TESIS

TEORIA DE INTEGRACION DE RIEMAN:

ORIGEN Y DESARROLLO.

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas presenta:

RODOLFO GODOY ROSAS.

Departamento de Matemáticas.

Universidad de Sonora.

Unidad Centro.

Hermosillo, Sonora México.

10 de Enero de 1992.

AGRADECIMIENTOS.

Quiero manifestar mi agradecimiento a todos aquellos que me ayudaron a obtener finalmente este trabajo: a mis profesores y funcionarios universitarios, a mis familiares que me apoyaron siempre, así como a mis compañeros de clase por tantas veces que soportaron mis comentarios sobre el tema.

Especialmente a mis directores de tesis: Dr. Miguel Angel Gacía A. y M. en C. Agustín Brau Rojas que me orientaron com el mejor ánimo de colaborar a mi superación y apoyaron mi interés en concluir un trabajo que pudiera servir de consulta a profesores y estudiantes interesados en el área.

En este sentido también deseo expresar mi reconocimiento a los profesores M. en C. Fernando Luque Vásquez y M. en C. Eduardo Tellechea Armenta, quienes hicieron importantes observaciones las cuales han quedado incorporadas al texto final.

Dedico este producto de mis mejores esfuerzos a quien de cuyos esfuerzos producto soy, a mi madre

Inés Rosas Santos.

A mis hermanos: Juan Pablo, Abelardo, Alejandrina, María Elba, Roque, Felizardo, José y Emetério.

Y a Heriberto, Eberardo y Basilio.

En memoria de: Fis-Mat. José de Jesús Corral García,

Inge. en Eléctrónica Luis Miguel Corral García y

Salvador Corral García.

Al pueblo trabajador de Sonora:

Quien con sus impuestos hizo posible mi educación.

TEORIA DE INTEGRCION DE RIEMANN:
ORIGEN Y DESARROLLO

(Indice General)

INTRODUCCION

El presente trabajo consta de tres capítulos y un apéndice. En el capítulo I, siguiendo el camino de la generalización marcada por A. Cauchy a través de la llamada "integral impropia", se llega a dos resultados importantes de la investigación: La integral de Cauchy-Lipschitz. y su generalización a funciones tal que el conjunto de sus discontinuidades es de primera especie,

El segundo capítulo tiene por objetivo estudiar la teoría de integración de Riemann para demostrar que la familia de funciones Cauchy-lipschitz-integrables, forma parte de una clase más amplia: la familia de funciones Riemann-integrable.

En el capítulo III, se retoma la búsqueda de la mejor definición de integral obteniendo la presentación de dos caracterizaciones : el criterio de Hankel y el criterio de Lebesgue para Riemann-integrabilidad.

Por último, aparece como un apéndice la discusión de tres conceptos sobre conjuntos infinitos, múltiplemente citados en el trabajo: conjunto de primera especie, de contenido cero y conjunto nunca denso y sus relaciones mutuas.

CAPITULO I

ANTECEDENTES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN.

§ 1. INTEGRAL DE CAUCHY.

La definición moderna de Integral tiene su origen en el trabajo de A. Cauchy, quien con sus propias ideas de función y de continuidad logra definir la integral como una convergencia de sumas, concibiéndola esencialmente como el área bajo la curva en cierto intervalo de definición de la función.

Antes de llegar a la formulación de ésta, tomemos en cuenta las siguientes definiciones:

DEFINICION 1.1: Sea $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que el conjunto P es una partición de [a,b], si

$$P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \} \qquad \text{con } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Llamamos NORMA DE LA PARTICION P, al número

$$\|P\| = \sup_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

De la misma forma, definimos a $\mathbb{P}[a,b]$ como el conjunto de todas las particiones de [a,b].

DEFINICION 1.2: Sean $P', P \in \mathbb{P}[a,b]$, decimos que P' es un REFINAMIENTO DE P, si $P' \supset P$.

Observemos que si P' es un refinamiento de P entonces $\|P'\| \le \|P\|$.

DEFINICION 1.3: Sea $f:[a.b] \to \mathbb{R}$, una función continua y por tanto acotada en [a,b], y $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \}$, una partición de [a,b], definimos la

SUMA DE CAUCHY PARA LA PARTICION P, como

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Por brevedad de notación, escribiremos S(P) en lugar de S(P,f), donde no haya lugar a confusión.

DEFINICION 1.4: Sea $f:[a.b] \to \mathbb{R}$, una función continua, entonces se define la integral de f en [a,b] como

$$\int_a^b f(x)d(x) = \lim_{\|P\| \to 0} S(P,f), \qquad \text{donde } P \in \mathbb{P}[a,b].$$

Cauchy no prueba directamente la existencia del límite usado para definir la integral . Lo que hace es probar que las sumas, de la definición 1.3, "se aproximan entre sí" conforme las normas de las particiones se hacen pequeñas. Lo cual queda formulado en el siguiente

TEOREMA 1.5. Sea $f:[a.b] \to \mathbb{R}$, una función continua. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

si $\|P\| < \delta$ y $\|P'\| < \delta$ entonces $|S(P,f) - S(P',f)| < \epsilon$.

DEMOSTRACION. Probar este teorema es equivalente a demostrar la siguiente

PROPOSICION 1.6. Sea $f:[a.b] \to \mathbb{R}$, una función continua, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\text{si } \|P\| < \delta \text{ y } P'\supset P \text{ entonces } |S(P)-S(P')|<\varepsilon.$$

En efecto, que el Teorema 1.5. implica la Proposición 1.6., es obvio puesto que si, P' es un refinamiento de P, entonces $\|P\|<\delta \Rightarrow \|P'\| < \delta$. □

Inversamente, para demostrar que P.1.6. implica T.1.5., sea $\varepsilon>0$, tomemos la $\delta=\delta(\varepsilon')$ cuya existencia nos es garantizada por la P.1.6 para $\varepsilon'=\varepsilon/2$ y sean P y $P'\in\mathcal{P}[a,b]$, tal que $\|P\|<\delta$ y $\|P'\|<\delta$.

Entonces, si definimos $P'' = P\cup P'$ se tiene que, $P''\supset P$ y $P''\supset P'$, de donde,

$$|S(P'')-S(P')|<\varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |S(P)-S(P'')|<\varepsilon/2.$$

Por lo tanto $|S(P)-S(P')|\leq|S(P)-S(P'')|+|S(P'')-S(P')|< \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$

lo cual prueba el Teorema 1.5. ■

Demostremos ahora la Proposició 1.6:

DEMOSTRACION. Sea $\varepsilon>0$. Como f es uniformemente continua en [a,b], existe $\delta>0$

$$\text{tal que } |y-x|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/(b-a).$$

Probemos que ésta es la δ correspondiente a $\varepsilon>0$ en P.1.6.

Tomemos una partición $P = \{x_0, x_1, \dots x_{i-1}, x_i, \dots x_n\}$. cualquiera, de norma menor que δ y $P' = \{y_0, y_1, \dots y_m\}$. un refinamiento de P.

Cuando un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P no contiene puntos de P' distintos de sus extremos, entonces el sumando

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

forma parte de S(P) y S(P'), y por lo tanto se cancela en la diferencia S(P') - S(P). Definamos entonces para este intervalo i, $D_i=0$.

Cuando el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P contiene otros puntos de P' además de x_{i-1} y x_i, digamos $y_k < y_{k+1} < \dots < y_l$, donde

$x_{i-1} = y_{k-1}$, y $x_i = y_{l+1}$.

Entonces, la diferencia

$$S(P') - S(P)$$

incluye un sumando del siguiente tipo:

$$\left[\sum_{j=k}^{l+1} f(y_{j-1})(y_j - y_{j-1}) \right] - f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

denotemos a esta cantidad como D_i.

Expresemos ahora D_i de la siguiente manera:

$$D_i = \sum_{j=k}^{l+1} f(y_{j-1})(y_j - y_{j-1}) - \sum_{j=k}^{l+1} f(x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{j=k}^{l+1} \left[f(y_{j-1}) - f(x_{i-1})\right](y_j - y_{j-1})$$

de donde $|D_i| \leq \sum_{j=k}^{l+1} |f(y_{j-1}) - f(x_{i-1})|(y_j - y_{j-1})$, pero como

$|y_{j-1} - x_{i-1}|<\delta$, se tiene que

$|f(y_{j-1}) - f(x_{i-1})| < \varepsilon/(b-a)$. por la forma en que escogimos a δ,

de donde

$$|D_i| < \sum_{j=k}^{l+1} (y_j - y_{j-1})\varepsilon/b-a) = (x_i - x_{i-1})\varepsilon/(b-a)$$

Por lo tanto :

$$|S(P)-S(P')| \leq \sum_{i=1}^{n} |D_i| < \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\varepsilon/(b-a)$$

$$= \varepsilon/(b-a) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

Por lo tanto: $|S(P)-S(P')| < \varepsilon$ ■

Después de los resultados anteriores, demostremos la existencia del límite involucrado en la definición 1.4:

TEOREMA 1.7. Sea $f:[a.b] \to \mathbb{R}$, una función continua entonces $\int_a^b f(x)dx$ existe, de acuerdo a la definición 1.4.

Demostración: Sea $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $\mathbb{P}[a,b]$, tal que

$$\| P_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Por el Teorema 1.5, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que,

$$|S(P_n) - S(P_m)| < \varepsilon \qquad (**)$$

$$\text{para toda} \quad \| P_n \| < \delta_1 \quad y \quad \| P_m \| < \delta_1$$

Pero como $\| P_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0$, dada $\delta_1 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\| P_n \| < \delta_1$ para toda $n \geq N$.

Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$, existe N , tal que

$$|S(P_n) - S(P_m)| < \varepsilon \qquad \text{para toda } n,m \geq N.$$

Asi que la sucesión $\{S(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sea $I \in \mathbb{R}$,

$$I = \lim_{n \to \infty} S(P_n).$$

Sea $\varepsilon>0$ Por el teorema 1.5, existe $\delta>0$ tal que

$$\| P\| < \delta \text{ y } \| P'\| < \delta \quad \Rightarrow \quad | S(P) - S(P')| < \varepsilon/2.$$

Como $I = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$, y $\| P_n \| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, entonces dada $\varepsilon>0$

existe $N\in\mathbb{N}$, tal que,

$$\|P_n\| < \delta \quad y \quad |S(P_n) - I| < \varepsilon/2, \quad \text{para todo } n\geq N.$$

Si $\|P\| < \delta$, tendremos

$$|S(P) - I| = |S(P) - S(P_N) + S(P_N) - I|$$

$$\leq |S(P) - S(P_N)| + |S(P_N) - I|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

Asi que, $$\lim_{\|P\|\to 0} S(P) = I$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE CAUCHY PARA FUNCIONES CONTINUAS.

Como ejemplo de las propiedades de la integral para funciones continuas en un dominio [a,b], escribimos a continuación las que consideramos básicas, las cuales pueden ser demostradas a partir de la definición de integral dada por Cauchy.

i.- **LINEALIDAD** Si f y g son dos funciones continuas en [a,b] y α , $\beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx,$$

ii.- **POSITIVIDAD:** Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, real y continua para todo punto $x \in [a,b.]$. Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$,

$$\text{entonces} \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

iii.- **ADITIVIDAD** con respecto al dominio de definición.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, real y continua para todo punto $x \in (a,b)$,

$$\text{entonces} \qquad \int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$$

OBSERVACIONES:

a).- **EN PRESENCIA DE LA LINEALIDAD, LA PROPIEDAD DE POSITIVIDAD ES EQUIVALENTE A LA PROPIEDAD DE MONOTONIA:**

Si f y g son continuas en $[a,b]$, y para toda $x\in[a,b]$, pasa que $f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

b).- De (i), (ii) y (iii) se obtienen las siguientes propiedades elementales:

1). Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, tal que $m \leq f(x) \leq M$ entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

2). Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

3).- Si f es una función continua en $[a,b]$, y $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que $F(x) = \int_a^x f$, entonces F es continua en $[a,b]$.

GENERALIZACION DE LA INTEGRAL DE CAUCHY.

Al abordar el estudio de las funciones que presentan algún tipo de discontinuidad, Cauchy se planteó de una manera original, el problema de generalizar a éstas la definición de integral de una función continua, pues estaba convencido de que a pesar de sus discontinuidades el área bajo la curva de esas funciones seguía siendo calculable.

No obstante los escasos resultados con los que hasta entonces se contaba, Cauchy, cimentó con su definición y su primer generalización de Integral un vasto campo del análisis matemático como lo es el de métodos de integración y de funciones integrables.

GENERALIZACION DE LA INTEGRAL A FUNCIONES ACOTADAS Y SECCIONALMENTE CONTINUAS

Englobadas dentro de las que denominó "integrales impropias", Cauchy extendió la definición de integral a la clase de las funciones acotadas y seccionalmente continuas.
Esta generalización fue un paso natural si tomamos en cuenta el proceso de desarrollo del concepto mismo de función, Puesto que las funciones seccionalmete continuas, eran las más generales que hasta ese momento se concebían.

Con esta primer generalización, inicia Cauchy el programa al cual se ajustaría el análisis en cuanto a teoría de integración se refiere: Extender la definición de integral a funciones tan discontinuas como fuera posible, de los cuales el caso más sencillo es el que a continuación discutimos.

EXTENSION DE LA DEFINICION DE INTEGRAL A UNA FUNCION ACOTADA Y CONTINUA EXCEPTO EN UN PUNTO

DEFINICION 1.8. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y discontinua solo en $c \in [a,b]$ entonces definimos

i) Si $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f .$$

ii) Si $c=a$:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f .$$

iii) Si $c=b$:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f .$$

Obsérvese que la integral no toma en cuenta el valor de f en c. Podemos cambiar $f(c)$ y el valor de la integral sigue siendo el mismo.

a).- **JUSTIFICACION DE LA EXISTENCIA DE LOS LIMITES:** las integrales del lado derecho están, de acuerdo a la definición 1.4. bien definidas puesto que, f es continua en los intervalos cerrados respectivos. Solo, resta probar la siguiente

PROPOSICION 1.9. Los límites

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \text{ y } \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

de la definición 1.8 existen en los diferentes cásos.

DEMOSTRACION:

Suponemos $c\in(a,b]$ y sea $F:(0,c-a]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$F(\varepsilon) = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx,$$

entonces la existencia del límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (*)$$

quedará probada si demostramos que F es uniformemente continua en $(0,c-a]$.

En efecto, sea M la cota de $|f|$ en $[a,b]$. Dada $\varepsilon>0$, sea $\delta=\varepsilon/M$ y

$\varepsilon_1,\varepsilon_2> 0$, tal que $|\varepsilon_1-\varepsilon_2|<\delta$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$, entonces

$$|F(\varepsilon_1)-F(\varepsilon_2)| = \left|\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx - \int_a^{c-\varepsilon_2} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{c-\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx\right| \le \int_{c-\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_1} |f(x)|dx$$

$$\le M(\varepsilon_2-\varepsilon_1) < M(\varepsilon/M) = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Análogamente se prueba la continuidad uniforme para

$$G(\varepsilon)= \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad \text{en } (0,\ b-c],\ \text{cuando } c\in[a,b)$$

y con ello que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} G(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \text{ , tambien existe.}$$

Por lo tanto, concluimos (*) ■

b).- **PROPIEDADES**. Las propiedades de la integral de una función continua excepto en un punto son estudiadas como un caso particular en el teorema 1.12.

EXTENSION DE LA DEFINICION DE INTEGRAL A UNA FUNCION ACOTADA Y CONTINUA EXCEPTO EN UN CONJUNTO FINITO DE PUNTOS

DEFINICION 1.10. Sea f una función definida y acotada en $[a,b]$,

y $\mathbb{D}_f = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, con $a \le c_1 < c_2 < \ldots < c_n \le b$

el conjunto de sus puntos de discontinuidad;

entonces se define:

i) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_2+\varepsilon}^{c_3-\varepsilon} f(X)dx + \ldots + \int_{c_{n-1}+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(X)dx \right]$$

si $a,b \in \mathbb{D}_f$.

ii) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(X)dx + \ldots + \int_{c_{n-1}+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(X)dx \right]$$

si $a \notin \mathbb{D}_f$, $b \in \mathbb{D}_f$.

iii) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_2+\varepsilon}^{c_3-\varepsilon} f(X)dx + \ldots + \int_{c_n+\varepsilon}^{b} f(X)dx \right]$$

si $a \in \mathbb{D}_f$, $b \notin \mathbb{D}_f$.

iv) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(X)dx + \ldots + \int_{c_n+\varepsilon}^{b} f(X)dx \right]$$

si $a,b \notin \mathbb{D}_f$.

Obsérvese que si $a \notin \mathbb{D}_f$ entonces tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, f es continua en el intervlalo $[a, a+\varepsilon]$, de manera que tenemos :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} |f(x)|\, dx \leq \lim_{\varepsilon \to 0} M\varepsilon = 0$$

donde M es una cota superior de $|f|$ en $[a,b]$.

De la misma manera, si $b \notin \mathbb{D}$ se tiene :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b-\varepsilon}^{b} f(x)dx = 0.$$

Así que, en cualquier caso, si $\mathbb{D}_f \cup \{a,b\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ está definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_2+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{n-1}+\varepsilon}^{c_n-\varepsilon} f(x)dx \right].$$

a).- **EXISTENCIA.**

La existencia de cada una de estas integrales, se obtiene aplicando un número finito de veces los argumentos de justificación de la Definición 1.8. ■

b).- **PROPIEDADES.**

Las propiedades básicas para la integral de funciones continuas siguen siendo válidas al extender la definición de integral a funciones acotadas con un número finito de discontinuidades, como se verá en el teorema 1.12, para cuya demostración exponemos el siguiente

LEMA 1.11. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ y $\mathbb{D}_f \cup \{a,b\} = \{ c_1, c_2, \dots, c_k \}$ y $c\in[a,b]$, tal que, $c \neq c_i$, para toda $i = 1, \dots, k$, digamos, que $c\in(c_{j-1}, c_j)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \Big[\int_{c_1+\epsilon}^{c_2-\epsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{j-2}+\epsilon}^{c_{j-1}-\epsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\epsilon}^{c-\epsilon} f(x)dx +$$

$$\int_{c+\epsilon}^{c_j-\epsilon} f(x)dx + \int_{c_j+\epsilon}^{c_{j+1}-\epsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{k-1}+\epsilon}^{c_k-\epsilon} f(x)dx \Big]$$

Demostración.

Si $\epsilon>0$ es pequeña, entonces f es continua en el intervalo $[c_{j-1}+\epsilon, c_j-\epsilon]$, asi que por aditividad respecto al domninio de integración se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \Big[\int_{c_1+\epsilon}^{c_2-\epsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{j-2}+\epsilon}^{c_{j-1}-\epsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\epsilon}^{c-\epsilon} f(x)dx +$$

$$\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^{c_j-\epsilon} f(x)dx + \int_{c_j+\epsilon}^{c_{j+1}-\epsilon} f(x)dx \quad \dots + \int_{c_{k-1}+\epsilon}^{c_k-\epsilon} f(x)dx \Big].$$

pero $\displaystyle \lim_{\epsilon\to 0} \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(x)dx = 0.$

Asi que se obtiene el resultado buscado.

Observemos que este lema sigue siendo válido para una colección finita de puntos c tales que $c \neq c_i$, para todo $i = 1,\dots,k$.

TEOREMA 1.12. Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de funciones acotadas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{D}_f$ es vacío o finito y definamos

$L:\mathbb{F}\to\mathbb{R}$ por:

$$L(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Entonces L satisface las siguientes propiedades:

i.- Linealidad respecto al integrando.

ii.- Positividad.

iii.- Aditividad con respecto al dominio de definición.

Demostraciones:

i).- LINEALIDAD RESPECTO AL INTEGRANDO: Sean f, $g\in\mathbb{F}$, queremos demostrar que :

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$$

Supongamos que $\mathbb{D}_f \cup \mathbb{D}_g \cup [a,b] = \{ c_1, c_2,\ldots,c_k \}$

En virtud del lema 1.11 y puesto que $\mathbb{D}_f$, $\mathbb{D}_g \subset \{ c_1, c_2,\ldots,c_k \}$

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} g(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} g(x)dx \right]$$

y de la propiedad de linealidad para funciones continuas esta expresión es igual a

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} [f(x)+g(x)]dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} [f(x)+g(x)]dx \right].$$

Nuevamente, como

$\mathbb{D}_{f+g} \subset \mathbb{D}_f \cup \mathbb{D}_g \cup \{a,b\} = \{ c_1, c_2, \ldots, c_k \}$, aplicamos el lema 1.11 y tenemos que la anterior expresión es igual a

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx. \qquad \square$$

De manera análoga se demuestra que

$$\int_a^b \alpha f(x) = \alpha \int_a^b f(x) \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

ii).- POSITIVIDAD.

DEMOSTRACION: Sea $f \in \mathbb{F}$, $\mathbb{D}_f \cup \{a,b\} = \{ c_1, c_2, \ldots, c_k \}$

Supongamos que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$

Entonces $$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

DEMOSTRACION: Por la propiedad de positividad para la integral de funciones continuas, dado que f es continua en $[c_1+\varepsilon, c_2-\varepsilon], \ldots, [c_{k-1}+\varepsilon, c_k-\varepsilon]$, tendremos que

$$\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx \geq 0 \quad \ldots \quad \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \geq 0$$

Por lo que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(X)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \right] \geq 0. \quad \blacksquare$$

iii).- ADITIVIDAD CON RESPECTO AL DOMINIO DE DEFIÑICION.

Sea $f \in \mathbb{F}$, $\mathbb{D}_f \cup \{a,b\} = \{ c_1, c_2, \ldots, c_k \}$

Entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + \int_x^b f(x)dx$ para toda $x \in (a,b)$.

DEMOSTRACION: Supongamos que $x \neq c_i$ para cada $i=1,2,\ldots,k$ y sea j tal que $c_{j-1} < x < c_j$, entonces

$$\int_a^x f(x)dx + \int_x^b f(x)dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{j-2}+\varepsilon}^{c_{j-1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{x-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{x+\varepsilon}^{c_j-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \right] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{j-2}+\varepsilon}^{c_{j-1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{x-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x+\varepsilon}^{c_j-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

$$= \int_a^b f(x)dx. \qquad \text{Por el Lema 1.11.}$$

Ahora supongamos que $x = c_j$, para algún $j \in \{1,\dots,k\}$

$$\int_a^x f(x)dx + \int_x^b f(x)dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{j-2}+\varepsilon}^{c_{j-1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{x-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{x+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \right] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{j-2}+\varepsilon}^{c_{j-1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{x-\varepsilon} f(x)dx \right.$$

$$\left. + \int_{x+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \right] = \int_a^b f(x)dx.$$

A continuación expondremos brevemente la manera en que se puede extender la definición de integral a funciones cuyo conjunto de discontinuidades es infinito pero con un número finito de puntos de acumulación, es decir para funciones de tipo 1. No se probará en esta parte ningún resultado, pues esta demostración está contenida en la extensión que se hace inductivamente en la parte siguiente, para las funciones de tipo n..

DEFINICION DE INTEGRAL PARA UNA FUNCION ACOTADA Y CONTINUA EXCEPTO EN UN NUMERO INFINITO DE PUNTOS CON UN PUNTO DE ACUMULACION.

DEFINICION 1.13. Sea f una función acotada y definida en $[a,b]$, continua excepto en $\mathbb{D}_f$, tal que $\mathbb{D}_f$ tiene solo un punto de acumulación. Sea $c \in [a,b]$, tal punto, entonces, su integral entre a y b se define como:

i) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(X)dx \right].$$

si $a < c < b$.

ii) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$$

si $c = b$.

iii) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(X)dx .$$

si $c = a$.

Las integrales dentro del corchete existen, puesto que en los intervalos en donde están definidas $\mathbb{D}_f$ es finito.

DEFINICION DE INTEGRAL PARA UNA FUNCION ACOTADA Y CONTINUA EXCEPTO EN UN CONJUNTO INFINITO DE PUNTOS CON UN NUMERO FINITO DE PUNTOS DE ACUMULACION.

En la búsqueda de una mejor definición de integral para este tipo de funciones, observaremos que las formulaciones 1.10,1.13, 1.14 e incluso la definicón 1.16 (la cual llamamos extención de la integral de Cauchy-Lipschitz) fueron sugeridas por Dirichlet y Lipschitz en base a la propuesta que Cauchy tenía de "integral impropia" para funciones reales no acotadas. La consideración más importante que Dirichlet y Lipschitz hacen es la de que aun cuando los puntos de discontinuidad forman un conjunto "infinito muy grande" la restricción de que posean un número finito de puntos de acumulación, los hace, apesar de ser un conjunto infinito, estar lo suficientemente dispersos. No obstante fue hasta la aparición de las aportaciones de Cantor en topología de conjuntos infinitos y su inclusión en la teoría de integración que pudo darse una justificación satisfactoria de estas definiciones , lo cual se ha recopilado en la demostración elaborada para el teorema 1.17, y cuya formulación se desprende del las definiciones mencionadas, especificamente apartir de 1.16.

DEFINICION 1.14. Sea f una función acotada y definida en [a,b], continua tal que $\mathbb{D}_f$ es infinito con k puntos de acumulación. Sean $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$, tales puntos, entonces, la integral de f entre a y b se define como

$$\text{i)} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_2+\varepsilon}^{c_3-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

si el conjunto finito de puntos de acumulación, incluye los extremos a y b, es decir $a = c_1 < c_2 < \ldots < c_k = b$.

$$\text{ii)} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_k+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right]$$

si el conjunto finito de puntos de acumulación no incluye el extremo b, pero sí el punto a, es decir, $a = c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$.

$$\text{iii)} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

si el conjunto finito de puntos de acumulación, no incluye el extremo a, pero sí el punto b, es decir, $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k = b$.

$$\text{iv)} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_k+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right]$$

si el conjunto finito de puntos de acumulación, no incluye ninguno de los dos extremos, es decir $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$.

JUSTIFICACION:

1).- **EXISTENCIA:** Reflexionando sobre la demostración de esta generalización, podemos observar que, la existencia de las k integrales nos es garantizada por el hecho de que en los correspondientes intervalos de integración, la función f tiene a lo más un número finito de discontinuidades, y de esta manera la existencia del límite en cada uno de los $\underline{k}$ puntos de discontinuidad, se demuestra con el mismo argumento usado para justificar la definición 1.10. ∎

2) **PROPIEDADES:**

De la misma manera las propiedades de la integral para esta familia de funciones, que llamaremos de tipo 1, se obtienen repitiendo un número finito de veces el argumento del caso de la definición 1.10.

DEFINICION DE INTEGRAL DE UNA FUNCION ACOTADA Y CONTINUA EXCEPTO EN UN CONJUNTO DE PRIMERA ESPECIE.

Hasta este momento, se ha extendido la definición de integral, a una función f tal que $\mathbb{D}_f$ es infinito con k puntos de acumulación.

La presente extensión de la definición de integral, la cual constituye la generalización más importante de este capítulo, surge de una manera natural, motivada por el avance en el estudio de las funciones reales y teoría de conjuntos, posterior a la época de Cauchy.

Siguiendo el mismo esquema utilizado al definir la integral para una función continua excepto en un conjunto infinito de puntos con un número finito de puntos de acumulación, se puede ahora definir la integral para una función continua excepto en un conjunto de primera especie.

No obstante la claridad que hoy en día se ha podido alcanzar sobre esta generalización no siempre hubo acuerdo al respecto, por ejemplo, Dirichlet formulaba el problema como la obtención de la integral para funciones continuas excepto en un conjunto Nunca Denso; y Lipschitz, lo planteaba como la obtención de la integral para funciones continuas excepto en un conjunto de primera especie de tipo 1. Así, debido a la importancia que tiene en la teoría de integración el estudio de estos dos tipos de conjuntos, se ha incluído en el apéndice una discusión al respecto de ellos y frente al concepto de conjunto de contenido cero.

DEFINICION 1.15. El conjunto derivado de A es el conjunto de los puntos de acumulación de A y lo denotamos por A'. El segundo derivado de A, es el conjunto de los puntos de acumulación de A' y lo denotamos por A^2. Sucesivamente, el enésimo derivado de A, que denotamos por A^n, es el conjunto de los puntos de acumulación del n-1 derivado de A. Además definimos $A^0 = A$.

Un conjunto A es de primera especie si para algún n entero no negativo, A^n es finito.

Un conjunto A es de primera especie de tipo n, si n es el menor entero no negativo, tal que A^n es un conjunto finito. Es decir si su n-ésimo derivado es un conjunto sin puntos de acumulación.

Decimos que una función f, es de tipo n, si el conjunto de sus puntos de discontinuidad, $\mathbb{D}_f$, es un conjunto de tipo n. En este caso escribiremos $T(f) = n$.

Denotaremos por $\mathbb{F}_n$, al conjunto de funciones acotadas de tipo m para alguna $m \leq n$.

Considerando ahora nuestras definiciones anteriores, lo que hasta aquí hemos hecho es definir la integral para funciones f cuyo conjunto de discontinuidades $\mathbb{D}_f$ sea de tipo 0 y 1. Vayamos ahora a la definición más importante que utilizamos en el teorema más importante de este capítulo del trabajo:

DEFINICION 1.16. Extensión de la Integral de Cauchy-Lipschitz: Sea f una función acotada en [a,b] y continua excepto en $\mathbb{D}_f$ de primera especie. Se define la integral de f, en [a,b], de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_a^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_k+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right]$$

donde $T(f) = n$; $\mathbb{D}_f^n = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ y $a \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leq b$.

aclarando que:

Si $c_1 = a$ y $k > 1$, el primer término de la sumatoria se elimina.

Si $c_k = b$ y $k > 1$, se elimina el último de ellos.

Si $c_1 = a$ y $k = 1$, solo se considera el último término.

Si $c_1 = b$ y $k = 1$, solo se considera el primer término.

La definición anterior nos plantea demostrar la existencia de la integral para una función f, para la cual $\mathbb{D}_f$ es de tipo n, para cualquier entero no negativo n, así como la validez de las propiedades básicas para integrales. Con esta intención se ha elaborado el siguiente

TEOREMA 1.17. Las siguientes dos proposiciones son válidas para todo entero no negativo n:

a). Sea [a,b] un intervalo arbitrario y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada de tipo $m \leq n$ en [a,b], entonces la integral de f, $\int_a^b f(x)dx$, existe de acuerdo a la definición 1.16.

b). Se satisfacen las sigiuentes dos propiedades:

i). Linealidad respecto al integrando:

Si f y g son dos funciones en $\mathbb{F}_n$, entonces

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii). Positividad:

Si $f \in \mathbb{F}_n$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x) \geq 0$.

iii). Aditividad con respecto al dominio de definición:

Si $f \in \mathbb{F}_n$, entonces

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, para todo $c \in (a,b)$.

DEMOSTRACION. La demostración se hará por inducción.

Primer paso. Por demostrar: a) y b) son válidas para n=0.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $f \in \mathbb{F}_0$, es decir $T(f) = 0$, entonces $\mathbb{D}_f$ es tal que, $\mathbb{D}_f^1$ es vacío. En este caso, si $\mathbb{D}_f \neq \phi$ la integral $\int_a^b f(x)dx$, de acuerdo a la definición 1.16, se transforma en el caso de la definición 1.10 y si $\mathbb{D}_f = \phi$ se debe aplicar la definición 1.4. Ya se ha probado que en ambos casos la integral existe. Además, la parte (b) ha quedado tambien demostrada en el teorema 1.12. □

Segundo paso. Nuestro interés es, ir de la existencia de la integral y validez de las propiedades para las funciones de la familia $\mathbb{F}_n$, a su existencia y validez para la familia $\mathbb{F}_{n+1}$.

Es decir: si toda función f tal que $T(f) \leq n$ es integrable y la integral tiene las propiedades i), ii) y iii) entonces, toda función f tal que $T(f) \leq n+1$ también es integrable y la integral tiene las mismas propiedades.

Supongamos que a y b son válidas para n, vamos a probar que a y b son válidas para n+1.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $T(f) \leq n+1$, es decir, f es continua excepto en un conjunto de primera especie a lo más de tipo n+1. Sea $m = T(f)$ si $m = 0$, ya quedó demostrado en el primer paso que la integral de

f existe, así que supongamos que $m \geq 1$. $\mathbb{D}_f^m$ es entonces un conjunto no vacío finito.

Sea $\mathbb{D}_f^m \cup \{a,b\} = \{ c_1, c_2, \ldots ,c_k \}$

Si $a \notin \mathbb{D}_f^m$ entonces tomando $\epsilon>0$ suficientemente pequeña, en el intervalo $[a,a+\epsilon]$ $\mathbb{D}_f^{m-1}$ tiene a lo más un número finito de puntos, es decir $f \in \mathbb{F}_n$, así que por las propiedades a) y b) se puede escribir

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{a-\epsilon} f(x)dx \leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{a-\epsilon} |f(x)|dx \leq M \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon$$

donde M es una cota superior de $|f(x)|$ en $[a,b]$

De la misma manera, si $b \notin \mathbb{D}_f^m$ se tiene $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_{b+\epsilon}^{b} f(x)dx = 0$

Así que en cualquier caso , $\int_a^b f(x)dx$ está definida por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\epsilon}^{c_2-\epsilon} f(x)dx + \int_{c_2+\epsilon}^{c_3-\epsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\epsilon}^{c_k-\epsilon} f(x)dx \right]$$

Así, solo resta demostrar, que cada una de las funnciones

$$F_1(\epsilon) = \int_{c_1+\epsilon}^{c_2-\epsilon} f(x)dx \ , \ \ldots, \ F_{k-1}(\epsilon) = \int_{c_{k-1}+\epsilon}^{c_k-\epsilon} f(x)dx$$

es uniformemente continua en

$(0, c_2-c_1)$, ... , $(0, c_k - c_{k-1})$, respectivamente, ya que esto garantiza la existencia de los límites laterales

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_1(\varepsilon), \ \ldots \ , \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_{k+1}(\varepsilon).$$

para ello, demostremos que, si $a,b \in \mathbb{D}_f^m$ y $k > 1$ $F_1(\varepsilon)$ es uniformemente continua en el intervalo $(0, c_2-c_1)$. La demostración es análoga para $F_2(\varepsilon), \ \ldots \ , F_{k-1}(\varepsilon)$.

En efecto. Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, c_2-c_1)$ tales que $|\varepsilon_1-\varepsilon_2| < \varepsilon/2M$, donde M es cota superior de $|f|$ en [a,b].

Supongamos que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces como $f \in \mathbb{F}_n$ en el intervalo $[c_1+\varepsilon, c_2-\varepsilon]$ se satisfacen las propiedades (a) y (b), así que:

$$|F_2(\varepsilon_1) - F_2(\varepsilon_2)| = \left|\int_{c_1+\varepsilon_1}^{c_2-\varepsilon_1} f(x)dx - \int_{c_1+\varepsilon_2}^{c_2-\varepsilon_2} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{c_1+\varepsilon_1}^{c_1+\varepsilon_2} f(x)dx + \int_{c_2-\varepsilon_2}^{c_2-\varepsilon_1} f(x)dx\right|$$

$$\leq \int_{c_1+\varepsilon_1}^{c_1+\varepsilon_2} |f(x)|dx + \int_{c_2-\varepsilon_2}^{c_2-\varepsilon_1} |f(x)|dx$$

$$\leq M\ [(c_1+\varepsilon_2) - (c_1-\varepsilon_1)] + M\ [(c_2-\varepsilon_1) - (c_2-\varepsilon_2)]$$

$$= M(\varepsilon_2-\varepsilon_1) + M(\varepsilon_2-\varepsilon_1) < \frac{\varepsilon}{2M} 2M = \varepsilon$$

De donde, $F_1(\varepsilon)$ es uniformemente continua en $(0, c_2-c_1)$ y, por lo tanto, existe el $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_1(\varepsilon)$.

Entonces, concluimos la existencia de la integral para la familia de funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuas excepto en un conjunto de primera especie a lo más de tipo n+1. $\square$

Ahora, para completar la inducción y tener demostrado el hecho de que, toda función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua excepto en un conjunto de primera especie, es integrable y su integral tiene las propiedades básicas discutidas, nos resta probar (b) para $\mathbb{F}_{n+1}$.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA PARA FUNCIONES PERTENECIENTES A LA FAMILIA $\mathbb{F}_{n+1}$.

La demostración de la parte (b) requiere del siguiente lema, cuya demostración es análoga a la del lema 1.11.

LEMA 1.18. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función en $\mathbb{F}_{n+1}$, $\mathbb{D}_f^{n+1}\cup\{a,b\}=\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ y $c\in[a,b]$ tal que $c\neq c_i$ para cada $i=1,2,\ldots,k$, digamos, $c\in(c_{j-1}, c_j)$,

entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{j-2}+\varepsilon}^{c_{j-1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \right.$$
$$\left.\int_{c+\varepsilon}^{c_j-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx\right].$$

Además, si $T(f)\leq n$, entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

DEMOSTRACION. Si $\varepsilon>0$ es pequeña, entonces $T(f) \leq n$ en el intervaalo $[c_{j-1}+\varepsilon,\ c_j-\varepsilon]$, así que por la hipótesis de inducción, se tiene aditividad respecto al dominio de integración en ese intervalo y entonces podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \Bigg[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{j-2}+\varepsilon}^{c_{j-1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{c\ -\varepsilon} f(x)dx +$$

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{c_j-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \Bigg].$$

Pero cómo $T(f) \leq n$ en el intervaalo $[c_{j-1}+\varepsilon,\ c_j-\varepsilon]$, las propiedades (b) se satisfacen en ese intervalo y entonces :

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx = 0$, de lo cual se obtiene el resultado buscado.

Obsérvese que, al igual que el lema 1.11 , este lema sigue siendo válido para una colección finita de puntos c tales que $c \neq c_i$ para $i=1,2,\ldots,k$.

La última parte es inmediata, pues si $T(f) \leq n$ entonces $f \in F_n$, así que la propiedad de aditividad respecto a los límites de integración es válida, lo cual nos permite escribir para $\varepsilon>0$ muy pequeña

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

pero, nuevamente debido a que $f \in \mathbb{F}_n$, se tiene :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx = 0$$

i). LINEALIDAD RESPECTO AL INTEGRANDO.

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $f, g \in \mathbb{F}_{n+1}$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACION:

Sea $\mathbb{D}_f^{n+1} \cup \mathbb{D}_g^{n+1} \cup \{a,b\} = \{ c_1, c_2, \ldots, c_k \}$

Entonces, por el lema 1.18 se tiene

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{c+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \right]$$

Si $\varepsilon > 0$ es pequeña, por la hipótesis de inducción se verifica la propiedad de linealidad en cada una de las integrales dentro del paréntesis, por lo que el límite de la expresión anterior es igual a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\alpha\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \beta\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} g(x)dx + \dots + \alpha\int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx + \beta\int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} g(x)]dx\right] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\alpha\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \dots + \alpha\int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\beta\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} g(x)dx + \dots + \beta\int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} g(x)]dx\right] =$$

$$\alpha\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \dots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx\right] + \beta\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} g(x)dx + \dots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} g(x)]dx\right] =$$

$\alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ en virtud del lema 1.18. ■

ii). **POSITIVIDAD:**

Si $f\in F_{n+1}$ y $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

DEMOSTRACION: Sea $m=T(f)$, $D_f^{m+1} \cup \{a,b\} = \{ c_1, \dots . c_k \}$

entonces, por demostrar:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \dots + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \geq 0$$

Lo cual resulta evidente pues, de nuestra hipótesis inductiva de positividad tenemos que

$$\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx \geq 0, \quad \ldots, \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \geq 0,$$

Por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \geq 0\right.$$

entonces $$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$ □

iii). **ADITIVIDAD RESPECTO A LOS LIMITES DE INTEGRACION.**

Sea $f \in \mathbb{F}_{n+1}$

P.D. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ para todo } a<c<b.$$

Sea $\mathbb{D}_f^{n+1} \cup \{a,b\} = \{ c_1, \ldots . c_k \}$

Supongamos primero que $c=c_j$, para algún $j \in \{1,\ldots,k\}$

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

e igualmente

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{c+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx \right]$$

entonces

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx\right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx\right] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{j-1}+\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx\right] = \int_a^b f(x)dx.$$

Ahora, supongamos que existe $j\in\{1,\ldots,k\}$, tal que $c_j < c < c_{j+1}$.

Por demostrar

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_j+\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}+\varepsilon}^{c_k-\varepsilon} f(x)dx\right] = \int_a^b f(x)dx$$

Lo cual es cierto por el lema 1.18.

Por lo tanto: Si $f\in F_{n+1}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(X)dx,$$

para todo $a<c<b$. □

Por consiguiente si las propiedades a) y b) del teorema son válidas para n, hemos demostrado que también lo son para n+1.

Por lo tanto, se sigue que toda $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua excepto en un conjunto de primera especie, es integrable y su integral tiene las propiedades i), ii) y iii). ■

CAPITULO II

INTEGRAL DE RIEMANN

§ 1. DEFINICIONES Y TEOREMAS PRINCIPALES.

Conforme avanza el S XIX, y con este el estudio de las funciones reales de variable real, entran en escena funciones entre las cuales destacan las discontinuas no solo en un conjunto de primera especie, o en uno nunca denso, sino aquellas funciones acotadas y cuyo conjunto de discontinuidades es ún conjunto denso.

Esta situación le toca vivir a Riemann, quien tratando de ampliar al máximo la clase de funciones integrables, se plantea resolver el problema de la integral para funciones "altamente discontinuas", pero transformando el enfoque de Cauchy, de tal manera que, la búsqueda tradicional en la definición de integral aparece, en la teoría de Riemann, como la búsqueda de Condiciones de Integrabilidad para una función f.

Así, no obstante tomar como punto de partida la definición de Cauchy para funciones continuas, el proceso de desarrollo de la teoría de integración abandonó rápidamente el viejo enfoque, para avocarse a la búsqueda de condiciones que permitan hablar de cuándo una función f es integrable. Aun más, podemos anotar que la teoría de integración, desde Riemann hasta antes de Peano y Jordan consistió en la búsqueda de las condiciones para la existencia de la integral.

para la presentación de la teoría de Riemann, iniciemos con las siguientes definiciones y teoremas.

DEFINICION 2.1. Sea $f\colon[a,b] \to \mathbb{R}$, acotada y $P = \{ a = x_1,\dots,x_n = b \} \in \mathbb{P}\,[a,b]$, definamos

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$\text{donde } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i=1, \dots ,n.$$

Diremos que una función acotada $f\colon[a,b] \to \mathbb{R}$, es Riemann-integrable si existe

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f)$$

independientemente de la elección de puntos

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i=1, \dots ,n.$$

Es decir, si existe $A\in\mathbb{R}$ con la siguiente propiedad:

Para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que, $\|P\| < \delta$ implica $|S(P,f)-A| < \varepsilon$, para cualquier elección de puntos $\xi_i\in [x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots ,n$.

Observemos que esta definición de Riemann, en cuanto a la forma, es esencialmente la misma que la admitida para la integral de Cauchy: la única diferencia es que Cauchy pensó en el extremo izquierdo del subintervalo Δx_i de la partición y Riemann escoge arbitrariamente un punto ξ_i, con tal de que $\xi_i\in \Delta x_i$.

Obsérvese además que, Cauchy ha definido la integral como límite de sumas únicamente para funciones continuas, Riemann, en cambio se plantea el problema de caracterizar a las funciones para las cuales el límite de estas sumas existe.

Un elemento que interviene en este nuevo enfoque es que ya Riemann toma el concepto de función como lo conocemos modernamente.

A continuación demostraremos una caracterización de las funciones Riemann - integrables, la cual es de gran utilidad para la demostración de algunos teoremas que aparecerán en el transcurso del capítulo:

TEOREMA 2.2: sea $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ acotada. Entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$ si, y solo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que, dado $\varepsilon>0$ existe $P_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que para toda $P \supset P_\varepsilon$ $|S(P,f)-A|<\varepsilon$, para cualquier elección de puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \ldots ,n$.

En tal caso $A = \int_a^b f(x)dx$.

DEMOSTRACION: Primera implicación: Sea f Rimann-integrable en $[a,b]$. Sea $\varepsilon>0$. Entonces existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$\|P\| < \delta \Rightarrow |S(P,f)-A| < \varepsilon.$$

Sea $P_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que $\|P_\varepsilon\| < \delta$.

Si P es un refinamiento de P_ε , entonces

$$\|P\| \leq \|P_\varepsilon\| < \delta \Rightarrow |S(P,f)-A| < \varepsilon. \qquad \square$$

Inversamente: De la condición dada en términos de refinamientos, tendremos que concluir que: dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que, $P \in \mathbb{P}[a,b]$, y $\|P\| < \delta \Rightarrow |S(P,f)-A| < \varepsilon$ para toda elección de $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Sea $\varepsilon>0$ por hipótesis existe $P_\varepsilon \in [a,b]$, digamos $P_\varepsilon = \{a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b\}$, tal que

si $P \supset P_\varepsilon$, entonces $|S(P,f)-A| < \varepsilon$.

Sean $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ y $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{4nM}, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$

Sea $Q = \{ a=y_0, y_1, \ldots, y_n=b \} \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que $\|Q\| < \delta$, y

sea $Q^* = Q \cup P_\varepsilon$. Bastará demostrar que

$$|S(Q^*,f) - S(Q,f)| < \varepsilon \qquad (**)$$

pues en tal caso

$$|S(Q,f) - A| \leq |S(Q,f) - S(Q^*,f)| + |S(Q^*,f) - A|$$

Debido a que $Q^* \supset P_\varepsilon$, se tendría $|S(Q^*,f) - A| < \varepsilon$,

y por lo tanto

$|S(Q,f) - A| < 2\varepsilon$ que es lo deseamos demostrar. □

Ahora veamos la veracidad de (**):

Por la forma en que se ha elegido la δ, entre dos puntos de Q existe a lo más un punto de P_ε (que no sea de Q). Supongamos que $Q \cap P_\varepsilon = \phi$, entonces denotemos:

$$y_{i_1-1} < x_1 < y_{i_1}$$

$$y_{i_2-1} < x_2 < y_{i_2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y_{i_n - 1} < x_n < y_{i_n}$$

sean $t_j \in [y_{j-1}, y_j]$, para toda $j=1,\ldots,m$ los puntos intermedios en $S(Q,f)$.

Designemos ahora una cantidad de puntos intermedios para Q^* de la siguiente manera:

1).- Si el intervalo (y_i, y_{i+1}), no tiene puntos de P_ε entonces el punto intermedio será t_i.

2).- Si el intervalo es de la forma $(y_{i_k - 1}, x_k)$ o (x_k, y_{i_k}) entonces tomamos puntos intermedios arbitrarios denotados por ξ_k y ξ_k' respectivamente.

Estimemos ahora la diferencia en las sumas de Riemann:

$$S(Q^*, f) - S(Q,f)$$

Observando que los términos $f(t_i)(y_i - y_{i-1})$ correspondientes a intervalos de Q que no contienen puntos de P_ε (caso 1, arriba señalado) estan en ambas sumatorias y que por lo tanto se cancelan en la diferencia, tenemos entonces que:

$$S(Q^*, f) - S(Q,f) = \sum_{k=1}^{n} [\, f(\xi_k)(x_k - y_{i_k - 1}) + f(\xi_k')(y_{i_k} - x_k)\,]$$

$$-\sum_{k=1}^{n} f(t_{i_k})(y_{i_k} - y_{i_{k-1}}) =$$

Sumando y restando cantidades iguales tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_{i_k})(y_{i_k} - y_{i_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_{i_k})[(y_{i_k} - x_k) + (x_k - y_{i_{k-1}})] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_{i_k})(y_{i_k} - x_k) + \sum_{k=1}^{n} f(t_{i_k})(x_k - y_{i_{k-1}})$$

entonces agrupando:

$$S(Q^* ,f) - S(Q,f) = \sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k') - f(t_{i_k})](y_{i_k} - x_k) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k - f(t_{i_k})(x_k - y_{i_{k-1}})$$

Por lo tanto

$$S(Q^* ,f) - S(Q,f) \le 2(2Mn\|Q^*\|) < 4Mn\delta < 4Mn \frac{\varepsilon}{4nM} = \varepsilon. \qquad \square$$

Por lo tanto, concluimos de este resultado que, siendo (**) cierta, la segunda implicación está demostrada, terminando así la demostración para el teorema 2.2. ■

DEFINICION 2.3. Sea f acotada y definida en $[a,b]$, $P \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que

$$P = \{ a= x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b \}, \text{ y sean}$$

$$M_i = \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$m_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

entonces, los números

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

se llaman, respectivamente, suma superior e inferior de Riemann para la partición P de la función f.

OBSERVACION 2.4: Para toda partición $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$L(P,f) \le U(P,f).$$

OBSERVACION 2.5: Si P' es un refinamiento de P

$$U(P',f) \le U(P,f).$$

y

$$L(P',f) \ge L(P,f).$$

Demostración. Para probar esta afirmación, basta suponer que P' posee solo un punto más que P, digamos c.

Si $c \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$U(P',f) = M_1\Delta x_1 + \ldots + M_{k-1}\Delta x_{k-1} + M'[c - x_{k-1}] +$$

$$M''[x_k - c] + M_{k+1}\Delta x_{k+1} + \ldots + M_n\Delta x_n.$$

donde $M' = \sup\{ f(x) : x \in [x_{k-1}, c] \}$

$$M'' = \sup\{ f(x) : x \in [c, x_k] \}.$$

Pero $M' \le M_k$ y $M'' \le M_k$, por lo tanto

$$U(P',f) \le M_1\Delta x_1 + \ldots + M_{k-1}\Delta x_{k-1} + M_k[c - x_{k-1}] + M_k[x_k - c] + M_{k+1}\Delta x_{k+1} + \ldots + M_n\Delta x_n.$$

$$= M_1\Delta x_1 + \ldots + M_{k-1}\Delta x_{k-1} + M_k\Delta x_k + M_{k+1}\Delta x_{k+1} + \ldots + M_n\Delta x_n$$

$$= U(P,f)$$ □

Análogamente se demuestra que si P' es un refinamiento de P

$$L(P',f) \ge L(P,f).$$ ■

OBSERVACION 2.6: Para cada pareja de particiones P, Q $\in \mathbb{P}[a,b]$

$$L(P,f) \le U(Q,f).$$

Demostración: Sea $P' = P \cup Q$ así P' es un refinamiento de P y de Q, entonces $L(P,f) \le L(P',f) \le U(P',f) \le U(Q,f)$. ■

OBSERVACION 2.7: Si $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ y $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

entonces $m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a) \quad \forall \quad P \in \mathbb{P}[a,b]$.

DEMOSTRACION: Para toda $i = 1, \ldots, n$:

$$m \leq m_i \quad y \quad M_i \leq M$$

y por consiguiente

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M(b-a)$$

es decir

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a).$$ ■

DEFINICION 2.8: Las igualdades

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P\in\mathbb{P}[a,b]} U(P,f) \quad y \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} L(P,f)$$

definen respectivamente la integral superior e integral inferior de la función f.

LEMA 2.9: Si f es acotada en [a,b], entonces

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx .$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ existe $P' \in \mathbb{P}[a,b]$ tal que

$$U(P',f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

De la observación 2.6,

$$L(P,f) \leq U(P',f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon, \text{ para toda } P \in \mathbb{P}$$

Así,
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$$

es una cota superior del conjunto $\{ L(P,f): P \in \mathbb{P}[a,b] \}$ de donde

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \{ L(P,f): P \in \mathbb{P}[a,b] \} \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon ,$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon \quad \text{para toda } \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$ ■

TEOREMA 2.10: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:

a) $$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

b) f es Riemann-integrable en $[a,b]$.

c) Para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que si $P \supset P_\varepsilon$ entonces $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

DEMOSTRACION: a) $\Rightarrow$ b).

Supongamos

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = A \quad y \quad \text{sea } \varepsilon > 0$$

Por definición de $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, existe $P'_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que

$$A - \varepsilon = \underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon < L(P'_\varepsilon, f)$$

Análogamenté existe $P''_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que

$$U(P''_\varepsilon, f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon = A + \varepsilon$$

Sea $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$. Si $P \supset P_\varepsilon$ tendremos que

$$A - \varepsilon < L(P'_\varepsilon,f) \le L(P,f) \le S(P,f) \le U(P,f) \le U(P''_\varepsilon,f) < A + \varepsilon$$

de donde $\quad A - \varepsilon < S(P,f) < A + \varepsilon \quad$ si $P \supset P_\varepsilon$

es decir, $|S(P,f) - A| < \varepsilon$, si $P \supset P_\varepsilon$

para cualquier elección de puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Por el teorema 2.2: $\quad f$ es Riemann-integrable en $[a,b]$. □

b) $\Rightarrow$ c)

Supongamos que f es Riemann-integrable en $[a,b]$, sea $\varepsilon>0$. Por el teorema 2.2 dado $\varepsilon>0$ existe $P_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que, para toda $P \supset P_\varepsilon$ y para cualquier elección ξ_i, $\xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/3$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/3, \text{ y por lo tanto}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi'_i)]\Delta x_i\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| +$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3.$$

Sea $\quad h = \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)} > 0.$

Como $M_i - m_i = \sup\{\, f(x) - f(y) : x, y \in [x_{i-1}, x_i] \,\}$

entonces para cada $i = 1, \dots, n$ podemos elegir

$\xi_i\ ,\ \xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que, $M_i - m_i - h < f(\xi_i) - f(\xi'_i)$

Por lo tanto $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} [M_i - m_i]\Delta x_i <$

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi'_i) + h]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi'_i)]\Delta x_i + h\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i <$$

$$2\varepsilon/3 + h(b-a) = 2\varepsilon/3 + \frac{\varepsilon(b-a)}{3(b-a)} = \varepsilon$$

Es decir, $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ si $P \supset P_\varepsilon$. □

c) $\Rightarrow$ a):

Supongamos c), así, dada $\varepsilon > 0$ sea $P_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$ tal que si $P \supset P_\varepsilon$ entonces $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$.

De la hipótesis tenemos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le U(P,f) < \varepsilon + L(P,f)$$

$$\le \varepsilon + \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por lo tanto $\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \varepsilon + \underline{\int_a^b} f(x)dx$ para todo $\varepsilon > 0$, de donde

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$ ■

§ 2. CRITERIO UNO Y DOS DE RIEMANN-INTEGRABILIDAD.

A continuación estudiaremos los criterios que originalmente encontró Riemann para caracterizar a las funciones integrables. La importancia de estos criterios radica en el hecho de que su estudio llevó a caracterizar la integrabilidad de una función en términos del tamaño del conjunto de sus discontinuidades, problema que abordaremos en el siguiente capítulo.

Puesto que para la discusión de ambos criterios requerimos del concepto de oscilación de f en un intervalo cerrado, formulemos la siguiente

DEFINICION. 2.11. Sea f acotada en $[a,b]$, $P = \{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \} \in \mathbb{P}[a,b]$. Definimos el número

$$D_i = M_i - m_i \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

como la oscilación de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\ldots,n$;

donde $M_i = \sup \{ f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$$m_i = \inf \{ f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

CRITERIO UNO

DEFINICION 2.12. Sea f acotada en [a,b], decimos que f cumple con el CRITERIO UNO DE RIEMANN si

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} D_i \delta_i = 0$$

$$\text{donde } \delta_i = x_i - x_{i-1}$$

i.e.: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $\|P\| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} D_i \delta_i < \varepsilon$.

Observación: La condición c) del teorema 2.10 es la versión del criterio uno de Riemann usando refinamientos.

CRITERIO DOS

DEFINICION 2.13. Sea f acotada en [a,b], decimos que f cumple con el CRITERIO DOS DE RIEMANN si dados $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ existe un $d > 0$ tal que, si P es cualquier partición tal que, $\|P\| \leq d$, entonces

$$S(P,\sigma) < \varepsilon.$$

Donde $S(P,\sigma)$, representa la suma de las longitudes de los subintervalos de la partición P, para los cuales la oscilación de f es mayor que σ, y la expresamos de la siguiente manera:

$$S(P,\sigma) \cong \sum_{D_i > \sigma} \delta_i$$

TEOREMA 2.14. Una función acotada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, satisface el Criterio Uno de Riemann si, y solo si, satisface el Criterio Dos de Riemann.

DEMOSTRACION:

a) DEL CRITERIO UNO AL CRITERIO DOS:

P.D. Dados $\varepsilon>0$ y $\sigma>0$ existe $d>0$, tal que si $\|P\| < d$ entonces,

$$S(P, \sigma) < \varepsilon$$

DEMOSTRACION: Sean $\varepsilon>0$ y $\sigma>0$ para cada $d>0$ definamos

$$\Delta(d) \overset{\circ}{=} \sup \{ \sum_{i=1}^{n} D_i \delta_i : P \in \mathbb{P}[a,b], \|P\| < d \}$$

Como $\sum_{i=1}^{n} D_i \delta_i$, es acotada puesto que f es acotada, supongamos

$|f| \leq M$, entonces $\sum_{i=1}^{n} D_i \delta_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\delta_i \leq 2M \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2M(b-a)$,

entonces $\Delta(d)$ está bien definida, ahora, por hipótesis $\Delta(d) \to 0$ si $d \to 0$, por lo tanto para $\sigma\varepsilon>0$ podemos encontrar $d>0$, tal que $\Delta(d) < \sigma\varepsilon$ si $\|P\| < d$.

Así, si $\|P\| < d$ entonces

$$\sigma\, S(P,\sigma) = \sigma \sum_{D_i>\sigma} \delta_i = \sum_{D_i>\sigma} \sigma\delta_i < \sum_{D_i>\sigma} D_i \delta_i < \Delta(d) < \sigma\varepsilon$$

es decir, $\|P\| < d \to S(P,\sigma) < \varepsilon$. □

b) DEL CRITERIO DOS AL CRITERIO UNO:

P.D. Para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que si $\|P\| < \delta$, entonces $D_1\delta_1 + \dots + D_n\delta_n < \varepsilon$.

DEMOSTRACION: Sea $\varepsilon>0$ arbitrario. Dado $\sigma>0$ y P cualquier partición en $\mathbb{P}[a,b]$ tenemos que para el total de los subintervalos de la partición P, podemos tomar dos tipos de ellos: Aquellos para los cuales $D_i>\sigma$ y aquellos en los que $D_i\leq \sigma$.

Entonces podemos escribir

$$D_1\delta_1 + \dots + D_n\delta_n = \sum_{D_i>\sigma} D_i\delta_i + \sum_{D_i\leq\sigma} D_i\delta_i$$

Supongamos que $|f(x)| \leq M$ para tada $x \in [a,b]$, entonces $D_i \leq 2M$ para toda i.

Así,

$$D_1\delta_1 + \dots + D_n\delta_n \leq \sum_{D_i>\sigma} 2M\delta_i + \sum_{D_i\leq\sigma} D_i\delta_i \leq 2M \sum_{D_i>\sigma}\delta_i + \sigma \sum_{D_i\leq\sigma}\delta_i$$

$$\leq 2M\, S(P,\sigma) + \sigma(b-a).$$

Ahora bien, por hipótesis podemos encontrar $d>0$, tal que, para toda partición P, de $\|P\| < d$

$$S(P,\sigma) < \varepsilon/4M \equiv \varepsilon^*,$$

además, si escogemos σ tal que $\sigma < \varepsilon/2(b-a)$

entonces tendremos

$$2M\, S(P,\sigma) + \alpha(b-a) < 2M\varepsilon^{*} + \alpha(b-a)$$

$$< 2M(\varepsilon/4M) + [\varepsilon/2(b-a)](b-a) = \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\|P\| < d \Rightarrow D_1\delta_1 + \ldots + D_n\delta_n < \varepsilon. \qquad \square$$

De a) y b) tenemos la demostración de 2.14. ■

TEOREMA 2.15. Dada una función f acotada en [a,b], entonces f es Riemann-integrable en [a,b] si, y solo si, cumple con el CRITERIO UNO de Riemann.

DEMOSTRACION: a) Supongamos que f satisface el Criterio uno de Riemann en [a,b].

Así, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que, si $\|P\| < \delta$

entonces $$\sum_{i=1}^{n} D_i\delta_i < \varepsilon$$

es decir $$U(P,f) < L(P,f) + \varepsilon.$$

Sea P_ε una partición de norma menor que δ, si $P \supset P_\varepsilon$, entonces $\|P\| < \delta$ asi que $$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon.$$
por lo tanto se satisface c) del teorema 2.10 y entonces f es

Riemann-integrable.

De donde, si f satisface el CRITERIO UNO DE RIEMANN en $[a,b]$, f es Riemann-integrable en $[a,b]$. □

b). Supongamos que f es Riemann-integrable en $[a,b]$:

Sea $\varepsilon>0$. Como f es Riemann-integrable en $[a,b]$, se sigue que, existe $\delta>0$, tal que, para toda P con $\|P\| < \delta$ y para cualquier elección de ξ_i , $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/3$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/3, \text{ y por lo tanto}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi_i')]\Delta x_i\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| +$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3.$$

Sea $h = \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Como $M_i - m_i = \sup \{ f(x) - f(y) : x, y \in [x_{i-1}, x_i] \}$

entonces para cada $i = 1, \ldots , n$ podemos elegir

ξ_i , $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que, $M_i - m_i - h < f(\xi_i) - f(\xi_i')$

Por lo tanto $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{i=1}^{n}[M_i - m_i]\Delta x_i <$

$$\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) - f(\xi_i') + h]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) - f(\xi_i')]\Delta x_i + h\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i <$$

$$2\varepsilon/3 + h(b-a) = 2\varepsilon/3 + \frac{\varepsilon(b-a)}{3(b-a)} = \varepsilon$$

Es decir, $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ si $\|P\| < \delta$,

tenemos el Criterio Uno de Riemann. ■

De los teoremas 2.14 y 2.15, podemos formular el siguiente

COROLARIO 2.16. Dada una función f acotada en [a,b], entonces f es Riemann-integrable en [a,b] si, y solo si, cumple con el Criterio Dos de Riemann.

Algunas propiedades de la Integral de Riemann que es importante enunciar y demostrar son la siguientes:

Sean f y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrables en [a,b]. Entonces:

i.- **LINEALIDAD RESPECTO AL INTEGRANDO:**

$\alpha f + \beta g$ es Riemann-integrable en [a,b] para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

ii.- **ADITIVIDAD RESPECTO AL DOMINIO DE DEFINICION:**

Si $a < c < b$ entonces f es Riemann-integrable en [a,c] y en [c,b] y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

iii.- **POSITIVIDAD:**

Si f es Riemann-integrable en [a,b] y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

iv.- **PROPIEDAD DEL VALOR ABSOLUTO.**

Si f es Riemann-integrable en [a,b] entonces $|f|$ es Riemann-integrable y

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

v.- La función $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(que está bien definida en virtud de ii), es continua en $[a,b]$.

DEMOSTRACIONES

i.- Sean f y $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrables en $[a,b]$.

Entonces P.D. la función $\alpha f(x) + \beta g(x)$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ para todo par de constantes $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Sea $\varepsilon>0$, existen particiones de $[a,b]$ P'_ε , P''_ε tal que,

si $P' \supset P'_\varepsilon$ entonces $\left| S(P',f) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$

y si $P'' \supset P''_\varepsilon$ entonces $\left| S(P'',g) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$

Sea $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$. Si $P \supset P_\varepsilon$, digamos

$P = \{ a= x_0, x_1, \ldots,x_n =b \}$, y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$\left| S(P, \alpha f + \beta g) - (\alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b f(t)dt) \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))\Delta x_i - (\alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b f(t)dt) \right| =$$

$$\left| \alpha \left[\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(t)dt \right] + \beta \left[\sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta x_i - \int_a^b g(t)dt \right] \right| =$$

$$\left| \alpha \left[S(P, f) - \int_a^b f(t)dt \right] + \beta \left[S(P,g) - \int_a^b g(t)dt \right] \right| \leq$$

$$|\alpha| \left| S(P, f) - \int_a^b f(t)dt \right| + |\beta| \left| S(P,g) - \int_a^b g(t)dt \right| <$$

$$|\alpha| \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, la función $\alpha f + \beta g$ es Riemann-integrable en $[a,b]$

$$y \quad \int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g. \qquad \blacksquare$$

ii.- Si $a < c < b$ entonces f es Riemann-integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Sea $\varepsilon>0$. Como f es Riemann-integrable en $[a,b]$, existe $P_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$ tal que, si $P \supset P_\varepsilon$ entonces $U(P,f) - L(P,f) <\varepsilon$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c \in P_\varepsilon$.

Sea $P'_\varepsilon = P_\varepsilon \cap [a,c]$, entonces si $P' \in \mathbb{P}[a,c]$ y $P' \supset P'_\varepsilon$

$$U(P',f) - L(P',f) \le U(P'_\varepsilon,f) - L(P'_\varepsilon,f) \le U(P_\varepsilon,f) - L(P_\varepsilon,f) < \varepsilon,$$

Por lo tanto f es Riemann-integrable en $[a,c]$.

De manera análoga se prueba que f es Riemann-integrable en $[c,b]$.

Ahora, sea $P_1 \in \mathbb{P}[a,c]$ y $P_2 \in \mathbb{P}[c,b]$, entonces $P = P_1 \cup P_2 \in \mathbb{P}[a,b]$

y $\quad U(P_1,f) + U(P_2,f) = U(P,f) \ge \int_a^b f(t)dt$

Tomando el ínfimo sobre todas las particiones $P_1 \in \mathbb{P}[a,c]$,

obtenemos
$$\int_a^b f(t)dt \le \int_a^c f(t)dt + U(P_2,f)$$

Y, de nuevo, tomando el ínfimo sobre todas las particiones $P_2 \in \mathbb{P}[c,b]$ se tiene:

$$\int_a^b f(t)dt \le \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Análogamente

$$L(P_1,f) + L(P_2,f) = L(P,f) \le \int_a^b f(t)dt \qquad \text{(I)}$$

y razonando como antes, tomando supremos en vez de ínfimos, obtenemos

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \le \int_a^b f(t)dt \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II), se obtiene

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt. \qquad \blacksquare$$

iii.- **POSITIVIDAD:**

Demostremos que si $f \geq 0$, entonces $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

En efecto: Para cualquier $P \in \mathbb{P}[a,b] \to P = \{a=x_0, x_1, \ldots x_n=b\}$,

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \geq 0 \text{ porque } M_i \geq 0 \text{ para toda } i,$$

por consiguiente $\overline{\int_a^b} f(t)dt = \inf \{ U(P,f) : P \in \mathbb{P}[a,b] \} \geq 0$

así, $\int_a^b f(t)dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt \geq 0. \qquad \blacksquare$

iv.- **PROPIEDAD DEL VALOR ABSOLUTO.**

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrables en $[a,b]$. Entonces:
$|f|$ es Riemann-integrable y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

Primeramente demostremos que $|f|$ es Riemann-integrable en $[a,b]$, observemos que si $x,y \in [a,b]$, entonces

$$\left|\,|f(x)| - |f(y)|\,\right| \leq |f(x) - f(y)|$$

Por lo tanto para cualquier $P \in \mathbb{P}[a,b]$, $P = \{a=x_0, \ x_1, \ \ldots \ x_n=b\}$,

$$\sup_{x,y\in[x_{i-1}, \ x_i]} \left|\,|f(x)| - |f(y)|\,\right| \leq \sup_{x,y\in[x_{i-1}, \ x_i]} |f(x) - f(y)|, \text{ para toda } i=1,\ldots,n,$$

en otras palabras, la oscilación de $|f|$ en cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$. que denotaremos por $D_i(\,|f|\,)$ es menor o igual que la correspondiente de f, es decir: $D_i(\,|f|\,) \leq D_i(f)$, para toda

$i = 1,\ldots,n$

Como f es Riemann-integrable en $[a,b]$, por el Criterio Uno

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} D_i(f)\delta_i = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} D_i(\,|f|\,)\delta_i \leq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} D_i\delta_i = 0$$

Así que se satisface el Criterio Uno de Riemann para $|f|$ y entonces $|f|$ es Riemann-integrable en $[a,b]$. □

Ahora, como $-|f| \leq f \leq |f|$, para toda $x \in [a,b]$, se sigue que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

Por lo tanto

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ . \qquad \blacksquare$$

v.- Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrable en $[a,b]$. Entonces:

P.D. La función $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(que está bien definida en virtud de ii),

es continua en $[a,b]$.

Sean $x,y \in [a,b]$ tal que, $x \neq y$; si $x < y$, entonces

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right|$$

$$= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|dt$$

$$\leq \int_x^y M \, dt = M\,(y-x) = M\,|y-x|,$$

$$\text{donde } M = \sup_{t\in[a,b]} |\,f(t)\,|$$

Si $y < x$, podemos escribir lo siguiente:

$$|F(y) - F(x)| = \left| -\int_y^x f(t)dt \right| = \left| \int_y^x f(t)dt \right| \leq M\,(x-y) = M|x-y|.$$

Por lo tanto: $|F(y) - F(x)| \leq M|x-y|$ para todo $x,y \in [a,b]$, luego F es continua. ∎

§ 3 TODA FUNCION LIPSCHITZ-INTEGRABLE ES RIEMANN-INTEGRABLE Y AMBAS INTEGRALES COINCIDEN.

Probaremos ahora que la integral de Riemann es una extención de la integral de Lipschitz, es decir, si f es Lipschitz-integrable entonces también es Riemann-integrable y además los valores de las integrales coinciden.

Veamos ambas proposiciones por separado:

1). TODA FUNCION LIPSCHITZ-INTEGRABLE ES RIEMANN-INTEGRABLE.

La consideración de que la definición de Riemann-integrabilidad es una extensión de la definición de la integral de Lipschitz, nos impone demostrar el siguiente

TEOREMA. 2.17. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua excepto en un conjunto $\mathbb{D}_f$ de primera especie, entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$.

PRUEBA: Con el mismo esquema utilizado antes, en algunas de las demostraciones del capítulo anterior, se probará por inducción sobre el tipo de f, que la integral de Lipschitz satisface el criterio dos de Riemann.

I).- La proposición es cierta si $\mathbb{D}_f$ es de tipo cero:

a).- Si $\mathbb{D}_f = \phi$, entonces de la continuidad uniforme de f se sigue que para $\sigma>0$ arbitrario existe $\delta>0$ tal que

$0 < y-x < \delta \longrightarrow \Omega_f([x,y]) < \sigma$, o sea que si $P \in \mathbb{P}([a,b])$ y $\|P\| < \delta$ entonces $S(P,\sigma) = 0$.

b).- Para el caso en que $\mathbb{D}_f$ es no vacío pero finito, supondremos por simplicidad, como antes; que $\mathbb{D}_f=\{c\}$ con $a<c<b$. Dados $\varepsilon>0$ y $\sigma>0$, escojamos $\delta = \delta(\varepsilon,\sigma)>0$ tal que $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y además tal que $0 < y - x < \delta$, y si $\{x, y\} \subset [a, c - \frac{\varepsilon}{4}]$ ó bien $\{x, y\} \subset [c + \frac{\varepsilon}{4}, b]$ entonces $\Omega_f([x,y]) < \sigma$, lo cual es posible pues f es uniformemente continua en el conjunto $[a, c - \frac{\varepsilon}{4}] \cup [c + \frac{\varepsilon}{4}, b]$.

Entonces, si $\|P\| < \delta$ y $P = \{ a=x_1<\ldots< x_n=b \}$, escogiendo

$x_p = \max \{x_i: x_i \leq c - \frac{\varepsilon}{4}\}$ y $x_q = \min \{ x_i: x_i \geq c + \frac{\varepsilon}{4}\}$,

se tiene que

$x_p \leq c - \frac{\varepsilon}{4}$, $x_q \geq c + \frac{\varepsilon}{4}$ y $x_q - x_p < \varepsilon$, de donde

$$S(P,\sigma) = \sum_{D_i \geq \sigma} \Delta x_i \leq x_q - x_p < \varepsilon.$$

Sucesivamente si $\mathbb{D}_f=\{c_1, \ldots, c_k\}$, aplicamos tantas veces como sea necesario el razonamiento anterior para demostrar que f satisface el Criterio Dos de Riemann. □

II).- Supongamos ahora que se cumple que toda $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que $\mathbb{D}_f([a,b])$, "el conjunto de discontinuidades de f en $[a,b]$", es de tipo menor o igual que n, es Riemann-integrable.

Sea $[a,b]$ un intervalo arbitrario y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que $\mathbb{D}_f([a,b])$ es de tipo n+1.

Supongamos de nuevo por simplicidad que

$$\mathbb{D}_f^{n+1} = \{ c \} \quad \text{con } a < c < b.$$

Sean $\varepsilon>0$, $\sigma>0$ arbitrarios. Escojamos $\delta>0$, sea $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, y además tal que

$P' \in \mathbb{P}([a,c-\frac{\varepsilon}{4}])$, $\|P'\| < \delta \Rightarrow S(P',\sigma) < \frac{\varepsilon}{4}$ y

$P'' \in \mathbb{P}([c+\frac{\varepsilon}{4}, b])$, $\|P''\| < \delta \Rightarrow S(P'',\sigma) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Esto último es posible por la hipótesis de inducción, ya que $\mathbb{D}_f[a,c-\frac{\varepsilon}{4}]$, $\mathbb{D}_f[c+\frac{\varepsilon}{4}, b]$, son de tipo n.

Si tomamos ahora $P \in \mathbb{P}[a,b]$, tal que $\|P\| < \delta$ se tendrá entonces que: $S(P,\sigma) \leq \frac{\varepsilon}{2} + S(P',\sigma) + S(P'',\sigma)$, donde

$P' = P \cap [a, c - \frac{\varepsilon}{4}] \in \mathbb{P}[a, x_p]$ y $P'' = P \cap [c + \frac{\varepsilon}{4}, b] \in \mathbb{P}[x_q, b]$

con x_q y x_p definidos igual que en I.

Por lo tanto $S(P,\sigma) < \varepsilon$. □

2). LA INTEGRAL DE LIPSCHITZ COINCIDE CON LA INTEGRAL DE RIEMANN

Otro de los resultados que nos exige el observar a la integral de Riemann como una extensión de la definición de integral de Lipschitz es probar que ambas integrales coinciden para las funciones cuyas discontinuidades forman un conjunto de primera especie , lo cual podemos enunciar bajo el siguiente

TEOREMA. 2.18. Si una función f es Lipschitz-integrable entonces su integral coincide con la Integral dada por Riemann para funciones con un conjunto de discontinuidades de primera especie.

DEMOSTRACION: A la integral de Lipschitz de f, definida en 1.16, la denotaremos simplemente $L\int f$ y a la de Riemann $R\int f$, entonces el teorema quedará probado si demostramos que la siguiente propiedad es válida para todo n entero no negativo:

Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada de tipo n, entonces

$$L\int_a^b f(x)dx = R\int_a^b f(x)dx.$$

DEMOSTRACION: la prueba será por inducción sobre el tipo de f.

i).- La propiedad es válida para n=0:

DEMOSTRACION: a).- Si f es continua en [a,b], claramente

$$L\int_a^b f(x)dx = R\int_a^b f(x)dx,$$

puesto que $L\int_a^b f(x)dx$ es el límite de las sumas de Cauchy. □

b).- Si $\mathbb{D}_f$ es finito, vamos a suponer por simplicidad que tiene solo un punto de discontinuidad c, tal que a < c < b, como lo hemos hecho antes, entonces:

$$L\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} R\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} R\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

$$= R\int_a^c f(x)dx + R\int_c^b f(x)dx = R\int_a^b f(x)dx.$$

La primera y segunda igualdad se verifica por la definición de $L\int_a^b f(x)dx$ y el inciso (a), ya que f es continua en los intervalos [a, c−ε], [c+ε, b] y, la tercera y cuarta igualdad por las propiedades de la integral de Riemann, puesto que f es Riemann-integrable en [a,c] ya que solo es discontinua en c y se

~~puede usar el Criterio Dos. Ahora si f es Riemann-integrable~~ en $[a,c]$ entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

La justificación de ello viene de que si $F:[0,\ c-a] \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(\varepsilon) = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \quad \text{entonces} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

evidentemente puesto que

$$\left| F(\varepsilon) - \int_a^c f(x)dx \right| = \left| \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right| = \left| \int_{c-\varepsilon}^c f(x)dx \right| \le$$

$$\int_{c-\varepsilon}^c |f(x)|dx \le M\,\varepsilon \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \text{ y donde } M = \sup_{x\in[a,c]} |f(x)|. \qquad \blacksquare$$

ii).- Supongamos que la propiedad es válida para funciones de tipo $k \le n$. Sea $[a,b]$ un intervalo cualquiera y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función de tipo $n+1$.

Supongamos por simplicidad, que $\mathbb{D}_f^{n+1} = \{c\}$ con $a < c < b$. Entonces por definición

$$L\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Y por hipótesis de inducción

$$L\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = R\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \ , \qquad \text{análogamente}$$

$$L\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx = R\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Por lo tanto, por las propiedades de la integral de Riemann se tiene que:

$$L\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} R\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} R\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

$$= R\int_a^c f(x)dx + R\int_c^b f(x)dx = R\int_a^b f(x)dx. \qquad \square$$

De ambos incisos, 1) y 2), concluimos que, para $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua excepto en un conjunto de primera especie, la definición de Integral 1.16 de Cauchy-Lopschitz, coincide con la definición de Integral dada por Riemann. ■

Observemos finalmente que la familia de funciones Riemann-integrables es, por lo menos, tan amplia como la de las Lipschitz-integrables. En realidad es estrictamente más amplia, es decir, incluye funciones discontinuas en conjuntos que no son de primera especie. Un sencillo ejemplo está dado por la Función Indicadora del conjunto de Cantor:

$$f(x) = I_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

En esta función $K = \mathbb{D}_f$ no es de Primera Especie, más precisamente es un conjunto nunca denso. Que $f(x) = I_k(x)$ es Riemann-integrable se demuestra en el siguiente capítulo (Corolario 2, Teorema 3.2).

§ 4. UN EJEMPLO DE UNA FUNCION DISCONTINUA EN UN CONJUNTO DENSO, LA CUAL ES RIEMANN-INTEGRABLE.

Riemann probó que su clase de funciones integrables incluía a funciones mucho "más discontinuas" que las consideradas por Lipschitz para lo cual presentó un ejemplo de una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrable donde $\mathbb{D}_f$ es un conjunto denso en $[a,b]$. Incidentalmente es en la prueba de la integrabilidad de esta función cuando Riemann desarrolla el Criterio Dos estudiado en este capítulo.

Este ejemplo no es el que dió Riemann pero ilustra los elementos esenciales de aquél.

Sea $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, tal que,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x=0. \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n}, \ (m,n)=1. \end{cases}$$

Demostremos que f es Riemann-integrable usando el criterio dos de integrabilidad de Riemann, es decir, probaremos que:

dados $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $P \in \mathbb{P}[a,b]$ con $\|P\| < \delta$, entonces $S(P,\sigma) < \varepsilon$.

DEMOSTRACION: para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$Q_n = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\} \quad \text{y} \quad P_n = \bigcup_{k=1}^{n} Q_k.$$

Obsérvese que $\#(P_n) \leq 2 + 3 + \ldots + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$.

Sea $L(n)$ el número de elementos de P_n , así $L(n) < \infty$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

Nótese también que si $x \in P_n$, $f(x) \geq 1/n$ y si $x \notin P_n$, $f(x) < 1/n$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \sigma$, elijamos $\delta > 0$ tal que

$\delta < \frac{\varepsilon}{2L(N)-2}$, y sea $P \in \mathbb{P}[0,1]$ con $\|P\| < \delta$.

Sea I un subintervalo de P que no contenga puntos de P_N, entonces $0 \leq f(x) < 1/N$ para todo $x \in I$, así que $\Omega_f(I) \leq 1/N < \sigma$.

De lo anterior podemos afirmar que los únicos subintervalos de P en donde la oscilación puede ser mayor o igual que σ son aquellos que contienen algún punto de $P_N = \{x_1, x_2, \ldots, x_{L(N)}\}$, pero como a lo sumo hay $L(N) = 2L(N)-2$ intervalos de ese tipo, cada uno de los cuales tiene una longitud menor que δ, concluimos que

$$S(P,\sigma) \leq (2L(N)-2)\cdot\delta < 2L(N)-2 \frac{\varepsilon}{2L(N)-2} < \varepsilon.$$

En otras palabras, f cumple con el criterio dos, de donde f es Riemann-integrable. ∎

A pesar de lo anterior, Riemann se da cuenta que una función integrable no puede ser arbitrariamente discontinua. Con los Criterios hasta ahora estudiados se demuestra claramente que la función de Dirichlet:

$$I_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\text{, discontinua en todo } [0,1],$$

no es integrable.

Observando el desarrollo anterior, era natural que se instalara en el horizonte matemático la conjetura de la existencia de un criterio de integrabilidad en función del "tamaño" del conjunto de discontinuidades de la función, $\mathbb{D}_f$, discusión que retomamos en el capítulo siguiente.

CAPITULO III

CRITERIO DE INTEGRABILIDAD EN TERMINOS DE NOCIONES DE MEDIDA.

Como ya comentamos en el capítulo anterior, el trabajo de Riemann deja aun sin respuesta definitiva una importante interrogante:

¿Cuantas discontinuidades puede tener una función integrable?.

En los años subsiguientes al trabajo de Riemann, la investigación de las matemáticas en lo que se refiere a la teoría de integración, se orientaría a buscar una caracterización de las funciones Riemann-integrables en términos del "tamaño" del conjunto de discontinuidad. El resultado concluyente solo sería alcanzado a principios del Siglo XX, por Henri Lebesgue, después de desarrollar su teoría de la medida. Sin embargo en 1887, Hankel logra en esa dirección un resultado muy importante que discutiremos en este capítulo.

Cabe mencionar que, a pesar que el Criterio Dos de Riemann dejaba ver incipientemente que la noción de **"tamaño"** que mencionamos tenía que basarse en el concepto básico de **"longitud"**, todavía durante catorce años después de la publicación del trabajo de Riemann sobre integración, se siguió intentando caracterizar a las funciones Riemann-integrables en términos del **"tamaño topológico"** del conjunto de sus discontinuidades. Este hecho estuvo influenciado por la ya mencionada confusión que había al considerar que los únicos conjuntos densos en ninguna parte eran los de primera especie. Cuando se logró distinguir estas dos clases de conjuntos y se encontró la clase intermedia de los conjuntos de contenido cero se logrará transformar el Criterios Dos de Riemann en una caracterización de la integrabilidad de una función usando una noción de "longitud generalizada" o medida. La conclusión de este período es lo que se presenta en este capítulo.

§ 1. CONTENIDO DE JORDAN DE CONJUNTOS ACOTADOS EN $\mathbb{R}$

DEFINICION 3.1 Sea $S \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$, y P una partición de $[a,b]$. Se define $\overline{J}(P,S)$ como la suma de las longitudes de aquellos subintervalos de la partición P que contienen puntos de S. Entonces, el número

$$\overline{C}(S) = \inf\{ \overline{J}(P,S) : P \in \mathcal{P}[a,b] \}$$

Es llamado, Contenido Exterior de S. Se dice que un conjunto S tiene Contenido Cero y se denota esto por $C(S) = 0$, si $\overline{C}(S) = 0$.

Es fácil ver que un conjunto S posee Contenido Cero si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de S por medio de intervalos abiertos, tales que la suma de sus longitudes sea menor que ε.

El siguiente teorema apunta ya hacia una caracterización de las funciones Riemann-integrables en términos de la "longitud" del conjunto de las discontinuidades de la función usando el concepto de Contenido Cero. Más adelante discutiremos el Teorema de Hankel el cual se considera un resultado más completo.

TEOREMA. 3.2. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, acotada y continua excepto en un conjunto de contenido cero, entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$.

DEMOSTRACION: Sea f bajo las condiciones que indica el teorema y $\mathbb{D}_f = \{ x \in [a,b] : f \text{ es discontinua en } x \}$ el conjunto de contenido cero.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe una colección finita de intervalos abiertos

$$\{I_j\}_{j=1}^{n}, \quad \text{tales que} \quad \mathbb{D}_f \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} l(I_j) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

donde

$$M = \sup_{t\in[a,b]} | f(t) |.$$

Sea $J_k = I_k \cap [a,b]$, $k = 1, \ldots, n$.

Sabemos que en $[a,b] - \bigcup_{k=1}^{n} J_k = S$, solo hay puntos de continuidad de f y siendo S compacto y f continua en S, entonces f es uniformemente continua en S, luego existe

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que si, $x,y \in S$ con $|x-y| < \delta$ entonces

$|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Sea $P_\varepsilon \in \mathbb{P}[a,b]$, formada por a, b, todos los extremos de $J_1, \ldots, J_n$, más todos los puntos necesarios de tal manera que $\|P_\varepsilon\| < \delta$.

Si $P \supset P_\varepsilon$, entonces

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{j\in A} (M_j - m_j)\Delta x_j + \sum_{j\in B} (M_j - m_j)\Delta x_j$$

donde A indexa a todos aquellos subintervalos de P que están totalmente contenidos en algún J_k y B indexa a los subintervalos restantes de P.

Así, $\displaystyle\sum_{j\in A} (M_j - m_j)\Delta x_j \leq 2M \sum_{j\in A} \Delta x_j \leq 2M \sum_{j=1}^{n} l(J_j) \leq 2M \sum_{j=1}^{n} l(I_j) \leq$

$$2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Además, como $\|P\| \leq \|P_\varepsilon\| < \delta$,

$$\sum_{j\in B} (M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j\in B} \Delta x_j \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, si $P \supset P_\varepsilon$ entonces, $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$.

Así, por el teorema 2.10, f es Riemann-integrable en $[a,b]$. ■

El teorema anterior tiene como Corolario un resultado que había sido probado (el Teorema 2.17) usando otros métodos:

COROLARIO 1. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, es una función continua excepto en un conjunto de primera especie, entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Demostración: La demostración es inmediata pues, como se demuestra en el apéndice, todo conjunto acotado de primera especie es de contenido cero. ■

Por otra parte, el teorema 3.2 también permite mostrar que la clase de funciones Riemann-integrables es más amplia que la clase de funciones que son discontinuas en conjuntos de Primera Especie.

COROLARIO 2. La función indicadora del conjunto de cantor K es Riemann-integrable.

Demostración. La demostración es inmediata, pues si $f = I_k$, con $D_f = K$ entonces f es Riemann-integrable, ya que, como se demuestra en el apéndice, aun cuando el conjunto de cantor es "más grande" desde el punto de vista topológico que los conjuntos de Primera Especie, ambos tienen Contenido Cero. ■

§ 2. OSCILACION DE UNA FUNCION EN UN PUNTO Y EN UN INTERVALO.

Con este subtítulo discutimos dos conceptos: el de oscilación en un intervalo debido a Riemann y Dirichlet, y oscilación puntual de Hankel.

DEFINICION 3.3. Sea f una función definida y acotada en un intervalo $S = [a,b]$. Si $T \subset S$, el número

$$\Omega_f(T) = \operatorname{Sup}\{f(x)-f(y) : x,y \in T\},$$

se llama la oscilación de f en T.

Y el número

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0^+} \Omega_f(B(x;h) \cap S)$$

se llama la oscilación puntual de f en x.

OBSERVACIONES:

a). Para cualquier $T \subseteq [a,b]$

$$\Omega_f(T) = \operatorname{Sup}\{\ |f(u)-f(t)|\ u,t \in T\ \}$$

y por lo tanto

$$\Omega_f(T) \geq 0.$$

b). De la observación anterior:

$$\omega_f(x) \geq 0.$$

c). $T \subset T' \Rightarrow \Omega_f(T) \leq \Omega_f(T')$.

d). $\Omega_f(T) = \sup_{x\in T} f(x) - \inf_{x\in T} f(x)$.

e). Puesto que la función de h $\varphi(h) = \Omega_f(\ B(x;h)\cap[a,b]\ )$ es una función creciente y acotada en $(0,\infty)$, entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \varphi(h) = \varphi(0^+) = \inf_{h>0} \varphi(h).$$

φ es creciente, puesto que si $0<h_1<h_2$, entonces

$$B(x;h_1)\cap[a,b] \subset B(x;h_2)\cap[a,b]$$

de donde $\sup\ \{f(u) - f(v) : u,v \in B(x;h_1)\cap[a,b]\}$

$$\leq \sup\ \{f(u) - f(v) : u,v \in B(x;h_2)\cap[a,b]\}$$

es decir

$$\varphi(h_1) = \Omega_f(\ B(x;h_1)\cap[a,b]\ ) \leq \Omega_f(\ B(x;h_2)\cap[a,b]\ ) = \varphi(h_2).$$

Y φ es acotada en $(0,\infty)$, pues :

$\forall\ x\in[a,b]$ y $\forall\ h\in(0,\infty)$, $B(x;h)\cap[a,b] \subset [a,b]$

de donde

$\sup\ \{f(u)-f(v):u,v \in B(x;h)\cap[a,b]\} \leq \sup\ \{|f(u)-f(v)|:u,v \in[a,b]\}$

por lo que

$$\Omega_f(\ B(x;h)\cap[a,b]\ ) \leq \sup_{u\in[a,b]} |f(u)| + \sup_{v\in[a,b]} |f(v)| \leq 2M,$$

$$\text{con}\quad M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Por lo tanto $0 \leq \varphi(h) \leq 2M$, para todo $h \in (0,\infty)$. ■

TEOREMA 3.4. Sea f una función definida y acotada en un intervalo $S = [a,b]$. Entonces f es continua en un punto x de S si, y solo si, $\omega_f(x) = 0$.

DEMOSTRACION: ($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en x. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $t \in [a,b]$

$$|t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Sean $u,t \in B(x;\delta) \cap [a,b]$, entonces, como

$|f(u) - f(t)| \leq |f(u) - f(x)| + |f(x) - f(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$,

se tiene que

$\Omega_f(B(x;\delta) \cap [a,b]) = \sup \{ |f(u) - f(t)| : u,t \in B(x;\delta) \cap [a,b] \} \leq \varepsilon$

Por lo tanto si $0 < h < \delta$,

$$0 \leq \Omega_f(B(x;h) \cap [a,b] \leq \Omega_f(B(x;\delta) \cap [a,b] \leq \varepsilon$$

Y entonces

$$\omega_f(x) = \inf_{h>0} \Omega_f(B(x;h) \cap [a,b] \leq \varepsilon$$

Por lo tanto como

$$0 \leq \omega_f(x) \leq \varepsilon \quad \forall \quad \varepsilon > 0, \qquad \omega_f(x) = 0$$ □

($\Leftarrow$). Supongamos ahora que $\omega_f(x) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\omega_f(x)$ existe $h > 0$ tal que

$$0 \leq \Omega_f(B(x;h) \cap [a,b] < \varepsilon$$

es decir,

$$\sup \{ |f(u) - f(t)| : u,t \in B(x;h) \cap [a,b] \} < \varepsilon$$

en particular $|f(u) - f(t)| < \varepsilon$ para todo $u,t \in B(x;h) \cap [a,b]$ }

tomemos $\delta = h > 0$ y $t=x$ entonces

$$|f(u) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall \quad u \in B(x;\delta)\cap[a,b] \}$$

es decir, si $u\in[a,b]$ y $|u-x|<\delta$ entonce $|f(u) - f(x)| < \varepsilon$, por lo tanto f es continua en x. ■

OBSERVACION. Se sigue del teorema anterior que si

$\mathbb{D}_f = \{ x\in[a,b] : f$ es discontinua en $x \}$

entonces $\mathbb{D}_f = \{ x\in[a,b] : \omega_f(x) > 0. \}$.

LEMA 3.5. Sea f definida y acotada en $[a,b]$, y sea ε un número positivo tal que $\omega_f(x) < \varepsilon$ para todo $x\in[a,b]$. Entonces existe un $\delta>0$, (que solo depende de ε) tal que para todo subintervalo cerrado $T\subset[a,b]$, de longitud menor que δ se tiene que $\Omega_f(T) < \varepsilon$.

DEMOSTRACION: De la hipótesis del lema, $\omega_f(x) < \varepsilon$, para todo $x\in[a,b]$ asi por definición de $\omega_f(x)$, $\forall$ $x\in[a,b]$ existe $\delta \equiv \delta x > 0$ tal que

$$\Omega_f(B(x;\ \delta x)\cap[a,b]) < \varepsilon.$$

La familia de bolas abiertas $\{ B(x;\delta x/2) ;\ x\in[a,b] \}$ constituye una cubierta por abiertos del intervalo compacto $[a,b]$.

Por el teorema de Heine-Borel, existe una subcolección finita de bolas $\{ B(x_i; \delta x_i/2): i= 1,...,K \}$ tal que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i;\delta x_i/2)$$

Sea $\delta = \min \{ \delta x_i/2 : i = 1,...,k\}$, y

T un subintervalo de $[a,b]$, tal que $l(T) < \delta$;

entonces necesariamente existe algún $p \in \{i=1,...,k\}$ tal que $T \cap B(x_p;\delta_p/2) \neq \emptyset$.

Sea $\xi \in T \cap B(x_p;\delta_p/2)$ y $y \in T$ entonces

$$|y-x_p| \leq |y-\xi|+|\xi-x_p| < \delta+\delta_p/2 \leq \delta_p/2+\delta_p/2 = \delta_p$$

así que $T \subset B(x_p;\delta_p)$.

Por lo tanto $\Omega_f(T) \leq \Omega_f(B(x_p;\delta_p)\cap[a,b]) < \varepsilon$ ■

Teorema 3.6 Sea f definida y acotada en $[a,b]$. Si para cada $\varepsilon>0$ definimos el conjunto

$$J_\varepsilon = \{x\in[a,b] : \omega_f(x)\geq\varepsilon\},$$

entonces J_ε es un conjunto compacto.

DEMOSTRACION: Si $x \in [a,b]-J_\varepsilon$, entonces $\omega_f(x) < \varepsilon$.

Por definición de $\omega_f(x)$, existe una bola de centro en x

tal que, $\Omega_f(B(x)\cap[a,b]) < \varepsilon$

esto implica que $B(x)\cap J_\varepsilon = \emptyset$

En efecto, si existiera $p \in B(x) \cap J_\varepsilon$, entonces $\omega_f(p) \geq \varepsilon$. Como $p \in B(x)$ existe una bola de centro en p, tal que

$$B(p) \subset B(x).$$

Así, $\omega_f(p) \leq \Omega_f(B(p) \cap [a,b]) \leq \Omega_f(B(x) \cap [a,b]) < \varepsilon$,

lo cual es una contradicción. Así $[a,b]) \cap B(x) \subset [a,b]-J_\varepsilon$. Por lo tanto, $J_\varepsilon^c = [a,b]-J_\varepsilon$ es abierto. De donde, J_ε es cerrado en [a,b] y por tanto en la recta. Como por hipótesis f es acotada, J_ε es acotado.

Que J_ε es compacto, se sigue del hecho de que es cerrado y acotado. ■

§ 3. CARACTERIZACION (SEGUN HANKELDEL) DE LAS FUNCIONES RIEMANN-INTEGRABLES UTILIZANDO EL CONCEPTO DE CONTENIDO CERO.

TEOREMA 4.7. (HANKEL) Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y defínase para cada $\varepsilon>0$ el conjunto

$$J_\varepsilon = \{x\in[a,b] : \omega_f(x)\geq\varepsilon\},$$

entonces f es Riemann-integrable en [a,b] si, y solo si, J_ε tiene contenido cero para todo $\varepsilon>0$.

DEMOSTRACION. Supongamos que f es Riemann-integrable en [a,b]. Dado $\sigma>0$, sea $H_\sigma = \{ x \in [a,b]: \omega_f(x) > \sigma \}$.

Por el criterio Dos de Riemann, para cada $\varepsilon>0$ existe $d>0$ tal que, si P es cualquier partición tal que $\|P\| < d$, entonces $S(P,\sigma) < \varepsilon/2$.
Sea $P=\{ x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ cualquier partición de [a,b] tal que $\|P\| < d$.
Si x es un punto interior de algún subintervalo de P en donde la oscilación de f es menor o igual a σ, entonces $\omega_f(x) \leq \sigma$, es decir $x \notin H_\sigma$. Por lo tanto, si $x \in H_\sigma$, entonces o bien x es un punto interior de algún intervalo de P en donde la oscilación de f es mayor que σ, o bien x es un elemento de la partición P.
Definamos $J_i = (x_{i-1}, x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, al i-ésimo

intervalo de P tal que $\Omega_f(J_i) > \sigma$, y sean

$I_o, I_1, \ldots, I_n$ intervalos abiertos tales que $x_i \in I_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $\sum_{i=o}^{n} l(I_i) < \varepsilon/2$.

Entonces, los intervalos $I_o, I_1, \ldots, I_n$, junto con los intervalos J_i para los cuales $D_i > \sigma$, constituyen una cubierta abierta de H_σ y, además:

$$\sum_{D_i>\sigma} l(J_i) + \sum_{i=o}^{n} l(I_i) = S(P,\sigma) + \sum_{i=o}^{n} l(I_i) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Lo cual demuestra que, para cualquier $\sigma>0$, H_σ tiene contenido cero; lo cual a su vez implica inmediatamente que, para cualquier $\sigma>0$, J_σ tiene contenido cero. □

Inversamente. Supongamos ahora que J_σ tiene contenido cero $\forall\ \sigma>0$.

Dados $\varepsilon>0$ y $\sigma>0$, existen entonces intervalos abiertos $J_o, J_1, \ldots, J_m$ tales que $J_{\sigma/2} \subset \bigcup_{k=o}^{m} J_k$ y $\sum_{k=o}^{m} l(J_k) < \varepsilon/3$.

Los intervalos $J_o, J_1, \ldots, J_m$ inducen una partición P_o del intervalo [a,b] de tal manera que en cada uno de los subintervalos I de P_o que no contienen puntos de $J_{\sigma/2}$ debe tenerse $\omega_f(x) < \sigma/2\ \ \forall\ x \in I$.

Aplicando el lema 3.5 a cada uno de estos intervalos I de P_o, podemos encontrar $\delta>0$ tal que cada uno de esos intervalos I, puede a su vez ser subdividido en intervalos T, de longitud menor que δ y en los cuales se tenga $\Omega_f(T) < \sigma/2$.

Sea P_1 la nueva partición de $[a,b]$ que se genera mediante el procedimiento anterior y sea d la más pequeña de las longitudes de los subintervalos de P_1.

Si P es cualquier partición tal que $\|P\|<d$, entonces se puede ver que los únicos subintervalos de P en los cuales la oscilación de f puede ser mayor que σ son aquellos que intersectan algún intervalo

$J_o, J_1, \ldots, J_m$. Si llamamos S_k a la suma de las longitudes de los subintervalos de P que intersectan a J_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, se tiene:

$$S(P,\sigma) \leq \sum_{k=o}^{m} S_k$$

Pero $S_k < l(J_k) + 2d \leq l(J_k) + 2l(J_k) = 3l(J_k)$ para $k=1,2,\ldots,m$.

Por lo tanto, se obtiene:

$$S(P,\sigma) \leq \sum_{k=1}^{m} 3l(J_k) < 3(\varepsilon/3) = \varepsilon.$$

Así que se satisface el criterio Dos de Riemann y entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$. ∎

La demostración del teorema anterior muestra la estrecha relación que existe entre el criterio Dos de Riemann y la caracterización de la Riemann-integrabilidad en términos del tamaño del conjunto de discontinuidades de la función a integrar. Cabe mencionar, como lo señalamos en la presentación del capítulo, sin embargo, que pasaron alrededor de 14 años desde la publicación del trabajo de Riemann hasta que Hankel demostró el teorema 4.7. De cualquier manera, fué el criterio Dos de Riemann el hilo conductor que llevó a este tipo de resultados.

Por otra parte, si bien el criterio Dos de Riemann está más vinculado que el criterio Uno con el resultado del último teorema, se puede dar una demostración basada en el criterio Uno como se muestra acontinuación:

Demostración del Teorema 4.7 basada en el criterio Uno de Riemann:

DEMOSTRACION: ($\Rightarrow$) Supongamos que existe algun $\varepsilon>0$ tal que $\bar{C}(J_\varepsilon)\neq 0$, mostremos que en este caso no puede cumplirse la condición de Riemann-integrabilidad de f en [a,b].

Para cualquier partición $P = \{a=x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo [a,b] se tiene

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \left[M_k - m_k \right] \Delta x_k = S_1 + S_2$$

donde S_1 está formado por aquellos términos en la sumatoria que provienen de subintervalos de la partición que contienen puntos de J_ε y S_2 está formado por los términos restantes en la sumatoria. Los intervalos asociados a S_1 tienen una longitud total

$$\overline{J}(P,J_\varepsilon) \geq \overline{C}(J_\varepsilon)$$

puesto que $\overline{C}(J_\varepsilon)$ es el ínfimo de las sumas de los intervalos que contienen puntos de J_ε.

Además, en estos intervalos se verifica que

$$M_k - m_k \geq \Omega_f(\xi_k) \geq \varepsilon$$

donde $\xi_k \in [x_{k-1},x_k] \cap J_\varepsilon$.

Supongamos que I es un subconjunto que indexa a los intervalos $[x_{k-1},x_k]$ asociados a S_1, entonces

$$S_1 = \sum_{k\in I} \left[M_k - m_k \right] \Delta x_k \geq \varepsilon \sum_{k\in I} \Delta x_k = \varepsilon\, \overline{J}(P,J_\varepsilon) \geq \varepsilon\, \overline{C}(J_\varepsilon),$$

por lo tanto

$$U(P;f) - L(P,f) = S_1 + S_2 \geq S_1 \geq \varepsilon\, \overline{C}(J_\varepsilon).$$

por lo tanto $U(P,f) - L(P,f)$ no puede hacerse tan pequeño como queramos, es decir, no se cumple la condición de Riemann-integrabilidad para f (teorema 2.10). □

($\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{C}(J_\varepsilon)=0$ para todo $\varepsilon>0$. Entonces dado $\varepsilon>0$, por definición de $\overline{C}(J_\varepsilon)$, existe una partición P_0 de $[a,b]$, tal que $\overline{J}(P_0, J_\varepsilon) < \varepsilon$.

En cada uno de los subintervalos I de P_0 que no contienen puntos de J_ε debe tenerse que $\omega_f(x) < \varepsilon$ para todo $x \in I$.

Aplicando el lema 3.5 a cada uno de estos intervalos I de P_0, podemos encontrar $\delta>0$ tal que, cada uno de estos intervalos I, puede a su vez ser subdividido en intervalos T, de longitud menor que δ, en los cuales $\Omega_f(T) < \varepsilon$.

Sea P_ε la nueva partición de [a,b] que hemos inducido mediante el procedimiento anterior. Si P es un refinamiento de P_ε entonces podemos escribir

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \left[M_k - m_k \right] \Delta x_k = A_1 + A_2$$

donde A_1 está formado por aquellos términos en la sumatoria que provienen de subintervalos de la partición que contienen puntos de J_ε, y A_2 está formado por los términos restantes en la sumatoria.

En el k-esimo término de A_2 se tiene que

$$\Omega_f([x_{k-1}, x_k]) = M_k - m_k < \varepsilon$$

Y por lo tanto

$$A_2 = \sum_{k\in L} \left[M_k - m_k \right] \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k\in L} \Delta x_k \leq \varepsilon\,(b-a)$$

donde L indexa los sumandos de A_2.

Por otra parte

$$A_1 = \sum_{k\in L'} \left[M_k - m_k \right] \Delta x_k \leq (M-m) \sum_{k\in L'} \Delta x_k =$$

$$(M-m)\bar{J}(P_0, J_\varepsilon) < (M-m)\varepsilon.$$

donde $L' = \{1, \ldots, n\} - L$,

$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ y $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$

Por lo tanto

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon(M-m+b-a)$$

asi, del teorema 2.10, f es Riemann-integrable en [a,b]. ■

§.4. CARACTERIZACION (SEGUN LEBESGUE) DE LAS FUNCIONES RIEMANN-INTEGRABLES UTILIZANDO EL CONCEPTO DE MEDIDA CERO.

Aunque el teorema 3.7, nos da una condición necesaria y suficiente para determinar si una función acotada es o no Riemann-integrable, la condición no es muy útil en la práctica. Su principal desventaja es que uno debe calcular $C(J_\varepsilon)$ para una infinidad de conjuntos J_ε cuya estructura puede ser difícil de determinar a partir de la definición de la función.

Además, el teorema 3.7, al considerar el conjunto de discontinuidades de la función, aún no da una caracterización de la integrabilidad en términos del tamaño de estas discontinuidades desde el punto de vista de la medida

Así, una condición necesaria y suficiente mucho más útil fue descubierta por Lebesgue, la cual expresamos en un teorema cuyo enunciado y demostración, es la preocupación principal en esta sección.

Para formular el teorema de Lebesgue veamos las siguientes definiciones y resultados.

§.4. CARACTERIZACION (SEGUN LEBESGUE) DE LAS FUNCIONES RIEMANN-INTEGRABLES UTILIZANDO EL CONCEPTO DE MEDIDA CERO.

Aunque el teorema 3.7, nos da una condición necesaria y suficiente para determinar si una función acotada es o no Riemann-integrable, la condición no es muy útil en la práctica. Su principal desventaja es que uno debe calcular $C(J_\varepsilon)$ para una infinidad de conjuntos J_ε cuya estructura puede ser difícil de determinar a partir de la definición de la función.

Además, el teorema 3.7, al considerar el conjunto de discontinuidades de la función, aún no da una caracterización de la integrabilidad en términos del tamaño de estas discontinuidades desde el punto de vista de la medida

Así, una condición necesaria y suficiente mucho más útil fue descubierta por Lebesgue, la cual expresamos en un teorema cuyo enunciado y demostración, es la preocupación principal en esta sección.

Para formular el teorema de Lebesgue veamos las siguientes definiciones y resultados.

DEFINICION 3.8 Sea $S \subset \mathbb{R}$. Por una cubierta de Lebesgue de S entenderemos una colección a lo más numerable

$$T = \{T_1, T_2, \dots \}$$

de intervalos abiertos los cuales cubren a S.
Si $l(T_k)$ es la longitud del intervalo T_k, la longitud total de la cubierta, $l(T)$, está definida por el número

$$l(T) = \sum_k l(T_k) \qquad \text{si la serie converge.}$$

Y definimos $\quad l(T) = +\infty \qquad$ si la serie diverge.

El número

$$\overline{m}(S) = \inf\{ \; l(T) : T \text{ es una cubierta de Lebesgue de } S \}$$

es llamado " medida exterior de Lebesgue de S ".

Se dice que un conjunto S tiene medida cero y se denota por $m(S) = 0$, si $\overline{m}(S) = 0$.

En otras palabras, un conjunto S posee **medida cero** si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento a lo más numerable de S por medio de intervalos abiertos, tales que la suma de sus longitudes es menor que ε.

- Algunas propiedades de medida exterior:

a). Cuando S es acotado, y $S \subset [a,b]$ para algún $[a,b] \subset \mathbb{R}$

entonces $0 \leq \overline{m}(S) \leq b-a$

b), Si $A,B \subset [a,b]$ y $A \subset B$, entonces $\overline{m}(A) \leq \overline{m}(B)$.

Ademas, podemos enunciar el siguiente

LEMA 3.9. Si $\{A_n\}$ es una colección a lo más numerable de conjuntos de medida cero, entonces $A = \bigcup_n A_n$ tiene medida cero.

DEMOSTRACION: Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon_n = \varepsilon/2^{n+1}$.

y sean $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_j}, \ldots$ intervalos abiertos tales que para cada n, tengo una cubierta de intervalos abiertos

$$A_n \subset \bigcup_j I_{n_j} \quad y \quad \sum_j l(I_{n_j}) < \varepsilon_n$$

entonces

$A \subset \bigcup_{n,j} I_{n_j}$ y como la longitud total de la cubierta es

$$\sum_{n,j} l(I_{n_j}) < \sum_n \varepsilon_n = \sum_n \varepsilon/2^{n+1} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

concluimos que $A = \bigcup_n A_n$ tiene medida cero ■

TEOREMA 3.10. Para todo conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}$, tenemos

$$\overline{m}(S) \leq \overline{C}(S).$$

DEMOSTRACION. Sean $S \subset [a,b]$, P una partición de $[a,b]$. Y sean $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ... , $[a_m, b_m]$ los subintervalos de P los cuales contienen puntos de S

y $C_k = (a_k , b_k)$,

el k-ésimo de tales intervalos, entonces, de la definición 3.1

$$\overline{J}(P, S) = \sum_{k=1}^{m} l(C_k).$$

Dada $\varepsilon > 0$, definamos para $k = 1,2,...m$

$A_k = (a_k - \varepsilon/2m \; , \; a_k + \varepsilon/2m)$ y $B_k = (b_k - \varepsilon/2m \; , \; b_k + \varepsilon/2m)$.

La famila de intervalos constituida por $\{ A_k \}_{k=1}^{n}$, $\{ B_k \}_{k=1}^{n}$ y $\{ C_k \}_{k=1}^{n}$, forman una cubierta de Lebesgue de S, de aqui y de la definición 3.8, tenemos que

$$\overline{m}(S) \leq \sum_{k=1}^{m} l(A_k) + \sum_{k=1}^{m} l(B_k) + \sum_{k=1}^{m} l(C_k) = \overline{J}(P, S) + 2\varepsilon$$

de donde $\overline{m}(S) - 2\varepsilon \leq \overline{J}(P, S)$ para toda partición P.

Por lo tanto $\overline{m}(S) -2\varepsilon \leq \overline{C}(S)$.

y como ε es arbitrario $\overline{m}(S) \leq \overline{C}(S)$. ■

LEMA 3.11. Sea S un conjunto compacto de medida cero, entonces S tiene contenido cero.

DEMOSTRACION. Como $m(S) = 0$, dado $\delta>0$ existen intervalos abiertos I_1, I_2, ... tales que

$$S \subset \bigcup_k I_k \quad y \quad \sum_k l(I_k) < \delta.$$

pero como S es compacto, por el teorema de Heine-Borel existe un número finito de intervalos abiertos I_k, digamos

I_{k_1}, I_{k_2}, ..., I_{k_m} tales que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{m} I_{k_j}$$

Evidentemente se tiene que

$$\sum_{j=1}^{m} l(I_{k_j}) < \sum_k l(I_k) < \delta.$$

Por lo tanto hemos demostrado que, dado cualquier número $\delta>0$, existe un número finito de intervalos abiertos que cubren S y tales que la suma de sus longitudes es menor que δ, es decir, S tiene contenido cero. ■

CRITERIO DE LEBESGUE PARA RIEMANN-INTERGRABILIDAD

TEOREMA 3.12. Sea f definida y acotada en $[a,b]$ y $\mathbb{D}_f$ el conjunto de discontinuidades de f en $[a,b]$. Entonces, f es Riemann-integrable en $[a,b]$ si, y solo si, $\mathbb{D}_f$ tiene medida cero.

DEMOSTRACION: ($\Rightarrow$). Supongamos que f es Riemann-imtegrable en $[a,b]$ y sea

$$J_\varepsilon = \{ x \in [a,b] : \omega_f(x) \geq \varepsilon \}$$

Del teorema 3.7, $C(J_\varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon>0$. En particular esto se cumple para $\varepsilon = 1/n$, n=1,2,.... Por el teorema 3 . 10 se tiene entonces $m(J_{1/n}) = 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

Ahora, $x\in\mathbb{D}_f$, si y solo si $\omega_f(x) > 0$, si y solo si $\omega_f(x) \geq 1/n$ para algún $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\mathbb{D}_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{1/n}$$

Y por el lema 3.9 $m(\mathbb{D}_f) = 0$. □

($\Leftarrow$) Si $\mathbb{D}_f$ tiene medida cero, entonces, es suficiente demostrar que para todo $\varepsilon>0$, J_ε tiene contenido cero.

Supongamos que $m(\mathbb{D}_f)=0$, escojamos un $\varepsilon>0$ y formemos el conjunto J_ε.

Como $J_{\varepsilon} \subset \mathbb{D}_f$, entonces

$$\overline{m}(J_{\varepsilon}) \leq \overline{m}(\mathbb{D}_f) = 0$$

Por lo tanto J_{ε} tiene medida cero. Del teorema 3.6 J_{ε} es un conjunto compacto, y del lema 3.11, J_{ε} es de contenido cero. Así, del Teorema 3.7 de Hnkel, f es Riemann-integrable en [a,b] ■.

A P E N D I C E

NOCIONES DE NULIDAD : PRIMERA ESPECIE, CONTENIDO CERO Y NUNCA DENSO.

Debido al papel central que jugaron en el desarrollo histórico de la teoría de integración, dedicaremos este apartado al estudio de la relación existente entre conjuntos de Primera Especie, de Contenido Cero y Nunca Denso.

Demos primero las definiciones de estos tres tipos de conjuntos.

DEFINICION A.1. Decimos que K es Nunca Denso si el interior de su cerradura es vacío

$$\overset{\circ}{\overline{K}} = \overset{\circ}{K} = \phi$$

Es decir, $\overline{K}$ no contiene ningún intervalo abierto.

DEFINICION A.2. Se dice que el conjunto K es de Contenido Cero si dado $\varepsilon > 0$, existe una cubierta finita de K formada por intervalos abiertos $\{ H_i \}_{i=0}^{n}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} l (H_i) < \varepsilon$.

Recordemos ahora las siguientes definiciones:

DEFINICION A.3. El Conjunto Derivado de A, es el conjunto de los puntos de acumulación de A y lo denotamos por A'. El Segundo Derivado de A, es el conjunto de los puntos de acumulación de A' y lo denotamos por A^2. Sucesivamente, el n-ésimo derivado del conjunto A, que denotamos como A^n, es el conjunto de los puntos de acumulación del n-1-ésimo derivado de A. De esta manera tenemos inductivamente definido A^n $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

DEFINICION A.4. Un conjunto A es de Primera Especie, si existe un entero no negativo n, tal que $A^{n+1} = \phi$. Es decir si existe n tal que, el n-esimo derivado de A es un conjunto sin puntos de acumulación. En este caso, si n es el menor entero no negativo tal que $A^{n+1} = \phi$, se dice que A es de tipo n.

Veremos ahora que la relación mencionada, si nos restringimos a conjuntos acotados, está dada por el siguiente esquema:

$$\left\{ 1^{era}\text{esp} \right\} \subsetneq \left\{ \text{C.C.} \right\} \subsetneq \left\{ \text{Nunca D.} \right\}.$$

lo que desglosaremos mediante las siguientes proposiciones:

A.5. Todo conjunto acotado de primera especie es de contenido cero.

A.6. Todo conjunto de contenido cero es nunca denso.

A.7. No todo conjunto acotado nunca denso es de contenido cero.

A.8. No todo conjunto acotado de contenido cero es de primera especie.

Seguidamente se justifica cada una de estas afirmaciones:

A.5.TODO CONJUNTO ACOTADO DE PRIMERA ESPECIE ES DE CONTENIDO CERO.

DEMOSTRACION. Por la definición A.4 y el principio de inducción matemática el resultado quedará probado al demostrar que:

i. Todo conjunto de tipo 0 es de contenido cero.

ii. Si todo conjunto de tipo n, es de contenido cero, entonces, todo conjunto de tipo n+1 también lo es.

Veamos:

i. Todo conjunto acotado de Primera Especie de tipo 0 es de Contenido Cero.

DEMOSTRACION. Si $E \subset \mathbb{R}$ es acotado de tipo 0 entonces E es finito, lo cual implica obviamente que tiene contenido cero. □

ii. Supongamos ahora que todo conjunto acotado de tipo n, es de contenido cero y sea E un conjunto acotado de tipo n+1. Entonces E^1 es acotado de tipo n, de donde E^1 es de contenido cero. Por lo tanto, dada $\varepsilon>0$ existe una cubierta finita de intervalos abiertos $I_1, I_2, \ldots, I_r$, cuya suma de longitudes

$$\sum_{i=1}^{r} l(I_i) < \varepsilon/2 \qquad \text{tal que} \qquad \bigcup_{i=1}^{r} I_i \supset E^1$$

observando que resta por cubrir un conjunto finito de puntos de E

$$\{x_1,\dots,x_k\}$$

lo cual hacemos con una cubierta finita de intervalos abiertos

$$H_1,\ H_2,\ \dots\ ,\ H_k, \qquad \text{tal que} \qquad \sum_{i=1}^{k} l\,(\,H_i\,) < \varepsilon/2$$

Así, la cubierta total buscada para E

$$\{I_1,\ \dots\ ,\ I_r,\ H_1,\ \dots\ ,\ H_k\}$$

tiene una longitud $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} l\,(\,I_i\,) + \sum_{i=1}^{k} l(H_i) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$

Por lo tanto, hemos demostrado que si todo conjunto de tipo n, es de contenido cero, entonces todo conjunto de tipo n+1 también lo es. □

De i) y ii) concluimos A.5. ■

A.6. TODO CONJUNTO DE CONTENIDO CERO ES NUNCA DENSO.

Equivalentemente:

Si E no es nunca denso, entonces E no es de contenido cero.

Demostremos esta proposición equivalente:

Sea I intervalo abierto, tal que E es denso en I, es decir tal que $I \subset \overline{E}$ y sea $\{J_k\}_{k=1}^{n}$ una cubierta arbitraria finita, para E, de intervalos abiertos, digamos

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_k$$

Así $\qquad \overline{E} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{J}_k$, y como

$I \subset \overline{E}$, entonces podemos afirmar que $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{J}_k$,

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} l(J_k) \geq l(I) > 0$$

Por lo tanto si E no es nunca denso, existe un $\alpha > 0$, tal que

$$\sum_{k=1}^{n} l(J_k) \geq \alpha$$

para toda cubierta $\{J_k\}_{k=1}^{n}$ de E .

Por lo tanto, A.6 queda demostrada ■

De las dos demostraciones anteriores formulamos el siguiente

COROLARIO.A.9. Todo conjunto acotado de Primera Especie es Nunca Denso.

A.7. NO TODO CONJUNTO ACOTADO NUNCA DENSO ES DE CONTENIDO CERO.

Para esta demostración, construyamos un conjunto Nunca Denso cuyo contenido no sea cero: el denominado conjunto de Cantor generalizado.

Paso uno: Sea $0<\lambda<1$, tomemos el intervalo cerrado $[0,1]$ y definamos $x_{11} = 1/2$, y extraemos un subintervalo abierto de longitud $\lambda/3$ con centro en x_{11}, y con extremos $x_{11} - \lambda/2\cdot 3$ y $x_{11}+\lambda/2\cdot 3$.

Definamos $K_1 = I_{11} \cup I_{12}$, donde

$$I_{11} = [0,\ x_{11}-\lambda/2\cdot 3] \quad , \quad I_{12} = [x_{11}+ \lambda/2\cdot 3,\ 1].$$

K_1 consta de 2^1 intervalos cerrados de longitud $l_1 = \lambda/3$, tal que

$$I_{11} \cap I_{12} = \phi, \quad y \quad l(I_{11}) = l(I_{12})$$

Paso dos: Extraemos de cada subintervalo I_{1j}, $(j=1,2)$ de K_1 un intervalo abierto de longitud $\lambda/3^2$ con centro el punto medio de cada I_{1j}. es decir, extraemos los intervalos abiertos

$$(x_{21}-\lambda/2\cdot 3^2,\ x_{21}+\lambda/2\cdot 3^2) \quad y \quad (x_{22}-\lambda/2\cdot 3^2,\ x_{22}+\lambda/2\cdot 3^2)$$

donde $\quad x_{21} = \frac{1}{2}(x_{11}-\lambda/2\cdot 3) \quad y \quad x_{22} = \frac{1}{2}(x_{11}+ \lambda/2\cdot 3 + 1)$

Definamos $\quad K_2 = I_{21} \cup I_{22} \cup I_{23} \cup I_{24}$, con

$$I_{21} = [0,\ x_{21}-\lambda/2\cdot 3^2] \quad , \quad I_{22} = [x_{21}+ \lambda/2\cdot 3^2,\ x_{11}-\lambda/2\cdot 3] \quad ,$$

$$I_{23} = [x_{11} + \lambda/2\cdot 3,\ X_{22} - \lambda/2\cdot 3^2]\ ,\quad I_{24} = [x_{22} + \lambda/2\cdot 3^2,\ 1].$$

K_2 consta de 2^2 intervalos cerrados de longitud $l_2 < l_1/2$, tal que

$$I_{2j} \cap I_{2i} = \phi,\ \text{si } j \neq i \text{ con } j,i \in \{1, \ldots ,4\} \text{ y } l(I_{21}) = \ldots = l(I_{24})$$

Paso tres: Extraemos de cada subintervalo I_{2j}, ($j=1, \ldots, 2^2$) de K_2, un intervalo abierto de longitud $\lambda/3^3$ con centro el punto medio de cada I_{2j}. es decir, extraemos los intervalos abiertos

$$(x_{31} - \lambda/2\cdot 3^3,\ x_{31} + \lambda/2\cdot 3^3)\quad ,\quad (x_{32} - \lambda/2\cdot 3^2,\ x_{32} + \lambda/2\cdot 3^2)$$

$$(x_{33} - \lambda/2\cdot 3^3,\ x_{33} + \lambda/2\cdot 3^3)\quad \text{y}\quad (x_{34} - \lambda/2\cdot 3^3,\ x_{34} + \lambda/2\cdot 3^3)$$

Definamos $K_3 = I_{31} \cup \cdots \cup I_{38}$, con

$$I_{31} = [0,\ X_{31} - \lambda/2\cdot 3^3]\ ,\quad I_{32} = [x_{31} + \lambda/2\cdot 3^3,\ X_{21} - \lambda/2\cdot 3^2]\ ,$$

$$\ldots,\quad I_{38} = [x_{34} + \lambda/2\cdot 3^2,\ 1].$$

K_3 consta de 2^3 intervalos cerrados de longitud $l_3 < l_2/2$, tal que

$$I_{3j} \cap I_{3i} = \phi,\ \text{si } j \neq i \text{ con } j,i \in \{1, \ldots ,2^3\} \text{ y } l(I_{31}) = \ldots = l(I_{38})$$

Procediendo inductivamente:

En el n-esimo paso tendremos un conjunto K_n que consta de 2^n

intervalos cerrados $\{I_{nj}\}_{j=1}^{2^n}$

y ajenos por parejas donde cada uno de ellos tiene la misma

longitud $l_n < \frac{l_{n-1}}{2}$.

Se define

$$K_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Observemos que K_λ es cerrado porque K_n lo es para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, K_λ es compacto ya que es un cerrado contenido en el compacto $[0,1]$. $K_\lambda \neq \phi$ ya que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ constituye una familia anidada de compactos no vacíos.

A partir de estas consideraciones ¿Podemos concluir que K_λ es Nunca Denso, es decir, que el interior de su cerradura es vacío?

Demostremos que

$$\overset{\circ}{\overline{K_\lambda}} = \overset{\circ}{K_\lambda} = \phi.$$

Para lo cual basta ver que K_λ no contiene ningún intervalo abierto.

Demostración: Denotemos por

$$\{I_{nj}\}_{j=1}^{2^n}$$

los 2^n intervalos cerrados que componen a K_n, esto es

$$K_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{nj}$$

donde, por construcción $l(I_{nj}) = l(I_{ni})$, $\forall$ $j,i \in \{1,...,2^n\}$

y también $l(I_{n+1j}) < \frac{1}{2}\, l(I_{ni})$, $\forall$ $j \in \{1,...,2^{n+1}\}$, $i \in \{1,...,2^n\}$

Así: $\quad l(I_{21}) < \frac{1}{2}\, l(I_{12})$.

$$l(I_{31}) < \frac{1}{2}\, l(I_{21}) < \frac{1}{2^2} l(I_{11}).$$

$$l(I_{41}) < \frac{1}{2}\, l(I_{31}) < \frac{1}{2^2} l(I_{21}) < \frac{1}{2^3} l(I_{11}).$$

$$\vdots$$

$$l(I_{n1}) < \frac{1}{2^{n-1}} l(I_{11}), \quad \text{para todo} \quad n \geq 2.$$

Así: $\quad l(I_{n1}) \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

y en general $\quad l(I_{nj}) \underset{n \to \infty}{\to} 0$, $\quad \forall$ $j=1,...,2^n$

Si hubiese un intervalo $(a,b) \subseteq K_n$

entonces $(a,b) \subset K_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por conexidad de (a,b), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único

$j_n \in \{ 1,\ldots,2^n \}$ tal que $(a,b) \subset I_{n,j_n}$.

Así $0 < b-a \leq l(I_{n,j_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde, si tomamos el límite cuando n tiende a infinito, tenemos que $b-a = 0$ lo cual es una contradicción, pues $b-a > 0$.
Por consiguiente

$\mathring{K}_\lambda = \phi$. de donde K_λ es ubn cconjunto Nunca Denso. □

Ahora ¿Es K_λ de contenido distinto de cero?
veremos que sí:

DEMOSTRACION: Al construir los $K_1, \ldots, K_n$, hacemos lo siguiente:

Para K_1, extraemos 2^0 intervalos, T_{11}, abiertos tal que

$$l(T_{11}) = \lambda/3^1.$$

Para K_2, extraemos 2^1 intervalos, T_{21}, T_{22}, abiertos tal que

$$l(T_{21})=l(T_{22}) = \lambda/3^2.$$

Sucesivamente en el paso n,

Para K_n, extraemos 2^{n-1} intervalos, T_{n1}, T_{n2}, ..., $T_{n2^{n-1}}$.

tal que $l(T_{n1}) = l(T_{n2}) = \ldots = l(T_{n2^{n-1}}) = \lambda/3^n$.

como los T_{ij} son ajenos $(i=1, \ldots, n; \quad j=1,\ldots,2^{n-1})$

entonces

$$l\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{2^n} T_{ij}\right) = \lambda/3 + 2(\lambda/3^2) + 2^2(\lambda/3^3) + \cdots + 2^{n-1}(\lambda/3^n)$$

$$= \frac{\lambda}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{3}\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \right] < \frac{\lambda}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}} \right] = \lambda \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

De donde la longitud de K_n, que consta de los intervalos cerrados que se quedan en el paso n, por ser el complemento de la anterior unión de intervalos abiertos en $[a,b]$, es

$$l(K_n) \geq 1-\lambda \quad \text{con } 0 < \lambda < 1$$

Ahora bien, supongamos que K_λ tiene contenido cero;

sea $0 < \varepsilon < 1-\lambda$, entonces existe una colección finita de intervalos abiertos

$$\{H_r\}_{r=1}^{n} \text{ tal que } K_\lambda \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} H_r \quad \text{y} \quad \sum_{r=1}^{n} l(H_r) < \varepsilon$$

Si demostramos que existe un $m\in\mathbb{N}$, tal que

$$K_s \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} H_r \text{ , para todo } s\geq m \qquad (*)$$

tendremos que, para todo $s \geq m$

$$l(K_s) \leq l(\bigcup_{r=1}^{n} H_r) \leq \sum_{r=1}^{n} l(H_r) < \varepsilon < 1-\lambda$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que

$$l(k_s) \geq 1-\lambda$$

demostrado anteriormente. De donde K_λ no tiene contenido cero □

Nos resta probar la afirmación (*):

Existe un $m \in \mathbb{N}$, tal que $K_s \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} H_r$, para todo $s \geq m$.

La cual es una consecuencia inmediata del siguiente

TEOREMA 4.10. Sean K_1. K_2, ...,compactos tal que $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$

Sea $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Sea G abierto tal que $G \supset K$,

entonces existe N tal que $G \supset K_N$.

DEMOSTRACION: Sea $C_n = G^c \cap K_n$; $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$,

C_n es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = G^c \bigcap (\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) = G^c \cap K = \phi.$$

Por lo tanto, si consideramos la conocida proposición de topología:

"Si $\{K_\alpha : \alpha \in A\}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio métrico X tal que $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha = \phi$, entonces existe una subcolección finita $\{K_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$, tal que $\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \phi$".

concluimos que, existe una subfamilia finita

$\{K_{m_1}, \ldots, K_{m_q}\}$ con $m_1 < \ldots . < m_q$ tal que

$K_{m_q} \cap G^c = \bigcap_{i=1}^{q} (K_{m_i} \cap G^c) = \phi$, de donde $K_{m_q} \subseteq G$.

Entonces, queda demostrada (*), y con ello completamos la demostración de A.7. ■

A.8. NO TODO CONJUNTO ACOTADO DE CONTENIDO CERO ES DE PRIMERA ESPECIE.

Para ello. exhibiremos, que el conjunto de Cantor es de contenido cero pero no es de primera especie.

a) EL CONJUNTO DE CANTOR NO ES DE PRIMERA ESPECIE.

Si del intervalo $[0,1]$ extraemos el tercio central, y apartir de alli subdividimos sucesivamente los subintervalos restantes y continuamos extrayendo los tercios medios, vemos que las colecciones que en cada paso nos van quedando en el intervalo $[0,1]$ son:

En el paso uno: $T_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, 2^1 intervalos.

En el paso dos: $T_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1]$ 2^2 intervalos.

En el paso n: $T_n = [0,1/3^n] \cup \cdots \cup [\frac{3^n-1}{3^n}, 1]$, 2^n intervalos.

Continuando de este modo, obtenemos una sucesión de conjuntos compactos tales que

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \cdots$$

donde T_n es la unión de 2^n intervalos $\{I_{nj}\}_{j=1}^{2^n}$ cerrados y ajenos por parejas donde cada uno de ellos tiene longitud $1/3^n$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

Definimos al conjunto de Cantor K, como:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Para demostrar que el conjunto K no es de primera especie, basta comprobar que K es perfecto para lo cual es suficiente mostrar la siguiente afirmación:

Si $x \in K$ entonces, x es un punto de acumulación de K.

DEMOSTRACION: Sea $x \in K$, y sea S un intervalo abierto tal que $x \in S$.

Como $$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$$

entonces $$x \in T_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{nj} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un intervalo

$$I_{n,j(n)} \subseteq T_n \quad \text{tal que} \quad x \in I_{n,j(n)}$$

Como $\ell(I_{n,j(n)}) = 1/3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir $n \in \mathbb{N}$

tal que $I_{n,j(n)} \subset S$.

Sea x_n un extremo de $I_{n,j(n)}$, tal que $x_n \neq x$.

Por construcción $x_n \in T_n$

Así, $x_n \in K \cap S$. Por lo tanto $K \cap S \neq \phi$, de donde, si $x \in K$, x es un punto de acumulación de K. □

b) EL CONJUNTO DE CANTOR ES DE CONTENIDO CERO

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para este n construyamos la siguiente colección finita de intervaalos abiertos :

$J_{n,1} = \left(x_{n,1} - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \ , \ x'_{n,1} - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right)$, ... ,

$$J_{n,2^n} = \left(x_{n,2^n} - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \ , \ x'_{n,2^n} - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right)$$

donde $x_{n,1}$ y $x'_{n,1}$ son los extremos izquierdo y derecho de $I_{n,1}$, respectivamente, ... , $x_{n,2^n}$ y $x'_{n,2^n}$ son los extremos izquierdo y derecho de $I_{n,2^n}$, respectivamente

Así $K \subset K_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j} \subset \bigcup_{j=1}^{2^n} J_{n,j}$

$$\sum_{j=1}^{2^n} l(I_{n,j}) = 2^n\left(\frac{1}{3^n} \right) + 2^n \left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, K es de contenido cero: □

De a) y b) concluímos la demostración de A.8. ■

B I B L I O G A F I A

Lebesgue's Theory of Integration: its origin and development.
Thomas Hawkins. Editorial Chelsea. (1970).

Mathematical Analysis, Second Edition.
Tom M. Apostol. Addison-Wesley publishing Company. (1974).

Análisis Matemático. Primera Edición.
Tom M. Apostol. Editorial Reverté. (1953).

Principles of Mathematical Analysis. Third Edition.
Walter Rudin. McGraw-Hill. (1976).

Differential and Integral Calculus. Volumen I. Second Edition.
R. Courant Interscience Publishers. (1937).

Volumen and Integral.
Rogosinski. W.W. Wiley, New York. (1952).