Acta No. 77
Hoja No. 76
Libro No. 01
Exp. No. 8924190-8

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, Mex. siendo las 10:00 horas del día 15 de Julio de 1993, se reunieron en el Aula de Asesorías del Departamento de Matemáticas, Edificio 5 K, de la Universidad de Sonora los señores: Guillermo Dávila R.; Marcelo Aguilar Gonzalez y Rubén Flores Espinoza.

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como secretario el último para efectuar el examen profesional de la carrera de:

Licenciado en Matemáticas

a la señorita: Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox

Después de haber presentado su tesis intitulada: "La Clasificación de las Algebras de Lie Simples sobre los Complejos" la que previamente le fue aprobada por el Jurado, los señores sinodales replicaron a la sustentante y después de debatir entre sí, reservada y libremente la declararon:

Aprobada por unanimidad

acto contínuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente y firman los que han intervenido

Firma de la sustentante

G. Dávila R.
Presidente

M Aguilar G

Rubén Flores

Universidad de Sonora
Departamento de Matemáticas

Tesis

Clasificación de las Algebras de Lie Simples sobre los Complejos

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox

Hermosillo, Sonora, 15 de Julio de 1993

A mis Padres...
Por su apoyo y comprensión.

A mis Hermanos: Eduardo y Jesús
Por contar siempre con su ayuda.

A mis compañeros de Generación.
(incluyendo a los físicos.)

A los Maestros que me ayudaron en mi preparación.
En especial a Carlos A. Robles C. y Guillermo Dávila R.

Al Dr. Marcelo Aguilar G.
Por su apoyo e interés para que
pueda continuar con mi preparación.

Ast. Antonio Sánchez I.
y a toda el Area de Astronomía del C.I.F.U.S.

Contenido

Introducción

1 Algebras de Lie **7**
- 1.1. Algebras de Lie: Definición y Ejemplos 7
- 1.2. Conceptos Básicos 9
- 1.3. El Algebra de Lie Libre 10
  - 1.3.1. El Producto Tensorial 10
  - 1.3.2. El Algebra Tensorial 13
  - 1.3.3. El Algebra Asociativa Libre 14
  - 1.3.4. El Algebra Envolvente Universal de una Algebra de Lie 15
  - 1.3.5. El Algebra de Lie Libre 16
- 1.4. La Representación Adjunta y La Forma de Killing 17
- 1.5. Solubilidad y Nilpotencia 18
- 1.6. Descomposición de Jordan-Chevalley 20
- 1.7. Criterio de Cartan 21
- 1.8. Criterio de Semisimplicidad 22
- 1.9. Representaciones de $sl(2,\mathbb{C})$ 24

2 Sistema de Raíces y Clasificación de los Diagramas de Dynkin **27**
- 2.1. Sistema de Raíces: Definición y Ejemplos 27
- 2.2. Raíces Simples 30
  - 2.2.1. Bases 30
  - 2.2.2. El Grupo de Weyl 33
  - 2.2.3. Sistemas de Raíces Irreducibles 34
- 2.3. Clasificación de los Diagramas de Dynkin 35
  - 2.3.1. Matriz de Cartan 35
  - 2.3.2. Gráficas de Coxeter y Diagramas de Dynkin 36
  - 2.3.3. Componentes Irreducibles 37
  - 2.3.4. Teorema de Clasificación 37
- 2.4. Construcción de Sistemas de Raíces 45

3 Clasificación de las Algebras de Lie Simples sobre los Complejos **47**
- 3.1. Subálgebra Toral 47

3.2. Descomposición de L en Espacios Raíz 48
3.3. Propiedades de las Raíces y de los Espacios Raíz 50
3.4. Teoremas de Isomorfismo 56
3.5. Clasificación de las Algebras de Lie Simples sobre los Complejos 61
3.6. Las Algebras de Lie Clásicas 68

4 Algebras de Lie Simples sobre los Complejos y Grupos Simples **77**
4.1. Grupos de Lie Simples 78
4.1.1. Grupos de Lie 79
4.1.2. El Algebra de Lie de un grupo de Lie 80
4.1.3. Grupos de Lie Conexos 81
4.1.4. Grupos de Lie Simplemente Conexos 83
4.2. Grupos de Tipo Lie 84
4.2.1. Grupos Clásicos 84
4.2.2. Base de Chevalley 87
4.2.3. Grupos de Chevalley 89
4.2.4. La Simplicidad de los Grupos de Chevalley 92
4.2.5. Grupos Finitos Simples de tipo Lie 94

A Teoremas de Conjugación **95**
A.1. Subálgebras de Cartan 95
A.2. Teoremas de Conjugación 97

Bibliografía **103**

Introducción

Lo que nosotros llamamos ahora álgebras de Lie fueron inventadas por Sophus Lie en 1870 e independientemente por Killing en 1880.

Lie estaba buscando desarrollar un método para la solución de ecuaciones diferenciales análoga a la teoría de Galois para ecuaciones algebraicas. Esto lo condujo al problema de clasificar todos los grupos de transformaciones locales de $\mathbb{R}^n$. El descubrió que las transformaciones infinitesimales de este grupo forman una álgebra de Lie.

Killing estaba interesado en el estudio de las geometrías no-euclideanas, motivado por los descubrimientos de Lobachevsky, Riemann, Klein y Newcomb. Esto lo llevó a investigar los fundamentos de la geometría de manera abstracta. El trabajo de Killing en formas espaciales no-euclideanas con tratamiento analítico, es una muestra de ello (ver [17]).

Las formas espaciales pueden ser representadas por variedades continuas en el sentido de Riemann, esto es, por un sistema de n-adas $(x_1, \ldots, x_n)$ de números reales donde x_i varía continuamente.

Al estudiar el comportamiento de movimientos infinitesimales de formas espaciales en donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es enviado a $x + dx = (x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$, Killing encontró que forman un grupo con la composición, el cual puede ser reparametrizado por tres números reales. El espacio tangente en la identidad del espacio paramétrico de este grupo es un espacio vectorial tridimensional de rotaciones "infinitesimales". Similarmente, para un grupo que puede ser parametrizado por una variedad suave de dimensión r, hay un espacio tangente r-dimensional $\mathcal{L}$ en el elemento identidad. Si el producto de dos elementos del grupo es continuo y diferenciable en los parámetros de sus factores, es posible definir una operación binaria en $\mathcal{L}$ con la cual $\mathcal{L}$ es una álgebra de Lie. Esto condujo a plantearse el problema de determinar todas las posibles álgebras de Lie sobre los complejos.

Killing publicó una serie de artículos entre 1888-1890. En el primero de ellos definía conceptos que hoy conocemos como: rango de una álgebra, álgebra semisimple, subálgebra de Cartan, sistema de raíces, α-cadena de β, enteros de Cartan y matriz de Cartan. Dando los fundamentos de la teoría de álgebras de Lie.

En el segundo, Killing da un método de clasificación que consistía en dos pasos:

1.- Encontrar condiciones necesarias en la matriz de Cartan, para clasificar todas las clases de equivalencia de matrices de Cartan en términos de estas condiciones.

2.- Mostrar que cada clase de equivalencia de matrices de Cartan tiene exactamente una álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ asociada.

El primer paso es equivalente a la clasificación de los diagramas de Dynkin. El segundo es más difícil y es aquí donde Killing tiene algunas deficiencias, aunque el resultado es correcto. En la parte final del artículo, Killing muestra la existencia de cinco álgebras de Lie excepcionales.

En 1894, E. Cartan en su tesis doctoral prueba claramente los resultados de Killing, su principal contribución fue en la demostración de la existencia de una subálgebra de Cartan para una álgebra de Lie semisimple. También clasificó las clases de equivalencia de matrices de Cartan irreducibles y mostró que ellas forman cuatro familias infinitas y cinco aisladas.

Cartan probó el teorema verificando que las cuatro familias infinitas de clases de equivalencia de matrices de Cartan provienen de las álgebras de Lie clásicas y construyendo álgebras de Lie simples a cada una de las cinco clases de matrices aisladas.

En 1905, Cartan publica un artículo en el cual clasifica a las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{R}$. La herramienta básica, es el concepto de un subespacio de Cartan $\mathcal{A}$ definido por las propiedades:

1.- Para cada $H \in \mathcal{A}$, $ad\ H$ es una transformación lineal real diagonalizable del álgebra de Lie L.

2.- $\mathcal{A}$ es maximal.

El sistema de raíces correspondiente es más complicado pues dos veces una raíz puede ser, de nuevo, una raíz (ver [16]).

En 1951, Harish-Chandra da una prueba general de la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. La demostración consistió en construirle a una matriz de Cartan arbitraria una álgebra de Lie semisimple cuya matriz de Cartan asociada sea ésta.

Algunos conceptos importantes en la teoría de álgebras de Lie fueron introducidos posteriormente, este es el caso del "grupo adjunto" hoy llamado *representación adjunta* dado por Engel después de 1900.

La importancia de esta clasificación radica en que las álgebras de Lie simples son los bloques fundamentales con los cuales se construyen las álgebras de Lie semisimples (ver sección 1.8). Este hecho, aunado a que algunos conceptos básicos en teoría de álgebras de Lie se definen en la misma forma que en teoría de grupos, llevó a pensar que era posible clasificar los grupos finitos simples (ver capítulo 4).

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos:

- **Capítulo 1:** Se da una breve introducción a las álgebras de Lie; centrándose en las últimas secciones en las álgebras de Lie semisimples.

- **Capítulo 2:** Es independiente de los capítulos restantes y en él se clasifican los diagramas de Dynkin conexos, o equivalentemente, las matrices de Cartan irreducibles.

- **Capítulo 3:** Se clasifican las álgebras de Lie sobre los complejos utilizando el método de Harish-Chandra. Se analizan las álgebras de Lie Clásicas y se prueba que son simples.

- **Capítulo 4:** Se explica como influyó esta clasificación en la clasificación de los grupos finitos simples. En particular, en los grupos de tipo Lie.

Capítulo 1

Algebras de Lie

En este capítulo se resumen los aspectos básicos sobre la teoría de las álgebras de Lie semisimples que nos van a ser útiles para clasificar las álgebras de Lie simples sobre el campo de los números complejos.

En las primeras siete secciones se da una introducción a las álgebras de Lie finito-dimensionales, incluyendo algunos ejemplos como las álgebras de Lie clásicas y teoremas importantes como el de Engels y Criterio de Cartan.

La sección ocho se centra en el estudio de las álgebras de Lie semisimples, dándose una caracterización para éstas y, por último en la sección nueve se analizan las representaciones irreducibles de $sl(2,\mathbb{C})$ las cuáles nos ayudarán a probar teoremas medulares en la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$.

1.1. Algebras de Lie: Definición y Ejemplos

Un espacio vectorial L sobre un campo F, es llamado una **álgebra de Lie** sobre F si está definida una operación $[\bullet,\bullet] : \mathrm{L}\times\mathrm{L} \to \mathrm{L}$ tal que $(x,y) \mapsto [x\ y]$ con las siguientes propiedades:

(i) $[xy]$ es bilineal

(ii) $[xx] = 0$ para todo $x \in \mathrm{L}$

(iii) $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$

Al producto $[xy]$ se le llama **"bracket"** ó **conmutador** de x y y. La propiedad (iii) es denominada **identidad de Jacobi**.

Aplicando las propiedades (i) y (ii) a $[(x+y)(x+y)]$ tenemos

(ii') $[xy] = -[yx]$.

Recíprocamente, si la característica de F es diferente de 2 y tomando $x = y$ en (ii') se sigue (ii). Por lo que si car$F \neq 2$, (ii) es equivalente a (ii').

Sea L una álgebra de Lie sobre F y sea K un subespacio de L. Diremos que K es una **subálgebra** de L si $[xy] \in K$ para todo x, $y \in K$; en particular K es una álgebra de Lie con la operación heredada de L.

A partir de una subálgebra K de L podemos generar otra subálgebra conocida como el **normalizador** de K. Esta subálgebra está definida como

$$N_{\mathrm{L}}(K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathrm{L} | [xK] \subset K\}$$

Otro ejemplo de subálgebra es el **centralizador** de un conjunto X

$$C_{\mathrm{L}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathrm{L} | [xX] = 0\}$$

Todas las álgebras de Lie consideradas en este trabajo serán finito-dimensionales a menos de que se especifique lo contrario.

En los siguientes ejemplos de álgebras de Lie, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (si bien, estos ejemplos tienen sentido sobre un campo F, arbitrario).

- **Ejemplo 0:** Sea L un espacio vectorial. Definimos $[\bullet, \bullet] : \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ como $[xy] \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$ para todo x, $y \in \mathrm{L}$; es fácil comprobar que L es una álgebra de Lie. Una álgebra de Lie con esta operación es llamada **álgebra de Lie abeliana**.

- **Ejemplo 1:** Sea $End\, V = \{T : V \to V | \, T \text{ es lineal}\}$. $End\, V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y un anillo con el producto usual. Definimos el bracket de x y y por $[xy] \stackrel{\mathrm{def}}{=} xy - yx$, con esta operación $End\, V$ es una álgebra de Lie llamada **álgebra general lineal** y es denotada por $gl(V)$. A las subálgebras de $gl(V)$ se les denomina **álgebras de Lie lineales**.

- **Ejemplo 2:** A_l. Sea $\dim V = l+1$ y $sl(V)$, ó $sl(l+1, \mathbb{C})$ el conjunto de endomorfismos de V que tienen traza cero. Como $tr(xy) = tr(yx)$ y $tr(x+y) = tr(x) + tr(y)$, $sl(V)$ es una subálgebra de $gl(V)$, llamada **álgebra especial lineal**.

- **Ejemplo 3:** C_l. Sea $\dim V = 2l$, con base $\{v_1, \ldots, v_{2l}\}$. Definimos una forma f bilineal, antisimétrica y no degenerada en V por la matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$. Denotaremos por $sp(V)$, o $sp(2l, \mathbb{C})$ al conjunto de todos los endomorfismos X de V que satisfacen $(\star) f(X(v), w) = -f(v, X(w))$. $sp(V)$ es un subespacio de $End(V)$. Es fácil probar que $sp(V)$ es cerrado bajo el producto $[\bullet, \bullet]$ definido en $End(V)$. Así $sp(V)$ es una álgebra de Lie, llamada **álgebra simpléctica**. En términos matriciales, y escribiendo X de igual forma que S tenemos que la condición para que $X = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ (m, n, p, $q \in gl(l, \mathbb{C})$) satisfaga $(\star)$ es que $SX = -X^t S$, es decir, $n^t = n$, $p^t = p$ y $m^t = -q$. Esta última condición implica que $tr(X) = 0$.

- **Ejemplo 4:** B_l. Sea $\dim V = 2l + 1$, y sea f una forma bilineal, antisimétrica y no degenerada en V cuya matriz es $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$. El **álgebra ortogonal** $\mathfrak{o}(V)$, o $\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C})$, consiste de todos los endomorfismos de V que satisfacen $f(X(v), w) = -f(v, X(w))$; como el ejemplo anterior, tenemos que $x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}$ satisface la condición $SX = -X^t S$, de donde $a = 0$, $c_1 = -b_2^t$, $c_2 = -b_1^t$, $q = -m^t$, $n^t = -n$, $p^t = -p$. Esto muestra que $tr(X) = 0$.

- **Ejemplo 5:** D_l. Aquí obtenemos otra **álgebra ortogonal**. La construcción es igual a la construcción de B_l excepto que $\dim(V) = 2l$ y $S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$.

Las álgebras A_l, B_l, C_l y D_l ($l \geq 1$) se conocen como **álgebras de Lie clásicas** y se verá en el capítulo 3, su papel tan importante en la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$.

1.2. Conceptos Básicos

Un subespacio I de una álgebra de Lie L es llamado un **ideal** de L si $x \in$ L, $y \in I$ implica que $[xy] \in I$. Por la propiedad (ii'), todo ideal es bilateral: $[\mathrm{L}I] = [I\mathrm{L}]$. El subespacio cero y L son ejemplos de ideales. Otro ejemplo de ideal es el **centro** de L definido como

$$Z(\mathrm{L}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathrm{L} | [xz] = 0 \ \forall x \in \mathrm{L}\} = C_{\mathrm{L}}(\mathrm{L})$$

Si I, J son ideales de L, $I + J = \{x + y | x \in I, \ y \in J\}$ es un ideal. El **álgebra derivada** de L definida como [LL] es un ideal de L.

Al igual que en la teoría de anillos, a través del estudio de los ideales de una álgebra de Lie podemos analizar su estructura; en otras palabras, los ideales en el estudio de las álgebras de Lie desempeñan el mismo papel que los ideales en la teoría de anillos. Si L no tiene ideales excepto a L misma y 0[1]; y además, [LL] $\neq 0$ diremos que L es **simple.** En Particular, si L es simple, $Z(\mathrm{L}) = 0$ y $\mathrm{L} = [\mathrm{LL}]$. Un ejemplo de una álgebra de Lie simple es $\mathrm{L} = sl(2, \mathbb{C})$. La idea de la demostración es considerar un ideal I de $sl(2, \mathbb{C})$ y probar, aplicando las propiedades de la base para $sl(2, \mathbb{C})$ que aparece en la sección 1.4, que $I = sl(2, \mathbb{C})$.

Sea L una álgebra de Lie no simple con dimensión mayor que uno y sea I un ideal propio de L diferente de cero. Definimos al **álgebra de Lie cociente** como el espacio vectorial cociente L/I con la multiplicación $[(x + I)(y + I)] = [xy] + I$. Es fácil probar que la multiplicación no depende de los representantes de clase.

Sean L y L$'$ álgebras de Lie sobre F; un **homomorfismo** ϕ de L en L$'$ es una transformación lineal que respeta el producto, es decir, $\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)]$, $\forall x, y \in \mathrm{L}$. $\phi(\mathrm{L})$ es una subálgebra de L$'$ y el kernel de ϕ es un ideal en L. Si $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$, ϕ es un **endomorfismo.** Un **isomorfismo** es un homomorfismo inyectivo y suprayectivo al mismo tiempo. Un **automorfismo** de L es un isomorfismo de L en sí misma. Como en otras teorías algebraicas, hay una correspondencia entre homomorfismos e ideales; en particular se tiene el equivalente al primer teorema de homomorfismos.

Un tipo especial de función de L en sí misma es la **derivación**. Una derivación de L, es una transformación lineal δ tal que $\delta([ab]) = [a\delta(b)] + [\delta(a)b]$. Un ejemplo, es la representación adjunta que será definida en la sección 1.4.

1.3. El Algebra de Lie Libre

1.3.1. El Producto Tensorial

Sean V y W espacios vectoriales finito-dimensionales sobre un campo K. El producto tensorial de V y W denotado por $V \otimes W$ que consiste de suma de elementos $v \otimes w$, $v \in V$ y $w \in W$, será un espacio vectorial que cumplirá con las siguientes propiedades:

1.- Si v_1, $v_2 \in V$ y $w \in W$, entonces

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$$

[1]Denotaremos por 0 al subespacio $\{0\}$. No habrá confusiones pues según el contexto estará claro cuando es un elemento ó es el subespacio.

2.- Si $w_1,\, w_2 \in W$ y $v \in V$, entonces

$$(w_1 + w_2) \otimes v = w_1 \otimes v + w_2 \otimes v$$

3.- Si $a \in K$, entonces

$$(av) \otimes w = a(v \otimes w) = v \otimes (aw)$$

4.- La propiedad universal: Existe una función bilineal $\phi : V \times W \to V \otimes W$ tal que dado un espacio vectorial U y una función bilineal $\psi : V \times W \to U$, hay una única aplicación lineal $\Phi : V \otimes W \to U$ que satisface $\Phi \circ \phi = \psi$.

$$\begin{tikzcd}
 & V \otimes W \arrow[d, "\Phi"] \\
V \times W \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "\psi = \Phi \circ \phi"'] & U
\end{tikzcd}$$

De la última propiedad se sigue que $V \otimes W$ es único salvo isomorfismos. A continuación, construiremos el espacio vectorial $V \otimes W$.

Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ bases para V y W respectivamente. Definimos $F(V,W)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $V \times W$ con coeficientes en K. Así $F(V,W)$ es un espacio vectorial donde la suma queda definida como:

$$(a_1(v_{a1}, w_{a1}) + a_2(v_{a2}, w_{a2}) + \cdots + a_n(v_{an}, w_{an})) +$$

$$(b_1(v_{b1}, w_{b1}) + b_2(v_{b2}, w_{b2}) + \cdots + b_m(v_{bm}, w_{bm})) =$$

$$a_1(v_{a1}, w_{a1}) + \cdots + a_n(v_{an}, w_{an}) + b_1(v_{b1}, w_{b1}) + \cdots + b_m(v_{bm}, w_{bm})$$

donde

$$a_1(v_{a1}, w_{a1}) + a_2(v_{a2}, w_{a2}) + \cdots + a_n(v_{an}, w_{an}) \text{ y}$$
$$b_1(v_{b1}, w_{b1}) + b_2(v_{b2}, w_{b2}) + \cdots + b_m(v_{bm}, w_{bm}) \in F(V,W)$$

Consideremos ahora el subespacio $R(V,W)$ de $F(V,W)$ generado por los elementos de la forma

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$

$$a(v, w) - (av, w)$$

$$a(v, w) - (v, aw)$$

claramente $R(V, W) \neq F(V, W)$. Tomemos, el espacio cociente $F(V, W)/R(V, W)$. Probaremos que $F(V, W)/R(V, W)$ es el producto tensorial $V \otimes W$.

Sean $(v_1 + v_2, w)$, $(av, w) \in F(V, W)/R(V, W)$. La clase de $(v_1 + v_2, w)$ es la misma que la de $(v_1, w) + (v_2, w)$ pues

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \in R(V, W)$$

de la misma forma, la clase de (av, w) es la de $a(v, w)$.

De esta manera, si denotamos por $v \otimes w$ a la clase de (v, w) y por $V \otimes W$ a $F(V, W)/R(V, W)$ se tiene que

1.- $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

2.- $(w_1 + w_2) \otimes v = w_1 \otimes v + w_2 \otimes v$

3.- $(av) \otimes w = a(v \otimes w) = v \otimes (aw)$

La dimensión de $F(V, W)/R(V, W)$ está dada por $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$. Una base para $V \otimes W$ es $\{v_i \otimes w_j\}$ $(0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq m)$. En efecto, sea $v \otimes w \in V \otimes W$, v y w son de la forma: $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, $w = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$, por lo que

$$v \otimes w = (\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \otimes \sum_{j=1}^{m} b_j w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j (v_i \otimes w_j)$$

así $\{v_i \otimes w_j\}$ genera a $V \otimes W$. La demostración de que son linealmente independientes es inmediata de la construcción de $F(V, W)/R(V, W)$.

Además, la función $\phi : V \times W \to V \otimes W$ tal que $(v, w) \mapsto (v \otimes w)$ es bilineal.

Sea U un espacio vectorial sobre K con base $\{u_{11}, \ldots, u_{lp}\}$ y $\psi : V \times W \to U$ una transformación bilineal. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $(v_i, w_j) \overset{\psi}{\mapsto} u_{ij}$. De álgebra lineal sabemos que existe una única aplicación bilineal $\Phi : V \otimes W \to U$ tal que

$$\Phi(v_i \otimes w_j) = u_{ij}$$

pero

$$u_{ij} = \psi(v_i, w_j)$$

así

$$\Phi(v_i \otimes w_j) = \Phi(\phi(v_i, w_j)) = \psi(v_i, w_j)$$

Con esto, concluimos que efectivamente, $F(V, W)/R(V, W)$ es el producto tensorial de V y W.

Un aspecto importante es que $V \otimes W$ es isomorfo a $W \otimes V$. Más aún, el producto tensorial es asociativo, es decir, $V \otimes (W \otimes U)$ es isomorfo a $(V \otimes W) \otimes U$.

1.3.2. El Algebra Tensorial

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita. Denotaremos por $T_r(V)$ el producto tensorial $V \otimes \ldots \otimes V$ r-veces; $r \geq 1$ y $T_0(V) = K$. Los elementos de $T_r(V)$ son llamados tensores de grado r.

Definimos

$$\pounds(V) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} T_i(V) \qquad (\textit{suma directa})$$

(los elementos de $\pounds(V)$ son combinaciones lineales finitas sobre K de elementos de $T_i(V)$). $\pounds(V)$ es una álgebra asociativa, graduada, con 1, donde el producto es: si $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k \in T_k(V)$ y $w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_m \in T_m(V)$, entonces

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in T_{k+m}(V)$$

y $c1 \otimes v = cv$ para $v \in T_k(V)$.

$\pounds(V)$ es llamada **el álgebra tensorial** en V y cumple con la siguiente propiedad universal: dada una aplicación lineal $\phi : V \to \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ álgebra asociativa con 1 sobre K), existe un único homomorfismo de K-álgebras $\psi : \pounds(V) \to \mathcal{U}$ tal que $\psi(1) = 1$ y $\psi \circ i = \phi$, i es la inclusión de V en $\pounds(V)$.

$$\begin{tikzcd} & \pounds(V) \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\phi = \psi \circ i"'] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

1.3.3. El Algebra Asociativa Libre

Sea X un conjunto no vacío. Por una **álgebra asociativa libre** sobre K generada por X, entenderemos una álgebra asociativa $\mathcal{U}$ sobre K tal que

1.- X genera a $\mathcal{U}$

2.- Si $\mathcal{B}$ es una álgebra asociativa sobre K y $\phi : X \to \mathcal{B}$ es una transformación, entonces hay un único homomorfismo $\eta : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ tal que $\eta \circ i = \phi$, donde i es la inclusión de X en $\mathcal{U}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U} \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\phi = \eta \circ i"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son álgebras asociativas libres sobre K generadas por X, por un argumento estándar basado en la propiedad universal (2), tenemos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son isomorfas.

Ahora probaremos la existencia del álgebra asociativa libre generada por X.

Sea V el espacio vectorial sobre K generado por X y $\pounds(V)$ su álgebra tensorial. $\pounds(V)$ es una álgebra asociativa sobre K, generada por X y claramente cumple la propiedad (2).

1.3.4. El Algebra Envolvente Universal de una Algebra de Lie

En esta y en la próxima subsección, F denotará un campo de característica cero y L una álgebra de Lie sobre F de dimensión arbitraria.

El álgebra envolvente universal de L es la pareja $(\mathcal{U}, \pi)$, donde $\mathcal{U}$ es una álgebra asociativa con uno sobre F y $\pi : \mathrm{L} \to \mathcal{U}$ es una función lineal tal que

$$\pi([xy]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x) \quad \forall x, y \in \mathrm{L} \tag{1.3.1}$$

y cumple con la propiedad universal: dada una álgebra asociativa $\mathcal{U}'$ con uno y una transformación lineal $\eta : \mathrm{L} \to \mathcal{U}'$ que satisface (1.3.1), existe un único homomorfismo $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ (envía el 1 en el 1) tal que $\phi \circ \pi = \eta$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U} \arrow[d, "\phi"] \\
\mathrm{L} \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "\eta = \phi \circ \pi"'] & \mathcal{U}'
\end{tikzcd}$$

La unicidad de $(\mathcal{U}, \pi)$ se sigue de la propiedad anterior. Probaremos su existencia.

Sea $\pounds(\mathrm{L})$ el álgebra tensorial en L y J el ideal de $\pounds(\mathrm{L})$ generado por los elementos $U_{x,y} = x \otimes y - y \otimes x - [xy]$ (x, $y \in \mathrm{L}$). Como $U_{x,y} \in T_1 \oplus T_2$ es claro que J es un ideal propio de $\pounds(\mathrm{L})$, por lo que podemos definir el álgebra cociente $\mathcal{U}(\mathrm{L}) = \pounds(\mathrm{L})/J$; sea $\gamma : \pounds(\mathrm{L}) \to \mathcal{U}(\mathrm{L})$ el homomorfismo canónico.

Afirmación: $(\mathcal{U}(\mathrm{L}), \pi)$ es una álgebra envolvente de L, donde $\pi : \mathrm{L} \to \mathcal{U}(\mathrm{L})$ es la restricción de γ a L.

En efecto: Tomemos a $\eta : \mathrm{L} \to \mathcal{U}'$ como en la definición. La propiedad universal de $\pounds(V)$ produce un homomorfismo $\phi' : \pounds(V) \to \mathcal{U}'$, el cuál es una extensión de η y envía el uno en el uno. La condición (1.3.1) de η obliga a que $U_{x,y} \in \ker \phi'$, pues

$$\phi'(U_{x,y}) = \phi'(x \otimes y) - \phi'(y \otimes x) - \phi'([xy])$$

$$= \phi'(x)\phi'(y) - \phi'(y)\phi'(x) - \phi'([xy])$$

pero, $\phi'([xy]) = \eta([xy])$ por lo que

$$\phi'(U_{x,y}) = 0$$

De esta manera, ϕ' induce un homomorfismo $\phi : \mathcal{U}(\mathrm{L}) \to \mathcal{U}'$ tal que $\phi \circ \pi = \eta$.

1.3.5. El Algebra de Lie Libre

Sea X un conjunto no vacío. Una **álgebra de Lie libre** sobre F generada por X es, una álgebra de Lie L sobre F tal que:

1.- $X \subset \mathrm{L}$

2.- X genera a L, es decir, L es la más pequeña álgebra de Lie que lo contiene.

3.- Dada una transformación $\phi : X \to M$, con M una álgebra de Lie, existe un único homomorfismo $\psi : \mathrm{L} \to M$ que extiende a ϕ.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{L} \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\phi = \psi \circ i"'] & M \end{tikzcd}$$

La unicidad de L (salvo isomorfismos) es fácil de probar a partir de (3).

Para demostrar su existencia, consideremos a ß el álgebra asociativa libre sobre F generada por X. Para $u, v \in$ ß sea $[uv] = u \otimes v - v \otimes u$. De esta manera, ß con $[\bullet, \bullet]$ es una álgebra de Lie y la denotaremos por $ß_{\mathrm{L}}$. Así L es la más pequeña subálgebra de $ß_{\mathrm{L}}$ que contiene a X.

Dada una aplicación $\phi : X \to M$, ϕ puede ser extendido a una transformación lineal de $V \to M \subset \mathcal{U}(M)$, V es el espacio vectorial generado por X. Entonces hay un homomorfismo de F-álgebras asociativas $£(V) \to \mathcal{U}(M)$, ó restringiéndolo a L, tenemos un homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathrm{L} \to M$.

1.4. La Representación Adjunta y La Forma de Killing

La **adjunta** $ad : \mathrm{L} \to gl(\mathrm{L})$ se define como $ad\ x(y) = [xy]\ \forall y \in \mathrm{L}$ y $x \in \mathrm{L}$; $ad\ x$ es claramente una derivación. En algunas ocasiones $ad\ x$ no actúa en toda L si no en un subconjunto K de L, por lo que para evitar confusiones $ad_{\mathrm{L}}x$ (ó $ad_K x$) indicará que $ad\ x$ está actuando en L (ó K). La adjunta desempeñará un papel muy importante a lo largo de este trabajo.

Una **representación** de una álgebra de Lie L es un homomorfismo $\phi : \mathrm{L} \to gl(V)$, V es un espacio vectorial sobre F. Un ejemplo de representación es precisamente la adjunta, llamada por esta razón **representación adjunta**. En efecto, como el bracket es bilineal, se tiene que ad es una transformación lineal y es tal que respeta el producto:

$$\begin{aligned}
[ad\,x, ad\,y] &= ad\,x\ ad\,y(z) - ad\,y\ ad\,x(z) \\
&= ad\,x([yz]) - ad\,y([xz]) = [x[yz]] - [y[xz]] \\
&= [x[yz]] + [[xz]y] = [[xy]z] \\
&= ad\,[xy](z)
\end{aligned}$$

Decimos que $ad\ x$ es **nilpotente** si $(ad\ x)^k = 0$ para algún k natural. Supongamos que $x \in \mathrm{L}$ es tal que $ad\ x$ es nilpotente. De esta forma, la serie de potencias de la función exponencial para $ad\ x$ sobre $\mathbb{C}$ tiene sentido ya que tiene un número finito de términos:

$$\exp(ad\ x) = 1 + ad\ x + \frac{(ad\ x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(ad\ x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$\exp(ad\ x)$ es un automorfismo de L.

La representación ϕ es **irreducible** si 0 y V son los únicos subespacios de V los cuales son invariantes bajo todas las transformaciones lineales $\phi(x)$, $x \in \mathrm{L}$. Dos representaciones ϕ_i, $i = 1, 2$ de L en V_i son **equivalentes** si existe un isomorfismo lineal ϵ de V_1 en V_2 tal que

$$\epsilon\phi_1(x)\epsilon^{-1} = \phi_2(x) \qquad\qquad (\forall x \in \mathrm{L})$$

y denotaremos esto por $\phi_1 \sim \phi_2$. $\sim$ es una relación de equivalencia.

A partir de la representación adjunta podemos definir la **forma de Killing** $\mathcal{K}$ en L como:

$$\mathcal{K}(x, y) = tr(ad\,x \circ ad\,y)$$

$\mathcal{K}$ es una forma bilineal y simétrica en L. Además $\mathcal{K}$ es **asociativa** en el sentido de que $\mathcal{K}([xy], z) = \mathcal{K}(x, [yz])$; esto se sigue del hecho de que para endomorfismos x, y, z de un espacio vectorial se tiene $[xy]z = xyz - yzx$, $x[yz] = xyz - xzy$ y $tr(y(xz)) = tr((xz)y)$.

Otra propiedad de $\mathcal{K}$ es su invarianza bajo automorfismos, es decir

$$\mathcal{K}(\alpha(x), \alpha(y)) = \mathcal{K}(x, y)$$

donde α es un automorfismo de L y $x, y \in$ L. Esta propiedad se sigue de la relación: $ad\,\alpha(x) = \alpha \circ ad\,x \circ \alpha^{-1}$ (notemos que $ad\,\alpha(x)(y) = [\alpha(x)y] = \alpha([x, \alpha^{-1}(y)])$) y de que $tr(xy) = tr(yx)$.

Ejemplo: Consideremos $sl(2, \mathbb{C})$. Una base para esta álgebra es

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $X = ax + bh + cy$ un elemento de $sl(2, \mathbb{C})$. De los brackets entre los vectores base, encontramos las siguientes expresiones matriciales

$$ad\,h : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad ad\,x : \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ad\,y : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, $\mathcal{K}$ tiene matriz

$$\mathcal{K} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\mathcal{K}(X, X) = 8(b^2 + ac)$$

Diremos que $\mathcal{K}$ es **no degenerada** o **no singular** si su **radical** S es $\{0\}$, donde

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathrm{L} | \mathcal{K}(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathrm{L}\}$$

S es siempre un ideal de L. En el ejemplo anterior, claramente $\mathcal{K}$ es no degenerada, pues su determinante es -128.

1.5. Solubilidad y Nilpotencia

De aquí en adelante L será una álgebra de Lie sobre un campo F de característica cero y algebraicamente cerrado.

Consideremos la sucesión de ideales de L definidos como $L^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{L}$, $L^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{LL}]$, $L^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} [L^{(1)}L^{(1)}], \ldots, L^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} [L^{(k-1)}L^{(k-1)}]$. Diremos que L es soluble si $L^{(n)} = 0$ para algún entero positivo n. Un ejemplo de álgebra soluble, es el álgebra abeliana. Si L es simple, entonces L es no-soluble.

Un resultado que nos va a permitir definir a una álgebra de Lie semisimple es el siguiente:

Proposición 1.5.1: a) Si L es soluble entonces todas las subálgebras e imágenes homomórficas de L lo son.

b) Si I es un ideal soluble de L tal que L/I es soluble, entonces L es soluble

c) Si I, J son ideales solubles de L, entonces $I + J$ es soluble.

Dem.- Ver [7].

El inciso c) de la proposición anterior muestra que L tiene un único ideal soluble maximal $S = rad\, \text{L}$, llamado el **radical** de L. Una álgebra de Lie es **semisimple** si su radical es cero y su dimensión es mayor que cero. Por ejemplo una *álgebra simple* es *semisimple.*

Para definir una álgebra de Lie nilpotente consideremos primero la sucesión de ideales $L^0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{L}$, $L^1 \stackrel{\text{def}}{=} [\text{LL}]$, $L^2 \stackrel{\text{def}}{=} [\text{L}L^1], \ldots, L^i \stackrel{\text{def}}{=} [\text{L}L^{i-1}]$, L es **nilpotente** si $L^n = 0$ para algún entero positivo n. Una álgebra abeliana es nilpotente. Claramente $L^{(i)} \subset L^i$ para todo i, así toda álgebra nilpotente es soluble.

De la condición de nilpotencia se deduce que $(ad\ x)^n = 0$ para todo $x \in \text{L}$. Diremos que $x \in \text{L}$ es **ad-nilpotente** si $ad\ x$ es un endomorfismo nilpotente.

Un teorema muy importante en la teoría de álgebras de Lie es el **teorema de Engels**. Este teorema nos da una caracterización para las álgebras nilpotentes, pero para probarlo necesitaremos de la siguiente

Proposición 1.5.2: Sea L una álgebra de Lie, ϕ una representación nilpotente de L en un espacio vectorial V diferente de cero, sobre F. Entonces existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $\phi(x)v = 0$ $(x \in \text{L})$.

Dem.- Sea $\text{L}' = \phi(\text{L})$. L' es una subálgebra de $gl(V)$ que consiste de endomorfismos nilpotentes. Así para demostrar el teorema sólo basta ver que dada L una subálgebra de $gl(V)$ cuyos elementos son nilpotentes, entonces existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $L.v = 0$.

Usaremos inducción en $\dim L$. El caso de $\dim L = 1$ es claro pues una transformación lineal nilpotente siempre tiene al menos un eigenvector diferente de cero correspondiente a su único eigenvalor 0. Supongamos que $K \neq L$ es alguna subálgebra de L. K actúa, vía ad, como una álgebra de Lie de transformaciones lineales nilpotentes en el espacio vectorial L (en general, la imagen homomórfica de una álgebra nilpotente es nilpotente), de aquí que también en el espacio vectorial L/K. Como $\dim K < \dim L$, la hipótesis de inducción garantiza que existe un vector $x + K \neq K$ en L/K tal que $[yx] \in K$ para todo $y \in K$. En otras palabras, K está propiamente contenida en $N_L(K)$.

Tomemos ahora a K como la subálgebra maximal contenida propiamente en L. Por el argumento anterior tenemos que $N_L(K) = L$, es decir, K es un ideal de L. Si $\dim L/K > 1$, entonces la imagen inversa en L de una subálgebra uno-dimensional de L/K (la cual siempre existe) deberá estar propiamente contenida en K lo cual es absurdo; así K tiene co-dimensión uno. Esto implica que $L = K + Fz$ para $z \in L - K$.

Por inducción, $W = \{v \in V | K.v = 0\} \neq 0$. El endomorfismo z (actuando ahora en el subespacio W) tiene un eigenvector $v \in W$ diferente de cero tal que $z.v = 0$. Por lo tanto $L.v = 0$. □

Como consecuencias del teorema anterior tenemos que si L es nilpotente y K un ideal de L, $K \neq 0$, entonces $Z(\mathrm{L}) \neq 0$ y $K \cap Z(\mathrm{L}) \neq 0$. Esta última parte resulta de considerar a L actuando sobre K vía la representación adjunta.

Teorema de Engels: Si todos los elementos de L son ad-nilpotentes, entonces L es nilpotente.

Dem.- Como todos los elementos de L son ad-nilpotentes, $ad\,\mathrm{L} \subset gl(\mathrm{L})$ satisface la hipótesis de la proposición anterior por lo que existe $x \neq 0$ en L para el cual $[\mathrm{L}x] = 0$, es decir, $Z(\mathrm{L}) \neq 0$. Consideremos ahora a $\mathrm{L}/Z(\mathrm{L})$. Es claro que esta álgebra consiste de elementos ad-nilpotentes y tiene dimensión menor que L. Aplicando inducción en $\dim \mathrm{L}$, encontramos que $\mathrm{L}/Z(\mathrm{L})$ es nilpotente. Así $L^n \subset Z(\mathrm{L})$ para algún n y $L^{n+1} = [\mathrm{L}, L^n] \subset [\mathrm{L}, Z(\mathrm{L})] = 0$, por lo tanto L es nilpotente. □

1.6. Descomposición de Jordan-Chevalley

En esta sección recordaremos algunos resultados importantes de álgebra lineal y, aunque se sale del contexto, serán de gran utilidad en secciones posteriores. En especial, se usará en la demostración del criterio de Cartan para álgebras nilpotentes y, como consecuencia, en el criterio para álgebras semisimples.

Sea V un espacio vectorial finito dimensional sobre un campo F, algebraicamente cerrado, y $T : V \to V$ una transformación lineal. Llamaremos a T **nilpotente** si existe $n \in N$ para el cual $T^n = 0$. Diremos que T es **diagonalizable** o **semisimple** cuando exista una base de V tal que a T le corresponde una matriz diagonal. Observemos que la suma de dos transformaciones semisimples (nilpotentes) que conmutan es semisimple (nilpotente).

La siguiente proposición nos mostrará que es posible descomponer una transformación $T \in End(V)$ en la suma de dos transformaciones $T = T_s + T_n$ tales que T_s es **semisimple** y T_n es **nilpotente**. A esta descomposición se le conoce como **descomposición de Jordan-Chevalley**.

Proposición 1.6.1: Sean V y T como antes, entonces:

1.- Existen T_s y $T_n \in End(V)$, únicos, tales que $T = T_s + T_n$, T_s es semisimple y T_n es nilpotente y $T_sT_n = T_nT_s$. Decimos que T_s es la parte semisimple de T y T_n la parte nilpotente.

2.- Existen polinomios $p(\lambda)$, $q(\lambda) \in K[\lambda]$, sin término constante, tales que $T_s = p(T)$ y $T_n = q(T)$. En particular, tanto T_s como T_n conmutan con toda transformación lineal de V que conmuta con T.

3.- Si $U \subset W \subset V$ son subespacios vectoriales tales que $T(W) \subset U$, entonces $T_s(W) \subset U$ y $T_n(W) \subset U$.

La demostración de esta proposición se encuentra en [13]. Como se recordará, toda transformación lineal T de un espacio vectorial finito dimensional sobre un campo algebraicamente cerrado se puede llevar a su forma canónica de Jordan. La expresión matricial de T consiste en suma de bloques que tienen como diagonal a $(c, \ldots, c)$, $c \in F$, unos justamente arriba de la diagonal y ceros en las otras entradas. De aquí que T es la suma de una matriz diagonal con una matriz nilpotente, las cuales conmutan.

Ahora vamos a ver lo que sucede con $ad\ T$. Es fácil de verificar que $ad\ T_s$, $ad\ T_n$ son semisimple y nilpotente respectivamente, y conmutan: $[ad\, T_s, ad\, T_n] = ad[T_s, T_n] = 0$. Aplicando la parte 1) de la proposición anterior, tenemos que la descomposición de Jordan-Chevalley para $ad\ T$ es $ad\, T_s + ad\, T_n$ (para más detalle ver [7, pág.18]).

1.7. Criterio de Cartan

El propósito de esta sección es dar un criterio para solubilidad de una álgebra de Lie L, a partir de la forma de Killing. Este criterio se establece analizando la forma de Killing para el operador adjunta. Empezaremos con el siguiente resultado:

Lema 1.7.1: Sean A, B dos subespacios de $gl(V)$, $\dim V < \infty$. Sea $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in gl(V) | [x, B] \subset A\}$ y supongamos que $tr(xy) = 0$ para todo $y \in M$. Entonces x es nilpotente.

Dem.- Daremos una idea de la demostración, que se encuentra con más detalle en [7]. Sea $x = s + n$ ($s = x_s$ y $n = x_n$) la descomposición de Jordan-Chevalley y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V tal que s tiene como matriz diagonal a $(a_1, \ldots, a_m)$. Sea E el subespacio vectorial del campo F sobre el campo $\mathbb{Q}$ generado por los eigenvalores $a_1, \ldots, a_m$. Hay que probar que $s = 0$, o equivalentemente, que $E = 0$. como E tiene dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$, es suficiente mostrar que $E^* = 0$, es decir, que cualquier función lineal $f : E \longrightarrow \mathbb{Q}$ es cero. □

Criterio de Cartan: Sea L una subálgebra de $gl(V)$, V finito dimensional. Supongamos que $tr(xy) = 0$ para todo $x \in$ [LL], $y \in$ L. Entonces L es soluble.

Dem.- De la definición de solubilidad se tiene que si [LL] es nilpotente, entonces es soluble por lo que bastará probar que [LL] es nilpotente. Para esto, apliquemos el lema anterior a la siguiente situación: V como está dado, $A =$ [LL], $B =$ L; así L $\subset M = \{x \in gl(V) | [x, \mathrm{L}] \subset [\mathrm{LL}]\}$. Por hipótesis, sabemos que $tr(xy) = 0$ para $x \in$ [LL], $y \in$ L; pero para poder concluir que $x \in$ [LL] es nilpotente, necesitamos extender la hipótesis para $y \in M$. Sea $[xy]$ un generador de [LL], si $z \in M$ entonces $tr([xy]z) = tr(x[yz]) = tr([yz]x)$. Por definición de M, $[yz] \in$ [LL], lo que implica que $tr([xy]z) = 0$. □

En general si L es una álgebra de Lie, con $\mathcal{K} = tr(ad\, x \circ ad\, y) = 0$ para todo $x \in$ [LL], $y \in$ L entonces, aplicando el teorema anterior a la representación adjunta tenemos que ad L es soluble. Como $\ker ad = Z(\mathrm{L})$ es soluble, por la proposición 1.5.1, L es soluble.

1.8. Criterio de Semisimplicidad

La parte central del trabajo estará enfocada al estudio de álgebras de Lie simples y semisimples, por lo que será muy conveniente tener un criterio que nos permita saber cuando una álgebra de Lie es semisimple de una manera más sencilla que aplicar la definición.

Teorema 1.8.1: Sea L una álgebra de Lie sobre F. L es semisimple si y sólo si su forma de Killing es no degenerada.

Dem.- Supongamos que $S = rad\,\mathrm{L} \neq 0$. Sea $p \geq 0$ tal que $A = S^p \neq 0$ pero $S^{p+1} = 0$. Así A es un ideal de L (esto se prueba por inducción sobre p y aplicando la identidad de

Jacobi) y claramente es abaliano. Para $x \in A$ y $y \in$ L,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(x,y) &= tr(ad\,x \circ ad\,y)\\ &= tr((ad\,x \circ ad\,y)|A)\end{aligned}$$

pues $ad\,x \circ ad\,y(\mathrm{L}) \subset A$. Por otro lado, como A es abeliano $[x,[y,z]] = 0$ $(x, z \in A,\ y \in \mathrm{L})$ se sigue que $(ad\,x \circ ad\,y)|A = 0$. Esto muestra que $\mathcal{K}(x,y) = 0$ $(x \in A,\ y \in \mathrm{L})$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{K}(\bullet,\bullet)$ es singular. Sea $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathrm{L},\ \mathcal{K}(x,y) = 0\ \forall y \in L\}$. $M \neq 0$ es un ideal de L. Si x, $y \in M$, entonces $(ad\,x\ ad\,y)(\mathrm{L}) \subset M$, así

$$tr(ad\,x\ \ ad\,y) = tr(ad_M x\ \ ad_M y) = 0$$

lo que implica que M es una álgebra de Lie con forma de Killing igual a cero. Por el criterio de Cartan M es soluble, así $rad\,L \neq 0$ probando que L no es semisimple. □

Una aplicación inmediata del teorema anterior es que $sl(2,\mathbb{C})$ es semisimple; ya que como se vió en la sección 1.4 su forma de Killing es no degenerada.

De los criterios de Cartan y de semisimplicidad, se deduce un corolario importante. Pero antes de enunciarlo necesitamos de la siguiente definición: Una álgebra de Lie L es la **suma directa** de ideales $I_1, \ldots, I_t$ si $\mathrm{L} = I_1 + \cdots + I_t$ como suma directa de subespacios vectoriales y L está generada por las álgebras de Lie I_i con el producto de Lie definido componente a componenete.

Corolario 1.8.2: Una álgebra de Lie L es semisimple si y sólo si es suma directa de álgebras de Lie simples.

Dem.- Sea I un ideal de L distinto de cero. Entonces $I^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathrm{L} | \mathcal{K}(x,y) = 0\ \forall y \in I\}$ es un ideal, por la asociatividad de $\mathcal{K}$. La no singularidad de $\mathcal{K}$ implica que $\dim I + \dim I^{\perp} = \dim \mathrm{L}$, es decir, $I \cap I^{\perp} = 0$ por lo que $\mathrm{L} = I + I^{\perp}$. Aplicando inducción en $\dim \mathrm{L}$ se obtiene la descomposición de L en ideales simples.

El otro sentido de la demostración es claro pues, la suma directa de álgebras de Lie semisimples es semisimple. □

Este corolario muestra que las álgebras de Lie simples son bloques fundamentales con los cuales se construyen las álgebras de Lie semisimples.

Introduciremos ahora la **descomposición abstracta de Jordan** para una álgebra de Lie semisimple L arbitraria. Para esto observemos que si δ es una derivación de L, hay un único $x \in \mathrm{L}$ tal que $\delta = ad\,x$; de hecho se tiene la siguiente

Proposición 1.8.3: Sea *Der* L el conjunto de todas las derivaciones de una álgebra de Lie semisimple L. Entonces ad L $=$ *Der* L.

Dem.- Como L es semisimple, $Z(\mathrm{L}) = 0$, por lo que $\mathrm{L} \to ad\,\mathrm{L}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie. Del teorema 1.8.1 tenemos que $M = ad\,\mathrm{L}$ tiene forma de Killing no degenerada. Por otra parte, si $D = Der\,\mathrm{L}$ entonces $[D, M] \subset M$, pues $[\delta, ad\ x] = ad\ (\delta x)$, $x \in \mathrm{L}$, $\delta \in Der\,\mathrm{L}$, es decir, M es un ideal de D. Así la forma de Killing $\mathcal{K}_M$ es la restricción de la forma de Killing $\mathcal{K}_D$ de D a $M \times M$ (en general, si W es un subespacio de un espacio vectorial finito dimensional V y ϕ es un endomorfismo de V tal que $\phi(V) = W$, entonces $tr\ \phi = tr\ (\phi|_W)$). Consideremos ahora el subespacio I de D ortogonal a M bajo $\mathcal{K}_D$, $I \cap M = 0$; pero ambos son ideales de D por lo que $[I, M] = 0$. En particular, esto implica que $ad\ (\delta x) = 0\ \forall x \in \mathrm{L}$ y $\delta \in I$, de donde $\delta x = 0$ $(x \in \mathrm{L})$ ya que ad es uno-a-uno, obligando a que $\delta = 0$. Por lo tanto, $I = 0$ y $Der\,\mathrm{L} = M = ad\,\mathrm{L}$. □

Como *Der* L contiene la parte simple y nilpotente de todos sus elementos (ver [7]), se sigue que x determina en forma única los elementos s, $n \in \mathrm{L}$ tales que $ad\ x = ad\ s + ad\ n$ es la usual descomposición de Jordan para $ad\ x$. Esto significa que $x = s + n$ con $[s, n] = 0$. A la descomposición $x = s + n$ se le conoce como la descomposición abstracta de Jordan para x. A s y n se les llama **semisimple** y **nilpotente** respectivamente.

Si L es una álgebra de Lie semisimple lineal, la descomposición de Jordan coincide con la descomposición abstracta de Jordan. Para mayor detalle consultar [7, pág.29].

1.9. Representaciones de $sl(2, \mathbb{C})$

En toda esta sección, L denota al álgebra $sl(2, \mathbb{C})$. El estudio de las representaciones irreducibles de L nos va a permitir obtener algunas propiedades muy importantes para la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$.

Como se recordará de la sección 1.4, una base para $sl(2, \mathbb{C})$ es

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuando las operaciones necesarias, se encuentran las siguientes relaciones:

$$[h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y, \qquad [x, y] = h.$$

Ahora determinaremos las representaciones irreducibles de L. Para esto necesitaremos el siguiente

Lema 1.9.1: Sea $n \geq 0$ un entero. Entonces tenemos las siguientes identidades:

$$xy^{n+1} = y^{n+1}x + (n+1)y^n(h - nI)$$

$$yx^{n+1} = x^{n+1}y - (n+1)x^n(h + nI)$$

Dem.- La prueba es por inducción en n. Para $n = 0$ es claro, pues $h = xy - yx$. Asumiremos que las identidades son válidas para $n > 0$. Como $hy = y(h - 2I)$, se sigue que

$$\begin{aligned} xy^{n+2} &= (y^{n+1}x + (n+1)y^n(h-n))y \\ &= y^{n+2}x + y^{n+1}h + (n+1)y^{n+1}(h - n - 2) \\ &= y^{n+2}x + (n+2)y^{n+1}(h - n - 1) \end{aligned}$$

La segunda identidad se demuestra análogamente. □

Teorema 1.9.2: Sea ϕ una representación irreducible de L en un espacio vectorial complejo finito dimensional V. Entonces $\phi(\mathrm{L})$ es semisimple, sus eigenvalores son enteros y de multiplicidad uno. Más aún, hay un entero $j \geq 0$ y una base $\{v_0, \ldots, v_j\}$ de V tal que

$$\begin{array}{llll} & \phi(h)v_p = (j-2p)v_p & & (p = 0, 1, \ldots, j) \\ (1.9.1) & \phi(x)v_0 = 0, & \phi(x)v_p = p(j-p+1)v_{p-1} & (p = 1, \ldots, j) \\ & \phi(y)v_j = 0, & \phi(y)v_p = v_{p+1} & (p = 1, \ldots, j-1) \end{array}$$

Recíprocamente, sea $j \geq 0$ algún entero. Hay exactamente una clase de equivalencia de representaciones irreducibles de L con dimensión $j+1$, las relaciones anteriores defininen un miembro de esta clase. Finalmente, cada una de estas representaciones es equivalente a su negativo, es decir, $\phi \sim -\phi$.

Dem.- Para $\lambda \in \mathbb{C}$, denotaremos V_λ al subespacio de $\phi(h)$ correspondiente al eigenvalor λ. Si λ no es un eigenvalor, entonces $V_\lambda = 0$. Como $[\phi(h), \phi(x)] = 2\phi(x)$ y $[\phi(h), \phi(y)] = -2\phi(y)$, se tiene que

$$\phi(x)[V_\lambda] \subset V_{\lambda+2} \qquad\qquad \phi(y)[V_\lambda] \subset V_{\lambda-2}$$

por lo que es posible encontrar un eigenvalor j de $\phi(h)$ tal que $j+2$ no es un eigenvalor. Tomemos ahora el eigenvector $v_0 \neq 0$ correspondiente al eigenvalor j,

$$\phi(h)v_0 = jv_0 \qquad\qquad \phi(x)v_0 = 0.$$

Sea

$$v_s = \phi(y)^s v_0 \qquad\qquad (s = 0, 1, \ldots)$$

así $\phi(h)v_s = (j-2s)v_s$. Como el número de eigenvalores de $\phi(h)$ es finito, podemos encontrar un $s \geq 1$ tal que $v_s = 0$. Sea $m \geq 0$ tal que $v_p \neq 0$ $(0 \leq p \leq m)$ y $v_{m+1} = 0$. Los vectores v_p son linealmente independientes pues son eigenvectores de $\phi(h)$ para distintos eigenvalores.

Del lema anterior tenemos que para $0 \leq p \leq m$,

$$\phi(x)v_p = \phi(xy^p)v_0 = p(j-p+1)v_{p-1}$$

así el subespacio $\sum_{0\leq p\leq m} \mathbb{C}\ v_p$ es invariante bajo $\phi(h)$, $\phi(x)$ y $\phi(y)$.Por la irreducibilidad de ϕ, se sigue que

$$V = \sum_{0\leq p\leq m} \mathbb{C}\ v_p$$

Por otro lado, $v_{m+1} = \phi(y)^{m+1}v_0 = 0$, de donde $0 = \phi(xy^{m+1})v_0 = (m+1)(j-m)v_m$; lo que implica que $j = m$. De las relaciones anteriores se deduce que $\dim V = j+1$ y que $\phi(h)$ es semisimple.

Recíprocamente, sean $j \geq 0$ un entero y V el espacio vectorial complejo de dimensión $j+1$. Escojemos una base para V $\{v_0, \ldots, v_j\}$ y definimos los endomorfismo $\phi(h)$, $\phi(x)$ y $\phi(y)$ por (1.9.1). Realizando los cálculos correspondientes se demuestra que la función $a_1h + a_2x + a_3y \mapsto a_1\phi(h) + a_2\phi(x) + a_3\phi(y)$ (a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{C}$) es una representación de L en V y además es irreducible. En efecto, si $W \neq 0$ es un subespacio invariante de V, tenemos que su invarianza bajo $\phi(h)$ implica que W está generado por los v_p que contiene. Si s es el más pequeño de los enteros $q \geq 0$ para los cuales $v_q \in W$, entonces s es cero, pues en caso contrario, $\phi(x)v_s$ es un múltiplo diferente de cero de v_{s-1} y se encuentra en W, mostrando que $v_{s-1} \in W$. Así $v_0 \in W$. Pero entonces $v_p = \phi(y)^p v_0 \in W$ para $0 \leq p \leq j$. Por lo tanto $W = V$.

De esta forma, para cada $j \geq 0$, tenemos una única clase de equivalencia de representaciones irreducibles de L, con dimensión $j+1$. □

Supongamos que ϵ no es irreducible, entonces existe un subespacio W de V invariante bajo ϵ. Claramente el subespacio V/W también es invariante bajo ϵ, de esta forma podemos considerar a ϵ como la suma directa de representaciones ϵ_{Ji} $(i = 1, 2)$ donde $\epsilon_{J1} = \epsilon(W)$ y $\epsilon_{J2} = \epsilon(V/W)$; $|J1 - J2|$ es impar pues $\dim L = 3$. Supongamos además que ϵ es tal que todos los eigenvalores de $\epsilon(h)$ son de multiplicidad uno. Sea ϕ la representación irreducible correspondiente a $J1 \geq 0$; por el teorema anterior $\phi(h)$ tiene eigenvalores $J1$, $J1-2, \ldots, -J1$ (para el caso de $J2$ se hace lo mismo) por lo que existen dos eigenvalores de $\epsilon(h)$ tales que su diferencia es impar. Esto se resume de la siguiente forma:

Corolario 1.9.3: Sea ϵ una representación de L en un espacio vectorial complejo finito dimensional. Supongamos que todos los eigenvalores de $\epsilon(h)$ son de multiplicidad uno y que la diferencia entre dos eigenvalores de $\epsilon(h)$ es par. Entonces ϵ es irreducible. □

Los eigenvalores de $\phi(h)$ son llamados **pesos** de ϕ y los eigenespacios son denominados **espacios peso**. Si $\dim \phi = j+1$, j es el **máximo peso** de ϕ.

Capítulo 2

Sistema de Raíces y Clasificación de los Diagramas de Dynkin

El objetivo de este capítulo es la clasificación de los diagramas de Dynkin conexos. Mostraremos que a cada sistema de raíces le corresponde un único diagrama de Dynkin (salvo isomorfismo) y a cada diagrama de Dynkin conexo le corresponde un sistema de raíces.

Para esto, estaremos considerando un espacio euclideano E, es decir, un espacio vectorial finito dimensional sobre $\boldsymbol{R}$ con producto interior usual $(\bullet, \bullet)$. Definimos una **reflexión** σ en E como una transformación lineal invertible que deja fijo a un hiperplano $\mathcal{P}_\sigma$ y que envía a cualquier vector ortogonal a $\mathcal{P}_\sigma$ en su negativo. Algo que se puede probar fácilmente es que una reflexión respeta el producto interior, es decir, $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, α, $\beta \in E$.

Un vector α determina una reflexión σ_α con hiperplano de reflexión

$$\mathcal{P}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\beta \in E : (\beta, \alpha) = 0\}$$

por medio de la transformación

$$\sigma_\alpha = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Es claro que vectores diferentes de cero y proporcionales a α, dan lugar a la misma reflexión. Para abreviar notación utilizaremos $\langle \beta, \alpha \rangle$ en lugar de $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

2.1. Sistema de Raíces: Definición y Ejemplos

Definición: Un subconjunto Φ de E es llamado un **sistema de raíces** en E si cumple los siguientes axiomas:
(R1) Φ es finito, genera a E y no contiene al $0 \in E$.

(R2) Si $\alpha \in E$, los únicos múltiplos de α en Φ son $\pm\alpha$.
(R3) Si $\alpha \in E$, la reflexión σ_α deja a Φ invariante.
(R4) Si $\alpha, \beta \in E$, entonces $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

De (R2) y (R3) se sigue que $\Phi = -\Phi$. Algunas veces (R2) es omitido y lo que nosotros llamamos un sistema de raíces es referido como un sistema reducido de raíces.

Sea Φ un sistema de raíces en E. Denotamos por W al subgrupo de $GL(E)$ generado por las reflexiones σ_α ($\alpha \in \Phi$). Por (R3), W permuta los elementos de Φ, por lo que podemos considerar a W como un subgrupo del grupo simétrico de Φ, como consecuencia, W es finito. A W se le llama el **Grupo de Weyl** de Φ.

En algunas ocasiones resultará útil trabajar con el **dual** ó **inverso** de Φ

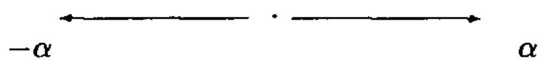
$$\Phi^v \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha^v \mid \alpha \in \Phi\}$$

donde $\alpha^v = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$. Φ^v es también un sistema de raíces en E.

Ejemplos:

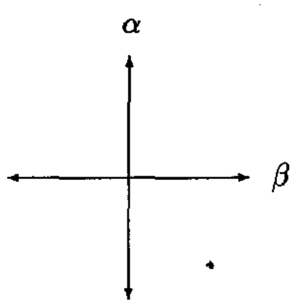
La dimensión de E se llama el **rango** de Φ. Cuando $n \leq 2$, el sistema de raíces Φ puede representarse gráficamente. Si $n = 1$ existe una única posibilidad para Φ:

(A_1)

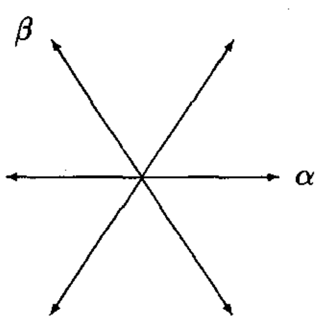


En el caso $n = 2$, existen más posibilidades:

($A_1 \times A_1$)



(A_2)



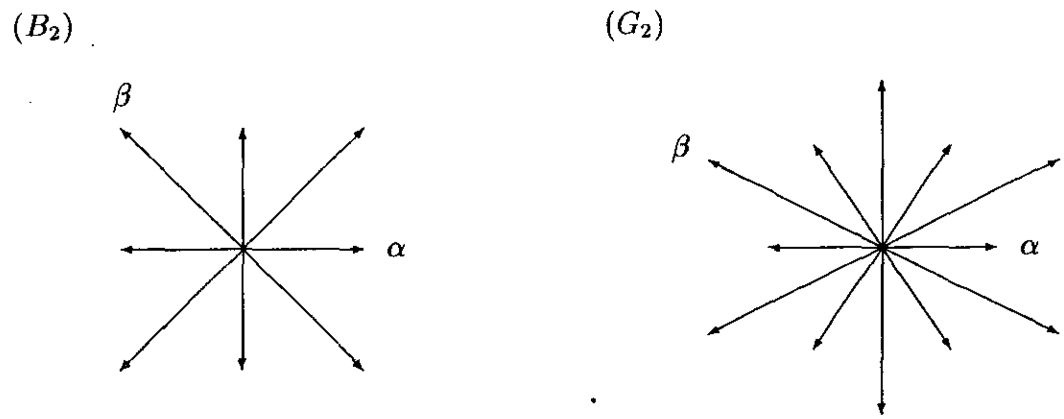


FIG. 2.1.2

es fácil ver que efectivamente estos ejemplos son sistemas de raíces. Más aún, como mostraremos a continuación, son los únicos sistemas de raíces posibles para el plano.

El axioma (R4) limita los posibles ángulos entre las raíces, ya que el ángulo entre dos raíces α, β viene dado por $\| \alpha \| \| \beta \| \cos\theta = (\alpha, \beta)$, y como $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\theta$ se sigue que $\langle \alpha, \beta\rangle\langle \beta, \alpha\rangle = 4\cos^2\theta$, pero $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, así $\langle \alpha, \beta\rangle\langle \beta, \alpha\rangle$ tienen el mismo signo, por lo que las únicas posibilidades cuando $\alpha \neq^{+}_{-} \beta$ y $\| \beta \| \geq \| \alpha \|$ son:

Tabla 2.1.2

$\langle \alpha, \beta\rangle$	$\langle \beta, \alpha\rangle$	θ	$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	no determinado
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

de esta forma, los únicos sistemas de raíces posibles para $n = 2$ son los que aparecen en la fig. 2.1.2.

El siguiente lema, nos dará un criterio útil sobre el comportamiento de la suma de raíces.

Lema 2.1.1: Sean α, β raíces no proporcionales. Si $(\alpha, \beta) > 0$ (i.e. si el ángulo entre α y β es acutángulo), entonces $\alpha - \beta$ es una raíz. Si $(\alpha, \beta) < 0$, entonces $\alpha + \beta$ es una raíz.

Dem.- La segunda parte del lema se sigue de la primera (sustituyendo $-\beta$ en lugar de β).

(α, β) es positivo si y sólo si $\langle \alpha, \beta \rangle$ lo es. De la Tabla 2.1.2 se sigue que $\langle \alpha, \beta \rangle$ ó $\langle \beta, \alpha \rangle$ es igual a 1. Si $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, entonces $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ por R(3); similarmente, si $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, entonces $\beta - \alpha \in \Phi$, de donde $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$. □

2.2. Raíces Simples

En esta sección Φ denota un sistema de raíces de rango n en un espacio euclideano E, con grupo de Weyl W.

2.2.1. Bases

Definición: Un subconjunto Δ de Φ es llamado una **base** si:
(B1) Δ es una base de E
(B2) Cada raíz β puede ser escrita como $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ con coeficientes k_α enteros, todos positivos o todos negativos.

Las raíces en Δ son llamadas **simples**. De B(1) se sigue que la card$\Delta = n$, y la representación para $\beta \in \Phi$ es única. Si todos los $k_\alpha \geq 0$ (ó todas las $k_\alpha \leq 0$) decimos que β es positiva (negativa); esto lo escribimos como $\beta \succ 0$ $(\beta \prec 0)$. La colección de todas las raíces positivas y negativas (relativas a Δ) las denotaremos por Φ^+ y Φ^-, respectivamente. Claramente $\Phi^+ = -\Phi^-$. Definimos la **altura** de una raíz (relativa a Δ) por $ht(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$

En los ejemplos de la fig. 2.1.2 las raíces α, β forman una base. Sin embargo, hasta ahora no hemos garantizado la existencia de una base para un sistema de raíces dado.

Teorema 2.2.1: Φ tiene una base.

La demostración se hará por construcción y para ello requeriremos del

Lema 2.2.2: Si Δ es una base de Φ, y $(\alpha, \beta) \leq 0$ para $\alpha \neq \beta$ en Δ, entonces $\alpha - \beta$ no es raíz.

Dem.- Este resultado se obtiene aplicando el Lema 2.1.1. □

y de las siguientes definiciones. Para cada vector $\gamma \in E$ definimos $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi | (\gamma, \alpha) > 0\}$ igual al conjunto de todas las raíces que se encuentran en el lado "positivo" del hiperplano ortogonal a γ. Sabemos de la geometría euclideana que la unión finita de hiperplanos $\mathcal{P}_\alpha(\alpha \in$

Φ) no cubren a E. Llamaremos a $\gamma \in E$ **regular** si $\gamma \in E - \cup_{\alpha \in \Phi} \mathcal{P}_\alpha$ y **singular** en el otro caso. Cuando γ es regular, se tiene que $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$. Diremos que $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ es **compuesto** si $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ para $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$, y **no compuesto** en el otro caso. Lo anterior es suficiente para probar el siguiente.

Teorema 2.2.3: Sea $\gamma \in E$, regular. Entonces el conjunto $\Delta(\gamma)$ de todas las raíces no compuestas en $\Phi^+(\gamma)$ es una base para Φ, y cada base es obtenida de esta forma.

Dem.-Esta prueba se hará por pasos.

1.- *Cada raíz en $\Phi^+(\gamma)$ es una combinación lineal entera no negativa de elementos en $\Delta(\gamma)$.*

Supongamos que algún $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ no puede ser escrito de esta manera y escojamos a α tal que (γ, α) sea mínimo. Como α no puede estar en $\Delta(\gamma)$, se tiene que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ ($\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$), de donde $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$. Pero, cada $(\gamma, \beta_i) > 0$, así β_1 y β_2 son una combinación lineal entera de $\Delta(\gamma)$ (pues (γ, α) es mínimo), de donde α también lo es. Contradicción.

2.- *Si $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$, entonces $(\alpha, \beta) \leq 0$ excepto cuando $\alpha = \beta$.*

Supongamos que $\alpha - \beta$ es una raíz (lema 2.1.1), como $\beta \neq -\alpha$ se sigue que $\alpha - \beta$ ó $\beta - \alpha$ está en $\Phi^+(\gamma)$. En el primer caso, $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, lo que implica que α es compuesto; en el segundo caso $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ es compuesto. Contradicción.

3.- *$\Delta(\gamma)$ es un conjunto linealmente independiente.*

Supongamos que $\sum r_\alpha \alpha = 0$ ($\alpha \in \Delta(\gamma)$, $r_\alpha \in \mathbb{R}$). Separamos los índices α para los cuales $r_\alpha > 0$ de aquellos en que $r_\alpha < 0$. Reescribiendo, tenemos que $\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$ ($s_\alpha, t_\beta > 0$). Sea $\epsilon = \sum s_\alpha \alpha$, entonces $(\epsilon, \epsilon) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$ por el paso (2), de donde $\epsilon = 0$. Luego, $0 = (\gamma, \epsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$, lo que implica que todos los s_α son cero. Similarmente, todos los t_β son cero.

4.- *$\Delta(\gamma)$ es una base de Φ.*

Como $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$, (B2) se satisface por (1), lo cual implica que $\Delta(\gamma)$ genera a E; esto junto con (3) produce (B1).

5.- *Cada base Δ de Φ es de la forma $\Delta(\gamma)$ para algún $\gamma \in E$ regular.*

Dada Δ, escogemos $\gamma \in E$ tal que $(\gamma, \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta$. Por (B2) γ es regular y $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$, $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ por lo que $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$, y esto implica que $\Delta \subset \Delta(\gamma)$ pues Δ consiste de elementos no compuestos, pero $card \Delta = card \Delta(\gamma) = n$, así $\Delta = \Delta(\gamma)$. $\square$

Como ya habíamos visto, los hiperplanos $\mathcal{P}_\alpha$ ($\alpha \in \Phi$) dividen a E en un número finito de regiones. Las componentes conexas de $E - \cup_\alpha \mathcal{P}_\alpha$ son llamadas **cámaras de Weyl**, y se denotan por $\mathcal{C}(\gamma)$. Decimos que $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$ si γ, γ' se encuentran del "mismo lado de cada" hiperplano $\mathcal{P}_\alpha$ ($\alpha \in \Phi$), es decir, $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$, o $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Esto muestra que las cámaras de Weyl están en correspondencia 1-1 con las bases de Φ. Escribimos $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(\gamma)$ si $\Delta = \Delta(\gamma)$; $\mathcal{C}(\Delta)$ es llamada **cámara fundamental de Weyl relativa a** Δ. $\mathcal{C}(\Delta)$ es un conjunto conexo abierto consistente de todos los $\gamma \in E$ que satisfacen $(\gamma, \alpha) > 0$ ($\alpha \in \Delta$). En la fig. 2.2.1 se muestran las seis cámaras de Weyl y la cámara fundamental de Weyl relativa a la base $\{\alpha, \beta\}$ de A_2.

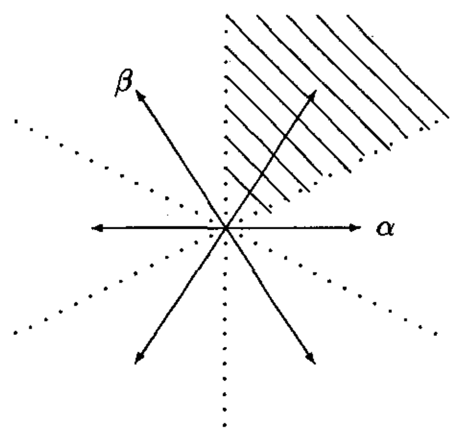


FIG. 2.2.1

El resto del capítulo lo centraremos en el estudio de las raíces simples, por lo que necesitaremos saber más sobre su comportamiento. Los siguientes resultados nos ayudarán en este sentido.

Lema 2.2.4: Si α es positiva pero no es simple, entonces $\beta - \alpha$ es una raíz (necesariamente positiva) para algún $\beta \in \Delta$.

Lema 2.2.5: Sea α simple. Entonces σ_α permuta a todas las raíces positivas en otras distintas de α.

Las demostraciones de los lemas anteriores se obtienen al aplicar el teorema 2.2.3 y el lema 2.1.1 (la demostración detallada se encuentra en [7]).

Corolario 2.2.6: Cada $\beta \in \Phi^+$ puede ser escrita como $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ ($\alpha_i \in \Delta$, no necesariamente distintas); en particular cada suma parcial $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ es una raíz.

La demostración se sigue del lema 2.2.4 y de aplicar inducción en $ht(\beta)$. $\square$

2.2.2. El Grupo de Weyl

El siguiente teorema nos mostrará cómo está formado el grupo de Weyl y cómo actúa en las bases.

Teorema 2.2.7: Sea Δ una base para Φ.

1.- Si $\gamma \in E$, γ regular, existe $\sigma \in W$ tal que $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \dot{\Delta}$ (W actúa transitivamente en cámaras de Weyl).

2.- Si Δ' es otra base de Φ, entonces $\sigma(\Delta') = \Delta$ para algún $\sigma \in W$ (W actúa transitivamente en bases).

3.- Si α es alguna raíz, existe $\sigma \in W$ tal que $\sigma(\alpha) \in \Delta$.

4.- W es generado por σ_α $(\alpha \in \Delta)$.

5.- Si $\sigma(\Delta) = \Delta, \sigma \in W$, entonces $\sigma = 1$.

Dem.- Sea W' el subgrupo de W generado por todas las reflexiones simples σ_α $(\alpha \in \Delta)$. Probaremos (1)-(3) para W', y después mostraremos que $W'=W$.

1.- Sea $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \succ 0} \alpha$. Escogemos $\sigma \in W'$ tal que $(\sigma(\gamma), \delta)$ sea lo más grande posible. Para $\alpha \in \Delta$, $\sigma_\alpha\sigma \in W'$. De esta forma, $(\sigma(\gamma), \delta) > (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$ (esto se sigue del lema 2.2.5 y de la elección de σ). Por lo que $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta$.

2.- Sea Δ' una base de Φ. $\Delta' = \Delta'(\gamma)$ para algún γ regular. Por (1), existe $\sigma \in W'$ tal que $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta$; lo que implica que $\Delta = \Delta(\sigma(\gamma))$, es decir, $\sigma(\Delta') = \Delta$.

3.- Por (2), es suficiente probar que cada raíz pertenece a una base. Como las únicas raíces proporcionales a α son $\pm\alpha$, los hiperplanos $\mathcal{P}_\beta$ $(\beta \neq \pm \alpha)$ son distintos de $\mathcal{P}_\alpha$. Esto implica la existencia de $\gamma \in \mathcal{P}_\alpha$ tal que $\gamma \in \mathcal{P}_\beta$; $\forall \beta \in \Delta - \{\pm\alpha\}$. Escogemos ahora, γ' lo suficientemente cerca de γ tal que $(\sigma', \alpha) = \epsilon > 0$ y $|(\sigma', \beta)| > \epsilon$, $\forall \beta \in \Delta - \{\pm\alpha\}$. Así α pertenece a la base $\Delta(\gamma')$.

4.- Para probar que $W'=W$, es suficiente mostrar que cada reflexión σ_α $(\alpha \in \Phi)$ está en W'. Por (3), podemos encontrar $\sigma \in W'$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta \in \Delta$. De esta manera, $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ (esta última igualdad se obtiene al desarrollar $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta))$ y de observar que envía a $\sigma(\alpha)$ en $-\sigma(\alpha)$), de donde $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in W'$.

5.- Sea $\sigma(\Delta) = \Delta$, pero $\sigma \neq 1$. Si σ es escrito como el producto de reflexiones simples, $\sigma = \sigma_{\alpha 1} \cdots \sigma_{\alpha t}$, t lo más pequeño posible, entonces $\sigma(\alpha_t) \prec 0$. Lo cual es una contradicción. $\square$

2.2.3. Sistemas de Raíces Irreducibles

Definición: Decimos que Φ es **irreducible** si no puede ser dividido en dos subconjuntos propios tal que cada raíz en uno sea ortogonal con respecto a $(\bullet, \bullet)$, a cada raíz en el otro.

Ejemplos:

- A_1, A_2, B_2, G_2 son irreducibles
- $A_1 \times A_1$ no lo es.

Teorema 2.2.8: Sea Δ una base de Φ. Φ es irreducible si y sólo si Δ no puede ser dividido en el sentido de la definición anterior.

Dem.- Sea Φ irreducible, pero $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ con $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Por el teorema 2.2.7, para cada raíz α existe $\sigma \in W$ tal que $\sigma(\alpha) \in \Delta$. A $\sigma(\alpha)$ le llamaremos el conjugado de α. De esta manera $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ donde Φ_i $i = 1, 2$ es el conjunto de las raíces que tienen un conjugado en Δ_i.

$\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$. En efecto, sea $\beta \in \Phi_1$, entonces existen $\sigma'' \in W$ y $\alpha \in \Delta_1$ tal que $\sigma''(\alpha) = \beta$. Probaremos que $\beta \notin \Phi_2$.

Supongamos que existe $\sigma' \in W$ y $\alpha' \in \Delta_2$ tal que $\sigma'(\alpha') = \beta$, o equivalentemente, supongamos que existe $\sigma \in W$ tal que $\sigma(\alpha') = \alpha$. Por el teorema anterior $\sigma = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2} \ldots \sigma_{\alpha_j}$ donde $\alpha_i \in \Delta$, por otro lado, es fácil probar que si $(\alpha, \beta) = 0$ entonces $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_\beta \sigma_\alpha$, así

$$\sigma = \sigma_{\beta_1} \ldots \sigma_{\beta_k} \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_l}$$

donde $\beta_i \in \Delta_2$ y $\alpha_i \in \Delta_1$. Esto implica que

$$\sigma(\alpha') = \sigma_{\beta_1} \ldots \sigma_{\beta_k}(\alpha')$$

y de la fórmula para una reflexión se sigue que α es una combinación lineal de elementos de Δ_2. Esto es una contradicción. De esta forma, Φ_i se encuentra en el subespacio E_i de E generado por Δ_i, de donde $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Esto obliga a que $\Phi_1 = \emptyset$ ó $\Phi_2 = \Phi$, lo que implica que $\Delta_1 = \emptyset$ ó $\Delta_2 = \Phi$.

Recíprocamente, sea $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ con $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. A menos que Δ esté contenida completamente en Φ_1 ó Φ_2, esto induce una partición similar de Δ lo cual no es posible por hipótesis; si $\Delta \subset \Phi_1$ implica que $(\Delta, \Phi_2) = 0$ o $(E, \Phi_2) = 0$ pues Δ genera a E, así $\Phi_2 = \emptyset$. $\square$

2.3. Clasificación de los Diagramas de Dynkin

En esta sección Φ denota un sistema de raíces de rango n, W el grupo de Weyl y Δ una base de Φ.

2.3.1. Matriz de Cartan

Definición: Sea $r \geq 1$ un entero, y $A = (a_{ij})$ una matriz $r \times r$. Decimos que A es una **matriz de Cartan** si cumple las siguientes condiciones:

1.- a_{ij} es un entero para todo i, j; $a_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$, $a_{ii} = 2$ para todo i; $a_{ij} = 0$ si y sólo si $a_{ji} = 0$

2.- $\det(A) \neq 0$

3.- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ y sea s_i un endomorfismo de V tal que $s_i v_j = v_j - a_{ij} v_i$ $(1 \leq i, j \leq r)$. Entonces $s_1, \ldots, s_r$ generan un subgrupo de $GL(V)$.

a r se le conoce como el **rango** de A.

$A' = (a'_{pq})$ se dice que es **equivalente** a $A = (a_{ij})$ si tienen el mismo rango y si hay una permutación $i \mapsto i'$ de $\{1, \ldots, r\}$ tal que $a_{ij} = a'_{i'j'}$, $1 \leq i, j \leq r$. Algo que no es difícil de probar es que ésta es una relación de equivalencia. Una matriz de Cartan $A = (a_{ij})$ de rango r se dice que es **reducible** si podemos encontrar una partición de $\{1, \ldots, r\}$ en dos conjuntos no vacíos S_1 y S_2 tal que $a_{ij} = 0$ para $i \in S_1$ y $j \in S_2$; en caso contrario A se dice ser **irreducible**. Si dos matrices de Cartan son equivalentes y una de ellas es irreducible, la otra también lo es.

Para el caso de Φ, sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un ordenamiento de las raíces simples. La matriz $A = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ claramente es una matriz de Cartan donde los endomorfismos s_i son precisamente las reflexiones σ_{α_i}, y el rango de A coincide con el rango de Φ, por lo que es no singular. Llamaremos a sus entradas **enteros de Cartan**. La matriz de Cartan de un sistema de raíces es irreducible si y sólo si el sistema de raíces es irreducible. En efecto: Si la matriz de Cartan es irreducible, entonces por definición, no existen dos subconjuntos no vacíos S_1 y S_2 de $\{1, \ldots, r\}$ tales que $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ para $i \in S_1$ y $j \in S_2$. Esto implica que no existen Δ_1, $\Delta_2 \subset \Delta$, $\Delta_1 \neq \emptyset \neq \Delta_2$ tales que $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$, por lo que Φ es irreducible. Recíprocamente, si el sistema de raíces es irreducible, obliga a que no existe dos subconjuntos no vacíos S_1 y S_2 de $\{1, \ldots, r\}$ tales que $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ para $i \in S_1$ y $j \in S_2$.

Ejemplos:

Para los sistemas de rango 2, las matrices de Cartan son:

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de Cartan depende de la elección del ordenamiento. Pero esto, no es trascendente; ya que al modificarlo, únicamente se intercambia a A en una matriz equivalente.

La parte importante es que la matriz de Cartan es independiente de la elección de la base, gracias al teorema 2.2.7. La matriz de Cartan caracteriza a Φ salvo isomorfismos.

Proposición 2.3.1: Sea $\Phi' \subset E'$ con base $\Delta' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$. Si $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ para $1 \leq i,j \leq n$, entonces la biyección $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ se extiende en forma única a un isomorfismo $\phi : E \to E'$ que envía a Φ en Φ' tal que $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$.

Dem.- Sea Δ (resp. Δ') una base de E (resp. E'). Hay un único isomorfismo $\phi : E \to E'$ tal que $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ $(1 \leq i \leq l)$. Si α, $\beta \in \Delta$, tenemos que $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \sigma_{\alpha'}(\beta') = \phi(\sigma_\alpha(\beta))$. Como los respectivos grupos de Weyl W, W' son generados por reflexiones simples, se sigue que la transformación $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ es un isomorfismo de W en W', el cual envía a σ_α en $\sigma_{\phi(\alpha)}$ $(\alpha \in \Delta)$. Por otro lado, cada $\beta \in \Phi$ es conjugada bajo W a una raíz simple, es decir, $\beta = \sigma(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta)$. Así $\phi(\beta) = (\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha)) \in \Phi'$. Esto implica que ϕ transforma a Φ en Φ'; de la fórmula de reflexión, se sigue que Φ preserva los enteros de Cartan. $\square$

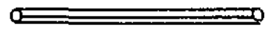
Esta proposición muestra que es posible recobrar Φ a partir de los enteros de Cartan.

2.3.2. Gráficas de Coxeter y Diagramas de Dynkin

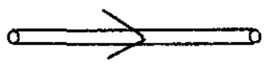
Si α, β son raíces positivas distintas, sabemos de la sección 2.1 que $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0$, 1, 2 ó 3. Definimos la **Gráfica de Coxeter** de Φ como una gráfica que tiene n vértices, y el i-ésimo punto está unido al j-ésimo punto $(i \neq j)$ por $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ líneas.

Ejemplos:

- $A_1 \times A_1$ $\qquad \circ \qquad\qquad \circ$

- A_2 
- B_2 
- G_2 

La gráfica de Coxeter determina los números $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ si todas las raíces tienen la misma longitud pues $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$. En caso de que las raíces tengan longitud distinta, (ejemplo, B_2 o G_2) la gráfica no señala cual es la mas corta y cual la larga, en estos casos podemos colocar una flecha apuntando a la más corta de las dos raíces. Esta información nos permitirá recobrar los enteros de Cartan. A la figura resultante la llamaremos **Diagrama de Dynkin** de Φ. Por ejemplo

- B_2 
- G_2 

2.3.3. Componentes Irreducibles

De la gráfica de Coxeter, se tiene que Φ es irreducible si y sólo si su gráfica de Coxeter es conexa (esto se prueba directamente de las definiciones). En general, el número de componentes conexas de la gráfica de Coxeter corresponden a una partición de Δ en subconjuntos mutuamente ortogonales. Sea $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_t$ la partición correspondiente de Δ y E_i el subespacio generado por Δ_i, así $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$. De esta manera, las raíces que son combinaciones lineales enteras de Δ_i (Φ_i) claramente forman un sistema de raíces en E_i cuyo grupo de Weyl es la restricción a E_i de el subgrupo de W generado por todas las reflexiones $\sigma_\alpha(\alpha \in \Delta_i)$. Finalmente, cada E_i es W-invariante por lo que cada raíz se encuentra en uno de los E_i, es decir, $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_t$.

Lo anterior se resume en la siguiente proposición

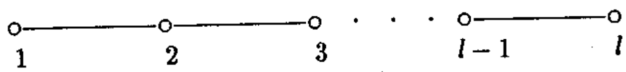
Proposición 2.3.2: Φ se descompone en forma única como la unión de sistemas irreducibles de raíces Φ_i tales que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ donde E_i es un subespacio de E, generado por Φ_i. □

2.3.4. Teorema de Clasificación

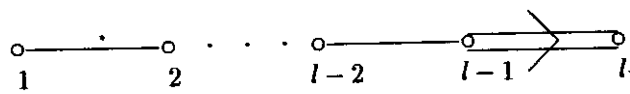
La proposición anterior muestra que es suficiente clasificar los sistemas irreducibles de raíces, *o equivalentemente los diagramas de Dynkin conexos.*

Teorema 2.3.3: Si Φ es un sistema irreducible de raíces de rango l, su diagrama de Dynkin es uno de los siguientes (l vértices en cada caso):

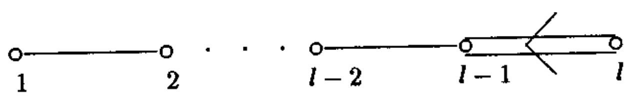
A_l $(l \geq 1)$:



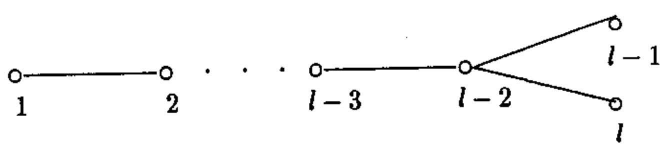
B_l $(l \geq 2)$:



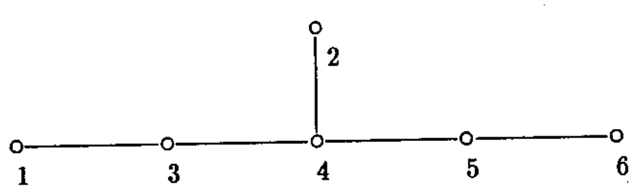
C_l $(l \geq 3)$:



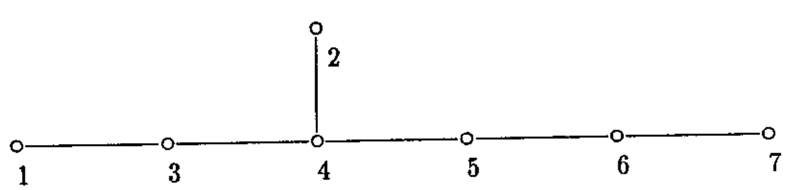
D_l $(l \geq 4)$:



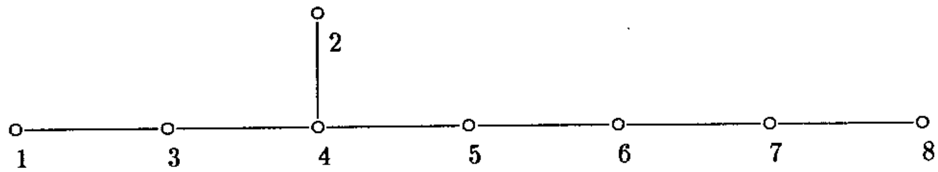
E_6 :



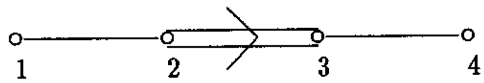
E_7 :



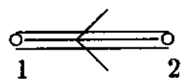
E_8 :



F_4 :



G_2 :



y las correspondientes matrices de Cartan son:

$$A_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
D_l : \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & & & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & & & \cdot & \cdot & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & \cdot & \cdot & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix}
$$

$$
E_6 : \begin{pmatrix}
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

$$
E_7 : \begin{pmatrix}
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

$$
E_8 : \begin{pmatrix}
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

$$
F_4 : \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

$$
G_2 : \begin{pmatrix}
2 & -1 \\
-3 & 2
\end{pmatrix}
$$

Dem.- La idea de la demostración es clasificar primero las gráficas de Coxeter y a partir de aquí obtener los posibles diagramas de Dynkin.

Para ello vamos a suponer que E es un espacio euclideano (de dimensión finita), y $\Im = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_l\}$ es un conjunto de vectores unitarios linealmente independientes que satisfacen $(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq 0$ $(i \neq j)$ y $4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 0,\ 1,\ 2,$ ó 3 $(i \neq j)$. Tal conjunto de vectores es llamado **admisible.** (Ejemplo: Elementos de una base para un sistema de raíces, cada uno dividido por su longitud). Formemos ahora la gráfica Γ para el conjunto $\Im$ de la misma manera en que formamos la gráfica de Coxeter para las raíces simples de un sistema de raíces. Lo que haremos a continuación será determinar todas las gráficas conexas asociadas con conjuntos admisibles de vectores (estas incluyen a todas las gráficas de Coxeter conexas). En este caso, Γ puede no ser conexa (más adelante supondremos que lo es).

1.- *Si algunos de los ϵ_i son eliminados, los restantes forman aún un conjunto admisible cuya gráfica es obtenida de Γ por omisión de los correspondientes vértices y las líneas incidentes.*

Este paso es obvio; pues los vectores restantes cumplen con las condiciones del párrafo anterior.

2.- *El número de pares de vértices en Γ conectados al menos por una línea es estrictamente menor que l.*

Sea $\epsilon = \sum_{i=1}^{l} \epsilon_i$. Como los ϵ_i son linealmente independientes, $\epsilon \neq 0$. Así $0 < (\epsilon, \epsilon) = l + 2\sum_{i<j}(\epsilon_i, \epsilon_j)$. Sea i, j un par de índices (distintos) para los cuales $(\epsilon_i, \epsilon_j) \neq 0$ (i.e. los vértices que están unidos). Entonces $4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 1,\ 2$ ó 3 lo que implica que $2(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq -1$, aplicando esta desigualdad se sigue que el número de pares i, j no puede exceder a $l - 1$.

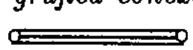
3.- Γ *no contiene ciclos.*

Un ciclo sería la gráfica Γ' de un conjunto admisible $\Im'$ de $\Im$ y así Γ', violaría el paso (2) (con l reemplazada por card $\Im'$).

4.- *No más de tres líneas pueden originarse en un vértice dado de* Γ.

Sea $\epsilon \in \Im$, y $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k \in \Im$ todos los vectores distintos que están unidos a ϵ por 1, 2 ó 3 líneas. Por el paso (3), cualquier par de $\eta's$ no están unidas, así $(\eta_i, \eta_j) = 0$ para $i \neq j$. Como $\Im$ es linealmente independiente, algún vector η_0 en el subespacio $< \epsilon, \eta_1, \ldots, \eta_k >$ es ortogonal a $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, claramente $(\epsilon, \eta_0) \neq 0$ para tal η_0.

Por otro lado, se tiene que $\epsilon = \sum_{i=0}^{k}(\epsilon, \eta_i)\eta_i$, así $1 = (\epsilon, \epsilon) = \sum_{i=0}^{l}(\epsilon, \eta_i)^2$. Esto implica que $\sum_{i=1}^{k}(\epsilon, \eta_i)^2 < 1$ o $\sum_{i=1}^{k} 4(\epsilon, \eta_i)^2 < 4$. Pero $4(\epsilon, \eta_i)^2$ es el número de líneas que une a ϵ con η_i en Γ; siguiéndose el resultado.

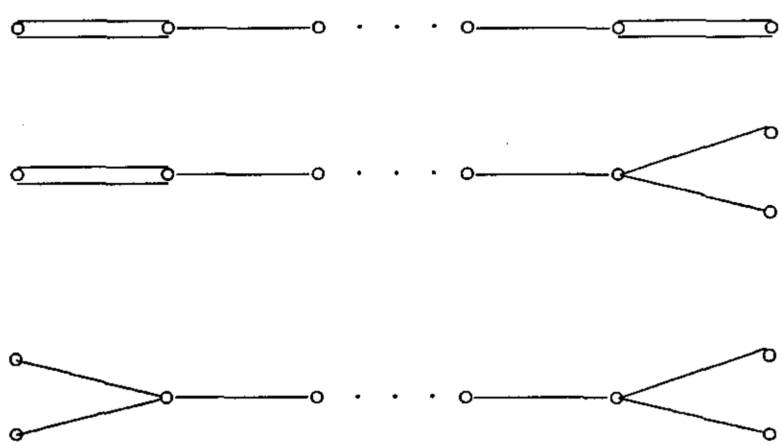
5.- *La única gráfica conexa Γ de un conjunto admisible $\Im$ el cual puede contener líneas triples es* .

Esto se sigue de el paso (4).

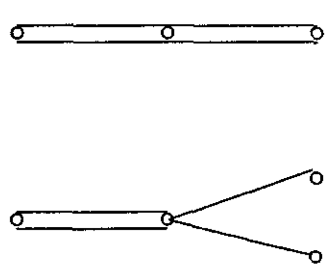
6.- *Sea* $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\}$ *vectores de* $\Im$ *que tienen subgráfica* o——o ... o——o. *(Una cadena simple en* Γ*). Si* $\Im' = (\Im - \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\}) \cup \{\epsilon\}$*, donde* $\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i$*, entonces* $\Im'$ *es admisible.*

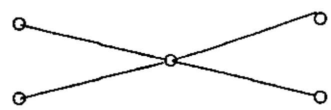
(La gráfica de $\Im'$ es obtenida de Γ contrayendo la cadena simple a un punto.) La independencia lineal de $\Im'$ es obvia. Por hipótesis, $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1$ $(1 \leq i \leq k-1)$, así $(\epsilon, \epsilon) = k + 2\sum_{i<j}(\epsilon_i, \epsilon_j) = k - (k-1) = 1$. Es decir, ϵ es un vector unitario. Algún $\eta \in \Im - \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\}$ puede ser conectado a lo más a un $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ (por el paso (3)), de esta manera, $(\eta, \epsilon) = 0$ ó $(\eta, \epsilon) = (\eta, \epsilon_i)$. En cualquier caso, $4(\eta, \epsilon)^2 = 0$, 1 ,2 ó 3.

7.- Γ *no contiene subgráficas de la forma:*

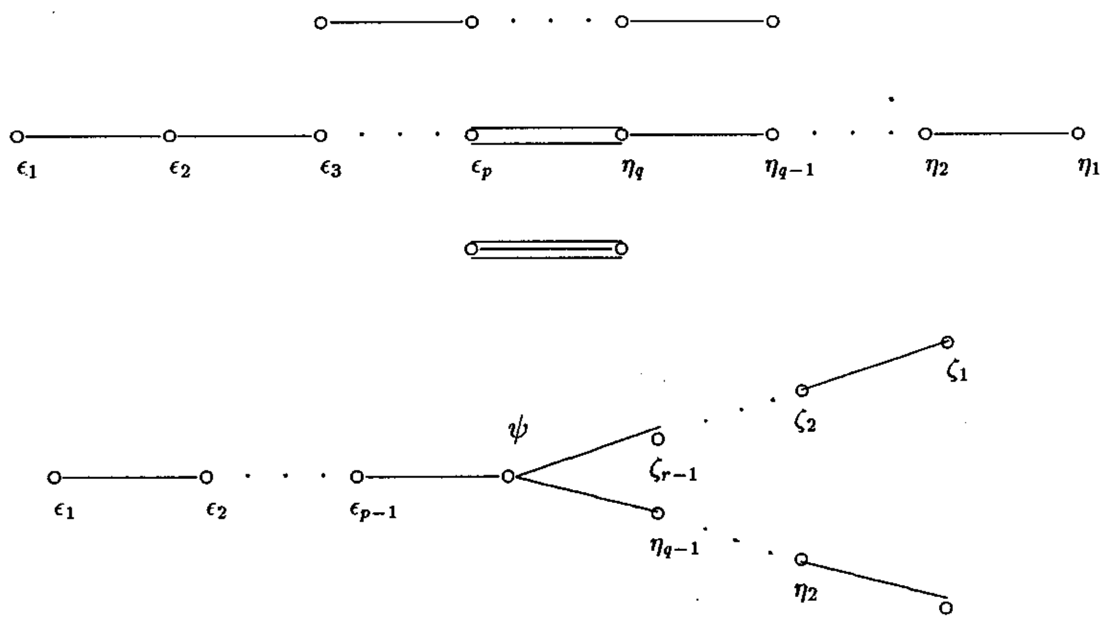


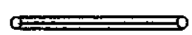
Supongamos que una de estas gráficas es subgráfica de Γ; por el paso (1), sería la gráfica de un conjunto admisible. Pero, por el paso (6) podemos reemplazar una cadena simple en cada caso por un vértice, produciendo (respectivamente) las siguientes gráficas, las cuales violan el paso (4):



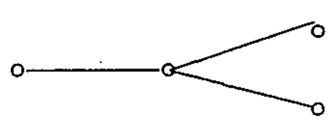


8.- *Cualquier gráfica conexa* Γ *de un conjunto admisible tiene una de las siguientes formas:*



Por el paso (5), únicamente  contiene una tripleta de líneas. Una gráfica conexa, por (7), contiene a lo más una unión doble, pues en caso contrario tendría una subgráfica de la forma

Más aún, si contiene una unión doble, no puede tener un "nodo" (punto de división de ramas),



Así la segunda gráfica es la única posible para este caso (los ciclos no se permiten). Supongamos ahora que Γ consiste solamente de uniones sencillas; Γ puede contener a lo más un nodo, (por (7)), por lo tanto, las únicas posibilidades son las gráficas 1 y 4.

9.- *La única gráfica conexa Γ del segundo tipo en el paso (8) es la gráfica de Coxeter F_4 o la gráfica de Coxeter $B_l(=C_l)$.*

Sea $\epsilon = \sum_{j=1}^{k} j\epsilon_j$, $\eta = \sum_{j=1}^{k} j\eta_j$. Por hipótesis, $2(\epsilon_j, \epsilon_{j+1}) = -1 = 2(\eta_j, \eta_{j+1})$, y los otros pares son ortogonales, así

$$(\epsilon, \epsilon) = \sum_{j=1}^{P} j^2 - \sum_{j=1}^{p-1} j(j+1) = \frac{p(p+1)}{2}$$

y $(\eta, \eta) = \frac{q(q+1)}{2}$. Como $4(\epsilon_p, \eta_q)^2 = 2$, tenemos que $(\epsilon, \eta)^2 = p^2q^2(\epsilon_p, \eta_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}$. La desigualdad de Schwartz implica (dado que ϵ, η son independientes) que $(\epsilon, \eta)^2 < (\epsilon, \epsilon)(\eta, \eta)$ o equivalentemente $\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4}$, de donde $(p-1)(q-1) < 2$. Las posibilidades son: $p = q = 2$ (F_4), $p = 1$ (q arbitrario) ó $q = 1$ (p arbitrario).

10.- *Las únicas gráficas Γ conexas del tipo cuatro en el paso (8) son la gráfica de Coxeter D_l ó la gráfica de Coxeter E_n (n=6, 7 ú 8).*

Sea $\epsilon = \sum j\epsilon_j$, $\eta = \sum j\eta_j$, $\zeta = \sum j\zeta_j$. Es claro que ϵ, η, ζ son mutuamente ortogonales, linealmente independientes y que además, ψ no está en el subespacio generado por ellos. De la misma forma en el paso (4), obtenemos que $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1$ donde θ_1, θ_2, θ_3 son los ángulos respectivos entre ψ y ϵ, η, ζ. Efectuando los mismos cálculos que en el paso (9), con $p-1$ en lugar de p, encontramos que $(\epsilon, \epsilon) = \frac{p(p-1)}{2}$. Similarmente para η, ζ. Por lo que $\cos^2\theta_1 = \frac{(\epsilon,\psi)^2}{(\epsilon,\epsilon)(\psi,\psi)} = \frac{(p-1)^2(\epsilon_{p-1},\psi)^2}{(\epsilon,\epsilon)} = \frac{(p-1)}{2p} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$. Similarmente para θ_2 y θ_3. Sumando obtenemos la desiguialdad $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}) < 1$ o equivalentemente $(*)\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$. Reetiquetando podemos suponer que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r}(\leq \frac{1}{2})$; si p, q ó r son iguales a uno, regresamos al tipo A_l. La desigualdad $(*)$ implica que $\frac{3}{2} \geq \frac{3}{r} > 1$, así $r = 2$. De esta forma $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, y $\frac{2}{q} > \frac{1}{2}$, de donde $2 \leq q < 4$. Para $q = 2$, es claro de las desigualdades anteriores que $p \geq 2$. Si $q = 3$, entonces $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ y necesariamente $p < 6$. Así las posibles tripletas (p, q, r) pueden ser: $(p, 2, 2,) = D_l$; $(3, 3, 2) = E_6$; $(4, 3, 2) = E_7$; $(5, 3, 2) = E_8$.

El procedimiento anterior muestra que todas las posibles gráficas de Coxeter conexas de un conjunto de vectores admisibles en un espacio euclideano son las gráficas $A - G$. Cada una de éstas corresponde a un único diagrama de Dynkin con excepción de B_l y C_l; que tienen la misma gráfica de Coxeter y distinto sistema de raíces. Con esto, queda probado el teorema. $\square$

2.4. Construcción de Sistemas de Raíces

En la sección anterior, todos los posibles diagramas de Dynkin conexos de sistemas de raíces irreducibles han sido clasificados. Sin embargo, no hemos probado que, efectivamente, a cada diagrama de tipo $A - G$ le corresponde un sistema de raíces.

Para demostrarlo, trabajaremos en $\mathbb{R}^n$, (el valor de n va a variar en la construcción de los distintos sistemas de raíces) con el producto interior usual. $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ denotan la base ortonormal usual de $\mathbb{R}^n$. El $\mathbb{Z}$ -espacio de esta base es (por definición) el **lattice** I. En cada caso, tomaremos E como un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con el producto interior heredado de $\mathbb{R}^n$. Φ será definido como el conjunto de vectores en I que tienen norma (o normas) fija (o fijas).

Como I es un lattice, es discreto con la topología usual de $\mathbb{R}^n$; por otro lado, el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que tienen una o dos longitudes fijas es compacto, pues es cerrado y acotado. Así Φ es finito y por definición el cero no está en Φ. En cada caso, será evidente que Φ genera a E (se dará una base de Φ). De esta manera (R1) se satisface. La selección de longitudes será hecha de tal forma que se cumpla (R2). Para (R3) será suficiente comprobar que la reflexión $\sigma_\alpha(\alpha \in \Phi)$ transforma a Φ en un subconjunto de I, pues de la fórmula para la reflexión se sigue que $\sigma_\alpha(\Phi)$ consiste de los vectores de longitud requerida. (R3) implica (R4), ya que si $\alpha, \beta \in \Phi$ entonces $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle\beta, \alpha\rangle\alpha \in I$, de donde se sigue que $\langle\beta, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$.

Utilizando este bosquejo construiremos ahora los sistemas de raíces para cada diagrama de Dynkin de los tipos $A - G$. En cada caso, obtendremos la matriz de Cartan para cada sistema de raíces y verificaremos que es igual a la de cada diagrama de Dynkin.

$A_l(l \geq 1)$: Sea E el subespacio l-dimensional de $\mathbb{R}^{l+1}$ ortogonal al vector $\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_{l+1}$. Sea $I' = I \cap E$, y tomemos a Φ como el conjunto de vectores $\alpha \in I'$ tales que $(\alpha, \alpha) = 2$; es claro que $\Phi = \{\epsilon_i - \epsilon_j, i \neq j\}$. Los vectores $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$ son linealmente independientes por lo que generan a E, además $\epsilon_i - \epsilon_j = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + \ldots + (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)$ si $i \leq j$, lo cual muestra que ellos forman una base para Φ.

Las reflexiones con respecto a α_i permutan los índices $i, i+1$ y dejan todos los otros índices fijos. Así Φ es un sistema de raíces y su matriz de Cartan resulta ser igual a la de A_l.

$B_l(l \geq 2)$: Sean $E = \mathbb{R}^l$ y $\Phi = \{\alpha \in I | (\alpha, \alpha) = 1 \text{ ó } 2\}$. Φ claramente consiste de los vectores $\pm\epsilon_i$ (de longitud al cuadrado igual a uno) y los vectores $\pm\{(\epsilon_i \pm \epsilon_j)\}$ (de longitud al cuadrado igual a 2) para $i \neq j$. Los l vectores $\epsilon_1-\epsilon_2, \epsilon_2-\epsilon_3, \ldots, \epsilon_{l-1}-\epsilon_l, \epsilon_l$ son independientes y forman una base para Φ. La matriz de Cartan para esta base es la de B_l.

$C_l(l \geq 3)$: Es fácil ver a partir de la definición que los productos interiores del dual de

B_l coinciden con los de C_l; utilizando la proposición 2.3.1 tenemos que C_l es isomorfo a dual de B_l. Por lo tanto $C_l(l \geq 2)$ puede ser visto como el sistema dual de B_l. Así en $E = \mathbb{R}^l$, $\Phi = \{\alpha \in E|(\alpha, \alpha) = 2 \text{ ó } 4\} = \{\pm 2\epsilon_i, \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j)\ i \neq j\}$ es un sistema de raíces con base $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_{l-1} - \epsilon_l, 2\epsilon_l\}$. Su matriz de Cartan corresponde a la de C_l.

$D_l(l \geq 4)$: Sean $E = \mathbb{R}^l$ y $\Phi = \{\alpha \in I|(\alpha, \alpha) = 2\} = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j),\ i \neq j\}$. Para una base tomemos los l vectores independientes $\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_{l-1} - \epsilon_l, \epsilon_{l-1} + \epsilon_l$. Así se obtiene que su matriz de Cartan es igual a D_l.

E_6, E_7, E_8: De los diagramas de Dynkin tenemos que E_6, E_7 pueden ser considerados como subsistemas de E_8. Por esta razón será suficiente construir E_8. Sea $E = \mathbb{R}^8$, $I' = I + \mathbb{Z}\ ((\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_8)/2)$. $I"$ =subconjunto de I' consistente de todos los elementos $\sum c_i\epsilon_i + \frac{c}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_8)$ para los cuales $c + \sum c_i$ es un *entero par.* Definimos $\Phi = \{\alpha \in I"|(\alpha, \alpha) = 2\}$. Φ consiste de los vectores $\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j,\ i \neq j)$, y de los vectores $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^i\epsilon_i$. Por inspección, todos los productos interiores están en $\mathbb{Z}$. Una base para este sistema de raíces es $\{\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_8 - (\epsilon_2 + \cdots + \epsilon_7)), \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_1, \ldots, \epsilon_7 - \epsilon_8\}$. Esta base corresponde a la matriz de Cartan de E_8.

F_4: Sea $E = \mathbb{R}^4$, $I' = I + \mathbb{Z}\ ((\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_4)/2), \Phi = \{\alpha \in I'|(\alpha, \alpha) = 1 \text{ ó } 2\}$. Φ consiste de todos los $\pm\epsilon_i$, de los $\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)\ i \neq j$, así como de $\pm\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \cdots \pm \epsilon_4)$. Como base podemos tomar a $\{\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_3 - \epsilon_4, \epsilon_4, \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \cdots - \epsilon_4)\}$.

G_2: G_2 fue construido explícitamente en la sección 2.1. Otra forma de construirlo, es considerar a E como el subespacio de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, $I' = I \cap E$, $\Phi = \{\alpha \in I'|(\alpha, \alpha) = 2 \text{ ó } 6\}$. Así $\Phi = \pm\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_1 - \epsilon_3, 2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3, 2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3, 2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2\}$. Como una base, tomamos $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3\}$.

Resumimos lo anterior en el siguiente

Teorema 2.4.1: Para cada diagrama de Dynkin (o matriz de Cartan) de tipo A-G, existe un sistema irreducible de raíces que tienen el diagrama dado. □

Capítulo 3

Clasificación de las Algebras de Lie Simples sobre los Complejos

El propósito de este capítulo es clasificar las álgebras de Lie simples sobre los complejos. Para esto, primero probaremos que a cada álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ le corresponde un único sistema de raíces (salvo isomorfismo) o equivalentemente, se le puede asociar una matriz de Cartan. Después, a cada sistema de raíces le construiremos una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ y mostraremos que una álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ es simple si y sólo si su matriz de Cartan asociada es irreducible. Como se recordará del capítulo dos, una matriz de Cartan es irreducible si y sólo si su diagrama de Dynkin es conexo, así a partir de la clasificación de éstos, determinaremos todas las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$.

En lo que sigue, L denotará una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$, a menos que se especifique otra cosa.

3.1. Subálgebra Toral

Si L consiste sólo de elementos nilpotentes, entonces, por el teorema de Engel, L es nilpotente. Luego, $Z(\mathrm{L})$ es diferente de cero, contradiciendo la hipótesis de que L es semisimple. No siendo este el caso, es posible encontrar un elemento $x \in \mathrm{L}$ cuya parte semisimple x_s en la descomposición abstracta de Jordan es diferente de cero. Esto muestra que L posee subálgebras (por lo menos, la generada por x_s) que consisten de elementos semisimples. Llamaremos a este tipo de subálgebras **Subálgebras Torales**.

Lema 3.1.1: Toda subálgebra toral de L es abeliana.

Dem.- Sea T una subálgebra toral. Lo que vamos a demostrar es que $ad_T x = 0$. Como $ad\, x$ es diagonalizable, esto equivale a demostrar que $ad_T x$ no tiene eigenvalores diferentes de cero. Supongamos lo contrario, es decir, $[xy] = ay$, donde $a \neq 0$ y $y \in T$, $y \neq 0$. Como $[xy] = -[yx]$, se sigue que $ad_T y(x) = -ay$ por lo que x es un eigenvector de $ad_T y$ con eigenvalor 0. Por otro lado, x se puede escribir como una combinación lineal de eigenvectores de $ad_T y$; aplicando $ad_T y$ a x obtenemos una combinación de eigenvectores los cuales tienen eigenvalores diferentes de cero. Esto contradice la conclusión anterior. □

3.2. Descomposición de L en Espacios Raíz

Consideremos ahora una **subálgebra toral maximal H** de L, es decir, una subálgebra toral que no se encuentra contenida propiamente en alguna otra. Como H es abeliana se tiene que $ad_{\mathrm{L}} H$ es una familia conmutativa de endomorfismos semisimples de L. Por un resultado de álgebra lineal, $ad_{\mathrm{L}} H$ es simultáneamente diagonalizable, es decir, existe una base de L formada por vectores propios de $ad_{\mathrm{L}} H$. Esto producirá una descomposición de L como suma directa de eigenespacios $L_\alpha = \{x \in \mathrm{L} | [hx] = \alpha(h)x \quad \forall h \in H\}$ donde $\alpha \in H^*$. Si $\alpha = 0$, es claro que $L_0 = C_{\mathrm{L}}(H)$.

$\alpha \in H^*$ es llamada **raíz** si $\alpha \neq 0$ y $L_\alpha \neq 0$. Denotaremos por Φ al conjunto de raíces de L. Φ es finito. Para $\alpha \in \Phi$, L_α es llamado el **espacio raíz** correspondiente a α. De esta forma

$$\mathrm{L} = C_{\mathrm{L}}(H) + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha. \qquad (\textit{suma directa})$$

Lo que haremos a continuación será demostrar que $H = C_{\mathrm{L}}(H)$, con lo cual, L quedará descrita en términos de la subálgebra toral maximal y los espacios raíz. Para esto necesitaremos de la siguiente

Proposición 3.2.1: Para toda α, $\beta \in H^*$, $[L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. Si $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, entonces $ad\, x$ es nilpotente. Si α, $\beta \in H^*$ y $\alpha + \beta \neq 0$, entonces L_α es ortogonal a L_β respecto a la forma de Killing $\mathcal{K}$ de L.

Dem.- Sea $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ y $h \in H$. Por la identidad de Jacobi tenemos que $ad\, h([xy]) = [[hx]y] + [x[hy]] = \alpha(h)[xy] + \beta(h)[xy] = (\alpha + \beta)(h)[xy]$ por lo que $[L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$.
El hecho de que $ad\, x$ es nilpotente es consecuencia de la primera parte de la proposición y de que Φ es un conjunto finito. A continuación probaremos la última parte.

Sea $h \in H$ para el cual $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$ y tomemos $x \in L_\alpha$ y $y \in L_\beta$. Por la asociatividad de la forma de Killing tenemos que $\mathcal{K}([hx], y) = -\mathcal{K}([xh], y) = -\mathcal{K}(x, [hy])$ o equivalentemente $\alpha(h)\mathcal{K}(x, y) = -\beta(h)\mathcal{K}(x, y)$ de donde $(\alpha + \beta)(h)\mathcal{K}(x, y) = 0$ por lo que $\mathcal{K}(x, y) = 0$. □

Corolario 3.2.2: La restricción de la forma de Killing $\mathcal{K}$ a $L_0 = C_{\mathrm{L}}(H)$ es no degenerada.

Dem.- Por la proposición anterior L_0 es ortogonal a toda L_α, $\alpha \in \Phi$. Si $z \in L_0$ es ortogonal a L_0 entonces $\mathcal{K}(z, \mathrm{L}) = 0$ pero como L es semisimple se tiene que $\mathcal{K}$ es no degenerada en L, lo que implica que $z = 0$. □

Proposición 3.2.3: $H = C_{\mathrm{L}}(H)$.

Dem.-La demostración se hará por pasos. A lo largo de ésta C denotará a $C_{\mathrm{L}}(H)$.

1.- *C contiene la parte semisimple y nilpotente de sus elementos.*
Sea $x \in C$, $ad\, x$ transforma al subespacio H de L en el subespacio 0. Pero por la proposición 1.6.1 $(ad\, x)_s$ y $(ad\, x)_n$ tienen la misma propiedad pero por la descomposición abstracta de Jordan se sigue que $(ad\, x)_s = ad\, x_s$ y $(ad\, x)_n = ad\, x_n$.

2.- *Todos los elementos semisimples de C se encuentran en H.*
Si x es semisimple y centraliza a H, entonces $H + \mathbb{C}\, x$ es toral, pero la suma de elementos semisimples que conmutan es otra vez semisimple, así por maximalidad de H se sigue que $H + \mathbb{C}\, x = H$ por lo que $x \in H$.

3.- *la restricción de la forma de Killing $\mathcal{K}$ a H es no degenerada.*
Supongamos que $\mathcal{K}(h, H) = 0$ para algún $h \in H$, mostraremos que $h = 0$. Sea $x \in C$ nilpotente, como $[xH] = 0$ y $ad\, x$ es nilpotente, es fácil de demostrar que $Tr(ad\, x \circ ad\, y) = 0\ \forall y \in H$, o $\mathcal{K}(x, H) = 0$. Pero por (1) y (2) tenemos que $\mathcal{K}(h, C) = 0$ de donde $h = 0$ por el corolario 3.2.2.

4.- *C es nilpotente.*
Si $x \in C$ es semisimple entonces por (2) $x \in H$, y $ad_C x$ (=0) es nilpotente. Por otro lado, si $x \in C$ es nilpotente, entonces $ad_C x$ es nilpotente. Ahora, sea $x \in C$ arbitrario, $x = x_s + x_n$ y por (1) x_s, $x_n \in C$, de esta forma $ad_C x$ es la suma de elementos nilpotentes que conmutan por lo que $ad_C x$ es nilpotente y por el teorema de Engel C es nilpotente.

5.- $H \cap [CC] = 0$.
Como $\mathcal{K}$ es asociativa y $[HC] = 0$, $\mathcal{K}(H, [CC]) = 0$ y por (3) se sigue que $H \cap [CC] = 0$.

6.- *C es abeliana.*
Supongamos que $[CC] \neq 0$. Por (4) C es nilpotente y por la proposición 1.5.2 $Z(C) \cap [CC] \neq 0$. Sea $z \in Z(C) \cap [CC]$. Por (2) y (5), z no es semisimple. Su parte nilpotente n es diferente de cero y por (1) se encuentra en C, por lo que $\mathcal{K}(n, C) = 0$ contradiciendo el corolario 3.2.2.

7.- C=H.
Supongamos que C contiene un elemento nilpotente diferente de cero, x. Por (1) y (2) basta probar que C no contiene elementos nilpotentes. Del hecho de que x es nilpotente y por (6), se sigue que $\mathcal{K}(x, y) = 0$ para toda $y \in C$ contradiciendo al corolario 3.2.2.
□

Corolario 3.2.4: La restricción de la forma de Killing a H es no degenerada. □

Este corolario nos permite establecer un isomorfismo entre H^* y H de la siguiente manera: Para $\phi \in H^*$ es fácil probar que existe un único $t_\phi \in H$ tal que $\phi(h) = \mathcal{K}(t_\phi, h)$ $\forall h \in H$. Por lo que es posible transferir la forma de Killing a una forma bilineal simétrica, no singular $(\bullet, \bullet)$ en $H^* \times H^*$:

$$(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}(t_\lambda, t_\mu) \qquad\qquad \lambda, \mu \in H^*.$$

Proposición 3.2.5: Sea h, $h' \in H$. Entonces

$$\mathcal{K}(h, h') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(h') \dim(L_\alpha)$$

Dem.- Como H es semisimple, $ad\, h$ es diagonalizable para $h \in H$. Sea $x \in L_\alpha$,

$$ad\, h \circ ad\, h'(x) = ad\, h([h'x]) = ad\, h(\alpha(h')x) = \alpha(h')\alpha(h)x$$

por lo que $\alpha(h')\alpha(h)$ es un valor propio de $ad\, h \circ ad\, h'$ y aparece $\dim(L_\alpha)$ veces. Así

$$\mathcal{K}(h, h') = tr(ad\, h \circ ad\, h') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(h') \dim(L_\alpha). \quad \square$$

3.3. Propiedades de las Raíces y de los Espacios Raíz

En esta sección se probarán una serie de propiedades de las raíces y de los espacios raíz que nos permitirán demostrar que el conjunto de raíces Φ es un sistema de raíces en un espacio euclideano E, en el sentido del capítulo uno, con lo cual tendremos que a cada pareja (L, H) le corresponderá un sistema (Φ, E).

Teorema 3.3.1: a) Φ genera a H^*

b) Si $\alpha \in \Phi$ entonces $-\alpha \in \Phi$.

Dem.- a) Supongamos que Φ no genera a H^*. Existe $h \in H$, $h \neq 0$ tal que $\alpha(h) = 0$ $\forall \alpha \in \Phi$, pero esto significa que $[hL_\alpha] = 0$ $\forall \alpha \in \Phi$ y como $[hH] = 0$, se sigue que $[h\mathrm{L}] = 0$, o $h \in Z(\mathrm{L}) = 0$. Contradicción.

b) Sea $\alpha \in \Phi$. Supongamos que $-\alpha$ no es raíz, es decir, $L_{-\alpha} = 0$, entonces $\mathcal{K}(L_\alpha, L_\beta) = 0$ $\forall \beta \in H^*$ de donde $\mathcal{K}(L_\alpha, \mathrm{L}) = 0$. Contradicción, pues $\mathcal{K}$ es no degenerada. □

Definición: Para α, $\beta \in \Phi$, la α-cadena de β es el conjunto de raíces (ó el elemento 0) de la forma $\beta + k\alpha$ con k entero.

Teorema 3.3.2: Sea $\alpha \in \Phi$, entonces $\dim[L_\alpha L_{-\alpha}] = 1$. Más aún, si $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$, entonces $[xy] = \mathcal{K}(x,y)t_\alpha$ ($\{t_\alpha\}$ es base para $[L_\alpha L_{-\alpha}]$) y $\alpha(t_\alpha) = \mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$).

Dem.- Sea $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ y $h \in H$. Como $\mathcal{K}$ es asociativa, se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(h,[xy]) &= \mathcal{K}([hx],y) = \alpha(h)\mathcal{K}(x,y)\\ &= \mathcal{K}(t_\alpha,h)\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}(\mathcal{K}(x,y)t_\alpha,h)\\ &= \mathcal{K}(h,\mathcal{K}(x,y)t_\alpha)\end{aligned}$$

de esta forma

$$\mathcal{K}(h,[xy]-\mathcal{K}(x,y)t_\alpha) = 0$$

y por el corolario 3.2.4

$$[xy]-\mathcal{K}(x,y)t_\alpha = 0$$

de donde

$$[xy] = \mathcal{K}(x,y)t_\alpha. \tag{3.3.1}$$

Esto muestra que t_α genera a $[L_\alpha L_{-\alpha}]$. Probaremos que $[L_\alpha L_{-\alpha}] \neq 0$. Sea $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\alpha \neq 0$. Si $\mathcal{K}(x_\alpha, L_{-\alpha}) = 0$, entonces por la proposición 3.2.1, $\mathcal{K}(x,\mathrm{L}) = 0$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que existe $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, $y_\alpha \neq 0$ tal que $\mathcal{K}(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$, más aún $\mathcal{K}(x_\alpha, y_\alpha) = 1$, así $[x_\alpha y_\alpha] = t_\alpha$.

Para probar la última parte del teorema consideraremos una α-cadena de β donde $\beta \in \Phi$. Sea

$$L_{\beta,\alpha} = \sum_{k\in N} L_{\beta+k\alpha}$$

donde N es el conjunto de todos los enteros k para los cuales $\beta + k\alpha$ es una raíz ó es cero. $L_{\beta,\alpha}$ es invariante bajo los operadores $ad\,t_\alpha$, $ad\,x_\alpha$ y $ad\,y_\alpha$. Calcularemos la traza de $ad\,t_\alpha$ de dos formas distintas. Como $[x_\alpha y_\alpha] = t_\alpha$, se sigue

$$tr(ad\,t_\alpha|L_{\beta,\alpha}) = tr(ad\,x_\alpha \circ ad\,y_\alpha|L_{\beta,\alpha}) - tr(ad\,y_\alpha \circ ad\,x_\alpha|L_{\beta,\alpha}) = 0$$

Por otro lado, de la proposición 3.2.1 se tiene que $ad\, t_\alpha$ deja invariante a cada espacio $L_{\beta+k\alpha}$, así

$$tr(ad\, t_\alpha | L_{\beta,\alpha}) = \sum_{k\in N} (\beta + k\alpha)(t_\alpha) \dim L_{\beta+k\alpha}$$

de donde obtenemos la relación

$$\beta(t_\alpha) \sum_{k\in N} \dim L_{\beta+k\alpha} = -\alpha(t_\alpha) \sum_{k\in N} k \dim L_{\beta+k\alpha}$$

para cada $\alpha \in \Phi$ y cada raíz β. De aquí se deduce que $\alpha(t_\alpha) \neq 0$ pues $\dim L_\beta > 0$ y $\beta(t_\alpha) \neq 0$ para algún $\beta \in \Phi$ ya que $Z(\mathrm{L}) = 0$. □

Este teorema nos permite definir $h_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{(\alpha,\alpha)} t_\alpha$; claramente $h_\alpha \in H$. Por la fórmula 3.3.1 existen $x_\alpha \in L_\alpha$ y $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tales que $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$. Además $[h_\alpha x_\alpha] = 2x_\alpha$ y $[h_\alpha y_\alpha] = -2y_\alpha$. Así x_α, y_α y h_α generan una subálgebra tridimensional de L isomorfa a $sl(2, \mathbb{C})$.

Lema 3.3.3: Sea $\alpha \in \Phi$. Entonces $\dim(L_\alpha) = 1$ y $k\alpha$, $k \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$, no es raíz.

Dem.- Sean x_α, y_α y h_α como en la observación anterior. Sea Q_α el subespacio de L generado por y_α, h_α y todos los espacios raíz $L_{k\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Q_α es invariante bajo los operadores $ad\, x_\alpha$, $ad\, y_\alpha$ y $ad\, h_\alpha$. Calculando la traza de $ad\, h_\alpha | Q_\alpha$ se tiene que

$$0 = tr(ad\, h_\alpha | Q_\alpha) = 2(-1 + n_\alpha + 2n_{2\alpha} + \cdots)$$

donde $n_\beta = \dim(L_\beta)$. De aquí se obtiene que $n_\alpha = 1$ y $n_{2\alpha} = n_{3\alpha} = \cdots = 0$, y del teorema 3.3.1 se sigue que -2α, $-3\alpha, \ldots$ no son raíces. □

Lema 3.3.4: Sean α, $\beta \in \Phi$ con $\beta \neq \pm \alpha$. Entonces existen dos enteros $p = p(\alpha, \beta)$ y $q = q(\alpha, \beta)$, ambos no negativos, tales que para algún entero k, $(\beta + k\alpha) \in \Phi$ si y sólo si $-q \leq k \leq p$. Más aún, $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. A $\beta(h_\alpha)$ se le conoce como **entero de Cartan.**

Dem.- Por el lema 3.3.3 se tiene que $\dim(L_{\beta+k\alpha}) \leq 1$ para $\beta + k\alpha \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Sea

$$L_{\beta,\alpha} = \sum_{k\in Z} L_{\beta+k\alpha}$$

si $L_{\beta+k\alpha} \neq 0$, sus elementos son eigenvectores para $ad\, h_\alpha$ con eigenvalor $\beta(h_\alpha) + 2k$. Así todos los eigenvalores de $ad\, h_\alpha | L_{\beta,\alpha}$ son de multiplicidad uno y dos de ellos difieren por un entero par. Por el corolario 1.9.3 $ad\, h_\alpha$ actúa irreducibleme nte en $L_{\beta,\alpha}$. Sea λ el más alto peso de la representación irreducible en $L_{\beta,\alpha}$. $\lambda = \beta(h_\alpha) + 2k$ para algún k, lo que implica que $\beta(h_\alpha)$ es un entero. El máximo valor positivo que puede tomar k es $p = \frac{1}{2}(\lambda - \beta(h_\alpha))$.

Por el teorema 1.9.2, $-\lambda$ es un eigenvalor por lo que el mínimo valor que puede tomar k es $-q = -\frac{1}{2}(\lambda + \beta(h_\alpha))$. De esta forma

$$L_{\beta,\alpha} = \sum_{-q \leq k \leq p} L_{\beta+k\alpha}$$

Por otro lado, como $\beta(h_\alpha)$ es un eigenvalor $-\beta(h_\alpha)$ deberá serlo, por lo que hay un k con $-q \leq k \leq p$ tal que $(\beta + k\alpha)(h_\alpha) = -\beta(h_\alpha)$. Resolviendo para k, encontramos que $k = -\beta(h_\alpha)$. Así $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. $\square$

De este lema se tiene, en particular, que $\beta(h_\alpha)$ es un entero. Por otro lado

$$\beta(h_\alpha) = \beta\left(\frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}\right) = \frac{2\beta(t_\alpha)}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)} = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

(recordemos el axioma (R4) de lo sistemas de raíces dado en el capítulo dos). De esta forma se sigue que

$$(\beta, \alpha) = q_{\beta,\alpha}(\alpha, \alpha) \tag{3.3.2}$$

donde $q_{\beta,\alpha}$ es un número racional.

Corolario 3.3.5: Sea $\alpha \in \Phi$. Si $c \in \mathbb{C}$, entonces $c\alpha$ es una raíz si y sólo si $c = \pm 1$.

Dem.- Si $c = 0$, es claro que $c\alpha$ no es raíz. Supongamos que $c \neq 0$. Sea $\beta = c\alpha$, $\beta(h_\alpha) = 2c$. Por el lema 3.3.4, $\beta(h_\alpha)$ es un entero. Similarmente, como $\alpha = c^{-1}\beta$; $2c^{-1}$ también es un entero. Así los únicos posibles valores para c son $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 ó ± 2. Si $c \neq \pm 1$, se tiene que $\alpha = \pm 2\beta$ ó $\beta = \pm 2\alpha$, pero por el lema 3.3.3 es imposible, lo que implica que $c = \pm 1$. $\square$

Corolario 3.3.6: Supongamos que α, $\beta \in \Phi$ y $\alpha + \beta \in \Phi$. Entonces $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Dem.- Por la proposición 3.2.1, $[L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$ y como $\dim(L_{\alpha+\beta}) = 1$ se sigue que $[L_\alpha L_\beta] = 0$ ó $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Supongamos que $[L_\alpha L_\beta] = 0$, así $\sum_{-q \leq k \leq 0} L_{\beta+k\alpha}$ es invariante bajo $ad\, h_\alpha$ esto implica que $p = 0$ (ver lema 3.3.4) ó en otras palabras que $\alpha + \beta$ no es una raíz. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$. $\square$

Lema 3.3.7: Sea

$$H_R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R} h_\alpha$$

entonces

1.- $\mathcal{K}(\bullet,\bullet)$ es un producto escalar positivo definido en $H_R \times H_R$. Cada raíz es real-valuada.

2.- $\dim_R H_R = l$, donde $l = \dim_C H$.

3.- $H = H_R \oplus iH_R$

Dem.-

1.- Para h, $h' \in H$ tenemos de la proposición 3.2.5 y del lema 3.3.3 que

$$\mathcal{K}(h,h') = \sum_{\beta\in\Phi} \beta(h)\beta(h') \tag{3.3.3}$$

De las fórmulas (3.3.2) y (3.3.3) obtenemos la relación

$$\alpha(h_\alpha) = \mathcal{K}(h_\alpha,h_\alpha) = \sum_{\beta\in\Phi} \beta(h_\alpha)^2 = \frac{1}{4}\alpha(h_\alpha)^2 \sum_{\beta\in\Phi} q_{\beta,\alpha}^2$$

donde $q_{\beta,\alpha}$ es racional. Como $\alpha(h_\alpha) \neq 0$ se sigue que $\alpha(h_\alpha)$ es un número real positivo y $\beta(h_\alpha)$ es real para cada $h \in H_R$. Por lo que $\mathcal{K}(h,h) \geq 0$ para $h \in H_R$. Si $\mathcal{K}(h,h) = 0$ para algún $h \in H_R$, entonces por (3.3.3), $\beta(h) = 0$ $\forall\beta \in \Phi$ mostrando que $h = 0$. Así $\mathcal{K}(\bullet,\bullet)$ es un producto escalar positivo definido en $H_R \times H_R$.

2.- Como $\dim_C H = l$, podemos seleccionar $\alpha_1,...,\alpha_l \in \Phi$ tal que $h_{\alpha_1},...,h_{\alpha_l}$ generan a H sobre $\mathbb{C}$. Si $h = \sum_{1\leq i\leq l} c_i h_{\alpha_i}$, $c_i \in \mathbb{C}$, tenemos las ecuaciones

$$\alpha_j(h) = \sum_{1\leq i\leq l} c_i(\alpha_j,\alpha_i) \qquad (1 \leq j \leq l)$$

la matriz $((\alpha_i,\alpha_j))_{1\leq i,j\leq l}$ es invertible pues $(\bullet,\bullet)$ es no degenerada en $H^* \times H^*$. Sus entradas son reales, $\alpha_j(h)$ es real; por lo que los c_i son reales. En otras palabras H_R es generado por los h_{α_i} $(1 \leq i \leq l)$ sobre $\mathbb{R}$. Esto prueba que $\dim_R H_R = l$.

3.- Del inciso anterior se sigue que $\mathbb{C}\,H = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}\,h_\alpha = H_R + iH_R$. Probaremos que $H_R \cap iH_R = 0$. Sea $x \in H_R \cap iH_R$, tenemos que $x = iy$ con x, $y \in H_R$; así $0 \leq (x,x) = -(y,y) \leq 0$ por lo que $(x,x) = 0$ de donde $x = 0$. □

En particular, este teorema muestra que H está generada por h_α, $\alpha \in \Phi$. Pero $h_\alpha = [x_\alpha y_\alpha]$ para $x_\alpha \in L_\alpha$ y $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, por lo que L está generada como álgebra de Lie por los espacios raíz L_α.

Calculemos los posibles valores de $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$, α, $\beta \in \Phi$ y $\beta \neq^{+}_{-} \alpha$. Sea $m = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ y $n = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}$, n y m son enteros. Supongamos que $m \neq 0$, así $n \neq 0$. Por el lema 3.3.7 se tiene que

$\mathcal{K}(\bullet,\bullet)$ es un producto escalar positivo definido en $\sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}h_\alpha$; utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el hecho de que α y β son linealmente independientes, tenemos que $0 < |m||n| < 4$. Así $m = \pm 1, \pm 2$ ó ± 3. Como se recordará, este mismo resultado es expresado en la tabla 2.1.2.

Supongamos ahora que $\beta - \alpha$ no es raíz. De esta forma $L_{\beta,\alpha} = \sum_{0\leq k\leq p} L_{\beta+k\alpha}$. Así $\beta(h_\alpha) \leq 0$. Esto implica que $(\alpha,\beta) \leq 0$. Lo mismo se probó en el Lema 2.1.2.

Los lemas y proposiciones importantes sobre los espacios raíz y sus propiedades quedan resumidos como sigue:

Teorema 3.3.8: Los espacios raíz son uno-dimensionales. Si α, $\beta \in \Phi$ y $\alpha + \beta \neq 0$, entonces $[L_\alpha L_\beta] = 0$ ó $= L_{\alpha+\beta}$ dependiendo de que $\alpha + \beta$ sea o no raíz.; si $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ $[xy] = \mathcal{K}(x,y)t_\alpha$; $\Phi = -\Phi$; si $\alpha \in \Phi$, entonces $\pm\alpha$ son los únicos múltiplos de α que son raíces. Si α, $\beta \in \Phi$, (α,α) es mayor que cero y tanto (α,α) como (α,β) son números racionales. Además $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ es entero con posibles valores $0, \pm1, \pm2, \pm3$. $\mathbb{C}\,\Phi = H^*$, $H_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}h_\alpha$ es de dimensión l sobre $\mathbb{R}$, y $\mathcal{K}(\bullet,\bullet)$ es positiva definida en $H_{\mathbb{R}} \times H_{\mathbb{R}}$. Si α, $\beta \in \Phi$ con $\alpha + \beta \neq 0$; $\mathcal{K}(\bullet,\bullet)$ es no singular en $H \times H$ y $L_\alpha \times L_{-\alpha}$. $\square$

Consideremos el isomorfismo de H con su espacio dual H^*, definido por la forma de Killing ($\lambda \leftrightarrow h_\lambda$). Es claro por el lema 3.3.7 que la forma de Killing transferida a $H^*_{\mathbb{R}} \times H^*_{\mathbb{R}}$ es un **producto escalar** positivo definido y que $\dim_{\mathbb{R}} H^* = l$ ya que la imagen del subespacio $H_{\mathbb{R}}$ al aplicarle el isomorfismo está incluida en el $\mathbb{R} -$ *espacio de* Φ. Así $E = \mathbb{R} -$ *espacio de* Φ es un espacio euclideano y Φ contiene una base para E. De esta observación y del teorema anterior tenemos:

Teorema 3.3.9: Sean L, H, Φ y E como antes. Entonces

- Φ genera a E, es finito y 0 no está en Φ.
- Si $\alpha \in \Phi$ entonces los únicos múltiplos de α en Φ son $\pm\alpha$.
- Si α, $\beta \in \Phi$, entonces $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.
- Si α, $\beta \in \Phi$, entonces $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$. $\square$

En el lenguaje del capítulo 2, este teorema nos demuestra que Φ es un **sistema de raíces**. Sin embargo, éste depende de H; en el apéndice A se prueba que las subálgebras torales maximales de L son conjugadas. Por lo tanto, los sistemas de raíces de subálgebras torales maximales distintas son isomorfos. Esto, nos permitirá poder clasificar las álgebras de Lie simples sobre los complejos.

3.4. Teoremas de Isomorfismo

En esta sección mostraremos que dos álgebras de Lie semisimples que tienen el mismo sistema de raíces son isomorfas. Además, construiremos algunos automorfismos de L y veremos una caracterización de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ a través de sus matrices de Cartan. Pero antes, necesitaremos de algunas definiciones. Para esto, L y L' denotarán dos álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$, H y H' serán subálgebras torales maximales de L y L' respectivamente. Φ y Φ' serán los sistemas de raíces correspondientes a (L, H) y (L', H').

Definimos el número $N_{\alpha,\beta}$ (α, $\beta \in \Phi$, $\alpha + \beta \neq 0$) por

$$\begin{aligned} [x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha,\beta} x_{\alpha+\beta} & \quad \text{si } \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in \Phi \\ N_{\alpha,\beta} = 0 & \quad \text{si } \alpha,\ \beta \in \Phi,\ \alpha+\beta \notin \Phi \end{aligned}$$

Por corolario 3.3.6, es claro que $N_{\alpha,\beta} \neq 0$ si α, β, $\alpha + \beta \in \Phi$. El siguiente lema, nos proporciona algunas relaciones que satisface $N_{\alpha,\beta}$.

Lema 3.4.1: Sea $N_{\alpha,\beta}$ como antes. Entonces:

1.- $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$

2.- Si α, β, $\gamma \in \Phi$ y $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces

$$N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\gamma} = N_{\gamma,\alpha}$$

3.- Si α, β, γ, $\delta \in \Phi$ son tales que la suma de dos de ellas es diferente de cero y $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$, entonces

$$N_{\alpha,\beta}N_{\gamma,\delta} + N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\delta} + N_{\gamma,\alpha}N_{\beta\delta} = 0$$

4.- Sean α, $\beta \in \Phi$ con $\beta \neq \pm \alpha$ y p, $q > 0$ definidos de la misma forma que en el lema 3.3.4. Entonces

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)p(q+1)$$

Dem.- 1.- Se sigue de las propiedades del bracket. 2.- y 3.- se obtiene a partir de la identidad de Jacobi.

4.- Este resultado es una consecuencia inmediata de la relación

$$[x_{-\alpha}[x_\alpha, x_\beta]] = -\frac{(\alpha, \alpha)}{2}p(q+1)x_\beta$$

cuya prueba es una aplicación del lema 3.3.4. La demostración detallada de este lema se encuentra en [12, pág.286]. □

Recordemos el concepto de orden en un espacio vectorial real.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n $(1 \leq n < \infty)$ y V^* el dual de V. Un *ordenamiento* en V es una relación $<$ entre pares de elementos de V que cumple con las siguientes propiedades:

1.- Si u, v, $w \in V$ y $u < v$, $v < w$ entonces $u < w$.

2.- Si u, $v \in V$ entonces sólamente una de las tres relaciones $u < v$, $v < u$, $u = v$ se cumple.

3.- Si u, v, $w \in V$ y $u < v$ entonces $u + w < v + w$.

4.- Si u, $v \in V$, $u < v$ y $c \neq 0$ es real, entonces $cu < cv$ ó $cv < cu$ dependendiendo de que $c > 0$ ó $c < 0$.

Tomemos ahora una base para V, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y para el dual V^*, $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$. Dado $v \neq 0 \in V$ hay un único entero r tal que $v_r^*(v) \neq 0$ y $v_s^*(v) = 0$ para $1 \leq s < r \leq n$; definimos $0 < v$ si $v_r^*(v) > 0$. Si u, $v \in V$ y $v \neq u$, decimos que $u < v$ si $0 < v - u$. Es fácil verificar que $<$ es un ordenamiento de V, conocido como **ordenamiento lexicográfico** en V inducido por la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Similarmente, tenemos el ordenamiento lexicográfico inducido en V^* por $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$, en donde se tiene que si $v^* \in V^*$ y $v^* \neq 0$ entonces $v^* > 0$ si y sólo si, el primer miembro de la sucesión $v^*(v_1), \ldots, v^*(v_n)$ es positivo.

En el caso (L, H), las raíces son real-valuadas en H_R por lo que podemos considerarlas como elementos del dual H_R^* del espacio vectorial H_R. Con la ayuda de estos conceptos, probaremos el siguiente

Teorema 3.4.2: Sean L, L', H, H', Φ, Φ' como antes. Supongamos que π es un isomorfismo de H en H' tal que $\pi^*(\Phi') = \Phi$. Entonces existe un isomorfismo de L en L', el cual es extensión de π.

Dem.- Seleccionemos el ordenamiento lexicográfico en H_R^*. Para $\sigma \in \Phi$ con $\sigma > 0$ consideremos el conjunto

$$\Phi(\sigma) = \{\alpha : \alpha \in \Phi, \ -\sigma < \alpha < \sigma\}$$

Para toda $\alpha \in \Phi$, sea $\alpha' \in \Phi'$ la preimagen de α bajo π^*. Escogemos los elementos $x_\alpha \in L_\alpha$ y $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tales que $\mathcal{K}(x_\alpha, y_\alpha) = -1$, definimos los números $N_{\alpha,\beta}$ como en el lema 3.4.1. Será suficiente construir los elementos $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$, $y'_{\alpha'} \in L'_{-\alpha'}$ $(\alpha \in \Phi)$ con

$$\text{(a)} \qquad \mathcal{K}(x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}) = -1 \qquad (\alpha \in \Phi)$$

$$\text{(b)} \qquad [x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}] = N_{\alpha,\beta} x'_{\alpha'+\beta'} \qquad (\alpha, \beta \in \Phi,\ \alpha + \beta \neq 0)$$

pues la única transformación lineal η de L en L' tal que $\eta|_H = \pi$ y que envía a x_α en $x'_{\alpha'}$ es un isomorfismo.

La demostración la haremos por inducción sobre el orden lexicográfico; pero antes, analizaremos algunos detalles.

Supongamos que $\sigma \in \Phi$ es positiva y que hemos construido los elementos $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$, $y'_{\alpha'} \in L'_{-\alpha'}$ para toda $\alpha \in \Phi(\sigma)$ tales que (a) se cumple $\forall \alpha \in \Phi(\sigma)$ y (b) para toda α, $\beta \in \Phi(\sigma)$ con $\alpha + \beta \neq 0$ y $-\sigma < \alpha + \beta < \sigma$. Definimos ahora, los elementos $x'_{\sigma'}$ y $y'_{\sigma'}$. Para $x'_{\sigma'}$ tenemos:

(i) No existen α, $\beta \in \Phi(\sigma)$ tales que $\alpha + \beta = \sigma$; por lo que $x'_{\sigma'}$ será algún elemento de $L'_{\sigma'}$ diferente de cero.

(ii) Existen γ, $\delta \in \Phi(\sigma)$ con $\gamma + \delta = \sigma$. Así $x'_{\sigma'}$ es tal que satisface la relación

$$[x'_{\gamma'}, x'_{\delta'}] = N_{\gamma,\delta} x'_{\sigma'}$$

esto es posible pues $N_{\gamma,\delta} \neq 0$ y $\gamma' + \delta' = \sigma'$.

$y'_{\sigma'}$ queda determinado por (a). Con lo anterior, tenemos que para $\Phi(\tau)$, donde τ es la raíz positiva minimal con respecto al orden $<$; podemos realizar tal construcción.

Sea ρ el sucesor inmediato de σ con respecto al orden. Probaremos (a) $\forall \alpha \in \Phi(\rho)$ y (b) $\forall \alpha, \beta \in \Phi(\rho)$ con $\alpha + \beta \neq 0$ y $-\rho < \alpha + \beta < \rho$; extendiendo la definición de los $x'_{\alpha'}$.

Para α, $\beta \in \Phi(\rho)$; $\alpha + \beta \neq 0$ y $-\rho < \alpha + \beta < \rho$, $N'_{\alpha,\beta}$ es de la siguiente forma: Si $\alpha' + \beta' \notin \Phi'$, $N'_{\alpha,\beta} = 0$ y si $\alpha' + \beta' \in \Phi'$, $N'_{\alpha,\beta}$ es tal que $[x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}] = N'_{\alpha,\beta} x'_{\alpha'+\beta'}$. Por lo cual, será suficiente probar que $N_{\alpha,\beta} = N'_{\alpha,\beta}$. Lo haremos por casos:

1.- *α, β y $\alpha + \beta$ están en $\Phi(\sigma)$.* El resultado se sigue de la hipótesis de inducción.

2.- *α, $\beta \in \Phi(\rho)$, $\alpha + \beta = \sigma$.* Entonces ambas deberán ser positivas por lo que pertenecen a $\Phi(\sigma)$. Por (ii), asumiremos que ni α, ni β son iguales a γ ó δ. Notemos que también γ y δ son positivas. Así $\alpha + \beta + (-\gamma) + (-\delta) = 0$, pero la suma de dos de ellas no es cero. Aplicando el lema 3.4.1 tenemos que

$$N_{\alpha,\beta} N_{-\gamma,-\delta} = -N_{\beta,-\gamma} N_{\alpha,-\delta} - N_{-\gamma,\alpha} N_{\beta,-\delta}$$

$$N'_{\alpha,\beta} N'_{-\gamma,-\delta} = -N'_{\beta,-\gamma} N'_{\alpha,-\delta} - N'_{-\gamma,\alpha} N'_{\beta,-\delta}$$

Por otra parte, $\beta + (-\gamma) \neq 0$ y $-\sigma < \beta$, γ, $\beta + (-\gamma) < \sigma$. Por la hipótesis de inducción $N_{\beta,-\sigma} = N'_{\beta,-\sigma}$. Argumentando en forma similar con el otro término, concluimos que

$$N_{\alpha,\beta} N_{-\gamma,-\delta} = N'_{\alpha,\beta} N'_{-\gamma,-\delta}$$

Observemos que todos estos números son distintos de cero. De esta manera, como $N_{\gamma,\delta} = N'_{\gamma,\delta}$, se sigue del lema 3.4.1(4) y de la isometría de π^* que $N_{-\gamma,-\delta} = N'_{-\gamma,-\delta}$. Por lo que $N_{\alpha,\beta} = N'_{\alpha,\beta}$.

3.- α, $\beta \in \Phi(\rho)$, $\alpha + \beta = -\sigma$. Es similar al caso anterior.

4.- α, $\beta \in \Phi(\rho)$ *y* $\alpha + \beta$ *está en* $\Phi(\sigma)$. A menos de que α ó β sea $\pm\sigma$, estaremos en el caso 1. Si $\alpha = \sigma$, entonces β deberá estar en $\Phi(\sigma)$. Así $(\alpha + \beta) + (-\beta) = \sigma$ por lo que estaremos en el caso 2. Como consecuencia tenemos que $N_{\alpha+\beta,-\beta} = N'_{\alpha+\beta,-\beta}$ y del lema 3.4.1 se sigue que $N_{-\alpha,-\beta} = N'_{-\alpha,-\beta}$ lo que implica que $N_{\alpha,\beta} = N'_{\alpha,\beta}$. La otra alternativa es análoga. □

En particular, se tiene que un automorfismo de H determina un automorfismo de L. Un ejemplo, es el isomorfismo $\sigma : H \to H$ tal que $\sigma(h_\alpha) = -h_\alpha$ y aplicando la definición de $-h_\alpha$, se sigue que $-h_\alpha = h_{-\alpha}$. De esta forma, obtenemos que x_α deberá ser enviado a $-y_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$.

Otro ejemplo de automorfismo de L es el que produce la acción del grupo de Weyl W de Φ sobre Φ. Es claro que W induce una acción en H; por el isomorfismo que existe entre H y su dual. Haremos la construcción de este automorfismo para la reflexión σ_α $(\alpha \in \Phi)$. De hecho, la extensión de σ_α a L, deberá enviar a L_β en $L_{\sigma^{-1}\beta}$. En efecto, como $ad\, x_\beta$, $\beta \in \Phi$, es nilpotente (proposición 3.2.2), tiene sentido definir el automorfismo $\tau_\alpha = \exp\, ad\, x_\alpha \,\exp\, ad(-y_\alpha) \,\exp\, ad\, x_\alpha$; donde $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$. Analicemos ahora, el comportamiento de τ_α en H; para esto, escribamos $H = \ker\alpha \oplus \mathbb{C}\, h_\alpha$. Así $\tau(h) = h$, $\forall h \in \ker\alpha$ y $\tau(h_\alpha) = -h_\alpha$. De donde τ_α y σ_α coinciden en H y τ_α envía a L_β en $L_{\sigma_\alpha\beta}$.

Para el siguiente resultado, recordemos primero que a cada sistema de raíces Φ de (L, H) le corresponde una matriz de Cartan A que no depende de la elección de la base para Φ (sección 2.3.1); más aún, tampoco depende de la subálgebra toral maximal H (corolario A.2.6). De esta forma, podemos asociarle a L una única clase de equivalencia de matrices de Cartan de rango l. Esto nos permite establecer el siguiente

Teorema 3.4.3: Dos álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ son isomorfas si y sólo si las correspondientes clases de equivalencia de las matrices de Cartan son iguales. Una álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ es simple si y sólo si la clase de equivalencia de la matriz de Cartan asociada es irreducible.

Dem.- Sean L, L', H, H' como antes. Supongamos que las dos álgebras de Lie dadas tienen la misma clase de equivalencia de matrices de Cartan. Entonces, es posible encontrar las bases $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ y $\Delta' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l\}$ de los sistemas de raíces Φ y Φ' respectivamente, tales que

$$(3.4.1) \qquad \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \frac{2(\alpha'_i, \alpha'_j)}{(\alpha'_i, \alpha'_i)} \qquad (1 \le i, j \le l)$$

por lo que podemos encontrar un isomorfismo π de H en H' tal que su dual π^* envía a α'_i en α_i para $(1 \le i, j \le l)$. De (3.4.1) se sigue que $\pi^{*-1}\sigma_{\alpha_i}\pi^* = \sigma_{\alpha'_i}$ (σ_{α_i} como en el capítulo dos). Por lo que $\pi^{*-1} W \pi^* = W'$, donde W y W' son los grupos de Weyl de Φ y Φ'. Como $\Phi = \cup_{1 \leq i \leq l} W \alpha_i$ y $\Phi' = \cup_{1 \leq i \leq l} W' \alpha_i$, es claro que $\pi^* \Phi' = \Phi$. Esto implica, por el teorema 3.4.2, que podemos extender a π a un isomorfismo de L en L'. El otro sentido de esta proposición es inmediato.

Ahora probaremos la segunda parte de la afirmación. Primero mostraremos que si L es simple, entonces Φ es irreducible y como consecuencia, la matriz de Cartan asociada será irreducible. Supongamos lo contrario, es decir, $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, con $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Si $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Phi_2$, entonces $(\alpha + \beta, \alpha) \neq 0$ y $(\alpha + \beta, \beta) \neq 0$ de donde $\alpha + \beta \notin \Phi$ y $[L_\alpha L_\beta] = 0$. Esto muestra que la subálgebra K de L generada por todos los L_α $(\alpha \in \Phi_1)$ es centralizada por todos los L_β $(\beta \in \Phi_2)$; en particular, K es una subálgebra propia de L pues $Z_{\mathrm{L}} = C_{\mathrm{L}}(\mathrm{L}) = 0$. Además, K es normalizada por los L_α $(\alpha \in \Phi_1)$ por lo que $[K, L_\alpha] \subset K$, de lo anterior se sigue que $[K, \mathrm{L}] \subset K$ ya que L_α $(\alpha \in \Phi)$ generan a L. En otras palabras, K es un ideal propio de L diferente de cero, contradiciendo la simplicidad de L.

Recíprocamente, supongamos que la matriz de Cartan asociada a L es reducible. Podemos encontrar dos subconjuntos S_1, S_2 ajenos y no vacíos de $\{1, \ldots, l\}$ cuya unión es $\{1, \ldots, l\}$ tales que $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ para $i \in S_1$, $j \in S_2$. Sea W_r el subgrupo de W generado por σ_{α_i} $(i \in S_r)$ y $\Phi_r = \cup_{i \in S_r} W \alpha_i$ $(r = 1, 2)$. Claramente $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. Para $i \in S_1$, $j \in S_2$ $\sigma_{\alpha_i} \alpha_j = \alpha_j$ y $\sigma_{\alpha_j} \alpha_i = \alpha_i$ por lo que $\sigma_{\alpha_i} \sigma_{\alpha_j} = \sigma_{\alpha_j} \sigma_{\alpha_i}$. De esta forma, los elementos de W_1 conmutan con los de W_2. Esto muestra que $W = W_1 W_2$ y que $\Phi_r = \cup_{i \in S_r} W_r \alpha_i$, $r = 1, 2$; en particular, tenemos que los elementos de Φ_r son combinaciones lineales enteras de α_i con $i \in S_r$. Así $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$; más aún, si $\sigma_r \in W_r$, $i \in S_1$, $j \in S_2$, entonces $(\sigma_1 \alpha_i, \sigma_2 \alpha_j) = (\alpha_i, \alpha_j) = 0$ de donde, concluimos que para $\alpha \in \Phi_1$ y $\beta \in \Phi_2$, $(\alpha, \beta) = 0$ y $\alpha + \beta$ es cero ó no es raíz. Definimos H_r como el subespacio de H generado por los h_{α_i} $(i \in S_r)$ y sea

$$L_r = H_r + \sum_{\alpha \in \Phi_r} L_\alpha \qquad (r = 1, 2)$$

Se sigue de las observaciones anteriores que L_r es una subálgebra de L para $r = 1, 2$. L es suma directa de L_1 y L_2 con $[L_1, L_2] = 0$. Por consiguiente, L_1 y L_2 son ideales distintos de cero y su suma directa es L. De este modo, L no es simple. □

En particular se tiene que una álgebra de Lie es simple si y sólo si su diagrama de Dynkin es conexo (ver sección 2.3.1).

3.5. Clasificación de las Algebras de Lie Simples sobre los Complejos

Dado un sistema de raíces Φ, construiremos una álgebra de Lie semisimple L que tenga a Φ como sistema de raíces. L será finita y única (salvo isomorfismos).

Este resultado aunado al teorema 3.4.3 y a la clasificación de los diagramas de Dynkin, nos dará la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$.

Sean L una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$, H una subálgebra de Cartan de L (ver ápendice A) y Φ el correspondiente sistema de raíces con base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Consideremos el conjunto de generadores de L; $x_i \in L_{\alpha_i}$, $y_i \in L_{-\alpha_i}$ tales que $[x_i y_i] = h_i$ (lema 3.3.2) y $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ los enteros de Cartan. Así estos generadores satisfacen las siguientes relaciones:

$$
\begin{array}{lr}
(i)\ [h_i h_j] = 0 & (1 \leq i, j \leq l) \\
(ii)\ [x_i y_i] = h_i, \quad [x_i y_j] = 0 & \text{si } i \neq j \\
(iii)\ [h_i x_j] = a_{ji}\, x_j, \quad [h_i y_j] = -a_{ji}\, y_j & \\
(iv)\ (ad\, x_i)^{1-a_{ji}}(x_j) = 0 & (i \neq j) \\
(v)\ (ad\, y_i)^{1-a_{ji}}(y_j) = 0 & (i \neq j)
\end{array}
$$

(i) es clara. (ii) es una consecuencia de la proposición 3.2.1 y del lema 2.2.2. (iii) se obtiene al sustituir el valor de h_i en términos de t_i (ver sección 3.2) y desarrollar. Para (iv), notemos que $\alpha_j - \alpha_i$ no es una raíz, por lo que la α_i-cadena α_j consiste de las raíces α_j, $\alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j + p\alpha_i$ donde $-p = a_{ji}$ (lema 3.3.4). Como x_j es enviado a cada espacio raíz $\alpha_j + \alpha_i$, $\alpha_j + 2\alpha_i, \ldots$ a través de aplicaciones sucesivas de $ad\, x_j$, se tiene que $(ad\, x_i)^{1-a_{ji}}(x_j) = 0$. (v) es análogo.

Recíprocamente, fijemos un sistema de raíces Φ con base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ y $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq l}$ la matriz de Cartan asociada. A continuación, vamos a analizar el álgebra de Lie definida por $(i) - (iii)$ únicamente.

Para esto, consideremos primero el álgebra de Lie libre $\hat{\mathrm{L}}$ generada por $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{h}_i \mid 1 \leq i \leq l\}$. Sean $\hat{K}$ un ideal de $\hat{\mathrm{L}}$ generado por: $[\hat{h}_i \hat{h}_j]$, $[\hat{x}_i \hat{y}_j] - \delta_{ij} \hat{h}_i$, $[\hat{h}_i \hat{x}_j] - a_{ji} \hat{x}_j$, $[\hat{h}_i \hat{y}_j] + a_{ji} \hat{y}_j$ y $\mathrm{L}_0 = \hat{\mathrm{L}}/\hat{K}$ el álgebra cociente. x_i, y_i, h_i son las imágenes respectivas en L_0 de los generadores $\hat{x}_i$, $\hat{y}_i$, $\hat{h}_i$. Así x_i, y_i y h_i satisfacen las relaciones $(i) - (iii)$. En general, la dimensión de L_0 es infinita.

Para estudiar la estructura de L_0, construiremos una familia de representaciones de L_0

en el álgebra tensorial $\mathcal{L}$ de un espacio vectorial complejo V con base $\{v_1, \ldots, v_l\}$. Para simplificar notación, $v_{i1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}$ será escrito como $v_{i1} \ldots v_{ir}$ $(1 \leq i_k \leq l)$. Estos tensores junto con el 1 forman una base para $\mathcal{L}$ sobre $\mathbb{C}$. Definimos los siguientes endomorfismos de $\mathcal{L}$:

1.- $\hat{h}_j.1 = 0$; $\qquad \hat{h}_j.v_{i1} \ldots v_{it} = -(a_{i1j} + \cdots + a_{itj})v_{i1} \ldots v_{it}$

2.- $\hat{y}_j.1 = v_j$; $\qquad \hat{y}_j.v_{i1} \ldots v_{it} = v_j v_{i1} \ldots v_{it}$

3.- $\hat{x}_j.1 = 0 = \hat{x}_j.v_i$; $\qquad \hat{x}_j.v_{i1} \ldots v_{it} = v_{i1}(\hat{x}_j.v_{i2} \ldots v_{it}) - \delta_{i1j}(a_{i2j} + \cdots + a_{itj})v_{i2} \ldots v_{it}$

claramente, hay una extensión de estos endomorfismos a $\hat{\mathrm{L}}$, produciendo una representación $\hat{\phi} : \hat{\mathrm{L}} \to gl(\mathcal{L})$.

Lema 3.5.1: Sea $\hat{K}_0 = \ker \hat{\phi}$. Entonces $\hat{K} \subset \hat{K}_0$.

Dem.- Observemos que $\hat{h}_j$ actúa diagonalmente en V, por lo que $[\hat{h}_i \hat{h}_j] \in \hat{K}_0$.

Sea $j = i$. De (3), obtenemos:

$$\hat{x}_i.\hat{y}_j.v_{i2} \ldots v_{it} - \hat{y}_j.\hat{x}_i.v_{i2} \ldots v_{it} = -\delta_{ji}(a_{i2i} + \cdots + a_{iti})v_{i2} \ldots v_{it} = \delta_{ji}\hat{h}_i v_{i2} \ldots v_{it}$$

Además, $(\hat{x}_i\hat{y}_j - \hat{y}_j\hat{x}_i).1 = 0 = \delta_{ij}\hat{h}_i.1$ de donde $[\hat{x}_i\hat{y}_j] - \delta_{ij}\hat{h}_i \in \hat{K}_0$.

Por otra parte, $(\hat{h}_i\hat{y}_j - \hat{y}_j\hat{h}_i).1 = \hat{h}_i.v_j = -a_{ji}v_j = -a_{ji}\hat{y}_j.1$. Similarmente,

$$(\hat{h}_i\hat{y}_j - \hat{y}_j\hat{h}_i).v_{i1} \ldots v_{it} = \hat{h}_i v_j v_{i1} \ldots v_{it} + (a_{i1i} + \cdots + a_{iti})v_j v_{i1} \ldots v_{it}$$

$$= -a_{ji}\hat{y}_j v_{i1} \ldots v_{it}$$

lo cual implica que $[\hat{h}_i\hat{y}_j] + a_{ji}\hat{y}_j \in \hat{K}_0$.

Antes de probar la última parte, notemos que

$$\hat{h}_i.\hat{x}_j.v_{i1} \ldots v_{it} = -(a_{i1i} + \cdots + a_{iti} - a_{ji})\hat{x}_j.v_{i1} \ldots v_{it} \tag{3.5.1}$$

En efecto: para el caso en que $t = 0$, ambos lados son cero, pues $v_{i1} \ldots v_{it} = 1$. Por hipótesis de inducción, tendremos que $\hat{x}_j v_{i2} \ldots v_{it}$ es un eigenvector de $\hat{h}_i$, con eigenvalor $-(a_{i2i} + \cdots + a_{iti} - a_{ji})$. Multiplicando este eigenvector por v_{i1} en el lado izquierdo, es claro que produce otro eigenvector para $\hat{h}_i$ con eigenvalor $-(a_{i1i} + \cdots + a_{iti} - a_{ji})$.

Así

$$\hat{h}_i.\hat{x}_j.v_{i1} \ldots v_{it} = \hat{h}_i.v_{i1}(\hat{x}_j.v_{i2} \ldots v_{it}) - \delta_{i1j}(a_{i2j} + \cdots + a_{itj})\hat{h}_i.v_{i2} \ldots v_{it}$$

Si $i_1 \neq j$, hemos terminado. En caso contrario, aplicamos (3), con lo cual (3.5.1) queda demostrada.

De lo anterior, tenemos que

$$(\hat{h}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{h}_j).v_{i1}\dots v_{it} = (-(a_{i1i} + \cdots + a_{iti} - a_{ji}) + (a_{i1i} + \cdots + a_{iti})).\hat{x}_j.v_{i1}\dots v_{it}$$

$$= a_{ji}\hat{x}_j v_{i1}\dots v_{it}$$

y como $(\hat{h}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{h}_j).1 = 0$, entonces $[\hat{h}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{h}_i] - a_{ji}\hat{x}_j \in \hat{K}_0$. Finalmente, $\hat{K} \subset \hat{K}_0$. □

Teorema 3.5.2: Sea Φ un sistema de raíces con base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ y sea L_0 el álgebra de Lie con generadores $\{x_i,\ y_i,\ h_i \mid 1 \le i \le l\}$ los cuales satisfacen las relaciones $(i) - (iii)$. Entonces los h_i son una base para una subálgebra abeliana l-dimensional H de $L_0 = Y + H + X$ (suma directa de espacios), donde Y (resp. X) es la subálgebra de L_0 generada por los y_i (resp. x_i).

Dem.- La prueba se hará por pasos y utilizaremos la representación $\phi : L_0 \to gl(\pounds)$ definida como $\phi(x) = \hat{\phi}(\hat{x})$ si x es la imagen en L_0 de $\hat{x} \in \hat{L}$.

1.- $\sum \mathbb{C}\ \hat{h}_j \cap \ker \hat{\phi} = 0$.

Si $\hat{h} = \sum_{j=1}^{l} a_j\hat{h}_j$ y $\hat{\phi}(\hat{h}) = 0$, entonces en particular, los eigenvalores $-\sum_j a_j a_{ij}$ $(1 \le i \le l)$ de $\hat{\phi}(\hat{h})$ son cero. Pero la matriz de Cartan (a_{ij}) de Φ es no singular, esto obliga a que $a_j = 0$ $j = 1, \dots, l$, es decir, $\hat{h} = 0$.

2.- *El homomorfismo canónico $\hat{L} \to L_0$ transforma isomórficamente a $\sum \mathbb{C}\ \hat{h}_j$ en $\sum \mathbb{C}\ h_j$.*

Esto es una consecuencia de (1).

3.- *El subespacio $\sum \mathbb{C}\ \hat{x}_j + \sum \mathbb{C}\ \hat{y}_j + \sum \mathbb{C}\ \hat{h}_j$ de $\hat{L}$ es transformado isomórficamente en L_0.*

Fijemos i. Las relaciones $(i) - (iii)$ implican: $[x_i y_i] = h_i$, $[h_i x_i] = 2x_i$, $[h_i y_i] = -2y_i$; de esta forma, $\mathbb{C}\ x_i + \mathbb{C}\ y_i + \mathbb{C}\ h_i$ es una imagen homomórfica de $sl(2, \mathbb{C})$. Pero la última es simple y $h_i \neq 0$ (paso (2)), así $\mathbb{C}\ x_i + \mathbb{C}\ y_i + \mathbb{C}\ h_i$ deberá ser isomorfa a $sl(2, \mathbb{C})$. Además, el conjunto $\{x_i,\ y_i,\ h_i \mid 1 \le i \le l\}$ es linealmente independiente pues sus elementos son diferentes de cero y cumplen las relaciones $(i) - (iii)$.

4.- *$H = \sum \mathbb{C}\ h_i$ es una subálgebra abeliana l-dimensional de L_0.*

Esto se sigue de (2) e (i).

5.- *Si* $[x_{i1}\dots x_{it}]$ *denota a* $[x_{i1}[x_{i2}\dots[x_{it-1}x_{it}]\dots]$, *entonces* $[h_j[x_{i1}\dots x_{it}]] = (a_{i1j}+\cdots+a_{itj})[x_{i1}\dots x_{it}]$. *Similarmente para los* y_i *en lugar de los* x_i, $-a_{ij}$ *en vez de* a_{ij}.

Para $t=1$, es la relación (iii). Utilizando inducción y aplicando la identidad de Jacobi se sigue (5).

6.- *Si* $t\geq 2$, *entonces* $[y_i[x_{i1}\dots x_{it}]]\in X$ *y análogamente para* Y.

De (ii) $[y_ix_i]=-\delta_{ij}h_i$, así el caso para $t=2$ es inmediato de la identidad de Jacobi y (iii). El caso general se sigue de aplicar inducción en t.

7.- $Y+H+X$ *es una subálgebra de* L_0, *de aquí que coincida con* L_0.

El hecho de que $Y+H+X$ es una subálgebra se sigue de (4), (5) y (6).

Por otro lado, $Y+H+X$ contiene al conjunto de generadores de L_0, por lo que coinciden.

8.- *La suma* $L_0=Y+H+X$ *es directa.*

(5) muestra como descomponer a L_0 en eigenespacios para $ad\,H$; por lo tanto se tiene (8). □

Hasta aquí hemos estudiado la estructura de la álgebra de Lie L_0 determinada por $(i)-(iii)$. Ahora, estudiaremos el caso en que se satisfagan $(i)-(v)$. Para esto, denotaremos por $x_{ij}=(ad\,x_i)^{1-a_{ji}}(x_j)$, $y_{ij}=(ad\,y_i)^{1-a_{ji}}(y_j)$. Estos elementos se encuentran en L_0.

Teorema 3.5.3: En L_0, $ad\,x_k(y_{ij})=0$ $(1\leq k\leq j)$ para $i\neq j$.

Dem.- *Caso (a):* $k\neq i$. Como, $[x_ky_i]=0$ (por (ii)) $ad\,x_k$ y $ad\,y_i$ conmutan. De aquí que $ad\,x_k(y_{ij})=(ad\,y_i)^{1-a_{ji}}ad\,x_k(y_j)$. Si $k=j$, entonces $ad\,x_k(y_{ij})=(ad\,y_i)^{1-a_{ji}}(h_j)=0$. En caso de que $k\neq j$, se tiene por (ii) que $[x_ky_j]=0$.

Caso (b): $k=i$. Consideremos la subálgebra $S=\mathbb{C}\,x_i+\mathbb{C}\,y_i+\mathbb{C}\,h_i$ de L_0. S es isomorfa a $sl(2,\mathbb{C})$ por lo que podemos utilizar algunas de las ideas vistas en la sección 1.9. Como $j\neq i$, $[x_iy_j]=0$, y_i es un vector maximal para S de peso $\lambda=-a_{ji}$; ya que $[h_iy_j]=-a_{ij}y_j$. Aplicando inducción en t, es fácil demostrar que $ad\,x_i(ad\,y_i)^t(y_j)=t(\lambda-t+1)(ad\,y_i)^{t-1}(y_i)$. El lado derecho es cero cuando $t=1-a_{ji}$. □

Construiremos a continuación un automorfismo para un espacio vectorial V infinito-dimensional. Diremos que un endomorfismo $\mathcal{X}$ de V es **localmente nilpotente** si cada elemento de V es enviado al cero por alguna potencia de $\mathcal{X}$. En este caso, $\mathcal{X}$ es nilpotente para cada subespacio finito-dimensional W de V por lo que podemos considerar el automorfismo

$\exp(\mathcal{X}|_W)$. Es claro que $\exp(\mathcal{X}|_W)$ y $\exp(\mathcal{X}|_{W'})$ coinciden en $W \cap W'$; de esta forma, podemos "pegar" estas transformaciones para obtener un automorfismo "$\exp \mathcal{X}$" de V.

Teorema de Serre: Dado un sistema de raíces Φ con base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Sea L el álgebra de Lie generada por $3l$ elementos $\{x_i,\ y_i,\ h_i \mid 1 \le i \le l\}$, que satisfacen las relaciones $(i)-(v)$. Entonces, L es una álgebra semisimple, finito-dimensional con subálgebra de Cartan generada por los h_i y con sistema de raíces Φ.

Dem.- La demostración se hará por pasos. Definimos el álgebra cociente $\mathrm{L} = \mathrm{L}_0/K$, donde L_0 está definida como en el teorema 3.5.2 y K el ideal generado por los elementos x_{ij}'s, y_{ij}'s $(i \neq j)$. Sea I (resp. J) el ideal de X (resp. Y) generado por todos los x_{ij}'s (resp. y_{ij}'s). En particular, $I,\ J \subset K$.

1.- *I, J son ideales de L_0.*

Lo probaremos para J, (para I es análogo). Por un lado, y_{ij} es un eigenvector para $ad\, h_k$ $(1 \le k \le l)$, con eigenvalor $a_{jk} + (a_{ji} - 1)a_{ik}$ ((5) de la dem. de 3.5.2) y como $ad\, h_k(Y) \subset Y$, se sigue de la identidad de Jacobi que $ad\, h_k(J) \subset J$. Por otro lado, del lema anterior tenemos que $ad\, x_k(y_{ij}) = 0$. Así $ad\, x_k$ transforma a Y en $Y + H$ ((6) de 3.5.2); combinando esto con la identidad de Jacobi y con $ad\, h_k(J) \subset J$, obtenemos que $ad\, x_k(J) \subset J$. Finalmente, aplicando de nuevo la identidad de Jacobi se sigue que $ad\, \mathrm{L}_0(J) \subset J$ pues L_0 es generada por x_k, y_k y h_k.

2.- *$K = I + J$.*

Por definición $I + J \subset K$; pero, por (1) $I + J$ es un ideal de L_0 que contiene a todos los x_{ij}'s y y_{ij}'s, de donde $K = I + J$.

3.- *$L = N^- + H + N$ (suma directa de subespacios), donde $N^- = Y/J$, $N = X/I$ y H está identificada con su imagen bajo el morfismo canónico $L_0 \to L$.*

Esto se obtiene a partir de (2) y de que $\mathrm{L}_0 = Y + H + X$.

4.- *$\sum \mathbb{C}\, x_i + \sum \mathbb{C}\, y_i + \sum \mathbb{C}\, h_i$ son transformados isomórficamente en L.*

La prueba es análoga a la hecha en el paso (3) de la demostración del teorema 3.5.2.

5.- *Si $\lambda \in H^*$, sea $L_\lambda = \{x \in L \mid [hx] = \lambda(h)x\ \forall h \in H\}$. Entonces $H = L_0$, $N = \sum_{\lambda \succ 0} L_\lambda$, $N^- = \sum_{\lambda \prec 0} L_\lambda$ ($\lambda \succ 0$ ó $\lambda \prec 0$ en el sentido de la sección 2.2.1) y cada L_λ es finito-dimensional.*

Esto es una consecuencia de (3), (4) y del teorema 3.5.2.

6.- *Para $1 \le i \le l$, $ad\, x_i$ y $ad\, y_i$ son endomorfismos localmente nilpotentes de L.*

Será suficiente considerar $ad\, x_i$ para i fijo. Sea M el subespacio generado por todos los elementos de L que son enviados al cero por alguna potencia de $ad\, x_i$. Si $x \in M$ (resp. $y \in M$) es transformado al cero por $(ad\, x_i)^r$ (resp. $(ad\, x_i)^s$), entonces $[xy]$ es transformado en cero por $(ad\, x_i)^{r+s}$. De esta forma, M es una subálgebra de L. Pero todo $x_k \in M$ (propiedad (iv)) y todo $y_k \in M$ (por (i) y (ii)). Así $M =$ L.

7.- $\tau_i = \exp(ad\, x_i)\exp(ad\,(-y_i))\exp(ad\, x_i)$ $(1 \leq i \leq j)$ *es un automorfismo de L.*

Esto se sigue de (6) y de la observación hecha antes del enunciado de este teorema.

8.- *Si* λ, $\mu \in H^*$ *y* $\sigma\lambda = \mu$ *(*$\sigma \in W$*, el grupo de Weyl de* Φ*), entonces* $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$.

Es suficiente probar esto cuando $\sigma = \sigma_{\alpha i}$ es una reflexión, pues éstas generan a W. El automorfismo τ_i de L construido en el paso anterior coincide en el espacio finito-dimensional $L_\lambda + L_\mu$ con el producto de exponenciales. Por otro lado, de $(i) - (iii)$ tenemos que

$$\tau_i(h_j) = \exp(ad\, x_i)\exp(-ad\, y_i)(h_j - a_{ij}x_i) = \exp(ad\, x_i)(h_j - a_{ij}x_i - a_{ij}h_i)$$

$$= h_j - a_{ij}x_i - a_{ij}h_i - a_{ij}x_i - 2a_{ij}x_i$$

así

$$\tau_i(h_j) = h_j - a_{ij}h_i$$

por lo que

$$\lambda(\tau_i(h_j)) = \lambda(h_i) - \lambda(h_i)a_{ij} = \sigma_{\alpha i}(\lambda)(h_j)$$

de esta forma, si $x \in L_\mu$

$$\begin{aligned}\tau_i([h_i x]) &= \tau_i(\mu(h_j)x)\\ &= \tau_i(\sigma_{\alpha i}(\lambda)(h_j)x)\\ &= \lambda(\tau_i(h_j))\tau_i(x)\\ &= [\tau_i(h_j)\tau_i(x)] \in L_\lambda\end{aligned}$$

es decir, $\tau_i^{-1}L_\lambda \subset L_\mu$. Pero $\sigma_{\alpha i} = \sigma_{\alpha i}^{-1}$, se sigue que τ_i intercambia a L_λ y L_μ. En particular, $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$.

9.- *Para* $1 \leq i \leq l$, $\dim L_{\alpha i} = 1$ *y* $L_{k\alpha i} = 0$ *para* $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1, -1\}$.

Esto es claro para L_0 (ver (3) de la demostración del teorema 3.5.2). De aquí que sea válido para L por (4).

10.- *Si* $\alpha \in \Phi$, *entonces* $\dim L_\alpha = 1$ *y* $L_{k\alpha} = 0$ *para* $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1, -1\}$.

Del teorema 2.2.7(3) sabemos que existe $\sigma \in W$ tal que $\sigma\alpha$ es una raíz simple. Aplicando (8) y (9), obtenemos (10).

11.- *Si* $L_\lambda \neq 0$, *entonces* $\lambda \in \Phi$ *ó* $\lambda = 0$.

Supongamos lo contrario. Del teorema 3.5.2 y (4) es claro que λ es una combinación lineal de raíces simples con coeficientes enteros y del mismo signo (no todos cero). Por (10), λ no es múltiplo de alguna raíz; así el hiperplano $\mathcal{P}_\lambda$ no está contenido en $\cup_{\alpha\in\Phi}\mathcal{P}_\alpha$. Tomemos $\mu \in (\mathcal{P}_\lambda - \cup_{\alpha\in\Phi}\mathcal{P}_\alpha)$; es posible encontrar $\sigma \in W$ tal que $(\alpha_i, \sigma\mu) > 0$ $(1 \leq i \leq l)$. De esta forma, $0 = (\lambda, \mu) = (\sigma\lambda, \sigma\mu)$; pero $\sigma\lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i'\alpha_i$, $k_i' \in \mathbb{Z}$; por lo que $(\sigma\lambda, \sigma\mu) = \sum k_i'(\alpha_i, \sigma\mu)$ lo que implica que algunos de los k_i''s son positivos y otros negativos. De aquí que $L_{\sigma\lambda} = 0$. Lo cual contradice (8).

12.- $\dim L = l + car\ \Phi < \infty$.

Se sigue de (5), (10) y (11).

13.- *L es semisimple.*

Sea A un ideal abeliano de L; tenemos que mostrar que $A = 0$. Como $ad_A H \subset A$, $A = (A \cap H) + \sum_{\alpha\in\Phi}(A \cap L_\alpha)$ pues L $= H + \sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$. Si $L_\alpha \subset A$, entonces $[L_\alpha L_{-\alpha}] \subset A$, de aquí que, por (*ii*) y (*iii*), $L_{-\alpha} \subset A$; lo cual implica que A tiene una copia del álgebra simple $sl(2, \mathbb{C})$. Esto es absurdo pues A es abeliano y por lo tanto soluble. Así $A = A \cap H \subset H$, de donde $[L_\alpha A] = 0$ $(\alpha \in \Phi)$, es decir, $A \subset \cap_{\alpha\in\Phi} \ker\alpha = 0$ (los α_i's generan a H^*).

14.- *H es una subálgebra de Cartan de L y Φ el sistema de raíces correspondiente.*

H es abeliana, por lo tanto nilpotente y además es igual a su normalizador, pues $L = H + \sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$, es decir, H es subálgebra de Cartan. Claramente, Φ es el correspondiente sistema de raíces. □

Finalmente, el teorema de Serre y el teorema 3.4.2, nos dan la existencia y unicidad de una álgebra de Lie semisimple para un sistema de raíces Φ dado. Esto queda resumido en el siguiente

Teorema 3.5.4: (a) Sea Φ un sistema de raíces. Entonces, existe una álgebra de Lie semisimple que tiene a Φ como su sistema de raíces.

(b) Sean L y L$'$ álgebras de Lie semisimples con respectivas subálgebras de Cartan H, H' y sistemas de raíces Φ, Φ'. Supongamos que π es un isomorfismo de H en H' tal que $\pi^*(\Phi') = \Phi$. Entonces existe un isomorfismo de L en L$'$, que es una extensión de π. □

3.6. Las Algebras de Lie Clásicas

En esta sección probaremos que las álgebras de Lie clásicas son simples. La idea de la demostración a grandes rasgos consiste en probar primero que son semisimples y por la sección 3.3 le corresponde un diagrama de Dynkin. Construiremos éste y veremos que es conexo, lo que implica por el teorema 3.4.3 que las álgebras de Lie clásicas efectivamente son simples. Para esto, necesitaremos del siguiente

Lema 3.6.1: Sea L una álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, H una subálgebra abeliana de L y Φ un subconjunto finito de $H^* - \{0\}$. Para cada $\alpha \in H^*$ consideremos

$$L_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in \mathrm{L},\ [h,x] = \alpha(h)x\ \ \forall h \in H\}$$

y supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

1.- Φ genera a H^*

2.- $\Phi = -\Phi$ y $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$ para cada $\alpha \in \Phi$

3.- $\mathrm{L} = H + \sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$

Entonces L es semisimple, H es una subálgebra de Cartan (ver ápendice A) y (3) es la descomposición de L en espacios raíz con respecto a H.

Dem.- Es claro que (3) es una suma directa, $H = L_0$ y $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}\ \forall \alpha, \beta \in H^*$. En particular, $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subset H\ \forall \alpha \in \Phi$. Además, de (2) tenemos que $L_\alpha \neq 0\ \forall \alpha \in \Phi$.

Sea $\alpha \in \Phi$. Por (2), podemos seleccionar $x'_\alpha \in L_\alpha$ y $y'_\alpha \in L_{-\alpha}$ tal que $h'_\alpha = [x'_\alpha, y'_\alpha] \neq 0$.

Argumentando en forma similar a la última parte de la demostración del teorema 3.3.2, se sigue que

$$\beta(h'_\alpha) = q\, \alpha(h'_\alpha)$$

donde q es racional y $\beta \in \Phi$. Si $\alpha(h'_\alpha) = 0$, entonces $\beta(h'_\alpha) = 0\ \forall \beta \in \Phi$ y por (1) $h'_\alpha = 0$. Por lo tanto $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$.

En forma análoga a la prueba del lema 3.3.3 podemos mostrar que $\dim L_\alpha = 1$ $(\alpha \in \Phi)$. Sea

$$h_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\alpha(h'_\alpha)} h'_\alpha, \qquad x_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x'_\alpha, \qquad y_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y'_\alpha}{2\alpha(h'_\alpha)}$$

así

$$(3.6.1) \qquad [h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \qquad [h_\alpha, x_{-\alpha}] = -2y_\alpha, \qquad [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$$

Sea $S \stackrel{\text{def}}{=} rad\,(L)$. Como S es invariante bajo $ad\, H$, entonces $S = S \cap H + \sum_{\alpha\in\Phi}(S \cap L_\alpha)$.

Afirmación: $S \cap L_\alpha = 0 \; \forall \alpha \in \Phi$. Supongamos lo contrario. Sea $\alpha \in \Phi$ tal que $S \cap L_\alpha \neq 0$. Definimos h_α, x_α y y_α como antes. Como $\dim L_\alpha = 1$, $x_\alpha \in S$ y puesto que S es un ideal, concluimos de (3.6.1) que h_α y y_α se encuentran en S. Por otro lado, S es soluble, pero $\mathbb{C}\, h_\alpha + L_\alpha + L_{-\alpha}$ es un subespacio de S no soluble (posee una subálgebra isomorfa a $sl(2, \mathbb{C}\,)$) lo cual es una contradicción. Así $S \subseteq H$.

Si $S \neq 0$ y $h \in S$ con $h \neq 0$, entonces escogemos $\alpha \in \Phi$ tal que $\alpha(h) \neq 0$; lo que implica que $x_\alpha = \alpha(h)^{-1}[h, x_\alpha] \in S$, contradiciendo la afirmación anterior. Por lo tanto $S = 0$, es decir, L es semisimple. De las hipótesis del teorema es claro que H es abeliana y $ad\, H$ es semisimple para toda $h \in H$. Así H es una subálgebra toral maximal (ver ápendice A). □

Ahora, analizaremos a las álgebras de Lie clásicas.

- **Las Algebras** A_l $(l \geq 1)$.- Sea $\mathrm{L} = sl(l+1, \mathbb{C}\,)$; $l \geq 1$ es un entero. Sea H la subálgebra de L, formada por todas las matrices diagonales; si $a_1, \ldots, a_{l+1} \in \mathbb{C}$, $diag(a_1, \ldots, a_{l+1})$ denota a la matriz $A \in H$ cuya diagonal es $a_1, \ldots, a_{l+1}$. E_{ij} será la matriz cuya ij-ésima entrada es 1 y el resto son cero, $1 \leq i, j \leq l+1$. Se puede checar fácilmente que las matrices

$$E_{ii} - E_{i+1,i+1} \qquad (1 \leq i \leq l) \qquad\qquad E_{ij} \qquad (i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq l+1)$$

forman una base para L.

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l+1}$ funciones lineales en H definidas por

$$\lambda_i : diag(a_1, \ldots, a_{l+1}) \mapsto a_i$$

así

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{l+1} = 0$$

como

$$[diag(a_1, \ldots, a_{l+1}), E_{ij}] = (a_i - a_j)E_{ij}$$

tenemos

$$[h, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(h)E_{ij} \qquad (h \in H)$$

sea

$$\Phi = \{\lambda_i - \lambda_j : i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq l+1\}$$

entonces

(3.6.2)
$$\mathrm{L} = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha, \qquad L_{\lambda_i - \lambda_j} = \mathbb{C}\, E_{ij} \qquad (i \neq j)$$

y

$$[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj} \qquad (i \neq j)$$

Por el lema anterior, se tiene que L es semisimple, H es subálgebra de Cartan y (3.6.2) es su descomposición en espacios raíz.

Ahora, vamos a calcular el diagrama de Dynkin para L. Notemos que $h_\alpha = [E_{ij}, E_{ji}] = h_{(\lambda_i - \lambda_j)} = E_{ii} - E_{jj}$. Sea

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \qquad\qquad (1 \leq i \leq l)$$

así

$$\Phi = \{\pm(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j) : 1 \leq i < j \leq l\}$$

por lo que

$$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$$

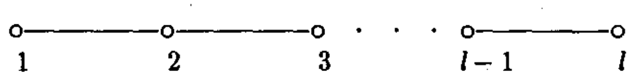
es una base para Φ.

Los enteros de Cartan son:

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \alpha_j(h_{\alpha_i})$$

$$= (\lambda_j - \lambda_{j+1})(h_{\alpha_i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |j-i| \geq 2 \\ -1 & \text{si } |j-i| = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el diagrama de Dynkin de L es



lo que implica que L es simple.

- **Las Algebras** D_l $(l \geq 2)$.- Sea $l \geq 2$ un entero, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $2l$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2l}\}$ una base para V. Como se recordará, en la sección 1.1 se definió una forma bilineal, antisimétrica, no singular f en $V \times V$ a través de la matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$. De esta forma, si $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in D_l$ (donde A, B, C y D son matrices complejas $l \times l$), entonces X satisface la relación $SX = -X^t S$, lo que implica que $D = -A^t$, $B^t = -B$ y $C^t = -C$ por lo que $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$. Para facilitar notación, escribiremos a X como (A, B, C).

Ahora

$$[(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2)] = (A, B, C)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= [A_1, A_2] + B_1C_2 - B_2C_1 \\ B &= (A_1B_2 - A_2B_1) - (A_1B_2 - A_2B_1)^t \\ C &= (C_1A_2 - C_2A_1) - (C_1A_2 - C_2A_1)^t \end{aligned}$$

Sean E_{ij} como antes y $F_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} E_{pq} - E_{qp}$ para $1 \leq p < q \leq l$. Tomemos H como el conjunto de todos los elementos de la forma $(A, 0, 0)$, con A matriz diagonal. Sea λ_i $(1 \leq i \leq l)$ las funciones lineales en H definidas por

$$\lambda_i : (diag(a_1, \ldots, a_l), 0, 0) \mapsto a_i$$

Efectuando los cálculos respectivos, obtenemos que para $1 \leq i, j \leq l$, $1 \leq p < q \leq l$ y $h \in H$

$$\begin{aligned} [h, (E_{ij}, 0, 0)] &= (\lambda_i - \lambda_j)(h)(E_{ij}, 0, 0) \\ [h, (0, F_{pq}, 0)] &= (\lambda_p + \lambda_q)(h)(0, F_{pq}, 0) \\ [h, (0, 0, F_{pq})] &= -(\lambda_p + \lambda_q)(h)(0, 0, F_{pq}) \end{aligned}$$

por lo que

$$D_l = H + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}\ (E_{ij}, 0, 0) + \sum_{p<q} \mathbb{C}\ (0, F_{pq}, 0) + \sum_{p<q} \mathbb{C}\ (0, 0, F_{pq})$$

y

$$\begin{aligned} [(E_{ij}, 0, 0), (E_{ji}, 0, 0)] &= (E_{ii} - E_{jj}, 0, 0) \qquad && (i \neq j) \\ [(0, F_{pq}, 0), (0, 0, F_{pq})] &= (-E_{pp} - E_{qq}, 0, 0) \qquad && (p < q) \end{aligned}$$

Del lema 3.6.1 se sigue que D_l es semisimple y H una subálgebra de Cartan. De lo anterior, tenemos que

$$\Phi = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j) : 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm(\lambda_p + \lambda_q) : 1 \leq p < q \leq l\}$$

sea

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq l-1), \qquad \alpha_l = \lambda_{l-1} + \lambda_l$$

entonces $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ es una base para Φ. En efecto

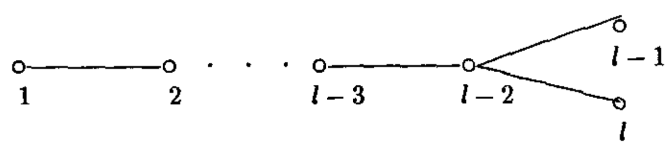
$$\begin{aligned} \lambda_i - \lambda_j &= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} && (1 \leq i < j \leq l) \\ \lambda_p + \lambda_q &= (\alpha_p + \cdots + \alpha_{l-2}) + (\alpha_q + \cdots + \alpha_l) && (1 \leq p < q \leq l) \end{aligned}$$

Ahora, encontraremos el diagrama de Dynkin para Φ

$$a_{ij} = \alpha_j(h_{\alpha_i}) = \begin{cases} (\lambda_j - \lambda_{j+1})(E_{ii} - E_{i+1,i+1}, 0, 0) & \text{si } j < l \\ (\lambda_{l-1} - \lambda_l)(E_{ii} - E_{i+1,i+1}, 0, 0) & \text{si } j = l \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ y } |j-i| = 1 \text{ ó } i = l-2 \text{ y } j = l \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así el diagrama de Dynkin es



Por lo tanto, D_l es simple.

- **Las Algebras** C_l $l \geq 2$.- Sea $l \geq 2$ un entero, V un espacio vectorial de dimensión $2l$ sobre $\mathbb{C}$ con base $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2l}\}$ y f la forma bilineal, antisimétrica, no singular en $V \times V$ definida a través de $S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$. Si $X \in C_l$, entonces $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$, donde A, B, C son matrices complejas $l \times l$ y B, C son simétricas. Escribiremos a X de la misma forma que en el caso D_l.

Sea H la subálgebra abeliana formada por los elementos $(A, 0, 0) \in C_l$, A es matriz diagonal. Sean λ_i y E_{ij} como antes; $G_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} E_{pq} + E_{qp}$, $1 \leq p \leq q \leq l$. Para $1 \leq i, j \leq l$, $1 \leq p \leq q \leq l$ y $h \in H$, tenemos

$$[h, (E_{ij}, 0, 0)] = (\lambda_i - \lambda_j)(h)(E_{ij}, 0, 0)$$

$$[h, (0, G_{pq}, 0)] = (\lambda_p + \lambda_q)(h)(0, G_{pq}, 0)$$
$$[h, (0, 0, G_{pq})] = -(\lambda_p + \lambda_q)(h)(0, 0, G_{pq})$$

y

$$[(E_{ij}, 0, 0), (E_{ji}, 0, 0)] = (E_{ii} - E_{jj}, 0, 0)$$
$$[(0, G_{pq}, 0), (0, 0, G_{pq})] = (-E_{pp} - E_{qq}, 0, 0)$$

de donde

$$C_l = H + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}\ (E_{ij}, 0, 0) + \sum_{p<q} \mathbb{C}\ (0, G_{pq}, 0) + \sum_{p<q} \mathbb{C}\ (0, 0, G_{pq})$$

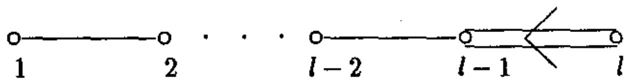
Por el lema anterior, C_l es semisimple y H es una subálgebra de Cartan. Si $\Phi = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j) : 1 \leq i \leq j \leq l\} \cup \{\pm(\lambda_p + \lambda_q) : 1 \leq p \leq q \leq l\}$ es el conjunto de raíces, entonces $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ es una base, donde $\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ $(1 \leq i \leq j \leq l)$ y $\alpha_l = 2\lambda_l$.

Los enteros de Cartan para $i \neq j$ son:

$$a_{ij} = \alpha_j(h_{\alpha_i}) = (\lambda_j - \lambda_{j+1})(E_{ii} - E_{i+1,i+1}, 0, 0)$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq i,j \leq l-1 \text{ y } |j-i| = 1 \text{ ó } i = l \text{ y } j = l-1 \\ -2 & \text{si } i = l-1 \text{ y } j = l \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El diagrama de Dynkin de C_l es



Por lo tanto, C_l es simple.

- **Las Algebras** B_l $(l \geq 1)$.- Sea $l \geq 1$ un entero, V un espacio vectorial de dimensión $2l+1$ sobre $\mathbb{C}$ con base $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2l+1}\}$ y f la forma bilineal, antisimétrica, no singular en $V \times V$ definida a través de $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$. Si $X \in B_l$, entonces $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -b^t & A & B \\ -a^t & C & -A^t \end{pmatrix}$ donde A, B, C son matrices $l \times l$, a, b son matrices $1 \times l$, $B = -B^t$ y $C = -C^t$.

Escribiremos $X = (a, b : A, B, C)$. Sean E_{ij}, F_{pq} como antes, e_r la matriz $1 \times l$ cuyas entradas son $\delta_{r_1}, \ldots, \delta_{r_l}$ y H el conjunto de elementos de la forma $(0, 0 : A, 0, 0)$ con A matriz diagonal. H es una subálgebra abeliana de B_l. Consideremos ahora, las funciones lineales

$$\lambda_r : (o, o : diag(a_1, \ldots, a_l)) \mapsto a_r$$

Realizando los cálculos correspondientes, tenemos para $1 \leq i,j \leq l$, $1 \leq p < q \leq l$, $1 \leq r \leq l$ y $h \in H$ que

$$
\begin{aligned}
[h,(0,0:E_{ij},0,0)] &= (\lambda_i-\lambda_j)(h)(0,0:E_{ij},0,0)\\
[h,(0,0:0,F_{pq},0)] &= (\lambda_p+\lambda_q)(h)(0,0:0,F_{pq},0)\\
[h,(0,0:0,0,F_{pq})] &= -(\lambda_p+\lambda_q)(h)(0,0:0,0,F_{pq})\\
[h,(0,e_r:0,0,0)] &= \lambda_r(h)(0,e_r:0,0,0)\\
[h,(e_r,0:0,0,0)] &= -\lambda_r(h)(e_r,0:0,0,0)
\end{aligned}
$$

Las primeras tres relaciones se obtienen en forma similar al caso D_l. Las restantes se siguen de

$$[(0,0:A,0,0),(a,b:0,0,0)] = (-aA, bA^t:0,0,0)$$

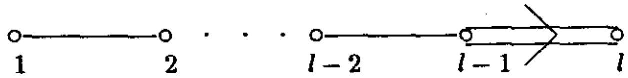
Las condiciones del lema anterior son satisfechas. En efecto, como los elementos de B_l que son de la forma $(0,0:A,B,C)$ forman una subálgebra isomorfa a D_l; basta verificar que $[(0,e_r:0,0,0),(e_r,0:0,0,0)] \neq 0$, pero este conmutador es $(0,0:-E_{rr},0,0)$. Así, por el lema 3.6.1 podemos concluir que B_l es semisimple y H es subálgebra de Cartan. El conjunto de raíces es

$$\Phi = \{\pm(\lambda_i-\lambda_j): 1\le i<j\le l\} \cup \{\pm(\lambda_p+\lambda_q): 1\le p<q\le l\} \cup \{\pm\lambda_r : 1\le r\le l\}$$

Sean $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $(1\le i\le l-1)$ y $\alpha_l=\lambda_l$, entonces $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ es una base para Φ. Por otro lado, los enteros de Cartan son:

$$
a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } 1\le i,j\le l-1 \text{ y } |j-i|=1 \text{ ó } i=l-1 \text{ y } j=l\\ -2 & \text{si } i=l \text{ y } j=l-1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}
$$

El diagrama de Dynkin de B_l es



Por lo tanto, B_l es simple.

Observemos que si $l = 1$, entonces B_1 es isomorfa a A_1, para $l = 2$, B_2 es isomorfa a C_2 y A_2 es isomorfa a D_2. Para $l = 3$, A_3 es isomorfa a D_3.

En conclusión, hemos mostrado que las álgebras de Lie clásicas A_l ($l \geq 1$), B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 3$) y D_l ($l \geq 4$) son simples y hemos determinado sus diagrama de Dynkin. Es claro, a partir de ellos que estas álgebras no son isomorfas. De la sección anterior sabemos que, en adición a las álgebras de Lie clásicas, hay cinco álgebras de Lie excepcionales: G_2, F_4, E_6, E_7 y E_8 cuyos diagrmas de Dynkin ya fueron determinados (secciones 2.3.4 y 3.5); éstas completan la lista de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$, salvo isomorfismos.

Capítulo 4

Algebras de Lie Simples sobre los Complejos y Grupos Simples

Los grupos finitos simples son los bloques fundamentales con los cuales se construyen todos los grupos finitos. Es decir, si se tienen todos los grupos finitos simples es "posible" estudiar todos los grupos finitos. Esto se realiza a través del **teorema de Jordan-Hölder para grupos finitos:** Para cada grupo finito G existe una sucesión de subgrupos $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{r-2} \trianglerighteq G_{r-1} \trianglerighteq G_r = 1$ tal que cada grupo cociente G_i/G_{i+1} es un grupo simple y esta colección de grupos cocientes simples es única salvo reordenamientos. De aquí se deriva la importancia de tener clasificados a los grupos finitos simples.

Sabemos que los grupos cíclicos $\mathbb{Z}^p$ de orden primo p son simples. Estos son los únicos grupos finitos simples abelianos. Galois esencialmente mostró que los grupos alternantes A_n ($n \geq 5$) constituyen una familia infinita de grupos finitos simples. La siguiente familia de grupos finitos simples la forman los grupos clásicos (ver sección 4.2.1). Dickson encontró familias de grupos simples relacionadas con álgebras de Lie simples de los tipos G_2 y E_6 sobre el campo de los complejos ([19]). Mathieu en 1861 y 1873 descubrió otros cinco grupos simples que no encajaban en el esquema general y que vinieron a ser llamados esporádicos.

Lo anterior llevó a pensar que era posible clasificar los grupos finitos simples por la cercana analogía que existe entre éstos y las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ clasificadas por Cartan en 1894: cuatro familias infinitas, cinco excepcionales; y los conceptos tales como solubilidad, nilpotencia, simplicidad se definen de la misma forma en ambos contextos.

En 1955, Chevalley mostró una forma de construir familias infinitas de grupos simples (grupos de Chevalley) correspondientes a cada una de las álgebras de Lie simples sobre los complejos. Estas familias contienen a los grupos de Lie complejos conexos simples. Estos grupos son finitos cuando el campo es campo de Galois y contiene q elementos (ver sección 4.2.5).

Poco después Steinberg y Ree ([15]) mostraron que los puntos fijos de ciertos automorfismos de los grupos de Chevalley finitos dan lugar a más grupos finitos simples llamados grupos de torsión de Chevalley. Los grupos de Chevalley finitos simples y los grupos de torsión de Chevalley son los grupos finitos simples de tipo Lie.

Es así como las técnicas de la teoría de Algebras de Lie fueron aplicadas con resultados impresionantes en el problema de la clasificación de los grupos finitos simples.

La demostración del teorema de clasificación de los grupos finitos simples se concluyó en 1982. En ella se establece que cada grupo finito simple es isomorfo o bien a un grupo de orden primo, o a un grupo alternante, o a un grupo de tipo Lie o a uno de los 26 grupos esporádicos.

Este capítulo está dividido en dos secciones. La primera trata sobre grupos de Lie simples, la correspondencia uno a uno que existe entre grupos de Lie simplemente conexos y álgebras de Lie semisimples; en particular, tendremos una clasificación de los grupos de Lie simplemente conexos a partir de la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre los complejos. La segunda parte es titulada grupos de tipo Lie aunque únicamente hableremos de grupos de Chevalley.

El objetivo de este capítulo es mostrar la importancia de la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre los complejos, parte central de esta tesis; es por esto que no se hicieron demostraciones, pues están fuera del contexto de este trabajo; de hecho, requerirían una buena cantidad de teoría previa para desarrollar las dos secciones con todo cuidado. En cada sección se hacen referencia a la bibliografía que se puede consultar para mayor detalle.

4.1. Grupos de Lie Simples

En esta parte del capítulo comentaremos la correspondencia que hay entre álgebras de Lie semisimples y grupos de Lie, centrándonos en los grupos de Lie simplemente conexos para que dicha correspondencia sea uno a uno. Esto, aunado a que un subgrupo de Lie conexo A de un grupo de Lie conexo G es normal si y sólo si el álgebra de Lie $\mathcal{A}$ de A es un ideal de $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie de G, nos permitirá tener una clasificación de grupos de Lie simplemente conexos simples a partir de la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre los complejos.

Para más detalles, consultar [4], [6], [9], [10], [12], [14].

4.1.1. Grupos de Lie

Un **grupo de Lie** G es una variedad diferencial con estructura de grupo tal que las transformaciones

$$(x, y) \mapsto xy \qquad (x, y \in G)$$
$$x \mapsto x^{-1} \qquad (x \in G)$$

de $G \times G \to G$ y $G \to G$, respectivamente, son $\mathcal{C}^\infty$.

Denotaremos a su elemento identidad por e. Dependiendo de que la estructura diferencial se real ó compleja, G es llamado un grupo de Lie **real** ó **complejo**.

Ejemplos:

- El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie con la suma.
- La variedad diferencial $Gl(n, \mathbb{C})$ que consiste de las matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$, invertibles, es un grupo de Lie con la multiplicación matricial.
- El producto de dos grupos de Lie $G \times H$ es un grupo de Lie con la estructura de variedad producto y el producto de grupos $(\sigma_1, \tau_1)(\sigma_2, \tau_2) = (\sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2)$.

Sean G y H grupos de Lie. $\varphi : G \to H$ es un **homomorfismo** si φ es $\mathcal{C}^\infty$ y además es un homomorfismo de grupos. φ es **isomorfismo** si es un isomorfismo en el sentido de grupos y un difeomorfismo en el de variedades.

Para definir el concepto de subgrupo de Lie necesitamos conocer el de inmersión inyectiva. Sean M y N variedades diferenciales y $\varphi : M \to N$ uno a uno y de clase $\mathcal{C}^\infty$. Supongamos que la diferencial $d\varphi : T_m \to T_{\varphi(m)}$ (T_m y $T_{\varphi(m)}$ espacios tangentes de M y N en los puntos m y $\varphi(m)$ respectivamente) definida para cada $v \in T_m$ como $d\varphi(v)(g) = v(g \circ \varphi)$ con $g \in \mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de $\varphi(m)$ tiene rango máximo, $\forall m \in M$; entonces (M, φ) es una subvariedad inmersa de N (ver [2], [9], [14]).

Una subvariedad inmersa (H, φ) del grupo de Lie G es un **subgrupo de Lie** si:

1.- H es un grupo de Lie.

2.- $\varphi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos.

Los teoremas centrales en esta parte del trabajo establecen la existencia de subgrupos de Lie bajo ciertas condiciones por lo que es necesario especificar a qué nos estaremos refiriendo.

Consideremos dos subgrupos (H, φ) y (H_1, φ_1) de G; estos subgrupos son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo de grupos de Lie $\alpha : H \to H_1$ tal que $\varphi_1 \circ \alpha = \varphi$. Esta es una relación de equivalencia entre los subgrupos de G. Así la unicidad de subgrupos de Lie significa unicidad en clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia tiene un representante de la forma (A, i) donde A es un subconjunto de G que es grupo de Lie y con la inclusión $i : A \to G$ es un subgrupo de Lie.

4.1.2. El Algebra de Lie de un grupo de Lie

Primero recordemos que un campo vectorial X de clase $\mathcal{C}^\infty$ en una variedad diferencial M es una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que a cada $p \in M$ le asigna un vector $X_p \in T_p(M)$. El conjunto de todos los campos vectoriales $\mathcal{C}^\infty$ en M, $\mathcal{X}(M)$, es un espacio vectorial. Definimos el producto de X, $Y \in \mathcal{X}(M)$ como

$$[X, Y]_m(f) \stackrel{\text{def}}{=} X_m(Yf) - Y_m(Xf)$$

con lo cual $\mathcal{X}(M)$ es una álgebra de Lie.

Sean G un grupo de Lie complejo y l_g, r_g las traslaciones izquierda y derecha de $g \in G$ definidas por

$$\begin{aligned} l_g(x) &= gx & \qquad x \in G \\ r_g(x) &= xg & \qquad x \in G \end{aligned}$$

Un campo vectorial X en G es llamado **invariante por la izquierda** si para cada $g \in G$ se tiene que

$$dl_g \circ X = X \circ l_g$$

Denotaremos por $\mathcal{G}$ al conjunto de todos los campos invariantes por la izquierda. $\mathcal{G}$ es un espacio vectorial. De hecho, es una álgebra de Lie con el producto definido para campos vectoriales. Un aspecto importante es que $\mathcal{G}$ es isomorfo al espacio tangente $T_e(G)$ por medio de la función $\alpha : \mathcal{G} \to T_e(G)$, $\alpha(X) = X(e)$ lo que implica que $\dim \mathcal{G} = \dim G$.

Por lo anterior, podemos definir **el álgebra de Lie** del grupo de Lie G como el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de los campos vectoriales invariantes por la izquierda de G ó equivalentemente como el espacio tangente G_e en la identidad. La segunda definición nos da una idea geométrica sobre el álgebra de Lie de un grupo de Lie. En algunas ocasiones es más conveniente utilizar este punto de vista.

Ejemplos:

- *La recta real* $\mathbb{R}$ es un grupo de Lie con la adición. Los campos vectoriales invariantes por la izquierda son simplemente los campos vectores $\{\lambda(d/dr) \; : \; \lambda \in \mathbb{R}\}$. El producto de dos cualesquiera de ellos es 0.

  Para ver esto, notemos que una base para el espacio tangente de una variedad M en m es
  $$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m (f)\right) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\bigg|_{\varphi(m)}$$
  donde (U, φ) es un sistema coordenado con funciones coordenadas x_i, r_i funciones coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y f es una función C^∞ en una vecindad de m.

- *El Grupo General Lineal.* Daremos un isomorfismo entre el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de $Gl(n, \mathbb{R})$ y $gl(n, \mathbb{R})$. Cada elemento $v \in \mathbb{R}^n$ puede ser considerado como una función C^∞ de $Gl(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ que está dado por $v(T) = T(v)$. Entonces, para cada $X \in \mathcal{G}$ damos la transformación lineal $J(X)$ en $\mathbb{R}^n$ como $J(X)v = X(e)v$. Por lo tanto, $J : \mathcal{G} \to gl(n, \mathbb{R})$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

- *El Grupo General Lineal Complejo.* $gl(n, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial real de dimensión $2n^2$. En forma análoga al inciso anterior se tiene que el álgebra de Lie asociada a $Gl(n, \mathbb{C})$ es $gl(n, \mathbb{C})$.

Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo, entonces φ envía la identidad de G en la identidad de H por lo que la diferencial $d\varphi$ de φ es una transformación lineal entre los espacios tangentes $T_e(G)$ y $T_e(H)$, es decir
$$d\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$$
es una transformación lineal. De hecho, es un homomorfismo de álgebras de Lie.

4.1.3. Grupos de Lie Conexos

Un teorema fundamental en la teoría de grupos de Lie es el que establece la correspondencia uno a uno entre subgrupos de Lie conexos de un grupo de Lie y subálgebras de Lie de su álgebra de Lie.

Esta correspondencia está dada de la siguiente forma. Si i es la inclusión de H en G con H subgrupo de Lie de G, se tiene que di_e es un homomorfismo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{G}$ y como H es subvariedad de G, di_e es uno a uno, así $\mathcal{H}$ es una subálgebra de $\mathcal{G}$.

En particular, de este resultado se desprende que a una álgebra de Lie semisimple le podemos asociar un grupo de Lie conexo pues, a través de la representación adjunta tenemos que una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ es isomorfa a un subálgebra de $gl(n,\mathbb{C})$ para un n apropiado.

Algunas subálgebras de $gl(n,\mathbb{C})$ se obtiene a través de la función exponencial

$$\exp : gl(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$$

definida como

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^j}{j!} + \cdots$$

para $A \in gl(n,\mathbb{C})$. Esta serie converge y algunas de sus propiedades son:

$$det\ e^A = e^{traza\ A}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B \qquad \text{si } AB = BA$$

y de considerar un teorema que afirma: Sean A un subgrupo del grupo de Lie $GL(n,\mathbb{C})$, $\mathcal{A}$ un subespacio de $gl(n,\mathbb{C})$ y U una vecindad del 0 en $gl(n,\mathbb{C})$ difeomorfa bajo la función exponencial a una vecindad V de I en $GL(n,\mathbb{C})$. Supongamos que

$$\exp(U \cap \mathcal{A}) = A \cap V$$

entonces A con la topología relativa es un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$, $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $gl(n,\mathbb{C})$ y $\mathcal{A}$ es el álgebra de Lie de A (ver [14]).

Por ejemplo, sea U una vecindad del 0 en $gl(n,\mathbb{C})$ difeomorfa bajo la función exponencial a la vecindad V de la identidad en $GL(n,\mathbb{C})$. Supongamos además que si $A \in U$, entonces $\bar{A}$, A^t y $-A$ también están en U y que $|traza\ A| < 2\pi$. Esta vecindad se construye tomando la vecindad W del 0 en $gl(n,\mathbb{C})$ lo suficientemente pequeña para que la función exponencial sea un difeomorfismo y la condición de la traza se satisfaga. Así $U = W \cap \bar{W} \cap W^t \cap (-W)$. Vamos a suponer además que $\exp(U \cap gl(n,\mathbb{R})) = GL(n,\mathbb{R}) \cap V$.

Si $A \in sl(n,\mathbb{C})$ entonces $det\ e^A = 1$ por lo que $e^A \in SL(n,\mathbb{C})$. Recíprocamente, si $det\ e^A = 1$ entonces, por la propiedad de exp se sigue que $A = (2\pi i)j$ para $j \in \mathbb{Z}$; de esta manera para $A \in U$ tenemos que la traza es cero. Esto implica que $SL(n,\mathbb{C})$ es un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$ con álgebra de Lie $sl(n,\mathbb{C})$.

Si $A \in U \cap o(n,\mathbb{C})$, entonces $(e^A)^t = e^{A^t} = e^{-A}$ de aquí que $(e^A)^t e^A = e^{-A}e^A = e^0 = I$ lo cual implica que $e^A \in O(n,\mathbb{C})$. Recíprocamente, supongamos que $A \in U$ y que $e^A \in$

$O(n, \mathbb{C}) \cap V$. Entonces $e^{-A} = (e^{A})^{-1} = (e^{A})^{t} = e^{A^t}$, de donde $-A = A^t$ ya que $-A$ y A^t están en U y la función exponencial es uno a uno en U. Así $A \in U \cap \mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$. De esta forma, $O(n, \mathbb{C})$ es un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$.

Un teorema muy importante para nuestros propósitos es el que asegura que un subgrupo de Lie A de un grupo de Lie conexo G es normal si y sólo si el álgebra de Lie, $\mathcal{A}$, de A es un ideal de $\mathcal{G}$.

En el caso de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ tendríamos que los grupos de Lie conexos asociados a éstas serían simples y a partir de la clasificación de éstas obtendríamos una clasificación en los grupos de Lie conexos con la propiedad de ser simples: sin embargo, el álgebra de Lie no determina al grupo de Lie, es decir, a una álgebra de Lie en general es posible asociarle más de un grupo de Lie y éstos son únicamente isomorfos localmente (ver [6]).

Este problema se soluciona al restringirnos a una clase conveniente de grupos de Lie conexos.

4.1.4. Grupos de Lie Simplemente Conexos

Primero recordaremos algunas definiciones. Un espacio topológico **simplemente conexo** es un espacio conexo cuyo grupo fundamental es el trivial. Una función continua y suprayectiva $\pi : X \to Y$ con X y Y espacios topológicos se llama una **aplicación cubriente** si cada punto $y \in Y$ tiene una vecindad V cuya imagen inversa bajo π es una unión ajena de conjuntos abiertos en X y cada uno de éstos es homeomorfo a V bajo π. A Y se le denomina espacio **base** y a X **espacio cubriente.**

Si $\pi : \hat{M} \to M$ es una aplicación cubriente y M es una variedad diferencial entonces, $\hat{M}$ es localmente euclideano, segundo numerable y Hausdorff, además existe una única estructura diferencial en $\hat{M}$ tal que la aplicación π es C^∞. Para el caso de un grupo de Lie conexo se tiene que el espacio cubriente universal es un grupo de Lie simplemente conexo y la aplicación cubriente es un homomorfismo de grupos de Lie. Más aún, la aplicación cubriente induce un isomorfismo entre las álgebras de Lie respectivas a través de la diferencial.

Un teorema más general nos dice lo siguiente: Si dos grupos de Lie G y H simplemente conexos tienen algebras de Lie isomorfas entonces G y H son isomorfos (ver [9]). Así para álgebras de Lie semisimples le podemos asociar un único grupo de Lie simplemente conexo. Esta correspondencia uno a uno es la que nos permite tener una clasificación en los grupos de Lie simplemente conexos a partir de la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. Un aspecto muy importante es que estos grupos son simples.

4.2. Grupos de Tipo Lie

Los grupos de Chevalley son grupos de automorfismos de álgebras de Lie sobre campos arbitrarios. Algunos de estos grupos son los grupos simples clásicos, descritos en la sección 4.2.1, dando una prueba uniforme para todos los casos. Este procedimiento es descrito en las secciones 4.2.3 y 4.2.4. Cuando el campo es finito se obtienen grupos de Chevalley finitos, los cuales son simples. Para más detalle consultar [1], [3].

4.2.1. Grupos Clásicos

En esta subsección describiremos los grupos clásicos. Para ello estaremos considerando un espacio vectorial V de dimensión n sobre un campo K.

El Grupo Especial Lineal

El grupo de todas las transformaciones lineales invertibles de V en sí mismo es llamado el grupo general lineal $GL_n(K)$. Las transformaciones de determinante uno forma el subgrupo normal $SL_n(K)$, el grupo especial lineal. El centro Z de $GL_n(K)$ está formado por todas las transformaciones de la forma $T(x) = \lambda x$ para $\lambda \in K$ y $\lambda \neq 0$. El grupo cociente $GL_n(K)/Z$ es el grupo proyectivo general lineal $PGL_n(K)$. El centro de $SL_n(K)$ es el subgrupo $Z \cap SL_n(K)$ y el grupo cociente

$$PSL_n(K) = SL_n(K)/Z \cap SL_n(K)$$

es el grupo **proyectivo especial lineal.**

Los grupos proyectivos especiales lineales son simples para toda $n \geq 2$ excepto los grupos $PSL_2(2)$ y $PSL_2(3)$.

El Grupo Simpléctico

En lo que resta de esta subsección, vamos a considerar que V está dotado de un producto escalar bilineal y no singular, que le asocia a cada par de elementos de V un elemento de K. Para este caso, supondremos que el producto escalar es antisimétrico, es decir,

$$(y, x) = -(x, y)$$

para todo $x, y \in V$.

Consideremos ahora el subgrupo de $GL_n(K)$ formado por isometrías. Este grupo es llamado el grupo simpléctico $Sp_n(K)$ y no depende del producto escalar.

El centro Z de $Sp_n(K)$ consiste de transformaciones $Tx = \lambda x$, donde $\lambda = \pm 1$. El grupo cociente

$$PSp_n(K) = Sp_n(K)/Z$$

es llamado el **grupo simpléctico proyectivo**.

Los grupos simplécticos proyectivos son simples excepto $PSp_2(2)$, $PSp_2(3)$ y $PSp_4(2)$.

El Grupo Ortogonal

Supondremos que K no es de característica 2 y que el producto escalar es simétrico, esto es

$$(y, x) = (x, y)$$

para todo $x, y \in V$. Este producto escalar determina una forma cuadrática f dada por

$$f(x) = (x, x)$$

Recíprocamente, la forma cuadrática determina el producto escalar

$$(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y) - f(x) - f(y))$$

(en esta parte se requiere que la característica de K no sea 2). El subgrupo de $GL_n(K)$ formado por isometrías se le denomina **grupo ortogonal** $O_n(K, f)$ asociado a la forma cuadrática f. En este caso, la estructura del grupo depende de f.

El determinante de una transformación ortogonal es ± 1. Las transformaciones ortogonales de determinante uno forma el subgrupo $SO_n(K, f)$, el **grupo ortogonal especial de** f. El centro Z de $O_n(K, f)$ consiste de las transformaciones $Tx = \lambda x$ donde $\lambda = \pm 1$, para $n \geq 2$ y $Z \cap SO_n(K, f)$ es el centro de $SO_n(K, f)$. De esta forma, obtenemos los grupos proyectivos

$$PO_n = O_n(K, f)/Z$$
$$PSO_n(K, f) = SO_n(K, f)/Z \cap SO_n(K, f)$$

Sea $\Omega_n(K, f)$ el subgrupo conmutador de $O_n(K, f)$, $\Omega_n(K, f)$ es un subgrupo de $SO_n(K, f)$. Definimos el correspondiente grupo proyectivo

$$P\Omega_n(K,f) = \Omega_n(K,f)/Z \cap \Omega_n(K,f)$$

Los grupos $P\Omega_n(K,f)$ son simples para $n \geq 5$. Para $n = 4$ no siempre es cierto.

El grupo ortogonal sobre un campo de característica dos es definido en forma diferente. La forma cuadrátrica $f(x) = (x,x)$ satisface la condición

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 f(x) + \mu^2 f(y) + 2\lambda\mu(x,y)$$

para todo λ, $\mu \in K$,

Si $\lambda = \mu = 1$ tenemos que $(x,x) = 0$ y que

$$(y,x) = (x,y)$$

Las transformaciones lineales no singulares en V que satisfacen la condición

$$f(Tx) = f(x)$$

forman el grupo ortogonal $O_n(k,f)$ asociado a f. Como

$$(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$$

es claro que

$$(Tx,Ty) = (x,y)$$

Así cada elemento de $O_n(K,f)$ es una isometría del producto escalar (x,y).

El producto escalar (x,y) puede ser escrito en términos de una matriz de rango $2l$. Sea V_0 el conjunto de $x \in V$ tales que $(x,y) = 0$ para todo $y \in V$. Entonces V_0 es un espacio vectorial de dimensión $d = n - 2l$. d es llamado el defecto de f.

Supongamos que f es una forma cuadrática no degenerada de defecto 0, el subgrupo conmutador $\Omega_n(K,f)$ es generalmente simple y $O_n(K,f)$ es un subgrupo de $Sp_n(K)$.

Los grupos finitos de este tipo quedan determinados por las formas cuadrátricas

$$f(x) = x_1x_{-1} + x_2x_{-2} + \cdots + x_lx_{-l}$$

$$f(x) = x_1x_{-1} + x_2x_{-2} + \cdots + x_{l-1}x_{-(l-1)} + \alpha x_l^2 + x_lx_{-l} + \alpha x_{-l}^2$$

donde $x = \sum_i x_ie_i$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_l, e_{-1}, \ldots, e_{-l}\}$ es una base de V y $\alpha t^2 + t + \alpha$ es un polinomio irreducible sobre $K = GF(q)$ campo de Galois de q elementos.

En el caso en que $d > 0$. se puede mostrar que $O_n(K, f)$ es isomorfo al subgrupo $Sp_{2l}(K)$ de transformaciones T que satisfacen

$$f(Tx) + f(x) \in f(V_0)$$

Como veremos más adelante, estos grupos clásicos pueden ser interpretados como grupos de tipo Lie.

4.2.2. Base de Chevalley

Sea L una álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ con descomposición en espacios raíz

$$\mathrm{L} = H \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

y $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ (observación del teorema 3.3.2) ó equivalentemente $h_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$ para $x_\alpha \in L_\alpha$ y $x_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$ escogidos en forma adecuada. Definimos el conjunto

$$A = \{h_\alpha,\ \alpha \in \Delta;\ x_\alpha,\ \alpha \in \Phi\}$$

(Δ es una base de Φ). Del teorema 3.3.7 tenemos que A es una base para L. Los elementos de A cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
&[h_\alpha, h_\beta] = 0 && \alpha,\ \beta \in \Delta \\
&[h_\alpha, x_\beta] = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} x_\beta && \alpha \in \Delta,\ \beta \in \Phi \text{ y} \\
&[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha && \alpha \in \Phi \\
&[x_\alpha, x_\beta] = 0 && \alpha,\ \beta \in \Phi,\ \alpha + \beta \notin \Phi
\end{aligned}$$

la demostración se encuentra en la sección 3.5.

Consideremos ahora los números $N_{\alpha,\beta}$ definidos en la sección 3.4. Algunas propiedades de éstos aparecen en el teorema 3.4.1 pero nos interesa una en particular.

$$N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,-\beta} = -(p+1) q \frac{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta,\beta)} = -(p+1)^2 \tag{4.2.1}$$

p y q como en el lema 3.3.4.

Esta igualdad es una consecuencia de aplicar la identidad de Jacobi a x_α, $x_{-\alpha}$, x_β, e interpretar la α-cadena de β ([3,pág 52]).

Una pregunta que surge de (4.2.1) es: ¿Podemos escoger vectores raíz x_α tales que

$$N_{\alpha,\beta} = \pm (p+1)$$

para cada par de raíces α, β?. La respuesta es afirmativa. Para ver esto, definamos el automorfismo π de L como

$$\pi(x_{\alpha i}) = -x_{-\alpha i}$$
$$\pi(x_{-\alpha i}) = -x_{\alpha i}$$
$$\pi(h_{\alpha i}) = -h_{\alpha i}$$

π es de orden 2.

Por otro lado, del corolario 2.2.6 sabemos que cada raíz $\beta \in \Phi$ puede ser expresada como

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \qquad (\alpha_1 \in \Delta)$$

donde cada suma parcial $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ es una raíz.

Así $[[x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}] \ldots x_{\alpha k}] \in L_\beta$ es un múltiplo diferente de cero de x_β. Pero la imagen de este elemento bajo π es $[[-x_{-\alpha 1}, -x_{-\alpha 2}] \ldots - x_{-\alpha k}]$ el cual es un múltiplo de $x_{-\beta}$; esto implica que x_β es enviado por π a un múltiplo escalar de $x_{-\beta}$.

Sea $\pi(x_\beta) = \lambda x_{-\beta}$. Como π es de orden 2, $\pi(x_{-\beta}) = \lambda^{-1} x_\beta$; de esta forma, $\pi(\mu x_\beta) = \mu\lambda x_{-\beta} = \mu^2\lambda(\mu^{-1}x_{-\beta})$ y como es posible encontrar $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\mu^2 = -\lambda^{-1}$ se tiene que $\pi(\mu x_\beta) = -\mu^{-1}x_{-\beta}$ y $[\mu x_\beta, \mu^{-1} x_\beta] = h_\beta$.

Escojamos ahora a μx_β como el vector raíz en L_β y $\mu^{-1}x_{-\beta}$ como el vector raíz en $L_{-\beta}$. Renombrándolos, es decir, x_β y $x_{-\beta}$ en lugar de μx_β y $\mu^{-1}x_{-\beta}$ tenemos

$$[x_\beta, x_{-\beta}] = h_\beta$$
$$\pi(x_\beta) = -x_{-\beta}$$

además

$$[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha,\beta} x_{\alpha+\beta} \qquad \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in \Phi$$

pero

$$\pi([x_\alpha, x_\beta]) = [-x_{-\alpha}, -x_{-\beta}] = -N_{\alpha,\beta} x_{-\alpha,-\beta}$$

y se sigue $N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta}$. La igualdad (4.2.1) implica que $N_{\alpha,\beta} =^{+}_{-} (p+1)$.

Los elementos $\{h_\alpha,\ \alpha \in \Delta;\ x_\alpha,\ \alpha \in \Phi\}$ tales que

$$
\begin{aligned}
[h_\alpha, h_\beta] &= 0 \\
[h_\alpha, x_\beta] &= \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} x_\beta \\
[x_\alpha, x_{-\alpha}] &= h_\alpha \\
[x_\alpha, x_\beta] &= 0 & \alpha+\beta \notin \Phi \\
[x_\alpha, x_\beta] &=^{+}_{-} (p+1) & \alpha+\beta \in \Phi
\end{aligned}
$$

forman una base para L llamada **base de Chevalley.**

Esta base es relativa a la subálgebra de Cartan, por lo que una álgebra de Lie simple tiene diferentes bases de Chevalley.

Los enteros $N_{\alpha,\beta}$ son llamados **constantes de estructura.**

4.2.3. Grupos de Chevalley

Sea L una álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ con base de Chevalley

$$\{h_\alpha,\ \alpha \in \Delta;\ x_\alpha,\ \alpha \in \Phi\}$$

Denotaremos por L_Z el subconjunto de L cuyos elementos son combinaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}$. L_Z es un subgrupo aditivo y por la bilinealidad del bracket se tiene que es una álgebra de Lie sobre $\mathbb{Z}$.

Consideremos ahora el producto tensorial de un campo arbitrario K y L_Z (ver la sección 1.3)

$$L_K = K \otimes L_Z$$

L_K es un grupo abeliano aditivo. Cada elemento de L_K puede ser escrito como

$$\sum_{\alpha\in\Delta} \lambda_\alpha (1 \otimes h_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mu_\alpha (1 \otimes x_\alpha)$$

donde 1_K es el uno de K y λ_α, $\mu_\alpha \in K$. Escribimos

$$\bar{h_\alpha} = 1_k \otimes h_\alpha \qquad \bar{x_\alpha} = 1_K \otimes x_\alpha$$

L_K es un espacio vectorial sobre K con base

$$\{\bar{h_\alpha},\ \alpha \in \Delta;\ \bar{x_\alpha},\ \alpha \in \Phi\}$$

Definimos un producto en L_K como

$$[1_K \otimes x, 1_K \otimes y] = 1_K \otimes [xy]$$

para x, y elementos de la base de Chevalley de L, con lo cual L_K es una álgebra de Lie sobre K.

Las constantes de multiplicación de L_K (equivalentes a $N_{\alpha,\beta}$ en la sección anterior) son elementos de K.

A continuación estudiaremos los automorfismos de L_K en términos de automorfismos de L. Para esto, recordemos que

$$\phi_\alpha(\epsilon) = \exp(\epsilon\ ad\ x_\alpha)$$

es un automorfismo de L (ver la sección 1.4) que al aplicarlo a la base de Chevalley obtenemos

$$\phi_\alpha(\epsilon).x_\alpha = x_\alpha$$
$$\phi_\alpha(\epsilon).x_{-\alpha} = x_{-\alpha} + \epsilon h_\alpha - \epsilon^2 x_\alpha$$
$$\phi_\alpha(\epsilon).h_\alpha = h_\alpha - 2\epsilon x_\alpha$$

y para α, β linealmente independientes

$$\phi_\alpha(\epsilon).h_\beta = h_\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}.\epsilon x_\alpha$$

$$\phi_\alpha(\epsilon).x_\beta = \sum_{i=0}^{q} M_{\alpha,\beta,i}\epsilon^i x_{i\alpha+\beta}$$

donde

$$M_{\alpha,\beta,i} = \frac{1}{i!} N_{\alpha,\beta} N_{\alpha,\alpha+\beta} \dots N_{\alpha,(i-1)\alpha+\beta}$$

y q como en el lema 3.3.4.

Así, si $A_\alpha(\epsilon)$ es la matriz que representa a $\phi_\alpha(\epsilon)$ con respecto a la base de Chevalley, las entradas de $A_\alpha(\epsilon)$ son de la forma $a\epsilon^i$ con $a \in \mathbb{Z}$ e $i \geq 0$. Para $t \in K$ obtenemos la matriz $\bar{A}_\alpha(t)$ reemplazando cada $a\epsilon^i$ por $\bar{a}t^i \in K$ con $\bar{a}$ elemento del campo primo de K correspondiente a $a \in \mathbb{Z}$. De esta forma, tenemos un automorfismo $\bar{\phi}_\alpha(\epsilon)$ de L_K.

Para abraviar notación escribiremos h_α por $\bar{h}_\alpha$, x_α por $\bar{x}_\alpha$, $\phi_\alpha(\epsilon)$ por $\bar{\phi}_\alpha(\epsilon)$ y $A_\alpha(t)$ por $\bar{A}_\alpha(t)$.

Definimos **el grupo de Chevalley** de tipo L sobre el campo K como el grupo de automorfismos del álgebra de Lie L_K generado por $\phi_\alpha(t)$ para $\alpha \in \Phi$, $t \in K$. Lo denotaremos por $\mathrm{L}(K)$.

El grupo de Chevalley es independiente de la elección de la base de Chevalley, es decir, el grupo $\mathrm{L}(K)$ está determinado salvo isomorfismos por el álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ y el campo K. Esto se debe a que L determina a Φ salvo isomorfismos (apéndice A) y a la existencia de un automorfismo de L que transforma a una base de Φ en otra (teorema 3.4.3).

Un ejemplo de grupos de Chevalley son $A_1(K)$ correspondientes al álgebra simple $sl(2, \mathbb{C})$.

Una base de Chevalley para esta álgebra

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuando las operaciones correspondientes tenemos

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \qquad [h, x_{-\alpha}] = -2x_{-\alpha}, \qquad [x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$$

Los automorfismos de $sl(2, \mathbb{C})$ son

$$\phi_\alpha(\epsilon).x = \exp(\epsilon\, ad\, x_\alpha).x = \exp(\epsilon x_\alpha.x.[\exp(\epsilon x_\alpha)]^{-1}$$
$$\phi_{-\alpha}(\epsilon).x = \exp(\epsilon\, ad\, x_{-\alpha}).x = \exp(\epsilon x_{-\alpha}.x.[\exp(\epsilon x_{-\alpha})]^{-1}$$

por lo que, el grupo de Chevalley de L_K está generado por $\phi_\alpha(t)$ y $\phi_{-\alpha}(t)$; $t \in K$. Nótese que el álgebra L_K es isomorfa al álgebra $sl(2, \mathbb{C})$.

Por otro lado

$$\exp(tx_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\exp(tx_{-\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

y estas matrices generan a $SL_2(K)$ (ver [3,pág. 81]) para $t \in K$.

Esto nos permite establecer un isomorfismo de

$$SL_2(K) \to A_1(K)$$

tal que $m \in SL_2(K)$ es enviado al automorfismo $x \to mxm^{-1}$ de L_K. Claramente

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \phi_\alpha(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \to \phi_{-\alpha}(t)$$

Lo anterior implica que $A_1(K)$ es isomorfo a $PSL_2(K)$ el cual es simple excepto para $K = 2$ ó $K = 3$.

4.2.4. La Simplicidad de los Grupos de Chevalley

J. Tits introdujo el concepto de *par* $- (B, N)$ para estudiar una clase de grupos en los cuales se encuentran los grupos de Chevalley.

Dos subgrupos B, N de un grupo G es llamado un *par* $- (B, N)$ si satisfacen

1.- G es generado por B y N.

2.- $B \cap N$ es un subgrupo normal de N.

3.- El grupo $W = N/B \cap N$ es generado por un conjunto de elementos w_i, $i \in I$, tales que $w_i^2 = 1$.

4.- Si $n_i \in N$ es enviado a w_i por el homomorfismo natural de N en W entonces

$$Bn_iB.BnB \subseteq Bn_inB \cup BnB$$

donde n es un elemento de N.

5.- Para n_i como en (4), se cumple que

$$n_iBn_i \neq B$$

Un grupo de Chevalley $G = L(K)$ tiene un *par* $- (B, N)$. Para demostrar este resultado se contruyen los grupos B y N, verificándose que se cumplan los axiomas anteriores.

B es el subgrupo UH de G, donde U es el subgrupo de G generado por los elementos $\phi_\alpha(t)$ con $\alpha \in \Phi^+$ y $t \in K$. H es el subgrupo de G generado por los automorfismos $h_\alpha(\lambda)$ definidos como

$$h_\alpha(\lambda) = \zeta_\alpha \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \qquad\qquad \lambda \neq 0 \in K$$

ζ_α es el homomorfismo de $SL_2(K)$ en el subgrupo generado por $\phi_\alpha(t)$ y $\phi_{-\alpha}(t)$ para toda $t \in K$.

N es el subgrupo de G generado por H y los elementos

$$n_\alpha = \zeta_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \forall \alpha \in \Phi.$$

Cuando K es algebraicamente cerrado B es llamado subgrupo de Borel de G. Si $K = \mathbb{C}$ G es un grupo de Lie semisimple (su álgebra de Lie es semisimple, ver sección 4.1.2) y B es precisamente el máximo grupo soluble conexo de G (ver [3]).

Existe un homomorfismo de N en W (grupo de Weyl) con kernel H tal que $n_\alpha \rightarrow w_\alpha$ $\alpha \in \Phi$. Así, H es normal en N y W es isomorfo a N/H ([3], pág. 102). De esta forma, el grupo W del axioma 3 es precisamente el grupo de Weyl W pues $B \cap N = H$.

Un criterio de simplicidad de un grupo con un *par* $-(B, N)$ establece que si las siguientes condiciones se cumplen:

- $G = G'$; G' es el subgrupo conmutador de G.
- B es soluble.
- $\cap_{g \in G} gBg^{-1} = 1$
- El conjunto I no puede ser dividido en dos subconjuntos J, K con $J \neq 0$ y $J \cap K \neq \emptyset$ tales que w_j conmuta con w_k para todo $j \in J$ y $k \in K$.

entonces G es simple.

De la aplicación de este criterio se sigue que si L es una álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ y K es un campo arbitrario, entonces los grupos de Chevalley $G = \mathrm{L}(K)$ son simples excepto para $A_1(2)$, $A_1(3)$, $B_2(2)$ y $G_2(2)$.

$A_1(2)$ tiene orden seis y es isomorfo al grupo simétrico S_3. $A_1(3)$ tiene orden 12 y es isomorfo al grupo alternante A_4. $B_2(2)$ tiene orden 720 y es isomorfo al grupo simétrico S_6. $G_2(2)$ es orden 12096 y tiene un subgrupo simple de índice 2.

4.2.5. Grupos Finitos Simples de tipo Lie

Hasta aquí hemos vistos que los grupos de Chevalley son simples salvo algunas excepciones y que estos grupos corresponden a cada una de las álgebras de Lie simples sobre los complejos.

Ahora daremos una breve descripción de estos grupos.

En la sección 3.6 analizamos las álgebras de Lie clásicas en términos matriciales y dimos una bases para H y los espacios raíz. A través de un automorfismo adecuado podemos convertir esta base en una base de Chevalley. Por ejemplo, para A_l el automorfismo $\pi(E_{ij}) = -E_{ji}$ produce una base de Chevalley.

De esta forma, para L álgebra de Lie simple de tipo A_l, B_l, C_l ó D_l y $G = \mathrm{L}(K)$ el grupo de Chevalley correspondiente, definimos el grupo de matrices $\bar{G}$ generado por los elementos $\exp(tx_\alpha)$ para toda $\alpha \in \Phi$ y $t \in K$.

De la igualdad

$$\exp(t\,ad\,x_\alpha).x = \exp(tx_\alpha).x.\exp^{-1}(tx_\alpha)$$

$\forall x \in \mathrm{L}_K$, tenemos un homomorfismo σ de $\bar{G}$ en $G = \mathrm{L}(K)$ tal que

$$\exp(tx_\alpha) \xrightarrow{\sigma} \exp(t\,ad\,x_\alpha)$$

El kernel de σ es el centro Z de $\bar{G}$, por lo que $G \cong \bar{G}/Z$.

Esto nos permite tener el siguiente resultado:

- $A_l(K)$ es isomorfo al grupo lineal $PSL_{l+1}(K)$.
- $B_l(K)$ es isomorfo al grupo ortogonal $P\Omega_{2l+1}(K, f_B)$, donde f_B es la forma cuadrática

$$x_0^2 + x_1x_{-1} + x_2x_{-2} + \cdots + x_lx_{-l}$$

- $C_l(K)$ es isomorfo al grupo simpléctico $PSp_{2l}(K)$.
- $D_l(K)$ es isomorfo al grupo ortogonal $P\Omega_{2l}(K, f_D)$ donde f_D es la forma cuadrática

$$x_1x_{-1} + x_2x_{-2} + \cdots + x_lx_{-l}$$

En el caso en que K es el campo de Galois $GF(q)$ con q elementos, G es un grupo de transformaciones lineales no singulares de un espacio sobre un campo finito por lo que G es un grupo finito.

Apéndice A

Teoremas de Conjugación

En la sección 3.3 probamos que una álgebra de Lie semisimple L y una subálgebra toral maximal H de L determinan un sistema de raíces Φ; pero si H' es otra subálgebra toral maximal de L, ¿Es posible que le corresponda un sistema de raíces Φ' diferente de Φ?.

Para mostrar que L determina a Φ (salvo isomorfismos), será suficiente demostrar que H y H' son conjugadas bajo $Aut\,$L, es decir, que existe un automorfismo σ de L tal que $\sigma(H) = H'$.

Primero se revisarán algunos conceptos y lemas que utilizaremos en la segunda parte del ápendice para probar el teorema de conjugación, en los cuales L denotará una álgebra de Lie sobre un campo algebraicamente cerrado F.

A.1. Subálgebras de Cartan

De álgebra lineal tenemos que si $t \in End(V)$ (V espacio vectorial finito dimensional), entonces V es la suma directa de los subespacios $V_a = ker(t - a.1)^m$, donde a es raíz del polinomio característico de t y m su multiplicidad, V_a es invariante bajo t. En particular, si $t = ad\ x$, $x \in$ L, se sigue que L $= \sum_{a \in F} L_a(ad\ x) = L_0(ad\ x) \oplus L_*(ad\ x)$ para $L_*(ad\ x)$ igual a la suma de todos los $L_a(ad\ x)$ con $a \neq 0$. Más general, si K es una subálgebra de L invariante bajo $ad\ x$, $K = K_0(ad\ x) \oplus K_*(ad\ x)$.

Algo que no es difícil de probar es que $L_0(ad\ x)$ es una subálgebra de L y que cada elemento de $L_a(ad\ x)$ es ad-nilpotente. A esta subálgebra se le llama **subálgebra de Engel**.

A continuación daremos dos lemas cuya demostración se encuentra en [7].

Lema A.1.1: Sea K una subálgebra de L. Escogemos $z \in K$ tal que $L_0(ad\ z)$

es minimal en la colección $L_0(ad\ x)$, $x \in K$. Supongamos que $K \subset L_0(ad\ z)$, entonces $L_0(ad\ z) \subset L_0(ad\ x)$ para todo $x \in K$.

Lema A.1.2: Si K es una subálgebra de L que contiene una subálgebra de Engel, entonces $N_{\mathrm{L}}(K) = K$. En particular, las subálgebras de Engel son iguales a su normalizador.

Con lo anterior, estamos en posibilidad de analizar la estructura y el papel que desempeñan las subálgebras de Cartan en las álgebras de Lie semisimples. Empezaremos con la definición: diremos que una **subálgebra** de L es de **Cartan** si es nilpotente y además es igual a su normalizador, esto lo abraviaremos por SAC. Esta definición no garantiza existencia. Sin embargo, si L es semisimple es claro que una subálgebra toral maximal es una subálgebra de Cartan pues ésta es abeliana y $N_{\mathrm{L}}(H) = H$ porque $\mathrm{L} = H + \sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ y $[H\ L_\alpha] = L_\alpha$ para $\alpha \in \Phi$.

Ahora vamos a probar que efectivamente las SAC existen para una álgebra de Lie arbitraria.

Teorema A.1.3: Sea H una subálgebra de una álgebra de Lie L, H es una SAC de L si y sólo si H es una subálgebra minimal de Engel.

Dem.- Primero supondremos que $H = L_0(ad\ z)$ es una subálgebra de Engel; por el lema A.1.2 H es igual a su normalizador. Además, H no tiene una subálgebra de Engel contenida propiamente; aplicando el lema A.1.1, $H = L_0(ad\ z) \subset L_0(ad\ x)\ \forall x \in H$ por lo que $ad_H x$ es nilpotente $\forall x \in H$, es decir, H es nilpotente. Por lo tanto H es una SAC.

Recíprocamente, sea H una SAC de L. Como H es nilpotente, $H \subset L_0(ad\ x)\ \forall x \in H$. Mostraremos que la igualdad se cumple para algún x. Supongamos lo contrario. Tomemos $L_0(ad\ z)$ $z \in H$, lo mas pequeño posible. Aplicando de nuevo el lema A.1.1 tenemos que $L_0(ad\ z) \subset L_0(ad\ x)\ \forall x \in H$. Esto significa que en la representación de H inducida en el espacio vectorial $L_0(ad\ z)/H$, el cual es distinto de cero, cada $x \in H$ actúa como un endomorfismo nilpotente; se sigue de la proposición 1.5.2 la existencia de y ($y \notin H$) tal que $[Hy] \subset H$. Esto contradice la hipótesis de que H es igual a su normalizador. □

Corolario A.1.4: Sea L semisimple. Entonces las SAC de L son precisamente las subálgebras torales maximales de L.

Dem.- Sea H una SAC. Si $x = x_s + x_n$ es la descomposición de Jordan de x en L, entonces $L_0(ad\ x_S) \subset L_0(ad\ x)$. En efecto, si para alguna potencia de $ad\ x_s$, y es enviado al cero, se tiene que para esa misma potencia $ad\ x$ es cero pues, $ad\ x_n$ es nilpotente y conmuta con $ad\ x_s$. Notemos que para $x \in$ L semisimple, $L_0(ad\ x) = C_{\mathrm{L}}(x)$ ya que $ad\ x$ es diagonalizable. Por el teorema A.1.3, H es una subálgebra minimal de Engel, $H = L_0(ad\ x)$ y de las observaciones anteriores se sigue que $H = L_0(ad\ x_s) = C_{\mathrm{L}}(x_s)$. Pero $C_{\mathrm{L}}(x_s)$

contiene una subálgebra toral maximal de L (este resultado se obtiene aplicando la definición de centralizador y del hecho de que una subálgebra toral maximal es abeliana) la cual es una SAC , de donde H es una subálgebra toral maximal puesto que H no contiene SAC contenidas propiamente en ella. □

De esta demostración concluimos que cada subálgebra toral maximal de una álgebra de Lie semisimple tiene la forma $C_{\mathrm{L}}(s)$ para algún elemento semisimple s. A s le llamamos **regular semisimple.**

Las subálgebras de Cartan se preservan bajo epimorfismos. Es decir, si $\phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ es un epimorfismo de álgebras de Lie y H es SAC de L se tiene que $\phi(H)$ es SAC de L' ó si H' es SAC de L' y $K = \phi^{-1}(H)$, entonces cualquier SAC H de K es SAC de L.

A.2. Teoremas de Conjugación

En esta sección vamos a probar que todas las subálgebras de Cartan de L son conjugadas bajo el grupo *Int* L (el grupo generado por los automorfismos exp $ad\ x$, $x \in$ L ad-nilpotente). Para el caso en que L es semisimple, esto implica que todas las subálgebras torales maximales son conjugadas, por lo que L determina un único sistema de raíces salvo isomorfismos. La idea de la demostración será probarlo primero para el caso en que L es soluble y después pasaremos al caso en que L es semisimple. Pero antes veamos algunas definiciones y lemas auxiliares.

Diremos que $x \in$ L es **fuertemente ad-nilpotente** si existe $y \in$ L y algún eigenvalor $a \neq 0$ de $ad\ y$ tal que $x \in L_a(ad\ y)$. Esto obliga a que x sea ad-nilpotente. Denotaremos por $\mathcal{N}(\mathrm{L})$ el conjunto de todos los elementos de L que son fuertemente ad-nilpotentes y por $\mathcal{E}(\mathrm{L})$ el subgrupo de *Int* L generado por todos los exp $ad\ x$, $x \in \mathcal{N}(\mathrm{L})$.

Si K es una subálgebra de L, definimos el conjunto $\mathcal{E}(\mathrm{L}; K)$ de $\mathcal{E}(\mathrm{L})$ formado por exp $ad_{\mathrm{L}} x$ $x \in \mathcal{N}(K)$. Es claro que $\mathcal{E}(\mathrm{L}; K)$ es subgrupo de $\mathcal{E}(\mathrm{L})$. Así $\mathcal{E}(K)$ se obtiene al tomar la restricción de $\mathcal{E}(\mathrm{L}; K)$ a K. Observemos que si $\phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ es un epimorfismo y $y \in$ L, entonces $\phi(L_a(ad\ y)) = L'_a(ad\ \phi(y))$; de donde $\phi(\mathcal{N}(\mathrm{L})) = \mathcal{N}(\mathrm{L}')$.

Lema A.2.1: Sea $\phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ un epimorfismo. Si $\sigma' \in \mathcal{E}(\mathrm{L}')$, entonces existe $\sigma \in \mathcal{E}(\mathrm{L})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma"'] & L' \arrow[d, "\sigma'"] \\ L \arrow[r, "\phi"'] & L' \end{tikzcd}$$

Dem.- Será suficiente probarlo para el caso en que $\sigma' = \exp\, ad_{L}x'$, $x' \in \mathcal{N}(L')$. De la observación anterior tenemos que existe $x \in \mathcal{N}(L)$ tal que $x' = \phi(x)$. Sea $z \in L$, $(\phi \circ \exp\, ad_{L}x)(z) = \phi(z+[xz]+\frac{1}{2}[x[xz]]+\cdots) = \phi(z)+[x'\phi(z)]+\frac{1}{2}[x'[x'\phi(z)]]+\cdots = (\exp\, ad_{L}x' \circ \phi)(z)$. En otras palabras, el diagrama conmuta. □

Ahora pasemos al teorema de conjugación para el caso soluble.

Teorema A.2.2: Sea L soluble y H_1, H_2 subálgebras de Cartan de L. Entonces H_1 y H_2 son conjugadas bajo $\mathcal{E}(L)$.

Dem.- Si L es nilpotente y H SAC se sigue de la definición de nilpotencia que $H = L$ por lo que se tiene el teorema.

Supongamos que L no es nilpotente. La demostración se hará por inducción sobre $\dim L$. Si $\dim L = 1$, es claro. Como L es soluble, L posee ideales abelianos distintos de cero (por ejemplo el último término diferente de cero de la sucesión de ideales $L^{(i)}$); sea A el grupo abeliano de más pequeña dimensión. Consideremos ahora el álgebra cociente $L' = L/A$ y el morfismo canónico $\phi : L \to L/A$ tal que $x \mapsto x'$. Así H_1' y H_2' son SAC de L'. Por hipótesis de inducción, existe $\sigma' \in \mathcal{E}(L')$ tal que $\sigma'(H_1') = H_2'$. Por el lema A.2.1 podemos encontrar $\sigma \in \mathcal{E}(L)$ tal que σ transforma a la imagen inversa $K_1 = \phi^{-1}(H_1')$ en $K_2 = \phi^{-1}(H_2')$. Ahora, H_2 y $\sigma(H_1)$ son SAC del álgebra K_2. Si K_2 es más pequeña que L, la hipótesis de inducción nos permite encontrar $\tau' \in \mathcal{E}(K_2)$ tal que $\tau'\sigma(H_1) = H_2$; pero $\mathcal{E}(K_2)$ está formado por la restricción a K_2 de los elementos de $\mathcal{E}(L; K_2) \subset \mathcal{E}(L)$, esto implica que $\tau\sigma(H_1) = H_2$ para $\tau \in \mathcal{E}(L)$ y $\tau | K_2 = \tau'$.

Supongamos que $L = K_2 = \sigma(K_1)$, así $K_1 = K_2$ y $L = H_2 + A = H_1 + A$. Construiremos en este caso un automorfismo explícito de L. Del teorema A.1.3 tenemos que H_2 es de la forma $L_0(ad\ x)$ para algún $x \in L$. Como A es invariante bajo $ad\ x$ (A es ideal) se sigue que $A = A_0(ad\ x) \oplus A_*(ad\ x)$ y cada sumando es invariante bajo $L = H_2 + A$. Por la minimalidad de A, $A = A_0(ad\ x)$ ó $A = A_*(ad\ x)$. El primer caso es imposible pues, esto implicaría que $A \subset H_2$, es decir, $L = H_2$, contradiciendo la hipótesis de que L no es nilpotente. De esta manera $A = A_*(ad\ x)$ de donde $A = L_*(ad\ x)$.

De L $= H_1 + A$, podemos escribir $x = y + z$, $y \in H_1$, $z \in L_*(ad\ x)$. Por otro lado, $z = [xz']$, $z' \in L_*(ad\ x)$ ya que $ad\ x$ es invertible en $L_*(ad\ x)$. Como A es abeliano, $(ad\ z')^2 = 0$, por lo que $\exp\ ad\ z' = 1_L + ad\ z'$; aplicado a x, esto produce $x - z = y$. En particular, $H = L_0(ad\ y)$ deberá ser una SAC de L. Además $y \in H_1$, de donde $H_1 \subset H$ ó equivalentemente $H = H_1$. Así H_1 es conjugada a H_2 vía $\exp\ ad\ z'$.

Falta únicamente probar que $\exp\ ad\ z' \in \mathcal{E}(\mathrm{L})$: z' puede ser expresado como la suma de ciertos elementos z_i fuertemente ad-nilpotentes de A, pero éstos conmutan (A es abeliano), por lo que $\exp\ ad\ z' = \sum_i \exp\ ad\ z_i \in \mathcal{E}(\mathrm{L})$. □

Para pasar al caso semisimple vamos a utilizar el concepto de **subálgebra de Borel** de una álgebra de Lie L, definida como la máxima subálgebra soluble de L. Mostraremos que dos subálgebras de Borel de L son conjugadas bajo $\mathcal{E}(\mathrm{L})$ y aplicando el teorema A.2.2 tendremos que todas las subálgebras de Cartan de L serán conjugadas.

Lema A.2.3: Si B es una subálgebra de Borel de L, entonces $B = N_L(B)$.

Dem.- Sea $x \in N_L(B)$, entonces $B + Fx$ es una subálgebra de L soluble, pues $[B + Fx, B + Fx] \subset B$, de donde $x \in B$ por maximalidad de B. □

De aquí en adelante L será semisimple. Sea H una SAC, Φ el sistema de raíces de L relativo a H. Fijemos una base Δ y consideremos las subálgebras $B(\Delta) = H + \sum_{\alpha \succ 0} L_\alpha$, $N(\Delta) = \sum_{\alpha \succ 0} L_\alpha$. N($\Delta$) es nilpotente. En efecto, si $x \in L_\alpha$ $(\alpha \succ 0)$, entonces $ad_{L_\beta} x = [xL_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$ $\beta \succ 0$, lo cual muestra que los endomorfismos $ad\ x$ son nilpotentes. De lo anterior se sigue que $B(\Delta)$ es soluble. Ahora probaremos que $B(\Delta)$ es una subálgebra de Borel. Sea K una subálgebra de L tal que $B(\Delta)$ está contenida propiamente en K, así K contiene algún L_α para $\alpha \prec 0$ y como K es invariante bajo $ad\ H$, tenemos que K contiene una subálgebra isomorfa al álgebra simple $sl(2, F)$. Por lo tanto, K no puede ser soluble.

Lema A.2.4: Sea H SAC y Φ un sistema de raíces de L. Para cada base $\Delta \subset \Phi$, $B(\Delta)$ es una subálgebra de Borel de L (llamada **estándar** relativa a H). Todas las subálgebras de borel estándar de L relativas a H son conjugadas bajo $\mathcal{E}(L)$.

Dem.- Unicamente el segundo enunciado falta probar. Como se vió en la sección 3.4, las reflexiones σ_α que actúan en H pueden ser extendidas a un automorfismo τ_α de L, el cual por construcción está en $\mathcal{E}(\mathrm{L})$. Es claro que este automorfismo envía a $B(\Delta)$ en $B(\sigma_\alpha \Delta)$. Usando el hecho de que el grupo de Weyl está generado por reflexiones, vemos que $\mathcal{E}(\mathrm{L})$ actúa transitivamente en las subálgebras estándar de Borel relativas a H. □

Teorema A.2.5: Las subálgebras de Borel de L son conjugadas bajo $\mathcal{E}(\mathrm{L})$.

Dem.- La demostración se hará por inducción sobre $\dim \mathrm{L}$. Si $\dim \mathrm{L} = 1$ es claro. Asumiremos que B es una subálgebra de Borel estándar relativa a alguna SAC. Tenemos que mostrar que alguna otra subálgebra de Borel B' está conjugada a B bajo $\mathcal{E}(\mathrm{L})$. Si $B \cap B' = B$ no hay nada que probar, pues esto obliga a que $B = B'$. Por lo que podemos usar una segunda inducción en $\dim B \cap B'$ (hacia abajo), es decir, supondremos que si la $\dim B \cap B'$ es mayor que uno, existe $\tau \in \mathcal{E}(\mathrm{L})$ tal que $\tau(B') = B$. Consideremos el caso en que $B \cap B'$ está contenido propiamente en B y en B'.

(1) **Primero supongamos que** $B \cap B' \neq 0$. Podemos distinguir dos casos:

Caso (i): *El conjunto N' de elementos nilpotentes de $B \cap B'$ es diferente de cero.*

Afirmación: N' es un ideal de $B \cap B'$. En efecto, si $x \in B \cap B'$ y $y \in N'$ entonces $[xy] \in [B \cap B', B \cap B']$ pero, $[B \cap B', B \cap B']$ consiste de elementos nilpotentes (en general, si L es soluble entonces [LL] es nilpotente. La demostración se sigue de analizar las matrices $[ad\ \ B\cap B', ad\ \ B \cap B'])$. Claramente N' es un subespacio, por lo que se obtiene la afirmación. N' no es un ideal de L por lo que su normalizador K es una subálgebra propia de L.

Mostraremos que $B \cap B'$ está contenida propiamente en $B \cap K$ y $B' \cap K$. Fijémonos en la acción de N' en $B/(B \cap B')$ inducida por ad. Para cada $x \in N'$ $ad\ x$ es nilpotente en este espacio vectorial, así por la proposición 1.5.2 existe un vector $y + (B \cap B') \neq 0$ tal que $[xy] \in B \cap B'$. Pero $[xy] \in [BB]$ por lo que es nilpotente: esto obliga a que $[xy] \in N'$ ó $y \in N_B(N') = B \cap K$. En forma análoga se prueba que $B \cap B'$ está contenida propiamente en $B' \cap K$.

Por otro lado, $B \cap K$ y $B' \cap K$ son subálgebras solubles de K. Sean C y C' subálgebras de Borel de K contenidas en $B \cap K$ y $B' \cap K$ respectivamente (fig. A.2.1). Como $K \neq L$, por hipótesis de inducción existe $\sigma \in \mathcal{E}(\mathrm{L}; K) \subset \mathcal{E}(\mathrm{L})$ tal que $\sigma(C') = C$. Como $B \cap B'$ es una subálgebra propia (diferente de cero) tanto de C como de C', se tiene que $B \cap B' \subset B \cap C = B \cap \sigma(C')$ y de la segunda hipótesis de inducción existe $\tau \in \mathcal{E}(\mathrm{L})$ tal que $\tau\sigma(C') \subset B$. Finalmente, $B \cap \tau\sigma(B') \supset \tau\sigma(C') \cap \tau\sigma(B') \supset \tau\sigma(B' \cap K) \supsetneq \tau\sigma(B \cap B')$, por lo que la primera intersección es de dimensión mayor que la dimensión de $B \cap B'$. De nuevo, de la segunda hipótesis de inducción, vemos que B es conjugada a $\tau\sigma(B')$ bajo $\mathcal{E}(\mathrm{L})$, con lo cual el caso (i) está probado.

Caso(ii): *$B \cap B'$ no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.*

Notemos que toda subálgebra de Borel de L contiene las partes semisimples y nilpotentes de sus elementos (se sigue de la proposición 1.6.1(3) y del lema A.2.3); esto implica que $B \cap B' = T$ es una subálgebra toral. Como B es una subálgebra de Borel estándar, $B = B(\Delta)$ y $B = H + N$ para $N = N(\Delta)$. Puesto que $[BB] = N$ y $T \cap N = 0$ se tiene que $N_B(T) = C_B(T)$. Sea C una SAC de $C_B(T)$; en particular, C es nilpotente y $T \subset N_{C_B(T)}(C) = C$. La identidad de Jacobi muestra que algún elemento que normaliza a C centraliza a T, de donde $N_B(C) = N_{C_B(T)}(C) = C$. De esta manera C es una SAC de B (la cual incluye a T). Sabemos del teorema A.2.2 que C es conjugada bajo $\mathcal{E}(B)$ (de aquí que bajo $\mathcal{E}(\mathrm{L})$) a H, por lo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $T \subset H$.

Supongamos que $T = H$. Evidentemente $H \subsetneq B'$, así B' deberá contener al menos un L_α ($\alpha < 0$ relativo a Δ). Aplicando el automorfismo τ_α (ver demostración del lema A.2.4) a B', producirá una subálgebra de Borel $B"$ cuya intersección con B contiene a $H + L_\alpha$; así la segunda hipótesis de inducción muestra que $B"$ es conjugada a B, con lo cual hemos probado que el teorema se cumple para este caso.

Ahora supongamos que T está contenida propiamente en H . Tenemos que B' centraliza a T ó no. Supongamos que $B' \subset C_{\mathrm{L}}(T)$. Como $\dim C_{\mathrm{L}}(T) < \dim \mathrm{L}$ ($T \neq 0$ y $Z(\mathrm{L}) = 0$) y $H \subset C_{\mathrm{L}}(T)$ podemos encontrar una subálgebra de Borel $B"$ de $C_{\mathrm{L}}(T)$ tal que $H \subset B"$; de la primera hipótesis de inducción existe $\sigma \in \mathcal{E}(\mathrm{L}; C_{\mathrm{L}}(T)) \subset(\mathrm{L})$ tal que envía B' en $B"$. En particular, $B"$ es una subálgebra de Borel de L que contiene a H y por la segunda hipótesis de inducción es conjugada a B bajo $\mathcal{E}(\mathrm{L})$.

Consideremos ahora la situación en que $B \not\subset C_{\mathrm{L}}(T)$. Esto nos permite encontrar un eigenvector común $x \in B'$ para $ad\ T$, (recordemos que $T \subset H$) y un elemento $t \in T$ para el cual $[tx] = ax$ con a racional y positivo. Definimos $S = H + \sum L_\alpha$ con $\alpha \in \Phi$ tal que $\alpha(t)$ es racional y positivo. S es una subálgebra de L y $x \in S$. Más aún, S es soluble (ver demostración del lema A.2.4). Sea $B"$ una subálgebra de Borel de L que incluye a S, así $B" \cap B' \supset T + Fx \supsetneq T = B' \cap B$ por lo que $\dim B" \cap B' > \dim B \cap B'$. Similarmente $B" \cap B \supset H \supsetneq T$, es decir, $\dim B" \cap B > \dim B \cap B'$. La segunda hipótesis de inducción aplicada a esta última desigualdad muestra que $B"$ es conjugada a B y de la primera desigualdad tenemos que $B"$ es conjugada a B'. Por lo tanto, B es conjugada a B'. De esta manera, ya está probado el caso en que $B \cap B' \neq 0$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{L} \arrow[d, dash] & \\
 & K \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
C \arrow[d, dash] & & C' \arrow[d, dash] \\
B \cap K \arrow[dr, dash] & & B \cap K \arrow[dl, dash] \\
 & B \cap B' \arrow[d, dash] & \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

Fig. A.2.1

(2) Consideremos ahora que sucede si $B \cap B' = 0$. Esto obliga a que $\dim \mathrm{L} \geq \dim B + \dim B'$; como B es estándar, sabemos que $\dim B > \frac{1}{2} \dim \mathrm{L}$, así B' deberá tener dimensión menor. De manera más precisa. Sea T una subálgebra toral maximal de B'. Si $T = 0$, entonces B' consiste de elementos nilpotentes y por el teorema de Engel B' es nilpotente; por otro lado, como B' es de Borel se tiene que es igual a su normalizador, así B'

es SAC. Pero esto es abusdo pues todas las SAC de L son torales. De donde $T \neq 0$. Si H_0 es una subálgebra toral maximal de L que contiene a T, entonces B' tiene intersección diferente de cero con alguna subálgebra de Borel estándar B" relativa a H_0. Por la primera parte de la prueba tenemos que B' es conjugada a B", así $\dim B' = \dim B" > \frac{1}{2} \dim \mathrm{L}$, contradiciendo el hecho de que B' tiene dimensión menor a $\frac{1}{2} \dim \mathrm{L}$. □

Corolario A.2.6: Las subálgebras de Cartan de L son conjugadas bajo $\mathcal{E}(L)$.

Dem.- Sean H, H' dos SAC de L. Como H y H' son nilpotentes, se encuentran en alguna subálgebra de Borel, digamos B y B' respectivamente. Por el teorema anterior, existe $\sigma \in \mathcal{E}(\mathrm{L})$ tal que $\sigma(B) = B'$. Así $\sigma(H)$ y H' son SAC del álgebra soluble B' por lo que, gracias al teorema A.2.2, existe $\tau' \in \mathcal{E}(B')$ para el cual $\tau'\sigma(H) = H'$. Pero τ' es la restricción a B' de algún $\tau \in \mathcal{E}(\mathrm{L}; B') \subset \mathcal{E}(\mathrm{L})$, de donde $\tau\sigma(H) = H'$, $\tau\sigma \in \mathcal{E}(\mathrm{L})$. □

Bibliografía

Libros

[1] Aschbacher Michael.
The finite Simple Groups and Their Classification.
Yale University Press, 1980.

[2] Boothby William M.
An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.
Academic Press, New York, 1975.

[3] Carter Roger W.
Simple Groups of Lie Type.
Wiley & Sons, London, 1972.

[4] Bishop, R.L y Crittenden, R.J.
Geometry of Manifolds.
Academic Press, New York.

[5] Dickson Leonard Eugene.
Linear Groups.
Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[6] Helgason Sigurdur.
Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.
Academic Press, New York, 1966.

[7] Humphreys J. E.
Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.
Springer-Verlag, New York, 1972.

[8] Lang Serge.
Algebra Lineal.
Addison-Wesley, México, 1976.

[9] Milnor John W.
Topology from the Differentiable Viewpoint.
The University Press of Virginia Charlottesville, Charlottesville, 1965.

[10] Morton L. Curtis.
Matrix Groups.
Universitext, Springer-Verlag, New York, 1979.

[11] Samelson Hans.
Notes on Lie Algebras.
Universitext, Springer-Verlag, New York, 1990.

[12] Varadajan V. S. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representation.*
Springer-Verlag, New York, 1974.

[13] Vargas M. José.
Algebra Abstracta.
Limusa, México, 1986.

[14] Warner Frank W.
Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.
Springer-Verlag, New York, 1983.

Artículos

[15] Aschbacher Michael.
The Classification of the Finite Simple Groups.
The Mathematical Intelligencer Vol. 3, No. 2, 1981.

[16] Coleman A. J.
The Greatest Mathematical Paper of All Time.
The Mathematical Intelligencer Vol. 11, No.3, 1989.

[17] Hawkins Thomas.
Non-Euclidean Geometry and Weierstrassian Mathematics: The Background To

Killing's Work on Lie Algebras.
Historia Mathematica 7, 1980.

[18] Helgason Sigurdur.
A Centennial: Wilhelm Killing and the Exceptional Groups.
The Mathematical Intelligencer Vol 12, No. 3, 1990.

[19] Hurley James F. and Rudvalis Arunas.
Finite Simple Groups.
America Mathematical Montly. November, 1977.