



En la ciudad de Hermosillo, Sonora, Mex., siendo las 17:00 horas del día 27 de enero de 1995 se reunieron en el aula 9K-205 del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, las señoras:

- HORACIO LEYVA CASTELLANOS
- RODRIGO GONZALEZ GONZALEZ
- RUBEN FLORES ESPINOZA

bajo la presidencia del primero y fungiendo como secretario el último para efectuar el examen profesional de la carrera de:

licenciado en Matemáticas

al Sr. Fernando Báez Rodríguez

Después de haber presentado su tesis intitulada: "Análisis y Diseño de Sistemas de Control de Estructura Variable" la que previamente le fue aprobada por Jurado, las señoras sinodales replicaron al sustentante y después de debatir entre sí reservada y libremente lo declararon:

APROBADO POR UNANIMIDAD

Acto continuo el presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la

le  
c  
'alce  
tiac  
e de  
1994

Acta No. 04  
 Caja No. 03  
 Libro No. 1  
 Expediente No. 8810226-8

*[Signature]*  
Firma del sustentante

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

**ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE  
CONTROL DE ESTRUCTURA VARIABLE**

**TESIS**



**BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO PROFESIONAL DE**

**LICENCIADO EN MATEMATICAS**

**PRESENTA**

**FERNANDO GALVEZ RODRIGUEZ**

**HERMOSILLO, SONORA.**

**ENERO DE 1995**

Este trabajo lo dedico  
con mucha carina para  
mis padres por el apoyo  
que siempre me brindaron,

Agradesco mucha la  
labor de mi asesor  
Horacio Leyva E. por  
haberme tenido tanta  
paciencia en las  
revisiones de éste  
trabajo.

Tambien para mi hermano y mis  
hermanas por la confianza  
que siempre senti de ellos.

Para una gran persona que  
siempre me apoyo en todo momento  
Mi novia Maylop y para ese gran  
amigo E. R. N. (Feyto).

Tambien para toda persona que se atreva a leer  
este trabajo.

Jairo

## INTRODUCCION

La teoría de control de estructura variable tiene como una de sus principales funciones lograr que los sistemas tengan un comportamiento deseado mediante el uso de controles adecuados. Esta teoría también nos permite intervenir en sistemas de funcionamiento no lineal. Así como estabilizar una gran cantidad de problemas que surgen en sistemas dinámicos de ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de sistemas electromecánicos.

El objetivo en el espacio de estado consiste en atraer las trayectorias a una región especificada, y mantener las trayectorias en esta región, la cual será una superficie, a la que llamaremos "superficie de cambio" por que si las trayectorias en el espacio de estado de la planta estan por encima de la superficie actua una ley de control, y otra ley de control si las trayectorias estan por debajo de la superficie. A la dinámica dentro de esta superficie le llamaremos "modo deslizante".

Seguidamente tendremos el proceso de diseño de control de estructura variable, diseñando una superficie deslizante restringida a la dinámica de la planta, de tal modo que el sistema tenga una respuesta deseada. Esto consiste en que las variables de estado de la planta se restringen a satisfacer un conjunto de ecuaciones, las cuales definen la superficie de cambio.

Además tenemos la construcción de la retroalimentación de

cambio, necesarias para manejar las trayectorias de la planta a la superficie deslizante. Esta construcción se realiza haciendo uso de la teoría general de estabilidad de Lyapunov.

Por ultimo tenemos los sistemas de estructura variable con incertidumbre; el principal punto consiste en presentar controles de retroalimentación que hagan que un sistema bajo perturbaciones persista en su comportamiento estable.



## OBJETIVO

EL presente trabajo tiene como objetivo general presentar un conjunto de métodos de análisis y diseño de la teoría de control de estructura variable, con el objetivo específico de intervenir en las trayectorias de dichos sistemas de control.

Para un mejor desarrollo y entendimiento en la presentación de este trabajo de tesis, citaremos un ejemplo de cada tema, con el fin de brindarles una mayor claridad en los métodos presentados.

# INDICE

CONTENIDO	PAGINAS
<b>INTRODUCCION</b>	
<b>I INTRODUCCION AL CONTROL DE ESTRUCTURA VARIABLE</b>	<b>1</b>
1.1 CONTROL ESCALAR DE ESTRUCTURA VARIABLE	1
1.2 DESCRIPCION DE LA TEORIA DE CONTROL DE ESTRUCTURA VARIABLE Y TERMINOLOGIA	5
1.3 METODO DE CONTROL EQUIVALENTE	11
1.4 METODO DE FILIPPOV	15
1.5 CONDICIONES DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LOS MODOS DESLIZANTES Y SUPERFICIE INVARIANTE	24
1.6 DINAMICAS DESLIZANTES IDEALES	33
1.7 PROPIEDADES DE INVARIANZA DE LOS MODOS DESLIZANTES ANTE PERTURBACIONES	34
<b>II DISEÑOS EN SISTEMAS MULTIVARIABLES DE ESTRUCTURA VARIABLE</b>	<b>37</b>
2.1 REDUCCION DE ORDEN	38
2.2 FORMA REGULAR Y DINAMICA DE ORDEN REDUCIDO	42
2.3 DISEÑO DE CONTROLES	47
2.4 METODO DE DIAGONALIZACION	50
2.5 METODO DE JERARQUIA EN EL CONTROL	60
<b>III SISTEMAS DE ESTRUCTURA VARIABLE CON INCERTIDUMBRE</b>	<b>68</b>
3.1 SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE	69
3.2 METODO MINI-MAX	74
<b>CONCLUSION</b>	<b>89</b>
<b>ANEXO</b>	<b>91</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>95</b>

# CAPITULO I

## INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONTROL DE ESTRUCTURA VARIABLE

### 1.1 CONTROL ESCALAR DE ESTRUCTURA VARIABLE

La teoría de control de estructura variable se puede describir con elementos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, la cual proporciona métodos eficientes para controlar el comportamiento de sistemas dinámicos y nos permite modelar una gran cantidad de problemas.

Como introducción al tema, empezaremos con un ejemplo en donde haremos uso de algunos conceptos de la teoría de control de estructura variable con control escalar; el ejemplo tiene la siguiente forma:

#### Ejemplo 1

Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(x)$$

con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  y donde  $u(x)$  es un control de la forma

$$u(x_1, x_2) = k(x_1)x_1, \quad \text{con } k: \mathbb{R} \rightarrow \{-3, 2\}.$$

Consideremos primero el caso  $k(x_1) = -3$ , entonces el control es  $u(x) = -3x_1$ , y el sistema toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-3x_1] \quad (1 a)$$

Ahora analizaremos el comportamiento que presenta el sistema con ayuda de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. La matriz que resulta de la parte derecha de (1a) es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

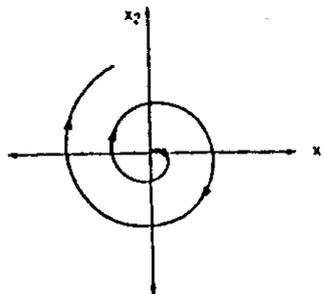
y el polinomio característico correspondiente es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0;$$

los valores propios son  $\lambda_1 = 1+i$ ,  $\lambda_2 = 1-i$

El sistema con estos valores de  $\lambda$  tiene un comportamiento inestable ya que la parte real de los valores propios es positiva. De aquí que las soluciones se alejan del estado de equilibrio  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  y su retrato fase nos queda de la siguiente manera:

Este retrato fase corresponde al control con valor  $u(t) = -3x_1(t)$  donde se observa que el comportamiento es inestable



Ahora analicemos el caso en que el control toma el valor  $u(x) = 2x_1$ . El sistema tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [2x_1]$$

Por lo tanto podemos verificar que el conjunto de valores propios del sistema son:

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$$

El vector propio asociado al primer valor de  $\lambda$  tiene por componentes los valores  $x_1, x_2$  que satisfacen:

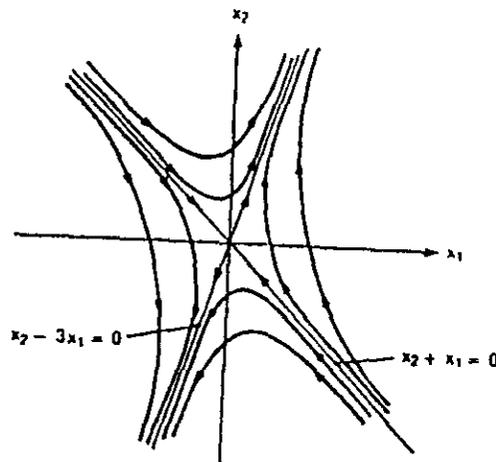
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{esto implica que } x_2 = 3x_1$$

y el segundo valor de  $\lambda$  nos genera el vector propio correspondiente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{esto implica que } x_2 = -x_1$$

de donde concluimos que el comportamiento del sistema (por los valores obtenidos para  $\lambda$ ) es inestable, con el retrato fase como sigue:

El retrato fase correspondiente al valor del control tiene un comportamiento inestable



Claramente podemos ver que los dos sistemas tienen un comportamiento inestable, sin embargo, es posible aplicar los controles en regiones adecuadas del retrato fase de tal manera que el comportamiento resultante tienda asintóticamente al origen.

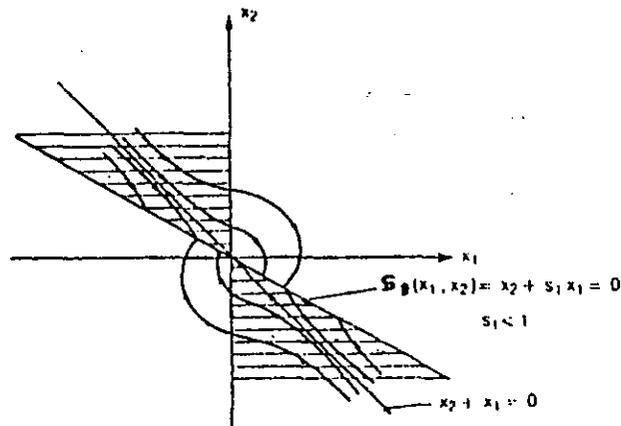
Consideremos las regiones en que divide al plano la curva de nivel asociada al cero por la función  $S(x)x_1$ , donde  $S(x)=S_1x_1+x_2$ , y  $S_1$  es un número mayor que cero y menor que uno. Ahora apliquemos el control al sistema 1 de la siguiente manera, definidos los controles anteriores, se puede estabilizar el sistema en el punto de equilibrio  $(x_1, x_2)=(0,0)$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(x)$$

$$u(x) = k(x_1)x_1 \quad \text{donde}$$

$$k(x_1) = \begin{cases} -3 & \text{si } S(x)x_1 > 0 \\ 2 & \text{si } S(x)x_1 < 0 \end{cases}$$

En este caso el retrato fase que obtenemos es de la siguiente forma:



## 1.2 DESCRIPCION DE LA TEORIA DE CONTROL DE ESTRUCTURA VARIABLE Y

### TERMINOLOGIA

Los sistemas de estructura variable consisten en un conjunto de ecuaciones diferenciales cuyo lado derecho incluye controles que toman distintos valores en su dominio de definición; estos controles pueden ser discontinuos. En general, las propiedades de estabilidad de dichos sistemas dependen de la forma en que actúan los controles al cambiar de región de definición.

En este trabajo, analizamos los principales aspectos y resultados concernientes a ese tipo de sistemas de control, los cuales pueden tener discontinuidades en la parte derecha con ley de control sustituible. Puede obtenerse de éstas propiedades de estabilidad en los sistemas de control. El análisis y el diseño de sistemas de control estables son la parte esencial en este trabajo.

Los sistemas de control de estructura variable con que trabajaremos tienen las siguientes características y forma:

$$\dot{x} = F(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i(x) = F(x) + G(x)u(x) \quad (1.1)$$

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x) & \text{si } S_i(x) > 0 \\ u_i^-(x) & \text{si } S_i(x) < 0 \end{cases} \quad u_i^+(x) \neq u_i^-(x) \quad (1.2)$$

con  $F$  y  $g_i$  para  $i = \overline{1, m}$ , son campos vectoriales suaves definidos en una vecindad abierta  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ . Además  $G$  tiene rango "m" con dimensión constante. Mas aún, cada componente de  $F$  y  $G$  la asumimos continua con derivada continua y acotada. La superficie  $S$  la definiremos como la intersección de  $m$  superficies suaves de

dimensión  $n-1$  y denotada por  $S_1$

$$S = \bigcap_{i=1}^m S_i = \bigcap_{i=1}^m \{x \in X \mid S_i(x) = 0\}$$

donde  $S(x) = \text{col}(S_1(x), S_2(x), \dots, S_m(x))$  con cada  $S_i$  siendo función suave,  $S_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ . El conjunto de funciones  $S_i$  para  $i = 1, \dots, m$  localmente tienen gradientes linealmente independientes, estos se denotarán por  $\frac{\partial S_i}{\partial x}$ , de manera que  $S$  es una superficie en el abierto  $X$  con dimensión " $n-m$ ". Es decir, consideramos a la función  $S$  de forma que la matriz  $\frac{\partial S}{\partial x}$  tiene rango constante (como transformación lineal) igual a " $m$ ".

En el sistema de control de estructura variable que arriba hemos descrito, al conjunto de nivel

$$S = \{x \in X \mid S(x) = 0\}$$

se le llama *superficie de cambio* y constituye una variedad de dimensión  $n-m$  ya que el rango de la función  $S$  es  $n-m$ . (teorema 10 del Anexo).

### Definición 1

Diremos que una superficie de cambio es asintóticamente estable, si para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , y las correspondientes vecindades  $V_\epsilon(x)$  y  $V_\delta(x)$ , tenemos que si  $x(0) \in V_\delta(x)$  entonces  $x(t) \in V_\epsilon(x)$  para todo  $t > 0$ .

Denotaremos a un sistema de control de estructura variable del tipo (1.1) y (1.2) con la terna  $(E, S, u)$ , que expresa los tres términos esenciales de un sistema de control de este tipo, como lo son; la ecuación diferencial, la función que define la superficie de cambio y el control de retroalimentación (en función de la

variable de estado "x").

Los sistemas de control del tipo (1.1) y (1.2) pueden ser no lineales en el vector de estado  $x(\circ)$ , pero lineales en el vector de control  $u(\circ)$ .

De aquí en adelante trabajaremos el sistema (1.1) con control (1.2) para el caso escalar. Las reglas de control de estructura variable consisten en una función de control que asigna uno de dos valores de la retroalimentación de acuerdo al signo de  $S(x)$ , es decir:

$$u(x) = \begin{cases} u^+ & \text{para } S(x) > 0 \\ u^- & \text{para } S(x) < 0 \end{cases}$$



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

sin pérdida de generalidad, asumimos que ellos satisfacen:

$$u^+ > u^- \text{ en } X \text{ (Localmente)}$$

Con el fin de darle un poco de claridad a los conceptos tratados, comenzaremos por dar la notación matemática más usual en este trabajo.

Cuando hablemos de un sistema de control de estructura variable diremos que son los sistemas de la forma (1.1) con control (1.2), es decir, de la terna  $(E, S, u)$  de donde supondremos que conocemos el primer y último término, en la cual nos resta por diseñar una función  $S: X \rightarrow \mathbb{R}$ , de manera que el conjunto  $S = \{x | S(x) = 0\}$  (sobre la vecindad  $X$ ), sea atractora.

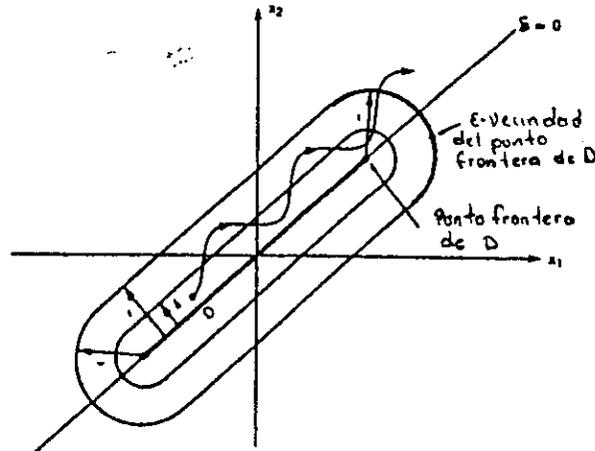
Desde un punto de vista práctico, podríamos considerar trayectorias que llegan a  $S$  en tiempo finito, en tal caso

consideraremos las condiciones que establece el teorema 7 para una justificación de tales condiciones referimos el trabajo [3].

Debido a la necesidad de dejar claro lo que es un modo deslizante intentaremos dar una definición.

### Definición 2

**Modo Deslizante (S)** Un subconjunto  $D$  en una variedad  $S = \{x \mid S(x) = 0\}$  es un dominio de modo deslizante, si para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para cualquier movimiento que cae dentro de la  $\delta$ -vecindad de  $D$  puede salir de la  $\epsilon$ -vecindad sólo a través de la  $\epsilon$ -vecindad de la frontera de  $D$ .



Grafica de un modo deslizante en dos dimensiones

El siguiente ejemplo permite la existencia de un modo deslizante, esto se garantiza haciendo uso del criterio de estabilidad de Lyapunov. Veamos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 2

Sea el sistema

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u(x)$$

donde  $x = [x_1, x_2]^t$ , el control está dado por

$$u(x) = k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\text{sen}x}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } S(x)x_1 > 0 \\ 2 & \text{si } S(x)x_1 < 0 \end{cases}$$

$$k_2(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } S(x)x_2 > 0 \\ 1 & \text{si } S(x)x_2 < 0 \end{cases}$$

Dado el control "u" ¿Cómo determinar los valores  $S_1$  y  $S_2$  que intervienen en la superficie de cambio  $S(x) = S_1x_1 + S_2x_2 = 0$  para lograr que sobre esta exista un modo deslizante?

Para dar respuesta a la pregunta anterior consideremos la siguiente función de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}S^2(x),$$

cuya derivada es

$$\dot{V} = S(x)\dot{S}(x), \quad \dot{S} = S_1\dot{x}_1 + S_2\dot{x}_2$$

por otro lado recordemos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen}x_1 + k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} S(x)\dot{S}(x) &= S(x)[S_1x_2 + S_2(-\text{sen}x_1 + k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2)] \\ &= S(x)[S_2(k_1(x)x_1 - \text{sen}x_1) + x_2(S_1 + S_2k_2(x))] \\ &= S(x)x_1[S_2(k_1(x) - \{\text{sen}x_1/x_1\})] + \\ &\quad S(x)x_2[S_1 + S_2k_2(x)] < 0 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores de el control en el producto anterior obtenemos:

Caso I

$S(x)x_1 > 0, S(x)x_2 > 0$  esto implica que  $S_1 < S_2$

Caso II

$S(x)x_1 < 0, S(x)x_2 < 0$  esto implica que  $S_1 > -S_2$

Caso III

$S(x)x_1 > 0, S(x)x_2 < 0$  esto implica que  $S_1 > -S_2$

Caso IV

$S(x)x_1 < 0, S(x)x_2 > 0$  esto implica que  $S_1 > S_2$

Descrito lo anterior llegamos a la conclusión de que los valores de  $S_1$  son de la forma  $|S_1| < |S_2|$  por lo que el sistema es estabilizado con esta lógica de cambio y por lo tanto existe un modo deslizando (teorema 7 del anexo) sobre  $S$ .

Claramente podemos notar que en estos ejemplos los sistemas no están definidos dentro de la superficie de cambio  $S(x) = 0$

### 1.3 METODO DE CONTROL EQUIVALENTE

En el método de *control equivalente* de la terna  $(E, S, u)$ , conocemos la ecuación, la superficie  $S$  y el control  $u^+(x)$  y  $u^-(x)$ , por definir  $u(x)$  en  $S$ .

El método del control equivalente permite determinar el control que hace que el movimiento de sistema restringido a la superficie de cambio  $S$  permanezca en ella. Es decir, hace de  $S$  un modo deslizante.

Supongamos que en un tiempo  $t_0$  las trayectorias del sistema llegan a la superficie de cambio por lo que el modo deslizante existe para  $t \geq t_0 \in I$  (intervalo de tiempo que dura una trayectoria en el modo deslizante). La existencia del modo deslizante implica:

1).-  $S(x(t)) = 0$  para todo  $t \in I$

2).-  $\dot{S}(x(t)) = 0$ ; por la regla de la cadena tenemos que

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \dot{x} = 0$$

sustituyendo  $\dot{x}$  tenemos

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \dot{x} = \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \left( F(x) + G(x)u^*(x) \right) = 0$$

donde  $u^*$  es en control que suponemos actúa sobre la superficie  $S(x)=0$  al cual le llamaremos *control equivalente* y se obtiene de la siguiente manera:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \left( F(x) + G(x)u^*(x) \right) = \left( \frac{\partial S}{\partial x} F(x) \right) + \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x)u^*(x) \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} G(x)u^*(x) = - \left( \frac{\partial S}{\partial x} F(x) \right)$$

$$u^*(x) = - \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \left( \frac{\partial S}{\partial x} F(x) \right)$$

Después, sustituyendo  $u^*$  en (1.1), tenemos que (1.1) describe el movimiento del sistema restringido a la superficie de cambio; para ello debemos tener que la condición inicial  $x(t_0)$  satisfaga  $S(x(t_0)) = 0$ .

El cálculo de  $u^*$ , que ahora denotaremos por  $u_{eq}$  y llamaremos "control equivalente", asume que el producto matricial  $\left(\frac{\partial S}{\partial x} G\right)$  es no singular para toda  $x$ . Esta hipótesis se conoce como condición de transversalidad de la cual hablaremos mas adelante. La ecuación del control equivalente es:

$$u_{eq}(x) = -\left(\frac{\partial S}{\partial x} G(x)\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial x} F(x)\right) \quad (1.3)$$

Además, dada la condición inicial  $x(t_0)$ , como se cumple que  $S(x(t_0)) = 0$ , la dinámica del sistema en la superficie de cambio para  $t \geq t_0$  está dada por:

$$\dot{x} = \left[ I - G(x) \left(\frac{\partial S}{\partial x} G(x)\right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] F(x) \quad (1.4)$$

en el caso especial de una superficie de cambio lineal  $S(x)=sx=0$

$\frac{\partial S}{\partial x} = s$  entonces (1.4) se reduce a:

$$\dot{x} = \left[ I - G(x) \left(sG(x)\right)^{-1} s \right] F(x) \quad (1.5)$$

Observe que (1.4), en conjunto con la restricción de que  $S(x)=0$ , determina el control para que el movimiento del sistema permanezca en la superficie de cambio. Tal movimiento en la superficie de cambio puede gobernarse por un conjunto de ecuaciones de orden reducido.

Las partes que no se describen en esta sección son las siguientes:

- 1.- Determinar el conjunto de ecuaciones dinámicas de orden reducido que representan el movimiento del sistema en la superficie de cambio.
- 2.- Seleccionar la superficie paramétrica  $S$  para una superficie de cambio lineal  $S(x) = s_1 x_1 + x_2 = 0$ , de tal manera que el sistema en el modo deslizante exhiba el funcionamiento deseado.

Estas resultan de gran utilidad y por lo tanto las describiremos en el capítulo II.

**Nota:** El control equivalente solo está definido dentro de la superficie de cambio  $S$ .

Para ilustrar el método del control equivalente lo haremos con los ejemplos anteriores. Consideremos el sistema desarrollado en el ejemplo 1.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

con control dado por (1.2)

$$S(x) = S_1 x_1 + x_2$$

usando la ecuación (1.3)

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right]^{-1} = [(S_1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]^{-1} = 1$$

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial x} F(x) \right] = (S_1, 1) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = S_1 x_2 + x_1 + 2x_2$$

$$u_{eq}(x) = -(S_1 x_2 + x_1 + 2x_2)$$

Apartir de este momento supondremos que la superficie de cambio es atractora (localmente) bajo el sistema de control.



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

La principal ventaja y características de los sistemas de control de estructura variable consiste en la robustez de la invarianza de  $S$  bajo perturbaciones de la parte derecha de (1.1). Por el contrario, un tipo especial de inestabilidad se presenta en las aplicaciones de los sistemas de control de estructura variable. La discontinuidad de la parte derecha de (1.1), y el problema de retardo que presentan los sistemas de retroalimentación (la respuesta  $x(t)$  de la planta a la acción del control  $u$  no es instantánea), provoca un tipo de inestabilidad conocido por el efecto "castaño" (o "chattering"). En el espacio de estado, esta inestabilidad consiste en una oscilación de las trayectorias  $x(t)$  sobre  $S$ . En el trabajo no estudiaremos éste fenómeno que se presenta solo en las aplicaciones.

Por otro lado los sistemas que tratamos aquí son de forma discontinua por la parte derecha, de donde se puede asegurar que no cumplen con la condición de "Lipschitz" en una vecindad del modo deslizante, esto es, la solución de dichos sistemas no es única.

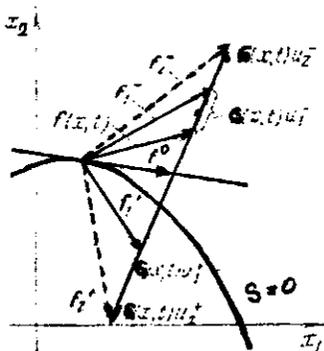
Una propiedad más de los sistemas de control de estructura variable es la convergencia en tiempo finito. Es decir, considerando que la superficie  $S$  es atractora bajo el sistema de control,  $x_0 \notin S$  y  $x(t)$  la solución correspondiente, entonces existe un tiempo mínimo  $T < \infty$  de manera que  $x(T) \in S$ ; en este caso decimos que  $x(t)$  llega a la superficie  $S$  en tiempo finito. Tales sistemas discontinuos de tiempo finito no tienen unicidad de soluciones en una vecindad de  $S$ . Para ver más sobre sistemas de tiempo finito hacemos referencia a los trabajos [13] y [14].

## 1.4 METODO DE FILIPPOV

Según la terna  $(E, S, u)$ , consideraremos conocida la Ec. para obtener condiciones para  $S$  y  $u$  con el objetivo de tener la existencia del control equivalente. Esto se hará desde un punto de vista más geométrico y para el caso escalar.

El método de Filippov es otra técnica utilizada para describir el comportamiento de los sistemas que tienen discontinuidad en la parte derecha. En dicho método se establece el siguiente resultado: determinar el vector velocidad sobre el modo deslizante; en cada punto del modo deslizante el vector velocidad puede ser representado en términos de los campos  $F(x)+G(x)u^+$  y  $F(x)+G(x)u^-$ .

Por definición, el movimiento deslizante ocurre sobre la superficie de discontinuidad, en donde el vector velocidad está en el plano tangente de la superficie deslizante y además el extremo de este vector tangente está en la intersección del punto que une al vector velocidad con los extremos de los vectores  $F(x)+G(x)u^+$ ,  $F(x)+G(x)u^-$ , como lo muestra la siguiente figura.



Así la ecuación de movimiento deslizante de acuerdo a Filippov para el sistema (1.1) es:

$$\dot{x} = F^{\circ} = \alpha \left( F(x)+G(x)u^+ \right) + (1-\alpha) \left( F(x)+G(x)u^- \right) \quad (1.6)$$

Por determinar  $\alpha$  de manera que la parte derecha representa la velocidad de la trayectoria tangente al modo deslizante. Donde  $F^\circ$  es la resultante del vector velocidad de la trayectoria de estado en el modo deslizante, con  $0 \leq \alpha \leq 1$ . De manera que  $\alpha$  es un parámetro que depende de la dimensión y la magnitud de los vectores columna  $F(x)+G(x)u^+$ ,  $F(x)+G(x)u^-$  y del vector renglón gradiente de  $S$ . Considerando la notación  $\text{grad } S = \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right]$ , calculemos  $\alpha$  a partir de la igualdad

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] F^\circ = \dot{0}$$

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] \left( \alpha [f(x)+G(x)u^+] + (1-\alpha)[f(x)+G(x)u^-] \right) = 0$$

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] \alpha [f(x)+G(x)u^+] + \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] (1-\alpha)[f(x)+G(x)u^-] = 0$$

$$\alpha \left( \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] [f(x)+G(x)u^+] - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] [f(x)+G(x)u^-] \right) + \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] [f(x)+G(x)u^-] = 0$$

$$\alpha = \frac{\left\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [f(x)+G(x)u^-] \right\rangle}{\left\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], G(x)[u^- - u^+] \right\rangle} \quad (1.7)$$

con este valor de  $\alpha$  puede definirse el sistema de control original sobre  $S(x)=0$ .

Con la siguiente propiedad

1.  $\left\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [f(x)+G(x)u^+] - [f(x)+G(x)u^-] \right\rangle > 0$
2.  $\left\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [f(x)+G(x)u^+] \right\rangle \leq 0 \quad \left\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [f(x)+G(x)u^-] \right\rangle \geq 0$

La notación  $\langle a, b \rangle$  denota el producto interior y  $\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right]$  es el gradiente de  $S(x)$ . Además la solución de (1.1) con control (1.2) existe y esta bien definido sobre  $S$ . De esta manera concluimos diciendo que esta técnica también puede ser usada para determinar

el funcionamiento de la planta en un modo deslizante.

A manera de ilustración daremos solución al ejemplo 1, resuelto por el método de Utkin (o método de control equivalente).

### Ejemplo 1

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u(x)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con control  $u(x_1, x_2) = k(x_1)x_1$ , donde

$$k(x_1) = \begin{cases} -3 & \text{si } S(x)x_1 > 0 \\ 2 & \text{si } S(x)x_1 < 0 \end{cases}$$

calculando  $F^\circ$  en la ecuación de deslizamiento propuesta por Filippov

$$F^\circ = \alpha \left( F(x) + G(x)u^+ \right) + (1-\alpha) \left( F(x) + G(x)u^- \right)$$

desarrollamos la operaciones indicadas y encontramos los vectores  $F(x) + G(x)u^+$  y  $F(x) + G(x)u^-$

$$F(x) + G(x)u^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-3x_1) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$F(x) + G(x)u^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (2x_1) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

con la superficie de deslizamiento

$$S(x) = S_1 x_1 + x_2$$

entonces el gradiente es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} \end{bmatrix} = \langle S_1, 1 \rangle$$

$$F(x)+G(x)u^+ - F(x)-G(x)u^- = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1+2x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_1+2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5x_1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], F(x)+G(x)u^- \right\rangle = \langle S_1, 1 \rangle \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_1+2x_2 \end{pmatrix} = S_1 x_2 + 3x_1 + 2x_2$$

una vez obtenidas todas las operaciones necesarias y sustituyendo en el valor de  $\alpha$  obtenido antes en (1.6)

$$\alpha = \frac{S_1 x_2 + 3x_1 + 2x_2}{5x_1}$$

Sustituyendo el valor general de  $\alpha$  (1.7) en la ecuación de modo deslizante dada por Filippov (1.6)

$$F^\circ = \frac{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [F(x)+G(x)u^-] \rangle}{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], G(x)[u^- - u^+] \rangle} F(x)+G(x)u^+ + \frac{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [F(x)+G(x)u^+] \rangle}{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], G(x)[u^- - u^+] \rangle} F(x)+G(x)u^- \quad (1.8)$$

la cual describe el movimiento en el modo deslizante, con la hipótesis adicional de que la condición inicial para la ecuación anterior sea seleccionada en la superficie de discontinuidad. La ecuación anterior propuesta por Filippov es considerada como la ecuación de un modo deslizante. En donde el control  $u$  es escalar.

### Ejemplo 1

Del ejemplo anterior, sustituyamos el valor de  $\alpha$  en la ecuación de deslizamiento dada por Filippov para obtener que  $F^\circ$  es igual a

$$\frac{S_1 x_2 + 3x_1 + 2x_2}{5x_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1+2x_2 \end{pmatrix} + \frac{S_1 x_2 - 2x_2 + 2x_1}{5x_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_1+2x_1 \end{pmatrix}$$

después de efectuados los calculos llegamos al vector

$$F^{\circ} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -S_1 x_2 \end{pmatrix}$$

que intervienen en la parte derecha de la ecuación de deslizamiento según Filippov

### COMPARACION DEL CONTROL EQUIVALENTE CON EL METODO DE FILIPPOV

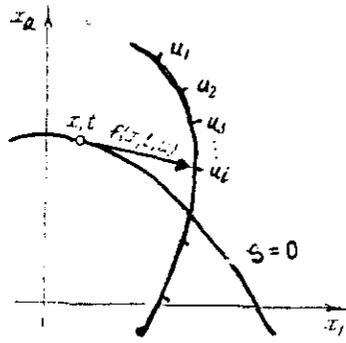
Consideremos el caso que se caracteriza por la forma escalar del control  $u$ , las entradas del lado derecho de la ecuación en un sentido no lineal (1.1). El control sufre discontinuidades sobre una superficie del tipo (1.2).

Aplicando a esta ecuación el método del control equivalente es posible obtener una cierta ecuación diferencial actuando a lo largo de la superficie de discontinuidad, la cual es llamada "ecuación de deslizamiento ideal". Mostraremos que esta ecuación coincide con la ecuación obtenida aplicando el procedimiento de Filippov.

De lo anterior podemos establecer consideraciones geométricas. De acuerdo al método de control equivalente la cantidad  $u_{eq}$  necesita satisfacer la condición.

$$\dot{S} = \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] F(x, u_{eq}) = 0$$

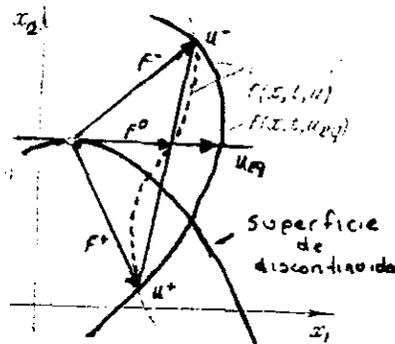
para algún vector fijo  $x$  contenido en la superficie de discontinuidad, considerando  $u$  como parámetro escalar mostrado gráficamente en la figura



Geoméricamente, en virtud del método de Filippov, para construir el vector velocidad es necesario encontrar el punto de intersección de este plano tangente con la línea recta juntando los extremos de los vectores  $F(x)+G(x)u^+$  y  $F(x)+G(x)u^-$ .

Como la gráfica formada por estos extremos es una curva, en el espacio de estados del vector  $F^\circ$  definido por Filippov y  $Fu_{eq}$  del método de control equivalente, en general no solo no son iguales, si no que tampoco son colineales ( $F^\circ \neq Fu_{eq}$ ) ellos coinciden a priori solo cuando la gráfica que forman los extremos es una línea recta; tal situación ocurre solo para cuando el control "u" interviene de forma lineal en el sistema.

De manera que si excluimos el caso donde la curva que une los extremos de los vectores  $F(x)+G(x)u^+$ ,  $F(x)+G(x)u^-$  no es una línea recta; como se ilustra en la figura.



entonces, el método de control equivalente y el método de Filippov, producen resultados idénticos.

A continuación probaremos la equivalencia del método de Filippov y el método de Control Equivalente para el caso no lineal con respecto a la variable de estado pero lineal en el control. Partiendo de la ecuación (1.8):

$$\frac{\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [F(x)+G(x)\bar{u}] \rangle}{F(x)+G(x)u^+} < \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [F(x)+G(x)u^+] \rangle > \\ \langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], G(x)[u^- - u^+] \rangle < \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], G(x)[u^- - u^+] \rangle$$

desarrollando el numerador obtenemos

$$F^\circ = \frac{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] F[G(x)(u^+ - u^-)] + \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x)[F(x)(u^- - u^+)]}{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x)[u^- - u^+]}$$

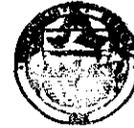
$$F^\circ = F(x) - G(x) \frac{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] F(x)}{\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x)}$$

Esta es la ecuación de modo deslizante usando Filippov.

Seguidamente haremos lo mismo para el método de control equivalente, para comparar las ecuaciones resultantes

$$\dot{x} = F(x) - G(x) \left( \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} F(x)$$

Por lo tanto las ecuaciones resultantes son las mismas y concluimos que en el caso de control lineal el método de Filippov y el de control equivalente producen resultados idénticos.



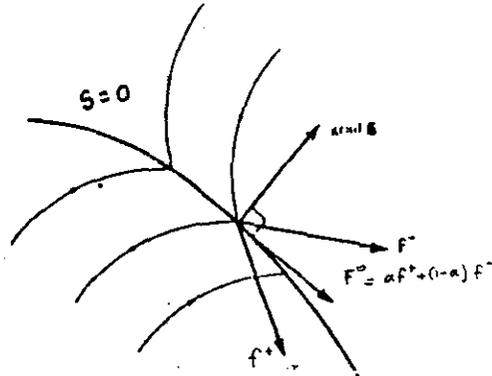
BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

## DESCRIPCION GEOMETRICA DEL METODO DE FILIPPOV

Descripción geométrica de  $F^\circ$

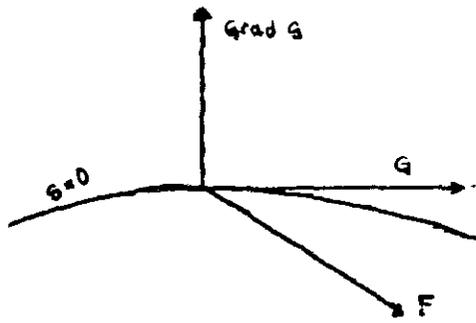
$$\frac{\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [F(x)+G(x)u^-] \rangle}{\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], G(x)[u^- - u^+] \rangle} F(x)+G(x)u^+ + \frac{\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], [F(x)+G(x)u^+] \rangle}{\langle \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right], G(x)[u^- - u^+] \rangle} F(x)+G(x)u^-$$



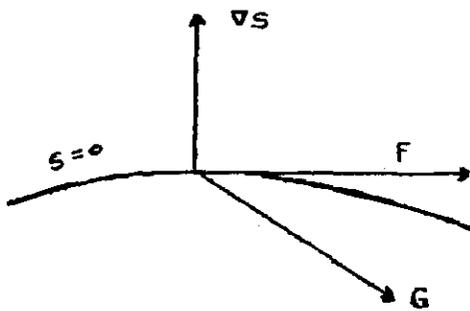
Así podemos describir geoméricamente el comportamiento de las trayectorias en el modo deslizante, donde se puede ver que el vector  $F^\circ$  es un "promedio" de las velocidades en cada punto del modo deslizante.

¿Que sucede con el sistema cuando el vector  $G(x)$  es tangente a el modo deslizante?

Primero que nada sabemos que el vector gradiente no debe de ser perpendicular al vector  $G(x)$  ya que esto produce una indefinición, por lo que las trayectorias tienden a alejarse del modo deslizante apuntando los vectores  $F(x)+G(x)u^+$  y  $F(x)+G(x)u^-$  hacia la misma parte, produciendo que el vector resultante, o sea  $F^\circ$  apunte en una dirección diferente al modo deslizante.



Ahora ilustremos el caso en que el vector  $F(x)$  es tangente al modo deslizante.



La gráfica muestra claramente que la ecuación de modo deslizante viene dada por el vector  $F$  ya que el producto  $\frac{\partial S}{\partial x} F=0$  de aquí se ve que la ecuación de deslizamiento viene dada simplemente por  $F(x)$ .

## 1.5 CONDICIONES DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LOS MODOS DESLIZANTES Y SUPERFICIE INVARIANTE

El objetivo principal de este tema es dar a conocer algunos teoremas relacionados con la existencia y unicidad de los modos deslizantes y control equivalente.

Las leyes del control de estructura variable se obtienen dejando que el control  $u(x)$  tome uno de los dos valores de la retroalimentación de acuerdo al signo de  $S(x)$  dado por (1.2). Sea  $L_h S$  la derivada direccional de la función escalar  $S$  con respecto a la variable  $x$  en la dirección  $h$ .

Supóngase que como un resultado de la política de control dada por (1.2) las trayectorias de estado de la ecuación (1.1) alcanzan la superficie deslizante  $S$  y, como el movimiento es restringido a una vecindad de  $S$ , es decir, que un modo deslizante existe en  $S$  siempre que (Utkin 1972) se cumpla:

$$\lim_{S \rightarrow +0} L_{F+Gu^+} S < 0, \quad \lim_{S \rightarrow -0} L_{F+Gu^-} S > 0$$

una relación equivalente de la anterior es

$$\lim_{S \rightarrow +0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle < 0 \quad \lim_{S \rightarrow -0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle > 0$$

### CONDICION DE SUPERFICIE INVARIANTE

El movimiento deslizante ideal se describe usando la siguiente condición de superficie invariante:

$$S = 0, \quad L_{F+Gu_{eq}} S = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu_{eq} \right\rangle = 0$$

donde  $u_{eq}$  es un control de retroalimentación suave para el cual  $S$  es

localmente invariante de (1.1). Otra manera en la que se representa el control equivalente  $u_{eq}$  es:

$$u_{eq}(x) = - \frac{L_F S}{L_G S} = - \frac{\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \rangle}{\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \rangle} = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial S}{\partial x} F(x) \right] \quad (1.9)$$

Esta definición de movimiento deslizante ideal fue dada por Utkin y es conocida como el método de control equivalente

Sea  $\Delta_S(x)$  el mapeo asignando a cada punto de  $x$ , un subespacio de el espacio tangente de  $X$ .

$$\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \Delta_S(x) \rangle = 0$$

esto es  $\Delta_S(x) := \text{Ker } \frac{\partial S}{\partial x}(x)$ , es llamada la distribución deslizante asociada con  $S$ . La condición:

$$S=0, \quad L_{F+Gu_{eq}} S = \langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu_{eq} \rangle = 0$$

es rescrita como:

$$F(x) + Gu_{eq}(x) \Big|_{S=0} \in \text{Ker } \frac{\partial S}{\partial x}(x) = \Delta_S(x)$$

## CONDICIONES DE EXISTENCIA

Decimos que el control equivalente esta bien definido cuando existe y es unívocamente determinado de la condición de invarianza.

### Lema 1

Una condición necesaria y suficiente para que el control equivalente este bien definido es que la condición de transversalidad

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G(x) \right\rangle \neq 0$$

se satisfaga localmente sobre S

**Demostración:** (  $\Rightarrow$  ) Supongamos que el control equivalente está bien definido

$$u_{eq} = - \frac{L_F S}{L_G S} = - \frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle} = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial S}{\partial x} F(x) \right]$$

entonces necesariamente  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle \neq 0$  en S, ya que de lo contrario  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle$  tendría que ser cero, pues de las condiciones de invarianza tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u_{eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = 0$$

sin embargo  $u_{eq}$  no estaría bien definido ya que

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + G u_{eq} \right\rangle = 0$$

sería trivialmente satisfecho por cualquier función  $u(\cdot)$ .

(  $\Leftarrow$  ) Sea  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle \neq 0$  entonces es evidente que  $u_{eq}$  existe, y

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u_{eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = 0$$

ahora para probar unicidad supongamos que las condiciones de invarianza se satisfacen por dos controles diferentes  $u_{1eq}$  y  $u_{2eq}$ , mientras que la condición de transversalidad se mantiene, entonces

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u_{eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u_{1eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u_{2eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u_{1eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle - \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u_{2eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = 0$$

$$(u_{1eq} - u_{2eq}) \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = 0$$

pero  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle \neq 0$  de aquí se concluye que

$$u_{1eq} = u_{2eq}$$

por lo tanto el control esta bien definido.  $\square$

Geoméricamente, el lema 1 establece que el vector  $G$  no contiene la distribución deslizante. En otras palabras  $G$  no puede ser tangencial a la superficie deslizante  $S$  y, como  $G$  no es ortogonal al  $\ker ds$ , la condición de transversalidad representa solo una condición necesaria para la existencia de un modo deslizante, como lo demuestra el siguiente lema.

## Lema 2

Si una modo deslizante existe en  $S$  entonces sucede que

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle < 0 \quad \text{en } S$$

**Demostración:** De la definición de modo deslizante dada por

$$\lim_{S \rightarrow +0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^+ \right\rangle < 0 \quad (1.10)$$

$$\lim_{S \rightarrow -0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^- \right\rangle > 0 \quad (1.11)$$

sobre  $S$ , localmente se tiene que

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^+ \right\rangle < 0$$

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^- \right\rangle > 0$$

multiplicando la segunda cantidad por  $-1$  y sumándolas, aparte suponiendo que  $u^+ > u^-$ , tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, (u^+ - u^-)G \right\rangle = (u^+ - u^-) \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle < 0$$

y como  $u^+ > u^-$ , esto implica que  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle < 0$   $\square$

### Observación 1

Notese que el signo de la condición de transversalidad es totalmente arbitraria y depende principalmente de la orientación de  $S$ . En lugar de esto, si en  $S = \{x \in X \mid S(x) = 0\}$  uno define  $S$  usando  $S_1(x) = -S(x)$ , la lógica de cambio (1.2) se cambia y la condición de transversalidad adopta la forma  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G(x) \right\rangle > 0$ .

El siguiente lema es una consecuencia directa de el lema 1 y lema 2.

### Lema 3

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un modo deslizante local sobre  $S$ , es que el control equivalente esté bien definido sobre  $S$ .

### Teorema 1

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un modo deslizante sobre  $S$ , es que (localmente) para  $x \in S$  se tenga que

$$u^- < u_{eq} < u^+ \quad (1.12)$$

**Demostración:**( $\Rightarrow$ ) Si existe un modo deslizante sobre  $S$  entonces de

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^+ \right\rangle &< 0 \\ \lim_{S \rightarrow -0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^- \right\rangle &> 0 \end{aligned}$$

se sigue que (localmente) sobre  $S$

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u^+ \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle < 0$$

desarrollando esta expresión se reduce a

$$u^+ < - \frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle}$$

en virtud de  $u_{eq} = - \frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle}$  y de la condición de transversalidad

$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle < 0$  necesariamente se mantiene

$$\frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle} + u^+ = -u_{eq} + u^+ > 0.$$

El argumento para probar  $u^+ < u_{eq}$

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle + u^- \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle > 0$$

$$u^- < - \frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle}$$

y de la condición de transversalidad  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle < 0$  necesariamente

se mantiene

$$\frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle} + u^- = -u_{eq} + u^- < 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Sea  $u_{eq}$  una función de retroalimentación suave que satisfice

$$u^- < u_{eq} < u^+ \text{ y } u_{eq} = - \frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle}$$

esto implica que  $0 < u_{eq} - \bar{u} < u^+ - u^-$  y de aquí

$$0 < w_{eq} := \frac{(u_{eq} - u^-)}{(u^+ - u^-)} < 1$$

de esto es fácil ver que  $0 < 1 - w_{eq} < 1$  y entonces

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+u_{eq} \right\rangle \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, G \right\rangle = w_{eq} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle + (1 - w_{eq}) \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle = 0$$

necesariamente se tiene que las cantidades:

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle \text{ y } \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle \text{ son opuestas en signo respecto a } \dot{S}.$$

Por la arbitrariedad de estas cantidades podemos suponer que

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle > 0$$

implica que  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle < 0$ . De manera que bajo el

control

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

actuando sobre  $\dot{x} = F(x) + G(x)u(x)$ , se tiene que

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle \Big|_{S(x)=0} = \lim_{S \rightarrow +0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle = \lim_{S \rightarrow +0} L_{F+Gu^+} S < 0$$

similarmente

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle \Big|_{S(x)=0} = \lim_{S \rightarrow -0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle = \lim_{S \rightarrow -0} L_{F+Gu^-} S > 0,$$

es decir, existe un modo deslizante sobre  $S$ . □

Una función de control suave  $u$  puede existir fuera de la frontera de el extremo de el control (1.2) por lo cual  $S$  es una variedad invariante. Esto no implica que el movimiento deslizante pueda ser creado en  $S$  con la disponibilidad de la función de

retroalimentación (1.2). La existencia del control equivalente es solo una condición necesaria para la existencia de un modo deslizante pero claramente esto no es suficiente.

### Observación 2

Si la hipótesis de que  $u^+ < u^-$  es dada en la definición de la estrategia de cambio (1.2), entonces la condición de existencia del teorema 1 puede adoptar la desigualdad inversa. Por esta razón en general la condición de existencia es expresada como (Utkin 1981):

$$\min\{u^+, u^-\} < u_{eq} < \max\{u^+, u^-\}$$

El siguiente corolario afirma que si existe un modo deslizante en  $S$ , entonces siempre es posible diseñar un control de retroalimentación y una lógica de cambio dada por (1.2) (este es un resultado local).

### Corolario 1

Supongamos que existe un modo deslizante sobre  $S$ , entonces una lógica de cambio para  $u$  es dado por

$$u = k|u_{eq}| \text{sign}(S(x))$$

con  $k > 1$

**Demostración:** La demostración es inmediata de (1.12) considerando

$$u^+ = k|u_{eq}| \quad u^- = -k|u_{eq}|. \quad \square$$

Una forma equivalente de la condición de necesidad y suficiencia para la existencia local de un modo deslizante (Itkis 1976) puede ser expresado en términos de una función de Lyapunov condicionada para la variedad deslizante  $S$ , siendo estable, definida por medio de una función cuadrática degenerada de Lyapunov



envolviendo directamente la superficie  $S(x)$ .

### Teorema 2

Existe un modo localmente deslizante en  $S$ , sí y solo sí en una vecindad abierta  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , la cual tiene intersección no vacía con  $S$ , todo punto de  $S$ , satisfacen la siguiente desigualdad:

$$2S \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu \right\rangle = \langle dS^2, F+Gu \rangle = L_{F+Gu} S^2 < 0 \quad (1.13)$$

para "x" que no esten en  $S$  y u de acuerdo a (1.2)

**Demostración:** (  $\Leftarrow$  ) Si (1.13) se cumple para cada punto de  $X$  entonces  $S(x)$  y  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu \right\rangle$  tienen signo opuesto con u de acuerdo a (1.2)

i.e. si  $S(x) > 0$  entonces  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^+ \right\rangle < 0$ , esto es

$$\lim_{S \rightarrow +0} L_{F+Gu^+} S < 0 \quad (1.14)$$

si  $S(x) < 0$  tenemos  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu^- \right\rangle > 0$  y de aquí que

$$\lim_{S \rightarrow -0} L_{F+Gu^-} S > 0 \quad (1.15)$$

(  $\Rightarrow$  ) Si un modo deslizante existe en  $S$ , entonces necesariamente se tiene que,  $S(x)$  y  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F+Gu \right\rangle$ , tienen signo opuesto siempre que u se tome de acuerdo a (1.2).  $\square$

La condición (1.13) constituye una versión más popular de (1.10), (1.11), (1.14) y (1.15), la cual fue originalmente dada por Itkis (1976 p.18) en una forma un poco diferente. Tal condición equivalente a (1.13) es:

$$\lim_{|S| \rightarrow 0} L_{F+Gu} S^2 < 0 \quad (1.16)$$

## 1.6 MODOS DESLIZANTES IDEALES

De la expresión de control equivalente establecida en (1.9), se sigue que el movimiento en  $S$  debido al control equivalente están gobernados por:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u_{eq}(x) = \left[ I - G(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] F(x)$$

La ecuación (1.4) representa la versión idealizada del movimiento ocurrido sobre la superficie deslizante  $S$  y ellas describen un porcentaje del funcionamiento de las trayectorias controladas de (1.1) y (1.2) en la superficie deslizante  $S$ . Notece que la condición de superficie invariante

$$F(x) + G(x)u_{eq}(x) \Big|_{S(x)=0} \in \ker ds = \Delta s$$

implica que

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u_{eq}(x) = \left[ I - G(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] F(x) \in \ker ds = \Delta s$$

para algún campo vectorial en el generado de  $G(x)$ ; esto es, algún vector de la forma  $G(x)u(x)$  para  $u(x)$  una función de control suave, donde se sigue que

$$\left[ I - G(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x)u(x) = \left[ G(x) - G(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right] u(x) = 0$$

por tal motivo denotaremos como  $F$  al vector operador proyección

$$F := \left[ I - G(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] \quad (1.17)$$

$F$  satisface que  $F^2 = F$ .

## 1.7 PROPIEDADES DE INVARIANZA DE LOS MODOS DESLIZANTES ANTE PERTURBACIONES

Ahora consideremos una alteración del primer elemento de la terna  $(E_c, S, u)$ , en donde tenemos por objetivo determinar controles de manera que las perturbaciones no alteren el comportamiento estable.

Cosidere el siguiente sistema perturbado:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u(x) + \xi \quad (1.18)$$

donde tomamos a  $\xi = \delta F(x)$ , de manera que  $\xi$  represente una "perturbación paramétrica", si  $\xi$  es de la forma  $\xi = h(t)$  entonces, es llamada "perturbación externa". Nosotros supondremos que  $\xi$  es una función de "x". Es decir,  $\xi = \xi(x)$ .

### Definición 3

Diremos que el modo deslizante exhibe la propiedad de "invarianza fuerte" con respecto a la señal de perturbación  $\xi$ , si sucede que el modo deslizante ideal es independiente de la señal de perturbación  $\xi$ .

### Definición 4

**Condición de Encuentro:** Diremos que un modo deslizante tiene la "propiedad de encuentro" si sucede que  $\xi$  pertenece al subespacio generado por  $G(x)$ .

### Teorema 3

Un modo deslizante sobre  $S$  del sistema perturbado (1.18) satisface la condición de invarianza fuerte con respecto a  $\xi$ , sí y sólo sí el vector perturbación  $\xi$  satisface la condición de encuentro.

**Demostración:** (  $\Leftarrow$  ) Para el sistema dinámico (1.18) la condición de deslizamiento ideal está dada por  $\dot{x} = F(f+\xi)$ , si  $\xi$  pertenece al generado por  $G(x)$ , esto implica que  $\xi = G(x)v(x)$  para alguna función escalar suave  $v$ , en este caso  $F$  aniquila la influencia de  $\xi$  sobre la dinámica equivalente.

(  $\Rightarrow$  ) si  $F\xi = 0$  entonces se tiene que

$$\left[ I - G(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] \xi = 0,$$

entonces, necesariamente se tiene que

$$\xi = G(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \xi = G(x)\mu(x)$$

de donde se concluye que  $\xi = G(x)\mu(x)$  para alguna función  $\mu(x)$  por lo que  $\xi$  está en el generado de  $G(x)$ .  $\square$

#### Definición 5

Un modo deslizante se dice que posee la propiedad de invarianza débil con respecto a una perturbación  $\xi$ , siempre que  $\xi$  no satisfaga la condición de encuentro.

La justificación para esta última definición, radica en el hecho de que si  $\xi$  no pertenece al generado de  $G(x)$ , entonces  $\xi$  puede ser descompuesto en dos partes como suma de vectores

$$\xi = G(x)v(x) + \eta(x)$$

donde  $\eta(x)$  no pertenece al generado por  $G(x)$ .

#### Teorema 4

Sea  $\xi$  en el generado de  $G(x)$  y  $u_{eq}^*$  el control equivalente correspondiente al modo deslizante sobre  $S$  del sistema no perturbado  $\dot{x} = F(x) + G(x)u(x)$ . Sea  $u^+(x)$  y  $u^-(x)$  funciones de control de retroalimentación de manera que  $u^+(x) > u^-(x)$  en un

abierto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si existe un modo deslizante para sistemas perturbados  $\dot{x} = F(x) + G(x)u(x) + \xi$ , entonces el vector perturbación  $\xi = G(x)v(x)$  es tal que  $v(x)$  es acotado por

$$u_{eq}^* - u^- > v > u_{eq}^* - u^+$$

**Demostración:** Si existe un modo deslizante para el sistema perturbado

$$\lim_{S \rightarrow +0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^+ + \xi \right\rangle = \lim_{S \rightarrow +0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + (u^+ + v)G \right\rangle < 0$$

$$\lim_{S \rightarrow -0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + Gu^- + \xi \right\rangle = \lim_{S \rightarrow -0} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, F + (u^- + v)G \right\rangle > 0$$

Lo cual implica que el movimiento deslizante ideal existe para el sistema no perturbado (1.1), con una ley de control de estructura variable de la forma:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) + v(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x) + v(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

entonces, del teorema 1 se sigue que:

$$u^-(x) + v(x) < u_{eq}^* < u^+(x) + v(x)$$

restando  $v(x)$  y  $u_{eq}^* \Rightarrow$

$$u_{eq}^* + u^-(x) < -v(x) < -u_{eq}^* + u^+(x)$$

multiplicando por  $-1 \Rightarrow$

$$u_{eq}^* - u^-(x) > v(x) > u_{eq}^* - u^+(x) \quad \square$$

De lo anterior se concluye que la teoría de control de estructura variable para el caso escalar, es de gran utilidad en el desarrollo de los temas posteriores. Es decir, estos servirán de apoyo para el trabajo desarrollado en el capítulo II.

## CAPITULO II

### DISEÑOS EN SISTEMAS MULTIVARIABLES

#### DE ESTRUCTURA VARIABLE

El presente capítulo se desarrollará en un contexto más general. Considerando el caso multivariable en el cual, al igual que en el caso de entrada simple, el sistema es no lineal en la variable de estado pero con control lineal. Además, para la realización de este tema, supondremos que tenemos existencia y alcanzabilidad de un modo deslizante o superficie de deslizamiento.

El punto central de este trabajo consiste en describir algunas técnicas, que nos permitan diseñar las superficies de deslizamiento, así como también controles de retroalimentación para dichos sistemas. Estos diseños nos sirven para dirigir el comportamiento de las trayectorias de un sistema en una región determinada y una vez conocida la superficie de deslizamiento, podemos intervenir en las trayectorias del sistema con el fin de dirigir las a esta región.

## 2.1 REDUCCION DE ORDEN

Según la terna  $(E, S, u)$ , donde  $x$  es una variable de estado con "n" componentes, aquí el objetivo consiste en expresar la dinámica sobre  $S(x)=0$ , una dinámica con un nuevo estado de dimensión  $n-m$ .

Dentro de la teoría de control multivariable tenemos el tema de Reducción de Orden. Este diseño se desarrolla haciendo uso del método de control equivalente. Esta reducción de orden viene dada por el conjunto de variables de estado que se restringen a la superficie  $S(x)=0$ . De donde tenemos que tal movimiento puede ser gobernado por un sistema de ecuaciones de orden reducido. Para clarificar esto, nos concentraremos en la superficie de cambio dada por la ecuación lineal  $S(x) = Sx = 0$ . Como se mencionó anteriormente, en un modo deslizante, el sistema equivalente podría satisfacer no sólo el estado dinámico  $n$ -dimensional (1.4), sino también el de "m" ecuaciones algebraicas dadas por la igualdad,  $S(x) = 0$ . El uso de ambos reduce el sistema dinámico de un modelo de orden  $n$  a un modelo de orden  $(n-m)$ .

Específicamente, se supone que el sistema lineal (1.1) es restringido a la superficie de cambio  $S(x) = Sx = 0$ , con el sistema dinámico dado por (1.5). Si el rango  $[S] = m$ , es posible resolver para  $m$  variables de estado. (la condición de que el rango  $[S] = m$  es una hipótesis). Para obtener la solución, primero resolvemos para  $m$  variables de estado (sean estas  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) en términos de las  $n-m$  variables de estado que quedan (i.e.,  $x_{n-m-1}, \dots, x_n$ ). Sustituyendo estas en las  $n-m$  ecuaciones que quedan de (1.5) y la

ecuación correspondiente a las variables de estado, resulta un sistema de orden n-m que describe completamente el funcionamiento del sistema dado, para una condición inicial que satisface  $S(x)=0$ .

Veamos el siguiente ejemplo con el fin de darle claridad a este método

### Ejemplo 3

Sea el sistema

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) & f_{14}(x) & f_{15}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) & f_{24}(x) & f_{25}(x) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde suponemos que las entradas  $f_{ij}(x)$  del tercero y quinto renglón de F son no lineales con respecto a "x" y acotadas en el abierto  $X \subset \mathbb{R}^n$

$$f_{ij}^{\min} \leq f_{ij}(x) \leq f_{ij}^{\max}$$

El método de control equivalente da lugar el siguiente sistema equivalente

$$\dot{x} = \left[ I - G(SG)^{-1}S \right] F(x)$$

con  $S(x(t_0)) = 0$  para algún  $t_0$ .

Si la superficie de cambio lineal es dada por

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{bmatrix} \quad (3 a)$$

$$SG = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{15} \\ S_{23} & S_{25} \end{bmatrix}$$

para facilitar los calculos en el ejemplo escogemos

$S_{13}S_{25} - S_{15}S_{23} = 1$ ; especificamente, tomando  $S_{13}=2$ ,  $S_{15}=S_{25}=S_{23}=1$ .

Entonces

$$(SG)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} S_{13} & -S_{15} \\ -S_{23} & S_{25} \end{bmatrix}}{S_{13}S_{25} - S_{15}S_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación de deslizamiento (1.5) dada por Utkin

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & 0 & S_{24} - S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & 0 & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

el sistema de ecuaciones que resulta es

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = (S_{21} - S_{11})x_2 + (S_{22} - S_{12})x_3 + (S_{24} - S_{14})x_5 \quad (3 \text{ b})$$

$$\dot{x}_4 = x_5$$

$$\dot{x}_5 = (S_{11} - 2S_{21})x_2 + (S_{12} - 2S_{22})x_3 + (S_{14} - 2S_{24})x_5$$

sujeto a  $S(\mathbf{x}) = S\mathbf{x} = 0$  resulta

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

resolviendo para  $x_3$  y  $x_5$  se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

desarrollando llegamos al sistema de ecuaciones

$$x_3 = (S_{21} - S_{11})x_1 + (S_{22} - S_{12})x_2 + (S_{24} - S_{14})x_4$$

$$x_5 = (S_{11} - 2S_{21})x_1 + (S_{12} - 2S_{22})x_2 + (S_{14} - 2S_{24})x_4$$

derivando el sistema anterior da como resultado

$$\dot{x}_3 = (S_{21} - S_{11})\dot{x}_1 + (S_{22} - S_{12})\dot{x}_2 + (S_{24} - S_{14})\dot{x}_4$$

$$\dot{x}_5 = (S_{11} - 2S_{21})\dot{x}_1 + (S_{12} - 2S_{22})\dot{x}_2 + (S_{14} - 2S_{24})\dot{x}_4$$

sustituyendo este sistema de ecuaciones en el sistema (3 b)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = (S_{21} - S_{11})x_2 + (S_{22} - S_{12})x_3 + (S_{24} - S_{14})x_5$$

$$\dot{x}_3 = (S_{21} - S_{11})\dot{x}_1 + (S_{22} - S_{12})\dot{x}_2 + (S_{24} - S_{14})\dot{x}_4$$

$$\dot{x}_4 = x_5$$

$$\dot{x}_5 = (S_{11} - 2S_{21})x_2 + (S_{12} - 2S_{22})x_3 + (S_{14} - 2S_{24})x_5$$

$$\dot{x}_5 = (S_{11} - 2S_{21})\dot{x}_1 + (S_{12} - 2S_{22})\dot{x}_2 + (S_{14} - 2S_{24})\dot{x}_4$$

por lo tanto obtenemos un sistema equivalente de orden reducido

$$\dot{\bar{x}}_1 = x_2$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = (S_{21} - S_{11})x_2 + (S_{22} - S_{12})x_3 + (S_{24} - S_{14})x_5$$

$$\dot{\bar{x}}_3 = (S_{11} - 2S_{21})x_2 + (S_{12} - 2S_{22})x_3 + (S_{14} - 2S_{24})x_5$$

el cual escrito en la forma  $\dot{\bar{x}} = Fx$  es

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & S_{24} - S_{14} \\ S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \quad (3c)$$

donde  $\bar{x}_1 = x_1$ ,  $\bar{x}_2 = x_2$ ,  $\bar{x}_3 = x_4$ .

## 2.2 FORMA REGULAR Y DINAMICA DE ORDEN REDUCIDO

De la dinámica de orden reducido, donde la variable de estado  $X$  original tiene "n" componentes, se parte en dos variables;  $x = (x_1, x_2)$ , donde  $x_1$  tiene n-m componentes (dimensión igual a la dimensión de  $S$ ) y describe a  $S$ , y donde  $x_2$  tiene dimensión m y describe el espacio de estado "fuera" de la superficie  $S$ .

La forma regular de la dinámica de la planta (1.1) es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + G_2(x)u \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^n, & x_1 &\in \mathbb{R}^{n-m}, & x_2 &\in \mathbb{R}^m, & f_1: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \\ G_2(x), u(x), S(x) &: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \end{aligned}$$

Estabilizar un sistema dado en la forma regular es diseñar la superficie de cambio para la cual las trayectorias tienden a estabilizarse.

La solución al problema anterior requiere de herramientas de control lineal y de el método de reducción de orden. Por lo que enlistaremos una serie de pasos que se siguen en la solución de este problema.

I Por hipótesis tenemos que la matriz  $f_1$  y la superficie deslizante tienen una estructura lineal, además, la matriz  $G_2$  satisface la condición de transversalidad.

II Haciendo uso del método de reducción de orden y de la hipótesis donde tenemos que la superficie de modo deslizante es lineal ( $Sx=0$ ) y, tomando una descomposición para  $S$  y otra para  $x$  cuando las "x" pertenecen al núcleo de la matriz  $S$ , esto se transforma en

$$x = [x_1, x_2], \quad S = [S_1, S_2], \quad [S_1, S_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

III Realizando los calculos necesarios podemos dejar el vector de estado  $x_2$  en términos del vector de estado  $x_1$  considerando la hipótesis de que  $S_2$  es no singular. Así, el vector  $x_2$  toma la siguiente forma

$$x_2 = S_2^{-1} S_1 x_1$$

IV Sustituyendo el vector  $x_2$  en el sistema  $\dot{x}_1 = f_1(x)$  llegamos a un sistema en términos de una sola variable

$$\dot{x}_1 = f_1(x) = f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, S_2^{-1} S_1 x_1)$$



V En el sistema resultante, haciendo uso de la linealidad de  $f_1$ , podemos reescribir  $f_1$  de la siguiente forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x) = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = A_{11}x_1 + A_{12}(S_2^{-1}S_1)x_1$$

VI Si  $A_{11}$  y  $A_{12}$  son matrices conocidas y suponiendo que el par  $(A_{11}, A_{12})$  es controlable, resultados de la teoría de control lineal (para detalles ver [8] y [9]) nos asegura que podamos asignar libremente el espectro a la matriz  $A_{11} + A_{12}F$  (diseñando una  $F$  apropiada). En nuestro caso  $F = -S_2^{-1}S_1$ , por lo que el problema se reduce a diseñar la matriz  $S$ .

VII Encontrando  $F$  se determina la superficie deslizante  $S$  apropiada al sistema.

**Nota:** Para una mejor comprensión en el diseño de  $F$  en el caso lineal ver [10] y [11], y para detalles del caso no lineal ver [6].

Para ilustrar el método, diseñaremos una superficie de cambio para el sistema (visto en el ejemplo anterior).

**Ejemplo 3:**

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) & f_{14}(x) & f_{15}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) & f_{24}(x) & f_{25}(x) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo anterior llevamos el sistema de orden 5 a un sistema de orden 3, obteniendo una matriz en términos de las componentes de la matriz  $S$

Haciendo uso de los resultados de control lineal, asumiremos que el par  $(A_{11}, A_{12})$  es controlable, por lo que podemos asignarle un espectro a la matriz resultante.

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & S_{24} - S_{14} \\ S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} \right) x_1$$

obteniendo la matriz

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & S_{24} - S_{14} \\ S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para ver cual control es el adecuado supongamos que el diseño requiere que el espectro del sistema equivalente sea  $\{-1, -2, -3\}$ , entonces, el polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

el polinomio característico del sistema equivalente dado en (3 c) es

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (S_{12} - S_{22} + 2S_{24} - S_{14})\lambda^2 + (S_{12}S_{24} - S_{14}S_{22} + S_{11} - S_{21})\lambda + (S_{11}S_{24} - S_{14}S_{21})$$

Igualando los coeficientes de las potencias de  $\lambda$  nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & S_{24} & -S_{22} & -1 & 0 & 0 \\ S_{24} & 0 & 0 & -S_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{14} \\ S_{21} \\ S_{22} \\ S_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} - S_{22} + 2S_{24} - S_{14} = 6$$

$$/ \quad S_{12} S_{24} - S_{14} S_{22} + S_{11} - S_{21} = 11$$

$$S_{11} S_{24} - S_{14} S_{21} = 6$$

Una solución para la superficie diseñada es

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1.83 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1.83 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se a diseñado como ejemplo una superficie  $S$  de manera que la dinámica sobre esta es estable.

### 2.3 DISEÑO DE CONTROLES

El diseño apropiado de controles es uno de los principales objetivos de la teoría de control. Expondremos métodos de diseño de control de estructura variable. Aquí el propósito es determinar la retroalimentación, la cual logra que las trayectorias de estado de la planta converjan a la superficie de cambio, así como para mantener la condición de modo deslizante. Se pre-supone que la superficie deslizante ha sido diseñada completamente. En general, el control es un m-vector  $u(\cdot)$  y cada una de las entradas tiene la estructura de la forma dada por (1.2).

El siguiente ejemplo contempla la existencia de un modo deslizante, esto se garantiza haciendo uso del criterio de estabilidad de Lyapunov.

**Ejemplo 2** Sea

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u(x)$$

donde  $x = [x_1, x_2]^T$ , el control está dado por  $u(x) = k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2$ , con

$$k_i(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } S(x)x_i > 0 \\ \beta_i & \text{si } S(x)x_i < 0 \end{cases} \quad \text{con } i = 1, 2$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\text{sen}x_1}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } S(x) = S_1x_1 + S_2x_2$$

Sea  $V(x) = \frac{1}{2}S^2$  la función de Lyapunov cuya derivada es

$$\dot{V} = S\dot{S} \quad \dot{S} = S_1\dot{x}_1 + S_2\dot{x}_2$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen}x_1 + k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}S(x) \dot{S}(x) &= S(x)[S_1 x_2 + S_2(-\text{sen}x_1 + k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2)] \\ &= S(x)[S_2(k_1(x)x_1 - \text{sen}x_1) + x_2(S_1 + S_2 k_2(x))] \\ &= S(x)x_1[S_2(k_1(x) - \{\text{sen}x_1/x_1\})] + \\ &S(x)x_2[S_1 + S_2 k_2(x)] < 0\end{aligned}$$

ahora veamos para que valores de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  se cumple que este producto es negativo de donde se asegura el comportamiento estable del sistema

$$S(x)x_1[S_2(k_1(x) - \{\text{sen}x_1/x_1\})] + S(x)x_2[S_1 + S_2 k_2(x)] < 0$$

Caso I:

$$S(x)x_1 > 0$$

$S_2[\alpha_1 - (\text{sen}x_1)/x_1] < 0$  y como  $S_2 > 0$  entonces  $\alpha_1 - (\text{sen}x_1)/x_1 < 0$  de aquí que

$$\alpha_1 < \left\{ \frac{\text{sen}x_1}{x_1} \right\}$$

pero como éste cociente toma una infinidad de valores, entonces:

$$\alpha_1 < \min\left\{ \frac{\text{sen}x_1}{x_1} \right\} = -1$$

sin perder generalidad tomamos  $\alpha_1 = -1$  ya que es mayor que el mínimo

Caso II:

$$S(x)x_1 < 0$$

$S_2(\beta_1 - (\text{sen}x_1)/x_1) > 0$  y como  $S_2 > 0$  entonces  $\beta_1 - (\text{sen}x_1)/x_1 > 0$

esto es

$$\beta_1 > \left\{ \frac{\text{sen}x}{x_1} \right\}$$

de aquí que

$$\beta_1 > \max \left\{ \frac{\text{sen}x}{x_1} \right\} = 1$$

por el mismo argumento anterior.

Caso III:

$$S(x)x_2 > 0$$

$(S_1 + S_2\alpha_2) < 0$  entonces de aquí se tiene que el valor de  $\alpha_2$  debe ser de manera que

$$\alpha_2 < - \left\{ \frac{S_1}{S_2} \right\}$$

Caso IV:

$$S(x)x_2 < 0$$

$(S_1 + S_2\beta_2) > 0$  entonces el valor para  $\beta_2$  debe ser tal que

$$\beta_2 > - \left\{ \frac{S_1}{S_2} \right\}$$

Observese que si pre-fijamos los valores  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_3$  y  $\beta_4$ , considerando  $S_1$  y  $S_2$  incógnitas, entonces los cálculos aquí hechos nos permiten diseñar la superficie de cambio para que sea atractora

El diseño de estos controles representan un conjunto de valores para los cuales se tiene estabilidad de acuerdo al teorema de estabilidad de Lyapunov; es decir, existe un modo deslizante sobre  $S$ .

## 2.4 METODO DE DIAGONALIZACION

Para el método de diagonalización suponiendo conocidas de la terna (Ec.,S,u), el primero y segundo término para los cuales diseñaremos controles que dirijan el funcionamiento de las trayectorias hacia el modo deslizante

Nuestro propósito fundamental es describir dos aproximaciones diferentes a diseños de controles, por el llamado método de diagonalización. La característica esencial de éste método es convertir un sistema de multientradas en un problema de m entradas.

El método de diagonalización lo dividimos en dos casos que llamaremos método 1 y método 2.

### Método 1

El método 1 supone la construcción de un nuevo vector control  $u^*$  vía una transformación no singular:

$$Q^{-1}(x) \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x) \quad (2.2)$$

del control original  $u$  definido como:

$$u^* = Q^{-1}(x) \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x)u(x) \quad (2.3)$$

donde  $Q(x)$  es una matriz cuadrada diagonal ( $m \times m$ ), donde los elementos de la diagonal  $q_i(x)$ ,  $i=\overline{1,m}$  son tal que el  $\inf |q_i(x)| > 0$  para toda  $x$ . La conversión del problema de  $m$ -entradas, en  $m$ -entradas singulares es dado por el término  $\left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] G(x)$ , donde las entradas de la diagonal de  $Q^{-1}(x)$  simplemente permiten flexibilidad en el diseño.

Muchas veces  $Q^{-1}(x)$  es tomado como la identidad. En términos de  $u^*$  la dinámica de estado conveniente:

$$\dot{x} = F(x) + G(x) \left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right]^{-1} Q(x) u^* \quad (2.4)$$

Aun que esta nueva forma de control parece más complicada de  $\dot{S}(x) = 0$  le permite a uno escoger las  $m$ -entradas de  $u^*$  para satisfacer la condición de suficiente para la existencia y alcanzabilidad del modo deslizante. Una vez que  $u^*$  es conocido se puede invertir la transformación (2.3) y tener la  $u$  requerida. Para garantizar existencia y alcanzabilidad de un modo deslizante es suficiente satisfacer la condición  $S^T(x) \dot{S}(x) < 0$  en términos de  $u^*$ .

$$\begin{aligned} \dot{S}(x) &= \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \left( F(x) + G(x) \left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right]^{-1} Q(x) u^* \right) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x} F(x) + \left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right] \left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right]^{-1} Q(x) u^* \\ \dot{S}(x) &= \left[ \frac{\partial S}{\partial x} F(x) \right] + Q(x) u^* \end{aligned} \quad (2.5)$$

de aquí si las entradas  $u_1^{**}$ ,  $u_1^{*-}$  se toman de tal forma que:

$$\begin{aligned} q_1 u_1^{**} &< - \frac{\partial S}{\partial x} f(x) = \sum_{j=1}^n S_{1j} f_j(x) \quad \text{donde } S_1(x) > 0 \\ q_1 u_1^{*-} &> - \frac{\partial S}{\partial x} f(x) = \sum_{j=1}^n S_{1j} f_j(x) \quad \text{donde } S_1(x) < 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

entonces la condición de suficiencia para la existencia y alcanzabilidad se satisface donde  $S_{1j}$  es igual a la  $j$ -ésima entrada de  $\frac{\partial S}{\partial x}$ , el cual es el  $i$ -ésimo renglón de  $\frac{\partial S}{\partial x}$ . En particular, la condición de (2.6) fuerza a cada término de la sumatoria de  $\dot{S}$  a

ser negativo definido. El control que utilizaremos en esta parte tiene la siguiente estructura

$$u(x) = \left[ \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right]^{-1} Q(x)u^*$$

otra condición suficiente para la existencia de un modo deslizante también puede ser usada.

### Método 2

El segundo método de diagonalización requiere una transformación no singular de  $S$  en lugar de el control  $u$ .

En particular, considere la superficie de cambio:

$$S^*(x) = \Omega(x) S(x) \quad (2.7)$$

Para una transformación apropiada  $\Omega(x)$ ; este método se basa en el hecho de que el sistema equivalente es invariante a una transformación de la superficie de cambio no singular como se verifica en el siguiente teorema.

### Teorema 5, [3]

Supongase que el sistema original es dado por (1.1), (1.2) con superficie de cambio  $S_i(x) = 0$  con  $i = \overline{1, m}$ ; entonces el movimiento deslizante (trayectoria del sistema equivalente) es invariante a la transformación de la superficie de cambio

$S^*(x) = \dot{\Omega}(x)S(x) = 0$  en  $\mathbb{R}^m$  si  $\|\dot{\Omega}\|$  y  $\|\Omega^{-1}\|$  son acotados para todo  $x \in S$ .

**Demostración:** primero por el método de control equivalente de Utkin

$$\dot{S}^*(x) = \Omega(x)\dot{S}(x) + \dot{\Omega}(x)S(x) = 0 \quad (2.8)$$

sustituyendo  $\dot{S}(x)$  y como  $\Omega$  es una matriz mxm no singular, el control equivalente tiene la forma:

$$\begin{aligned}\dot{S}^*(x) &= \Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} \left( F(x) + G(x)u_{eq} \right) + \dot{\Omega}(x) S(x) = 0 \\ &= \Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} F(x) + \Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} G(x)u_{eq} + \dot{\Omega}(x)S(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad \Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} G(x)u_{eq} &= - \Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} F(x) - \dot{\Omega}(x)S(x)\end{aligned}$$

donde obtenemos la siguiente forma del control:

$$u_{eq}^* = \left( \Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \left( - \Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} F(x) - \dot{\Omega}(x)S(x) \right)$$

como  $\Omega(x)$  es una matriz no singular mxm entonces:

$$u_{eq}^* = \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} F(x) - \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \Omega^{-1}(x) \dot{\Omega}(x) S(x)$$

el cual es diferente del control equivalente solo por el término

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \Omega^{-1}(x) \dot{\Omega}(x) S(x)$$

por otro lado, sobre la superficie de cambio,  $S(x) = 0$ , se tiene que

$$u_{eq}^* = \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} F(x) = u_{eq} \quad \square$$

Sin pérdida de generalidad, el teorema 5 nos dice que el movimiento deslizante es independiente de una transformación no singular de la superficie de cambio. Observe que si introducimos una transformación no singular  $\Omega$  con derivada acotada producirá el mismo sistema equivalente.

En este segundo procedimiento de diagonalización seleccionamos  $\Omega(x)$ , esto es,  $\Omega(x) \frac{\partial S}{\partial x} G(x)$  es una matriz diagonal, es decir,

$Q(x)$ =diagonal  $[q_1(x)]$  con entradas acotadas. Específicamente, seleccionado a  $\Omega(x)$  como

$$\Omega(x) = Q(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \quad (2.9)$$

por un apropiado  $Q(x)$ , que puede ser la matriz identidad.

En el orden para determinar la condición de existencia y alcanzabilidad es necesario que se calcule  $\dot{S}^*(x)$  como:

$$\dot{S}^* = \Omega(x) \frac{dS}{dx} \left( f(x) + G(x) \right) + \dot{\Omega}(x) S(x) .$$

sustituyendo el valor de  $\Omega(x)$  en (2.8) tenemos

$$\dot{S}^* = Q(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \left( f(x) + G(x)u(x) \right) + \dot{\Omega}(x) S(x)$$

despejando  $S(x)$  y sustituyendolo en la ecuación anterior resulta

$$\dot{S}^* = Q(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x) + Q(x)u(x) + \dot{\Omega}(x)\Omega^{-1}(x)S^*(x)$$

$$\dot{S}^* := S^{\circ}(x) + Q(x)u + \dot{\Omega}(x)\Omega^{-1}(x)S^*(x)$$

en donde el control  $u$  se obtiene en términos de las entradas  $\dot{S}$  via la matriz diagonal  $Q(x)$

Una condición suficiente para la existencia y alcanzabilidad de un modo deslizante es tener que, para algún punto "x" en el espacio de estado, que  $S_1^*$  y  $\dot{S}_1^*$  sean de signo opuesto. Específicamente, esto requiere que

$$\begin{aligned} q_1(x)u_1^+ &< -S_1^{\circ}(x) - S_{1\Omega}(x) && \text{cuando } S_1^* > 0 \\ q_1(x)u_1^- &> -S_1^{\circ}(x) - S_{1\Omega}(x) && \text{cuando } S_1^* < 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $S_{i\Omega}(x)$  es la  $i$ -ésima entrada de

$$S_{i\Omega}(x) := \dot{\Omega}(x)\Omega^{-1}(x)S^*(x)$$

Con el fin de clarificar el método de diagonalización consideremos el siguiente ejemplo

### Ejemplo 3

Sea el sistema

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) & a_{15}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) & a_{25}(x) \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La superficie  $S(x) = Sx = 0$  diseñada de la siguiente forma

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1.8333 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1.8333 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{bmatrix}$$

tomando a al primer renglón de  $S$  como  $S_1$  y el segundo renglón de  $S$  como  $S_2$ .

El objetivo de este ejemplo es ilustrar la etapa de diseño en la teoría de control de estructura variable, usando en el proceso de diseño de controles el primero y segundo método de diagonalización.

El primer diseño empleado es el método 1 el cual transforma el control  $u$  al dado por (2.3) donde  $Q(x)$  es una matriz diagonal no singular tal que el  $\inf |q_i(x)| > 0$ . Por simplicidad tomamos

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .5 \end{bmatrix}$$

de una manera aleatoria. Siempre que las entradas diagonales de Q puedan ser cambiadas por diferentes conductos de controles o para compensar algo de la distorsión introducida por  $[SG(x)]^{-1}$ . Como por (2.4), la dinámica de estado dadas por  $u^*$  son

$$\dot{x} = F(x) + G[SG]^{-1}Q(x)u^*$$

calculando la retroalimentación otra vez necesitamos la condición de existencia, de (2.5) se tiene que

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = S\dot{x} = SF(x) + G[SG]^{-1}Q(x)u^*$$

Como  $Q(x)$  es diagonal, usando (2.6), la condición de suficiencia para la existencia de un modo deslizante es:

$$\begin{aligned} q_1(x)u_1^+ &< -[S_{11}, \dots, S_{15}]F(x), \text{ si } S_{11} > 0 \quad i = 1,2 \\ q_1(x)u_1^- &> -[S_{11}, \dots, S_{15}]F(x), \text{ si } S_{11} < 0 \quad i = 1,2 \end{aligned} \quad (3 d)$$

de esto se sigue que para la primer superficie de cambio

$$S_1 = [S_{11}, \dots, S_{15}]x := S_1 x$$

$$\begin{aligned} S_1 F(x) = & ((2a_{11} + a_{21})x_1 + (1 + 2a_{12} + a_{22})x_2 + (1.83 + 2a_{13} + a_{23})x_3 \\ & + (2a_{14} + a_{24})x_4 + (2a_{15} + a_{25} - 6)x_5) \end{aligned}$$

recalcando que asumimos  $a_{ij}^{\min} \leq a_{ij}(x) \leq a_{ij}^{\max}$  desde  $i=1,2, \dots, j=1, \dots, 5$

bajo esta hipótesis y la ley de control  $u^* = kx$  donde  $k = [k_{ij}^{\pm}]$ ,

satisfacer la condición de existencia de (3 d),  $k_{ij}$  necesita

satisfacer lo siguiente:



$$k_{11} = \begin{cases} < -(2a_{11}^{\max} + a_{21}^{\max}), & \text{si } S_1 x_1 > 0 \\ > -(2a_{11}^{\min} + a_{21}^{\min}), & \text{si } S_1 x_1 < 0 \end{cases} \quad k_{12} = \begin{cases} < -(1+2a_{12}^{\max} + a_{22}^{\max}), & \text{si } S_1 x_2 > 0 \\ > -(1+2a_{12}^{\min} + a_{22}^{\min}), & \text{si } S_1 x_2 < 0 \end{cases}$$

$$k_{13} = \begin{cases} < -(1.83+2a_{13}^{\max} + a_{23}^{\max}), & \text{si } S_1 x_3 > 0 \\ > -(1.83+2a_{13}^{\min} + a_{23}^{\min}), & \text{si } S_1 x_3 < 0 \end{cases} \quad k_{14} = \begin{cases} < -(2a_{14}^{\max} + a_{24}^{\max}), & \text{si } S_1 x_4 > 0 \\ > -(2a_{14}^{\min} + a_{24}^{\min}), & \text{si } S_1 x_4 < 0 \end{cases}$$

$$k_{15} = \begin{cases} < -(2a_{15}^{\max} + a_{25}^{\max} - 6), & \text{si } S_1 x_5 > 0 \\ > -(2a_{15}^{\min} + a_{25}^{\min} - 6), & \text{si } S_1 x_5 < 0 \end{cases} \quad (3 e)$$

Con respecto a la segunda superficie de cambio

$$S_2 = [S_{21}, \dots, S_{25}]x := S_2 x,$$

tenemos:

$$S_2 F(x) = (a_{11} + a_{21})x_1 + (1 + a_{12} + a_{22})x_2 + (1.83 + a_{13} + a_{23})x_3 \\ + (a_{14} + a_{24})x_4 + (a_{15} + a_{25})x_5$$

Sea  $u_2^* = k_2 x$ ; para satisfacer la condición de existencia (3 d),

$k_{2j}$  necesita satisfacer lo siguiente:

$$k_{21} = \begin{cases} < -.5(a_{11}^{\max} + a_{21}^{\max}), & \text{si } S_2 x_1 > 0 \\ > -.5(a_{11}^{\min} + a_{21}^{\min}), & \text{si } S_2 x_1 < 0 \end{cases} \quad k_{22} = \begin{cases} < -.5(1+a_{12}^{\max} + a_{22}^{\max}), & \text{si } S_2 x_2 > 0 \\ > -.5(1+a_{12}^{\min} + a_{22}^{\min}), & \text{si } S_2 x_2 < 0 \end{cases}$$

$$k_{23} = \begin{cases} < -.5(1.83+a_{13}^{\max} + a_{23}^{\max}), & \text{si } S_2 x_3 > 0 \\ > -.5(1.83+a_{13}^{\min} + a_{23}^{\min}), & \text{si } S_2 x_3 < 0 \end{cases} \quad k_{24} = \begin{cases} < -.5(a_{14}^{\max} + a_{24}^{\max}), & \text{si } S_2 x_4 > 0 \\ > -.5(a_{14}^{\min} + a_{24}^{\min}), & \text{si } S_2 x_4 < 0 \end{cases}$$

$$k_{25} = \begin{cases} < -.5(a_{15}^{\max} + a_{25}^{\max}), & \text{si } S_2 x_5 > 0 \\ > -.5(a_{15}^{\min} + a_{25}^{\min}), & \text{si } S_2 x_5 < 0 \end{cases} \quad (3 f)$$

resumiendo  $u^* = kx$ , donde las entradas de  $k$  son especificadas por

(3 e) y (3 f) Como  $u = [SG]^{-1}Qu^*$  el actual control  $u$  es tal que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^\pm & k_{12}^\pm & k_{13}^\pm & k_{14}^\pm & k_{15}^\pm \\ k_{21}^\pm & k_{22}^\pm & k_{23}^\pm & k_{24}^\pm & k_{25}^\pm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Obteniendo el control diseñado para la este ejemplo.

Aquí termina la ilustración del primer método de diagonalización.

Seguidamente atenderemos el segundo método de diagonalización, otra vez suponiendo existencia de la superficie de cambio. En el segundo método de diagonalización, el objetivo es "desacoplar" los controles tomando una transformación no singular de la superficie de cambio. Las componentes del control  $u$  cambian sobre  $S_1^*(x) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , con  $S_1^*(x)$  dado por (2.7). Para hacer la diagonalización tomamos  $\Omega(x)$  de acuerdo a (2.9) donde  $\frac{\partial S}{\partial x} = S$ . si  $Q$  es elegido como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .5 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\Omega(x) = Q(x)[SG]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3 g)$$

Para construir un control necesitamos la condición de existencia de un modo deslizante, considere la derivada de  $S^*$  dada por

$$\dot{S}^* = Q(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^1 \frac{\partial S}{\partial x} F(x) + Q(x)u(x) + \dot{\Omega}(x)\Omega^{-1}(x)S^*(x)$$

tomando en cuenta que  $\dot{\Omega}(x) = 0$

$$S^*(x) = \Omega(x)SF(x) + Q(x)u$$

donde

$$\Omega(x)SF(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + (a_{15} - 6)x_5 \\ 2a_{21}x_1 + (2+2a_{22})x_2 + 2(a_{23}+1.83)x_3 + 2a_{24}x_4 \\ 2(a_{25}+6)x_5 \end{bmatrix}$$

con el producto de  $Qu = [u_1, 2u_2]^T$

La condición para la existencia de un modo deslizante (2.10) para este ejemplo es

$$\begin{aligned} q_1 u_1^+ &< -S_1^{\circ}(x) \\ q_1 u_1^- &> -S_1^{\circ}(x) \end{aligned} \quad i = 1, 2$$

donde  $S_i^{\circ}(x)$  es la  $i$ -ésima componente de  $S^{\circ}(x) = \Omega(x)Sf(x)x$ .

Sea  $u = kx$  donde  $k = [k_{ij}]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ . Como

$$a_{ij}^{\min} \leq a_{ij}(x) \leq a_{ij}^{\max}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

entonces para satisfacer (2.10) se requiere que

$$k_{11} = \begin{cases} < -\frac{\max}{a_{11}}, & \text{si } S_1 x_1 > 0 \\ > -\frac{\min}{a_{11}}, & \text{si } S_1 x_1 < 0 \end{cases}$$

$$k_{21} = \begin{cases} < -\frac{\max}{a_{21}}, & \text{si } S_2 x_1 > 0 \\ > -\frac{\min}{a_{21}}, & \text{si } S_2 x_1 < 0 \end{cases}$$

$$k_{12} = \begin{cases} < -\frac{\max}{a_{12}}, & \text{si } S_1 x_2 > 0 \\ > -\frac{\min}{a_{12}}, & \text{si } S_1 x_2 < 0 \end{cases}$$

$$k_{22} = \begin{cases} < -(1+\frac{\max}{a_{22}}), & \text{si } S_2 x_2 > 0 \\ > -(1+\frac{\min}{a_{22}}), & \text{si } S_2 x_2 < 0 \end{cases}$$

$$k_{13} = \begin{cases} < -\frac{\max}{a_{13}}, & \text{si } S_1 x_3 > 0 \\ > -\frac{\min}{a_{13}}, & \text{si } S_1 x_3 < 0 \end{cases}$$

$$k_{23} = \begin{cases} < -(1.83+\frac{\max}{a_{22}}), & \text{si } S_2 x_3 > 0 \\ > -(1.83+\frac{\min}{a_{22}}), & \text{si } S_2 x_3 < 0 \end{cases}$$

$$k_{14} = \begin{cases} < -\frac{\max}{a_{14}}, & \text{si } S_1 x_4 > 0 \\ > -\frac{\min}{a_{14}}, & \text{si } S_1 x_4 < 0 \end{cases}$$

$$k_{24} = \begin{cases} < -\frac{\max}{a_{14}}, & \text{si } S_2 x_4 > 0 \\ > -\frac{\min}{a_{14}}, & \text{si } S_2 x_4 < 0 \end{cases}$$

$$k_{15} = \begin{cases} <-(a_{15}^{\max}-6), & \text{si } S_1 x_5 > 0 \\ >-(a_{15}^{\min}-6), & \text{si } S_1 x_5 < 0 \end{cases} \quad k_{15} = \begin{cases} <-(a_{15}^{\max}-6), & \text{si } S_1 x_5 > 0 \\ >-(a_{15}^{\min}-6), & \text{si } S_1 x_5 < 0 \end{cases}$$

Como  $\Omega(x)$  en (3 g) es constante,  $\dot{\Omega} = 0$  esta condición también es suficiente para la alcanzabilidad de la superficie deslizante.

## 2.5 METODO DE JERARQUIA EN EL CONTROL

Como una alternativa al método de diagonalización descrito anteriormente; muchas veces es posible definir una jerarquía del control, la cual puede emplearse para diseñar controles.

Con este enfoque los ductos de control de jerarquía establecen, por ejemplo, el primer control  $u_1$  maneja el sistema de una condición inicial en la superficie  $S_1(x)=0$ . El segundo control entonces guía el sistema en la intersección de  $\{x | S_1(x) = S_2(x)=0\}$ , mientras que  $u_1$  mantiene un modo deslizante en  $S_1(x)=0$ . El tercer control  $u_3$  dirige el sistema a lo largo de la intersección de las superficies  $S_1(x)=0$  y  $S_2(x)=0$  a la intersección de las primeras tres superficies de cambio, y así sucesivamente. Este método de control de jerarquía se aplica hasta obtener el control  $u_m$ , llevando el sistema a un modo deslizante en la intersección de todas la  $m$  superficies de cambio.

Para diseñar el control de entrada  $u_k$  se presupone:

- i) Existencia de un modo deslizante en  $S_i(x) = 0$  con  $i = 1, \dots, k-1$  para cualquier valor de el control  $u_k$  hasta  $u_m$ .
- ii) Conociendo la forma del sistema en ese modo deslizante.

Como todo control  $u_k$ ,  $k < m$ , depende de los valores tomados por el control  $u_m$ ,  $u_m$  precede del diseño de  $u_{m-1}$ ,  $u_{m-2}, \dots, u_1$ . En adición, el diseño del control  $u_2$  presupone la existencia de un modo deslizante en  $S_1(x) = 0$ . Esta estructura del sistema resulta reemplazando  $u_1$  en el método de control equivalente de Utkin  $u_{1eq}$ , a este resultado le llamaremos estructura  $\Sigma^1$ .

Para determinar  $\Sigma^1$ , considere  $\frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = 0$ , el cual usando (1.1) implica que

$$\frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x} \left( F(x) + G(x)u \right) = 0$$

$\frac{\partial S}{\partial x} F(x) + \frac{\partial S}{\partial x} G(x)u = 0$ , el control  $u_1$  en  $S_1(x) = 0$  se define como  $u_{1eq}$  entonces esto tiene la forma:

$$u_{1eq} = - \left( \frac{\partial S}{\partial x} G(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} F(x),$$

donde  $F(x)$  es la matriz de  $n \times n$ ,  $G(x)$  es de  $n \times m$ ,  $u$  es de  $m \times 1$ ; nuestro control es:

$$u_{1eq} = - \left( \frac{\partial S}{\partial x} g_1(x) \right)^{-1} \left( \frac{\partial S}{\partial x} F(x) + \frac{\partial S}{\partial x} [g_2, \dots, g_m] \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \right) \quad (2.11)$$

donde  $g_i$  es la  $i$ -ésima columna de  $G(x)$ . Notece que esta relación requiere

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} g_1(x) \right) \neq 0$$

(De hecho es necesario asumir que  $\left( \frac{\partial S}{\partial x} g_1(x) \right) \neq 0$  para toda  $i$ ).

Sustituyendo (2.11) en (1.1) se produce el sistema modelo equivalente

$$\dot{x} = F^1(x) + G^1(x) \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

para apropiados  $F^1(x)$  y  $G^1(x)$ .

El diseño de  $u_3$  supone que el sistema estructural obtenido permite la existencia de un modo deslizante en  $S_2(x) = 0$  para el sistema estructural  $\Sigma^1$ . Esto implica la existencia de un modo deslizante en  $S_1(x)=S_2(x)=0$ . Llamado el resultado estructural  $\Sigma^2$ . Por su puesto  $\Sigma^2$  es obtenido reemplazando  $u_2$  en  $\Sigma^1$  por  $u_{2eq}$ . En general,  $u_{k-1}$  es diseñado suponiendo la existencia de un modo deslizante en  $S_k(x)=0$ , para el sistema estructural  $\Sigma^{k-1}$  y por lo tanto sobre  $S_j(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ . El nuevo control estructural es  $\Sigma^k$  y se denota por

$$\dot{x} = F^k(x) + G^k(x) \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Antes de diseñar el control  $u_m$  se necesita determinar el conjunto de sistemas equivalentes  $\left\{ \Sigma^1, \Sigma^2, \dots, \Sigma^{m-1} \right\}$ . Dado  $\Sigma^{m-1}$ ,  $u_m$  se toma de nuevo para satisfacer la condición de existencia y alcanzabilidad para un modo deslizante en  $S_m(x) = 0$ . Después de esto, presuponemos existencia del sistema estructural  $\Sigma^{m-2}$  para encontrar a  $u_{m-1}$ , dado que existe un modo deslizante en  $S_{k-1}(x)=0$  dad el calculo para  $u_m$ .

Para ver que la condición de existencia y alcanzabilidad se determina en el (k+1)-paso, observandose que un modo deslizante existe y es alcanzable en  $S_{k+1}$  siempre que  $u_{k+1}$  se tome como

$$S_{k+1} \dot{S}_{k+1} < 0 \quad (2.14)$$

para todos los valores de  $u_{k+2}, \dots, u_m$ . Observe que  $\dot{S}_{k+1}$  tiene la forma:

$$\dot{S}_{k+1} = \nabla S_{k+1} F^k + \sum_{i=1}^{m-k} \nabla S_{k+1} g_i^k u_{k+1}$$

donde  $g_i^k$  es la  $i$ -ésima columna de  $G^k(x)$  y  $\frac{\partial S}{\partial x^{k+1}} = \nabla S_{k+1}$ .

Para asegurar la existencia de un modo deslizante en  $S_{k+1} = 0$ , (2.14) se debe tener para toda  $u_i^\pm$ ,  $i = k+2, \dots, m$ . Específicamente, esta condición es de la forma:

$$\nabla S_{k+1} g_i^k u_{k+1}^+ < \min_{u_{k+2}, \dots, u_m} \left( -\nabla S_{k+1} F^k - \sum_{i=1}^m \nabla S_{k+1} g_i^k u_i \right) \quad \text{si } S_{k+1} > 0 \quad (2.15)$$

$$\nabla S_{k+1} g_i^k u_{k+1}^- > \max_{u_{k+2}, \dots, u_m} \left( -\nabla S_{k+1} F^k - \sum_{i=1}^m \nabla S_{k+1} g_i^k u_i \right) \quad \text{si } S_{k+1} < 0$$

Los valores máximos y mínimos en (2.15) indican que  $\dot{S}_{k+1} S_{k+1} < 0$  no importando cual de los valores  $u_i^+$  o  $u_i^-$  se tomen por las componentes del control  $u_i$ ,  $i = k+2, \dots, m$ .

Resumiendo: Introducimos una jerarquía de control donde  $u_1$  garantiza movimiento a lo largo de  $S_1(x) = 0$  para algún valor de  $u_2, \dots, u_m$ . La segunda componente  $u_2$  garantiza movimiento a lo largo de la intersección de  $S_1(x) = 0$  y  $S_2(x) = 0$  para algún valor de  $u_3, \dots, u_m$  y así sucesivamente. La importancia de este método es que, una condición suficiente para un modo deslizante es obtenida de la condición de existencia de un modo deslizante para el caso escalar.

Con el fin de aclarar el método de jerarquía en el control considere el siguiente modelo de estado:

#### Ejemplo 4

Sea el sistema

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u$$

donde

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad G(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = Sx = 0, \text{ donde}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix}$$

Siguiendo el procedimiento del algoritmo, primero encontramos

$$S_1^1 = S_1^1 F(x) + S_1^1 G u = 0$$

donde  $S^1$  es el primer renglon de  $S$

$$S^1 F = [2, 5, 2, 4, -1, -2], \quad S^1 G = [2, 1, 1], \quad \left( S^1 g_1 \right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

Resolviendo el sistema para  $u_{1eq}$  en términos de  $x$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  se tiene

$$u_{1eq} = \frac{1}{2} [2, 5, 2, 4, -1, -2]x - \frac{1}{2} [u_2, u_3]$$

sustituyendo este valor en  $\dot{x} = F(x) + Gu$  se tiene  $\dot{x} = F^1(x) + G^1 u^1$

donde

$$F^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -1 & -2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad G^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad u^1 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

El próximo se resuelve para  $\dot{S}_2 = S^2 F^1(x) + S^2 G^1 u^1 = 0$ ; para  $u_2$  en términos de  $x$  y  $u_3$  donde

$$S^2 F^1 = [0, -0.5, 1, 1, 0.5, 0], \quad S^2 G^1 = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad \left( S^2 g_2 \right)^{-1} = 1$$

entonces  $u_{2eq}$  es dado por

$$u_{2eq} = [0, 1, -2, -2, 1, 0]x - u_3$$

insertando  $u_{2eq}$  en  $\dot{x} = F^1(x) + G^1 u^1$  se tiene el sistema  $\dot{x} = F^2(x) + G^2 u^2$

donde

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad G^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora que  $F^1$ ,  $F^2$ ,  $G^1$ ,  $G^2$  son conocidas la segunda mitad del algoritmo es usado para determinar el control empezando con  $k = 2$ , de (2.15)

$$S^3 g_1^2 u_3^+ < -S^3 F^2(x)$$

$$S^3 g_1^2 u_3^- > -S^3 F^2(x)$$

como  $S^3 g_1^2 = 1$ ,  $S^3 F^2 = [0, 1, 0, 1, -1, -2]$  para satisfacer las desigualdades es suficiente que

$$u_3 = \begin{cases} u_3^+ < -S^3 F^2(x) \\ u_3^- > -S^3 F^2(x) \end{cases}$$

Para determinar el segundo control aplicamos de nuevo (2.15) obteniendo

$$S^2 g_1^1 u_2^+ < \min_{u_3} [-S^2 F^1(x) - S^2 g_2^1 u_3]$$

$$S^2 g_1^1 u_2^- > \max_{u_3} [-S^2 F^1(x) - S^2 g_2^1 u_3]$$

De nuestros cálculos previos sabemos que  $S^2 g_2^1 = .5$ ,  $S^2 g_1^1 = .5$ ,

$S^2 F^1 = [0, -0.5, 1, 1, -0.5, 0]$ . Para satisfacer (2.15) es suficiente

que

$$u_2 = \begin{cases} u_2^+ < -2S^2 F^1(x) + u_3^- & \text{si } S_2 > 0 \\ u_2^- > -2S^2 F^1(x) + u_3^+ & \text{si } S_2 < 0 \end{cases}$$

Finalmente el primer control  $u_1$  necesita satisfacer

$$S^1 g_1^1 u_1^+ < \min_{u_2, u_3} [-S^1 F(x) - S^1 g_2^1 u_2 - S^1 g_3^1 u_3]$$

$$S^1 g_1^1 u_1^- > \max_{u_2, u_3} [-S^1 F(x) - S^1 g_2^1 u_2 - S^1 g_3^1 u_3]$$

donde  $G(x) = [g_1, g_2, g_3]$ . Como  $S^1 g_1 = 2$ ,  $S^1 g_2 = 1$  y

$S^1 F = [2, 5, 2, 4, -1, -2]$ , para satisfacer las cantidades de

arriba es suficiente que

$$u_1 = \begin{cases} u_1^+ < -.5(S^1 F(x) + u_2^- + u_3^-), & \text{si } S_1 > 0 \\ u_1^- > -.5(S^1 F(x) + u_2^+ + u_3^+), & \text{si } S_1 < 0 \end{cases}$$

En este ejemplo el control de jerarquía es  $u_1$ , luego  $u_2$  y por último  $u_3$ .



Es importante resaltar en este capítulo que el diseño de este tipo de controles son de gran utilidad en las aplicaciones de la teoría de control de estructura variable, ya que nos permiten dirigir apropiadamente el funcionamiento de los sistemas modelados.

En el diseño de sistemas de estructura variable tenemos dos pasos importantes:

- 1.- Diseño de la superficie de cambio para asegurar el funcionamiento de la planta en el modo deslizante.
- 2.- Diseño de las leyes de control para forzar las trayectorias del sistema y mantenerlas en la superficie deslizante.

## CAPITULO III

### SISTEMAS DE ESTRUCTURA VARIABLE

#### CON INCERTIDUMBRE

En este capítulo consideraremos un sistema dinámico que contiene elementos de incertidumbre. De tales elementos solo un conjunto de posibles valores es conocido. Además, una clase de controles de retroalimentación serán propuestos para garantizar acotación final (definición II del anexo), de manera que las respuestas del sistema estarán confinadas al interior de una vecindad arbitrariamente pequeña del estado de equilibrio  $x = 0$ , donde estos controles de retroalimentación se definieron en términos de la variable de estado  $x$ .

### 3.1 SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE

El objetivo principal es presentar un conjunto de resultados que permitan deducir métodos de diseño de sistemas de controles con propiedades estables.

#### Definición 6

Definiremos por elementos de incertidumbre o elementos de perturbación a las variaciones de los parámetros involucrados en el modelo o sistema, lo cual provoca indefinición (o variación) del sistema de control. Así entenderemos por sistema de incertidumbre (o sistemas inciertos) a un modelo que considere en su dinámica a elementos de perturbación.

partiendo de nuestro modelo inicial

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

con control (1.2) para el caso en que "u" es escalar este sistema y las funciones F, G y S están definidas en un abierto X de  $\mathbb{R}^n$ , la función control  $u: X \rightarrow \mathbb{R}$  es discontinua en  $\{x : S(x) = 0\}$ , F, G son campos vectoriales de clase  $C^1$  X con  $G(x) \neq 0$  para toda  $x \in X$ , y la función  $S: X \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  con gradiente diferente de cero en x.

El conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : S(x) = 0\}$  representa una superficie (n-1)-dimensional en X.

En general, debido a la acción del control (1.2) se supone alcanzabilidad global del conjunto  $S \subset X$ .

Como se mencionó anteriormente el objetivo es obtener condiciones suficientes para estabilizar un sistema con incertidumbre, por medio de la consideración de un sistema como (3.1) y (1.2). Esto significa buscar criterios de diseño de controles de retroalimentación  $u$  tal que el sistema:

$$\dot{x} = [ F(x) + \Delta F(x) ] + [ G(x) + \Delta G(x) ] u \quad (3.3)$$

sea estable. Aquí  $\Delta F$  y  $\Delta G$  son funciones deterministas que representa incertidumbre en los parámetros de  $F$  y  $G$  respectivamente. Podemos decir también que representan perturbaciones paramétricas.

Este problema de estabilidad no es sencillo de resolver, aun cuando es un tema de creciente interés en la actualidad. En general, se sabe que las soluciones a este problema dependen de la característica de las perturbaciones.

Del sistema (3.1) y (1.2) supondremos que existe un deslizamiento ideal sobre la superficie, es decir, se tiene que el estado  $x(t)$  es tal que  $S(x(t)) = 0$  para  $t \geq t_0$  [ $x(t_0) \in S$ ], esta dinámica corresponde a un control de la forma:

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } S(x) > 0 \\ u_{eq} & \text{si } S(x) = 0 \\ u^- & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Considere el sistema (3.1) con control (3.4) donde supondremos que el control (3.4) se aplica con una rapidez inmediata.

Considerando en el sistema de control (3.3), si sucede que  $\Delta F$  y  $\Delta G$  están en el espacio generado por  $G(x)$  para cada  $x$ , diremos que

se satisface la condición de encuentro (definición 4) en el sistema (3.3).

#### OBSERVACION

Si tenemos la condición de encuentro en el sistema (3.3) deducimos que  $[\Delta F(x) + \Delta G(x)u] \in \text{gen}\{G(x)\}$  para cada  $x$ , de aquí tenemos que existe una función escalar  $\Phi(x)$  tal que

$$\Delta F(x) + \Delta G(x)u = \Phi(x)G(x)$$

Por lo tanto si consideramos la condición de encuentro, podemos escribir el sistema (3.3) como el sistema de control

$$\dot{x} = F(x) + G(x) [u(x) + \Phi(x)]$$

donde  $u$  es el control de la forma (1.2). Considerando que  $\Delta F$  y  $\Delta G$  son de clase  $C^1$ , el sistema (3.3) tiene parte derecha definida en el abierto  $X$ .

En teoría es posible tener una cantidad infinita de estrategias de control. Una estructura alternativa para el control (3.4) es la retroalimentación escalar

$$u = u_{eq} + u_n \quad (3.5)$$

Definida en todo el espacio de estados. De esta manera,  $u$  tiene una parte discontinua ( $u_n$ ) y otra continua ( $u_{eq}$ ) calculando  $\dot{S}$  con control (3.5)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x} \left( F(x) + G(x)u_{eq} + G(x)u_n \right) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x} \left( F(x) + G(x)u_{eq} \right) + \frac{\partial S}{\partial x} G(x)u_n = \frac{\partial S}{\partial x} G(x)u_n \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $\frac{\partial S}{\partial x} G(x) = 1$  (redefiniendo la función S) de manera que tenemos  $\frac{\partial S}{\partial x} = u_n$

Esta igualdad permite una fácil verificación de las condiciones de suficiencia para la existencia y alcanzabilidad de un modo deslizante, en base a la condición  $S(x)\dot{S}(x) < 0$ , del teorema 7 del anexo cuando  $S(x) \neq 0$ .

### Definición 7

En general entenderemos por ganancia en un control a una función escalar  $\alpha = \alpha(x)$  que interviene como coeficiente del control del sistema (3.1).

A continuación, Veremos tres estructuras posibles de diseño del control  $u_n$ .

1) Control lineal con cambios de ganancia

$$u_n(x) = \Psi x, \quad \Psi = [\Psi_1] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } S_1 x > 0 \\ \beta_1 & \text{si } S_1 x < 0 \end{cases} \quad \text{donde } \alpha_1 < 0 \text{ y } \beta_1 > 0$$

Considerando esta definición del vector  $\Psi$ , tenemos

$$S_1 \dot{S}_1 = S_1 (\Psi_1 x_1 + \Psi_1 x_2 + \dots + \Psi_1 x_n)$$

la condición de Lyapunov implica

$$(\Psi_1 x_1 + \Psi_1 x_2 + \dots + \Psi_1 x_n) < 0$$

donde  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$

2) Control continuo y lineal

$$u_n(x) = \alpha S(x) \quad \alpha < 0$$

de nuevo se satisfacen las condiciones de existencia de modo deslizante

$$S \dot{S} = S\alpha S = \alpha S^2 < 0 \quad \text{si } S \neq 0$$

3) Control de vector unitario ( no-lineal )

$$u_n(x) = \frac{S(x)}{|S(x)|} \rho, \quad \rho < 0$$

de manera que se tiene

$$S \dot{S} = S \left( \frac{S(x)}{|S(x)|} \right) \rho = \frac{|S(x)|^2}{|S(x)|} \rho = |S| \rho < 0$$

Posteriormente se tendrá presente esta última estructura para el control discontinuo  $u_n$ .

Si se satisface la condición de encuentro, entonces es posible juntar la incertidumbre total en una función escalar  $\xi(x)$  que representa la incertidumbre del sistema. Por lo tanto consideraremos el sistema:

$$\dot{x} = F(x) + G(x) \left[ u(x) + \xi(x) \right] \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.6)$$

### 3.2 EL METODO MINIMO-MAXIMO

Este método se desarrollará, en base a la teoría de control de estructura variable para diseñar retroalimentación de estado  $u: X \rightarrow \mathbb{R}$  tales que, para cualquier condición inicial  $x_0$  y para toda incertidumbre  $\xi(x)$ , existe una solución  $x(t_0)$  de (3.6) que es acotada (definición 10 del anexo).

Esta descripción empieza con un sistema sin incertidumbre (sistema nominal) no controlado de la forma

$$\dot{x} = F(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.7)$$

Donde suponemos que  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema (3.7). Este método de aproximación requiere que el sistema nominal sea asintóticamente estable.

En la descripción del Método Mini-Max. Suponemos estabilidad del sistema (3.7) con función de Lyapunov  $V(x)$  donde  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  y tiene derivada continua, de forma que existen funciones continuas estrictamente crecientes.

$$\gamma_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ desde } i = 1, 2, 3$$

con las propiedades de que

$$\gamma_i(0) = 0, \text{ y } \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_i(r) = \infty, \quad i = 1, 2, 3$$

de manera que para toda  $x \in X$  tenemos

$$\begin{aligned} & \text{y} \quad \gamma_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \gamma_2(\|x\|) \\ & \quad \quad \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x} F(x) \leq -\gamma_3(\|x\|) \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$  indica el vector gradiente de la función  $V(x)$ , de manera que el factor  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} F(x)$  indica el producto interior de los



vectores  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$  y  $F(x)$ .

El objetivo inmediato es usar la función de Lyapunov  $V(x)$ , y cotas sobre la incertidumbre  $\xi(x)$ , para obtener condiciones sobre el control de retroalimentación de estado  $u = u(x)$  que garantice cotas de las trayectorias de estado del control (3.6).

Una función de Lyapunov, candidata para el sistema de control (3.6) con control  $u = u(x)$ , es de nuevo  $V(x)$ . Escojamos un control  $u(x)$  que haga negativa la derivada (con respecto a  $t$ ) de  $V(x)$ , sobre las trayectorias del sistema de retroalimentación. Es decir, escojamos  $u = u(x)$  tal que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left[ F(x) + G(x) [u(x) + \xi(x)] \right] \\ &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} F(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x) [u(x) + \xi(x)] < 0\end{aligned}\quad (3.9)$$

donde en la primera igualdad hemos sustituido la parte derecha de (3.6). Considerando la desigualdad (3.8b) tenemos (3.9), si el control  $u(x)$  lo escogemos de manera que

$$\min_u \max_{\xi} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x) [u(x) + \xi(x)] \right) < 0 \quad (3.10)$$

para toda  $x \in X$  y para todo control e incertidumbre admisible. Para garantizar que el producto sea negativo tomamos el valor mínimo del producto cuando actúa el control "u", y escogiendo el valor máximo del producto cuando actúa la perturbación  $\xi(x)$  (ya que  $\xi(x)$  es acotada) de manera que garanticemos estabilidad asintótica.

Suponiendo que  $G^t(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} \neq 0$ , el control está dado por

$$u = u(x) = - \frac{G^t(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x}}{\| G^t(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} \|} \rho(x) \quad (3.11)$$

donde  $\rho(x)$  es una función escalar que satisface  $\rho(x) \geq \| \xi(x) \|$ .

Puede demostrarse por sustitución directa que el control (3.11) satisface (3.10). Los controles que satisfacen la desigualdad (3.10) son llamados controles Mini-Max.

Si  $G^t(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x}$  es cero se toma el control

$$u \in \{ u \in \mathbb{R} \text{ y } |u| \leq \rho(x) \} \quad (3.12)$$

Sobre el sistema (3.6) consideremos las siguientes hipótesis:

i) Las funciones  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$  son conocidas mientras que  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función desconocida. Todas estas funciones se consideran continuas en  $x$ .

ii) La norma del elemento de incertidumbre es acotado por una función  $\rho(x)$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ . i.e.,

$$|\xi(x)| \leq \rho(x) \quad (3.13)$$

donde  $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función conocida y continua en  $x$ .

iii) Dado un conjunto compacto  $E \subset \mathbb{R}^n$  existen constantes  $m_i$ ,  $i=1,2$  tales que para toda  $x \in E$ :

$$\|F(x)\| \leq m_1 ; \|G(x)\rho(x)\| \leq m_2 ;$$

iv) El origen  $x = 0$  es asintóticamente estable para el sistema nominal (3.7). En particular, existe una función de Lyapunov  $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  de clase  $C^1$  y funciones continuas estrictamente crecientes  $\gamma_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $i=1,2,3$ ; los cuales satisfacen:

$$\gamma_i(0) = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (3.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_i(r) = \infty, \quad i = 1,2 \quad (3.15)$$

y tal que para toda  $x \in X$

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (3.16)$$

y

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} F(x) \leq -\gamma_3(\|x\|) \quad (3.17)$$

Bajo las hipótesis i) - iv) se busca un control de retroalimentación para el sistema (3.6), que garantice que toda función del sistema es finalmente acotada en un conjunto que contiene al estado  $x = 0$ .

### CONTROL DE RETROALIMENTACION

Motivado por el control Mini-Max, se propone la siguiente clase de controles. Un miembro de esta clase de  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $x$  tal que, dado  $\epsilon > 0$ .

$$P(x) = -\frac{\mu(x)}{\|\mu(x)\|} \rho(x) \quad \text{si } \|\mu(x)\| > \epsilon$$

y

$$\|P(x)\| \leq \rho(x) \quad \text{si } \|\mu(x)\| \leq \epsilon \quad (3.18)$$

$$\text{donde } \mu(x) := G^t(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} \rho(x). \quad (3.19)$$

Un ejemplo de tales controles es:

$$P(x) = \begin{cases} -\frac{\mu(x)}{\|\mu(x)\|} \rho(x) & \text{si } \|\mu(x)\| > \epsilon \\ -\frac{\mu(x)}{\epsilon} \rho(x) & \text{si } \|\mu(x)\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (3.20)$$

Donde mostramos que un control del tipo (3.18) asegura la acotación final de todas las soluciones posibles del sistema en una vecindad arbitrariamente pequeña del estado  $x = 0$ . De tal manera que un control continuo del tipo (3.18) asegura una dinámica (conjunto de soluciones) que es arbitrariamente cercana a la garantizada por el control discontinuo Mini-Max, llamada estabilidad asintótica.

#### CONSIDERACIONES ADICIONALES

Consideremos el sistema (3.6) con control (3.18) sujeto a las hipótesis i) - iv). la derivada de la función de Lyapunov es

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left( F(x) + G(x) [P(x) + \xi(x)] \right) \quad (3.21)$$

como consecuencia de (3.13) y (3.17) con (3.19) se tiene que:

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma_3(\|x\|) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x)P(x) + \|\mu(x)\|$$

en vista de (3.18) si  $\|\mu(x)\| > \epsilon$

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma(\|x\|)$$

y si  $\|\mu(x)\| \leq \epsilon$  esto implica que

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma(\|x\|) + 2\|\mu(x)\|$$

por lo tanto para toda  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma_3(\|x\|) + 2\epsilon \quad (3.22)$$

Como las funciones  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son continuas y estrictamente crecientes, además satisfacen (3.15), se tienen definidas las funciones inversas  $\gamma_i^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , con  $i = 1, 2$ ; continuas y estrictamente crecientes, lo cual también se cumple para  $\gamma_3^{-1}$  si  $\lim_{r \rightarrow \infty} r = \infty$

$\gamma_3(r) = \infty$ ; sin embargo, si el  $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_3(r) < \infty$ , entonces este límite existe. Esto es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_3(r) = \ell \quad (3.23)$$

tal que  $\gamma_3^{-1}: (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}^+$  está definida, continua y estrictamente creciente. En base a esta observación agregamos la siguiente hipótesis

v) Si  $\gamma_3$  esta acotada, que equivale a tener la ecuación (3.23) entonces:

$$2\varepsilon < \ell \quad (3.24)$$

#### Teorema 6

Si consideramos el sistema (3.6) con control de retroalimentación (3.18) y se satisfacen las condiciones i) - iv) entonces tenemos lo siguiente respecto a este sistema:

#### A) EXISTENCIA:

Dado  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$ , existe una solución  $x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $x(t_0) = x_0$

#### B) ACOTACION

Si  $x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $x(t_0) = x_0$ , es solución de (3.6), entonces

$\|x_0\| < r$  implica que  $\|x(t)\| \leq d(r)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , donde

$$d(r) = \begin{cases} (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R) & \text{si } r \leq R \\ (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(r) & \text{si } r > R \end{cases} \quad (3.25)$$

y

$$R = \gamma_3^{-1}(2\varepsilon) \quad (3.26)$$

Por lo tanto, la solución tiene una continuación sobre  $[t_0, \infty)$

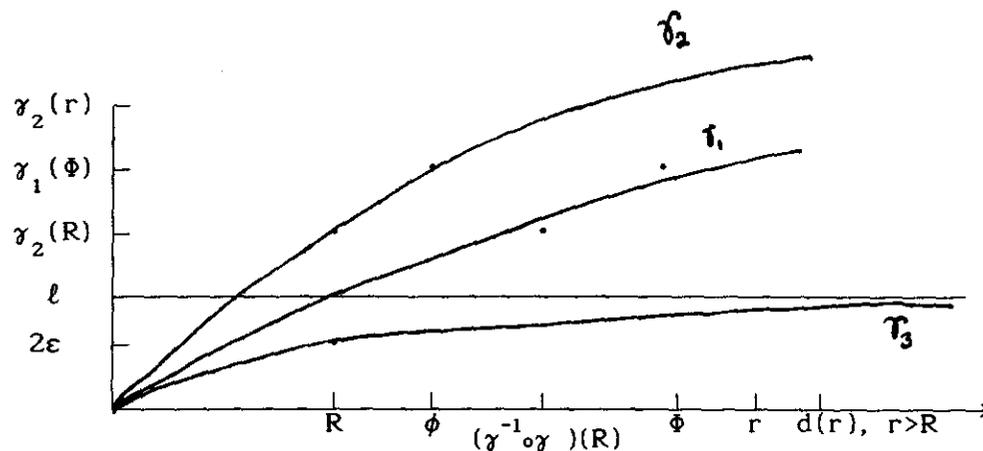
### C) ACOTADA FINALMENTE

Si  $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $x(t_0) = x_0$ , es solución de (3.6) con  $\|x_0\| \leq r$ , entonces para  $\Phi > (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R)$ , dado tenemos que  $\|x(t)\| \leq \Phi$ , para todo  $t > t_0 + T(\Phi, r)$ , donde

$$T(\Phi, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \phi \\ \frac{\gamma_2(r) - \gamma_2(\phi)}{\gamma_3(\phi) - 2\varepsilon} & \text{si } r > \phi \end{cases}$$

y

$$\phi = (\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1)(\Phi)$$



**Demostración: A)** Consideremos la función  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$h(x) = F(x) + G(x)[P(x) + \xi(x)]$$

como consecuencia de las condiciones i) - iii) se tiene que  $h$  es una función continua para la cual existe un número real  $m$  tal que,

$$\|h(x)\| \leq m$$

para toda  $x \in E$  y para todo  $t_0$  en  $(a, b)$  y  $x_0$  en el interior de  $E$ , existe una solución  $x \in [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $x(t_0) = x_0$  (por el teorema de Cauchy-Peano; ver [12] pág. 58).

B) Considere una solución  $x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x(t_0) = x_0$ , con  $\|x_0\| \leq r$ . Sea

$$\zeta := \max\{r, R\}$$

y

$$\|x_0\| < \zeta$$

además  $R \leq \zeta$  también por (3.25)

$$d(r) = (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(\zeta)$$

y considerando (3.16)

$$\gamma_1(\zeta) \leq \gamma_2(\zeta)$$

tal que

$$\zeta \leq (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(\zeta) = d(r)$$

entonces

$$\|x(t_0)\| = \|x_0\| \leq \zeta \leq d(r).$$

Ahora supongamos que existe  $t_3 > t_0$  tal que

$$\|x(t_3)\| > d(r) \tag{3.27}$$

ya que  $x$  es solución continua y

$$\|x(t_0)\| \leq \zeta \leq d(r) < \|x(t_3)\|$$

esto es, existe  $t_2$  en  $[t_0, t_3)$  tal que

$$\|x(t_2)\| = \zeta \quad \text{y} \quad \|x(t)\| \geq \zeta,$$

para todo  $t \in [t_2, t_3]$ .

Ahora, en vista de (3.16), (3.21), (3.22), y (3.6)

$$\gamma_1(\|x(t_3)\|) \leq V(x(t_3)) = V(x(t_2)) + \int_{t_2}^{t_3} \dot{V}(x(\tau)) d\tau$$

y por la ecuación (3.22)



$$\leq \gamma_2(\|x(t_2)\|) + \int_{t_2}^{t_3} [-\gamma_3(\|x(\tau)\|) + 2\varepsilon] d\tau$$

por otro lado tenemos que

$$\zeta \geq R \text{ y aplicando } \gamma \text{ tenemos } \gamma_3(\zeta) \geq \gamma_3(R)$$

como

$$\|x(t)\| \geq \zeta,$$

para todo  $t \in [t_2, t_3]$ .

$$\gamma_3(\|x(\tau)\|) \geq \gamma_3(R) \Rightarrow -\gamma_3(\|x(\tau)\|) + 2\varepsilon \leq -\gamma_3(R) + 2\varepsilon$$

$$\leq \gamma_2(\zeta) + \int_{t_2}^{t_3} [-\gamma_3(R) + 2\varepsilon] d\tau$$

usando (3.26)

$$= \gamma_2(\zeta) + \int_{t_2}^{t_3} [-\gamma_3(\gamma_3^{-1}(2\varepsilon)) + 2\varepsilon] d\tau$$

$$= \gamma_2(\zeta)$$

como

$$\|x(t_3)\| \leq (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(\zeta) = d(r)$$

Sin embargo esto contradice la suposición (3.27). De aquí que,

$$\|x(t)\| \leq d(r)$$

por lo tanto existe un compacto  $E$ , es decir,

$$E = \{ x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq K > d(r) \}$$

del cual las soluciones no escapan (con  $\|x_0\| \leq r$ ). De tal forma que toda solución puede ser extendida sobre cualquier intervalo compacto y por lo tanto sobre  $[t_0, \infty)$ .

C) Sea  $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x(t_0) = x_0$  con  $\|x_0\| \leq r$ , que denota una solución de (3.6). Consideremos

$$\Phi = (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R)$$

Por definición,

$$\phi = (\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1)(\Phi)$$

y  $\phi > R$  con

$$d(\phi) = (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(\phi) = \Phi.$$

si  $r \leq \phi$ , entonces  $\|x_0\| \leq \phi$ ; entonces, en vista del resultado **B** de acotación.

$$\|x_0\| \leq d(\phi) = \Phi$$

para todo  $t \in [t_0, \infty)$  tal que  $T(\Phi, r) = 0$ .

Ahora considerando  $r > \phi$ , y suponiendo que

$$\|x(t)\| > \phi \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_1] \quad (3.28)$$

con  $t_1 = t_0 + T(\Phi, r)$ , donde  $T(\Phi, r) = \frac{\gamma_2(r) - \gamma_1(\phi)}{\gamma_3(\phi) - 2\varepsilon}$ .

Entonces, considerando (3.16), (3.21), (3.22) y (3.6) tenemos

$$\gamma_1(\|x(t_1)\|) \leq V(x(t_1)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(\tau)) d\tau$$

y por (3.22) esto es

$$\leq \gamma_2(\|x(t_0)\|) + \int_{t_0}^{t_1} [-\gamma_3(\|x(\tau)\| + 2\varepsilon)] d\tau$$

y como consecuencia de (3.28)

$$\leq \gamma_2(r) + \int_{t_0}^{t_1} [-\gamma_3(\phi) + 2\varepsilon] d\tau$$

$$= \gamma_2(r) + (t_1 - t_0)[- \gamma_3(\phi) + 2\varepsilon]$$

y por definición de  $t_1$

$$= \gamma_2(r) + T(\Phi, r)[- \gamma_3(\phi) + 2\epsilon]$$

y como  $r > \phi$ , entonces

$$= \gamma_2(r) + \frac{\gamma_2(r) - \gamma_1(\phi)}{\gamma_3(\phi) - 2\epsilon} [- \gamma_3(\phi) + 2\epsilon]$$

$$= \gamma_1(\phi)$$

esto es,  $\|x(t_1)\| \leq \phi$ . Por lo que contradice la suposición (3.28).

Debemos tener que  $t_2 \in [t_0, t_1]$  entonces, necesariamente  $\|x(t_2)\| \leq \phi$ .

De manera que como consecuencia del resultado **B** de acotación

$$\|x(t)\| \leq d(\phi) = \phi$$

para todo  $t \geq t_2$ , y de aquí que

$$\|x(t)\| \leq \phi$$

para todo  $t > t_0 + T(\Phi, r)$

□

### Ejemplo 5

Para ilustrar la aplicación del teorema 6, considere el péndulo simple de longitud  $\ell$  sujeto a un control momentáneo  $u$  y una perturbación  $v$ ,  $\|v\| \leq \rho\ell = \text{cte}$ . Con  $x_1 = \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$ , las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 + u - v \frac{\cos x_1}{\ell} \end{aligned}$$

Donde  $a$  es una constante positiva. El sistema nominal ( $u = v = 0$ )

posee multiples puntos de equilibrio, ninguno de los cuales es asintóticamente estable. Sin embargo, empleando una retroalimentación lineal uno puede formar un nuevo sistema nominal para el cual el cero es un punto de equilibrio y es asintóticamente estable. Sea

$$u = -bx_1 - cx_2 + p(x)$$

donde b y c son constantes positivas y p es un control del tipo (3.18). La ecuación del sistema es entonces

$$\dot{x} = f(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[ p(x) - v \frac{\cos x_1}{\ell} \right]$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -bx_1 - cx_2 - a \sin x_1 \end{bmatrix}$$

El nuevo sistema nominal no controlado  $\dot{x} = f(x)$  tiene a  $x = 0$  como punto de equilibrio. Es fácil ver que la función dada por

$$V(x) = (b + \frac{1}{2}c^2)x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2 + 2a(1 - \cos x_1)$$

es una función de Lyapunov. Además de las condiciones (3.16) y (3.17)

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|x\|) &= \lambda_1 \|x\|^2, & \lambda_1 &:= \lambda_{\min}[p] \\ \gamma_2(\|x\|) &= \begin{cases} \lambda_2 \|x\|^2 + 2a(1 - \cos\|x\|), & \|x\| \leq \pi \\ \lambda_2 \|x\|^2 + 4a, & \|x\| > \pi \end{cases} & \lambda_2 &:= \lambda_{\max}[p] \\ \gamma_3(\|x\|) &= \lambda_3 \|x\|^2 & \lambda_3 &:= \min\{bc, c\} \end{aligned}$$

donde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  denotan el mínimo y máximo valor propio de P

$$p = \begin{bmatrix} b + \frac{1}{2}c^2 & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & 1 \end{bmatrix}$$

más aún,

$$|\xi(x)| = \left| -v \frac{\cos x_1}{\ell} \right| \leq \rho |\cos x_1|$$

Veamos que el ejemplo cumple con las hipótesis del teorema 6. Obviamente, i) y ii) se satisfacen. Veamos iii) el cual establece que

$$\|f(x)\| \leq m \text{ y } \|G(x)\rho(x)\| \leq M$$

$$\|f(x)\| = \sqrt{x_2^2 + b^2 x_1^2 + c^2 x_2^2 + bc x_1 x_2 + a^2 \sin^2 x_1 + ab x_1 \sin x_1 + ac x_2 \sin x_1}$$

claramente se puede ver que  $f$  es acotada.

$$\|G(x)\rho(x)\| = \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho(x) \right| \leq M$$

como  $\rho$  es una función continua podemos decir que alcanza el supremo y la podemos acotar. Por la tanto podemos ver que iii) se satisface.

Ahora veamos si cumple la hipótesis iv). Primero, veamos si la función  $V(x)$  es definida positiva para  $x \neq 0$

$$V(x) = bx_1^2 + \frac{1}{4}c^2 x_1^2 + \frac{1}{4}c^2 x_2^2 + cx_1 x_2 + x_2^2 + 2a(1 - \cos x_1) > 0$$

ahora veamos que la derivada de la función de Lyapunov es negativa

$$\dot{V}(x) = (b + \frac{1}{2}c^2)2x_1 \dot{x}_1 + c[x_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_1 x_2] + 2x_2 \dot{x}_2 + 2a\dot{x}_1 \sin x_1$$

desarrollando

$$\dot{V}(x) = -bcx_1^2 - cx_2^2 - acx_1 \sin x_1 < 0 \text{ para } x \in [-\pi, \pi]$$

por lo tanto el punto de equilibrio  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  es asintóticamente estable, el nuevo sistema cumple con los requisitos para un sistema nominal que pide el teorema.

Nos falta por demostrar que la función de Lyapunov esta acotada por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ ; es decir,

$$\gamma_1 (\|x\|)^2 \leq V(x) \leq \gamma_2 (\|x\|)^2$$

$$\gamma_1 (\|x\|)^2 = \lambda_1 \|x\|^2, \lambda_1 := \lambda_{\min} \text{ [valor propio de p]}$$

$$P(\lambda) = ((b + \frac{1}{2}c^2) - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4}c^2$$

$$\lambda_1 = \frac{b + \frac{1}{2}c^2 + 1 - \sqrt{(b-1)^2 + (b + \frac{1}{4}c^2)c^2}}{2} < b + \frac{1}{2}c^2 + 1$$

$$\lambda_2 = \frac{b + \frac{1}{2}c^2 + 1 + \sqrt{(b-1)^2 + (b + \frac{1}{4}c^2)c^2}}{2}$$

$$(b + \frac{1}{2}c^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) \leq bx_1^2 + \frac{1}{4}c^2x_1^2 + \frac{1}{4}c^2x_2^2 + cx_1x_2 + x_2^2 + 2a(1 - \cos x_1)$$

la parte izquierda se puede ver que si cumple

$$bx_1^2 + \frac{1}{4}c^2x_1^2 + \frac{1}{4}c^2x_2^2 + cx_1x_2 + x_2^2 + 2a(1 - \cos x_1) \leq \left[ \frac{b + \frac{1}{2}c^2 + 1 + \sqrt{(b-1)^2 + (b + \frac{1}{4}c^2)c^2}}{2} \right] (x_1^2 + x_2^2) + 2a(1 - \cos \|x_1\|)$$

entonces esta parte también es cota de la función  $V(x)$ . Por lo tanto cumple con la condición iv). Por lo que este ejemplo cumple con las hipótesis del teorema 6. Por lo tanto, para  $\epsilon > 0$  dado, se sigue de (3.18) que

$$p(x) = - \frac{cx_1 + 2x_2}{|cx_1 + 2x_2|} |\cos x_1| \quad \text{si } |(cx_1 + 2x_2)\cos x_1| \rho > \epsilon$$

$$|p(x)| \leq |\cos x_1| \rho \quad \text{si } |(cx_1 + 2x_2)\cos x_1| \rho \leq \varepsilon$$

Con éste control  $p(x)$  logramos anular la influencia de la perturbación  $\xi(x)$ , de manera que persiste la estabilidad asintótica del pendulo descrito por  $\dot{x} = F(x)$ . Por lo tanto con esto se ilustra la utilidad del teorema 6.

Hemos considerado un sistema dinámico que contiene elementos de incertidumbre; la única información que hemos considerado acerca de estos elementos de incertidumbre es posiblemente su tamaño. Con la propiedad de que el sistema se reduce a uno descrito por la ecuación (3.6) de tal manera que un sistema no controlado sin incertidumbre es Lyapunov estable con respecto el estado  $x = 0$ , es aquí donde existe una clase de controles de retroalimentación los cuales son continuos en el estado y garantizan que toda respuesta del sistema, es acotada y acotada finalmente en una vecindad del estado  $x = 0$ . Aun más esta vecindad es finalmente acotada y arbitrariamente pequeña.



**BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES**

EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

## CONCLUSION

En el presente trabajo se han expuesto los principales conceptos de la teoría de control de estructura variable.

El diseño de controles y superficies de cambio con dinámica estable fué el objetivo principal.

En el caso de entrada múltiple nos dimos cuenta que el proceso de diseño es complicado al acoplar los controles sobre la superficie de cambio. Otros métodos consisten en desarrollar técnicas (como los métodos de diagonalización y jerarquía) para hacer efectivo el desacoplamiento de controles y así simplificar el proceso de diseño. Esencialmente, estas técnicas reducen el problema de control multivariable a una serie de problemas de entrada simple.

Es conveniente enfatizar que en el diseño de sistemas de control de estructura variable se tienen dos pasos importantes los cuales son:

- 1 Diseño de la superficie de cambio para asegurar el funcionamiento de la planta en el modo deslizante.
- 2 Diseño de las leyes de control para forzar las trayectorias del sistema y mantenerlas en la superficie deslizante, con la cual aseguramos la estabilización deseada

En base a lo anterior, se han introducido y desarrollado

conexiones importantes con el control determinista de sistemas con incertidumbre. En donde estas dos técnicas tienen una fuerte relación.

Otro problema de la teoría de control de estructura variable es la necesidad de completar la información del espacio de estado, así como también el desarrollo de superficies de cambio y de controles basados en la medibilidad de las señales de salida, las cuales representan un problema abierto y un área importante de investigación. El desarrollo de observadores no lineales usando conceptos de control de estructura variable es un paso en esta dirección.

## ANEXO

### TEOREMA 7:

Para que un subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  sea un modo deslizante es suficiente que en algún dominio  $\Omega$  que contenga a  $D$ , exista una función  $V(x)$  continuamente diferenciable con respecto a todos los argumentos satisfaciendo las siguientes condiciones:

1)  $V(x)$  es positiva definida con respecto a  $S$ , esto es,  $V(x) > 0$ , con  $S \neq 0$  y  $x$  arbitraria,  $V(x) = 0$  si  $S = 0$  y sobre la esfera de radio  $\rho$  para toda  $x \in \Omega$ , se satisface que:

$$\text{i).- } \inf V(x) = h_\rho \quad h_\rho > 0, \text{ sobre } \|S\| = \rho$$

$$\text{ii).- } \sup V(x) = H_\rho \quad H_\rho > 0, \text{ sobre } \|S\| = \rho$$

donde  $h_\rho$  y  $H_\rho$  dependen de  $\rho$  ( $h_\rho \neq 0$  si  $\rho \neq 0$ ).

2) La derivada total de  $V(x)$  con respecto al tiempo, para el sistema (1.1), tiene un supremo negativo para toda  $x \in \Omega$  excepto para  $x$  en la superficie de cambio, donde el control de entrada es indefinido y la derivada de  $V(x)$  no existe.

### Teorema 8

**Existencia:** Si el vector  $f(t,x)$  está definido y es continuo en el cilindro

$$R : |t - t_0| \leq a, \quad \|x - x_0\| \leq b$$

en él se verifica

$$\|f(t,x)\| \leq \frac{b}{a}$$

entonces existe una función vectorial  $x(t)$  definida en el intervalo

$|t - t_0| \leq a$ , con derivada continua, que satisface

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{x} = f(t, x)$$

### Teorema 9

**Unicidad:** Si se cumplen las condiciones del teorema anterior y además existe una constante  $k$  tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

entonces la solución es única.

**Superficies definidas implícitamente:** Considere una  $F: \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$  y un vector fijo  $Z_0$  en  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $S$  un conjunto de nivel definida por la ecuación  $F(x) = Z_0$ . Si  $F$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^{n+m}$  y la aproximación afin determina plano  $n$ -dimensional implícitamente por  $A(x) = Z_0$ , entonces este plano es llamado el tangente a  $S$  en  $x_0$ . Como  $F(x_0) = Z_0$ , la definida ecuación del plano se reduce a

$$F'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Si además  $F$  es continuamente diferenciable en este dominio, entonces  $S$  representa una superficie suave en todo punto en el cual esta es una tangente.

### Teorema 10

Sea  $F: \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable. Entonces el tangente al conjunto de nivel  $F(x_0) = Z_0$  en  $x_0$  existe (y tiene dimensión " $n$ ") si y sólo si  $F'(x_0)$  tiene " $m$ " columnas linealmente independientes.

Consideraremos una función  $f(y)$  definida en un abierto conteniendo a  $y=0$ . Una función  $V(y)$  definida en una vecindad de  $y=0$  es llamada una función de Lyapunov si

- i) Si tiene derivadas parciales continuas
- ii)  $V(y) \geq 0$  con  $|y| > 0$
- iii) La derivada de  $V$  sobre la trayectoria satisface  $\dot{V}(y) \leq 0$ .

#### Teorema 11

Si  $F(y)$  es continua en un abierto conteniendo a  $y=0$ ,  $F(0)=0$  esto es, existe una función de Lyapunov  $V(y)$ , entonces la solución  $y=0$  de  $y'=f(y)$  es estable.

#### Teorema 12

Si en el teorema anterior  $\dot{V}(y) < 0$  con  $|y| > 0$ , entonces la solución  $y=0$  de  $y'=f(y)$  es asintóticamente estable.

#### Definición 8

**Superficie** Sea  $X$  un subconjunto de algún conjunto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $X$  es una superficie  $k$ -dimensional, si ésta es localmente difeomorfa a  $\mathbb{R}^k$ ; esto es, cada punto  $x \in X$  contiene una vecindad  $V$  de  $X$  la cual es difeomorfa a un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$ .

#### Definición 9

**Estabilidad Asintótica:** Sea  $x^*$  una solución estable para  $t \geq t_0$ , si además existe  $\eta(t_0) > 0$  tal que  $\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \eta$  esto implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0$ , entonces se dice que " $x$ " es asintóticamente estable.

### Definición 10

**Acotación:** Sea  $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una solución de (3.6). Diremos que "x" es acotado si para cada  $x_0$  existe una constante finita positiva  $d(x_0)$ ,  $0 < d(x_0) < \infty$ , tal que  $\|x(t)\|_2 < d(x_0)$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ , donde  $\|\cdot\|_2$  es la norma usual.

### Definición 11

**Acotada Finalmente:** Diremos que una solución para (3.6) tiene un comportamiento acotado finalmente con respecto a un conjunto cerrado y acotado  $S \subset \mathbb{R}^n$ , si para cada  $x_0$  existe una constante no negativa  $T(x_0, S) < \infty$  tal que  $x(t) \in S$  para todo  $t > t_0 + T(x_0, S)$ .



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS  
Y MATEMÁTICAS

EL SABER DE MIS HIJOS  
PARA MI GRANDEZA

## BIBLIOGRAFIA

- [1] RARMOND A. DECARLO, STANISLAW H. ZAK AND GREGORY P. MATTHEWS,  
"Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable System:  
A Tutoriale".  
Proceedings of the IEEE, vol 76, número 3 pp, 212-232, 1988
- [2] HEBERTT SIRA-RAMIREZ, "Differential geometric methods in  
variable-structure control".  
Internatoanal Journal of Control vol 48, número 4 pp,  
1359-1390, 1988
- [3] V. I. UTKIN, "Sliding modes and their aplication in variable  
structure sistem". Moscow, Soviet Union: Mir Publisher, 1978
- [4] V. I. UTKIN, "Variable structure system present and future".  
Autimat remote control vol 44 número 9, pp, 1105-1120, 1983
- [5] V. I. UTKIN, "Equation of the sliding regime in the  
discontinuos system I".  
Autimat remote control vol 32 número 12, pp, 1897-1907, 1971
- [6] A. G. LUK'YONOV AND V. I. UTKIN, "Method of reducing equation  
of dinamic systems to regular forms".  
Autimat remote control vol 42 número 4, pp, 413-422, 1981
- [7] VICTOR GUILLEMIN AND ALAN POLLACK, "Differential topology".  
Prentice Hall inc, Englewood Cliffs, New Jersey
- [8] WONHAM W. MURRAY "Linear multivariable control: a geometrical  
approach".  
Third edition New York, Springer-Verlang 1985.
- [9] RODRIGO GONZALEZ GONZALEZ, "Estabilidad con teoría de control  
lineal".  
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora, 1992

- [10] K. K. D. YOUNG, P. V. KOKOTOVIC, AND V. I. UTKIN, "A singular perturbation analysis of high-gain feedback system".  
IEEE trans. automat. contr., vol ac-22, número 6, pp. 931-938,1977
- [11] MARTIN J. CORLES AND GEORGE LEITMANN "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic system"  
IEEE transactions on automatic control, vol. ac-26, número 5, October 1981.
- [12] EMILIO O. ROXIN "Ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de control tomo I"  
editorial universitaria de Buenos Aires 1968.
- [13] V. T. HAIMO. "Finite time controllers".  
Siam j. control and optimization; vol. 24, número 4, July 1976
- [14] RODOLFO SUAREZ C., JULIO SOLIS D. Y J. ALVAREZ. "Stabilization of linear control system by means of bounded continuous nonlinear feedback control".  
Syst. & cont. lett. por aparecer.
- [15] RICHARD E. WILLIAMSON, RICHARD H. CROWEL AND HALE F. TROTTER  
"Calculus of vector funtions"  
Prentice Hall thrid Edition 1972.
- [16] PHILIPS HARTMAN "Ordinary Differential Ecuations".