Acta No. 83
Foja No. 82
Libro No. 1
Expediente No. 8920345-5

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, Méx. siendo las 12:00 horas del día 14 de Octubre de 1994 se reunieron en el aula 9K-205 del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora los señores:

JORGE RUPERTO VARGAS CASTRO,
CARLOS ALBERTO ROBLES CORBALA
y MARCO ANTONIO VALENCIA ARVIZU,

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como secretario el último para recibir el examen profesional de la carrera de:

Licenciado en Matemáticas

a la señorita: María Mercedes - Chacara Montes.

Después de haber presentado su tesis intitulada: "Anillos e Ideales Booleanos en la Fundamentación de un Modelo no Estándar y una Aplicación" la que previamente le fué aprobada por el Jurado, los señores sinodales replicaron a la sustentante y después de debatir entre si reservada y libremente la declararon:

APROBADA POR UNANIMIDAD

Firma de la sustentante

Acto continuo el presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente y firman los que han intervenido.

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

ILLOS E IDEALES BOOLEANOS EN LA FUNDAMENTACION DE UN MODELO NO ESTANDAR Y UNA APLICACION"

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

MARIA MERCEDES CHACARA MONTES

HERMOSILLO, SONORA **OCTUBRE DE 1994**

A mis padres:

A él por inculcarme el gusto
por esta disciplina.
A ella por su ejemplo y
cariño;
y porque juntos me enseñaron
a caminar por la vida.

A mis hermanos (Jesús y Allán)
que apesar de la distancia
comparto con ellos esta satisfacción.

En memoria de mi abuelo quien me contagió
de su terquedad, me hubiera gustado
compartir con él este logro ("mi terquedad").

A mis padrinos y primos con
quienes estaré eternamente
agradecida.

A la Universidad de Sonora.

A todos aquellos que por mi sed se convirtieron en río,
que por mi inquietud se convirtieron en viento.

A la vida que me ha dado tanto...

Mi infinito agradecimiento al M.C. Jorge Ruperto Vargas C. por sugerir este tema y por su valiosa asesoría en la elaboración de esta tesis.

A los maestros: M.C. Marco Antonio Valencia Arvizu y al M.C. Carlos Robles Corbalá, por su gran paciencia en la revisión, sus útiles observaciones, correcciones e indicaciones en la realización de este trabajo.

I N D I C E

PAGINA

INTRODUCCION.....1

CAPITULO I: Estructuras booleanas;.....2
I.1: Anillos booleanos;.....2
I.2: Algebras booleanas;.....7
I.3: Orden;.....18

CAPITULO II: Filtros y Ultrafiltros como duales de ideales booleanos;.....24
II.1: Homomorfismos e ideales booleanos;.....24
II.2: El Teorema de Homomorfismo;.....32
II.3: Concepto booleano de Filtro;.....35

CAPITULO III: Construcción de un modelo de análisis no estándar;.....42
III.1: El sistema de los números reales no estándar *R;.....49

CAPITULO IV: Una aplicación de un modelo no estándar a un problema que había permanecido abierto;.....59

CONCLUSIONES:.....74

APENDICE:.....75

BIBLIOGRAFIA:.....76

INTRODUCCION

Para construir un modelo no estándar, utilizamos la teoría de Filtros y Ultrafiltros, cuyas definiciones varían en algunos libros y publicaciones.

Aquí se pretende ver los conceptos a partir de una teoría más sencilla como es el álgebra booleana.

En el capítulo I se hace la presentación de las estructuras booleanas, como álgebras y anillos, las cuales son básicas para definir en el capítulo II los homomorfismos e ideales booleanos.

En el capítulo II definimos los Filtros y Ultrafiltros como duales de ideales booleanos, comparamos estas definiciones con otras que se dan en libros y publicaciones, además de otras caracterizaciones, y probamos la equivalencia entre ellas.

En el capítulo III se hace la presentación de un modelo de análisis no estándar, es un modelo que combina la teoría de modelos y la teoría axiomática de conjuntos.

En el capítulo IV se presenta la solución de un problema que permaneció abierto por mucho tiempo y cuya solución se dió por medio del análisis no estándar.

I.- ESTRUCTURAS BOOLEANAS

En este capítulo se hace la presentación de estructuras booleanas, como son anillos y álgebras booleanas, después de haber recordado algunas propiedades conjuntistas presentándolas como nuestro primer ejemplo de álgebra booleana.

Además del ejemplo conocido del álgebra proposicional, aquí presento otro ejemplo diferente e importante, el de los conjuntos regulares abiertos; se demuestra que la clase de todos los conjuntos regulares abiertos de un espacio topológico arbitrario no vacío es un álgebra booleana.

Esta presentación de estructuras booleanas nos sirve para comprender definiciones que se dan en el capítulo II.

I.1 ANILLOS BOOLEANOS

Definición: Un anillo booleano es un anillo con unitario en el cual cada elemento es idempotente, es decir $p^2 = p$.

Ejemplos:

i) Un ejemplo trivial de anillo booleano es el anillo de los ente - ros módulo 2.

ii) Otro ejemplo no tan trivial es el conjunto 2^X de todas las funciones de un conjunto arbitrario no vacío X en un anillo isomorfo al de los enteros módulo 2; al cual lo simbolizaremos por R_2. Los elementos de 2^X serán llamados funciones en X, 2-valuadas. Los elementos distinguidos y operaciones en 2^X son definidos así:

$$0(x)=0 \quad y \quad 1(x)=1 \quad \text{para cada } x \text{ en } X.$$

Si p y q son funciones 2-valuadas en X, entonces las funciones p+q, pq son definidas por: $(p+q)(x)= p(x)+q(x)$ (1)

$$(pq)(x)= p(x)q(x)$$

Es necesario afirmar que sea $x\neq 0$ para garantizar que 0 y 1 son distintos.

iii) Sea A el conjunto de todos los elementos idempotentes en un anillo conmutativo R con unitario, con adición definida como una nueva suma de p y q en A: $p*q= p+q-2pq$.

Los elementos distinguidos de A, son los de R, y la multiplicación en A es justamente la multiplicación en R restringida a los elementos de A.

(A,+,.) es un anillo booleano.

Demostración:

- Con la suma:

$p*q= p+q-2pq$ por definición de operación.

*Aquí las operaciones de la parte derecha, se refieren a las de R_2

Cerradura: $(p*q)^2 = p*q$

P.D. $(p+q-2pq)^2 = p+q-2pq$

$(p+q-2pq)^2 = p^2+pq-2p^2q+pq+q^2-2pq^2-2p^2q-2pq^2+4pq$

$= p+pq-2pq+pq+q-2pq-2pq-2pq+4pq$ (por idempotencia)

$= p+q+6pq-8pq$

$= p+q-2pq$

Elemento neutro:

$\exists\ x \in A, \forall\ p \in A, p*x = p.$

Demostración:

Probaremos que tal elemento es $x = 0$.

$p*0 = p+0-2p0$

$= p-0$

$= p$

Elementos inversos:

Para cada $p \in A$, $\exists\ y \in A$ tal que $p*y=0$.

El candidato propuesto es $y = p$. A continuación probamos que reúne los requisitos:

$p*p = p+p-2pp$ (Por definición de la operación)

$= p+p-2p$ (Por idempotencia)

$= 2p-2p$

$= 0$

Cada elemento es su propio inverso.

Asociatividad: $\forall p,q,r \in A,\ p*(q*r)= (p*q)*r.$

$$p*(q*r) = p*(q+r-2qr)$$
$$= p+q+r-2qr-2p(q+r-2qr)$$
$$= p+q+r-2qr-2pq-2pr+4pqr$$

$$(p*q)*r = (p+q-2pq)*r$$
$$= p+q-2pq+r-2(p+q-2pq)r$$
$$= p+q-2pq+r-2r(p+q-2pq)$$
$$= p+q+r-2pq-2rp-2rq+4rpq$$
$$= p+q+r-2qr-2pq-2pr+4pqr$$

$$\therefore p*(q*r) = (p*q)*r$$

Conmutatividad: Se hereda de la conmutatividad de R.

- Con el producto:

Cerradura: $\forall\ p,q \in A,\ pq \in A.$

$$(pq)^2 = p^2q^2 \quad \text{(Por ser R conmutativo)}$$
$$= pq \quad \text{(Por ser p y q elementos de A)}$$

Asociatividad: Se hereda de la estructura de R.

Distributividad: $\forall\ a,b,c \in A,\ a(b*c)= ab*ac.$

$$a(b*c)= a(b+c-2bc)$$

$$=ab+ac-2abc$$

$$ab*ac= ab+ac-2abac$$

$$= ab+ac-2a^2bc$$

$$= ab+ac-2abc$$

$$\therefore a(b*c)= ab*ac$$

Hasta aquí nuestros ejemplos de anillo booleano.

La idempotencia en la definición de anillo booleano tiene gran influencia en su estructura. Dos de estas concecuencias son:

1) Todo anillo booleano es conmutativo.
2) Todo anillo booleano tiene característica 2 (i.e. $p+p=o\ \forall\ p \in A$)

Demostración:

Lema: $pq = -qp$

Demostración:

$$(p+q)^2= p^2+pq+qp+q^2$$

Por idempotencia tenemos que $(p+q)^2= p+q$, por lo que:

$$p^2+pq+qp+q^2 = p+q$$

$$p+pq+qp+q = p+q$$

$$(p+q)+pq+qp = p+q$$

$$pq+qp = 0$$

$$pq = -qp \ \blacksquare$$

Por el lema, si p=q, tenemos que: $qq = -qq$

$$q^2 = -q^2$$

$$q = -q$$

Por lo que $pq = -qp = qp$, lo que demuestra 1),

y $p+p = p+(-p) = 0$, lo que demuestra 2)

I.2 ALGEBRAS BOOLEANAS

Sea X un conjunto no vacío y sea $\rho(X)$ (el conjunto potencia de X) la clase de todos los subconjuntos de X. Del álgebra conjuntista, conocemos las propiedades siguientes:

$\forall A,B \in \rho(X)$, $A \cup B \in \rho(X)$ (Cerradura de la unión).

$\forall A,B,C \in \rho(X)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociativa de la unión).

$\forall A,B \in \rho(X)$, $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa de la unión).

$\forall A,B \in \rho(X)$, $A \cap B \in \rho(X)$ (Cerradura de la intersección).

$\forall A,B \in \rho(X)$, $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa de la intersección).

$\forall A,B,C \in \rho(X)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociativa de la intersección)

$\exists \phi \in \rho(X) \wedge \exists X \in \rho(X), \forall A \in \rho(X), A \cap X = A \wedge A \cup \phi = A$ (Existencia de elementos neutros,para la unión e intersección).

$\forall A,B,C \in \rho(X)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \wedge A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Leyes distributivas).

$\forall A \in \rho(X)$, $A \cup A^c = X \wedge A \cap A^c = \phi$ (Definición de complemento).

$\phi^c = X \wedge X^c = \phi$

$\forall A,B \in \rho(X)$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \wedge (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Leyes de De Morgan)

Cualquier otro conjunto B que ocupe el lugar de $\rho(X)$ arriba mencionado, una operación binaria (+) en B que ocupe el lugar de $\cup$

y otra operación binaria (.) en B que ocupe el lugar de $\cap$; un signo ' que aplicado a cada elemento a de B (a') ocupe el lugar del complemento y con los elementos 0 y 1 que ocupen los lugares del vacío y el universo respectivamente, que cumpla con las mismas propiedades respectivas de $A \cup B$, $A \cap B$, A^c, ϕ y $\rho(X)$; constituye lo que llamaremos **ALGEBRA BOOLEANA**, cuya definición más simple es la dada por Huntington en 1904, que establece lo siguiente:

Definición: Un conjunto no vacío de elementos B con dos operaciones binarias (+),(.) (denotamos a.b o ab) se llama álgebra booleana si y sólo si valen los siguientes postulados:

1) Las operaciones (+),(.) son conmutativas.

2) Existen en B elementos identidad 0 y 1 relativos a las operaciones "+" y ".", respectivamente.

3) Cada operación es distributiva con respecto a la otra:

$$a.(b+c) = a.b+a.c$$

$$a+(b.c) = (a+b).(a+c)$$

4) Para cada a en B existe un elemento a' en B, tal que $a+a' = 1$ y $a.a' = 0$

Un ejemplo sería el álgebra proposicional, cuyas operaciones binarias son $p \wedge q$, $p \vee q$.

Usaremos una tabla de verdad para definir estas operaciones:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

TEOREMA I.2.1: El álgebra de proposiciones es un álgebra booleana.

Demostración:

a) El que (+) y (.) son ambos conmutativos se obtiene inmediatamente de la definición y, por lo tanto, se verifica el postulado 1 (definición de álgebra booleana).

b) Si *f* representa una falacia, entonces *f* cumple con el papel de neutro aditivo ya que para cualquier proposición p, $p+f \equiv p \vee f \equiv p$.

Igualmente, si *t* representa una tautología, entonces dicha *t* cumple con el papel de neutro multiplicativo; ya que para cualquier proposición p, $pt \equiv p \wedge t \equiv p$.

Lo afirmado en el inciso b) puede comprobarse mediante las siguientes tablas:

p	*f*	p∨*f*
1	0	1
0	0	0

p	*t*	p∧*t*
1	1	1
0	1	0

c) Cada operación es distributiva respecto a la otra.

La siguiente tabla establece una de las leyes distributivas, y para la otra ley se procede de forma similar.

Demostración de que p+qr = (p+q)(p+r)

p	q	r	qr	p+qr	p+q	p+r	(p+q)(p+r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

d) Para cada proposición p, hay una proposición ~p, la negación de p, que satisface las relaciones $p(\sim p) \equiv f$ y $p+(\sim p) \equiv t$.

Podemos introducir en todo anillo booleano operaciones muy semejantes a las de teoría de conjuntos:

1) $a \odot b = ab$

2) $a \oplus b = a+b+ab$

3) $a' = 1+a$

Las operaciones de la parte derecha en las igualdades anteriores, se refieren a las operaciones del anillo booleano; el mismo conjunto, con las nuevas operaciones (las de la parte izquierda) es un álgebra booleana.

La suma y el producto pueden escribirse a partir de uniones, intersecciones y complementos:

4) $ab = a \cap b$

5) $a+b = (a \cap b') \cup (a' \cap b)$

Teorema I.2.2: Todo anillo booleano es un álgebra booleana y viceversa.

Demostración: Si las operaciones booleanas son definidas en un anillo booleano A por 1), 2) y 3), entonces A es un álgebra booleana y si las operaciones de anillo son definidas en un álgebra booleana A por 4) y 5), entonces A es un anillo booleano.∎

Polinomios Booleanos: La definición de polinomio booleano es igual que la de polinomio ordinario, en el entendido de que las operaciones satisfacen la estructura booleana, y pueden ser una o varias variables.

Pongamos nuestra atención en el caso típico del polinomio polinomio f(p,q) en dos variables. El complemento de f(p,q) es por definición f'(p,q), el dual es f'(p',q') y el contradual, f(p',q').

Todo teorema de álgebra booleana se da en pares duales. Dualizar una expresión booleana consiste en intercambiar el 0 con el 1 y . con +.

Por ejemplo, si $f(x,y,z) = x+y+xy'+xyz$

su dual es $f'(x',y',z') = xy(x+y')(x+y+z)$.

$\rho(X)$ no es el único medio para construir un álgebra booleana en un conjunto no vacío X. Un camino más general es considerar una subclase arbitraria no vacía $A \subset \rho(X)$, tal que si $p,q \in A$, entonces $P \cap Q$, $P \cup Q$ y P' estén también en A.

A contiene al menos un elemento, de aquí que A contiene ϕ y X, por lo que A es un álgebra booleana. Toda álgebra booleana obtenida de esta forma es llamada **"CAMPO DE CONJUNTOS"**.

Ejemplos:

1) Un subconjunto P de X es cofinito (en X) si su complemento P′ es finito. La clase A de todos los subconjuntos P finitos o cofinitos de X es un campo de subconjuntos de X.

Observación:

Sea A= {subconjuntos finitos} ∪ {subconjuntos cofinitos}.

Si X es finito, entonces A= $\rho(x)$.

Si X es infinito, entonces los subconjuntos finitos no son cofinitos y los cofinitos no son finitos, por lo que tendríamos un nuevo ejemplo de álgebra booleana.

2) Sea X el conjunto de todos los números reales. Sea A un intervalo semicerrado.

La clase A de todas las uniones finitas de intervalos semicerrados es un campo de subconjuntos de X.

*Un ejemplo importante de álgebra booleana es la de los **"CONJUNTOS REGULARES ABIERTOS"**. En ella, los elementos del álgebra booleana son subconjuntos de un conjunto, pero las operaciones no son las usuales en la teoría de conjuntos.

Sea X un espacio topológico arbitrario (no vacío). Decimos que un conjunto abierto X se llama regular en caso de que coincida con el interior de su propia cerradura. Es decir, el conjunto P es regular si y sólo si $P= P^{-\prime-\prime}$ (P^- denota la cerradura de P) ya que $q^\circ = q'^{-\prime}$ (q°denota el interior de q). Es conveniente escribir $P^1=$

$P^{-\prime}$; en estos términos, se tiene que P es regular sí y solo si $P= P^{11}$.

Notamos que un conjunto P es abierto sí y sólo si éste tiene la forma Q^1para algún conjunto Q. En efecto, si $P =Q^1$, entonces p es el complemento de un conjunto cerrado Q^-y recíprocamente, si p es abierto, entonces $P= Q^1$ donde Q es el complemento de P.

TEOREMA I.2.3: La clase A de todos los conjuntos regulares abiertos de un espacio topológico X (no vacío) es un álgebra booleana con respecto a los elementos distinguidos y operaciones definidas por:

1) $0= \phi$
2) $1= X$
3) $P.Q= P\cap Q$
4) $P+Q= (P\cup Q)^{11}$
5) $P'= P^1$

Donde P^1, para todo conjunto P, es el complemento de la cerradura de P.

Demostración:

Lo primero que hay que probar es que el lado derecho del 1) al 5) son conjuntos regulares abiertos.

Para 1) y 2), ésto es obvio.

Lema **I.2.1:** Si $P\subset Q$, entonces $Q^1\subset P^1$.

Demostración:

$$P\subset Q \Rightarrow P^-\subset Q^-$$

$\Rightarrow Q^1 \subset P^1$ (por complementación).■

Lema I.2.2: Si P es abierto, entonces $P \subset P^{11}$.

Demostración:

$P \subset \bar{P}$

$P^1 \subset P'$ (por complementación)

$P^{1-} \subset P'$ (ya que P' es cerrado)

$P'' \subset P^{11}$

$P \subset P^{11}$.■

Lema I.2.3: Si P es abierto, entonces $P^1 = P^{111}$.

Demostración:

Hay que demostrar lo sig.:

i) $P^1 \subset P^{111}$.

ii) $P^{111} \subset P^1$.

La demostración de la parte i) es directa del lema I.2.2, tomando P^1 en lugar de P.

Para la parte ii): por el lema I.2.2, tenemos que $P \subset P^{11}$, y por el lema I.2.1, $(P^{11})^1 \subset P^1$ y esto es igual a tener P^{111}.

Por lo que concluímos que $P^1 = P^{111}$.■

Una consecuencia importante del lema anterior es que si P es abierto, entonces P^1 es regular. Esto prueba que el lado derecho de 5) corresponde a la clase A de conjuntos regulares abiertos. Como $(P \cup Q)^1$ es siempre abierto, se cumple la parte derecha de 4); para 3) necesitamos un argumento más:

Lema I.2.4: Si P y Q son abiertos, entonces $(P\cap Q)^{11} = P^{11}\cap Q^{11}$.

Demostración:

$\Rightarrow$) como $P\cap Q \subset P$ y $P\cap Q \subset Q$,

por el lema I.2.2, $P\cap Q \subset P^{11}$ y $P\cap Q \subset Q^{11}$, por lo que

$$(P\cap Q)^{11} \subset (P^{11})^{11} ;$$

pero $(P^{11})^{11} = (P^1)^{111} = (p')'$ por el lema I.2.3.

Entonces, como $(P^1)^1 = P^{11}$,

$$\therefore (P\cap Q)^{11} \subset P^{11}.$$

Igualmente $(P\cap Q)^{11} \subset Q^{11}$ y entonces $(P\cap Q)^{11} \subset P^{11}\cap Q^{11}$.

$\Leftarrow$) Como $P\cap Q^- \subset P^-\cap Q^- \subset (P\cap Q)^-$

$P\cap Q^- \subset (P\cap Q)^-$

$[(P\cap Q)^-]' \subset (P\cap Q^-)'$

$(P\cap Q)^1 \subset P'\cup Q^1$

$(P\cap Q)^{1-} \subset (P'\cup Q^1)^- \subset P^1\cup Q^{1-}$

$(P^1\cup Q^{1-})' \subset [(P\cap Q)^{1-}]'$

$P^{1\prime}\cap Q^{11} \subset (P\cap Q)^{11}$

$P\cap Q^{11} \subset P^-\cap Q^{11} \subset (P\cap Q)^{11}$

$P\cap Q^{11} \subset (P\cap Q)^{11}$ (a)

Una aplicación de (a) con P^{11} en lugar de P, seguida de aplicar (a) con los roles de P y Q intercambiados lleva al lema 1:

$$P^{11}\cap Q^{11} \subset (P^{11}\cap Q)^{11} \subset (P\cap Q)^{1111}$$

$$P^{11}\cap Q^{11} \subset (P\cap Q)^{11}.\blacksquare$$

Este lema implica inmediatamente que la intersección de dos conjuntos regulares abiertos es regular y de aquí que el lado

derecho de 3) pertenece a A.

Lema I.2.5: La frontera de un conjunto abierto es un conjunto cerrado denso en ninguna parte.

NOTA: La frontera de P es $P^{-} \cap P^{-}$ (y es equivalente a $\bar{p} \cap p'$ por ser p abierto).

Demostración: Si P es un conjunto abierto, y si la frontera de P incluye un conjunto no vacío abierto, entonces ese conjunto abierto tendría una intersección no vacía con P^{-} y al mismo tiempo debería ser ajeno a P, esto contradice la propiedad fundamental de cerradura.■

Este lema implica que si P es abierto, más aún, si es regular, entonces el complemento de la frontera de P, es decir $P \cup P^{1}$ es un conjunto abierto denso.

Se sigue que:

$(P \cup P^{1})^{1} = \phi$ y de aquí que $(P \cup P^{1})^{11} = X$

Por lo que $P \cup P^{1} = X$, $P \cap P^{1} = \phi$; es decir $p + p^{1} = 1$, $pp^{1} = 0$.

Ahora sí podemos verificar que la clase A de todos los conjuntos regulares abiertos de un espacio topológico X cumple con los axiomas de un álgebra booleana:

i) $P.1 = P$ $\quad$ $P+0 = P$, es decir:

$P \cap X = P$ $\quad$ $P \cup \phi = P$

Demostración:

P.D. $P \cap X = P$ $\qquad$ $P \cup \phi = P$

$P \cap X = P \cap (P \cup P^{1})^{11}$ $\qquad$ $P \cup \phi = P \cup (P \cap P^{1})$

$= P \cap (P^{11} \cup P^{111})$ $\qquad$ $= (P \cup P) \cap (P \cup P^{1})$

$= P \cap (P^{11} \cup P^{1})$ $\qquad$ $= P \cap [P - \{front.P\}]$

$= (P \cap P^{11}) \cup (P \cap P^{1})$ $\qquad$ $= P$

$= P \cup \phi$

$= P$ $\qquad$ $\therefore P \cup \phi = P$

$\therefore P \cap X = P$

ii) $P.P' = \phi$ $\qquad$ $P+P' = 1$, es decir:

$P \cap P^{1} = \phi$ $\qquad$ $P \cup P^{1} = X$

iii) $P.Q = Q.P.$

Puesto que $P^{11} \cap Q^{11} = Q^{11} \cap P^{11}$.

iv) Leyes distributivas

*) $[P \cup (Q \cap R)]^{11} = (P \cup Q)^{11} \cap (P \cup R)^{11}$

$[P \cup (Q \cap R)]^{11} = P \cup (Q \cap R)$

$= (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

$= (P \cup Q)^{11} \cap (P \cap R)^{11}$

**) $P \cap (Q \cup R)^{11} = [(P \cap Q) \cup (P \cap R)]^{11}$

$P \cap (Q \cup R)^{11} = P \cap (Q \cup R)$

$= (P \cap Q)^{11} \cup (P \cap R)^{11}$.■

Ejemplo de conjuntos regulares abiertos:

Sea (X, τ) un espacio topológico con $\tau = \rho(X)$.

ϕ y X son regulares abiertos. Tomando $A \subseteq X$ tal que $A \neq \phi$ nos hacemos la siguiente pregunta: A es un conjunto regular abierto?

Como $\overline{A} = A$ (porque A y A' son abiertos en X) entonces A es cerrado; y así el $int(\overline{A}) = int(A) = A$. Por lo tanto para toda $A \subseteq X$, A es regular abierto.

I.3 ORDEN

Continuamos trabajando con un álgebra booleana A.

Lema I.3.1: $p.q=p$ si y sólo si $p+q=q$.

Demostración: Usando las leyes de absorción;

$$\Rightarrow) \quad p.q=p \Rightarrow p+q=(p.q)+q$$
$$=q$$
$$\Leftarrow) \quad p+q=q \Rightarrow p.q=p.(p+q)$$
$$=p.\blacksquare$$

En Teoría de Conjuntos, las ecuaciones correspondientes $P \cap Q=P$ y $P \cup Q=Q$ equivalen a $P \subset Q$.
Esto motiva la introducción de una relación binaria en toda álgebra booleana, escribimos $p \leq q$ o $q \geq p$ en caso de que $p.q=q$ o, equivalentemente, $p+q=p$.

Lema I.3.2:

i) $0 \leq p$ y $p \leq 1$, $\forall p \in A$.

ii) Si $p \leq q$ y $r \leq s$, entonces $p.r \leq q.s$ y $p+r \leq q+s$

iii) Si $p \leq q$, entonces $q' \leq p'$

iv) $p \leq q$ si y sólo si $pq' = 0$

Demostración:

ii) Si $p \leq q$ y $r \leq s$, entonces $p.r \leq q.s$ y $p+r \leq q+s$.

$$pq'=0 \qquad rs'=0$$

$$pq'+rs'=0$$
$$rpq'+rrs'=0$$
$$prq'+rs'=0$$
$$pprq'+prs'=0$$
$$prq'+prs'=0$$
$$pr(q'+s')=0$$
$$pr(qs)'=0$$
$$pr \leq qs.$$

iii) Si $p \leq q$, entonces $q' \leq p'$.

$$p \leq q \Rightarrow pq'=0$$
$$\Rightarrow (p')'q'=0$$
$$\Rightarrow q'(p')'=0$$
$$q' \leq p'$$

iv) $p \leq q \Leftrightarrow pq'=0$.

Sabemos que si $p \leq q$, entonces $p.q=p$, $p+q=q$.

$\Rightarrow$) $p \leq q$
$p+q=q$
$p'q'=q'$
$q'=p'q'$

$\Leftarrow$) $pq'=0$
$pq'=pp'q'$
$q'=p'q'$
$(q')'=(p'q')'$

$pq'=p(p'q')$ $q=p+q$

$pq'=(pp')q'$ $q\leq p$ ■

$pq'=0q'$

$pq'=0$

Lema I.3.3: La relación $\leq$ es un orden parcial.

Es decir es reflexiva ($p\leq p$), antisimétrica (si $p\leq q$ y $q\leq p$, entonces $p=q$) y transitiva (si $p\leq q$ y $q\leq r$, entonces $p\leq r$).

Demostración:

Transitividad: si $P\leq q$ y $q\leq r$, entonces $p\leq r$.

$p\leq q \Leftrightarrow pq'=0$

$q\leq r \Leftrightarrow qr'=0$

Por lo que : $pr'= pr'(q+q')$

$= pr'q+pr'q'$

$= p(0)+r'(0)$

$= 0+0$

$= 0$

$pr'= 0 \therefore p\leq r$

Antisimetría: si $p\leq q$ y $q\leq p$, entonces $q=p$.

$p\leq q \Leftrightarrow pq'=0$

$q\leq p \Leftrightarrow qp'=0$

Por lo que:

$pq'=qp'$ $pq'=qp'$

$p'+q=q'+p$

$pp'+pq=pq'+pp$

$0+pq=0+p$

$pq=p$

$qp=p$

$p'+q=q'+p$

$qp'+qq=qq'+qp$

$0+q=0+qp$

$q=qp$

$\therefore q=p$

Reflexividad :$p \leq p$.

Como $pp'=0$, $p \leq p$. ■

Si E es cualquier subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado tal como nuestra álgebra booleana A, podemos considerar el conjunto F de todas las cotas superiores de E y preguntar si F tiene o no un elemento más pequeño. Un elemento q pertenece a F en caso de que $p \leq q$ para todo p en E; decir que F tiene un elemento que es el más pequeño, significa que existe un (obviamente único) q en F tal que $q_o \leq q$ para todo q_o en F.

La máxima cota inferior de E es llamada el ínfimo de E. A la mínima cota superior del conjunto E, la llamaremos supremo de E. Todas estas consideraciones tienen sus duales obvios.

Si el conjunto E es vacío, entonces todo elemento de A es una cota superior de E (p en E implica $p \leq q$ para cada q) y, consecuentemente, E tiene un supremo llamado 1.

Similarmente (dualmente) si E es vacío, entonces E tiene un ínfimo, llamado 0.

Consideramos el caso de un conjunto con un solo elemento, sea {p}, su supremo es p y similarmente tiene un ínfimo que es p.

La situación es menos trivial cuando tenemos un conjunto con dos elementos.

Lema I.3.4: Para cada p y q, el conjunto {p,q} tiene el supremo p+q y el infimo p.q.

Demostración:

$$p \leq p+q \qquad y \qquad p.q \leq p$$

$$q \leq p+q \qquad\qquad p.q \leq p$$

$$p.q \leq (p+q).(p+q)$$

$$p.q \leq p+q$$

$$pq \leq p+q$$

$$\therefore pq \leq p \leq p+q$$

$$y\ pq \leq q \leq p+q.$$

Hay que probar que p+q es la mínima cota superior, o en otras palabras que si p y q son dominados por algún elemento r, entonces p+q ≤ r lo cual es fácil de ver por la parte ii) del lema I.3.2:

Si p≤r y q≤r, entonces p+q≤r+r por lo tanto p+q≤r.

Que p.q es la máxima cota inferior, se sigue por dualidad.■

El lema 1.3.4 se generaliza inmediatamente a conjuntos no vacíos arbitrarios (en lugar de conjuntos con solo dos elementos). Podemos concluir que si E es subconjunto finito no vacío de A, entonces E tiene un supremo y un ínfimo denotados por VE y ^E,

respectivamente. Motivado por esto, extendemos la interpretación de los símbolos usados para disyunción y conjunción a conjuntos que son vacíos o infinitos. Si un subconjunto E de A tiene un supremo, lo denotaremos por VE independientemente de su cardinalidad y similarmente usaremos $\wedge E$ para todo ínfimo. En esta notación todo conjunto pequeño (es decir que tiene a lo más un elemento) puede ser expresado como sigue:

$$V\phi=0,\ \wedge\phi=1 \text{ y } V\{P\}=\wedge\{P\}=p.$$

La notación usada anteriormente para la unión o intersección de una sucesión finita de elementos es también extendible para el caso infinito.

Si $\{P_i\}$ es una sucesión infinita con un supremo (propiamente, si el rango de una sucesión tiene un supremo) entonces el supremo es denotado por $V_{i=1}^{\infty}P_i$. Si, más generalmente, $\{P_i\}$ es una familia arbitraria con un supremo, con índices i de un conjunto I, el supremo es denotado por $V_{i\in I}P_i$, o simplemente por V_iP_i.

II.- FILTROS Y ULTRAFILTROS COMO DUALES DE IDEALES BOOLEANOS

En este capítulo se definen un homomorfismo e ideal booleano para así dar una definición de filtros y ultrafiltros como duales de ideales booleanos e ideales maximales booleanos, respectivamente; además se dan a conocer otras definiciones de filtros y ultrafiltros para compararlas y demostrar su equivalencia.

II.1 HOMOMORFISMOS E IDEALES BOOLEANOS

Haremos un breve recordatorio de homomorfismos e ideales en el álgebra ordinaria.

Definición: Se dice que una aplicación ϕ del anillo R en el anillo R' es un **homomorfismo** si:

1) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$,

2) $\phi(ab) = \phi(a)\ \phi(b)$, para cualesquiera elementos $a,b \in R$.

Definición: Se dice que un subconjunto no vacío U de R es un ideal de R si:

1) U es un subgrupo de R bajo la adición.

2) Para todo $u \in U$ y para todo $r \in R$, tanto ur como ru están en U.

Un **homomorfismo booleano** es un mapeo f de un álgebra booleana B, en un álgebra booleana A tal que:

1) $f(p.q) = f(p) \cdot f(q)$

2) $f(p+q) = f(p) + f(q)$

3) $f(p') = (f(p))'$

siempre que p y q están en B.

Así, un homomorfismo booleano es un mapeo que preserva estructuras entre álgebras booleanas. Un sinónimo conveniente para "homomorfismo de B en A", es "homomorfismo A-valuado sobre B".

Un homomorfismo booleano puede describirse con los mismos términos del álgebra ordinaria:

Un homomorfismo puede ser uno-a-uno (monomorfismo, si $f(p)=f(q)$, entonces $p=q$); puede ser sobre (epimorfismo, todo elemento de A es igual a $f(p)$ para algún $p \in B$); puede ser uno-a-uno y sobre (isomorfismo); el rango puede estar incluido en este dominio (endomorfismo, $A \subset B$) y puede ser un mapeo uno-a-uno de este dominio sobre sí mismo (automorfismo). Si existe un isomorfismo de B sobre A, entonces A, B son llamados isomorfos.

Los elementos distinguidos 0 y 1, juegan un papel especial para los homomorfismos. Si f es un homomorfismo booleano y p es un elemento en su dominio, entonces $f(p.p')=f(p).(f(p))' = 0$ y tomando $p=0$, se tiene $f(0)=0$ y por 3), $f(1)=1$; así,

4) $f(0) = 0$

5) $f(1) = 1$

Una observación general acerca de homomorfismos y su kernel:

Una condicion suficiente y necesaria que un homomorfismo

sea monomorfismo (uno-a-uno) es que su kernel sea {0}.

Demostración:

(Necesidad)

Sea f un homomorfismo. Si f es uno a uno y f(a)=0, entonces f(a) = f(0), y por consiguiente a = 0.

(Suficiencia)

Si el kernel de f es {0} y si f(a) = f(b) entonces f(a-b)= =f(a)-f(b)=0, así a-b=0, y esto hace que a=b.■

Un mapeo que envíe todo elemento de un álgebra booleana al elemento cero de otra no es un homomorfismo (falla la 3ra. condición).

El rango de un homomorfismo con dominio B es llamado imagen homomórfica de B.

Puesto que toda operación booleana puede definirse en términos de (+,.,'), se sigue que un homomorfismo booleano preserva tales operaciones. Así, si f es un homomorfismo booleano y a y b son elementos de su dominio, entonces f(a'+ b) = f(a') + f(b) (esto último, en lógica, equivale a la preservación de la condicional bajo homomorfismo). Se sigue, en partícular, que todo homomorfismo booleano es un homomorfismo de anillo, y también que todo homomorfismo booleano preserva el orden, es decir, si $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$.

Procederemos a considerar algunos ejemplos de homomorfismos booleanos:

Ejemplo 1: Sea B un álgebra booleana arbitraria y sea $a_o \neq 0$ un elemento arbitrario de B. Sobre el conjunto A de todos subelementos de a_o ($a \leq a_o$) puede construirse un álgebra booleana como sigue: el 0, la suma y producto en A son los mismos de B, pero el 1 y a′ en A se definen como los elementos a_o y $a_o - a = a_o . a'$ de B. El mapeo $a \to a . a_o$ es un homomorfismo A-valuado sobre B.

Demostración:

i) $f(x . y) = (x . y) . a_o$

$f(x) . f(y) = (x . a_o) . (y . a_o)$

$= (x . y) . (a_o . a_o)$

$= (x . y) . a_o$

$\therefore f(x.y) = f(x) . f(y).$

ii) $f(x + y) = (x . y) + a_o.$

$= (x . a_o) + (y . a_o)$

$= f(x) + f(y)$

iv) $f(x') = (f(x))'$

$f(x') = x' . a_o$

$(f(x))' = (x . a_o)' = a_o - x.a_o = a_o - x = x' = x'.a_o.$ ■

Considere en seguida un campo B de subconjuntos de un conjunto X, y sea x_o un punto arbitrario de X. Para cada conjunto a en B, sea f(a) 1 o 0 según si $x_o \in a$ o $x_o \in a'$. El mapeo f es un homomorfismo 2-valuado sobre B. Observe que f(a) es igual al valor de la función característica de a en x_o.

Ejemplo 2: Sea Φ un mapeo arbitrario de un conjunto no vacío X en un conjunto Y, y sea A y B campos de subconjuntos de X y Y, respectivamente. Sea $f= \phi^{-1}$, es decir, para cada a en B, sea f(a) la imagen inversa de a.

En general el conjunto f(a) no pertenecerá al campo A. Si $f(a) \in A$ siempre que $a \in B$, entonces f es un homomorfismo A-valuado sobre B.

Demostración:

i) $f(P \cup Q) = f(P) \cup f(Q)$

$f(P \cup Q) = \phi^{-1}(P \cup Q) = \phi^{-1}(P) \cup \phi^{-1}(Q)$.

$$x \in \phi^{-1}(P \cup Q) \Leftrightarrow \phi(x) \in PUQ \Leftrightarrow \phi(x) \in P \vee \phi(x) \in Q$$
$$\Leftrightarrow x \in \phi^{-1}(P) \vee x \in \phi^{-1}(Q)$$
$$\Leftrightarrow x \in \phi^{-1}(P) \vee \phi^{-1}(Q)$$

ii) $f(P') = [f(p)]'$

$\phi^{-1}(P') = [\phi^{-1}(P)]'$

$$x \in \phi^{-1}(P') \equiv \phi(x) \in p'$$
$$\equiv \sim[\phi(x) \in P]$$
$$\equiv \sim[x \in \phi^{-1}(P)]$$
$$\equiv x \in [\phi^{-1}(P)]'$$

■

Llamaremos al homomorfismo descrito en estos ejemplos, homomorfismo inducido por a_o, x_o y ϕ, respectivamente.

Si B es una subálgebra de una álgebra A, entonces el mapeo identidad (esto es, el mapeo f definido para toda a en B por f(a)= a) es un homomorfismo de B en A, y , en partícular, el mapeo identidad sobre A es un automorfismo de A.

Hay una manera natural de definir el producto de (algunos) pares de homomorfismos, y se obtiene que el mapeo identidad mencionado actúa como una identidad multiplicativa.

Definición: El producto o (composición) $f \circ g$ de dos homomorfismos f y g se define en caso de que A,B y C son álgebras booleanas, f mapea B en A, y g mapea C en B; el valor de $f \circ g$ en cada elemento a de C es dado por: $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Si, además, h es un homomorfismo de D, digamos, a C, entonces:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Esto es, la operación composición es asociativa.

Un isomorfismo entre álgebras booleanas preserva todo supremo e ínfimo, pero en general, un mero homomorfismo no hará eso. Un homomorfismo f es llamado completo en caso de que preserve todo supremo (y consecuentemente todo infimo). Esto significa que si $\{a_i\}$ es una familia de elementos en el dominio de f con supremo a, la familia $\{f(a_i)\}$ tiene un supremo y este supremo es igual a f(a).

Si f es un homomorfismo booleano, digamos de B en A, el kernel de f es el conjunto de los elementos en B, cuya imagen bajo f es 0 en A.

En símbolos, el kernel N es definido por $N= f^{-1}(0)$ o lo que es equivalente $N = \{a \in B/\ f(a) = 0 \in A\}$.

Motivados por las propiedades obvias de kernel hacemos la siguiente definición:

Definición: Un ideal booleano en un álgebra booleana B es un conjunto M de B tal que:

1) $0 \in M$

2) $\forall\ a,b \in M$, entonces $a+b \in M$

3) $\forall\ a \in M$ y $b \in B$, $a.b \in M$

Claramente el kernel de todo homomorfismo booleano es un ideal booleano. La condición 1) en la definición puede ser reemplazada por la condición de que M es no vacío, sin cambiar el concepto de ideal, pues si M es no vacío y $p \in M$, por 3) se tiene que $a.0 \in M$.

"Un subconjunto M de una álgebra booleana B es un ideal booleano si y sólo si es un ideal en el anillo booleano".

$\Rightarrow$) Supongamos que M es un ideal booleano; probaremos que si a y b están en M, entonces a+b están en M.

$\Rightarrow$) $a.b' \in M$ por 3), $a'.b \in M$ por la misma razón y consecuentemente $(a.b')+(a'.b) \in M$ por 2).

$\Leftarrow$) Ahora suponga que M es un ideal en el sentido de la teoría de anillos; si a y b están en M, entonces $a+b \in M$, porque un ideal en un anillo siempre contiene a a+b+ab cuando contiene a y b.

El lenguaje de orden no tiene mucha contribución para teoría de ideales. Puede decirse que la condición (3) puede ser reemplazada por:

Si $a \in M$ y $b \leq a$, entonces $b \in M$; $b \leq a \Rightarrow a.b = b \in M$. Al no cambiar el concepto de ideal, la prueba es elemental.

Si $f(a) = a.a_0$ para cada a, entonces el ideal correspondiente

consiste de todos esos elementos a para los cuales $a.a_o = 0$, o equivalentemente $a \leq a_o'$. Si f está definido sobre un campo de subconjuntos de X también f(a) es el valor de la función característica de a; como algún punto particular $x_o \in X$, entonces el ideal correspondiente consiste de todos esos conjuntos P en el campo que no contienen a x_o. Si, finalmente, el homomorfismo f es inducido por un mapeo ϕ de un conjunto X en un conjunto Y, entonces el ideal correspondiente consiste de todos esos conjuntos P en el dominio de f y son ajenos al rango de ϕ. Hay ejemplos de ideales para los cuales no es obvio que estén asociados con algún homomorfismo. Uno de tales ejemplos es la clase de todos los conjuntos finitos en el campo de todos los subconjuntos de un conjunto. Más generalmente, la clase de todos estos conjuntos finitos que pertenecen a algún campo particular, es un ideal en ese campo; Se dispone de una generalización para cada uno de los siguientes tres ejemplos siguientes. La clase de todo conjunto contable es un ideal en el campo de dos todos los subconjuntos de un conjunto arbitrario; la clase de todos los conjuntos de medida cero es un ideal en el campo de todos los subconjuntos medibles de un espacio de medida; y la clase de todos los subconjuntos totalmente densos es un ideal en el campo de todos los subconjuntos de un espacio topológico.

Toda álgebra booleana B tiene un ideal trivial, el conjunto {0}. Toda álgebra booleana B tiene un ideal impropio, B (él mismo); otro ideal será llamado propio. Observe que un ideal es propio si y sólo si no contiene al 1 (si lo contuviese sería el propio B).

La intersección de toda colección de ideales en un álgebra booleana B es de nuevo un ideal de B. De esto sigue que si E es un conjunto arbitrario de B, entonces la intersección de todos estos ideales que incluyen a E es un ideal (Existe siempre al menos un ideal que incluye a E, llamado ideal impropio de B). La intersección, decimos M, es el ideal más pequeño en B que incluye E. El ideal M es llamado el ideal generado por E. Por ejemplo, si E es no vacío, entonces el ideal generado por E es el ideal más pequeño posible de B, llamado el ideal trivial {0}. Un ideal generado por un único elemento {p} es llamado un ideal principal; éste consiste de todos los subelementos de P.

II.2 EL TEOREMA DE HOMOMORFISMO

Un ideal es maximal si es un ideal propio que no está propiamente contenido en cualquier otro ideal propio. Equivalentemente, decir que M es un ideal maximal en B, significa que M es diferente de B y, más aún, si N es un ideal tal que $M \subset N$, entonces $N=M$ o $N=B$.

Los ideales maximales se caracterizan por una propiedad algebraíca curiosa:

LEMA II.2.1: Un ideal M en un álgebra booleana B es maximal si y sólo si $p \in M$ o $p' \in M$, pero no ambos, para cada $p \in B$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que, para algún $p_o \in B$, se tiene $p_o \notin M$ y $p_o' \notin M$; probaremos que M no es maximal. Sea N el conjunto de todos los elementos de la forma $p+q$, donde $p \leq p_o$ y $q \in M$. La verificación

directa prueba que N es un ideal que incluye a M y contiene a p_o; entonces, N es el ideal generado por $M \cup \{p_o\}$, y se sigue que $M \subset N$, $M \neq N$. Solo falta probar que $N \neq B$; demostraremos que p_o' no pertenece a N. En efecto, si $p_o' \in N$, $p_o' = p+q$, con $p \leq p_o$ y $q \in M$, entonces

$$p_o' = q+q$$

$$p_o'p' = pp'+qp'$$

$$p_o' = 0+qp' \in M$$

por lo que $p_o'=q$, contradiciendo que p_o' no pertenece a M.

$\Leftarrow$ Suponemos que $p \in M$ o $p' \in M$, y que N es un ideal que incluye propiamente a M; probaremos entonces que N=B.
Como $N \neq M$, $\exists$ $q \in N$ que no pertenece a M. Esto implica $q' \in M$, y por lo tanto $q' \in N$; y como N es un ideal, se sigue que $p+p' = 1 \in N$ y N=B.■

La definición de ideal se formula también para garantizar que el kernel de todo homomorfismo sea un ideal; de aquí que un homomorfismo nunca mapea 1 en 0; más aún el kernel de todo homomorfimo es siempre un ideal propio. Esto es importante para plantear la pregunta: ¿Es todo ideal propio el kernel de algún homomorfismo? Para ideales maximales la respuesta es sí.
Supongamos que M es un ideal maximal en B, y escribamos f(p)=0 o 1 según el elemento p de B pertenezca a M o no. En el Lema 1, la definición de f puede formularse de esta manera: f(p)=0 o 1 según se tenga $p \in M$ o $p' \in M$. Una verificación directa basada en el Lema 1, prueba que si f es un homomorfismo de B para el anillo de los enteros módulo 2, el kernel de f es obviamente M.
Lo que hemos probado en esta forma es un caso muy especial del resultado siguiente , conocido como **EL TEOREMA DE HOMOMORFISMO.**

TEOREMA II.2.2: (DE HOMOMORFISMO)

Todo ideal propio es el kernel de algún epimorfismo.

Demostración: La manera simple de aclarar el asunto es referirse a la teoría de anillos.

Si B es un anillo booleano y M es un ideal propio en B, entonces el cociente B/M es un anillo. La idempotencia de los elementos de B implica lo mismo para B/M.

El epimorfismo es también llamado natural o mapeo canónico, o proyección, de B sobre B/M; este asocia a cada elemento de B la clase de equivalencia de ese elemento módulo M.

Asociado con el teorema de homomorfismo existe una colección de resultados de la clase algebraíca universal, algunos de los cuales procedemos a establecer.

Supongamos que M es un ideal propio en un álgebra booleana B, escribimos A= B/M, y sea f la proyección de B para A. El mapeo que asocia con todo ideal N en A el conjunto $f^{-1}(N)$ en B es una correspondencia uno a uno entre todos los ideales en A y todos los ideales que incluye M en B. La imagen del ideal trivial y de A bajo esta correspondencia son M y B, respectivamente. Si $N_1 \subset N_2$, entonces $f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2)$.

Si f_o es un homomorfismo de B en un álgebra booleana A_o, decimos, y si el kernel M_o de f_o incluye M, entonces existe un único homomorfismo g en A para A_o tal que $f_o = g_o f$.

La prueba de todas estas afirmaciones son las mismas para álgebras booleanas que para otras estructuras algebraícas (tales

como grupos, anillos); las palabras cambian pero la idea es la misma.

No vale la pena recordar la prueba.

Un álgebra booleana se llama simple si no tiene ideales propios no triviales. Simplemente es un concepto algebraíco universal, pero, como en el contexto de álgebras booleanas esto no es fructífero. La razón es que existe exactamente un álgebra simple. Si B es simple, y si p es elemento de B diferente de 0, entonces el ideal principal generado por p debe ser impropio, lo cual puede suceder solamente si p=1. En otras palabras, B es tal que si un elemento de B no es 0, entonces este es 1; esto, porque B es el anillo de los enteros módulo dos.

La correspondencia entre los ideales de un álgebra cociente y el ideal de estos "numeradores" prueba que el álgebra cociente es simple si y solo sí este "denominador" (el ideal) es maximal.

Por el algebra ordinaria, sabemos que un álgebra cociente es igual a un álgebra simple si y sólo si este denominador es maximal. Esto es una observación, no tan profunda como el teorema general de homomorfismo.

II.3 CONCEPTO BOOLEANO DE FILTRO

Dualizando las propiedades de ideales booleanos:
En lugar del ideal M tenemos al conjunto $\mathcal{F}$ que será llamado **Filtro**, y las propiedades duales respectivas serán:

1) $1 \in \mathcal{F}$.

2) Si $p \in \mathcal{F}$ y $q \in \mathcal{F}$, entonces $p.q \in \mathcal{F}$.

3) Si $p \in \mathcal{F}$ y $q \in B$, entonces $p + q \in \mathcal{F}$.

Esta idea general la llevamos a un caso particular de álgebra booleana.

Sea X un conjunto arbitrario; consideremos el álgebra booleana generada por $\rho(X)$, donde la suma es unión, el producto es intersección y $'$ es complemento.

Un ideal en $\rho(X)$ sería un conjunto $M \subset \rho(X)$ tal que:

1) $\phi \in M$

2) $\forall\ A,B \in M,\ A \cup B \in M$

3) $\forall\ A \in M$ y $\forall\ B \in \rho(X),\ A \cap B \in M$.

Dualizando, tenemos las propiedades de Filtro:

Sea $\mathcal{F} \subset \rho(X)$ tal que:

1) $X \in \mathcal{F}$.

2) $\forall\ A,B \in \mathcal{F},\ A \cap B \in \mathcal{F}$.

3) $\forall\ A \in \mathcal{F}$ y $\forall\ B \in \rho(X),\ A \cup B \in \mathcal{F}$.

Algunos libros y artículos presentan la definición de filtro de la siguiente manera:

Si X es un conjunto no vacío, un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es una subcolección no vacía de subconjuntos de X tales que:

1) $\phi \notin \mathcal{F}$

2) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones finitas.

3) $(\forall P)\ (\forall Q)\ (\ P \in \mathcal{F} \wedge Q \in \rho(X) \wedge P \subseteq Q),\ Q \in \mathcal{F}$.

En partícular, $\mathcal{F} \neq \phi \Rightarrow X \in \mathcal{F}$.

Probaremos que la definición anterior y la definición de filtro como dual de un ideal booleano son equivalentes:

Demostración:

Llamaremos D1 a la definición anterior y D2 a la definición de filtro como dual de un ideal.

Primero veremos la equivalencia de la propiedad 1) :

Un ideal propio (no trivial) no debe contener a X (X es neutro multiplicativo), porque si lo contiene, el ideal M contendría a $\rho(X)$.

$$\therefore X \notin M$$

y por dualidad, $\phi \notin \mathcal{F}$.

Recíprocamente, 3 de D1 implica $X \in \mathcal{F}$ en D1.

La equivalencia de la propiedad 3)

D2 $\nRightarrow$ D1

Si $P \subseteq Q$, entonces $P \cup Q = Q$, y como $P \cup Q \in \mathcal{F}$ (por hip.) entonces $Q \in \mathcal{F}$.

D1 $\Rightarrow$ D2) $\forall P \in \mathcal{F}$ y $\forall Q \in \rho(X)$, $P \cup Q \in \mathcal{F}$

$P \subset P \cup Q$

$P \in \mathcal{F} \therefore P \cup Q \in \mathcal{F}$. ■

Un filtro $\mathcal{F}_1$ se llama **más fino** que un filtro $\mathcal{F}_2$ ($\mathcal{F}_2 \leq \mathcal{F}_1$) si siempre que $F \in \mathcal{F}_2$, implica que $F \in \mathcal{F}_1$.

Def.: Un filtro se llama un **ultrafiltro** siempre que no está propiamente contenido en cualquier otro filtro, es decirlos ultrafiltros son elementos máximales del conjunto parcialmente ordenado de filtros.

En relación a ultrafiltros tenemos la siguiente caracterización:

C_1: Un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si para todo $F \subset X$, $F \in \mathcal{F}$ ó $X-F \in \mathcal{F}$.

C_2: Un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si:

Si $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$ ($F_i \subset X$, $i = 1,2,3,\ldots,n$), entonces $F_i \in \mathcal{F}$ para al menos un i, y así , es en sí misma una caracterización del concepto de ultrafiltro.

Proposición: La definición y las caracterizaciones son equivalentes.

Demostración:

1) $C_1 \Rightarrow C_2$

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{U}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c \notin \mathcal{U}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c \notin \mathcal{U}$$

$F_i^c \notin \mathcal{U}$ para al menos un $i = 1,2,\ldots$

$\therefore F_i \in \mathcal{U}$

2) $C_2 \Rightarrow C_1$

$\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in U \Rightarrow F_i \in U$ para al menos $i= 1,2,\ldots$

Sea $F \subset X$ y

$F_1 = F$

$F_2 = X-F$

$F_1 \cup F_2 = F \cup (X-F)$

$= X \in U$

$F_i \in U$ para al menos i= 1,2

$\therefore F \in U$ ó $X-F \in U$.

3) Def.$\Rightarrow C_1$.

Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X y $F \subset X$, entonces $X \in \mathcal{F}$ ó $X-F \in \mathcal{F}$.

Supongamos que $F \notin \mathcal{F}$ y $X-F \notin \mathcal{F}$.

Sea $G = \{B \subset X / F \cup B \in \mathcal{F}\}$

Por demostrar que G es un filtro, $\mathcal{F} \subseteq G$, y por tanto obtendremos una contradicción.

Para ver que $\mathcal{F} \subseteq G$, sea $C \in \mathcal{F}$, ya que $C \subset F \cup C \in \mathcal{F}$, por lo tanto $C \in \mathcal{F}$ (por definición de G).

i) Sean $C_1, C_2 \in G$ y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $F \cup C_1 \subseteq F \cup C_2$.

Ya que $F \cup C_1 \in \mathcal{F}$ (por def. de G), entonces $F \cup C_2 \in \mathcal{F}$ (por contención).

$\therefore C_2 \in G$ (porque también $F \cup C_2 \in \mathcal{F}$).

ii) Sean C_1, $C_2 \in G$ entonces $F \cup C_1$ y $F \cup C_2 \in \mathcal{F}$ (por def. de G) y como $\mathcal{F}$ es filtro:

$(F \cup C_1) \cap (F \cup C_2) \in \mathcal{F}$ (por def. de filtro)

pero por distributividad (en el álgebra booleana):

$F \cup (C_1 \cap C_2) \in \mathcal{F}$

$\therefore C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$ (por def. de G).

iii) P.D. $\phi \notin G$

Si $\phi \in G$ entonces $F \cup \phi = F \in \mathcal{F}$, pero habíamos supuesto que $F \notin \mathcal{F}$, por lo tanto $\phi \notin G$. $\therefore$ G es un filtro y $\mathcal{F} \subseteq G$.

4) $C_1 \Rightarrow$Def.

Supongamos que existe $\mathcal{F}_1$ filtro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$.

Sea $F \in \mathcal{F}_1$ tal que $F \notin \mathcal{F}$.

Entonces $F \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}$, y por C_1, $F \in \mathcal{F}$ ó $X-F \in \mathcal{F}$ pero como $F \notin \mathcal{F}$, $X-F \in \mathcal{F}$, y además $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ entonces $X-F \in \mathcal{F}_1$, por condición de filtro $X \cap (X-F)$ debe estar en $\mathcal{F}_1$, pero $F \cap (X-F) = \phi \in \mathcal{F}_1$ por lo que $\mathcal{F}_1$ no es ultrafiltro.■

. Una interesante manera de demostrar la misma equivalencia anterior (Def. $\Leftrightarrow C_1$) es mediante el uso sistemático del recurso que dió origen a nuestra manera de presentar los conceptos de filtros y ultrafiltros, a saber, el concepto de dualidad y el principio de dualidad; tal demostración consiste en probar la correspondiente equivalencia de los respectivos conceptos duales (Ideal booleano maximal y su respectiva caracterización) tal como se presenta en el lema II.2.1.

Según el principio de dualidad, el hecho de que este lema esté demostrado, implica automáticamente que 3) y 4) de la proposición relativa a caracterización de ultrafiltros, ya está demostrada, ya que es exactamente el teorema dual del lema II.2.1 que ya fué demostrado en el contexto propio de la teoría de ultrafiltros.

Definición: $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro δ-incompleto, si existe una sucesión de $\{F_i\}$; $i= 1,2,3,\ldots$ $F_i \in \mathcal{F}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \notin \mathcal{U}$.

En relación a ultrafiltros δ-incompletos tenemos la siguiente

caracterización:

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es δ-incompleto si y sólo si existe una partición contable $\{X_n/n=1,2,...\}$ de X tal que $X_n \notin \mathcal{U}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Nota: La definición y la caracterización son equivalentes.

Demostración:

C ⇒ Def.

$X_1, X_2, ..., X_n, ... \subset X$

$X_n \notin \mathcal{U}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ (por hip.)

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)^c = X^c$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^c = \phi \notin \mathcal{U}$$

$\therefore X_n^c \in \mathcal{U}$.

Def.⇒ C

Si $\{F_i\}$ es la sucesión de elementos de $\mathcal{U}$ a la que se refiere la definición, W. A. J. Luxemburg en la página 12 de [2] propone como elementos de la partición mencionada la siguiente:

$\{X_n/\ X_n = F_n \cap (X - \bigcap F_n);\ n = 1,2,...\}$.

Se sugiere al lector analizar la Validez de esta construcción.

Un ultrafiltro se llama **LIBRE** siempre que $\bigcap(F:F \in \mathcal{F}) = \phi$. No se conoce la existencia de ultrafiltros δ-incompletos libres.

Este problema se conoce como el problema de la medida de Ulam.

III.- CONSTRUCCION DE UN MODELO DE ANALISIS NO ESTANDAR

En este capítulo presentamos una superestructura $^*\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ que serva en cierto sentido, las mismas propiedades de campo tado completo que posee $\mathbb{R}$, mediante la cual se justifica el se infinitésimos e infinitamente grandes; esta presentación face dentro del contexto de la teoría axiomática de conjuntos, e se combina el lenguaje lógico tanto del primer orden como rden superior.

La construcción formal y fundamentada se ha presentado ya en s trabajos; aquí sólo presentamos, sistemáticamente los cipales teoremas de este modelo, demostrando solamente llos en los que se utilice directamente la teoría de afiltros; ilustrando así la importancia que dicha teoría tiene stos modelos.

Denotemos por $\mathbb{R}$, al conjunto de los números reales; definimos ctivamente los conjuntos:

$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_{n+1} = P(\bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{R}_k)$; con $n=0,1,2,\ldots$ donde $P(x)$ = conjunto encia de x; y

$\hat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{R}_n$

Los elementos de $\hat{\mathbb{R}}$ se llaman entidades de la superestructura Los elementos de $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$ se mencionan algunas veces como los ividuales (o individuos) de $\hat{\mathbb{R}}$.

Supondremos que un par ordenado (a,b) se define en el sentido Kuratowski por $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ y las eneadas $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ definen inductivamente por $(a) = (a,(a_1,a_2,\ldots,a_n)) =$

$((a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n)$.

Se sigue inmediatamente que las eneadas y conjuntos de eneadas son entidades de $\hat{\mathbb{R}}$.

Las operaciones algebraícas de $\mathbb{R}$ pueden definirse en términos de relaciones definidas por ternas ordenadas como sigue:

$ab = c$ si y sólo si $(a,b,c) \in P \in \hat{\mathbb{R}}$ y

$a + b = c$ si y sólo si $(a,b,c) \in S \in \hat{\mathbb{R}}$, donde P y S son fijos; por otra parte, la relación de orden es una relación binaria. De esto se sigue que los axiomas y propiedades de $\mathbb{R}$ pueden expresarse en términos de ciertas entidades de $\hat{\mathbb{R}}$.

Las entidades de $\mathbb{R}_n-\mathbb{R}_{n-1}(n\geq 1)$ se llaman entidades de rango n en $\hat{\mathbb{R}}$. A los individuales se les asigna el rango 0; y por tanto, al conjunto vacío le asignamos rango 1, ya que $\phi \notin \mathbb{R}_0$ y como $\phi \subset \mathbb{R}_0$, $\phi \in \mathbb{R}_1$, y por tanto $\phi \in \mathbb{R}_1-\mathbb{R}_0$.

Si $\phi \neq a \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces el rango de a es el número natural más pequeño n tal que $a \in \mathbb{R}_n$. Se puede demostrar que si $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \hat{\mathbb{R}}$, el rango de $(a_1,\ldots,a_n)$ = max(rango de a_1, rango de $a_2,\ldots,$rango de a_n) + 2(n-1).

Algunas propiedades conjuntistas de $\hat{\mathbb{R}}$ se resumen, para referencias posteriores, en el siguiente lema:

Lema III.1:

i) $\mathbb{R}_p \subset \mathbb{R}_n \ \forall n \geq p \geq 1$.

ii) $\bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$ para todo $n\geq 1$.

iii) $\mathbb{R}_k \in \mathbb{R}_{n+1} \ \forall \ 0\leq k \leq n$ y $\forall \ n\geq 0$

iv) Si $X \in Y \in \mathbb{R}_n$ $(n\geq 1)$, entonces $X \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{n-1}$

v) Si $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in Y \in \mathbb{R}_p$ $(P\geq 1)$, entonces $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_{p-1}$.

En partícular, si una entidad $\psi \in \hat{\mathbb{R}}$ es una relación binaria, entonces su dominio es $dom\psi = \{x/\ (\exists y)\ (x,y) \in \psi\} \in \hat{\mathbb{R}}$, y su rango, $ran\psi = \{y/\ (\exists x)\ (x,y) \in \psi\} \in \hat{\mathbb{R}}$.

En nuestro desarrollo haremos uso frecuente del lenguaje lógico (L). Esto es un conjunto de constantes, variables y de relaciones (conectivos, por ejemplo) que se ponen en correspondencia con las entidades de la estructura considerada (en el sentido del apéndice I de [4]).

Una vez considerado $\hat{\mathbb{R}}$ como modelo de lenguaje L, nos referiremos a él como una L-estructura.

Cuando tenemos dos proposiciones lógicas las cuales podemos enlazar mediante el uso de conectivos y cuantificadores, nos queda una formula lógica, pero al hacer un uso adecuado de los símbolos de agrupación, ésta fórmula lógica queda libre de cualquier ambigüedad y la llamamos **fórmula bien formada** (fbf). Además, agregaremos a la terminología que en las fbf [$(\forall x)$ V] y [$(\exists x)$ V], V se llama campo del cuantificador. Una variable x en V se llama **libre** si x no está en $(\exists x)$ ó $(\forall x)$ o en el campo de un cuantificador (en otras palabras, las variables libres son las variables que no están ligadas con cuantificadores). Una fbf se llama **sentencia** si toda variable en ella está en el campo de un cuantificador, en caso contrario, se llama **predicado.**

Para nuestro propósito, sólo consideraremos las fórmulas bien formadas (fbf) de L que tienen la propiedad que todos los cuantificadores son de la forma "$(\forall x)$ [[$x \in A$]$\Rightarrow$ ...]" y "$(\exists x)$ [[$x \in A$] $\wedge$ ...]" donde A es una entidad de $\hat{\mathbb{R}}$ y las llamaremos fbf **admisibles.**

Cualquier *L-estructura $*(\hat{\mathbb{R}})$ en la cual la L-estructura puede sumergirse propiamente y para la cual todas las sentencias admisibles de $\hat{\mathbb{R}}$ que se cumplen en $\mathbb{R}$, con adecuada interpretación de los símbolos en $\hat{\mathbb{R}}$ también se cumplen en $*(\hat{\mathbb{R}})$, se llamará un **Modelo de análisis no estándar de orden superior** de $\hat{\mathbb{R}}$. En este caso el conjunto de $*\mathbb{R}$ de individuales de $*(\hat{\mathbb{R}})$ es un campo totalmente ordenado del cual $\mathbb{R}$ es un subcampo propio. Pero $*(\hat{\mathbb{R}})$ no es la superestructura determinada por $*\mathbb{R}$. En efecto, si $A = P(\mathbb{R})$, entonces bajo la inyección de $\hat{\mathbb{R}}$ en $*(\hat{\mathbb{R}})$, ésta constante no denotará el conjunto de todos los subconjuntos de $*\mathbb{R}$ como podría esperarse sino sólo un subsistema de $P(*\mathbb{R})$.

Ahora nos dedicaremos a describir una estructura que es ultrapotencia de $\hat{\mathbb{R}}$.

Sea I un conjunto infinito, sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto de subconjuntos de I y sea $\{I_n\}$ una partición que satisface $I_n \notin \mathcal{U}$.

Por $\hat{\mathbb{R}}^I$ denotamos el conjunto de todos los mapeos de I en $\hat{\mathbb{R}}$. Existe una inyección natural $a \to *a$ de $\hat{\mathbb{R}}$ en $\hat{\mathbb{R}}^I$ definida por $*a(i) = a$ para toda $i \in I$, esto es, $\hat{\mathbb{R}}$ se identifica en $\hat{\mathbb{R}}^I$ con los mapeos constantes.

Definición: Si $a,b \in \hat{\mathbb{R}}^I$, entonces $a =_{\mathcal{U}} b$ si y sólo si $\{i/\ a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$ y $a \in_{\mathcal{U}} b$ si y sólo si $\{i/\ a(i) \in b(i)\} \in \mathcal{U}$.

Se puede demostrar que $\forall a,b \in \hat{\mathbb{R}}^I$ sucede que $a = b$ ó $a \neq b$, y también que $a \in b$ ó $a \notin b$.

Unicamente lo demostraremos para la igualdad (=).

$a =_{\mathcal{U}} b \Leftrightarrow \{ i \in I/\ a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$

si $a \neq_{\mathcal{U}} b \Leftrightarrow \{i \in I / a(i) = b(i)\} \notin \mathcal{U}$

$\Leftrightarrow \{i \in I / a(i) \neq b(i)\} \in \mathcal{U}$

Sean $a,b \in \hat{\mathbb{R}}^I$ y tomemos $A = \{i \in I / a(i) = b(i)\}$. Entonces $A \in \mathcal{U}$ o $A \notin \mathcal{U}$ por una propiedad básica de los ultrafiltros.

Si $A \in \mathcal{U}$, entonces $a =_{\mathcal{U}} b$;

si $A \notin \mathcal{U}$ entonces $I-A \in \mathcal{U}$

pero $I-A \in \mathcal{U} \Rightarrow \{i \in I / a(i) \neq b(i)\} \in \mathcal{U}$

y entonces $A \cup (I-A) = I \in \mathcal{U}$

$\therefore a = b$ ó $a \neq b$. ■

En el siguiente lema, enlistaremos para referencia posterior, algunas de las propiedades básicas de la inyección $a \to {}^*a$ de $\hat{\mathbb{R}}$ en $\hat{\mathbb{R}}^I$.

Lema III.2:

i) ${}^*\phi = \phi$

ii) Si $a,b \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces $a \subset b$ implica que ${}^*a \subset {}^*b$

iii) Si $a,b \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces $a \in b$ si y sólo si ${}^*a \in {}^*b$

iv) Para todo $a \in \hat{\mathbb{R}}$, tenemos ${}^*\{a\} = \{{}^*a\}$

v) Si $a_1,\ldots,a_n \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces ${}^*(\bigcup_{i=1}^{n} a_i) = \bigcup_{i=1}^{n} {}^*a_i$,
${}^*(\bigcap_{i=1}^{n} a_i) = \bigcap_{i=1}^{n} {}^*a_i$, ${}^*\{a_1,\ldots,a_n\} = \{{}^*a_1,\ldots,{}^*a_n\}$,

vi) Para todo $a,b \in \hat{\mathbb{R}}$, tenemos ${}^*(a-b) = {}^*a - {}^*b$

vii) Si $b \in \hat{\mathbb{R}}$ es una relación binaria, entonces ${}^*(\text{dom } b) = (\text{dom } {}^*b)$

${}^*(\text{ran}b) = \text{ran}{}^*b$, y para todo $a \in \hat{\mathbb{R}}$ tenemos que ${}^*(b(a)) = \{Y / (\exists x \ (x \in a \wedge (x,y) \in b)\} = {}^*b({}^*a) = \{Y / (\exists x) \ (x \in {}^*a \wedge (x,y) \in {}^*b)\}$.

Demostración:

Sólo probaremos ii) ya que la las demás pruebas son

similares.

ii) Dados $a,b \in \hat{\mathbb{R}}$ y $a \subset b$, se busca demostrar que $c \in {}^*a \Rightarrow c \in {}^*b$

Sean $U_1 = \{i \in I / c(i) \in {}^*a(i)\} \equiv \{i \in I / c(i) \in a\} \in \mathcal{U}$

y $U_2 = \{i \in I / c(i) \in {}^*b(i)\} \equiv \{i \in I / c(i) \in b\}$

Como $U_1 \in \mathcal{U}$ y $U_1 \subset U_2$, entonces $U_2 \in \mathcal{U}$, por condición de filtro y por lo tanto $c \in {}^*b$. ■

Definición: Una entidad de la *L-estructura $\hat{\mathbb{R}}^I$ se llama **interna** siempre que existe un número natural $n \geq 0$ tal que $a \in {}^*\mathbb{R}_n$.

Definición: Una entidad interna se llama **estándar** siempre que existe una entidad $b \in \hat{\mathbb{R}}$ tal que $a = {}^*b$. Todas las entidades que no son internas se llaman **externas.**

Teorema III.1: Existen entidades externas que no son estándar. En efecto, si $a \in \hat{\mathbb{R}}$ es una entidad que tiene infinidad de elementos, entonces existe una entidad $b \in {}^*a$ tal que b no es estándar.

Demostración:

Debido a que a es un conjunto infinito, existe una sucesión $\{b_n / n = 1,2,...\}$ de elementos de a tales que $b_n \neq b_m$ para toda $n,m = 1,2,...$ y $n \neq m$. Sea b el mapeo de I en a tal que $b(i) = b_n$ para todo $i \in I_n$ $(n = 1,2,...)$. Entonces $b \in {}^*a$ pero b no es igual a algún elemento estándar de $^*(\hat{\mathbb{R}})$, lo que demuestra el teorema. ■

Teorema III.2: Si $a \in b \in {}^*\mathbb{R}_n$ $(n \geq 1)$, entonces $a \in {}^*\mathbb{R}_{n-1}$, esto es, los elementos de una entidad interna son internos.

Teorema III.3: Sea $V=V(x_1,...x_p)$ una L-fbf con las variables libres $x_1,...,x_p$, sea $A = \{(x_1,...x_p)/ (x_1,...,x_p) \in a \wedge V(x_1,...,x_p)\}$, donde a es una entidad arbitraria de $\hat{\mathbb{R}}$. Entonces $A \in \hat{\mathbb{R}}$:

$$*A = \{(y_1,...,y_p)/(y_1,...,y_p) \in *a \wedge *V(y_1,...y_p)\}.$$

Las demostraciones de estos teoremas se encuentran en [8].

Ahora probaremos el teorema fundamental de Ultrafiltros.

Teorema III.4: (Teorema Fundamental o Principio de Transferencia):

$*(\hat{\mathbb{R}})$ es un modelo no estándar de orden superior de $\hat{\mathbb{R}}$, esto es, una sentencia admisible V de K(L) (K(L) es el conjunto de fbf admisible de L) se cumple en $\mathbb{R}$ si y sólo si *V se cumple en $*(\hat{\mathbb{R}})$, y $\hat{\mathbb{R}}$ se "sumerge" propiamente en $*(\hat{\mathbb{R}})$.

Demostración:

En un teorema anterior vimos que que la inyección $a \to *a$ de $\hat{\mathbb{R}}$ en $*(\hat{\mathbb{R}})$ es propia. Tenemos que demostrar si $V \in K(L)$, entonces $V \in K_0$ (donde K_0 es el subconjunto de K de todas las sentencias admisibles que se cumplen en $\hat{\mathbb{R}}$) si y sólo si $*V \in *K_0$. Si V no tiene cuantificadores, se sigue inmediatamente de la definición; supongamos que $V \in K$ tiene la forma normal precedente $V= (qx_n)...(qx_1)w$, donde w no tiene cuantificadores. No hay pérdida de generalidad en suponer que (qx_n) es el cuantificador existencial $(\exists x_n)$. Entonces $V \in K_0(L)$ es equivalente al conjunto $A= \{x_n/x_n \in a \wedge (qx_{n-1})...(qx_1)w\} \neq \phi$, donde a es el dominio de $(\exists x_n)$. Entonces, por el teorema anterior y el lema III.2(i), $A \neq \phi$ es equivalente a $A^* = \{ x_n/ x_n \in *a \wedge (qx_{n-1})...(qx_1)*w\} \neq *\phi$, lo cual es equivalente a $*V \in *K_0$.■

Un aspecto importante del análisis no estándar es el uso repetido del teorema fundamental para transformar los enunciados verdaderos de R en enunciados verdaderos de las entidades internas de $*(\hat{R})$.

Teorema III.5: Sea $V = V(x_1,\ldots,x_n)$ una fbf interna con las variables libres $x_1,\ldots,x_n$, y sea $a \in *(\hat{\mathbb{R}})$ una entidad interna. Entonces el conjunto $\{(x_1,\ldots,x_n)/\ (x_1,\ldots,x_n) \in a \wedge V(x_1,\ldots,x_n)\}$ es interno.

La demostración de este teorema se encuentra en [8].

III.1 EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES NO ESTANDAR *ℝ.

El conjunto *ℝ de individuales de la $\mathcal{U}$-ultrapotencia $*(\hat{\mathbb{R}})$ de la superestructura $\hat{\mathbb{R}}$, donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro δ-incompleto, tiene de acuerdo al T. Fundamental las mismas propiedades que ℝ.

Ya que ℝ es un campo totalmente ordenado y es fácil ver que esto puede expresarse por sentencias de K_0 (donde K_0 es el subconjunto de K de todas las sentencias admisibles que se cumplen en $\hat{\mathbb{R}}$) se sigue que *ℝ es un campo totalmente ordenado. La inyección $a \to *a$ de ℝ en *ℝ sumerge ℝ en un subcampo de *ℝ. Con el fin de simplificar nuestra notación, denotaremos las extensiones de las operaciones algebraicas y del orden con los mismos símbolos al pasar de ℝ a *ℝ. Por lo tanto, a+b = c en *ℝ significa en términos de $\mathcal{U}$ que $\{i/a(i)+b(i) = c(i)\} \in \mathcal{U}$. Como una ilustración,

el enunciado afirma quela relación de orden "≤" ordena a $\mathbb{R}$ totalmente puede expresarse por la siguiente sentencia de K_0: $(\forall x)$ $(\forall y)$ $[x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}] \Rightarrow [x < y] \vee [x = y] \vee [x > y]$, así,se sigue del T. Fundamental que la extensión de la relación de orden de $\mathbb{R}$ ordena totalmente a $^*\mathbb{R}$.

El elemento unitario $e \in {}^*\mathbb{R}$ tiene la propiedad de que para todo $0 \neq r \in \mathbb{R}$, $^*r(^*r)^{-1}=e$, y así $e = {}^*1$, donde 1 denota el número real uno.

Para simplificar la notación, identificaremos $\mathbb{R}$ con el subcampo de los números estándar de $^*\mathbb{R}$, y tendremos la libertad de escribir $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$.

El valor absoluto $|r|$ de un número $r \in \mathbb{R}$ definido por $|r|= r$ siempre que $r \geq 0$ y $|r| = -r$ cuando $r<0$, puede considerarse como un mapeo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+= \{r/r \in \mathbb{R} \wedge r \geq 0\}$. La constante de L que denota este mapeo se extiende, al pasar de $\hat{\mathbb{R}}$ a $^*(\hat{\mathbb{R}})$ a un mapeo $^*|\ |$ de $^*\mathbb{R}$ en $^*(\mathbb{R}^+)$ el cual, de acuerdo al T. Fundamental, tiene la propiedad de que $^*|a| = a$ para todo $a \geq 0$ que está en $^*\mathbb{R}$ $^*|a| = -a$ para todo $a<0$ que está en $^*\mathbb{R}$. También en este caso eliminaremos la notación * y escribiremos $|a|$ para denotar el valor absoluto de un número real $a \in {}^*\mathbb{R}$. Similarmente, escribiremos $\max(a,b)$, $a,b \in {}^*\mathbb{R}$, para las extensiones $^*\max(,)$ y $^*\min(,)$ de los mapeos $\max(r,s)$ y $\min(r,s)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$en $\mathbb{R}$ respectivamente.

Denotemos con la constante S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces al pasar a $^*(\mathbb{R})$, $^*S$ denota un subconjunto de $^*\mathbb{R}$ que es una entidad estándar y, por el T. Fundamental, tiene las mismas propiedades que S en la medida en que puedan expresarse por sentencias de K_0. Más precisamente , la subestructura $^*(\hat{S})$ de $^*(\hat{\mathbb{R}})$, donde $\hat{S}$ denota la subestructura definida por S, es un modelo no estándar de $\hat{S}$

(ultrapotencia). Sobre las bases del lema III.2.(iii) y de esta notación, expresaremos que S $\subset$ *S. Además, por el lema III.2(v), S=*S si y sólo si S es un conjunto finito.

Si la constante $\mathbb{N}$ denota el conjunto de número naturales de $\mathbb{R}$, esto es $\mathbb{N}$ denota un conjunto de números de *$\mathbb{R}$ que tiene las mismas propiedades de $\mathbb{N}$ en la medida en que pueden expresarse como sentencia de K_0. Es decir, $*(\hat{\mathbb{N}})$ es una ultrapotencia que produce un modelo no estándar de orden superior a la aritmética.

Del teorema III.1 se sigue que *$\mathbb{R}$ es una extensión propia de $\mathbb{R}$, y así, de acuerdo a un resultado de álgebra que afirma que todo campo arquimediano es isomorfo a un subcampo de $\mathbb{R}$, concluimos que *$\mathbb{R}$ es no arquimediano. Pero *$\mathbb{R}$ tiene las mismas propiedades que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es arquimediano. Examinaremos esta aparente paradoja; el hecho de que $\mathbb{R}$ sea arquimediano puede expresarse por la siguiente sentencia de K_0:

$(\forall x)(\forall n)\ [x \in \mathbb{R}] \wedge [n \in \mathbb{N}] \Rightarrow [[nx \leq 1] \Leftrightarrow [x \leq 0]]$, y así por el T. Fundamental, se cumple para *$\mathbb{R}$ que $(\forall x)\ (\forall n)[x \in {}^*\mathbb{R}] \wedge [n \in {}^*\mathbb{N}] \Rightarrow [nx \leq 1] \Leftrightarrow [x \leq 0]$, esto es, con la interpretación propia de las constantes, *$\mathbb{R}$ es arquimediano con respecto a *$\mathbb{N}$. No es arquimediano en el sentido del metalenguaje tal que a+...+a > 1, n-veces +.

Hasta ahora, sólo hemos considerado propiedades de $\mathbb{R}$ y su extensión expresable en lenguaje de primer orden.

Examinaremos algunas propiedades de $\mathbb{R}$ que son de orden superior.

Propiedad de Completez de Dedekind:

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene una mínima cota superior (sup).

Como esto puede expresarse fácilmente con una sentencia de K_0, la cual contendrá al cuantificador universal cuya variable representa subconjuntos de $\mathbb{R}$, por el uso del T Fundamental se sigue que $*\mathbb{R}$ satisface la propiedad de completez, es decir:

i)Todo subconjunto interno no vacío de $*\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un sup.

- Ya que $*(\hat{\mathbb{N}})$ es un modelo no estándar de orden superior de la aritmética, se sigue que bajo una interpretación adecuada del T. Fundamental, el modelo $*(\mathbb{N})$ satisface todos los axiomas de Peano. Por ejemplo, el principio de inducción que establece que todo conjunto no vacío de números naturales tiene un primer elemento, propiedad de orden superior de $\hat{\mathbb{N}}$, tiene que ser interpretada en $*(\hat{\mathbb{N}})$ en el siguiente sentido:

ii) Todo subconjunto interno no vacío de $*\mathbb{N}$, tiene un primer elemento:

Del teorema III.1 también se sigue que $*\mathbb{N}-\mathbb{N} \neq \phi$. Es decir, probaremos que existe un número natural $w \in *\mathbb{N}$ tal que $|r| < w$ para todo $r \in \mathbb{R}$. En efecto si $w(i) = n$ para todo $i \in I_n$ $(n = 1,2...)$, $\{I_n\}$ una partición de I tal que $I_n \notin \mathcal{U}$ para toda $n = 1,2,...$, entonces w es un mapeo de I a $\mathbb{N}$ con la propiedad de que para todo $0< r \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{i/w(i) < r\} \notin \mathcal{U}$, y así $w \in *\mathbb{N}$ y $|r|< w$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Esto prueba, en base a que $\mathcal{U}$ es δ-incompleto que $*\mathbb{N}$ contiene un número que es más grande que cualquier otro número real positivo, que podría llamarse infinitamente grande.

Definición: Un número real se llama finito, siempre que existe un número real estándar $0 < r \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < r$. Un

número real $a \in {}^*\mathbb{R}$ que no es finito, se llamará infinito.

Un número real $a \in {}^*\mathbb{R}$ se llama infinitesimal (o infinitésimo) o infinitamente pequeño, siempre que $|a| < r$ para todo $0 < r \in \mathbb{R}$.

Aquí cobra pleno significado y fundamento la teoría de Leibniz.

El conjunto de todos los números reales finitos de ${}^*\mathbb{R}$ se denotará por M_0 y el conjunto de todos los infinitésimos por M_1.

Observese que $\mathbb{R} \subset M_0$, $M_1 \subset M_0$ y $\mathbb{R} \cap M_1 = \{o\}$, esto es , 0 (el nulo) se considera también como un infinitesimal estándar.
Un número $a \in {}^*\mathbb{R}$ es infinito si y sólo si $|a| > r$ para todo $0 < r \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el número natural w definido arriba es infinito. Su recíproco, es un infinitésimo. Más generalmente, un número real $o \neq a \in {}^*\mathbb{R}$ es un infinitésimo si y sólo si su recíproco es infinito.

El siguiente teorema sirve para determinar los números nanaturales finitos:

Teorema III.1.1: Un número natural $n \in {}^*\mathbb{N}$ es finito si y sólo si n es un número natural estándar. En símbolos, ${}^*\mathbb{N} \cap M_0 = \mathbb{N}$.

Demostración: Es obvio que $\mathbb{N} \subset M_0$. Si $n \in {}^*\mathbb{N}$ es finito, entonces existe un número real estándar $0 < r \in \mathbb{R}$ tal que $n < r$.

Por lo tanto, los números K_0 contiene la sentencia:
$(\forall x)\ [x \in \mathbb{N}] \Rightarrow [x \leq r] \Leftrightarrow [x = 1]\ V\ [x = 2]\ V\ \ldots\ V\ [x = p]$, donde r y p son las constantes y $p = [r]$ es la parte entera de r. Por el T. Fundamental obtenemos que $n = 1$ ó $n = 2$ ó ...ó $n = r$, y la prueba concluye.■

Ahora haremos una discusión acerca de las propiedades de los números finitos de ${}^*\mathbb{R}$.

Es fácil ver que M_0 es un subanillo de ${}^*\mathbb{R}$, y de hecho es un

dominio entero, es decir, M_0 no tiene divisores de cero. El conjunto de los infinitésimos constituye un subanillo de M_0 con la propiedad de que si $h \in M_1$ y $a \in M_0$, entonces $ah \in M_1$, esto es, M_1 es un ideal en M_0. Es fácil ver además que M_1 es un ideal máximal. En efecto, observe que si $a \in M_0$ y $a \notin M_1$, entonces existen números reales positivos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r_1 < |a| < r_2$, y así $\frac{1}{a} \in M_0$ lo cual muestra que cualquier ideal que contenga a M_1 propiamente debe contener el elemento 1 de M_0 y por tanto todo M_0.

Si $a,b \in {}^*\mathbb{R}$ y $a-b$ es infinitesimal, entonces diremos que b está infinitamente cerca de a y escribiremos $a = {}^1b$.

Considere al anillo cociente M_0/M_1. Entonces, ya que M_1 es un ideal máximo en M_0, el anillo cociente M_0/M_1 es un campo. En relación a esto tenemos el teorema siguiente.

Teorema III.1.2: El anillo cociente M_0/M_1 es de orden isomórfico a el campo $\mathbb{R}$ de los reales estándar.

Demostración:

Primero observemos que si A es una clase lateral en M_0 módulo M_1, entonces A no puede contener dos números reales estándar diferentes r_1 y r_2. Ya que, en ese caso $|r_1-r_2| = 0$, y así $r_1 \neq r_2$ implica por definición que $|r_1-r_2| < |r_1-r_2|$ y se obtiene una contradicción. Esto muestra que $\mathbb{R}$ es un subcampo de M_0/M_1. Para completar la prueba, tenemos que demostrar que a cada $a \in M_0$ corresponde un número real estándar r, el único tal que $a-r = 0$. Para este fin observese que si $a \in M_0$, entonces los conjuntos $D=\{r/r \in \mathbb{R} \wedge r \leq a\}$ y $D' = \mathbb{R}-D$ definen una cortadura de Dedekind (D,D') en $\mathbb{R}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ el número real en $\mathbb{R}$ que determina la misma cortadura (D,D'). Entonces, mostraremos que $a = r$. Si no es así

por definición existe un número real positivo $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $|a-r| \geq \varepsilon$. Si $a > r$ entonces $|a-r| \geq \varepsilon$ implica que $r + \frac{\varepsilon}{2} < a$, y contradice el hecho de que a y r determinan la misma cortadura, similarmente, si $r > a$, entonces $r-\frac{\varepsilon}{2} > a$ da orígen a la misma contradicción. Por lo tanto M_0/M_1 es de orden isomórfico a $\mathbb{R}$ y la demostración concluye.■

Definición: El orden homomorfico de anillo de M_0 sobre $\mathbb{R}_0$ con núcleo M_1 se llamará el homomorfismo de la parte estándar y se denotará por St.

Teorema III.1.3:

i) $St(a+b) = St(a) + St(b)$, $St(ab) = St(a)St(b)$, y $St(a-b) = St(a)-St(b)$, $\forall a,b \in M_0$.

ii) Si $a,b \in M_0$, entonces $a \leq b$ implica $St(a) \leq St(b)$.

iii) $St(|a|) = |St(a)|$, $St(máx(a,b)) = máx.(St(a),St(b))$ y $St(mín(a,b)) = mín(St(a),St(b))$, $\forall\ a,b \in M_0$.

iv) $St(a) = 0$ si y sólo si $a \in M_1$.

v) Para todo $r \in \mathbb{R}$ estándar, tenemos $St(r) = r$.

vi) Si $a \in M_0$ y $St(a) \geq 0$, entonces $|a| = St(a)$

vii) Para todo $a,b \in M_0$, tenemos $a = b$ si y sólo si $St(a)=St(b)$.

A las clases de equivalencia laterales de M_0 con respecto a M_1 se acostumbra llamarlas **mónadas**. Las mónadas se denotan por $\mu(r)$, $r \in \mathbb{R}$.

En partícular , $\mu(0) = M_1$.

La demostración de este teorema se encuentra en [8].

Definición y propiedad de algunas entidades externas.

Ya se estableció que el recíproco del teorema III.2 no es

necesariamente cierto, es decir, un conjunto de entidades internas no es necesariamente interno; por otro lado, tenemos ya definidos algunos conjuntos de individuales tales como $^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, M_0, M_1, $\mu(r)$, $r \in \mathbb{R}$. Ahora surge como pregunta natural si estos conjuntos son internos o no. Para ello supondremos que cada conjunto en cuestión es interno y mostraremos que viola alguna propiedad que debería poseer por ser interno y por el T. Fundamental.

Teorema III.1.4: Los conjuntos no vacíos $^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, M_0, M_1, $\mu(r)$ $(r \in \mathbb{R})$, y el conjunto de números reales infinitamente grandes $^*\mathbb{R}_\infty = {}^*\mathbb{R}-M_0$ son todos externos.

Demostración:

Supongamos que $^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ es interno. Entonces ya que $^*\mathbb{N}-\mathbb{N} = \phi$ (teorema III.1) tenemos por ii) que $^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ tiene un primer elemento, digamos W_0. Pero el conjunto de números naturales infinitamente grande no tiene un primer elemento. Así, si $W \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ entonces $k+1 < W$ para todo $k \in \mathbb{N}$, esto implica que $W-1 \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, y así $W_0-1 < W_0$ lo cual prueba que $^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ no tiene primer elemento. Por lo tanto, $^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ es externo.

Supongamos que el conjunto M_1 es interno. ya que $M_1 \neq \phi$ y $h \in M_1$ implica que $|h| < 1$, se sigue de i) que M_1 tiene un sup, digamos, a_0. De $0 \in M_1$, se sigue que $a_0 \geq 0$. Además $a_0 \notin M_1$ ya que M_1 contiene otros elementos diferentes de cero. Pero entonces $\frac{a_0}{2}$ es también un sup de M_1, obténiendose así una contradicción, por lo que M_1 es externo.

Similarmente, en base a i) podemos mostrar que M_0 es externo.

Si $^*\mathbb{R}_\infty = {}^*\mathbb{R}-M_0$ es interno, entonces también $M_0 = {}^*\mathbb{R}-{}^*\mathbb{R}_\infty$ es interno y se obtiene una contradicción. Por lo tanto, $^*\mathbb{R}_\infty$ es

externo.

Ya que las traslaciones son mapeos internos, se sigue inmediatamente del hecho de que $\mu(0)$ es externa que $\mu(r) = \mu(0) + r$ ($r \in \mathbb{R}$) es externo. Esto completa la prueba. ■

Observaciones:

*) Si $D \subset M_1$ es interno y no vacío, entonces, de acuerdo a (4.1) tiene un sup. La demostración anterior muestra que el sup es un infinitésimo.

Similarmente, el sup de un conjunto interno no vacío de números finitos es finito. El inf de un conjunto interno no vacío de números infinitos es infinito.

**) La operación "parte estándar" es un mapeo de M_0 a $\mathbb{R}$. No es por lo tanto, un mapeo interno. Ya que , si fuera interno entonces de acuerdo al teorema precedente concluímos que la operación "parte estándar" es una operación externa.

Teorema III.1.5: Si $A \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces el conjunto $^*A - \{^*a/a \in A\}$ de todos los elementos no estándar de $^*A$ es vacío o externo, y en el último caso, el conjunto $\{^*a/a \in A\}$ es también externo.

Demostración:

Si $A \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces el conjunto $^*A - \{^*a/a \in A\} = \phi$ si y sólo si A es finito. por el teo. III.1 y lema III.2v. Supongamos, por lo tanto, que A es infinito. Entonces existe un mapeo f uno-a-uno de un subconjuto de A sobre $\mathbb{N} = \{1,2,...\}$.

Si $B = ^*A - \{^*a/a \in A\}$ es interno, entonces $B \cap dom(^*f)$ es también interno (teo. III.5). Por consiguiente, tenemos que $^*\mathbb{N} - \mathbb{N} = ^*f\,(B \cap dom.^*f)$ es interno, lo cual contradice el teorema 5.1 y la

prueba concluye. ■

Definición: Un conjunto D de entidades internas de $*(\hat{\mathbb{R}})$ se llama *-finito siempre que exista un número natural $w \in *\mathbb{N}-\mathbb{N}$ y un mapeo interno uno-a-uno de D sobre el conjunto interno $\{1,2,...,w\}$. En ese caso, diremos que la cardinalidad interna de D es w.

Si D es *-finito, entonces es claro que su cardinalidad externa es al menos $\aleph_0$.

Teorema III.1.6: Todo conjunto *-finito de entidades internas es interno. Un conjunto *-finito de números reales tiene un elemento máximo y un mínimo.

Demostración:

Ya que el dominio de una función interna es interna, se sigue inmediatamente de la definición que un conjunto *-finito es interno.

Si D es un conjunto *-finito de números reales de $\mathbb{R}$, tiene un elemento máximo y un elemento mínimo; lo cual completa la prueba.■

IV.- UNA APLICACION DE UN MODELO NO ESTANDAR A UN PROBLEMA QUE HABIA PERMANECIDO ABIERTO.

En este capítulo aplicaremos resultados de álgebra lineal de dimensión finita en espacios infinito dimensionales. La idea es encontrar un espacio $E \in {}^*\mathcal{E}$ que se aproxime al espacio infinito dimensional dado; entonces el Principio de Transferencia nos permite aplicar los resultados de la teoría finita-dimensional al espacio infinito dimensional dado.

Este método fué usado por Bernstein y Robinson para resolver un problema que había estado abierto por muchos años. Primero introduciremos alguna terminología:

Definición: T es llamado "Polinomialmente Compacto" si T es un operador lineal acotado y para algún polinomio

$$p(\lambda) = c_0+c_1\lambda+\ldots+c_n\lambda^n,\ c_0,\ldots,c_n \in C,$$

el operador p(T) es compacto.

Definición: El subespacio E del espacio unitario $H = l^2$ es invariante para el operador T si $T[E] \subseteq E$.

En 1930 J. Von Neuman había probado sin publicarlo el hecho

de que un operador compacto sobre un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial (es decir, distintode {0} y de todo el espacio).

Se originó la pregunta de cuales operadores no compactos poseen subespacios invariantes no triviales, pero no hubo progreso considerable. Finalmente, en 1966 se usaron métodos no estándar para obtener el siguiente resultado:

Teorema (BERSNTEIN-ROBINSON): Sea T un operador polinomialmente compacto en l^2. Entonces existe un subespacio lineal cerrado de l^2 distinto de {0} o l^2, que es invariante para T.

Iniciamos nuestra discusión con algunas consideraciones generales. En este capítulo consideramos solamente H = l^2. Sea $\{e_i / i \in \mathbb{N}^+\}$ alguna base ortonormal para l^2. Que posteriormente especificaremos . Entonces si T es un operador lineal sobre l^2, podemos escribir

$$Te_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \ , \ k = 1,2,...$$

El arreglo $[a_{jk}]$ (el cual es, desde luego un mapeo de $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$) es llamaddo la matriz de T con respecto a la base dada. Como es usual, podemos pensar de a_{jk} definida para j,k que pertenecen a $^*\mathbb{N}$ con valores en $^*\mathbb{C}$.

Lema 1: Sea $[a_{jk}]$ la matriz de un operador compacto T. Entonces $a_{jk} \approx 0$ para $j \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, y todo $k \in \mathbb{N}^+$.

Demostración: Por el principio de transferencia,

$$Te_k = \sum_{i \in {}^*\mathbb{N}^+} a_{ik} e_i$$

Puesto que T es compacto y e_k ese finito, Te_k es casi estándar.

Así $Te_k \approx y \in l^2$ donde, decimos, $y = \sum_{+} y_i e_i$.

$$i \in {}^*\mathbb{N}$$

Sea $\xi = \|Te_k - y\|^2$

$$= \Big\| \sum_{i \in {}^*\mathbb{N}^+} (a_{ik} - y_i)\, e_i \Big\|^2$$

$$= \sum_{i \in {}^*\mathbb{N}^+} |a_{ik} - y_i|^2$$

donde hemos usado el Teorema de Pitágoras. Puesto que $Te_k \approx y$, $\xi \approx 0$. Eligimos cualquier valor $j \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Claramente,

$$|a_{jk} - y_j|^2 \leq \xi,$$

y así

$$|a_{jk} - y_j| \leq \xi^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces

$$|a_{jk}| = |a_{jk} - y_j + y_j|$$

$$= \xi^{\frac{1}{2}} + |y_j|$$

Puesto que $y \in l^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ converge de modo que $y_n \to 0$, y de aquí $|y_j| \approx 0$. Concluímos que $|a_{jk}| \approx 0$. ∎

Definición: Una matriz $[a_{jk}]$ es casi supradiagonal si $a_{jk} = 0$ para toda $j > k+1$.

Sea $[a_{jk}]$ casi supradiagonal. Entonces definimos recursivamente

$$a_{jk}^{(1)} = a_{jk},$$
$$a_{jk}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji}^{(n)} a_{ik} = \sum_{i \le k1} a_{ji}^{(n)} a_{ik}.$$

Lema 2: Sea $[a_{jk}]$ la matriz casi supradiagonal del operador lineal acotado T. Entonces la matriz de T^n es $[a_{jk}^{(n)}]$.

Demostración: La prueba es por inducción sobre n. Para n = 1 el resultado es inmediato.

Suponga que el resultado es válido para n. Sea $[b_{jk}]$ la matriz de T^{n+1}. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk} e_j = T^{n+1} e_k$$

$$= T^n(Te_k)$$

$$= T^n(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} e_i)$$

$$= T^n(\sum_{i \le k+1} a_{ik} e_i)$$

$$= \sum_{i \le k+1} a_{ik}(T^n e_i)$$

$$= \sum_{i \le k+1} a_{ik} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ji}^{(n)} e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{i \le k+1} a_{ji}^{(n)} a_{ik}) \; e_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}^{(n+1)} e_j.$$

■

Lema 3: Sea $[a_{jk}]$ casi supradiagonal. Entonces para s,m,n> 0;

1) $a^{(s)}_{n+m,n} = 0$ si $s < m$,

2) $a^{(m)}_{n+m,n} = \prod_{i=0}^{m-1} a_{n+i+1,n+i}$.

Demostración: Primero probamos 1) por inducción sobre s. Para s = 1, m≥2. Como $[a_{jk}]$ es casi supradiagonal,

$a^{(1)}_{n+m,n} = a_{n+m,n} = 0$.

Asumimos que 1) es válido para supraíndices menores que s. Por hipotésis de inducción,

$a^{(s-1)}_{n+m,n} = 0$ para s-1 < m y para toda m,n. Pero

$$a^{(s)}_{n+m,n} = \sum_{i \le n+1} a^{(s-1)}_{n+m,i}\, a_{in}.$$

Pero para i≤n+1 y s<m, por la hipotésis de inducción, todos los términos de la suma son 0, y así también es $a^{(s)}_{n+m,n}$.

Enseguida probaremos 2) por inducción en m. Para m=1 el resultado es trivial. Suponga que 2) es válido para m-1, entonces

$a^{(m-1)}_{n+m-1,n} = \prod_{i=0}^{m-2} a_{n+i+1,n+i}$ para toda n.

Usando 1), como $a^{(m-1)}_{i+(n+m-i),i} = a^{m-1}_{n+m,i}$ y m-1<n+m-i, $a^{(m-1)}_{n+m,i} = 0$ para i≤n. También,

$$a^{(m)}_{n+m,n} = \sum_{i \le n+1} a^{(m-1)}_{n+m,i}\, a_{in}$$

$$= a^{(m-1)}_{n+m,n+1}\ a_{n+1,n}$$

$$= \left(\prod_{i=0}^{m-2} a_{n+i+2,n+i+1}\right)\ a_{n+1,n}$$

$$= \prod_{i=0}^{m-1} a_{n+i+1,n+i}.$$

Lema 4: Sea T un operador polinomialmente compacto sobre l^2 en el cual la matriz $[a_{jk}]$ es casi supradiagonal. Entonces para algún entero infinito v, $a_{v+1,v} \approx 0$.

Demostración: Sea $\rho(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_k T^k$ compacto y $[b_{jk}]$ su matriz . Entonces usando el lema 2 ,

$$b_{n+m,n} = \alpha_0 + \alpha_1 a^{(1)}_{n+m,n} + \alpha_2 a^{(2)}_{n+m,n} + \ldots + \alpha_k a^{(k)}_{n+m,n}$$

Usando (1) y luego (2) del Lema 3,

$$b_{n+m,n} = \alpha_m a^{(m)}_{n+m,n} = \alpha_m \prod_{i=1}^{m-1} a_{n+i+1,n+i}.$$

Puesto que $\rho(T)$ es compacto, el lema 1 implica $b_{n+m,n} \approx 0$ para una n infinita.

Eligiendo una n tal que, uno de los números $a_{n+i+1,n+i}$, con $i = 0,\ldots,m-1$ debe ser infinitesimal.■

Definición: Para $E \in {}^*\mathcal{E}$, sea ${}^\circ E$ el conjunto de $x \in l^2$, tal que $x \approx y$ para algún $y \in E$.

Lema 5: ${}^\circ E$ es un subespacio lineal cerrado de l^2.

Demostración: Sea $x, y \in {}^\circ E$ y $\lambda \in C$. Como $x \approx x' \in E$ y $y \approx y' \in E$, $x+y \approx x'+y' \in E$; así, también $x+y \in {}^\circ E$. Además, como $\lambda x \approx \lambda x' \in E$, también $\lambda x \in {}^\circ E$.

Para ver que $^{\circ}E$ es cerrado, sea x un punto límite de $^{\circ}E$ probaremos que $x \in {}^{\circ}E$.

Sea $n \in \mathbb{N}^{+}$. Entonces existe $x' \in {}^{\circ}E$ tal que $\|x-x'\| < \frac{1}{2n}$.

Ahora $x' \approx y$ para algún punto $y \in E$, también que ciertamente $\|x'-y\| < \frac{1}{2n}$. Entonces $\|x-y\| \leq \frac{1}{n}$.

Sea $K = \{ n \in {}^{*}\mathbb{N}^{+} / * \sim (\exists y \in E)\ (\|x-y\| < \frac{1}{n}) \}$

Por lo anterior, $\mathbb{N}^{+} \subseteq K$. Como K es interno, debe haber un infinito $v \in K$. Así existe una $y \in E$ tal que $\|x-y\| < \frac{1}{v} \approx 0$. Esto es, $x \in {}^{\circ}E$.■

Ahora el plan es usar el principio de transferencia y el lema 5 para obtener subespacios invariantes en l^2.

Lema 6: Para $x \in l^2$ y $E \in {}^{*}\mathcal{E}$, $x \in {}^{\circ}E$ si y sólo si $x \approx P_E x$, donde $P_E x$ es el único "y" tal que $\|x-y\| \leq \|x-z\|$ $\forall z \in E$.

Demostración: Si $x \approx P_E x \in E$, entonces, $x \in {}^{\circ}E$. Recíprocamente, si $x \in {}^{\circ}E$, entonces $x \approx y$ para algún $y \in E$.

Por la definición de P_E, el teorema 7 (ver Apén.) y el principio de transferencia, $\|x - P_E x\| \leq \|x-y\| \approx 0$.■

Sea T algún operador lineal acotado dado sobre l^2. Sea $v \in {}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$, sea H_v espacio de Hilbert de dimensión v y

$$P_v(a) = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i e_i, \text{ si } a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,$$

$$T_v = P_v T P_v$$

y sea $\tilde{T}$ la restricción del operador T_v a H_v. Así T_v es un operador lineal sobre ${}^{*}l^2$, $\tilde{T}$ es un operador lineal sobre H_v, y

$$\| \tilde{T} \| \leq \|T_v\| \leq \|P_v T P_v\| \leq \|T\|$$

Puesto que $H_v \in {}^{*}\mathcal{E}$, para cualquier subespacio lineal interno E de H_v, tenemos $E \in {}^{*}\mathcal{E}$. ■

Lema 7: Si E es un subespacio lineal de H_v y $T_v[E] \subseteq E$, entonces tenemos $T[{}^\circ E] \subseteq {}^\circ E$.

Demostración: Sea $x \in {}^\circ E$; deseamos probar que $Tx \in {}^\circ E$.

Por el lema 6, $P_E x \approx x$. Puesto que T es continua, $TP_E x \approx Tx$, y de aquí $TP_E x$ es casi estándar. Por el teo. 1 (Ver apéndice) $P_v(TP_E x) \approx TP_E x$.

$$T_v P_E x = P_v T P_v P_E x \approx TP_E x \approx Tx$$

Pero $P_E x \in E$, y como por hipotesis $T_v P_E x \in E$; luego, Tx es infinitesimalmente próximo a un punto de E (es decir, $T_v P_E x$) y por la definición, $Tx \in {}^\circ E$. ∎

Lema 8: Sea $E, F \in {}^*\mathcal{E}$ tal que $E \subseteq F$ y $\dim(F) = \dim(E) + 1$.

Entonces ${}^\circ E \subseteq {}^\circ F$, y para cualquier par $x, y \in {}^\circ F$, existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $z \in {}^\circ E$ tales que $x = \lambda y + z$ ó $y = \lambda x + z$.

Demostración: Si $x \in {}^\circ E$, entonces $x \approx y$ para algún $y \in E$. Como $E \subseteq F$, $y \in F$, y de aquí que $x \in {}^\circ F$. Así, ${}^\circ E \subseteq {}^\circ F$.

Sean $x, y \in {}^\circ F$. Entonces $x \approx x'$, $y \approx y'$ para $x', y' \in F$. Como $E, F \in {}^*\mathcal{E}$, y además $\dim(F) = \dim(E) + 1$, por el principio de Transferencia, $y' = \lambda x' + z$ (o $x' = \lambda y' + z$) con $\lambda \in {}^*\mathbb{C}$, $z \in E$. consideramos dos casos.

Caso 1:

λ es finita.

Puesto que x', y' y λ son casi estándar, también es

$$z = y' - \lambda x' \quad (\text{o } z = x' - \lambda y')$$

$${}^\circ z = {}^\circ y' - {}^\circ(\lambda x') \quad (\text{o } {}^\circ z = {}^\circ x' - {}^\circ(\lambda y'))$$

$$= y - ({}^\circ\lambda)x \quad (\text{o } {}^\circ z = x - ({}^\circ\lambda)y)$$

De aquí que $y = {}^\circ\lambda x + {}^\circ z$ (o $x = {}^\circ\lambda y + {}^\circ z$) con ${}^\circ z \in {}^\circ E$.

Caso 2:

λ es infinita.

Dividiendo por λ, tenemos

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda} y' - \frac{1}{\lambda} z \quad (\text{o } y' = \frac{1}{\lambda} x' - \frac{1}{\lambda} z)$$

pero por que $z \in E$, $(\frac{1}{\lambda})$ está además en E. De aquí nos devolvemos al primer caso.■

Ahora desarrollaremos la prueba del **teorema de Berstein-Robinson.**

Fijemos alguna $x \in l^2$ donde $\|x\| = 1$, y consideramos el conjunto $A = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$.

Caso 1:

A no es un conjunto linealmente independiente .

Sea k el entero más pequeño tal que

$$T^k x = \alpha_1 x + \alpha_2 Tx + \ldots + \alpha_k T^{k-1} x, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Entonces tenemos el conjunto

$$E = \text{Span } (x, Tx, \ldots, T^{k-1}x)$$

y sostenemos que E reúne los requerimientos del teorema de Bernstein-Robinson. Tenemos $E \neq \{0\}$ porque $x \in E$, $\|x\| = 1$. Puesto que E es finito dimensional este es cerrado por teo. 2 (ver apéndice) y distinto de l^2. Finalmente, si $a \in E$, decimos

$$a = \beta_1 x + \beta_2 Tx + \ldots + \beta_k T^{k-1} x \qquad (2)$$

entonces $Ta = \beta_1 Tx + \beta_2 T^2 x + \ldots + \beta_k T^k x \qquad (3)$

y por (1), tenemos que $Ta \in E$.

Suponemos ahora que A es linealmente independiente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe G_n tal que $G_n = \text{Gen } (x, Tx, \ldots, Tx^{n-1})$.

Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, y $F = \overline{E}$. Por el teorema 3 (ver apéndice) F es un subespacio lineal cerrado de l^2. $F \neq l^2$.

Caso 2:

Claramente, $F \neq \{0\}$. Probaremos que F es invariante para T. Si $a \in E$, entonces $a \in G_n$ para algún n y $Ta \in G_{n+1} \subset E$ así es invariante para T. Finalmente, sea $a \in F$. Entonces debe de haber una sucesión $\{a_n \setminus n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de E tal que $a_n \to a$. Pero entonces $Ta_n \to Ta$, y , por consiguiente, $Ta \in F$.

Caso 3:

$F = l^2$.

Puesto que A es un conjunto linealmente independiente, los puntos $f_i = T^{i-1}x$, $i = 1,2,3,\ldots$ forman una base para l^2. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt para los puntos $\{f_i\}$, obtenemos una base ortonormal $\{e_i\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$Gen\{e_1,e_2,\ldots,e_n\} = Gen(f_1,f_2,\ldots,f_n).$$

Usaremos esta base ortonormal para completar la demostración.

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$e_k \in Gen(f_1,f_2,\ldots f_k)$$

Además $Te_k \in Gen(f_2,f_3,\ldots,f_{n+1}) \subseteq Gen(e_1,\ldots,e_{n+1})$.

Sea $[a_{jk}]$ la matriz de T con respecto a la base ortonormal $\{e_1,e_2,\ldots\}$ entonces tenemos que

$$Te_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}e_j = \sum_{j=1}^{k+1} a_{jk}e_j.$$

pues $[a_{jk}]$ es casi supradiagonal ya que $\{e_1,e_2,\ldots\}$ es ortonormal. Usando la hipotésis de que T es polinomialmente compacto y el lema 4, concluímos que para algún infinito v (el cual fijamos), $a_{v+1,v} \approx 0$.

Enseguida probaremos que $\tilde{T}$ es una buena aproximación para T:

Lema 9: Si $\xi \in H_v$ y ξ es finito, entonces $T\xi \approx \tilde{T}\xi$.

Demostración: Puesto que $H_v = Gen(e_1, e_2, \ldots, e_v)$, tenemos

$$\xi = \sum_{k=1}^{v} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k \in {}^*\mathbb{C}.$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{v} |\alpha_k|^2 \geq |\alpha_v|^2;$$

De aquí α_v es finita. Entonces puesto que $[a_{jk}]$ es casi-supradiagonal ,

$$T\xi = \sum_{k=1}^{v} \alpha_k T e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{v} \alpha_k \sum_{j=1}^{k+1} a_{jk} e_j$$

$$= \sum_{i=1}^{v} \alpha_k \sum_{j=1}^{v+1} a_{jk} e_j$$

$$= \sum_{i=1}^{v+1} \left(\sum_{k=1}^{v} \alpha_k a_{jk}\right) e_j.$$

De aquí que

$$P_v T\xi = \sum_{j=1}^{v} \left(\sum_{k=1}^{v} \alpha_k a_{jk}\right) e_j.$$

Así, $$T\xi = P_v T\xi + \sum_{k=1}^{v} \alpha_k a_{v+1,k}\, e_{v+1}$$

$$T\xi = P_v T\xi + \alpha_k a_{v+1,k}\, e_{v+1}$$

Y puesto que la matriz es a lo más superdiagonal. Por consiguiente

$$\|T\xi - \tilde{T}\xi\| = \|T\xi - T_v\xi\| = |\alpha_v| . |\alpha_{v+1,v}| \approx 0$$

usando el hecho de que α_v es finito.■

Lema 10: Si ξ es finito y $\xi \in H_v$. Entonces $T^n\xi \approx \tilde{T}^n\xi$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: El caso n = 1 fué el lema 9. Suponga que el resultado es válido para n-1.Entonces $\|\tilde{T}^{n-1}\xi\| \leq \|T\|^{n-1}\|\xi\|$ es finito. Por consiguiente, usando la hipotésis de inducción, la continuidad de T, y lema 9,

$$\begin{aligned} T^n\xi &= T(T^{n-1}\xi) \\ &\approx T(\tilde{T}^{n-1}\xi) \\ &\approx \tilde{T}(\tilde{T}^{n-1}\xi) \\ &= \tilde{T}^n\xi. \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora sea $\rho(\lambda)$ el polinomio dado tal que $\rho(T)$ es compacto.

Lema 11: Sea ξ finito y $\xi \in H_v$. Entonces $\rho(T)\xi \approx \rho(\tilde{T})\xi$.

Demostración: Es inmediata del lema 10.

Definición: Sea f un mapeo de *X a *T, donde $q \in {}^*X$. Entonces f es llamado **microcontinuo** en q si $p \approx q$ implica que $f(p) \approx f(q)$ para toda $p \in {}^*X$. f es microcontinuo en *X si f es microcontinuo en todos los puntos $q \in {}^*X$.

Lema 12: $\rho(T_v)$ es microcontinua sobre l^2.

Demostración:

Sea $\rho(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i$. Entonces usando el teorema 4 (ver apéndice)

$$\|\rho(T_v)\| \leq \sum_{i=0}^{k} |\alpha_i| . \|T_v\|^i$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} |\alpha_i| . \|T\|^i = M,$$

donde M es un número real positivo. Así si $u \approx v$, $u,v \in {}^*l^2$, tenemos

$$\|\rho(T_v)u - \rho(T_v)v\| \leq \|\rho(T_v)\| . \|u-v\|$$

$$\leq M . \|u-v\| \approx 0. \blacksquare$$

Lema 13: $\rho(T_v)x \approx 0$.

Demostración: $\rho(T)x \neq 0$, en otras palabras los puntos $T^i x$ serán linealmente dependientes. Por el teorema 1 (ver apén.) $P_v x \approx x$. Así $\rho(T)P_v x \approx \rho(T)x$, puesto que $\rho(T)$ es un operador lineal acotado (teorema 4 apén.) y $\rho(T_v)P_v x \approx \rho(T_v)x$ por lema 12. Por el lema 11, $\rho(T_v)x \approx \rho(T)x$, que es, ${}^\circ(\rho(T_v)x) = \rho(T)x \neq 0$. $\blacksquare$

Haremos uso del siguiente resultado fundamental del álgebra lineal finito dimensional.

Teorema de invarianza: Sea E un espacio de dimensión m y T un operador lineal sobre E. Entonces existe una cadena:

$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_m = E$, donde $\dim(E_i) = i$ y cada E_i es invariante para T.

Este resultado es equivalente para la existencia de una base en términos del cual T tiene una matriz "triangular".

Ahora usamos el teorema de invarianza del álgebra lineal finita dimensional como se cita arriba, y el principio de transferencia para obtener una sucesión interna

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_v = H_v,$$

donde $\dim(E_i) = i$ y $\tilde{T}[E_i] \subseteq E_i$ para $i = 0,1,\ldots,v$.

Puesto que $H_v \in \mathcal{E}$, cada $E_i \in \mathcal{E}$ y la proyección P_{E_i} queda definida. Enseguida definimos la sucesión $\{r_j \mid j=0,1,\ldots,v\}$ de números hiperreales por $r_j = \|\rho(T_v)x - \rho(T_v)P_{E_j}x\|$.

Ahora, puesto que $E_0 = \{0\}$, $P_{E0}x = 0$. Así $r_0 = \|\rho(T_v)x\|$ y por el lema 13, existe un número real positivo r tal que $r_0 > r$. Por otro lado , $P_{Ev} = P_{Hv} = P_v$, también

$$r_v = \|\rho(T_v)x - \rho(T_v)P_vx\| \approx 0 \text{ por el lema 12.}$$

En partícular, $r_v < \frac{1}{2}r$. Por el teorema 6 (ver apén.) existe un mínimo μ tal que $r_\mu < \frac{1}{2}r$, y de aquí que $r_{\mu-1} \geq \frac{1}{2}r$.

Ahora, por los lemas 5 y 7, los espacios $^\circ E_j$, $j = 0,1,\ldots,v$ son subespacios lineales cerrados de l^2 que son invariantes para T. Por lo tanto, únicamente resta probar que al menos uno de ellos no es trivial. De hecho, probaremos que $^\circ E_{\mu-1}$ o $^\circ E_\mu$ es no trivial.

Lema 14: $x \notin {}^\circ E_{\mu-1}$ y $^\circ E_{\mu-1} \neq l^2$.

Demostración: Suponga que $x \in {}^\circ E_{\mu-1}$. Entonces por el lema 6 $x \approx \tilde{P}_{E_{\mu-1}}x$. Pero entonces por el lema 12, se tendría

$$r_{\mu-1} = \|\rho(T_v)x - \rho(T_v)P_{E_{\mu-1}}x\| \approx 0,$$

lo cual es imposible porque $r_{\mu-1} \geq \frac{1}{2}r$. ■

Lema 15: $^\circ E_\mu \neq \{0\}$.

Demostración: Sea $y = \rho(T_v)P_{E_\mu}x$. Puesto que E_μ es invariante para $\tilde{T}$ (y de aquí que también para $\rho(\tilde{T})$), $y \in E_\mu$. Por el lema 11, $y \approx \cdot\rho(T)P_{E_\mu}x$. Ahora, como $\rho(T)$ es compacto y $P_{E_\mu}x$ es finito, se sigue (teo. 5 del apén.) que $\rho(T)P_{E_\mu}x$ es casi estándar, lo mismo que y. Sea $y \approx z \in l^2$, entonces $z \in {}^\circ E_\mu$. Para probar el lema es suficiente probar que $z \neq 0$.

Si por el contrario, $z = 0$, entonces $y \approx 0$. Pero entonces $r_\mu \approx \|\rho(T_v)x\| > r$, lo cual es imposible puesto que $r_\mu < \frac{1}{2}r$. ■

Por los lemas 14 y 15, si $^\circ E_{\mu-1}$, $^\circ E_\mu$ son ambos triviales, debemos tener que $^\circ E_{\mu-1} = \{0\}$, $^\circ E_\mu = l^2$.

Pero la $\dim(E_\mu) = \mu = \dim(E_{\mu-1}) + 1$. Esto se implica por el lema 8 que para cualquier par de puntos $x,y \in l^2$, tenemos $y = \lambda x$ o $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pero esto es falso, por lo que concluímos que ${}^{\circ}E\mu$ o ${}^{\circ}E\mu_{-1}$ es no trivial, y la prueba del teorema de Bernstein-Robinson queda completa.■

CONCLUSIONES

El problema tratado en el capitulo IV es una muestra de la importancia de tener un modelo no estándar, lo versatil que éste resulta, y además se destaca la importancia de las herramientas que permiten su construcción, ocupando un lugar distinguido la teoría de ultrafiltros, de ahí la importancia de los trabajos que en este campo se realizan como los presentados en el XXVI CONGRESO NACIONAL DE LA SMM.

APENDICE

Definición 1: Para un espacio topológico X, un punto $p \in {}^*X$ es llamado **casi estándar** si $p \approx q$ para algún $q \in X$.

Teorema 1: Sea $v \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, y sea $a \in {}^*l^2$ casi estándar. Entonces $Pva \approx a$.

Teorema 2: Un subespacio de H de dimensión finita es cerrado.

Teorema 3:

1) Si $\{E_n \backslash n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de subespacios lineales de H y $E_n \subseteq E_{n+1}$ para cada n, entonces $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ es también un subespacio de H.

2) Si E es un subespacio lineal de de H también lo es $\bar{E}$.

Teorema 4: Sea T_1, T_2 un operadores lineales acotados de N en N (N espacio lineal), y sea $\alpha \in D$ (D un campo). Entonces T_1+T_2, αT_1 y T_1T_2 son operadores lineales acotados y

$$\|T_1+T_2\| \leq \|T_1\|+\|T_2\|$$

$$\|\alpha T_1\| = |\alpha| \ \|T_1\|$$

$$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\| \ \|T_2\|$$

Teorema 5: El operador lineal T es compacto si y sólo si mapea puntos finitos de ${}^*\mathbb{N}$ en puntos casi estándar.

Teorema 6: Sea $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ tal que $A \in {}^*X$, $A \neq \Phi$. Entonces A tiene un elemento mínimo.

Teorema 7: Para cada $x \in H$, existe un único punto $y \in E$ tal que $\|x-y\| \leq \|x-z\|$ para toda $z \in E$.

NOTA: Las demostraciones de todos estos teoremas se encuentran en [1].

BIBLIOGRAFIA

1) APPLIED NOSTANDARD ANALYSIS.

Martin Davis.

Wiley-Intercience (1977).

2) A NEW APPROACH TO THE THEORY OF MONADS.

W.A.J. Luxemburg.

Technical Report. No.1 (1967)

California Institute of Technology.

3) LECTURES ON BOOLEAN ALGEBRAS.

Paul R. Halmos.

Springer-Verlag

New York (1970).

4) STUDIES IN MODEL THEORY.

MAA Studies in Mathematics vol. 8.

Cornell University (1973).

5) ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION FINITA

Paul R. Halmos

C.E.C.S.A.(1971).

6) INTRODUCCION A LOS ESPACIOS DE HILBERT

S. K. Berberian

Teide

Barcelona (1977).

7) ALGEBRA BOOLEANA Y SUS APLICACIONES

J. Eldon Whitesitt

C.E.C.S.A. (1983).

8) Tesis de Licenciatura: CALCULO INFINITESIMAL EN EL SIGLO XX.

Jorge Ruperto Vargas C.

UNISON (1987).