) $t_1 \in [t, \theta(x, t)]$ y $(y, t_1) = (x, t_1)$. Entonces $\theta(y, t_1) = \theta(x, t_1) = \theta(x, t)$ y tenemos

$$\{(y, s) \mid t_1 \leq s \leq \theta(y, t_1)\} = \{(x, s) \mid t_1 \leq s \leq \theta(x, t)\} \subset \{(x, s) \mid t \leq s \leq \theta(x, t)\},$$

$$\{(y(s), \theta(y, t_1)) \mid s \in I\} = \{(x(s), \theta(x, t)) \mid s \in I\} \text{ y}$$

$$\{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(y, t_1)\} = \{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(x, t)\}$$

Por lo tanto $\tilde{\alpha}(y, t_1) \subset \tilde{\alpha}(x, t)$.

(ii) Existe $s_1 \in I$ tal que $(y, t_1) = (x(s_1), \theta(x, t))$. Como $y = x(s_1)$ tenemos que $\mu(\alpha(y)) = s_1 \mu(\alpha(x))$ (ver definición de la parametrización uniforme Ψ en (1, a)). Si $\theta(x, t) = t$ entonces $t_1 = t \geq (1 - r)\mu(\alpha(x)) + r \geq (1 - r)\mu(\alpha(x)) + r$. Si $\theta(x, t) = (1 - r)\mu(\alpha(x)) + r$ entonces $t_1 = (1 - r)\mu(\alpha(x)) + r \geq (1 - r)\mu(\alpha(x)) + r$. Por lo tanto $\theta(y, t_1) = t_1 = \theta(x, t)$. Así tenemos que

$$\{(y, s) \mid t_1 \leq s \leq \theta(y, t_1)\} = \{(y, t_1)\} \subset \{(x(s), \theta(x, t)) \mid s \in I\},$$

$$\{(y(s), \theta(y, t_1)) \mid s \in I\} = \{(x(s_1 s), \theta(x, t)) \mid s \in I\} \subset \{(x(s), \theta(x, t)) \mid s \in I\} \text{ y}$$

$$\{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(y, t_1)\} = \{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(x, t)\}.$$

Por lo tanto $\tilde{\alpha}(y, t_1) \subset \tilde{\alpha}(x, t)$.

(iii) $t_1 \in [r, \theta(x, t)]$ y $(y, t_1) = (p, t_1)$. Como $t_1 \geq r = (1 - r)\mu(\alpha(p)) + r$ tenemos que $\theta(y, t_1) = t_1$. Así

$$\{(y, s) \mid t_1 \leq s \leq \theta(y, t_1)\} = \{(y, t_1)\} \subset \{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(x, t)\},$$

$$\{(y(s), \theta(y, t_1)) \mid s \in I\} = \{(p, t_1)\} \subset \{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(x, t)\} \text{ y}$$

$$\{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(y, t_1)\} = \{(p, s) \mid r \leq s \leq \theta(x, t)\}.$$

Por lo tanto $\tilde{\alpha}(y, t_1) \subset \tilde{\alpha}(x, t)$.

Si $(x, t) \in \text{Cono}X - \text{Cono}Q$, tenemos dos casos:

(iv) $(y, t_1) \in \Upsilon(x, t)$. Entonces $\Upsilon(y, t_1) \subset \Upsilon(x, t)$ porque la función Υ cumple con la condición de compatibilidad. Por lo tanto $\tilde{\alpha}(y, t_1) \subset \tilde{\alpha}(x, t)$.

(v) $(y, t_1) \in \Upsilon(p, r)$. Por (iii) tenemos que $\tilde{\alpha}(y, t_1) = \{(p, s) \mid r \leq s \leq t_1\}$ y por lo tanto $\tilde{\alpha}(y, t_1) \subset \tilde{\alpha}(x, t)$.

En todos los casos se cumple la condición de compatibilidad.

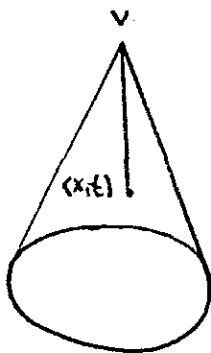
Como $r \in I$ fue escogida arbitrariamente, tenemos que $\text{Cono}X$ es suave por arcos en (p, r) para toda $r \in I$. ■

Corolario 5.8: Si X es uno de los ocho continuos hereditariamente descomponibles para los cuales $C(X)$ y $\text{Cono}X$ son homeomorfos, entonces $C(X)$ es suave por arcos en cada punto en el cual $C(X)$ es localmente conexo. En particular $C(X)$ es suave por arcos en X .

Dem: Sea $(x, t) \in \text{Cono}X$ un punto de conexidad local. Si $(x, t) = v$, por el Teorema 5.3, $\text{Cono}X$ es suave por arcos en (x, t) . Si $(x, t) \neq v$, como $\text{Cono}X - \{v\}$ es homeomorfo a $X \times [0, 1)$, por el Lema 5.5, X es localmente conexo en x . Si X es uno de los ocho continuos en cuestión y X es localmente conexo en x , entonces x tiene vecindades arbitrariamente pequeñas que son arcos. Por lo tanto, por el Teorema 5.7, $C(X)$ es suave por arcos en (x, t) . Como $C(X)$ es localmente conexo en X (ver Lema 5.6), $C(X)$ es suave por arcos en X . ■

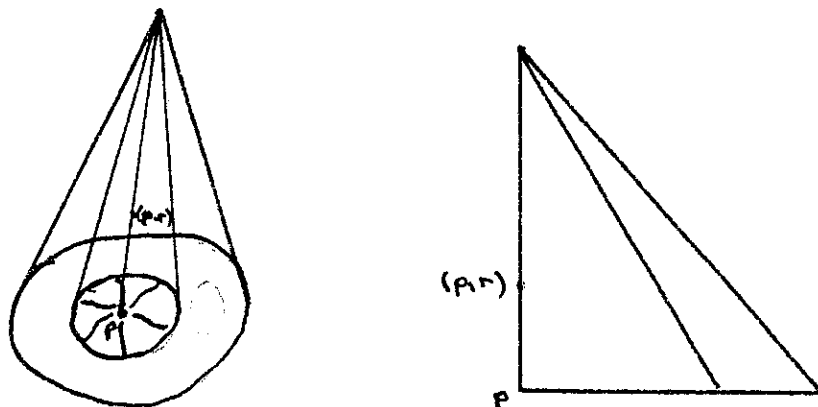
Interpretación geométrica

En el Teorema 5.3 a cada punto de $\text{Cono}X$ se le asigna el arco natural que lo lleva al vértice como se muestra en la figura 17.

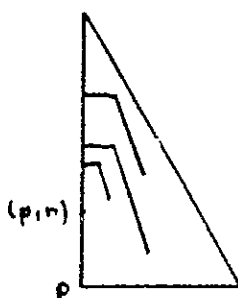


En el Teorema 5.7, tenemos un continuo X con una vecindad cerrada Q suave por arcos en p , representada en la figura 18

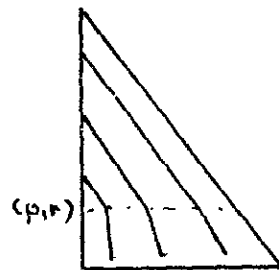
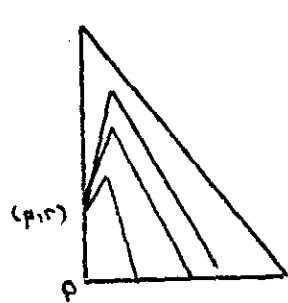
Para demostrar que $ConoX$ es suave por arcos en (p, r) , lo que tenemos que hacer es asignarle a cada punto (x, t) de $ConoX$ un arco de (x, t) a (p, r) que satisfaga las condiciones de la suavidad por arcos. Para ello, hacemos un corte transversal de $ConoX$ a lo largo de uno de los arcos de suavidad de Q , como se muestra en la figura 19.



Para los puntos (x, t) que se encuentran en $ConoX - (ConoQ)^\circ$ definimos el arco $\tilde{\alpha}(x, t)$ como en el Teorema 5.3, llevándolo hasta el vértice, y luego bajando por la recta que une a (p, r) con v hasta llegar a (p, r) : Para los puntos (x, t) de $ConoQ$, definimos arcos de tal manera que se vayan "amortiguando" para que $\tilde{\alpha}(p, r) = \{(p, r)\}$. Esto se logra haciendo que un punto (x, t) en $ConoQ$ suba por la recta que lo une con v hasta cierta altura que depende de la longitud (según un mapeo de Whitney) del arco que va del punto $(x, 0)$ al punto $(p, 0)$; posteriormente se va horizontalmente hasta la recta que une a (p, r) con v , y por último baja por dicha recta hasta (p, r) . Para mayor claridad, véase la figura 20.



Existen otras formas de asignar los arcos a los puntos de $ConoQ$ que se amortiguan de manera similar, dichos arcos se muestran en la siguiente figura.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

CAPITULO 6

SUAVIDAD POR ARCOS EN NIVELES DE WHITNEY

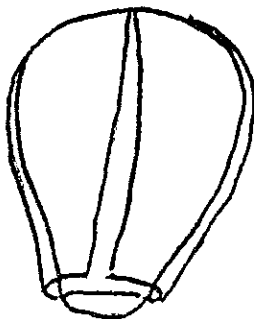
En el capítulo 0 definimos los mapeos de Whitney. Como pudimos apreciar en los capítulos anteriores, estos son una herramienta muy útil en el estudio de los hiperespacios. En el presente capítulo veremos algunos conceptos relacionados con estos mapeos y estudiaremos la suavidad por arcos en unos subconjuntos de 2^X y de $C(X)$ llamados niveles de Whitney.

Def: Si μ es un mapeo de Whitney para $C(X)$ y $0 \leq t < \mu(X)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es llamado un *nivel de Whitney*. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es llamada una *propiedad de Whitney* si siempre que un continuo X tenga la propiedad $\mathcal{P}$, entonces también la tiene $\mu^{-1}(t)$ para cualquier mapeo de Whitney y $0 \leq t < \mu(X)$. En [] se demuestra que $\mu^{-1}(t)$ es un continuo para toda $t \in [0, \mu(X)]$. Un mapeo de Whitney μ en un hiperespacio $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} = 2^X$ o $C(X)$) es llamado *mapeo de Whitney admisible* si existe una función continua $F: \mathcal{E} \times I \rightarrow \mathcal{E}$ que satisfaga las siguientes propiedades:

- (a) Para toda $A \in \mathcal{E}$, $F(A, 0) = A$ y $F(A, 1) \in X$.
- (b) Si $\mu(F(A, t)) > 0$ para alguna $A \in \mathcal{E}$ y $t \in I$, entonces para $t < s \leq 1$ $\mu(F(A, t)) > \mu(F(A, s))$.

En el capítulo 1 mencionamos que si un continuo es suave por arcos, entonces es contraíble; hagamos uso de este resultado para ver que la suavidad por arcos no es una propiedad de Whitney, dando un ejemplo de un continuo suave por arcos que tiene un nivel de Whitney no contraíble.

Ejemplo 6.1: Sea X un continuo formado por un cono al cual convergen una especie de "tiendas de indio", donde las "tiendas" pares tienen su "abertura" para un lado y las impares la tienen para el lado opuesto; este continuo se ilustra en la figura siguiente.



Se puede ver que X es suave por arcos en el vértice, definiendo una función similar a la del Teorema 5.3.

Sea A la circunferencia de la base y sea $t_0 = \mu(A)$. Veremos como podría probarse que $\mu^{-1}(t_0)$ no es contraíble. La única manera de llevar al conjunto A a un punto es llevándolo hasta el vértice; pero como X "engorda" conforme se sube, al moverse A hacia arriba,

debería “romperse”; sin embargo como las bases de las “tiendas” pares convergen a A , la rotura debería ser por el lado de las aberturas de estas “tiendas”, y lo mismo ocurriría con las “tiendas” impares; por esta razón A no puede ir al vértice mediante elementos conexos de la misma medida y, por lo tanto, $\mu^{-1}(t_0)$ no es contraíble y, por consiguiente, tampoco es suave por arcos. $\square$

En lo que resta del capítulo, X será un continuo suave por arcos en p . Recordemos que para $A \in 2^X$, $L(A)$ es la sombra de A definida en (2, a).

En el teorema siguiente, veremos que el conjunto de los elementos de 2^X que son iguales a su sombra y que bajo un mapeo de Whitney μ miden lo mismo, forman un continuo suave por arcos.

Teorema 6.2: Sean μ un mapeo de Whitney para 2^X , $t_0 \in (0, \mu(X))$ y $\mathcal{A} = \{A \in 2^X | A = L(A)\}$. Entonces $\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$ es un continuo suave por arcos.

Dem: Sea Ψ una parametrización uniforme para (X, p) . Denotaremos a $\Psi(x, t)$ por $x(t)$. Definimos $h: \mathcal{A} \times I \rightarrow \mathcal{A}$ por $h(A, t) = \bigcup_{x \in A} [p, x(t)]$. Entonces h es la restricción a $\mathcal{A} \times I$ de la función continua h_2 definida en (2, b) y para cada $a \in \mathcal{A}$, $\{h(A, t) | t \in I\}$ es un arco ordenado en 2^X de $\{p\}$ a A . Sea s_0 el único elemento en I tal que $\mu(h(X, s_0)) = t_0$ y sea $P = h(X, s_0)$. Sea $(A, t) \in (\mathcal{A} \cap (\mu^{-1}(t_0))) \times I$. Entonces $\{h(A, t) \cup h(X, s) | s \in [0, s_0]\}$ es un arco ordenado en 2^X de $h(A, t)$ a $h(A, t) \cup P$.

Sea $g: (\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)) \times I \rightarrow [0, s_0]$ donde $g(A, t)$ es el único elemento de $[0, s_0]$ tal que $\mu(h(A, t) \cup h(X, g(A, t))) = t_0$. Como $\mu(h(A, t)) \leq t_0$ y $\mu(h(A, t) \cup P) \geq t_0$ la existencia de $g(A, t)$ está garantizada por el Teorema del Valor Intermedio. La unicidad de $g(a, t)$ se sigue fácilmente de la definición de μ y de que $\{h(A, t) \cup h(X, s) | s \in [0, s_0]\}$ es un arco ordenado.

Veamos que g es continua. Sea $((A_n, t_n))_{n=1}^{\infty} \subset (\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)) \times I$ tal que $(A_n, t_n) \rightarrow (A_*, t_*)$. Sean $s_n = g(A_n, t_n)$ y $s_* = g(A_*, t_*)$. Tomemos una subsucesión $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ que converja a un $s \in [0, s_0]$. De la definición de g tenemos que $\mu(h(A_{n_k}, t_{n_k}) \cup h(X, s_{n_k})) = t_0$. Como h es continua $h(A_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow h(A_*, t_*)$ y $h(X, s_{n_k}) \rightarrow h(X, s)$. Entonces $\mu(h(A_*, t_*) \cup h(X, s)) = t_0$. Como el elemento $s \in [0, s_0]$ que cumple lo anterior es único, tenemos $s = s_*$ y, por el Lema 0.8, $s_n \rightarrow s_*$. Por lo tanto g es continua.

Definimos $f: (\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)) \times I \rightarrow \mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$ por $f(a, t) = h(a, t) \cup h(X, g(a, t))$. Como h , g y la función unión $\cup$ son continuas, f es continua. Sea $F: \mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0) \rightarrow C(\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0))$ la función inducida por f , definida por $F(A) = \{f(A, t) | t \in I\}$. Veamos que cumple con las tres condiciones que definen a un continuo suave por arcos.

Condición de arcos

De la definición de F es claro que $F(P) = \{P\}$. Sea $A \in (\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)) - \{P\}$. Probaremos que $F(A)$ es un arco en $\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$ de A a P . Sea $t_A = \sup\{t \in I \mid h(A, t) \subset P\}$. Nótese que $t_A < 1$. Entonces para cada $t \in [0, t_A]$, se tiene $g(A, t) = s_0$ y $f(A, t) = h(A, t) \cup h(X, s_0) = P$. Sean $t_1, t_2 \in [t_A, 1]$ con $t_1 < t_2$. Entonces existe $x \in h(A, t_2)$ tal que $x \notin P$ y $x \notin h(A, t_1)$. Se sigue que $x \in F(A, t_2)$ y que $x \notin f(A, t_1)$. Por lo tanto $f(A, t_1) \neq f(A, t_2)$, de donde $\{f(A, t) \mid t \in [t_A, 1]\}$ es un arco y

$$\{f(A, t) \mid t \in [t_A, 1]\} = \{f(A, t) \mid t \in I\} = F(A).$$

Como $f(A, t_A) = P$ y $f(A, 1) = A$, $F(A)$ es un arco ordenado de A a P .

Condición de suavidad

Como F es la función inducida por f el Lema 2.10 nos dice que F es continua.

Condición de compatibilidad

En la demostración del Lema 2.13 (ii) vimos que si $A \in 2^X$, $t \in I$ y $B = h(A, t)$, entonces para cada $s \in I$, $h(B, s) = h(A, st)$. Sean $A \in \mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$, $t_1 \in I$ y $B = f(A, t_1) = h(A, t_1) \cup h(X, g(A, t_1))$. Entonces

$$\begin{aligned} h(B, t) &= h(h(A, t_1) \cup h(X, g(A, t_1)), t) \\ &= \bigcup_{x \in h(A, t_1) \cup h(X, g(A, t_1))} [p, x(t)] \\ &= \left(\bigcup_{x \in h(A, t_1)} [p, x(t)] \right) \cup \left(\bigcup_{x \in h(X, g(A, t_1))} [p, x(t)] \right) \\ &= h(h(A, t_1), t) \cup h(h(X, g(A, t_1)), t) \\ &= h(A, tt_1) \cup h(X, tg(A, t_1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(B, t) = h(A, tt_1) \cup h(X, tg(A, t_1)) \cup h(X, g(B, t))$. Como $h(X, g(A, t_1)) \subset B$, se sigue que $g(B, t) \geq g(A, t_1)$. Por lo tanto $f(B, t) = h(A, tt_1) \cup h(X, g(B, t))$. Como $f(B, t) \in \{h(A, tt_1) \cup h(X, s) \mid s \in [0, s_0]\}$ y $\mu(f(B, t)) = t_0$ se sigue que $g(B, t) = g(A, tt_1)$. Por lo tanto $f(B, t) = f(A, tt_1)$. Tenemos entonces que $F(B) \subset F(A)$ y así F satisface la condición de compatibilidad.

Como F cumple las tres condiciones $\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$ es suave por arcos en P . ■

Corolario 6.3: Sean μ un mapeo de Whitney para $C(X)$, $t_0 \in (0, \mu(X))$ y $\mathcal{A} = \{A \in C(X) \mid A = L(A)\}$. Entonces $\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$ es un continuo suave por arcos.

Dem: Sea $A \in C(X)$. Como la parametrización uniforme Ψ es continua y $h(A, t) = \Psi(A \times [0, t])$, $h(A, t) \in C(X)$ para toda $t \in I$, entonces $f(A, t) \in C(X)$ para toda $t \in I$ y $F(A) \subset C(X)$. ■

A continuación, daremos una condición suficiente para que un nivel de Whitney sea suave por arcos.

Teorema 6.4: Sean ν un mapeo de Whitney para 2^X , Λ_ν la contracción libre definida en (1, b) y Λ_ν^* su función imagen. Si μ es un mapeo de Whitney para 2^X y $t_0 \in (0, \mu(X))$ es tal que para cada $A \in \mu^{-1}(t_0)$ y para cada $s \in I$, $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times \{s\})) \leq t_0$, entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo suave por arcos.

Dem: Sean $A \in \mu^{-1}(t_0)$ y $s \in I$. Como $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times \{s\})) = \mu(A) = t_0$, $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times [0, s])) \geq t_0$ y $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times \{s\})) \leq t_0$, entonces existe $s' \in [0, s]$ tal que $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times [s', s])) = t_0$. Definimos la función $r: \mu^{-1}(t_0) \times I \rightarrow I$ por

$$r(A, s) = \sup \{s' | s' \in [0, s] \text{ y } \mu(\Lambda_\nu^*(A \times [s', s])) = t_0\}.$$

Veamos que r es continua. Sea $((A_n, s_n))_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mu^{-1}(t_0) \times I$ tal que $(A_n, s_n) \rightarrow (A, s)$. Tomemos una subsucesión $(r(A_{n_k}, s_{n_k}))_{k=1}^\infty$ de $(r(A_n, s_n))_{n=1}^\infty$ que converja a un $s_0 \in [0, s]$. Entonces $\Lambda_\nu^*(A_{n_k} \times [r(A_{n_k}, s_{n_k}), s_{n_k}]) \rightarrow \Lambda_\nu^*(A \times [s_0, s])$ por la continuidad de Λ_ν^* , y $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times [s_0, s])) = t_0$ por la continuidad de μ . De la definición de $r(A, s)$ tenemos que $s_0 \leq r(A, s)$; por lo tanto $\Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s), s]) \subset \Lambda_\nu^*(A \times [s_0, s])$. Como $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s), s])) = t_0$, se tiene $s_0 = r(A, s)$ y, por el lema 1.6, $r(A_n, s_n) \rightarrow r(A, s)$. Por lo tanto r es continua.

Definimos $\tilde{H}: \mu^{-1}(t_0) \times I \rightarrow \mu^{-1}(t_0)$ por

$$\tilde{H}(A, s) = \Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s), s]).$$

Como Λ_ν^* y r son continuas, $\tilde{H}$ es continua.

Sea $A \in \mu^{-1}(t_0)$. Si $A = L(A)$, entonces para cada $s \in I$, $\tilde{H}(A, s) = A$. Supongamos que $A \neq L(A)$. Sea $\gamma = \sup \{\nu(\alpha(x)) | x \in A\}$ y sea $y \in A$ tal que $\nu(\alpha(y)) = \gamma$. Si $s \in [0, 1 - \gamma]$, de la definición de Λ_ν tenemos que $\tilde{H}(A, s) = A$. Sean $s_1, s_2 \in [1 - \gamma, 1]$ con $s_1 < s_2$. De la definición tenemos que $r(A, s_1) \leq r(A, s_2)$. Si $r(A, s_1) < r(A, s_2)$, entonces $\Lambda_\nu(y, r(A, s_1)) \in \tilde{H}(A, s_1)$ y $\Lambda_\nu(y, r(A, s_1)) \notin \tilde{H}(A, s_2)$. Por lo tanto si $\tilde{H}(A, s_1) = \tilde{H}(A, s_2)$ entonces $r(A, s_1) = r(A, s_2)$. Supongamos que $\tilde{H}(A, s_1) = \tilde{H}(A, s_2)$ y sea $s \in [s_1, s_2]$. Entonces $r(A, s_1) = r(A, s) = r(A, s_2)$. Como

$$\Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s_1), s_1]) \subset \Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s), s]) \subset \Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s_2), s_2])$$

y

$$\mu(\Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s_1), s_1])) = \mu(\Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s_2), s_2])) = t_0,$$

concluimos que $\tilde{H}(A, s_1) = \tilde{H}(A, s) = \tilde{H}(A, s_2)$. Por lo tanto $\{\tilde{H}(A, s) | s \in I\}$ es un arco en $\mu^{-1}(t_0)$.

Sean $A \in \mu^{-1}(t_0)$, $s_1 \in I$ y $B = \tilde{H}(A, s_1)$. Sea $y \in B$. Entonces existen $x \in A$ y $s' \in [r(A, s_1), s_1]$ tales que $y = \Lambda_\nu(x, s')$. Por lo tanto $\Lambda_\nu(y, s) = \Lambda_\nu(\Lambda_\nu(x, s'), s) = \Lambda_\nu(x, \max\{s', s\})$. Si $0 \leq s \leq r(A, s_1)$ tenemos que $\Lambda_\nu(y, s) = y$, así $\Lambda_\nu^*(B \times \{s\}) = B$. Por lo tanto $r(B, s) = s$ y $\tilde{H}(B, s) = B$. Si $r(A, s_1) \leq s \leq s_1$, entonces $\Lambda_\nu^*(B \times [r(A, s_1), s]) = \Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s_1), s_1])$. Por lo tanto $r(B, s) = r(A, s_1)$ y $\tilde{H}(B, s) = \tilde{H}(A, s_1) = B$. Si $s_1 \leq s \leq 1$, entonces $\Lambda_\nu(y, s) = \Lambda_\nu(x, s)$. Entonces $\Lambda_\nu^*(B \times \{s\}) = \Lambda_\nu^*(A \times \{s\})$. Por lo tanto $r(B, s) = r(A, s)$ y $\tilde{H}(B, s) = \tilde{H}(A, s)$. Por consiguiente $\{\tilde{H}(B, s) | s \in I\} \subset \{\tilde{H}(A, s) | s \in I\}$.

Sea $\mathcal{A} = \{A \in 2^X | A = L(A)\}$. Por el Teorema 6.1, $\mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$ es un continuo suave por arcos. Sean F y P como en el Teorema 6.1. Definimos $\check{\alpha}: \mu^{-1}(t_0) \rightarrow C(\mu^{-1}(t_0))$ por

$$\check{\alpha}(A) = \{\tilde{H}(A, s) | s \in I\} \cup F(\tilde{H}(A, 1)).$$

Veamos que $\check{\alpha}$ cumple con las condiciones que definen a un continuo suave por arcos.

Condición de arcos

Es claro que $\check{\alpha}(P) = \{P\}$. Sea $A \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $A \notin \mathcal{A}$. Tenemos que $\tilde{H}(A, 1) \in \mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t_0)$ y que $\{\tilde{H}(A, s) | s \in I\} \cap \mathcal{A} = \{\tilde{H}(A, 1)\}$. Por lo tanto $\check{\alpha}(A)$ es un arco en $\mu^{-1}(t_0)$ de A a P .

Condición de suavidad

La continuidad de $\check{\alpha}$ se sigue de la continuidad de F y de los Lemas 1.5 y 2.10.

Condición de compatibilidad

Sean $A \in \mu^{-1}(t_0)$ y $B \in \check{\alpha}(A)$. Si $B \in \{\tilde{H}(A, s) | s \in I\}$, según hemos visto, $\{\tilde{H}(B, s) | s \in I\} \subset \{\tilde{H}(A, s) | s \in I\}$ y, como $\tilde{H}(B, 1) = \tilde{H}(A, 1)$, tenemos $F(\tilde{H}(B, 1)) = F(\tilde{H}(A, 1))$. Por lo tanto $\check{\alpha}(B) \subset \check{\alpha}(A)$. Si $B \in F(\tilde{H}(A, 1))$, entonces $B = L(B)$ y por lo tanto $\{\tilde{H}(B, s) | s \in I\} = \{B\}$. Como F cumple la condición de compatibilidad, $F(\tilde{H}(B, 1)) = F(B) \subset F(\tilde{H}(A, 1))$. Por lo tanto $\check{\alpha}(B) \subset \check{\alpha}(A)$.

Como $\check{\alpha}$ cumple las tres condiciones, $\mu^{-1}(t_0)$ es suave por arcos en P . ■

Corolario 6.5: Sean ν un mapeo de Whitney para $C(X)$, Λ_ν la contracción libre definida en (1, b) y Λ_ν^* su función imagen. Si μ es un mapeo de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$ es tal que para cada $A \in \mu^{-1}(t_0)$ y para cada $s \in I$, $\mu(\Lambda_\nu^*(A \times \{s\})) \leq t_0$, entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo suave por arcos.

Dem: Sea $A \in C(X)$. Como Λ_ν^* y r son continuas y $\tilde{H}(A, s) = \Lambda_\nu^*(A \times [r(A, s), s])$, entonces $\tilde{H}(A, s) \in C(X)$ para toda $s \in I$. En el Corolario 6.3 vimos que $F(\tilde{H}(A, 1)) \in C(X)$, por lo tanto $\check{\alpha}(A) \subset C(X)$. ■

Corolario 6.6: Sean ν un mapeo de Whitney para $C(X)$, Λ_ν la contracción libre definida en (1, b) y Λ_ν^* su función imagen. Si μ es un mapeo de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$ es tal que para cada $A \in \mu^{-1}(t_0)$ y para cada $s \in I$, $\Lambda_\nu^*(A \times \{s\})$ es un subcontinuo de A o un punto, entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es suave por arcos.

Dem: De la definición de un mapeo de Whitney, si B es un subcontinuo de A , entonces $\mu(B) \leq \mu(A) = t_0$ y para cualquier punto p , $\mu(\{p\}) = 0 < t_0$. Por lo tanto se cumple la hipótesis del Corolario 6.4 y el lema se cumple. ■

En lo que sigue veremos una forma de construir en cualquier continuo suave por arcos (X, p) un mapeo de Whitney para el cual todos los niveles de Whitney son suaves por arcos. Para esto necesitamos algunos lemas.

Sea α la función que define la suavidad por arcos en (X, p) . Fijemos un mapeo de Whitney ν para 2^X . Sean Λ_ν la contracción libre definida en (1, b) y Λ_ν^* su función imagen. A partir de estas vamos a definir una contracción libre para 2^X y $C(X)$.

Definimos $G: 2^X \times I \rightarrow 2^X$ por

$$G(A, t) = \{\Lambda_\nu(a, t) | a \in A\} = \Lambda_\nu^*(A \times \{t\}).$$

Lema 6.7: La función G es una contracción libre para 2^X y $C(X)$, es decir G tiene las siguientes propiedades:

- (a) G es continua.
- (b) $G|_{C(X) \times I}: C(X) \times I \rightarrow C(X)$.
- (c) $G(A, 0) = A$ y $G(A, 1) = \{p\}$ para toda $A \in 2^X$.
- (d) $G(G(A, s), t) = G(A, \max\{s, t\})$.

Dem:

- (a) Se sigue de la continuidad de Λ_ν y del Lema 2.1.
- (b) Sean $A \in C(X)$ y $t \in I$. Como $A \times \{t\}$ es conexo y Λ_ν^* es continua, $G(A, t) \in C(X)$.
- (c) $G(A, 0) = \{\Lambda_\nu(a, 0) = a | a \in A\} = A$ y
 $G(A, 1) = \{\Lambda_\nu(a, 1) = p | a \in A\} = \{p\}$.
- (d) Tenemos que $G(A, s) = \{\Lambda_\nu(a, s) | a \in A\}$, así que

$$G(G(A, s), t) = \{\Lambda_\nu(x, t) | x \in G(A, s)\} = \{\Lambda_\nu(\Lambda_\nu(a, s), t) = \Lambda_\nu(a, \max\{s, t\}) | a \in A\} = G(A, \max\{s, t\}). \quad \blacksquare$$

Definimos ahora $\ell: 2^X \rightarrow I$ por

$$\ell(A) = \sup\{\nu(\alpha(a)) \mid a \in A\}.$$

Lema 6.8: ℓ tiene las siguientes propiedades:

- (a) ℓ es continua.
- (b) $\ell(G(A, s)) = \max\{1 - s, \ell(A)\}$ para toda $(A, s) \in 2^X \times I$.
- (c) $s \leq t$ implica que $\ell(G(A, s)) \geq \ell(G(A, t))$.
- (d) $G(A, 1 - \ell(A)) = A$ para toda $A \in 2^X$.

Dem:

- (a) Como ν y α son continuas, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $|\nu(\alpha(x)) - \nu(\alpha(y))| < \epsilon$.

Sean $A_1, A_2 \in 2^X$ tales que $\mathcal{H}(A_1, A_2) < \delta$. Como A_1 y A_2 son compactos, existen $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$ tales que $\nu(\alpha(x_1)) = \ell(A_1)$ y $\nu(\alpha(x_2)) = \ell(A_2)$. Como $\mathcal{H}(A_1, A_2) < \delta$, existe $y \in A_1$ tal que $d(x_2, y) < \delta$. Por lo tanto $|\nu(\alpha(y)) - \nu(\alpha(x_2))| < \epsilon$. De la definición de $\ell(A)$ tenemos que $\nu(\alpha(y)) \leq \nu(\alpha(x_1)) = \ell(A_1)$, así que $\nu(\alpha(x_2)) - \epsilon < \nu(\alpha(y)) \leq \ell(A_1)$ y, por lo tanto,

$$\ell(A_2) - \ell(A_1) < \epsilon.$$

Un argumento simétrico nos lleva a que

$$\ell(A_1) - \ell(A_2) < \epsilon;$$

por lo tanto

$$|\ell(A_1) - \ell(A_2)| < \epsilon$$

y ℓ es continua.

- (b) Sea $(A, s) \in 2^X \times I$. Si $\nu(\alpha(\Lambda_\nu(a, s))) \leq 1 - s$ para toda $a \in A$, entonces $\ell(G(A, s)) \leq 1 - s$. Si $\ell(A) \leq 1 - s$, entonces $\Lambda_\nu(a, s) = a$ para cada $a \in A$. Por lo tanto $G(A, s) = A$. Si $\ell(A) \geq 1 - s$, tomamos $a_0 \in A$ tal que $\nu(\alpha(a_0)) = \ell(A)$. Entonces $\nu(\alpha(\Lambda_\nu(a_0, s))) \geq 1 - s$. Por lo tanto $\ell(G(A, s)) = 1 - s$.

- (c) Sea $s \leq t$. Entonces $1 - s \geq 1 - t$. Tenemos tres casos:

- 1) Si $\ell(A) \geq 1 - s \geq 1 - t$, por (b) tenemos que $\ell(G(A, s)) = 1 - s \geq 1 - t = \ell(G(A, t))$.
- 2) Si $1 - s \geq \ell(A) \geq 1 - t$, por (b) tenemos que $\ell(G(A, s)) = \ell(A) \geq 1 - t = \ell(G(A, t))$.

3) Si $1 - s \geq 1 - t \geq \ell(A)$, por (b) tenemos que $\ell(G(A, s)) = \ell(A) = \ell(G(A, t))$.

Por lo tanto $\ell(G(A, s)) \geq \ell(G(A, t))$.

(d) Tenemos que $\nu(\alpha(a)) \leq \ell(A) = 1 - (1 - \ell(A))$ para toda $a \in A$. Entonces $G(A, 1 - \ell(A)) = \{\Lambda_\nu(a, 1 - \ell(A)) = a | a \in A\} = A$. ■

Ahora ya estamos en condiciones de definir el mapeo de Whitney mencionado anteriormente.

Teorema 6.9: La función $\mu: 2^X \rightarrow I$ definida por

$$\mu(A) = \int_{1-\ell(A)}^1 \nu(G(A, t)) dt$$

satisface las siguientes propiedades:

(a) μ es un mapeo de Whitney.

(b) $s \leq r$ implica que $\mu(G(A, s)) \geq \mu(G(A, r))$.

(c) $(\mu|_{C(X)})^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}(t)$ son continuos suaves por arcos para toda $t \in (0, \mu(X))$.

(d) μ y $\mu|_{C(X)}$ son admisibles.

Dem:

(a) Tenemos que las funciones G y ν son continuas y, como el tomar la integral es continuo, μ es continua.

Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces $\ell(A) \leq \ell(B)$ y $\nu(G(A, t)) \leq \nu(G(B, t))$ para toda $t \in I$. Si $\ell(A) = \ell(B)$ entonces $\nu(G(A, 1 - \ell(A))) = \nu(A) < \nu(B) = \nu(G(B, 1 - \ell(A)))$. Por lo tanto $\mu(A) < \mu(B)$. Si $\ell(A) < \ell(B)$, como $0 < \nu(B) = \nu(G(B, 1 - \ell(B)))$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(B) - \mu(A) &= \int_{1-\ell(B)}^1 \nu(G(B, t)) dt - \int_{1-\ell(A)}^1 \nu(G(A, t)) dt \\ &= \int_{1-\ell(A)}^{1-\ell(B)} \nu(G(B, t)) dt + \int_{1-\ell(A)}^1 (\nu(G(B, t)) - \nu(G(A, t))) dt \\ &> 0 \end{aligned}$$

Así $\mu(B) > \mu(A)$ y, por lo tanto, μ es un mapeo de Whitney.

(b) Sea $s \leq r$. La propiedad 6.8 (b) implica que

$$s \leq r \leq 1 - \ell(G(A, r))$$

y

$$s \leq 1 - \ell(G(A, s))$$

entonces, por la propiedad 6.7 (d) tenemos que

$$\mu(G(A, r)) = \int_{1-\ell(G(A, r))}^1 \nu(G(A, t)) dt$$

y

$$\mu(G(A, s)) = \int_{1-\ell(G(A, s))}^1 \nu(G(A, t)) dt.$$

Entonces por la propiedad 6.8 (c) tenemos

$$\mu(G(A, s)) \geq \mu(G(A, r))$$

(c) Como $\mu(A) = \mu(G(A, 0)) \geq \mu(G(A, s))$ para toda $s \in I$, entonces μ y $\mu|_{C(X)}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 6.3 y el Corolario 6.4, respectivamente. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ y $(\mu|_{C(X)})^{-1}(t)$ son suaves por arcos para toda $t \in (0, \mu(X))$.

(d) Definamos $F: 2^X \times I \rightarrow 2^X$ por $F(A, t) = G(A, t\ell(A) + 1 - \ell(A))$. Entonces F es continua. $F(A, 0) = A$, $F(A, 1) = \{p\}$ para cada $A \in 2^X$ y $F|_{C(X)}: C(X) \times I \rightarrow C(X)$. Supongamos que $\mu(F(A, t)) > 0$ y tomemos $s \in (t, 1]$. Como $F(A, t) \neq \{p\}$ tenemos que $\ell(A) > 0$. Hagamos $t_1 = t\ell(A) + 1 - \ell(A)$ y $s_1 = s\ell(A) + 1 - \ell(A)$. Entonces por la propiedad 6.8 (b), $0 \leq \ell(G(A, s_1)) = 1 - s_1 \leq 1 - t_1 = \ell(G(A, t_1))$. Como $G(A, t_1) = F(A, t)$ tiene más de un punto, entonces $\mu(F(A, t)) > \mu(F(A, s))$. Por lo tanto μ y $\mu|_{C(X)}$ son admisibles. ■

A pesar de que la suavidad por arcos no es una propiedad de Whitney en general, existe una clase de continuos para la cual la suavidad por arcos si lo es.

Teorema 6.10: *La propiedad de ser un continuo suave por arcos es una propiedad de Whitney para la clase de los dendroides suaves.*

Dem: Sean X un dendroide suave en p , μ un mapeo de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0, \mu(X)]$. Mostraremos que se satisface la hipótesis del Corolario 6.6 y, por lo tanto, $\mu^{-1}(t_0)$ es suave por arcos. Sean ν un mapeo de Whitney, Λ_ν la contracción libre definida en $(1, b)$ y Λ_ν^* su función imagen.

Como X es hereditariamente unicoherente, dados $x, y \in X$ existe un único arco $[x, y]$ de x a y .

Sea A un subcontinuo de X con $\mu(A) = t_0$. Tenemos dos casos:

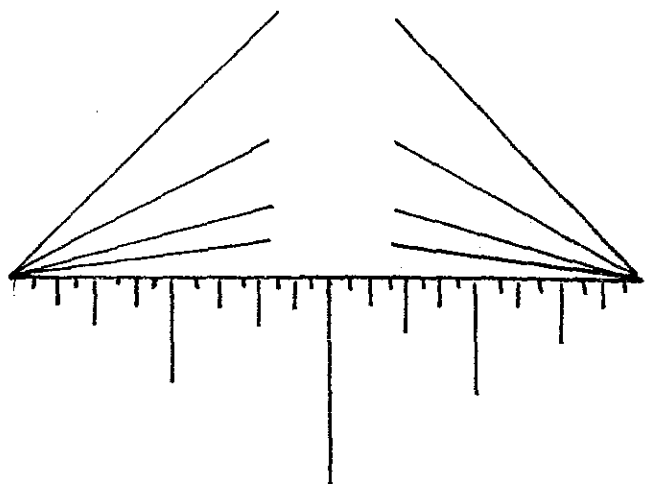
1) $p \in A$. Si $x \in A$ y $s \in I$, entonces $[p, x] \subset A$ y de la definición de Λ_ν tenemos que $\Lambda_\nu(x, s) \in [p, x]$; por lo tanto $\Lambda_\nu^*(A \times \{s\}) \subset A$ para toda $s \in I$.

2) $p \notin A$. Supongamos que para alguna $s \in I$, $\Lambda_\nu^*(A \times \{s\})$ no es un subcontinuo de A y tomemos $x \in A$ tal que $\Lambda_\nu(x, s) \notin A$. Sea $b \in A$. Los arcos $[p, x]$ y $[p, b]$ tienen al punto p en común y, por ser X hereditariamente unicoherente, tenemos que $[p, x] - A = [p, b] - A$ así de la definición de Λ_ν tenemos que $\Lambda_\nu(x, s) = \Lambda_\nu(b, s)$. Entonces $\Lambda_\nu^*(A \times \{s\}) = \{\Lambda_\nu(x, s)\}$ y por lo tanto para toda $s \in I$, $\Lambda_\nu^*(A \times \{s\})$ es un subcontinuo de A o un punto, y por el Corolario 6.6, $\mu^{-1}(t_0)$ es suave por arcos.

Por lo tanto, la propiedad de ser un continuo suave por arcos es una propiedad de Whitney para la clase de los dendroides suaves. ■

Concluiremos el capítulo, dando un ejemplo de un continuo que no es suave por arcos pero cuyos niveles de Whitney si lo son.

Ejemplo 6.11: Sea X el continuo representado en la figura 24.



CONCLUSIONES

A continuación, haremos un resumen de los resultados más importantes vistos en los capítulos anteriores:

Un continuo suave por arcos es contraíble.

Los continuos suaves por arcos, los hereditariamente indescomponibles y los localmente conexos, tienen hiperespacios suaves por arcos; además, los de estos últimos lo son en cada uno de sus puntos.

El cono de cualquier continuo es suave por arcos en su vértice y, el cono de los ocho continuos hereditariamente descomponibles cuyo cono es homeomorfo a su hiperespacio de subcontinuos, es suave por arcos en X .

La suavidad por arcos no es una propiedad de Whitney, es una condición suficiente para que un continuo tenga mapeos de Whitney admisibles y es una propiedad de Whitney para la clase de los dendroides suaves.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. H. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1101-1110.
- [2] D. W. Curtis y R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978), 19-38.
- [3] C. Eberhart y S. B. Nader, Jr., *The dimension of certain hyperspaces*, Bull. Pol. Acad. Sci. 19 (1971), 1027-1034.
- [4] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr., y L. Lum, *On arc-smooth continua*, Topology Proceedings 2 (1977), 645-656.
- [5] J. T. Goodykoontz, Jr., *Hyperspaces of arc-smooth continua*, Houston J. Math. 7 (1981), 33-41.
- [6] J. T. Goodykoontz, Jr., *Arc-smoothness in hyperspaces*, Topology Appl. 15 (1985), 131-150.
- [7] Alejandro Illanes, *Arc-smoothness and contractibility in Whitney levels*, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 1069-1074.
- [8] Alejandro Illanes, *Notas del curso Topología de Hiperespacios*, Instituto de Matemáticas, UNAM.
- [9] E. E. Moise, *Grille decomposition and convexification theorems for compact locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1111-1121.
- [10] S. B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 321-345.
- [11] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Pure Appl. Math., vol. 49, Dekker, New York, 1978.