En la ciudad de Hermosillo, Sonora, Mex., siendo las 18:00 horas del día 21 de Mayo de 1993, se reunieron en el aula 9K-205 del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, los señores:

Francisco Javier Tapia Moreno.
Joaquín H. López Barbón
Pedro Flores Pérez

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como secretario el último para efectuar el examen Profesional de la Carrera de:

Licenciado en Matemáticas

Acta No. 72
Hoja No. 71
Libro No. 01
No. de Exp. 7920395-7

al señor: José Dolores Dávila Galindo

Después de haber presentado su tesis intitulada:

"Método del Pivoteo Principal para la Solución del P.C.L"

la que previamente le fué aprobada por el Jurado, los señores sinodales replicaron al sustentante y después de debatir entre sí, reservada y libremente lo declararon:

Aprobado por unanimidad

José Dávila G.

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la

TESIS:

METODO DEL PIVOTEO PRINCIPAL PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDAD LINEAL

AUTOR:

DAVILA GALINDO, JOSÉ DOLORES

LIC. MATEMATICAS

UNISON

1993.

A MIS PADRES:

que continuamente me motivaron y apoyaron durante mis estudios.

A MI ESPOSA CONNY Y A MI HIJA SARAHI:

a quienes les he quitado tiempo para invertirlo en mi formación y particularmente en este trabajo.

A MIS HERMANOS. JOSE ROSARIO, AURORA, MARIA JESUS, SOLEDAD Y MANUEL.

A TODOS MIS MAESTROS:

que contribuyeron a mi formación académica. También a los maestros que colaboraron de una u otra forma para la elaboración y presentación de esta tésis.

A MI ASESOR Y AMIGO FCO. JAVIER TAPIA MORENO:

que constantemente estuvo al pendiente en el transcurso de la elaboración de este trabajo.

A DIOS POR LO INFINITAMENTE BUENO QUE ES.

MAYO 21 DE 1993.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Dada una matríz real M de grado nxn y dado un vector $q \in R^n$ el problema de "Complementaridad Lineal" denotado por (M/q), consiste en encontrar vectores w, z tales que:

$$w = q + Mz \qquad (1)$$

$$w \geq 0 \qquad z \geq 0 \;, \qquad w^T z = 0 \qquad (2)$$

El Problema de Complementaridad Lineal tiene aplicaciones fundamentales dentro de las siguientes áreas:

a) Programación Lineal (PL) y Programación Cuadrática (PQ),(se encontrarán detalles en el apéndice).
b) Bimatrices y Juegos Polinomiales.
c) Mecánica, Plasticidad.
d) Soluciones aproximadas de Ecuaciones Diferenciales.
e) Clasificación de Matrices cuadradas.
f) Solución a Sistemas F(x) = 0 (n ecuaciones con n incógnitas).
g) Equilibrios Económicos.

El objetivo de este trabajo tiene como finalidad dar a conocer el Problema de Complementaridad Lineal (PCL) , y las herramientas necesarias para su solución, la cual se usará para la solución de una aplicación correspondiente a un modelo de Equilibrio Económico.

Este trabajo esta desglozado de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se da una motivación de la complejidad del problema al resolver uno de dimensión dos utilizando las herramientas del Algebra Lineal y se propone uno de dimensión tres para que se vea aún más la complejidad de este problema de Complementaridad Lineal.

Se describe la técnica de intercambio de Jordan la cual será de gran utilidad en la aplicación del Problema de Complementaridad Lineal pues, las iteraciones del algoritmo corresponden a intercambios de Jordán, en donde las variables que se intercambian se eligen de manera que se cumplan ciertas propiedades.

En el capítulo 2, se describe un algoritmo propuesto por Richard W. Cottle y George B. Dantzig. Ellos describen un algoritmo en términos de pivoteo principal haciendo uso del intercambio de Jordán para la elección de pivote, utilizando únicamente las variables del problema original , cosa que no sucede con otros algoritmos.

La exposición del método de pivoteo principal se realiza utilizando varios ejemplos.

En el capítulo 3, se describe un modelo económico de equilibrio, el cual consiste en el traslado de artículos de primera necesidad. Este modelo se formuló como un Problema de Complementaridad Lineal y se resuelve para un equilibrio con el algoritmo de Dantzig -Cottle.

En el apéndice, se consideran problemas lineales en la forma primal dual y problemas de programación cuadrática, los cuales son formulados como un problema de Complementaridad Lineal. Profundizar y resolver estos temas no es el propósito de esta tésis. Sin embargo, motiva al lector a profundizarlos, ya sea para otro trabajo de tésis o bién para otro tipo de trabajo o investigación.

CAPITULO 1

INTERCAMBIO DE JORDAN

1.1.- Introducción: A manera de motivación, resolvamos el problema de complementaridad lineal (PCL) utilizando únicamente las herramientas disponibles hasta después de los cursos elementales de Algebra Lineal para el caso en que:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$w \geq 0 \qquad z \geq 0 , \qquad w^T z = 0$$

Así,

$$w = q + Mz$$

Donde,

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Se quiere que:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 + 3z_2 \\ -z_1 + 2z_2 \end{bmatrix}$$

Rescribiendo tenemos:

$$\begin{aligned} w_1 &= -1 + z_1 + 3z_2 \\ w_2 &= -3 - z_1 + 2z_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Y además,

$$w_1 z_1 + w_2 z_2 = 0 \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (4) tenemos:

$$(-1 + z_1 + 3z_2) z_1 + (-3 - z_1 + 2z_2) z_2 = 0$$

Tomando,

$z_1 = 0$ se satisface,

$$
\begin{aligned}
(-1 + 3z_2)\,0 + (-3 + 2z_a)\,z_2 &= 0 \\
0 + (-3 + 2z_2)\,z_2 &= 0 \\
-3 + 2z_2 &= 0 \\
z_2 &= 3/2
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
w_1 &= -1 + 3\,(3/2) \qquad \text{y} \qquad & w_2 &= -3 + 2\,(3/2) \\
&= -1 + 9/2 & &= -3 + 3 \\
&= 7/2 & &= 0
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$w = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

La cual es la solución a nuestro problema.

Comprobación:

$$
\begin{aligned}
q + M z &= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

el cual es el valor de w.

Se le sugiere al lector intente resolver uno de dimensión 3 por los métodos tradicionales del Algebra Lineal. Por ejemplo, intente resolver

$$q = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Nuestro propósito en este capítulo y en el siguinte es dar un mecanismo más sencillo para encontrar ese par de vectores buscados.

1.2.- Intercambio de Jordan.- Aquí se estudian intercambios que preservan las soluciones de una manera análoga que en los sistemas de ecuaciones.

Considere el siguiente sistema de funciones lineales

$$y_i = - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n \quad i = 1, \dots, m \qquad (5)$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables no básicas o independientes y $y_1, y_2, \dots, y_m$ son variables básicas o dependientes. El sistema anterior se puede escribir como una tabla de doble entrada como aparece a continuación:

Tabla 1.1

	$-x_1,$	$-x_2, \dots$	$-x_s, \dots$	$-x_n$
$y_1 =$	a_{11}	$a_{12} \dots$	$a_{1s} \dots$	a_{1n}
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	a_{2s}	a_{2n}
...	....	....	....	....
$y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	a_{rs}	a_{rn}
...	....	....	....	....
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	a_{ms}	a_{mn}

donde la i-ésima ecuación se obtiene con los productos de los elementos de la hilera i por las variables que están en la cabeza de la tabla, sumándolas e igualándolas a la variable que aparece a la izquierda de la tabla en la hilera i.

Definición.- Un intercambio de Jordán con pivote **rs** equivale a intercambiar el papel de la variable y_r con el de la variable x_s, es decir, equivale a volver a x_s variable básica y a y_r variable no básica. Esto se logra despejando a x_s de la ecuación r-ésima y sustituyéndolas en las demás funciones lineales. Hecho esto, se tendrá $x_1, \ldots, x_{s-1}, y_r, x_{s+1}, \ldots, x_n$ como variables no básicas y $y_1, \ldots, y_{r-1}, x_s, y_{r+1}, \ldots, y_m$ como variables básicas. El intercambio se puede efectuar si el elemento pivote a_{rs} es distinto de cero.

Al sistema así obtenido, descrito en forma de una tabla quedaría como aparece en la tabla 1.2.

Tabla 1.2

	$-x_1$	...	$-x_{s-1}$	...	$-y_r$	...	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$
$y_1 =$	a'_{11}	...	$a'_{1,s-1}$	...	a'_{1s}	...	$a'_{1,s+1}$	...	a'_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_{r-1} =$	$a'_{r-1,1}$	...	$a'_{r-1,s-1}$	...	$a'_{r-1,s}$	...	$a'_{r-1,s+1}$	...	$a'_{r-1,n}$
$x_s =$	a'_{r1}	...	$a'_{r,s-1}$	...	a'_{rs}	...	$a'_{r,s+1}$	...	a'_{rn}
$y_{r+1} =$	$a'_{r+1,1}$	...	$a'_{r+1,s-1}$	...	$a'_{r+1,s}$	...	$a'_{r+1,s+1}$	...	$a'_{r+1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a'_{m1}	...	$a'_{m,s-1}$	...	a'_{ms}	...	$a'_{m,s+1}$	...	a'_{mn}

Los coeficientes a'_{ij} son los que resultan después de efectuar el despeje de x_s de la ecuación r-ésima y su sustitución en las demás ecuaciones.

1.2 DERIVACIÓN DE LOS COEFICIENTES a'_{ij}

La ecuación r-ésima del sistema original (5) es:

$$y_r = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}(-x_j) \quad ;$$

esta ecuación se puede escribir como:

$$y_r = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{rj}(-x_j) - a_{rs}\, x_s$$

despejando a x_s se tiene:

$$x_s = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{rj}\,/a_{rs}(-x_j) + 1/a_{rs}\;(-y_r) \qquad (6)$$

Nótese que para efectuar el despeje es necesario que $a_{rs} \neq 0$. Así se tiene que la ecuación r-ésima tiene ahora a x_s como variable básica y a $x_1, \ldots, x_{s-1}, y_r, x_{s+1}, \ldots, x_n$ como variables no básicas.

Sustituyendo x_s en las demás funciones lineales y_i del sistema (3) se tiene:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j) \quad i \neq r, \text{ con } i = 1, \ldots, m$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{ij} \quad (-x_j) + a_{is}\;(-x_s)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{ij} \quad (-x_j) - a_{is} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{rj} \; / a_{rs} (-x_j) + 1/a_{rs} \; (-y_r) \right]$$

$$y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} \left[a_{ij} - (a_{is} \; a_{rj}) \; / \; a_{rs} \right] (-x_j) - a_{is} / \; a_{rs} \; (-y_r) \qquad (7)$$

Aquí nuevamente se tiene a $x_1, \ldots, x_{s-1}, y_r, x_{s+1}, \ldots, x_n$ como variables no básicas.

Las ecuaciones (6) y (7) representan el sistema de ecuaciones obtenido después de efectuar el intercambio de Jordán, de ahí que si este sistema se representaba como:

$$y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a'_{ij} \quad (-x_j) + a'_{is} \; (-y_r) \quad \text{con } i = 1, \ldots, m. \qquad (8)$$

los coeficientes a'_{ij} se obtiene con las siguientes reglas:

Elemento pivote (elemento rs) $\quad a'_{rs} = 1/a_{rs}.$

Hilera pivote (hilera r) $\quad a'_{rj} = a_{rj} \; / a_{rs} \; j \neq s.$

Columna pivote (columna s) $\quad a'_{is} = - a_{is} \; / a_{rs} \; i \neq r.$

Demás elementos $\quad a'_{ij} = a_{ij} - (a_{is} a_{rj}) / a_{rs} \quad i \neq r, \; j \neq s.$

Aplicando las fórmulas antes enunciadas, se puede pasar diréctamente de la tabla 1.1 a la tabla 1.2.

Al hacer esto, el conjunto de puntos **x** e **y** que satisfacen las primeras relaciones lineales, satisfacen también las relaciones que resultan en el intercambio de Jordán.

CAPITULO 2

EL METODO DEL PIVOTEO PRINCIPAL

Aquí describiremos un algoritmo propuesto por RICHARD W. COTTLE y GEORGE B. DANTZIG el cual precede al de Lemke [3].Este proviene de un algoritmo de programación cuadrática de P.Wolfe, [4] quién fué el primero en usar este tipo de regla complementaria para la elección de pivote. Este método es aplicable a matrices M que tienen los menores príncipales positivos (es decir, a matrices definidas positivas) y después, mediante una pequeña modificación, para matrices semidefinidas positivas. En el procedimiento de Lemke para M en general, se intoduce una variable artificial z_0 con el fin de obtener soluciones factibles casi complementarias (Una solución factible de $w = q + Mz$ se llama casi-complementaria si satisface que $z_i w_i = 0$, $i = 1,2,...,n$, excepto para un valor de i, digamos β. Esto es $z\beta \neq 0$ $w\beta \neq 0$) del problema argumentado.

Otro enfoque, es usar únicamente variables del problema original, pero éstas pueden tomar inicialmente valores negativos tanto como no negativos.

Un ciclo mayor del algoritmo se inicia con la solución básica complementaria $(w;z) = (q;0)$. Si $q \geq 0$, el procedimiento se termina inmediatamente. Si $q < 0$ podemos suponer (reetiquetando si es necesario) que $w_1 = q_1 < 0$. Una trayectoria casi complementaria se genera incrementando z_1, el complemento de la variable básica negativa seleccionada (las variables correspondiente z_i y w_i se les llama complementarias y cada una es el complemento de la otra). Para puntos a lo largo de la trayectoria, $z_i w_i = 0$ para $i \neq 1$.

Paso I.- Incrementar z_1 hasta que sea bloqueada por una variable básica positiva decreciente a cero o por una negativa w_1 creciente a cero.

Paso II.- Hacer no básica la variable bloqueadora pivoteando su complemento dentro del conjunto básico. El ciclo mayor se termina si w_1 sale del conjunto básico de variables. Si no es así, regresar al paso I.

Se verá que durante un ciclo mayor w_i crece a cero. En este punto, se obtiene una nueva solución básica complementaria (una solución básica complementaria de $w = q + Mz$ es un par de vectores que satisfacen la ecuación dada y $z_i w_i = 0$ pero algún $q_i < 0$). Sin embargo, el número de variables básicas con valores negativos es al menos uno menos que al principio del ciclo mayor. Como hay a lo más p variables básicas negativas, no se requieren más de p ciclos para obtener una solución factible complementaria del problema $w = q + Mz$. (se le llama solución factible complementaria al conjunto solución de $w = q + Mz$; con $w_i \geq 0$; $z_i \geq 0$ y $w^t z = 0$). La prueba depende de ciertas propiedades de matrices invariantes bajo pivoteo principal.

2.1 TRANSFORMACION DE UNA MATRIZ POR PIVOTEO PRINCIPAL

Considérese el sistema homogéneo $v = Mu$ donde M es una matríz cuadrada. (nótese que es el mismo problema de complementaridad lineal pero con $q = 0$). Aquí las variables $v_1, \ldots, v_p$ son básicas y expresadas en términos de las variables no básicas $u_1, \ldots, u_p$. Sea cualquier subconjunto de las v_i hechas no básicas y la correspondiente u_i básica. Reetiquetemos todo el conjunto de las variables básicas $\bar{v}$ y el correspondiente de variables no básicas $\bar{u}$. Expresemos $\bar{v} = \bar{M}\,\bar{u}$ como las nuevas variables básicas $\bar{v}$ en términos de una no básica. A la matríz $\bar{M}$ se le llama *Transformación por pivoteo principal* de M. Por supuesto, esta tranformación se puede llevar a cabo solamente sí la submatríz principal de M que corresponde a los conjuntos de variables z_i y

w_i intercambiados es no singular. (Una matríz A es no singular si su determinante $|A| \neq 0$), y esto será supuesto siempre que el término sea utilizado.

TEOREMA 1.- Si una matríz cuadrada M tiene los menores principales positivos, también los tendrá toda transformación por pivoteo principal de M.

La prueba de este teorema se obtiene fácilmente de manera inductiva intercambiando los papeles de un par complementario y evaluando el resultado de menores principales en términos de M.

Definición.- Matriz definida positiva.- Una matriz cuadrada M es semi-definida positiva (SDP) si $\mathbf{x}^t M\mathbf{x} \geq 0$ para todo **x**. Y es definida positiva (DP) si $\mathbf{x}^t M\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$.

TEOREMA 2.- Si una matríz M es definida positiva o semidefinida positiva, también lo es toda tranformada de M por pivoteo principal.

Prueba: Consideremos $v = M u$. después de la tranformación por pivoteo principal, sea $\bar{v} = \bar{M} \bar{u}$, donde $\bar{u}$ es el nuevo conjunto de variables no básicas. Quedándonos por demostrar que $\bar{u}^t\bar{M}\bar{u} = \bar{u}^t\bar{v} > 0$ si $u^tMu = u^tv > 0$. Si M es definida positiva, esto último es verdadero si la $u \neq 0$, lo primero debe de ser válido por que todo par $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ es idéntico con (u_i, v_i) excepto posiblemente en orden inverso. Por lo tanto:

$$\sum_i \bar{u}_i \bar{v}_i = \sum_i u_i v_i > 0.$$

En la prueba para el caso semidefinida positiva, únicamente se reemplaza la desigualdad $>$ por $\geq$.

2.2 VALIDEZ DEL ALGORITMO

A continuación precisaremos la demostración para el caso $p = 3$. Es fácil entender que los argumentos aquí utilizados son válidos para cualquier p.

$$\begin{aligned} w_1 &= q_1 + m_{11}z_1 + m_{12}z_2 + m_{13}z_3 \\ w_2 &= q_2 + m_{21}z_1 + m_{22}z_2 + m_{23}z_3 \\ w_3 &= q_3 + m_{31}z_1 + m_{32}z_2 + m_{33}z_3. \end{aligned}$$

Supongamos que M tiene menores principales positivos tal que los coefientes de la diagonal sean todos positivos:

$$m_{11} > 0, \qquad m_{22} > 0, \qquad m_{33} > 0.$$

Supongamos además, que algún q_i es negativo digamos $q_1 < 0$. Entonces la solución $(w ; z)' = (q_1,q_2,q_3;0,0,0)$ es complementaria, pero no factible, porque una variable en particular, en este caso w_1, la cual referimos como *distinguida* es negativa. Ahora iniciaremos una trayectoria casi complementaria, incrementando el complemento de la variable distinguida, en este caso z_1, la cual llamaremos variable *conductora*. Ajustando las variables básicas, tenemos:

$$(w ; z)^1=(q_1 + m_{11}z_1 , q_2 + m_{21}z_1 , q_3 + m_{31}z_1 ; 0,0,0).$$

Notando que la variable distinguida w_1 se incrementa estríctamente con el incremento de la variable conductora z_1 porque $m_{11} > 0$. Supongamos no degeneración, (Una matríz M nxn se dice que es no degenerada si todos sus menores principales son diferentes de cero) podemos incrementar z_1 por una cantidad positiva antes que sea bloqueda ya seapor w_1 que alcance el cero, o por una variable básica que era positiva y ahora se está haciendo negativa.

En el primer caso, para algún valor z_1^* de la variable conductora z_1, tenemos $w_1 = q_1 + m_{11}z_1^* = 0$. la solución

$$(w ; z)^2 = (0 , q_2 + m_{21}z_1^* , q_3 + m_{31}z_1^* ; 0,0,0).$$

es complementaria y tiene una componente negativa menos. pivoteando sobre m_{11} se reemplaza w_1 por z_1 como una variable básica. por el teorema 1, la matriz $\bar{M}$ en el nuevo sistema canónico reetiquetado $\bar{w} = \bar{q} + \bar{M}\bar{z}$ tiene los menores principales positivos, permitiendo que el ciclo mayor entero se repita.

El último caso, tenemos alguna otra variable básica, digamos $w_2 = q_2 + m_{21}z_1$ bloqueándose cuando $z_1 = z_1^* > 0$. Es claro que $m_{21} < 0$ y $q_2 > 0$. En este caso,

$$(w ; z)^2 = (m_{11}z_1^* + q_1, 0 , m_{31}z_1^* + q_3 ; z_1^*, 0, 0).$$

TEOREMA 3.- Si la variable conductora está bloqueada por una variable básica distinta de su complemento, un intercambio por pivoteo principal de la variable bloqueadora con su complemento, nos permite el incremento de la variable conductora.

Prueba: pivoteando sobre m_{22} se genera el sistema canónico

$$\begin{aligned} w_1 &= \bar{q}_1 + \bar{m}_{11}z_1 + \bar{m}_{12}w_2 + \bar{m}_{13}z_3 \\ z_2 &= \bar{q}_2 + \bar{m}_{21}z_1 + \bar{m}_{22}w_2 + \bar{m}_{23}z_3 \\ w_3 &= \bar{q}_3 + \bar{m}_{31}z_1 + \bar{m}_{32}w_2 + \bar{m}_{33}z_3. \end{aligned}$$

La solución $(w ; z)^2$ satisface al sistema anterior ya que es un sistema equivalente. Por lo tanto haciendo $z_1 = z_1^*$, $w_2 = 0$, $z_3 = 0$ produce:

$$(w \; ; \; z)^2 = (q_1 + \bar{m}_{11} z_1^* \; , \; 0 \; , \; q_3 + \bar{m}_{31} z_1^* \; ; \; z_1^* \; , 0 , 0 \;)$$

es decir, la misma solución casi complementaria.

Incrementando z_1 más allá de z_1^* tenemos:

$$(\bar{q}_1 + \bar{m}_{11} z_1 \; , \; 0 \; , \; \bar{q}_3 + \bar{m}_{31} z_1 \; ; \; z_1 , \; 0 , \; 0 \;),$$

la cual es también casi complementaria. El signo de $\bar{m}_{21}$ es el inverso de m_{21}, puesto que $\bar{m}_{21} = - m_{21}/m_{22} > 0$. De aquí que z_2 se incrementa con el incremento $z_1 > z_1^*$; es decir , la nueva variable básica reesmplazada w_2 no está bloqueada. Puesto que $\bar{M}$ tiene menores principales positivos, $\bar{m}_{11} > 0$. De aquí, w_1 continua creciendo con el incremento $z_1 > z_1^*$.

TEOREMA 4.- El número de iteraciones dentro de un ciclo mayor es finito.

Prueba: Existe sólo un número finito de posibles bases. Ninguna base puede repetirse con el valor mayor de z_1. Para ver esto, suponga que se hizo $z_1^{**} > z_1^*$. Esto implicaría que algunas componentes de la solución se hacen negativas en $z_1 = z_1^*$ y todavía son no negativas donde $z_1 = z_1^{**}$. Como el valor de la componente es lineal en z_1 teniendo una contradicción.

2.3.- Ejemplos

Ejemlo 1. Usando el algorítmo del (PCL). Encontrar vectores w,z tales que satisfagan la condición:

$$w = q + Mz$$
$$w \geq 0, \; z \geq 0$$
$$w^t z = 0.$$

Con,

$$q = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -3 + z_1 + z_2 \\ w_2 &= -2 + z_1 + 2z_2 - 2z_3 \\ w_3 &= -1 \quad\quad - 2z_2 + 5z_3 \end{aligned}$$

La solución $(w_1, w_2, w_3; z_1, z_2, z_3) = (-3, -2, -1; 0,0,0)$ es complementaria pero no es factible debido a que hay soluciones negativas.

Ahora iniciaremos una trayectoria casi complementaria; ajustando las variables básicas tememos:

$$(w ; z)^1 = (q_1 + m_{11}z_1, q_2 + m_{21}z_1, q_3 + m_{31}z_1; 0,0,0)$$

$$(w ; z)^1 = (-3 + z_1, -2 +z_1, -1 + 0z_1; 0,0,0)$$

vamos a incementar z_1 por una cantidad positiva hasta que esté bloqueada ya sea por w_1 que alcance el cero o por una variable básica que era positiva y se esta haciendo negativa.

Para algún valor z_1^* de la variable conductora z_1, tenemos:

$$w_1 = q_1 + m_{11}z_1^* = 0$$

$$w_1 = -3 + z_1^* = 0, \text{ la solución}$$

$$(w ; z)^2 = (0, -2 +z_1^* , -1 + 0z_1^* ; 0,0,0)$$

es complementaria y tiene una componente negativa menos.

Pivoteando sobre m_{11} se reemplaza w_1 por z_1, como una variable básica.

	$-z_1$	$-z_2$	$-z_3$	q
w_1	-1	-1	0	-3
w_2	-1	-2	2	-2
w_3	0	2	-5	-1

	$-w_1$	$-z_2$	$-z_3$	q
z_1	-1	1	0	3
w_2	-1	-1	2	1
w_3	0	2	-5	-1

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

de donde $(w;z)^2= (0, 1,-1;3,0,0)$ es complementaria pero no factible dado que la variable w_3 es negativa.

Ajustando de nuevo las variables, tenemos:

$$(w;z)^3 = (3 + 0z_3,1 - 2z_3,-1 + 5z_3 ; 0,0,0)$$

Para algún z_3^{**} de la variable conductora z_3 tenemos:

$$w_3 = q_3 + \bar{m}_{31} z_3^{**} = 0$$

$$w_3 = -1 + 5z_3^{**} = 0; \text{ la solución}$$

$$(w;z)^4 = (3 + 0z_3^{**} , 1 -2z_3^{**} ,0 ; 0,0,0)$$

es complementaria y tiene una componente negativa menos, pivoteando m_{33} se reemplaza w_3 por z_3 como una variable básica.

	$-w_1$	$-z_2$	$-z_3$	q
z_1	-1	1	0	3
w_2	-1	-1	2	1
w_3	0	2	-5	-1

	$-w_1$	$-z_2$	$-w_3$	q
z_1	-1	1	0	3
w_2	-1	-1/5	2/5	3/5
z_3	0	-2/5	-1/5	1/5

$$\bar{\bar{q}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{M}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Dado que $\bar{\bar{q}} \geq 0$, el procedimiento se termina, teniendo la solución $(w;z)^4 = (0,3/5\ ,0\ ;\ 3,0,1/5\ )$.

Ejemplo 2.-

$$q = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -3 + 5z_1 + z_2 - 2z_3 \\ w_2 &= 2 + z_1 + 2z_2 \\ w_3 &= 1 - 2z_1 + z_3 \end{aligned}$$

La solución $(w_1, w_2, w_3; z_1, z_2, z_3) = (-3,\ 2,\ 1;\ 0,0,0)$ es complementaria pero no es factible, debido a que hay soluciones negativas.

Ahora iniciaremos una trayectoria casi complementaria, ajustando las variables básicas tenemos:

$$(w ; z)^1 = (q_1 + m_{11}z_1, q_2 + m_{21}z_1, q_3 + m_{31}z_1 ; 0,0,0)$$

$$(w ; z)^1 = (-3 + 5z_1, \quad 2 + z_1, \quad 1 - 2z_1 ; 0,0,0)$$

Para z_1^* 1/2, la variable queda bloqueada antes, de donde tenemos:

$$(w ; z)^1 = (-3 + 5z_1^*, 2 + z_1^*, 0 ; 0,0,0)$$

Pivoteando sobre w_3 tenemos

	$-z_1$	$-z_2$	$-z_3$	q
w_1	-5	-1	2	-3
w_2	-1	-2	0	2
w_3	2	0	-1	1

	$-z_1$	$-z_2$	$-w_3$	q
w_1	-1	-1	2	-1
w_2	-1	-2	0	2
z_3	-2	0	-1	-1

Pivoteando de nuevo sobre w_1 tenemos

	$-z_1$	$-z_2$	$-w_3$	q
w_1	-1	-1	2	-1
w_2	-1	-2	0	2
z_3	-2	0	-1	-1

	$-w_1$	$-z_2$	$-w_3$	q
z_1	-1	1	-2	1
w_2	-1	-1	-2	3
z_3	-2	2	-5	1

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Dado que $\bar{q} \geq 0$, el procedimiento se termina, teniendo la solución $(w;z)^2 = (0 , 3 , 0 ; 1 , 0 , 1)$.

CAPITULO 3

CALCULO DEL EQUILIBRIO ECONOMICO EN REDES AFINES CON EL ALGORITMO DE DANTZIG Y COTTLE.

3.1 INTRODUCCION.- Consideremos un problema de traslado de un artículo de primera necesidad, donde los precios de cada localidad es una función afín de los abastecedores y las demandas de esta localidad, y el costo del embarque es una función afín de la cantidad embarcada. Un sistema de precios, producción, surtido, demanda y embarque se define como un equilibrio, si existe un balance en el flujo de bienes, si los precios locales no exceden al costo de compra y transportación de una localidad a otra, y si el cargamento sólo toma precios en plaza de una manera eficiente o adecuada, es decir, si los precios locales no exceden al costo de compra y de transportación de una localidad a otra.

Este modelo se formula como un problema de Complementaridad Lineal y se resuelve para un equilibrio con el algoritmo de Dantzig-Cottle en un número finito de pasos.

Algunos autores utilizan programación cuadrática. Nuestra prueba y resultado es más directa y más general; resolvemos las condiciones de equilibrio diréctamente sin pasar a un problema de optimización. En un plano más general, el problema de equilibrio se formula como un problema de Complementaridad Lineal.

3.2 FORMULACION DEL PROBLEMA.- Nuestro problema se representa cómodamente mediante una digráfica $(\mathcal{N},\ell)$ con un número finito de nodos $\mathcal{N}$ = {1,...,n} y un número finito de arcos ℓ = {1,...,l}.

Una digráfica con n = 4 y l = 5 se ilustra a continuación.

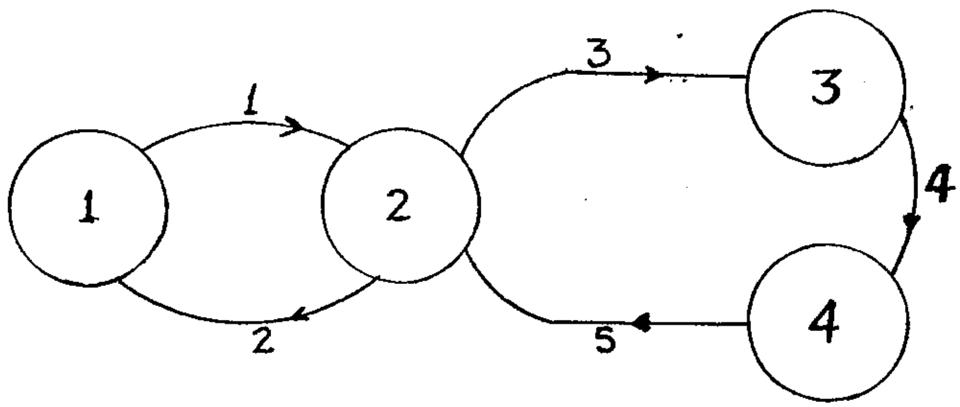
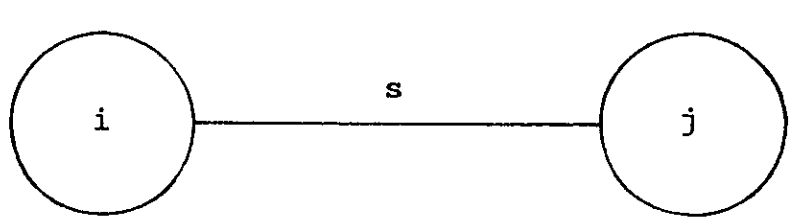


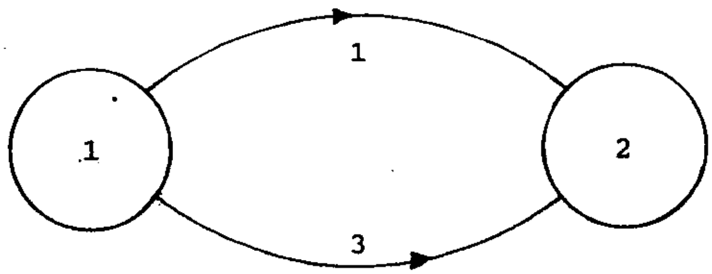
figura 1

Cada nodo i en $\mathcal{N}$ representa un productor/consumidor en una localidad espacio/tiempo. Cada arco s en ℓ representa una facilidad de transporte específico para transportar artículos de primera necesidad entre nodos, esto es, localidades; y cada arco s esta orientado para coincidir con la dirección de una actividad posible de traslado. Por ejemplo, si el arco s tiene nodo terminal j y nodo inicial i, esto es:



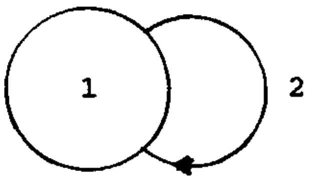
entonces, el traslado de bienes a lo largo de s es desde el nodo i hasta al nodo j.

Permitimos multiplicidad de arcos entre los mismos pares de nodos, es decir



$1,2 \in n$
$1,3 \in \ell$

pero no se permite lazos, esto es



$1 \in n$
$2 \in \ell$

(técnicamente hablando ℓ indica un subconjunto finito de $\{(i,j\ );\ i,\ j \in n;\ i \neq j\ \})$.

Estamos interesados con el surtido, demanda y traslado de m bienes $g = 1,2,\ldots,m$ en la red (n,ℓ). Un bien g podría ser una materia prima, un producto inmediato o un producto terminado.

La variable $f_s = (f_{s1}, \ldots, f_{sm})$ representa las cantidades de los varios bienes embarcados a lo largo del arco s, y sea el costo por unidad embarcada los varios bienes movidos a lo largo del arco s la función afín $C_s f_s + c_s$. Así, $f_s.(C_s f_s + c_s)$ es el costo total del embarque en el arco s.

La variable $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{im})$ representará los precios de los varios bienes en el nodo i. La variable $h_i = (h_{i1}, \ldots, h_{im})$ representará la red de exportaciones desde el nodo i de los varios bienes; esto es, h_{ig} es positivo cuando el nodo i produce más del bien g que su consumo, y es negativo cuando es más lo consumido que lo producido. Supongamos que los precios p_i y las exportaciones h_i al nodo i estan relacionadas por una función afín $p_i = A_i h_i + a_i$.

Nuestra red está completamente especificada por la digráfica (n,ℓ), los (A_i/a_i) para $i \in n$, y los (C_s/c_s) para $s \in \ell$. Para la digráfica de la figura 1 tendríamos, por ejemplo, los datosde la figura 2 corresponden a dos bienes; posteriormente resolveremos este ejemplo.

$$(A_1|a_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (A_2|a_2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(A_3|a_3) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad (A_4|a_4) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$(C_1|c_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad (C_2|c_2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$(C_3|c_3) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_4|c_4) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(C_5|c_5) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

FIGURA 2

Para definir un equilibrio de una manera precisa necesitamos alguna notación adicional.

Para un arco s, sea $\square s$ el nodo inicial de s, y sea $s\square$ el nodo final de s. Por ejemplo, con respecto a la figura 1, tenemos $\square 1 = 1$ y $5\square = 2$. Para un nodo i, sea $\to i$ el conjunto de arcos que entran a i, y $i \to$ el conjunto de arcos que salen de i. Así, el arco s está en $i \to$ o $\to i$ sí y sólo sí $\square s = i$ o $s\square = i$, respectívamente. Con respecto a la figura 1, tenemos $1 \to \{1\}$ y $\to 2 = \{1,5\}$.

Un sistema de precios $p = (p_1, \ldots, p_n\}$, exportaciones $h = (h_1, \ldots, h_n)$, y embarques $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es por definición, un equilibrio si las siguientes cinco condiciones se cumplen:

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & f_s \geq 0, & s \in \ell, \\
\text{b)} & h_i = \sum_{i \to} f_s - \sum_{\to i} f_s, & i \in n, \\
\text{c)} & p_i = A_i h_i + a_i, & i \in n, \\
\text{d)} & p_{\square s} + C_s f_s + c_s \geq p_{s\square}, & s \in \ell, \\
\text{e)} & f_s . (p_{\square s} + C_s f_s + c_s - p_{s\square}) = 0, & s \in \ell
\end{array}
\tag{9}
$$

La condición (9.a) requiere que los cargamentos o flujos sean no negativos; además, nótese que los precios y exportaciones pueden ser positivos, negativos o cero. La condición (9.b) representa la conservación de bienes en el nodo i. La condición (9.c) expresa el hecho de que el nodo i produce y/o consume de acuerdo a los precios. La condición (9.d) es una condición de estabilidad en el precio que requiere que el precio local no debe de exceder al precio vecino más costos de transportación. Finalmente, la condición (9.e) requiere que los bienes sólo son envíos (en cantidades positivas) en arcos de precios adecuados, esto es, si f_{sg} es positivo, entonces los precios de g en $\square s$ son los costos de transportación mejorados a lo largo de s a $s\square$ serían igual a los precios de g en $s\square$, que son

RIS T979

$$(p_{\square s} + C_s f_s + c_s)_g = (p_{s\square})_g.$$

3.3 ADAPTACION AL PROBLEMA DE COMPLEMETARIDAD LINEAL.

Recordemos la definición del problema de complementaridad lineal visto en capítulo 1 y recalcaremos las condiciones de un equilibrio dentro de la forma del PCL, esto es:

$$w = M.f + q,$$
$$w \geq 0,\ f \geq 0,\ wf = 0 \qquad (10)$$

Es en este sistema donde el algoritmo de Dantzig-Cottle se aplica.

Con la observación de (9.d) introducimos las variables $w_s = (w_{s1}, \ldots, w_{sm})$ para $s \in \ell$ poniendo

$$w_s = p_{\square s} + C_s f_s + c_s - p_{s\square}, \qquad s \in \ell.$$

Por conveniencia de notación, definimos $\bar{c}_s$ por

$$c_s + a_{\square s} - a_{s\square}.$$

Ahora, utilizando (9.b) y (9.c) para eliminar h_i y p_i en (9.d) y (9.e) se obtendrá

$$\text{a)} \quad w_s = A_{\square s}\left(\sum_{\square s\to} f_t - \sum_{\to\square s} f_t\right)$$

$$- A_{s\square}\left(\sum_{s\square\to} f_t - \sum_{\to s\square} f_t\right) + C_s f_s + \bar{c}_s, \quad s \in \ell \qquad (11),$$

b) $f_s . w_s = 0, \qquad s \in \ell,$

c) $f_s \geq 0,\ w_s \geq 0, \qquad s \in \ell.$

Nótese que $s\square\!\to$ es el conjunto de todos los arcos cuyos nodos iniciales son los nodos finales de s, etc. Así sí resolvemos (9) y usamos (9.b) y (9.c) para calcular h_i y p_i, tenemos resuelto (9), y tenemos un equilibrio; inversamente, cualquier solución para (9) deja una solución para (11).

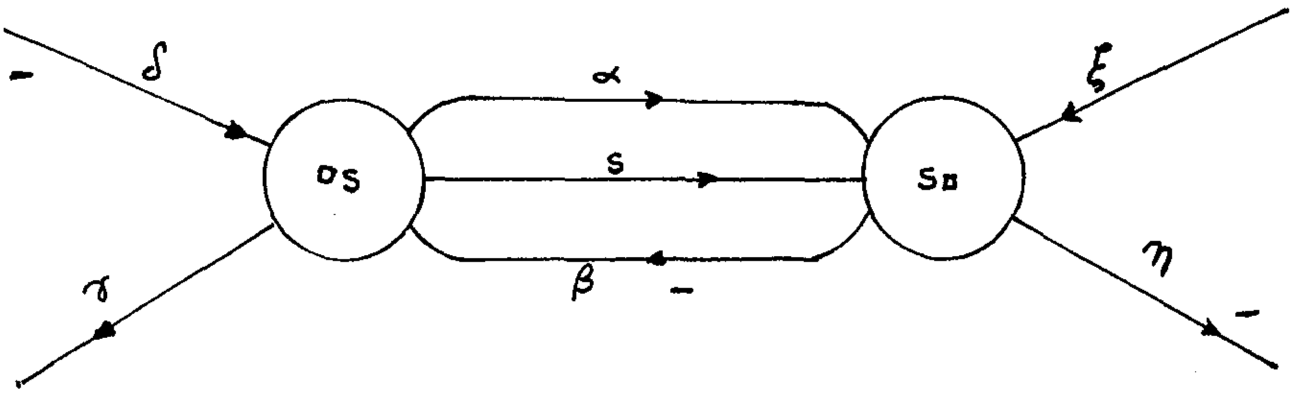
La ecuación (9.a) puede reescribirse como:

$$
\begin{aligned}
w_s = {} & (A_{\square s} + A_{s\square} + C_s)\, f_s \\
& + (A_{\square s} + A_{s\square}) \sum_{\alpha} f_t \; - \; (A_{\square s} + A_{s\square}) \sum_{\beta} f_t \\
& + A_{\square s} \sum_{\gamma} f_t \qquad\qquad - A_{\square s} \sum_{\delta} f_t \qquad\qquad (12) \\
& + A_{s\square} \sum_{\xi} f_t \qquad\qquad - A_{s\square} \sum_{\eta} f_t + c_s^{-}
\end{aligned}
$$

donde:

$\alpha = ((\square s \to) \cap (\to s\square)) \simeq s$, $\beta = (s\square \to) \cap (\to \square s)$,
$\gamma = (\square s \to) \simeq (\to s\square)$, $\delta = (\to \square s) \simeq (s\square \to)$,
$\xi = (\to s\square) \simeq (\square s \to)$, $\eta = (s\square \to) \simeq (\to \square s)$,

Nótese que la lista de conjuntos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ y η son ajenos por pares; el siguiente esquema ilustra la partición



Ahora calculemos el sistema (11) en el problema de complementaridad lineal. Definamos un l_m x l_m una partición de la matríz M = (M_{st}) con s,t = 1, ..., l y M_{st} es una matríz mxn definida por:

$$M_{st} = \text{si} \begin{cases} A_{\square s} + A_{s\square} + C_s & t = s \\ A_{\square s} + A_{s\square} & t \in \alpha \\ -A_{\square s} - A_{s\square} & t \in \beta \\ A_{\square s} & t \in \gamma \\ -A_{\square s} & t \in \delta \\ A_{s\square} & t \in \xi \\ -A_{s\square} & t \in \eta \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Definamos un l_m vector q por ($\bar{c}_1$, ..., $\bar{c}_l$).usando (12) es ahora evidente que la solución de (10) es equivalente a resolver (11).

3.4.-Como ejemplo, consideremos la red de artículos de primera necesidad de la figura 1; tenemos expuesta la matríz (M/q) en la figura 3.

	1	2	3	4	5	
1	$A_1 + A_2 + C_1$	$-A_1 - A_2$	$-A_2$	0	A_2	$\bar{c}_1$
2	$-A_1 - A_2$	$A_1 + A_2 + C_2$	A_2	0	$-A_2$	$\bar{c}_2$
3	$-A_2$	A_2	$A_2+A_3+C_3$	$-A_3$	$-A_2$	$\bar{c}_3$
4	0	0	$-A_3$	$A_3+A_4+C_4$	$-A_4$	$\bar{c}_4$
5	A_2	$-A_2$	$-A_2$	$-A_4$	$A_2+A_4+C_5$	$\bar{c}_5$

Figura 3.

Para cualquier sistema de cargamentos f y exportaciones h que satisfagan la conservación de las ecuaciones, tenemos la igualdad:

$$f.Mf = \sum_{n} h_i.A_ih_i + \sum_{\ell} f_s.C_sf_s$$

Para resolver el problema de complementaridad lineal (10) aplicamos el algoritmo de Dantzig-Cottle al sistema:

$$W - Mf = q$$
$$w \geq 0, \quad f \geq 0, \; wf = 0$$

Ejemplo: Ahora ilustraremos los resultados precedentes por resolución de 2-artículos de primera necesidad del problema de red definida por la gráfica de la figura 1 y los datos de la figura 2. (M,q) se muestra en la figura 4; ver figura 3. El algoritmo de Dantzig-Cottle es aplicado como se describió anteriormente.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0.2353 \\ 0.7059 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2941 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1.5294 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_4 = \begin{pmatrix} 1.0098 \\ 0.2451 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Asi, (p,h,f) es un equilibrio donde los precios p y las exportaciones h son computadas de acuerdo a (1a) y (1c).

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0.2353 \\ -1.5882 \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 1.2941 \\ 1.5882 \end{pmatrix}$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} -0.5196 \\ 0.2451 \end{pmatrix} \qquad h_4 = \begin{pmatrix} -1.0098 \\ -0.2451 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0.7647 \\ 0.8824 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} -1.2941 \\ 0.5882 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1.2353 \\ -1.2745 \end{pmatrix} \qquad p_4 = \begin{pmatrix} 2.4902 \\ 0.0196 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & -3 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 2 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Figura 4.

APENDICE

PROGRAMACION LINEAL Y CUADRATICA.

Consideremos primero programas lineales en la forma simétrica primal dual.

1.1 *Programa lineal primal:* Encontrar un vector x y un mínimo $\bar{z}$ tal que:

$$Ax \geq b, \qquad \mathbf{x} \geq 0, \qquad \bar{z} = cx \tag{15}$$

Programa lineal dual: Encontrar un vector y y un máximo $\underline{z}$ tal que:

$$yA \leq c, \qquad y \geq 0, \qquad \underline{z} = yb \tag{16}$$

El teorema de dualidad de programación lineal establece que min $\bar{z}$ = max $\underline{z}$ donde los sistemas primal y dual (15) y (16), respectivamente, son consistentes, ó en el lenguaje de programación matemática, "factible". Ya que,

$$\underline{z} = yb \leq yAx \leq cx = \bar{z}$$

para todo primal factible $\mathbf{x}$ y, dual factible y, uno busca tales soluciones para las cuales:

$$yb = cx. \tag{17}$$

La desigualdad obligada de los problémas primal y dual pueden ser convertidas a sistemas equivalentes de ecuaciones con variables no negativas por medio de la introducción de variables mudas no negativas. Conjuntamente, los sistemas (15) y (16) son equivalentes para

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} - v = b, &\quad v \geq 0, \quad \mathbf{x} \geq 0, \\ A^t y + u = c, &\quad u \geq 0, \quad y \geq 0, \end{aligned} \qquad (18)$$

y el problema de programación lineal se reduce a encontrar vectores u, v, **x**, y , tal que:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & -A^t \\ v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} u \geq 0, \; v \geq 0 \\ \mathbf{x} \geq 0, \; y \geq 0 \end{matrix} \qquad (19)$$

y, por (17),

$$\mathbf{x}u + yv = 0 \qquad (20)$$

las definiciones

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \; q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} u & -A^t \\ v & 0 \end{bmatrix}, \; z = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{bmatrix} \qquad (21)$$

establecen la correspondencia entre (1),(2) y (15),(16).

1.2 El *problema de programación cuadrática* típicamente se demuestra de la siguiente manera: Encontrar un vector x y un mínimo $\bar{z}$ tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \qquad \mathbf{x} \geq 0, \qquad \bar{z} = c\mathbf{x} + 1/2\, \mathbf{x}D\mathbf{x}. \qquad (22)$$

En esta formulación, la matríz D puede suponerse simétrica. El minimando $\bar{z}$ es una función globalmente convexa de **x** sí y sólo sí la forma cuadrática **xDx** (ó matríz D) es semidefinida positiva, y cuando este es el caso, a (22) se le llama *el problema de programación cuadrática convexa*. Es inmediato que, cuando D es la matríz cero, (22) se reduce a programación lineal (15). En este sentido, los problemas de programación lineal son un caso especial del problema de programación cuadrática.

Para cualquier problema de programación cuadrática (22) definimos u y v por

$$u = D\mathbf{x} - A^T y + c \ , \ v = A\mathbf{x} - b. \qquad (23)$$

Un vector x^0 produce un mínimo $\bar{z}$ sólo si existe un vector y^0 y vectores u^0, v^0 dado por (23) para $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ satisfaciendo

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^0 \geq 0,\ u^0 \geq 0,\ y^0 \geq 0 \text{ y } v^0 \geq 0 \\ \mathbf{x}^0 u^0 = 0,\ y^0 v^0 = 0 \end{gathered} \qquad (24)$$

Estas condiciones necesarias para un mínimo en (22) son consecuencia directa del teorema de H. W. Kuhn y W. Tucker. Es bien conocido y no difícil de probar que desde los primeros inicios que (24), conocidas como las condiciones de Kuhn-Tucker, también son suficientes en el caso de programación cuadrática convexa. Por sustitución diréсta, tenemos para cualquier vector factible **x**,

$$\begin{aligned} \bar{z} - \bar{z}^0 &= c(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + 1/2\ \mathbf{x}D\mathbf{x} - 1/2\ \mathbf{x}^0 D\mathbf{x}^0 \\ &= u^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + y^0(v - v^0) + 1/2\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)D(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \\ &= u^0\mathbf{x} + y^0 v + 1/2\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)D(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \geq 0, \end{aligned}$$

Lo cual prueba, la suficiencia de las condiciónes (24) para un mínimo en el caso convexo.

Así, el problema de resolver un programa cuadrático nos lleva a la búsqueda de una solución del sistema

$$u = Dx - A^T y + c, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0, \tag{25}$$
$$v = Ax - b, \qquad u \geq 0,\ v \geq 0,$$
$$xu + yv = 0. \tag{26}$$

Las definiciones

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},\ q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix},\ z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{27}$$

establecen (25) y (26) como un problema de la forma (1), (2).

Dual de un progama cuadrático convexo. A partir de (27) naturalmente se hace la consideración de la matríz $M = \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & E \end{bmatrix}$ en donde E, como D, son positiva semidefinida.

Programa cuadrático primal: Encontrar *x* y un mínimo $\bar{z}$ tal que:

$$Ax + Ey \geq b, \qquad x \geq 0, \qquad \bar{z} = cx + 1/2\,(xDx + yEy) \qquad (27),$$

tiene asociado el *Programa cuadrático dual:* Encontrar *y* y un máximo $\underline{z}$ tal que

$$-Dx + A^T Y \leq c, \qquad Y \geq 0 \qquad \underline{z} = by - 1/2(xDx - yEy). \tag{29}$$

Todos los resultados de dualidad en programación lineal se extienden a estos problemas, y por supuesto, son conjuntamente resolubles, sí ambos son resolubles. Cuando E = 0 el problema primal es exáctamente (22), para el cual W. S. Dorn estableció por primera vez la teoría de dualidad extendida después por R.W.Cottle. cuando ambas D y E son matrices cero, la pareja dual (28),(29) se reduce a la pareja dual de programas lineales

(15), (16).

Nota.- a) El minimando en (22) es estríctamente convexo sí y sólo sí la forma cuadrática xDx es definida positiva. Cualquier programa cadrático convexo estríctamente factible tiene una única solución minimizante $\mathbf{x}^0$.

(b) Cuando D y E son semidefinidas positiva (el caso de programación cuadrática convexa), esto es:

$$M = \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & E \end{bmatrix} .$$

B I B L I O G R A F I A

[1] Richard W. Cottle and George B. Dantzig
Complementary Pivot Theory of Mathematical Programs, Linear Algebra and Its Aplication, 103-125 (1968)

[2] Richard Asmuth, B. Curtis Eaves and Elmor l. Peterson
Computing Economic Equilibria on Affine Networks with Lemke's Algorithm. Matematics of operations Research Vol. 4 Agosto de 1979.

[3] C. E. Lemke, Bimatrix equilibrium points and Mathemacal programing, management sci. 11 (1965), 681-689.

[4] P. Wolfe, The simplex method for cuadratic programming, econometrica 27 (1959) 382-398.

[5] Graciela Bueno de Arjona
Introducción a la Programación Lineal y al análisis de Sensibilidad.
Editorial Trillas, Primera Edición 1987.