En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México siendo las 18:00 horas del día 7 de Septiembre de 1995 se reunieron en el aula 9K-205 del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, los señores:

M.C. JORGE RUPERTO VARGAS CASTRO
M.C. HORACIO LEYVA CASTELLANOS
L.M. FRANCISCO ARMANDO CARRILLO NAVARRO

Acta No. 86
Hoja No. 85
Libro No. 01
Exp. No. 8922723-9

bajo la presidencia del primero y fungiendo como secretario el último para efectuar el examen profesional de la carrera de:

Licenciado en Matemáticas

a la Srita. Elizabeth Félix Mendívil

Después de haber presentado su tesis intitulada: "Dinámica con Ecuaciones en Diferencias" la que previamente le fué aprobada por el jurado, los señores sinodales replicaron a la sustentante y después de debatir entre sí reservada y libremente la declararon:

APROBADA POR UNANIMIDAD

Elizabeth Félix M.
Firma de la sustentante

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

DINAMICA CON ECUACIONES EN DIFERENCIAS

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

ELIZABETH FELIX MENDIVIL

HERMOSILLO, SONORA. **SEPTIEMBRE DE 1995**

A mis queridos padres...
Por su apoyo y comprensión

A mis hermanos

A los maestros que me ayudaron en mi preparación, en especial a mi querido esposo, Horacio Leyva Castellanos.

INDICE

INTRODUCCION

Un factor circunstancial que motivó la realización de éste trabajo es el poco material disponible en nuestra comunidad matemática del tema de Ecuaciones en Diferencias. Este trabajo es un intento de cubrir tal vacío, de manera que espero sea utilizado para trabajos posteriores.

En la primera parte del trabajo presentamos las bases para describir las Ecuaciones en Diferencias. Es decir, exponemos los diferentes operadores que se utilizan para construir el cálculo finito y poder describir la teoría de las ecuaciones en diferencias, sus métodos de solución y algunas aplicaciones.

En el capítulo siguiente trabajamos lo relacionado a Sistemas Lineales de Ecuaciones en Diferencias; como establecer el problema de condición inicial y deducir su solución, así como también mostrar la geometría de las soluciones, de acuerdo al tipo de estabilidad del punto fijo $x=0$.

Por último, en el capítulo III, tratamos los métodos directos de ecuaciones en diferencias no lineales, los cuales consisten de una descripción cualitativa del comportamiento de las soluciones.

OBJETIVOS

El objetivo general de la realización de éste trabajo consiste en describir, mediante una monografía, la teoría de ecuaciones en diferencias; en la cual se describan los fundamentos teoricos de tales ecuaciones, así como la propia metodología matemática para su desarrollo y aplicación.

Más específicamente, buscamos describir resultados básicos para apoyar trabajos más especializados, por ejemplo en el área de Análisis Numérico, Aplicaciones clásicas a la Economía, Ecología, Mecánica, etc. pero particularmente en el Control y Optimización de Sistemas Dinámicos Discretos del tipo

$$x_{k+1}= F(x_k,u_k) \qquad (1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado; $F:\mathbb{R}^n x \ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable, o al menos continua, y la sucesión $u_k \in \mathbb{R}^m$ es el control aplicado al sistema (1) en el período k. Esta variable de control puede "intervenir" en la dinámica descrita por (1). Mediante ésta intervención podemos proponernos estabilizar, optimizar, acotar, etc., las soluciones de (1).

Los Sistemas de Ecuaciones en Diferencias, también llamados Sistemas Discretos, han adquirido una creciente importancia, por lo que el desarrollo matemático de ésta teoría se ha vuelto una necesidad.

CAPITULO I ECUACIONES EN DIFERENCIAS ESCALARES

I.1.- Definiciones y propiedades de los operadores diferencia Δ y suma Δ^{-1}.

Empezaremos por describir el cálculo que requerimos para estudiar la teoría de las ecuaciones en diferencias.

DIFERENCIA DE UNA FUNCION

Sea **y** una función real y h cualquier constante para la cual k+h esté en el dominio de y siempre que k lo esté; entonces $\Delta\mathbf{y}$ se define como *la primera diferencia avanzada de* **y**, y se denota como

$$\Delta\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(k+h) - \mathbf{y}(k)$$

La transformación "Δ" es llamada "*El operador diferencia*" que indica que la función **y** es operada o transformada al nuevo campo de la función Δy, el número h es llamado "*el intervalo de diferencia*". El operador Δ transforma funciones definidas en $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Tomando el incremento $\Delta k=h$ como la unidad, tenemos:

$$\Delta\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)$$

En algunos casos seguirá apareciendo el valor de h, solo como una generalización.

Esta primera diferencia avanzada también se puede escribir como:

$\Delta\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k$ donde consideraremos que $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k)$

Cabe aclarar que se pueden definir dos operadores más, equivalentes a Δ. Estos son el operador ∇ definido como

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-h)$$

llamado *operador diferencia hacia atrás.* El otro operador se define como

$$\delta y(k) = y(k + \frac{1}{2}h) - y(k - \frac{1}{2}h)$$

llamado *operador diferencia central.* Matemáticamente estos operadores están relacionados mediante una traslación de la variable independiente k, por lo que éstos tienen las mismas propiedades que obtendremos para Δ. El cálculo que se construye a partir del operador Δ también puede construirse, de una manera similar, bajo los operadores ∇ y δ.

A continuación se definen algunas propiedades del operador diferencia Δ.

TEOREMA I.1.1:
Si c es cualquier constante, la diferencia de la función cy es igual a c veces la diferencia de y, es decir,

$$\Delta[y(k)c] = \Delta[cy(k)] = c\Delta y(k)$$

DEMOSTRACION: Usando la definición de primera diferencia tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta[cy(k)] &= cy(k+1) - cy(k) = c[\ y(k+1) - y(k)\ ] \\ &= c\Delta y(k).\end{aligned}$$

■

TEOREMA I.1.2:
La diferencia de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus diferencias, es decir, si y_1 y y_2 son dos funciones;

$$\Delta\ [y_1(k) + y_2(k)\ ] = \Delta y_1(k) + \Delta y_2(k)$$

DEMOSTRACION: Usando la definición de primera diferencia tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta[y_1(k) + y_2(k)] &= y_1(k+1) + y_2(k+1) - [y_1(k) + y_2(k)] \\ &= y_1(k+1) - y_1(k) + y_2(k+1) - y_2(k) \\ &= \Delta y_1(k) + \Delta y_2(k).\end{aligned}$$ ■

COROLARIO I.1.1: Si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias;

$$\Delta\ [c_1y_1(k) + c_2y_2(k)\ ] = c_1\Delta y_1(k) + c_2\Delta y_2(k)$$

DEMOSTRACION: Aplicando el teorema I.1.2 a las funciones $c_1y_1(k)$ y $c_2y_2(k)$ obtenemos:

$$\Delta[c_1y_1(k) + c_2y_2(k)] = \Delta c_1y_1(k) + \Delta c_2y_2(k)$$

aplicando el teorema I.1.2:

$$\Delta[c_1y_1(k) + c_2y_2(k)] = c_1\Delta y_1(k) + c_2\Delta y_2(k).$$ ■

COROLARIO I.1.2: Sean y_1, y_2, ..., y_n ; n funciones y sean c_1, c_2, ..., c_n, constantes arbitrarias. Entonces para cualquier entero positivo n,

$$\Delta[c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + \dots + c_ny_n(k)] = c_1\Delta y_1(k) + c_2\Delta y_2(k)+\dots+c_n\Delta y_n(k)$$

DEMOSTRACION: (Usando inducción matemática sobre n).

TEOREMA I.1.3: Sea y un polinomio de grado n, es decir

$$y(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \dots + a_nk^n$$

con a_0, a_1, ..., a_n constantes arbitrarias y $a_n \neq 0$. Entonces la n-ésima diferencia de y es una función constante y todas las diferencias sucesivas son cero,

$$\Delta^p y(k) = 0 \quad \text{si } p > n$$

DEMOSTRACION: Por el corolario I.1.2:

$$\Delta y(k) = a_0\Delta 1 + a_1\Delta k + a_2\Delta k^2 + \ldots + a_n\Delta k^n$$

pero si m es cualquier entero positivo, usando el teorema del binomio (ver anexo A.I.1):

$$\Delta k^m = (k+h)^m - k^m$$

$$\Delta k^m = k^m + mk^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2} k^{m-2} h^2 + \ldots + \frac{m!}{(m-r)!r!} k^{m-r} h^r +$$

$$+\ldots + mkh^{m-1} + h^m - k^m$$

$$\Delta k^m = mk^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2} k^{m-2}h^2 + \ldots + \frac{m!}{(m-r)!r!} k^{m-r} h^r + \ldots + mkh^{m-1}$$

$$+ h^m$$

Vemos que en Δk^m obtenemos un número finito de términos con k^{m-1} como la más alta potencia de k. Así, aplicando el operador Δ a y(k), obtenemos una suma de términos. Aplicando el operador diferencia a un polinomio de grado n resulta un polinomio de grado (n-1). Por la misma razón $\Delta^2 y(k)$ será un polinomio de grado (n-2) y después de n aplicaciones del operador Δ obtenemos un polinomio de grado cero o una constante.

Esto prueba que $\Delta^n y(k)$ es una constante y la parte final del teorema sigue inmediatamente porque la diferencia de una constante es cero. ■

TEOREMA I.1.4: "*La diferencia de un producto de funciones*". Sean u(k) y v(k) dos funciones, entonces:

$$\Delta[u(k)v(k)] = u(k)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) + \Delta v(k)\Delta u(k).$$

que también puede escribirse como

$$\Delta[u(k)v(k)] = v(k+1)\Delta u(k) + u(k)\Delta v(k)$$

DEMOSTRACION:

$$\begin{aligned}
\Delta[u(k)v(k)] &= u(k+1)v(k+1) - u(k)v(k) \\
&= u(k+1)v(k+1) - u(k)v(k) + u(k)v(k+1) - u(k)v(k+1) \\
&= u(k)[v(k+1) - v(k)] + u(k+1)v(k+1) - u(k)v(k+1) \\
&= u(k)\Delta v(k) + u(k+1)v(k+1) - u(k)v(k+1) + \\
&\quad + v(k)u(k+1) - v(k)u(k+1) + u(k)v(k) - u(k)v(k) \\
&= u(k)\Delta v(k) + v(k)[u(k+1) - u(k)] + u(k+1)v(k+1) - \\
&\quad - u(k)v(k+1) - v(k)u(k+1) + u(k)v(k) \\
&= u(k)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) + [u(k+1) - u(k)][v(k+1) - \\
&\quad - v(k)]
\end{aligned}$$

$$\Delta[(u(k)v(k)] = u(k)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) + \Delta u(k)\Delta v(k) \qquad \blacksquare$$

TEOREMA I.1.5: "*La diferencia de un cociente de funciones*".
Sean u(k) y v(k) dos funciones, entonces:

$$\Delta\left[\frac{u(k)}{v(k)}\right] = \frac{v(k)\Delta u(k) - u(k)\Delta v(k)}{v(k)v(k+1)} \qquad \text{si } v(k)v(k+1)\neq 0$$

DEMOSTRACION: Es trivial si tomamos $g(k)=\dfrac{u(k)}{v(k)}$ ó tambien puede resolverse utilizando la diferencia del producto de funciones.

$$\begin{aligned}
\Delta g(k) &= g(k+1) - g(k) \\
&= \frac{u(k+1)}{v(k+1)} - \frac{u(k)}{v(k)} \\
&= \frac{v(k)u(k+1) - v(k+1)u(k)}{v(k+1)\ v(k)} \\
&= \frac{v(k)u(k+1) - v(k+1)u(k) + u(k)v(k) - u(k)\ v(k)}{v(k+1)\ v(k)} \\
&= \frac{v(k)[u(k+1) - u(k)] - u(k)[v(k+1) - v(k)]}{v(k+1)\ v(k)} \\
&= \frac{v(k)\Delta u(k) - u(k)\Delta v(k)}{v(k+1)\ v(k)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

I.2 .- Diferencias de orden superior, operador de corrimiento y sus propiedades.

Las correspondientes diferencias avanzadas de orden superior son definidas por iteración.

$$\Delta^2 y(k) = \Delta[\Delta y(k)] = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)$$
$$\Delta^3 y(k) = \Delta[\Delta^2 y(k)] = y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) + y(k)$$
$$\vdots$$
$$\Delta^n y(k) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_m^{\,n} y(k+n-m)$$

Otro operador de importante utilidad es el *operador de corrimiento* E, este es un operador de funciones de manera que si y(k) es una función real, entonces:

$$Ey(k) = y(k+h) \text{ para una h constante}$$

Tomando h=1 tenemos

$$Ey(k) = y(k+1)$$

Los teoremas I.1.1, I.1.2 también son propiedades de el operador de corrimiento.

DEFINICION I.2.1:
Dos operadores A_1 y A_2 se dice que son *equivalentes* ($A_1 \equiv A_2$) si para cualquier función y para la cual A_1 y A_2 son cada uno aplicables, las funciones $A_1 y$ y $A_2 y$ son iguales.
Si sabemos:

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$$

y como $Ey(k)= y(k+1)$, entonces
$\Delta y(k)= Ey(k) - y(k)$

$$\Delta y(k) = (E-I)y(k)$$

donde I es el operador identidad es decir, $Iy(k)= y(k)$.
Por lo tanto

$$\Delta \equiv (E-I)$$

o bien

$$Ey(k) = \Delta y(k) + Iy(k)$$

entonces:

$$E \equiv (\Delta + I)$$

Ahora podemos obtener algunas propiedades de los operadores E y Δ.

TEOREMA I.2.1: Si n es un entero positivo, entonces:

$$\Delta^n y(k) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{n-m} E^m y(k)$$

DEMOSTRACION: Por definición de equivalencia de operadores,

$\Delta \equiv (E-I)$ entonces para un $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Delta^n \equiv (E-I)^n$

aplicando el teorema del binomio a la parte derecha tenemos

$$\Delta^n \equiv (E-I)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{n-m} E^m I^{n-m}$$

pero $E^m I^{n-m} \equiv E^m$, así

$$\Delta^n \equiv (E-I)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{n-m} E^m$$

y aplicado a cualquier función real, tenemos

$$\Delta^n y(k) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{n-m} E^m y(k)$$

y su demostración es similar a la del teorema del binomio; la cual puede encontrarse en el libro de Rees Spark; "Algebra", 4a. ed.; 1992, pág. 319 y 320. ∎

TEOREMA I.2.2: Si n es un entero positivo, entonces:

$$E^n y(k) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^m y(k)$$

DEMOSTRACION: Por definición de equivalencia de operadores,

$E \equiv (\Delta+I)$ entonces para un $n\in\mathbb{Z}^+$ tenemos

$E^n \equiv (\Delta+I)^n$

aplicando el teorema del binomio a la parte derecha

$E^n \equiv (\Delta+I)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^m \; I^{m-n}$

pero $\Delta^n \; I^{n-m} \equiv \Delta^n$, así

$E^n \equiv (\Delta+I)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^m$

y aplicado a cualquier función tenemos el siguiente resultado

$$E^n y(k) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^m y(k)$$

y su demostración es similar a la del teorema del binomio. ∎

I.3.- Suma indefinida.

Otro operador importante es el operador suma indefinida Δ^{-1}.

DEFINICION I.3.1:

Si Y es una función cuya primera diferencia es la función y, se dice que Y es una *suma indefinida de* y denotada por Δ^{-1}, es decir:

$$\Delta Y(k) = y(k) \Leftrightarrow \Delta^{-1}y(k) = Y(k).$$

Si conocemos la primera diferencia de una función Y(k) entonces podemos conocer Y(k) aplicando a y(k) la operación inversa a la diferencia.

Los operadores Δ, E y Δ^{-1} transforman funciones definidas sobre $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Propiedades del operador suma indefinida Δ^{-1}:

TEOREMA I.3.1: Si Y_1 y Y_2 son dos sumas cualesquiera de la misma función y, entonces su diferencia $(Y_1 - Y_2)$ es una función con período h, el cual es el intervalo de diferencia.

DEMOSTRACION: Por definición $Y_1 = \Delta^{-1}y_1(k)$, $Y_2 = \Delta^{-1}y_2(k)$ entonces

$$\begin{aligned}\Delta[\Delta^{-1}y(k) - \Delta^{-1}y(k)] &= \Delta\Delta^{-1}y(k) - \Delta\Delta^{-1}y(k)\\ &= y(k) - y(k)\\ &= 0\end{aligned}$$

O lo que es lo mismo, probar que la diferencia de la resta es cero.

$\Delta(Y_1 - Y_2) = \Delta Y_1 - \Delta Y_2$

$\Delta(Y_1 - Y_2) = y - y$ (por hipótesis)

$\Delta(Y_1 - Y_2) = 0.$ ■

TEOREMA I.3.2: Si Y_1 y Y_2 son sumas indefinidas de las funciones y_1, y_2 respectivamente, y si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces $c_1Y_1 + c_2Y_2$ es una suma indefinida de $c_1y_1 + c_2y_2$, es decir:

$$\Delta^{-1}[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1\Delta^{-1}y_1 + c_2\Delta^{-1}y_2$$

DEMOSTRACION: Por hipótesis, $\Delta Y_1 = y_1$ *y* $\Delta Y_2 = y_2$; podemos probar que la diferencia de $c_1Y_1 + c_2Y_2$ es igual a $c_1y_1 + c_2y_2$.

Usando el corolario I.1.1 obtenemos:

$$\Delta(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1\Delta Y_1 + c_2\Delta Y_2$$

$$\Delta(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1[y_1] + c_2[y_2]$$ ■

TEOREMA I.3.3:"*Sumatoria por partes*".
Sean u(k) y v(k) dos funciones, entonces:

$$\Delta^{-1}[u(k)\Delta v(k)] = u(k)v(k) - \bar{\Delta}^{1}\ [v(k+1)\Delta u(k)]$$

DEMOSTRACION: Por el teorema I.1.4:

$$\Delta[u(k)v(k)] = v(k+1)\Delta u(k) + u(k)\Delta v(k)$$

$$\Delta^{-1}\Delta[u(k)v(k)] = \Delta^{-1}[v(k+1)\Delta u(k)] + \Delta^{-1}[u(k)\Delta v(k)]$$

$$u(k)v(k) = \Delta^{-1}[v(k+1)\Delta u(k)] + \Delta^{-1}[u(k)\Delta v(k)]$$

de donde:

$$\Delta^{-1}[u(k)\Delta v(k)] = u(k)v(k) - \Delta^{-1}[v(k+1)\Delta u(k)].$$ ■

Llamaremos "*cálculo en diferencias*" al conjunto de las propiedades y metodologías obtenidas al aplicar el operador Δ.

Llamaremos "*cálculo de sumas*" al conjunto de propiedades y metodologías obtenidas al aplicar el operador Δ^{-1}.

Nos referiremos como "*cálculo finito*" a todo el cálculo expuesto hasta ahora.

No es difícil enunciar un conjunto de ejemplos de sucesiones (o problemas), provenientes de las aplicaciones, a las cuales es factible aplicarles (e interpretar) el cálculo que se deriva de las operaciones Δ y Δ^{-1}.

Nuestro objetivo no es ilustrar la aplicación del cálculo discreto, sino el de usarlo en la resolución de las ecuaciones en diferencias. Sin embargo, las funciones solución de las ecuaciones en diferencias que representan aplicaciones son ejemplos de sucesiones que pueden interpretarse bajo transformaciones con Δ y Δ^{-1}.

I.4.- **Suma definida.**

También podemos definir un operador relacionado a Δ^{-1}, que llamaremos *suma definida*. Este es la sumatoria usual denotada por $\sum_{i=0}^{i=k}$ y que también opera sobre las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Con los siguientes calculos obtendremos una expresión útil para la suma definida.

Como lo que tenemos es $\Delta Y(k) = y(k)$ entonces de esto podemos deducir,

$\Delta Y(k) = y(k)$

$Y(k+1) - Y(k) = y(k)$

$Y(k+1) = Y(k) + y(k) \qquad k = 0,1,2,3,\ldots\ldots$

Para $k=0$, $\quad Y(1) = Y(0) + y(0)$

Para $k=1$, $\quad Y(2) = Y(1) + y(1) = Y(0) + y(0) + y(1)$

Para $k=2$, $\quad Y(3) = Y(2) + y(2) = Y(0) + y(0) + y(1) + y(2)$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Para $k = k-1$ $\quad Y(k) = Y(k-1) + y(k-1) = Y(0) + y(0) + y(1) + y(2) + y(3) + \ldots + y(k-1)$

Por lo tanto

$$Y(k) = Y(0) + \sum_{i=0}^{k-1} y(i) \qquad , \qquad k=1,2,3,\ldots.$$

Con la anterior expresión podemos resolver el siguiente problema de condición inicial. Considerando la igualdad

$$\Delta Y(k) = g(k)$$

con la condición inicial $Y(0) = Y_0$. Conocida la función $g(k)$, el objetivo es calcular la función $Y(k)$. Esta función es la solución del problema ya que al ser sustituida en las dos igualdades se tienen identidades. Este problema pertenece a la teoría de ecuaciones en diferencias que describiremos en la siguiente sección. Por lo pronto exponemos el siguiente ejemplo.

Problema de condición inicial.

Sea $\Delta Y(k) = 2k + 1$, $\qquad$ con $Y(0) = 2$
Por encontrar la sucesión $Y(k)$ que satisface a las dos igualdades.
Solución:

$$\Delta Y(k) = 2k + 1$$

usando la expresión que teníamos para encontrar $Y(k)$ tenemos,

$$Y(k) = Y(0) + \sum_{i=0}^{k-1} (2i + 1)$$

$$Y(k) = 2 + \sum_{i=0}^{k-1} 2i + \sum_{i=0}^{k-1} 1$$

$$Y(k) = 2 + 2\,[(k-1)k/2] + k$$
$$Y(k) = 2 + (k-1)k + k$$

$$Y(k) = 2 + k^2 - k + k$$
$$Y(k) = 2 + k^2$$

y efectivamente,

$$\Delta Y(k) = (k+1)^2 + 2 - k^2 - 2$$
$$\Delta Y(k) = k^2 + 2k + 1 + 2 - k^2 - 2$$
$$\Delta Y(k) = 2k + 1.$$

Un problema análogo es el siguiente.

Dada la diferencia $\Delta Y(k) = 2k + 1$, obtener el conjunto de soluciones $Y(k)$.
Solución:
Observese que la solución es de la forma

$$Y(k) = k^2 + p(k)$$

donde $p(k)$ es una función periódica de período 1, es decir una función $p(k)$ tal que

$$p(k+1) - p(k) = 0$$

Otro objetivo que no abordaremos consiste en desarrollar técnicas para calcular sumas indefinidas.
Podremos visualizar algunas analogías entre el cálculo infinitesimal y el cálculo finito en el siguiente recuadro.

Cálculo finito	*Cálculo infinitesimal*
1.- $\Delta y(k)=y(k+h)-y(k)$	1.- $Dy(k)=\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta y(k)}{h}$
2.- $\Delta^{n} y=\Delta(\Delta^{n-1} y)$; $n=1,2,...$	2.- $D^{n} y=D(D^{n-1} y)$; $n=1,2,...$
3.- $\Delta(c_1 y_1+c_2 y_2)=c_1\Delta y_1+c_2\Delta y_2$	3.- $D(c_1 y_1+c_2 y_2)=c_1 Dy_1+c_2 Dy_2$
4.- Si y es un polinomio de grado n, entonces $\Delta^{n} y$ es constante y las diferencias de más alto orden son cero	4.- Si y es un polinomio de grado n, entonces $D^{n}y$ es constante y las derivadas de más alto orden son cero
5.- $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$	5.- $D(uv)=uDv+vDu$
6.- $\Delta\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{vEv}$	6.- $D\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{vDu-uDv}{vv}$
7.- Si $\Delta Y=y$, entonces $\Delta^{-1} y=Y+p$ donde p es una función con período h.	7.- Si $DY=y$, entonces $\int y=Y+c$ donde c es una constante.

Estas son las fórmulas básicas del cálculo finito (el cálculo de diferencias finitas), el cual ha sido estudiado tanto como el cálculo contínuo (infinitesimal) y data desde Brook Taylor (1717) y Jacob Stirling (1730). El primer tratado fué escrito por L. Euler en (1755).

I.5- Ecuación en Diferencias Escalar y el Problema de Condición inicial.

Antes de entrar de lleno a las ecuaciones en diferencias, se dará una pequeña introducción.

El principal tema de las ecuaciones en diferencias es el de recursión: cálculos hechos en una manera recurrente o repetida. En efecto, las ecuaciones en diferencias son algunas veces referidas como relaciones de recursión. Empecemos por observar a una sucesión familiar desde el punto de vista de la recursión.

En la sucesión de números $\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...\}$, cada término es obtenido de sumar los dos números precedentes, con la excepción de los dos primeros.

Entonces tendremos que los primeros dos números son

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 1 \tag{1.1}$$

y los números restantes son dados por la ecuación

$$y(k+2) = y(k+1) + y(k), \qquad k= 0,1,2,... \tag{1.2}$$

así, el k-ésimo número para $k \geq 2$ es obtenido al sumar los dos números precedentes. A esta relación de recursión se le conoce como la sucesión de Fibonacci; la solución será obtenida después de haber desarrollado algunas técnicas para resolver ecuaciones en diferencias.

Visto de esta manera, la sucesión de arriba se dice estar determinada recursivamente porque los cálculos de un término particular son hechos por una cadena de cálculos con términos sucesivos ligados por (1.2). La relación (1.2) es llamada *una ecuación en diferencias* o *una relación de recursión.* La condición (1.1) es llamada *una condición inicial*. Una solución a una ecuación en diferencias significa una fórmula para $y(k)$ tal que $y(k)$ pueda ser calculada directamente sin pasar a través de una cadena de cálculos. Daremos definiciones más - formales de los conceptos de *ecuación en diferencias* y su *solución*.

De la exposición que hago de la teoría de las ecuaciones en diferencias se podrá deducir la semejanza que tiene con la teoría de las ecuaciones diferenciales. Actualmente, debido a la rapidez de cálculo que representa el uso de las computadoras, se tiene un auge en el desarrollo y aplicación de las ecuaciones en diferencias. El siguiente tema plantea una relación usual entre estas teorias.

Se discretiza un modelo continuo, el cual resolveremos con cálculo discreto .

DISCRETIZACION:

El modelo continuo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + b_1(x)y = g(x)$$

definido para $x \in I$, I un intervalo abierto contenido en $\mathbb{R}$, donde a_1, b_1 son funciones reales continuas para $x \in I$; se discretiza sustituyendo la primera y segunda diferencia para $y(k)$ en lugar de la primera y segunda derivada del modelo continuo, lo cual puede verse como

$$\Delta^2 y(k) + a_1(k)\Delta y(k) + b_1(k)y(k) = g(k)$$
$$y(k+2)-2y(k+1)+y(k)+a_1(k)[y(k+1)-y(k)]+b_1(k)y(k) = g(k)$$
$$y(k+2) + [a_1(k) - 2]y(k+1) + [1 + b_1(k) - a_1(k)]y(k) = g(k)$$

Tomando $a_2(k) = [a_1(k) - 2]$ y $b_2(k) = [1 + b_i(k) - a_1(k)]$ el nuevo modelo discreto resulta:

$$y(k+2) + a_2(k)y(k+1) + b_2(k)y(k) = g(k)$$

con $k=0,1,2,3,\ldots$ que será resuelto por técnicas de las ecuaciones en diferencias. Toda ecuación diferencial lineal de orden n es factible de discretizarse.

El problema que enfrentaremos aquí es que dada una ecuación en diferencias tal como:

$$y(k+2) + ay(k+1) + by(k) = g(k)$$

con a,b constantes reales; se debe encontrar de alguna manera una sucesión $y(k)$, $k=0,1,2,\ldots$ de forma que al ser sustituída en la ecuación en diferencias la transforme en identidad.

DEFINICION I.5.1:
Toda ecuación que relaciona a una función incógnita con sus diferencias es llamada una *ecuación en diferencias.* En forma general se representa:

$$F(\ k,y(k),y(k+h),y(k+2h),\ldots,y(k+nh)\ ) = g(k)$$

donde $y(k)$ es la variable dependiente (o "función incógnita") y $k= 0,1,2,\ldots$ es la variable independiente.

Estas ecuaciones son análogos discretos de las ecuaciones diferenciales. En las ecuaciones diferenciales nos interesa estudiar la razón de cambio instantáneo (derivada) de una variable con respecto a otra. Por otro lado también existen aplicaciones (como los ejemplos que se verán al final de éste capítulo) en donde es de mucho interés estudiar los cambios (diferencias) en vez de las razones de cambio.

DEFINICION I.5.2:
El *orden de una ecuación en diferencias* se define como la diferencia entre el argumento mayor y menor de la ecuación, dividido todo esto entre el incremento h. Es decir, en la representación general de una ecuación en diferencias:

$$F(\ k,y(k),y(k+h),\ldots,y(k+hn)\ ) = g(k)$$

si ambos términos, $y(k)$ y $y(k+hn)$ aparecen explícitamente entonces el orden de la ecuación en diferencias es:

$$\frac{(k+hn)-k}{h} = n$$

DEFINICION I.5.3:
Una sucesión será *solución* de una ecuación en diferencias si al ser sustituida en la ecuación en diferencias la convierte en identidad.

Sea $F(\ k,y(k),y(k+h),....,y(k+nh)\ ) = g(k)$ una ecuación en diferencias de n-ésimo orden; esperamos obtener una sucesión única de valores $y(k)$ que es solución de la ecuación lineal en diferencias de orden n.

Con el objetivo de simplificar la exposición de resultados, de aquí en adelante consideraremos $h=1$.

DEFINICION I.5.4:
Una *ecuación lineal en diferencias de orden "n"* no homogénea es una ecuación que tiene la forma:

$$a_0(k)y(k+n)+a_1(k)y(k+n-1)+...+a_n(k)y(k)=g(k) \qquad (1.3)$$

donde $y(k)$ es la variable dependiente, k la variable independiente, $a_0(k)$, $a_1(k),...,a_n(k)$ los coeficientes y $g(k)$ una función de k.

Usando el operador de corrimiento E, donde $E^m y(k)=y(k+m)$ con $m=1,2,3,...$, la ecuación lineal (1.3) se puede representar como:

$$a_0(k)E^n y(k)+a_1(k)E^{n-1}y(k)+...+a_{n-1}(k)Ey(k)+a_n(k)y(k) = g(k)$$

La cual también puede ser escrita como:

$$[\, a_0(k)E^n + a_1(k)E^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(k)E + a_n(k)E^0]y(k) = g(k)$$

representando el polinomio en E por $\phi(E)$,

$$\phi(E) = a_0(k)E^n + a_1(k)E^{n-1} + \ldots + a_n(k)$$

se tiene

$$\phi(E)y(k) = g(k)$$

El principal problema que resolveremos en esta parte del trabajo es el siguiente:

PROBLEMA DE VALORES INICIALES

Por encontrar una función y(k) solución de (1.3) sujeta a las condiciones iniciales:

$$y(m) = y_0,\ y(m+1) = y_1,\ \ldots,\ y(m+n-1) = y_{n-1} \qquad (1.4)$$

de manera que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es la variable independiente y la constante $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es conocida.

Para iniciar la solución al problema de valores iniciales se simplificará de la siguiente manera:

1.- El orden de la ecuación (1.3) será 2; n=2.

2.- Se supondrá que los coeficientes $a_i(k)$ son constantes.

3.- También se considerará g(k) idénticamente igual a cero; $g(k) \equiv 0$.

Es decir, primero resolveremos el problema de valores iniciales para la ecuación en diferencias lineal de segundo orden de coeficientes constantes homogénea:

$$y(k+2) + ay(k+1) + by(k) = 0 \qquad (1.5)$$

sujeta a las restricciones:

$$y(0) = y_0 \ , \ y(1) = y_1 \tag{1.6}$$

donde y_0 y y_1 son números reales.

Observemos que la función constante $y(k) = 0$ siempre es solución de (1.5) (la llamaremos solución trivial). De manera que si $y_0=y_1= 0$ entonces $y(k) = 0$ será la única solución de (1.5) y (1.6).

En el trabajo no seguiremos el método recursivo, propio de este tipo de problemas de valores iniciales. Tal podría ser adecuado al restringirnos a usos computacionales.
A continuación describiremos el método " *de la solución general*", que consiste en determinar una familia de soluciones. Tal método es común en las ecuaciones diferenciales.

METODO DE LA SOLUCION GENERAL

Primero determinaremos una familia de soluciones para (1.5). De ésta familia determinaremos a la "*única*" que cumple con (1.6).

Al igual que en las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en diferencias se dividen de la siguiente manera:

-Si $a_0(k)\neq 0$ y $a_n(k)\neq 0$, en (1.3), la ecuación en diferencias se dice que es *lineal y de orden n.*
- Si $g(k)$ no es identicamente cero; $g(k)\neq 0$ en (1.3), la ecuación en diferencias se llama *no-homogénea.*
- Si $g(k)$ es idénticamente cero; $g(k)=0$ en (1.3), la ecuación en diferencias se llama *homogénea.*
- Si $a_0,a_1,...,a_n$ son constantes en (1), la ecuación en diferencias se llama de *coeficientes constantes.*

Para $n=2$ y $g(k)=0$ tenemos una ecuación en diferencias lineal de segundo orden homogénea de coeficientes constantes:

$$a_0y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = 0$$

dividiendo entre $a_0\neq 0$ toda la ecuación obtenemos la igualdad:

$$y(k+2) + \frac{a_1}{a_0}y(k+1) + \frac{a_2}{a_0}y(k) = 0$$

Tomando $\frac{a_1}{a_0} = a$ y $\frac{a_2}{a_0} = b$ la ecuación nos queda:

$$y(k+2) + ay(k+1) + by(k) = 0$$

Método para obtener su solución general:

En el caso de la ecuación de primer orden

$$y(k+1) = ay(k)$$

su solución general es:

$$y(k) = ca^k$$

su solución particular con $y(k) = y_0$ si $k=0$ es:

$$y(k) = y_0a^k$$

Vamos a estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación en diferencias

$$y(k+1) = ay(k) + b$$

con condición inicial

$$y(0) = y_0$$

donde b es constante.

La solución de esta ecuación es

$$y(k) = a^k \left[y_0 - \frac{b}{1-a} \right] + \frac{b}{1-a} \qquad (a\neq 1)$$

Si a está dentro del rango $(-1,1)$ es decir, $|a|<1$ tenemos que,
1.-Para $0<a<1$, es decir a es una fracción positiva, $a^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en

I.6.- Dependencia e independencia lineal.

DEFINICION I.6.1:

Se dice que un conjunto de funciones $y_1(k)$, $y_2(k)$, $\dots, y_n(k)$ es *linealmente dependiente* en un conjunto S de enteros ($S \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$) si existen c_1, $c_2, \dots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \dots + c_n y_n(k) = 0 \qquad \text{para toda } k \in S.$$

DEFINICION I.6.2:

Un conjunto de funciones $y_1(k)$, $y_2(k), \dots, y_n(k)$ es *linealmente independiente* en un conjunto S ($S \subset N$) si no es linealmente dependiente en S.

TEOREMA I.6.1: Supóngase que $y_1(k)$, $y_2(k), \dots, y_n(k)$ tienen al menos n-1 diferencias. Si el determinante

$$\begin{vmatrix} y_1(k) & y_2(k) & \dots & y_n(k) \\ y_1(k+1) & y_2(k+1) & \dots & y_n(k) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1(k+n) & y_2(k+n) & \dots & y_n(k+n) \end{vmatrix}$$

no es cero por lo menos en un punto de S, entonces las funciones $y_1(k)$, $y_2(k), \dots, y_n(k)$ son linealmente independientes en S.

El determinante que aparece en el teorema se designa

$$C(y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k))$$

y se llama *el Casoratiano* de las funciones.

DEMOSTRACION: Se hace por contradicción, para n=2.

Supóngase que $C(y_1(k_0),y_2(k_0))\neq 0$ para un k_0 fijo en S y que $y_1(k)$, $y_2(k),\ldots,y_n(k)$ son linealmente dependientes en S. El que las funciones sean linealmente dependientes significa que existen constantes c_1 y c_2, no simultáneamente nulas, para las cuales

$$c_1y_1(k) + c_2y_2(k) = 0 \qquad \text{para toda } k \in S.$$

Diferenciando esta combinación tenemos

$$\Delta[c_1y_1(k) + c_2y_2(k)] = \Delta(0)$$

$$\Delta c_1y_1(k) + \Delta c_2y_2(k) = 0$$

$$c_1\Delta y_1(k) + c_2\Delta y_2(k) = 0$$

Obtenemos así:

$$\begin{aligned} c_1y_1(k) + c_2y_2(k) &= 0 \\ c_1\Delta y_1(k) + c_2\Delta y_2(k) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Pero la dependencia lineal de $y_1(k)$ y $y_2(k)$ implica que (1.7) tiene una solución no trivial para cada $k \in S$. Consecuentemente

$$C(y_1(k),y_2(k)) = \begin{vmatrix} y_1(k) & y_2(k) \\ y_1(k+1) & y_2(k+1) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{para toda} \quad k\in S$$

Esto contradice el haber supuesto que $C(y_1(k_0),y_2(k_0))\neq 0$. Se concluye que $y_1(k)$, $y_2(k)$ son linealmente independientes. ■

TEOREMA I.6.2: Sean $y_1(k)$, $y_2(k)$, $\ldots$, $y_n(k)$ soluciones de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n en un conjunto S. Entonces, la combinación lineal

$$y = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + \dots + c_ny_n(k)$$

en donde los c_i, $i = 1,2,3,\dots,n$ son constantes arbitrarias, también es una solución en S.

DEMOSTRACION: Para n=2; $y_1(k)$, $y_2(k)$ son soluciones de la ecuación

$$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = 0$$

Podemos probar que si $y_1(k)$, $y_2(k)$ satisfacen la ecuación en diferencias anterior, entonces $Y = c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$ igualmente la satisface. Así podemos demostrar que:

$$(c_1\ y_1(k+2) + c_2\ y_2(k+2)) + a_1\ (c_1\ y_1(k+1) + c_2y_2(k+1))$$

$$+ a_2(c_1y_1(k) + c_2y_2(k)) = 0$$

es una identidad, es decir, es válido para toda $k = 0,1,2,\dots$

$$c_1\left[y_1(k+2) + a_1y_1(k+1) + a_2y_1(k)\right] + c_2\left[y_2(k+2) + a_1y_2(k+1) + \right.$$

$$\left. + a_2y_2(k)\right] = 0$$

como $y_1(k)$ y $y_2(k)$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces obtenemos que,

$$c_1[0] + c_2[0] = 0$$

Por lo tanto $Y = c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$ es una solución de la ecuación en diferencias de orden 2 en $S \subset (\mathbb{N} \cup \{0\})$.■

TEOREMA I.6.3: Sean $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$, n soluciones de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n en un conjunto S ($S \subset N$). Entonces el conjunto de soluciones es linealmente independiente en S si y sólo si

$C(y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)) \neq 0$ para toda $k \in S$.

DEMOSTRACION: Para n=2.

($\Leftarrow$) Si $C(y_1(k), y_2(k)) \neq 0$ para toda $k \in S$, entonces por el teorema I.6.1, tenemos inmediatamente que $y_1(k)$, $y_2(k)$ son linealmente independientes.

($\Rightarrow$) Supongamos que $y_1(k)$, $y_2(k)$ son linealmente independientes y que existe k_0 fijo en S para el cual $C(y_1(k_0), y_2(k_0)) = 0$. Entonces deben existir c_1 y c_2, no simultáneamente nulas, tal que

$$c_1 y_1(k_0) + c_2 y_2(k_0) = 0 \qquad (1.8)$$

$$c_1 \Delta y_1(k_0) + c_2 \Delta y_2(k_0) = 0$$

Si definimos $y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$ entonces, por (1.8) $y(k)$ también debe satisfacer

$$y(k_0) = 0, \qquad y(k_0 + 1) = 0 \qquad (1.9)$$

Pero la función idénticamente cero satisface la ecuación en diferencias lineal y las condiciones iniciales (1.9), por tanto, ella es la única solución $y = 0$.

$$c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) = 0 \qquad \text{para toda } k \in S.$$

Esto contradice el hecho de que $y_1(k)$, $y_2(k)$ son linealmente independientes en S. Por lo tanto si $y_1(k)$, $y_2(k)$ son linealmente independientes entonces $c(y_1(k), y_2(k)) \neq 0$. ■

DEFINICION I.6.1:

Se llama *conjunto fundamental de soluciones* en S a cualquier conjunto $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n en S.

TEOREMA I.6.4: Sea $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n en *S*. Si $Y(k)$ es cualquier solución de ésta ecuación en diferencias en *S*, entonces es posible encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$Y(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + \ldots + c_ny_n(k)$$

DEMOSTRACION: Para n=2. $y_1(k)$, $y_2(k)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias de orden 2
$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = 0$ en *S*.
Supóngase que $k=k_0$ es un punto en *S* para el cual $C(y_1(k_0), y_2(k_0)) \neq 0$; y Y una solución cualquiera de la ecuación en diferencias $y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = 0$. Siendo $Y(k_0)=Y_0$, $Y(k_0+1) = Y_1$, se tiene que $Y(k)$ es solución del problema de valores iniciales.

Observación: Considerando el siguiente sistema

$$\begin{aligned} c_1y_1(k_0) + c_2y_2(k_0) &= Y_0 \\ c_1\Delta y_1(k_0) + c_2\Delta y_2(k_0) &= Y_1 \end{aligned}$$

vemos que c_1 y c_2 pueden determinarse y son únicos siempre que

$$\begin{vmatrix} y_1(k_0) & y_2(k_0) \\ y_1(k_0+1) & y_2(k_0+1) \end{vmatrix} \neq 0$$

Pero éste último determinante es simplemente el Casorati calculado para $k=k_0$ y por hipótesis $C(y_1(k_0), y_2(k_0)) \neq 0$.

Sea $G(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$ entonces
$G(k)$ satisface la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden 2 puesto que $y_1(k)$, $y_2(k)$ son soluciones.
De la observación tenemos que $G(k)$ satisface las condiciones iniciales $Y(k_0) = Y_0$, $Y(k_0+1) = Y_1$, es decir

$$G(k_0) = c_1y_1(k_0) + c_2y_2(k_0) = Y_0$$
$$G(k_0+1) = c_1\Delta y_1(k_0) + c_2\Delta y_2(k_0) = Y_1$$

tenemos que G(k) y Y(k) satisfacen el mismo problema de condición inicial.

Como la solución de éste problema de condición inicial es única se tiene que Y(k)=G(k), o bien,

$$Y(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) \qquad \blacksquare$$

Para resolver la ecuación lineal en diferencias homogénea y de coeficientes constantes $\phi(E)y(k) = 0$, necesitamos encontrar las raíces de la ecuación característica asociada a ésta ecuación en diferencias. Por ser una ecuación de orden n, tiene n raíces, las cuales denotamos como: $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, que pueden o no ser distintas; podemos factorizar la ecuación anterior como:

$$(E-\lambda_1)(E-\lambda_2)\ldots(E-\lambda_n)\ y(k) = 0$$

Las soluciones de ésta ecuación dependen de sus raíces; los siguientes casos pueden surgir:

CASO 1.- Raíces reales distintas.

Sean v_1, v_2, $v_3,\ldots,v_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias homogénea, entonces la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y(k)= c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$$

donde $v_1= \lambda_1^k$, $v_2= \lambda_2^k$, ... , $v_n= \lambda_n^k$ y c_1, c_2, ... ,c_n son constantes arbitrarias.

CASO 2.- Raíces reales iguales.

Si la ecuación característica tiene m raíces reales iguales λ_1, λ_2, $\lambda_3,\ldots,\lambda_m$, entonces la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y(k) = c_1\lambda_1^k + c_2k\lambda_2^k + c_3k^2\lambda_3^k + \dots + c_mk^{m-1}\lambda_m^k$$

CASO 3: Raíces complejas.

Si la ecuación característica tiene m raíces complejas diferentes λ_1, λ_2, ..., λ_m, la solución general de la ecuación en diferencias es dada como

$$y(k) = c_1[\alpha_1 + i\beta_1]^k + c_2[\alpha_1 - i\beta_1]^k + c_3[\alpha_2 + i\beta_2]^k +$$

$$c_4[\alpha_2 - i\beta_2]^k + \dots + c_m[\alpha_m + i\beta_m]^k + c_{m+1}[\alpha_m - i\beta_m]^k$$

Una representación en variable real de esta solución, es dada utilizando el teorema de DeMoivre (ver anexo A.I.2)

$$y(k) = a_1r^k\cos(k\Theta_1) + a_2r^k\operatorname{sen}(k\Theta_1) + a_3r^k\cos(k\Theta_2) +$$

$$a_4r^k\operatorname{sen}(k\Theta_2) + \dots + a_mr^k\cos(k\Theta_m) + a_{m+1}r^k\operatorname{sen}(k\Theta_m)$$

o lo que es lo mismo

$$y(k) = r^k[\ a_1\cos(k\Theta_1) + a_2\operatorname{sen}(k\Theta_1) + a_3\cos(k\Theta_2) + a_4\operatorname{sen}(k\Theta_2) +$$

$$+ \dots + a_m\cos(k\Theta_m) + a_{m+1}\operatorname{sen}(k\Theta_m)\ ].$$

donde a_1, a_2, ..., a_m, a_{m+1} son constantes.

Si una raíz compleja $\lambda = \alpha + i\beta$ se repite n veces, entonces el término

$$c_1(\alpha+i\beta)^k + c_2k(\alpha-i\beta)^k + \dots + c_mk(\alpha+i\beta)^k$$

conformaría la solución general. Con la fórmula de Moivre también podemos darle una expresión real.

A manera de ejemplo, obtendremos la solución de la ecuación en diferencias de orden dos

$$y(k+2) + by(k+1) + cy(k) = 0$$

Para ello se propone de la forma $y(k) = a^k$, para algún número a real o complejo, $a \neq 0$ pues $y(k) \equiv 0$ es la solución trivial.

Sustituyendo $y(k) = a^k$ en la ecuación homogénea de segundo orden tenemos;

$a^{k+2} + ba^{k+1} + ca^k = 0$; $b \neq 0$, $k=0,1,2,...$

dividiendo toda la ecuación entre a^k, tenemos la ecuación $a^2 + ba + c = 0$; la cual, es la ecuación característica de la ecuación en diferencias de segundo orden:

$$y(k+2) + by(k+1) + cy(k) = 0$$

Resolviendo la ecuación característica, tenemos:

$$a^2 + ba + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica.

La solución de la ecuación depende de sus raíces; es decir que sus raíces pueden tomar valores reales o complejos, inclusive pueden repetirse.

CASO 1.- Si $b^2 - 4c > 0$. Hay dos raíces *reales diferentes* λ_1 y λ_2; donde $y(k) = \lambda_1^k$, $y(k) = \lambda_2^k$ son dos soluciones de la ecuación característica. Por el teorema I.6.2, la solución general toma la forma

$$y(k) = c_1\lambda_1{}^k + c_2\lambda_2{}^k$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias ; λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica.

CASO 2.- Si $b^2 - 4c = 0$. Hay dos *raíces reales iguales* λ_1 y λ_2; donde $y(k) = \lambda^k$ es la solución de la ecuación característica con $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2}$ La solución general de la ecuación está dada por:

$$y(k) = c_1\lambda^k + c_2k\lambda^k$$

$y(k) = c_1[-\frac{b}{2}]^k + c_2k[-\frac{b}{2}]^k$, con $b \neq 0$ porque buscamos una solución no trivial.

Para mostrar la obtención de ésta solución general resolveremos el siguiente problema:

Por demostrar que dada una ecuación en diferencias de orden dos y conocida una solución $y_1(k)$, queremos encontrar una segunda solución $y_2(k)$, de manera que el conjunto de soluciones $[y_1(k), y_2(k)]$ represente un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias dada.

La ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(k+2) + by(k+1) + cy(k) = 0, \qquad b \neq 0$$

tiene como $y_1(k)$ a la solución conocida diferente de cero, buscamos una segunda solución $y_2(k)$ de la forma

$$y_2(k) = v(k) \cdot y_1(k)$$

donde $v(k)$ es una función no constante por determinar.

Recordemos que el Casorati

$$C(y_1(k), y_2(k)) = \begin{vmatrix} y_1(k) & y_2(k) \\ y_1(k+1) & y_2(k+1) \end{vmatrix}$$

$$= y_1(k)y_2(k+1) - y_2(k)y_1(k+1)$$

$$= y_1(k)y_1(k+1)\left(\frac{y_2(k+1)}{y_1(k+1)} - \frac{y_2(k)}{y_1(k)}\right)$$

$$= y_1(k)y_1(k+1)\ (\ v(k+1) - v(k)\ )$$

Esto implica que

$$v(k+1) - v(k) = \frac{C(y_1(k),y_2(k))}{y_1(k)\ y_1(k+1)} \qquad (1.10)$$

Puede mostrarse que $C(y_1(k+1),y_2(k+1)) = c\ C(y_1(k),y_2(k))$

$$\Rightarrow \qquad C(y_1(k+1),y_2(k+1)) = c^{k+1}C(y_1(0),y_2(0)).$$

Sustituyendo la última identidad en (1.10), tenemos

$$v(k+1) - v(k) = \frac{c^k}{y_1(k)y_1(k+1)} = d(k)$$

Es decir, conociendo $d(k)$ tenemos que resolver la ecuación en diferencias de primer orden

$$v(k+1) - v(k) = d(k)$$

por la expresión de la pág.11 tenemos que

$$v(k) = v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} d_i$$

como $y_1(k)$ y c son diferentes de cero, entonces $d(k)$ es diferente de cero para toda k, por lo que $v(k)$ no es una constante. Lo que implica que $y_2(k) = v(k)y_1(k)$ es una segunda solución linealmente independiente de la ecuación en diferencias de orden dos. Por lo tanto, en este caso, la segunda solución es

$$y_2(k) = v(k)y_1(k)$$

$$y_2(k) = v(k)\ \lambda^k$$

$$y_2(k) = [v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} d_i] \ \lambda^k$$

$$d(k) = \frac{c^k}{\lambda^k \quad \lambda^{k+1}} = \frac{c^k}{\lambda^{2k+1}}$$

Pero $c = (b/2)^2$ y $\lambda = (-b/2)$, así que

$$d(k) = \frac{(b/2)^{2k}}{(-b/2)^{2k+1}} = \frac{1}{(-b/2)} = \frac{1}{\lambda} .$$

Entonces

$$y_2(k) = v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} d(i) = v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (1/\lambda) = k(1/\lambda) = (k/\lambda).$$

Haciendo $v_0 = 0$, tenemos

$$y_2(k) = (k/\lambda) \ \lambda^k$$

por lo tanto, la segunda solución linealmente independiente de la ecuación en diferencias de orden dos nos queda

$$y_2(k) = k \ \lambda^{k-1}$$

por lo que la solución general es

$$y(k) = c_1[-\frac{b}{2}]^k + c_2[- \frac{b}{2} \ ]^k$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

CASO 3.- Si $b^2 - 4c < 0$. Hay dos *raíces complejas* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$; donde $y_1(k) = (\alpha + i\beta)^k$ y $y_2(k) = (\alpha - i\beta)^k$ son soluciones de la ecuación característica con $\alpha = - \frac{b}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$.

La solución general es:

$$y(k) = c_1(\alpha + i\beta)^k + c_2(\alpha - i\beta)^k$$

Daremos una representación en variable real a ésta solución. La solución general y(k) anterior puede reescribirse como

$$y(k) = c_1 r^k \cos(k\theta) + c_2 r^k \operatorname{sen}(k\theta)$$

que se obtiene al usar el teorema DeMoivre (ver anexo A.I.2), donde $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $\theta = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$; $0 \le \theta \le \pi$ y c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

En el caso de tener raíces reales repetidas, combinadas con raíces reales diferentes y complejas repetidas, se sigue el criterio enunciado en los casos anteriores. Por ejemplo, si consideramos la ecuación en diferencias de sexto orden

$$y(k+6) + y(k+4) - y(k+2) - y(k) = 0$$

a ésta le corresponde la ecuación característica

$$\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$$

o bien

$$(m-i)(m+i)(m-i)(m+1)(m-1)(m-1) = 0$$

lo cual implica que $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, $\lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = 1$ son las raíces de la ecuación característica; por lo que la solución general es dada como

$$y(k) = [c_1 + c_2 k](i)^k + [c_3 + c_4 k](-i)^k + c_5 + c_6 k$$

Su representación en variable real es

$$y(k) = [c_1 + c_2 k] \ (\cos k\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen} k\frac{\pi}{2}) + [c_3 + c_4 k] \ (\cos k\frac{3}{2}\pi$$

$+ i\operatorname{sen} \frac{3}{2}k\pi\ ) + c_5 + c_6 k.$

TEOREMA I.6.5: Sean $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_m(k)$ soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden m en S y sea $y_p(k)$ cualquier solución de la ecuación no homogénea en S. Entonces

$$y = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \ldots + c_k y_k(k) + y_p(k)$$

es también una solución de la ecuación no homogénea en S para constantes cualesquiera $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

DEMOSTRACION: Para n=2. Sea $y_p(k)$ cualquier solución de la ecuación no homogénea en S, sean $y_1(k)$, $y_2(k)$ soluciones de la ecuación en diferencias homogénea. Es fácil probar que

$$y = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + y_p(k)$$

es también una solución. ■

TEOREMA I.6.6: Sea $y_p(k)$ una solución dada de la ecuación en diferencias lineal no homogénea de orden n en S y sea $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias homogénea asociada en S. Entonces para cualquier solución $Y(k)$ de la ecuación en diferencias no homogénea en S, es posible encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de modo que

$$Y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \ldots + c_n y_n(k) + y_p(k)$$

DEMOSTRACION: Para n=2. Supóngase que $Y(k)$ y $y_p(k)$ son solución de

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = g(k)$$

Si se define una función

$$u(k) = Y(k) - y_p(k)$$

entonces

$$u(k+2)+a_1u(k+1)+a_2u(k) = Y(k+2)-y_p(k+2)+a_1[Y(k+1)-y_p(k+1)]$$

$$+ a_2[Y(k)-y_p(k)]$$

$$= Y(k+2)+a_1Y(k+1)+a_2Y(k) - y_p(k+2)-a_1y_p(k+1) - a_2y_p(k)$$

$$= g(k) - g(k) \quad \text{(por ser } Y \text{ y } y_p \text{ soluciones)}$$
$$= 0$$

Por lo tanto, en vista del teorema I.6.3 y la definición de una solución general, podemos escribir

$$u(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$$

$$Y(k) - y_p(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$$

$$Y(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + y_p(k). \quad \blacksquare$$

Ahora veremos como solucionar una ecuación en diferencias lineal no homogénea de coeficientes constantes.

La forma general de la ecuación en diferencias no homogénea de coeficientes constantes es:

$$a_0y(k+n)+a_1y(k+n-1)+ \ldots .+a_{n-1}y(k+1)+a_ny(k) = g(k)$$

Para obtener la *solución de una ecuación en diferencias lineal no homogénea de coeficientes constantes*:

$$\phi(E)y(k)= g(k)$$

necesitamos primero resolver la ecuación homogénea $\phi(E)y(k)=0$; a la cual llamamos y denotamos *"la solución complementaria* $y_c(k)$ *de la ecuación"*; y luego encontrar $y_p(k)$, la cual es cualquier solución de la ecuación no homogénea.
Después de haber obtenido las dos soluciones $y_c(k)$ y $y_p(k)$, la solución general de la ecuación no homógenea es:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k)$$

y todas las demás soluciones son casos especiales de ésta.

I.7.- **Métodos de Solución de Ecuaciones en Diferencias.**

Los métodos de solución de las ecuaciones en diferencias son semejantes a los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales.

1.- *Método de coeficientes indeterminados.*

Este método se aplicará para encontrar las soluciones particulares de la ecuación en diferencias no homogénea. Es decir,

$$\phi(E)y(k) = g(k) \tag{1.11}$$

Primero se resuelve la ecuación homogénea para así encontrar la solución complementaria $y_c(k)$; despues de haber encontrado la solución complementaria se procede a encontrar la solución particular $y_p(k)$; para esto necesitamos encontrar un aniquilador o anulador de la parte derecha de la ecuación (1.11); g(k) consiste de términos que tienen ciertas formas especiales.

En los siguientes cálculos obtenemos algunos aniquiladores.

1) Para la función $y(k) = k$, tenemos por definición que

$$E^0y(k) = y(k) = k$$
$$E^1y(k) = y(k+1) = k+1$$
$$E^2y(k) = y(k+2) = k+2$$

Como necesito un aniquilador de la función $y(k)$, podemos hacer la siguiente operación,

$$E^2y(k) - E^1y(k) = k+2 - k -1 = 1$$

ésta operación que se realizó no anula a la función, entonces ahora necesito un anulador de la función constante 1.

Sea $y_1(k) = 1$,

$$E^0y_1(k) = y_1(k) = 1$$
$$E^1y_1(k) = y_1(k+1) = 1$$

Restando la segunda operación a la primera, tenemos

$$E^1y_1(k) - E^0y_1(k) = (E^1 - E^0)y_1(k) = (E^1 - I)y_1(k)$$
$$\Rightarrow \quad (E^1 - I)y_1(k) = 1 - 1 = 0$$

Por lo tanto el aniquilador de la función $y_1(k) = 1$ es $(E - I)$. Como $(E^2 - E)y(k) = 1$, restamos el anulador $(E - I)$ aplicado a $y(k)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}(E^2 - E)y(k) - (E - I)y(k) &= y(k+2) - y(k+1) - y(k+1) + y(k)\\ &= k+2 - (k+1) - (k+1) + k\\ &= k+2 - k - 1 - k - 1 + k\\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto

$$[(E^2 - E) - (E - I)]y(k) = 0$$
$$[E^2 - E - E + I]y(k) = 0$$
$$[E^2 - 2E + I]y(k) = 0$$
$$[E - I]^2y(k) = 0$$

El anulador para la función $y(k) = k$ es $(E - I)^2$.

2) Buscando un aniquilador para la función $y(k) = a^k$, $a \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$E^0 y(k) = y(k) = a^k$$
$$E^1 y(k) = y(k+1) = a^{k+1}$$

Si hacemos la siguiente operación

$$\begin{aligned}(E-a)y(k) &= y(k+1) - ay(k)\\ &= a^{k+1} - aa^k\\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, el aniquilador de la función $y(k) = a^k$ es $(E - a)$.

3) El aniquilador para la función $y(k) = \cos(ak)$,

$$E^0 y(k) = y(k) = \cos(ak)$$
$$E^1 y(k) = y(k+1) = \cos(a[k+1])$$
$$E^2 y(k) = y(k+2) = \cos(a[k+2])$$

$$(bE^2 + cE + d)\cos(ak) = 0; \qquad \text{para toda } k$$

$$b(\cos(ak+2a)) + c(\cos(ak+a)) + d\cos(ak) = 0$$
$$b\cos(ak)\cos(2a) - b\,\mathrm{sen}(ak)\,\mathrm{sen}(2a) + C\cos(ak)\cos(a) - C\,\mathrm{sen}(ak)\,\mathrm{sen}(a)]$$
$$+ d\cos(ak) = 0$$

factorizando $\cos(ak)$ y $\mathrm{sen}(ak)$ tenemos:

$$\cos(ak)[b\cos(2a) + C\cos(a) + d] + \mathrm{sen}(ak)[-b\,\mathrm{sen}(2a) - C\,\mathrm{sen}(a)] = 0$$

Esto implica que

$$b\cos(2a) + C\cos(a) + d = 0 \qquad (1.12)$$
$$-b\,\mathrm{sen}(2a) - C\,\mathrm{sen}(a) = 0 \qquad (1.13)$$

Tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Tratemos de encontrar una solución.

Despejando b de la ecuación (1.13), tenemos:

$$-b\,sen(2a) = C\,sen(a)$$

$$b = \frac{-C\,sen(a)}{sen(2a)} = \frac{-C\,sen(a)}{2\cos(a)\,sen(a)} = \frac{-C}{2\cos(a)}$$

Sustituyendo el valor de b en (1.12) y despejando d tenemos:

$$\frac{-C\cos(2a)}{2\cos(a)} + C\cos(a) + d = 0$$

$$d = -C\left[\cos(a) - \frac{\cos(2a)}{2\cos(a)}\right]$$

Una solución puede ser:

Si $b = 1$; sustituimos el valor en b y tendremos un valor para C.

$$b = \frac{-C}{2\cos(a)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = -2\cos(a)}$$

Sustituimos el valor de C en d y tenemos:

$$d = 2\cos(a)\left[\cos(a) - \frac{\cos(2a)}{2\cos(a)}\right] = 2\cos^2(a) - \cos(2a)$$

$$d = 2\cos^2(a) - 2\cos^2(a) + 1 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{d = 1}$$

Por lo tanto $(E^2 - 2\cos(a)E + 1)$ anula a $y(k) = \cos(ak)$; $a \in Z$ y $k=n\pi$ con $n = 0,1,2,3,\ldots.$

Enseguida veremos los principales aniquiladores en una tabla.

SUCESION		ANIQUILADOR
1.- $y(k) = k + n$	$n = 0,1,2,...$	$(E - I)^2$
2.- $y(k) = n\,a^k$	$n = 1,2,3,...$	$(E - aI)$
3.- $y(k) = a^k + n$	$n = 1,2,3,...$	$(E - aI)(E - I)$
4.- $y(k) = \cos(ak)$	$a \in R,\ k = 0,1,.$	$(E^2 - 2\cos(a)E + 1)$
5.- $y(k) = \mathrm{sen}(ak)$	$a \in R,\ k = 0,1,.$	$(E^2 - 2\cos(a)E + 1)$
6.- $y(k) = a^k\cos(bk)$	$a,b \in R,\ k \in Z^+$	$(E^2 - 2a\cos(b)E + a^2)$
7.- $y(k) = a^k\,\mathrm{sen}(bk)$	$a,b \in R,\ k \in Z^+$	$(E^2 - 2a\cos(b)E + a^2$

Es preciso recordar que, dada una sucesión $y(k)$, el aniquilador no es único. Simplemente, si $F(E)$ es aniquilador de $y(k)$, entonces $EF(E)$ también es aniquilador. Sin embargo, los aniquiladores dados hasta ahora son los más sencillos.

2.- *Método de variación de parámetros.*

Este método se usa para obtener la solución particular de una ecuación en diferencias. Este método es general; ya que se puede aplicar a cualquier ecuación en diferencias lineal, inclusive de coeficientes variables.

Primero veremos unas propiedades que utilizaremos más adelante.

Si $y(k)= u(k)v(k)$ entonces por el teorema I.14 tenemos:

$$\Delta y(k) = \Delta[u(k)v(k)] = u(k)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) + \Delta u(k)\Delta v(k)$$

$$y(k+1) - y(k) = u(k)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) + \Delta u(k)\Delta v(k)$$

$$y(k+1) = u(k)v(k) + u(k)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) + \Delta u(k)\Delta v(k)$$

$$y(k+1) = u(k)[v(k) + \Delta v(k)] + \Delta u(k)[v(k) + \Delta v(k)]$$

$$y(k+1) = u(k)[v(k) + v(k+1) - v(k)] + \Delta u(k)[v(k) + v(k+1) - v(k)]$$

$$y(k+1) = u(k)v(k+1) + \Delta u(k)v(k+1)$$

En forma general:

$$y(k+n) = u(k)v(k+n) + \Delta u(k)v(k+n)$$

Si consideramos una ecuación lineal en diferencias de segundo orden no homogénea,

$$y(k+2) + a(k)y(k+1) + b(k)y(k) = g(k) \tag{1.14}$$

La solución complementaria de esta ecuación es:

$$y_c(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$$

donde $y_1(k)$ y $y_2(k)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a la ecuación de segundo orden (1.14); haciendo a c_1 y c_2 variables:

$$c_1 = u(k) \text{ y } \quad c_2 = v(k)$$

se forma la función:

$$y(k) = u(k)y_1(k) + v(k)y_2(k)$$

la cual se propone como solución de (1.14). Obtenemos de $y(k)$ a $y(k+1)$ y $y(k+2)$ para así poder sustituirlas en la ecuación (1.14) y determinar condiciones para $u(k)$, $v(k)$, y así, ver que $y(k)$ sea solución.

$$y(k+1) = u(k+1)y_1(k+1) + v(k+1)y_2(k+1)$$

$$y(k+1) = u(k+1)y_1(k+1) + v(k+1)y_2(k+1) - u(k)y_1(k+1) + u(k)y_1(k+1)$$

$$y(k+1) = y_1(k+1)[u(k+1) - u(k)] + v(k+1)y_2(k+1) + u(k)y_1(k+1)$$

$$y(k+1) = y_1(k+1)\Delta u(k) + v(k+1)y_2(k+1) + u(k)y_1(k+1) -$$

$$v(k)y_2(k+1) + \qquad v(k)y_2(k+1)$$

$$y(k+1) = y_1(k+1)\Delta u(k) + y_2(k+1)[v(k+1) - v(k)] + u(k)y_1(k+1) + v(k)y_2(k+1)$$

$$y(k+1) = y_1(k+1)\Delta u(k) + y_2(k+1)\Delta v(k) + u(k)y_1(k+1) + v(k)y_2(k+1)$$

Si consideramos que:

$$y_1(k+1)\Delta u(k) + y_2(k+1)\Delta v(k) = 0 \qquad (1.15)$$

se obtiene:

$$y(k+1) = u(k)y_1(k+1) + v(k)y_2(k+1)$$

$$y(k+2) = u(k+1)y_1(k+2) + v(k+1)y_2(k+2)$$

$$y(k+2) = u(k+1)y_1(k+2) + v(k+1)y_2(k+2) + u(k)y_1(k+2) - u(k)y_1(k+2)$$

$$y(k+2) = y_1(k+2)\ [u(k+1) - u(k)] + v(k+1)y_2(k+2) + u(k)y_1(k+2)$$

$$y(k+2) = y_1(k+2)\Delta u(k) + v(k+1)y_2(k+2) + u(k)y_1(k+2) + v(k)y_2(k+2) - v(k)y_2(k+2)$$

$$y(k+2) = y_1(k+2)\Delta u(k) + y_2(k+2)[v(k+1) - v(k)] + u(k)y_1(k+2) + v(k)y_2(k+2)$$

$$y(k+2) = y_1(k+2)\Delta u(k) + y_2(k+2)\Delta v(k) + u(k)y_1(k+2) + v(k)y_2(k+2)$$

Sustituyendo $y(k)$, $y(k+1)$ y $y(k+2)$ en (1.14)

$$y_1(k+2)\Delta u(k) + y_2(k+2)\Delta v(k) + u(k)y_1(k+2) + v(k)y_2(k+2) + a(k)u(k)y_1(k+1) + a(k)v(k)y_2(k+1) + b(k)u(k)y_1(k) + b(k)v(k)y_2(k) = g(k)$$

Factorizando:

$$u(k)[y_1(k+2) + a(k)y_1(k+1) + b(k)y_1(k)] + v(k)[y_2(k+2) + a(k)y_2(k+1) + b(k)y_2(k)] + y_1(k+2)\Delta u(k) + y_2(k+2)\Delta v(k) = g(k)$$

como $y_1(k)$ y $y_2(k)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada nos queda:

$$y_1(k+2)\Delta u(k) + y_2(k+2)\Delta v(k) = g(k)$$

Por lo tanto, (1.14) y (1.15) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\Delta u(k)$ y $\Delta v(k)$, escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) & y_2(k+1) \\ y_1(k+2) & y_2(k+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(k) \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema se obtiene $\Delta u(k)$ y $\Delta v(k)$; aplicando el operador Δ^{-1} obtenemos $u(k)$ y $v(k)$. La solución de este sistema siempre existe por ser $y_1(k)$, $y_2(k)$ linealmente independientes, lo que implica que su casorati sea diferente de cero.

Con $u(k)$ y $v(k)$ obtenemos la solución general de (1.14), es decir:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + u(k)y_1(k) + v(k)y_2(k)$$

En general la ecuación lineal en diferencias de orden "n" ,

$$\phi(k)y(k) = g(k)$$

tiene como solución complementaria:

$$y_c(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \ldots + c_n y_n(k)$$

su solución particular:

$$y_p(k) = u_1(k) y_1(k) + u_2(k) y_2(k) + \ldots + u_n(k) y_n(k)$$

Con el objetivo de ilustrar los dos métodos, resolveremos el siguiente ejemplo.

Sea $y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 8\ (4^k)\ (2^k)$. Por obtener la solución $y_p(k)$ para conformar la solución general

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k)$$

1.- Solución por el método de coeficientes indeterminados.

Primero encontraremos la solución a la ecuación en diferencias homogénea $y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 0$.

Considerando la ecuación característica correspondiente a ésta ecuación en diferencias

$$(E^2 - 6E + 8I)y(k) = 0$$
$$(E - 2)\ (E - 4)y(k) = 0$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación en diferencias homogénea son $y_1(k) = 2^k$, $y_2(k) = 4^k$

Entonces la solución complementaria a la ecuación en diferencias homogénea es

$$y_c(k) = c_1(2^k) + c_2(4^k)$$

Ahora, pasamos a buscar la solución $y_p(k)$ a la ecuación en diferencias no homogénea $y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 8\ 2^k\ 4^k$. Necesitamos encontrar un aniquilador de la parte derecha, para esto vemos la tabla de aniquiladores de la sección anterior .

La función que queremos anular es $g(k) = 8\ (4^k)\ (2^k) = 8\ (2^{2k})\ (2^k)$, o lo que es lo mismo, $g(k) = 8\ (2^{3k}) = 8\ (8^k)$.

El aniquilador de la parte derecha, según la tabla, es $(E - 8)$, multiplicando toda la ecuación en diferencias no homogénea por el aniquilador, tenemos

$$(E - 8)\ [y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k)] = (E - 8I)[\ 8\ (8^k)]$$

$$(E - 8)\ [(\ E^2 - 6E + 8I)y(k)] = E[8\ 8^k] - 8I[8\ (8^k)]$$

$$(E - 8)(E - 2)(E - 4)y(k) = 8\ (8^{k+1}) - 8\ (8)\ (8^k)$$

$$(E - 8)(E - 2)(E-4)y(k) = 0$$

Por tanto, la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea es de la forma

$$y(k) = c_1(2^k) + c_2(4^k) + c_3(8^k)$$

donde deducimos que $y_p(k) = c_3(8^k)$

Sustituyendo $y_p(k)$ en la ecuación en diferencias no homogénea, obtenemos el valor de la constante c_3.

$$(E^2 - 6E + 8I)y_p(k) = 8\ (8^k)$$

$$(E^2 - 6E + 8I)\ c_3(8^k) = 8\ (8^k)$$

$$c_3(8^{k+2}) - 6(c_3\ (8^{k+1})) + 8\ (c_3(8^k)) = 8\ (8^k)$$

$$c_3(8^k)[\ 8^2 - 6\ (8) + 8] = 8\ (8^k)$$

$$c_3(8^k)\ [24] = 8\ (8^k)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{c_3 = \frac{1}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad y_p(k) = (1/3)\ (8^k).$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación en diferencias no homogénea es

$$y(k) = c_1(2^k) + c_2(4^k) + \frac{1}{3}(8^k)$$

2.- Obtención de la solución por el método de variación de parámetros.

$$y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 8 \; (2^k) \; (4^k) = 8 \; (8^k)$$

Primero encontraremos la solución a la ecuación en diferencias homogénea $y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 0$.

Considerando la ecuación característica correspondiente a ésta ecuación en diferencias

$$(E^2 - 6E + 8I)y(k) = 0$$

$$(E - 2) \; (E - 4)y(k) = 0$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación en diferencias homogénea son $y_1(k) = 2^k$, $y_2(k) = 4^k$
Entonces la solución complementaria a la ecuación en diferencias homogénea es

$$y_c(k) = c_1(2^k) + c_2(4^k)$$

Ahora, pasamos a buscar la solución $y_p(k)$ a la ecuación en diferencias no homogénea $y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 8 \; (2^k) \; (4^k)$.

En la función $y_c(k)$ obtenida, sustituimos las constantes c_1 y c_2 por las funciones desconocidas $u(k)$ y $v(k)$, respectivamente. De manera que

$$y_p(k) = u(k) \; (2^k) + v(k) \; (4^k)$$

donde u(k), v(k) se obtienen a partir de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) & y_2(k+1) \\ y_1(k+2) & y_2(k+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(k) \end{bmatrix}$$

obteniendose

$$\begin{bmatrix} 2^{k+1} & 4^{k+1} \\ 2^{k+2} & 4^{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8(8^k) \end{bmatrix}$$

Resolviendo por cramer .

$$\Delta u(k) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4^{k+1} \\ 8(8^k) & 4^{k+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{k+1} & 4^{k+1} \\ 2^{k+2} & 4^{k+2} \end{vmatrix}} = \frac{-32\ (4^k)\ (4^k)\ (2^k)}{32(2^k)(4^k) - 16(2^k)(4^k)}$$

$$\Delta u(k) = \frac{-32\ (4^k)(4^k)(2^k)}{16\ (2^k)(4^k)}$$

$$\Delta u(k) = -2\ (4^k).$$

$$\Delta v(k) = \frac{\begin{vmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 2^{k+2} & 8(8^k) \end{vmatrix}}{16\ (2^k)\ (4^k)} = \frac{16\ (2^k)(4^k)(2^k)}{16\ (2^k)\ (4^k)}$$

$$\Delta v(k) = 2^k.$$

Ahora, aplicando el operador suma indefinida a cada uno de estos resultados, se obtiene u(k) y v(k).

$\Delta^{-1}[\Delta u(k)] = \Delta^{-1}[-2\ (4^k)] = -2\ \Delta^{-1}[4^k] = (-2/3)\ (4^k)$, es decir, tenemos que

$\Delta^{-1}[-2(4^k)] = (-2/3)\ (4^k)$
porque

$\Delta[(-2/3)\ (4^k)] = -2\ (4^k).$

$\Delta^{-1}[\Delta v(k)] = \Delta^{-1}[2^k] = 2^k$. Igualmente como en el caso anterior, tenemos que

$\Delta^{-1}[2^k] = 2^k$ ya que $\Delta[2^k] = 2^k$.

Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p(k) = (-2/3)\ (4^k)\ (2^k) + (2^k)\ (4^k)$$

$$y_p(k) = (1/3)\ (4^k)\ (2^k)$$

La solución general

$$y(k) = c_1(2^k) + c_2(4^k) + (1/3)\ (2^k)\ (4^k)$$

I.8.- Aplicaciones de las Ecuaciones en Diferencias Escalares.

1.- Determinar el conjunto de posibles valores reales para a y b de manera que todas las soluciones y(k) de la ecuación en diferencias siguiente:

$$y(k+2) + 2ay(k+1) + by(k) = 0$$

tiendan a cero cuando $k \to \infty$.
Solución:
Considerando la ecuación característica correspondiente:

$$m^2 + 2am + b = 0$$

con sus raíces:

$$m_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

$$m_1 = -a + \sqrt{a^2 - b} \quad ; \qquad m_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}$$

Dividimos el problema en dos casos:
Caso I: $a^2 - b \geq 0$ y caso II: $a^2 - b < 0$

Caso I: La solución,

$$y(k) = c_1(m_1)^n + c_2(m_2)^n$$

tiende a cero si y sólo si: $|m_1| < 1$ y $|m_2| < 1$; esto implica:

$$|-a+\sqrt{a^2 - b}| < 1 \quad y \quad |-a+\sqrt{a^2 - b}| < 1$$

las dos desigualdades las podemos reescribir como:

$$a-1 < -\sqrt{a^2 - b} < 0 < \sqrt{a^2 - b} < a + 1$$

$$(a-1)^2 > a^2 - b \qquad\qquad a^2 - b < a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 - 2a + 1 > a^2 - b \qquad\qquad \boxed{b > -2a - 1}$$

$$\boxed{2a - 1 < b}$$

Si $a^2 - b = 0$, entonces tenemos que $m_1 = m_2 = -a$, por lo tanto la solución general es de la forma

$$y(k) = c_1(-a)^k + c_2 k(-a^k)$$

$y(k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \iff |a| < 1$. Es conocido del cálculo que $k(-a)^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

Caso II: $a^2 - b < 0$ implica:

$$m_1 = -a + \sqrt{b - a^2}\ i \qquad y \qquad m_2 = -a - \sqrt{b - a^2}\ i$$

$$\text{Sea } r = |m_1| = \sqrt{a^2 + \left[\sqrt{b - a^2}\right]^2} = \sqrt{a^2 + b - a^2} = \sqrt{b}$$

$$\Theta = \tan^{-1}\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{b - a^2}}{-a}\right]$$

esto implica que

$$y(k) = c_1 \ (\sqrt{b})^k \cos\left[k \left[\frac{\sqrt{b - a^2}}{-a}\right]\right] +$$

$$c_2 \ (\sqrt{b})^k \operatorname{sen}\left[k \left[\frac{\sqrt{b - a^2}}{-a}\right]\right]$$

por lo que se concluye que

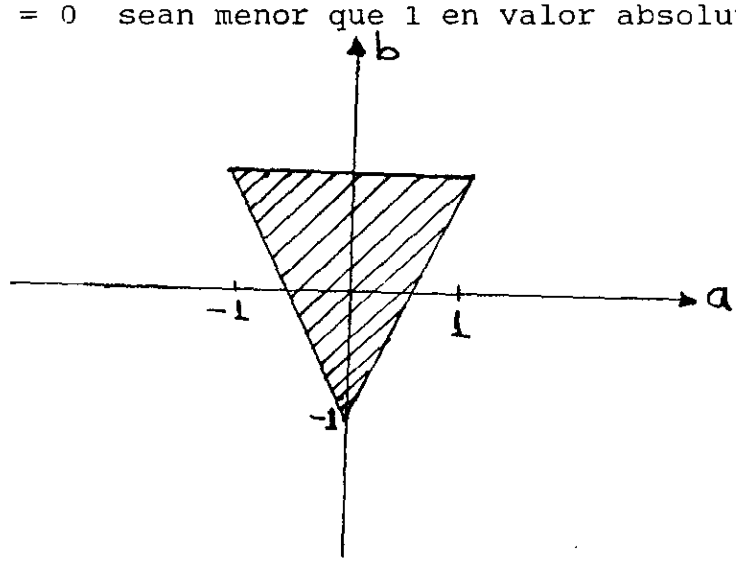
$$\left\{ y_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ b<1 \right\} \qquad \text{ya que b es positiva.}$$

De la solución al problema, se deduce el siguiente teorema de estabilidad.

TEOREMA: Las condiciones

$1 + 2a + b > 0$ $\qquad$ $1 - 2a + b > 0$ $\qquad$ $1-b > 0$

son necesarias y suficientes para que las dos raíces de $m^2 + 2am + b = 0$ sean menor que 1 en valor absoluto.



2.- Un hombre pidió prestado una cantidad A de dinero. El está pagando el préstamo en sumas iguales S de pagos periódicamente [tal como cada mes, cada tres meses, etc.]. Este pago incluye una parte que es el interés sobre el préstamo y otra parte es usada para reducir la cuenta principal, la cual está pendiente. Si la tasa de interés es i por período de pago.

a)Obtenga una ecuación en diferencias para la cuenta principal P_k la cuál está pendiente, después del k-ésimo pago.

b) Resolver P_k.

Solución:

a) P_k= La cuenta principal pendiente después del k-ésimo pago, P_{k+1} = La cuenta principal pendiente después del k+1-ésimo pago.

Ahora esta última cantidad a ser pagada P_{k+1}, es igual a la cuenta principal actual P_k más el interés que se debe en este pago por período menos la suma S correspondiente. al pago periódico. Así,

$$P_{k+1} = P_k + iP_k - S$$

ó $$P_{k+1} - (1 + i)P_k = -S$$

la cual es una ecuación lineal en diferencias de coeficientes constantes no homogénea.

La cuenta principal pendiente cuando k=0 es el total del préstamo A.

$$P_0 = A$$

b) Resolviendo

$$P_{k+1} - (1+i)P_k = -S$$

La ecuación homogénea correspondiente es:

$$\left[E - (1+i)\right] P_k = 0$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$P_k = c\ (1+i)^k$$

Por encontrar la solución general de la ecuación no homogénea; utilizando el método de coeficientes indeterminados.

$$P_{k+1} - (1+i) P_k = -S$$

$$P_{k+1} = (1+i) P_k - S$$

Tenemos que el aniquilador de la parte derecha, como lo podemos observar en la tabla antes mencionada de aniquiladores, es (E-1). Multiplicando toda la ecuación en diferencias por este aniquilador, tenemos

$$(E-1)\left[P_{k+1} - (1+i) P_k\right] = -S\ (E-1)$$

$$(E-1)\ (E-(1+i)) P_k = -S\ (E-1)$$

$$(E-1)\ (E-(1+i)) P_k = -S - (-S) = 0$$

$$(E-1)\ (E-(1+i)) P_k = 0$$

$$P_k = c_1 (1+i)^k + c_2 (1)^k$$

$$P_k = c_1 (1+i)^k + c_2$$

donde:

$$P_{P_k} = c_2$$

Sustituyendo esta solución particular en la ecuación original, obtenemos los valores de las constantes.

$[E - (1+i)](c_2) = -S$

$c_2 - (1+i)(c_2) = -S$

$c_2 - c_2 - c_2 i = -S$

$-c_2 i = -S$

$\boxed{c_2 = \frac{S}{i}}$

Por tanto, la solución general es

$$P_k = C_1(1+i)^k + \frac{S}{i}$$

Usando la condición anterior $P_0 = A$

$P_0 = C_1 + \frac{S}{i} = A$, implica

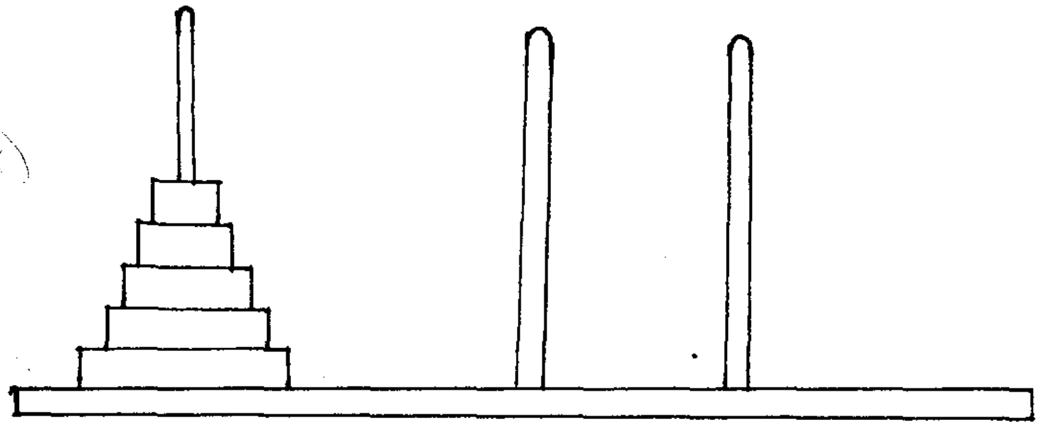
$c_1 = A - \frac{S}{i}$

Así, la solución general con condición inicial $P_0 = A$ es

$$P_k = (A - \frac{S}{i})\ (1+i)^k + \frac{S}{i}$$

$$P_k = A\ (1+i)^k - \frac{S}{i}\ [(1+i)^k - 1]$$

3.- La torre de Hanoi es un rompecabezas que consiste de una tabla con tres estaquillas y k anillos circulares de tamaño decreciente localizados en una de las estaquillas (ver la figura 2). El problema es trasladar los anillos a otra estaquilla moviendo un anillo en cada tiempo y nunca colocando un anillo grande arriba de un anillo pequeño. La tercera estaquilla puede ser usada como un lugar de descanso temporal para los anillos durante el proceso de transferencia. ¿Cuántos movimientos son requeridos para realizar la transferencia, llevando sin cambiar la posición relativa de los anillos?



Solución:

y_k : Denota el número de movimientos realizados para llevar k anillos desde una estaquilla a otra.

y_{k+1} está relacionado con y_k por la relación de recurrencia

$$y_{k+1} = 2y_k + 1$$

Porque podemos mover k anillos a la segunda estaquilla en y_k movimientos, entonces transferimos el anillo k+1 a la tercera estaquilla en un movimiento, y finalmente movemos los k anillos de la segunda estaquilla a la tercera en otros y_k movimientos. De aquí que realiza $y_k + 1 + y_k = 2y_k + 1$ movimientos para transferir k+1 anillos.

$$y_{k+1} = 2y_k + 1$$

$$y_{k+1} - 2y_k = 1$$

La ecuación homogénea correspondiente es

$$y_{k+1} - 2y_k = 0$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$(E - 2)y_k = 0$

$$y_{c_k} = c_1(2^k)$$

Por encontrar la solución general de la ecuación no homogénea, utilizando el método de coeficientes indeterminados.

$y_{k+1} - 2y_k = 1$

El aniquilador de la parte derecha es $(E - 1)$; multiplicando toda la ecuación en diferencias por este anquilador tenemos

$(E-1)\ [\ y_{k+1} - 2y_k] = 1\ (E-1)$

$(E-1)\ (E-2)y_k = 1\ (E-1)$

$(E-1)\ (E-2)y_k = 1 - 1 = 0$

$(E-1)\ (E-2)\ y_k = 0$

Por lo tanto la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea es:

$$y_k = c_1(2^k) + c_2$$

donde la solución particular es

$$y_{p_k} = c_2$$

Sustituyendo y_{p_k} en la ecuación no homogénea, se obtienen los valores de las constantes.

$(E-2)(c_2) = 1$

$c_2 - 2c_2 = 1$

$-c_2 = 1$

$\boxed{c_2 = -1}$

Por lo tanto, la solución general es

$$y_k = c_1(2^k) - 1$$

La condición inicial $y_1 = 1$ nos da

$y_1 = c_1 2 - 1 = 1$

$c_1\ 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_1 = 1.}$

Por lo tanto, la torre de Hanoi con k anillos puede resolverse en:

$$y_k = 2^k - 1 \text{ movimientos.}$$

4.- Los números de Fibonacci son definidos por la ecuación en diferencias

$$X_{k+2} - X_{k+1} - X_k = 0$$

con condiciones iniciales $X_0 = 1$, $X_1 = 1$.

Los números son miembros de la sucesión $\{X_k\}$:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,....

donde el k-ésimo número de Fibonacci para k≥2 es obtenido al sumar los dos números de Fibonacci precedentes.
Por encontrar una sucesión para obtener los números de Fibonacci.

La ecuación auxiliar es

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

que tiene como soluciones

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación en diferencias tiene como solución general

$$X_k = c_1\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^k + c_2\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^k$$

Ahora aplicamos las condiciones iniciales para encontrar los valores de c_1 y c_2.

$$X_0 = c_1 + c_2 = 1 \qquad (1.16)$$

$$X_1 = c_1\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] + c_2\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = 1$$

$$X_1 = c_1[1+\sqrt{5}] + c_2[1-\sqrt{5}] = 2 \qquad (1.17)$$

Multiplicando la ecuación (1.16) por $-[1+\sqrt{5}\ ]$ y después sumamos con (1.17) nos queda,

$$\begin{array}{l} -c_1[1+\sqrt{5}\ ] - c_2[1+\sqrt{5}\ ] = -\ [1+\sqrt{5}\ ] \\ \ \ c_1[1+\sqrt{5}\ ] + c_2[1-\sqrt{5}\ ] = 2 \\ \hline -\ c_2[1+\sqrt{5}\ ] + c_2[1-\sqrt{5}\ ] = -\ [1+\sqrt{5}\ ] + 2 \end{array}$$

$$c_2[-1-\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}\ ] = -1 - \sqrt{5} + 2$$

$$c_2[\ -2\sqrt{5}\ ] = 1 - \sqrt{5}$$

$$c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$$

Sustituyendo c_2 en la ecuación (1.16) tenemos

$$c_1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} = 1$$

$$c_1 = 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

Por lo tanto, la fórmula para el k-ésimo número de Fibonacci es

$$X_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^k + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^k .$$

5.- Supóngase que los jugadores A y B juegan un partido de pareja con centavos, donde A, B, empiezan con N_A, N_B centavos respectivamente. El juego termina cuando un jugador ha perdido todos sus centavos. Suponemos que las monedas son legales, así que cada jugador tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganancia en cada juego. ¿ Cúal es la probabilidad de que A gane todos los centavos?

Solución:

Sea P_k la probabilidad de que si A tiene k centavos, entonces A ganará el partido.

Sea $N = N_A + N_B$. Claramente, $P_0 = 0$ y $P_N = 1$.

Considere un valor de k tal que A tiene k+1 centavos y $0<k+1<N$ Después de un juego, A tendrá ya sea k+2 o k centavos, dependiendo de si A gana o pierde el juego. Por lo tanto,

$$P_{k+1} = \frac{1}{2} P_{k+2} + \frac{1}{2} P_k$$

De esta manera, tenemos la ecuación en diferencias

$$P_{k+2} - 2P_{k+1} + P_k = 0$$

La ecuación auxiliar

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

tiene raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, de manera que la solución general es

$$P_k = c_1 + c_2 k$$

Ya que $P_0 = 0$, obtenemos $c_1 = 0$, de manera que $P_k = c_2 k$; de aquí que $1 = P_N = c_2 N$, de modo que $c_2 = \frac{1}{N}$. Las probabilidades obtenidas son

$$P_k = \frac{k}{N_A + N_B}, \qquad 0<k<N_A + N_B$$

La probabilidad de que A gane empezando con N_A centavos es por lo tanto

$$P_{N_A} = \frac{N_A}{N_A + N_B}.$$

Concluimos de esto que no es juicioso jugar un partido en parejas contra un oponente con más recursos.

II.1.- Algunas definiciones acerca del cálculo finito.

Analizaremos la estabilidad de un sistema dinámico discreto. Suponemos que, para cualquier valor particular de la variable independiente k, el sistema puede ser completamente descrito por un vector finito dimensional $x(k) \in \mathbb{R}^n$, llamado vector de estado. Aquí, $\mathbb{R}^n$ es el espacio real n-dimensional Euclideano y

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad ||x|| = (x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$$

la longitud Euclideana del vector $x \in \mathbb{R}^n$. Las componentes pueden ser la temperatura, densidad, presión, etc. de algún sistema físico y k el tiempo para el sistema dinámico.

El sistema es observado solo en tiempos discretos; es decir, cada hora o cada segundo. $\mathbb{N} \cup \{0\}$ denota el conjunto de todos los enteros no-negativos, de manera que en el futuro el sistema será una sucesión $x(k)$ donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x(k) \in \mathbb{R}^n$; $x(k)$ es la variable dependiente y k la variable independiente.

Para una sucesión de vectores $x(k)$, $x(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} y$ significa que $\|x(k) - y\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Usaremos también x para denotar una función de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a $\mathbb{R}^n$ ($x:\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}^n$). Por tanto permitimos la usual y conveniente ambigüedad de que x puede denotar una función o un vector representado por un punto.

DEFINICION II.1.1:

La *primera diferencia* de una función x la definimos como

$$x(k+1) - x(k).$$

Correspondiendo al teorema fundamental del cálculo, (mencionado en las propiedades del caso escalar) tenemos

$$\sum_{i=j}^{k} [x(i+1) - x(i)] = x(k+1) - x(j)$$

si $\mathbf{y}(k+1) = \sum_{i=j}^{k} x(i)$, entonces $\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k) = x(k)$. Como fué mencionado en el capitulo I, éstas son fórmulas básicas del cálculo finito. Con éstos elementos matemáticos deseamos describir el comportamiento de las soluciones de una ecuación en diferencias en $\mathbb{R}^n$. Esto es, hay una función $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(k+1) = F(x(k),k) \quad \text{para } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Así el estado en el tiempo k+1 está completamente determinado por el estado en el tiempo k. En este trabajo nos restringiremos al caso en que la función F depende solo de x(k), llamado *sistema autónomo*. Es decir

$$x(k+1) = F(x(k)) \quad \text{para } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad (2.1)$$

DEFINICION II.1.2:
Una función $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *continua* (en $\mathbb{R}^n$) si

$$x(k) \to \mathbf{y} \text{ implica que } F(x(k)) \to F(y)$$

Esta hipótesis la necesitaremos más tarde.

Si x es un vector, F(x) es un vector y representa el valor de la función en x. Si x es una función, el simbolo Fx denotará la composición de funciones $(Fx)(k) = F(x(k))$. Así la ecuación en diferencias (2.1) puede ser escrita

$$x(k+1) = Fx \qquad (2.2)$$

La solución al problema de valor inicial

$$x(k+1)= Fx \qquad x(0)=x_0, \qquad (2.3)$$

es $x(k)=F^k(x_0)$, donde F^k es la k-ésima iteración de F. Esto es, $F^0= I$, la función identidad ($Ix=x$), y $F^k= F\ F^{k-1}$. La solución está definida en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Al igual que el caso escalar, no hay dificultades en las preguntas acerca de la existencia y unicidad de las soluciones para ecuaciones en diferencias. También, es claro que las soluciones son continuas con respecto a la condición inicial (estado) x_0 si F es continua. A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la existencia y unicidad se considera para $k \geq 0$. La ecuación (2.3) es simplemente un algoritmo que define una función x en $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

DEFINICION II.1.3:
Un estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es "*punto fijo*" o "*estado de equilibrio*" para el sistema (2.2) si $F(x_0)=x_0$. Así la solución de (2.2) la cual comienza en x_0 se mantiene en x_0 para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

II.2.- Sistemas de Ecuaciones en Diferencias.

Las ecuaciones en diferencias tratadas en el capítulo I consisten en una sola ecuación con una función incógnita; ahora veremos el sistema (2.3) como un conjunto de n ecuaciones en diferencias con n funciones incógnitas al cual llamamos *sistema de ecuaciones en diferencias*.

DEFINICION II.2.1:
Un *sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden* (sistema autónomo) es un conjunto de ecuaciones que presentan la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= F_1[\ x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)\ ] \\ x_2(k+1) &= F_2[\ x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)\ ] \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= F_n[\ x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)\ ] \end{aligned}$$

La forma general del caso lineal no autónomo (respecto a la variable de estado x) que trataremos lo expresamos mediante el sistema de ecuaciones en diferencias

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1(k)$$
$$x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{21}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2(k)$$
$$\vdots$$
$$x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_n(k)$$

donde los coeficientes a_{ij} y b_i pueden ser funciones de k.

Al igual que en las ecuaciones en diferencias con una sola función incógnita, los sistemas en diferencias se dividen en varios tipos:

- Si todos los coeficientes a_{ij} son constantes el sistema se llama de *coeficientes constantes* y se representa matricialmente mediante la ecuación

$$x(k+1) = Ax(k) + b(k)$$

donde A es una matriz de nxn; x(k+1), x(k) y b(k) son vectores de nx1.

- Si algún término $b_i(k)$ no es cero; el sistema se llama *no homogéneo*.

- Si $b_1(k)=b_2(k)=\dots=b_n(k)=0$; el sistema se llama *homogéneo.*

Trabajaremos con el caso lineal autónomo para representar a una ecuación en diferencias lineal de orden n por medio de un sistema de ecuaciones de primer orden; hacemos un cambio de variable como sigue.

Sea la ecuación en diferencias lineal de orden n no homogénea

$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_{n-1}y(k+1) + a_ny(k) = g(k)$$

Si hacemos $y(k) = x_1(k)$, tenemos:

$$y(k+1) = x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$y(k+2) = x_2(k+1) = x_3(k)$$
$$\vdots$$
$$y(k+n-1) = x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$$
$$y(k+n) = x_n(k+1)$$

Si despejamos $y(k+n)$ de la ecuación de orden n, tenemos:

$$y(k+n) = g(k) - a_1 y(k+n-1) - \ldots - a_{n-1} y(k+1) - a_n y(k)$$

o lo que es lo mismo:

$$y(k+n) = g(k) - a_1 x_n(k) - \ldots - a_{n-1} x_2(k) - a_n x_1(k)$$

de aquí que:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = x_3(k)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$$
$$x_n(k+1) = x_{n+1}(k)$$

Por lo tanto:

$$x_n(k+1) = g(k) - a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \ldots - a_1 x_n(k)$$

es un sistema de n ecuaciones en diferencias lineales de primer orden, el cual puede reescribirse como:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= 0\,x_1(k) + 1\,x_2(k) + 0\,x_3(k) + \dots + 0\,x_n(k) + 0\,g(k)\\
x_2(k+1) &= 0\,x_1(k) + 0\,x_2(k) + 1\,x_3(k) + \dots + 0\,x_n(k) + 0\,g(k)\\
\vdots\quad & \quad\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
x_n(k+1) &= -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - a_{n-2} x_3(k) - \dots - a_1 x_n(k) + g(k)
\end{aligned}
$$

En forma matricial se representa:

$$x(k+1) = Ax(k) + b(k)$$

donde:

$$
A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix};\quad
x(k)=\begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n(k)\end{bmatrix};\quad
b(k)=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ g(k)\end{bmatrix}
$$

La solución general de un sistema de ecuaciones en diferencias lineal $x(k+1) = Ax(k) + b(k)$; se obtiene sumando la solución general del sistema homogéneo asociado $x_c(k)$, con una solución particular del sistema $x_p(k)$; esto es:

$$x(k) = x_c(k) + x_p(k)$$

Resolución del sistema homogéneo:

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Para k=0; $\quad x(1) = Ax(0)$

Para k=1; $\quad x(2) = Ax(1) = A[Ax(0)] = A^2x(0)$

Para k=2; $\quad x(3) = Ax(2) = A[A^2x(0)] = A^3x(0)$

Por tanto $\quad x(4) = Ax(3) = A[A^3x(0)] = A^4x(0)$

Por inducción:

$$x(k) = A^k x(0)$$

donde A^k es la k-ésima potencia de la matriz A, la cual juega un papel para ecuaciones en diferencias análogo a el papel de la matriz exponencial e^{At} para ecuaciones diferenciales. $x(0)$ es el vector de condiciones iniciales.

II.3.- Método para calcular A^k.

En vista de la importancia de, dada la matriz A, calcular la matriz A^k, a continuación expondré un método para calcular A^k.

La ecuación característica o el polinomio característico $P(\lambda)=0$ de la matriz A de orden nxn es:

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, tenemos:

$$f(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0$$

Despejando A_n de ésta última ecuación:

$$A^n = -a_1A^{n-1} - \dots - a_{n-1}A - a_nI$$

Ecuación que se puede representar:

$$A^n = b_0I + b_1A + \dots + b_{n-1}A^{n-1}$$

donde: $b_0 = -a_n$; $b_1 = -a_{n-1}$; ... ; $b_{n-1} = -a_1$.

A ésta última ecuación , la multiplicamos de nuevo por A y tenemos:

$$AA^n = A^{n+1} = A[\, b_0I + b_1A + \dots + b_{n-1}A^{n-1} \,]$$

$$A^{n+1} = b_0A + b_1A^2 + \dots + b_{n-1}A^n$$

Sustituyendo el valor de A^n:

$$A^{n+1} = b_0 A + b_1 A^2 + \ldots + b_{n-1}[\, b_0 I + b_1 A + \ldots + b_{n-1} A^{n-1} \,]$$

$$A^{n+1} = b_0 A + b_1 A^2 + \ldots + b_{n-1} b_0 I + b_{n-1} b_1 A + \ldots + b_{n-1} b_{n-1} A^{n-1}$$

$$A^{n+1} = b_{n-1} b_0 I + [\, b_0 + b_{n-1} b_1] A + \ldots + b_{n-1} b_{n-1} A^{n-1}$$

$$A^{n+1} = c_0 I + c_1 A + \ldots + c_{n-1} A^{n-1}$$

donde: $c_0 = b_{n-1} b_0$; $c_1 = b_0 + b_{n-1} b_1$; ... ; $c_{n-1} = b_{n-1} b_{n-1}$.

Ahora a ésta última ecuación la multiplicamos de nuevo por A para obtener otra ecuación con nuevos coeficientes a la cual seguimos multiplicando por A, y así sucesivamente, hasta obtener en general:

$$A^k = \beta_0 I + \beta_1 A + \ldots + \beta_{n-1} A^{n-1} \qquad (2.4)$$

donde $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ son coeficientes que dependen de k.

Lo anterior es válido para el polinomio característico de la matriz A de orden nxn:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Si despejamos λ^n se forma otra ecuación la cual multiplicamos por λ, obtenemos así una ecuación en función de λ^n; sustituimos λ^n y obtenemos una ecuación en función de λ^{n-1} y potencias menores.

$$\lambda^{n+1} = c_0 + c_1 \lambda + \ldots + c_{n-1} \lambda^{n-1}$$

La multiplicación por λ indefinidamente va generando nuevos coeficientes que se pueden compactar mediante el uso de nuevas literales, pero cuidando que al generalizar para λ^k el resultado quede en función de λ^{n-1} y potencias menores.

En general:

$$\lambda^k = \beta_0 + \beta_1\lambda + \ldots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$

donde los β_i; i= 0,1,2,3,...,n-1 son los mismos coeficientes que en (2.4). Esta ecuación debe escribirse para cada valor característico λ que proporcione la matriz A; es decir, despues de haber obtenido las raíces del polinomio característico de la matriz A pasamos a sustituirlo en la ecuación y obtenemos así un sistema de ecuaciones a resolver, donde encontramos los valores de los coeficientes β_i y los sustituimos por último en la ecuación general para determinar el valor de A^k.

Para encontrar la expresión de A^k, dividimos el método en dos casos, los valores propios λ, que pueden ser raíces diferentes y raíces repetidas.

CASO 1: *raices diferentes*

Si las "n" raíces de la ecuación característica son diferentes, entonces se sustituye cada una de ellas en la ecuación general de A^k, y se obtiene un sistema de "n". ecuaciones con "n" incógnitas. Las "n" funciones $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, obtenidas como solución de este sistema, se sustituyen en la ecuación general (2.4) para determinar la matriz A^k.

CASO 2: *raices repetidas*

Si la ecuación característica de la matriz A tiene "m" raíces iguales, $\lambda_1=\lambda_2= \ldots =\lambda_m$ y las restantes λ_{m+1}, λ_{m+2}, $\ldots, \lambda_n$ diferentes, entonces el sistema de ecuaciones está formado por n-m+1 ecuaciones linealmente independientes con "n" incógnitas; o sea más incógnitas que ecuaciones. En este caso, con las n-m+1 raíces diferentes se establecen n-m+1 ecuaciones, ya que:

$$f(\lambda_i) = 0, \quad i=m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots,n$$

y otras m-1 ecuaciones, se forman derivando la ecuación general de λ^k:

$$\lambda^k = \beta_o + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda + \ldots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$

con respecto a λ, m-1 veces:

$$\left.\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_j} = 0$$

$$\left.\frac{d^2f(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_j} = 0$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{d^{m-1}f(\lambda)}{d\lambda^{m-1}}\right|_{\lambda=\lambda_j} = 0$$

Para $\lambda_j = \lambda_1=\lambda_2= \ldots=\lambda_m$.

De esta manera se tiene un total de (n-m+1) + (m-1) = n ecuaciones con "n" incógnitas.

II. 4.- Geometría de las Soluciones cerca del punto fijo x=0.

Precisaremos más los sistemas lineales con los que trabajaremos.

$$\text{Sea } x(k+1)=Ax(k) \qquad \text{con } x(k)\big|_{k=0} = x_0 \qquad (2.5)$$

Como mencionamos antes, la solución general de esta ecuación en diferencias es

$$x(k)=A^k x_0$$

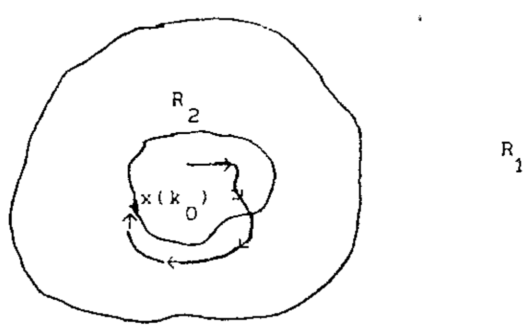
Observemos que el sistema (2.5) tiene un punto fijo $x_k=x^*$ si

$$Ax^*=x^*$$
$$\Rightarrow \qquad (A-I)x^*=0$$

de donde tenemos que si $\det(A-I)\neq 0$ entonces $x^*=0$ es el único punto fijo. Por el contrario, si la matriz $(A-I)$ es singular entonces tendremos una infinidad de puntos fijos. Observese que en este caso tenemos que $\lambda=1$ es valor propio de A. Diremos que el sistema (2.5) es *degenerado* si $\lambda=1$ es valor propio de A. En este trabajo supondremos (a no ser que se precise lo contrario) que $(A-I)$ es no-singular.

Con el objetivo de distinguir el comportamiento cualitativo de las soluciones de las ecuaciones en diferencias, daremos las siguientes definiciones de estabilidad, inestabilidad y estabilidad asintótica.

DEFINICION II.4.1:
Diremos que una región R_1 del espacio de estado "*contiene*" el movimiento de alguna región R_2, si todo el movimiento originado en R_2, al tiempo k_0, se mantiene en R_1 para $k \geq k_0$.



En la definición anterior es claro que la región R_1 contiene R_2.

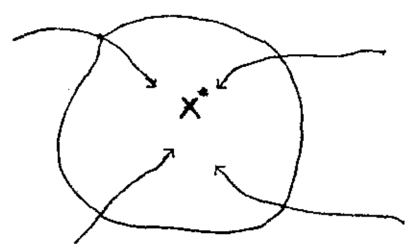
DEFINICION II.4.2:
Un punto de equilibrio x^* es "*estable*" si toda vecindad de x^* contiene el movimiento de alguna otra vecindad de x^*.

DEFINICION II.4.3:
Un estado de equilibrio que no es estable se llama "*inestable*".

Diremos que el punto de equilibrio x^* es un *atractor* para la trayectoria $x(k)$, donde $x(k)$ es solución de $x(k+1) = F(x(k))$, si

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = x^*$$

DEFINICION II.4.4:
El punto x^* es "*asintóticamente estable*" si éste es un atractor (respecto al sistema dinámico) para todas las trayectorias $x(k)$ que inician o pasan através de una vecindad de x^*.



¿ Cuándo un punto fijo de $x(k+1) = Ax(k)$ es estable, inestable o asintóticamente estable?

En vista de que la solución del problema de valor inicial es $x(k)= A^k x_0$, podemos iniciar la respuesta a la pregunta anterior planteándonos la siguiente pregunta

¿ Para qué matrices A tendremos que $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$?

Para simplificar la respuesta a ésta pregunta resolveremos algunos ejemplos importantes para la solución de $x(k)$ con tres tipos clásicos de matrices A. Estos tipos corresponden a los bloques de Jordan, los cuales son definidos en el anexo A.II.1.

En cada uno de estos ejemplos, y con el objetivo de ilustrar la geometría que describen las soluciones (una solución por cada valor inicial x_0) en el espacio de estado, describiremos la solución al problema de valor inicial

$$x(k+1) = Ax(k); \qquad k=0,1,2,...$$

$$x(k)|_{k=0} = x_0$$

Nos restringimos a el caso en que A es de dimensión 2x2.

Caso (i). A *tiene valores propios reales distintos.*

Aquí los vectores propios son linealmente independientes y A es completamente diagonalizable, $P^{-1}AP = J$. Dado el sistema

$$x(k+1) = Ax(k), \qquad x(0)=x_0$$

la forma canónica puede efectuarse mediante el cambio de variable

$$x(k) = Py(k) \qquad (2.6)$$

de donde deducimos

$$Ax(k) = APy(k)$$

$$P^{-1}Ax(k) = P^{-1}APy(k) \equiv Jy(k) \qquad (2.7)$$

donde P es escogido de manera que $P^{-1}AP=J$ es diagonal, donde los elementos de la diagonal son los valores propios de A.

La solución de la ecuación $y(k+1) = Jy(k)$ es

$$y(k) = J^k y_0$$

es decir, $y_i(k) = y_i(\lambda_i^k)$ para $i = 1,2,\ldots n$ donde $y_i(k)$ es la i-ésima entrada del vector $y(k)$.

En este caso i), A tiene valores propios λ_1, λ_2 con los correspondientes vectores propios v_1 y v_2. De manera que la solución (única si fijamos x_0) de (2.5) podemos escribirla como

$$x_k = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 \tag{2.8}$$

donde c_1 y c_2 son constantes tales que

$$c_1v_1 + c_2v_2 = x_0$$

Observese que en la ecuación (2.8) tenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = 0$ si $|\lambda_i|<1$, para $i = 1,2$. Por el contrario, la sucesión solución $x(k)$ se aleja del origen si $|\lambda_i|>1$.

Al sustituir (2.8) en (2.5) mostramos que es la solución:

$$Ax(k) = c_1\lambda_1^k Av_1 + c_2\lambda_2^k Av_2$$

$$Ax(k) = c_1\lambda_1^{k+1}v_1 + c_2\lambda_2^{k+1}v_2$$

$$Ax(k) = x(k+1).$$

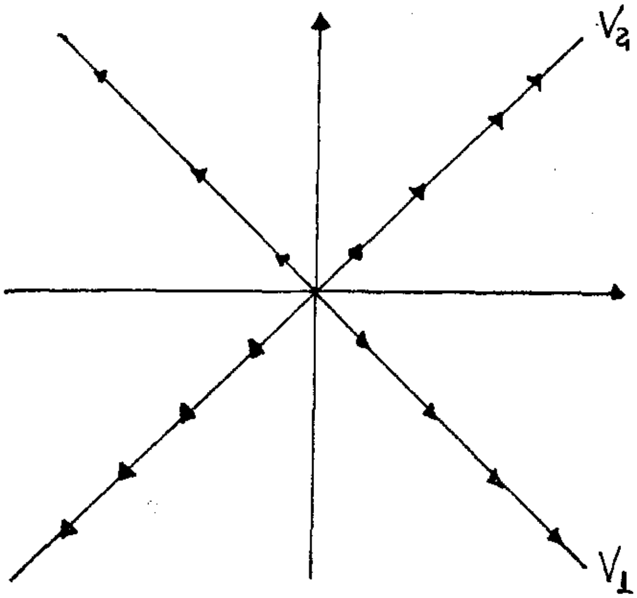
Describiremos el comportamiento de la solución (2.8) para diferentes valores de λ_1 y λ_2. Consideraremos los casos

a) $1<\lambda_1<\lambda_2$

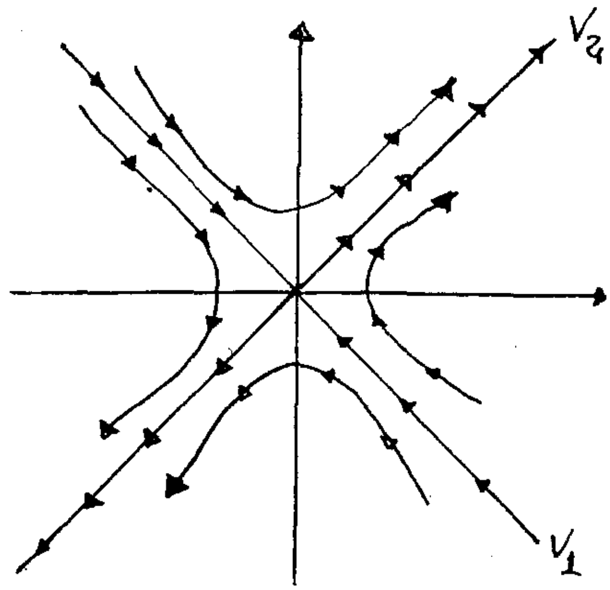
b) $-1<\lambda_1<1<\lambda_2$

c) $-1<\lambda_1<\lambda_2<1$

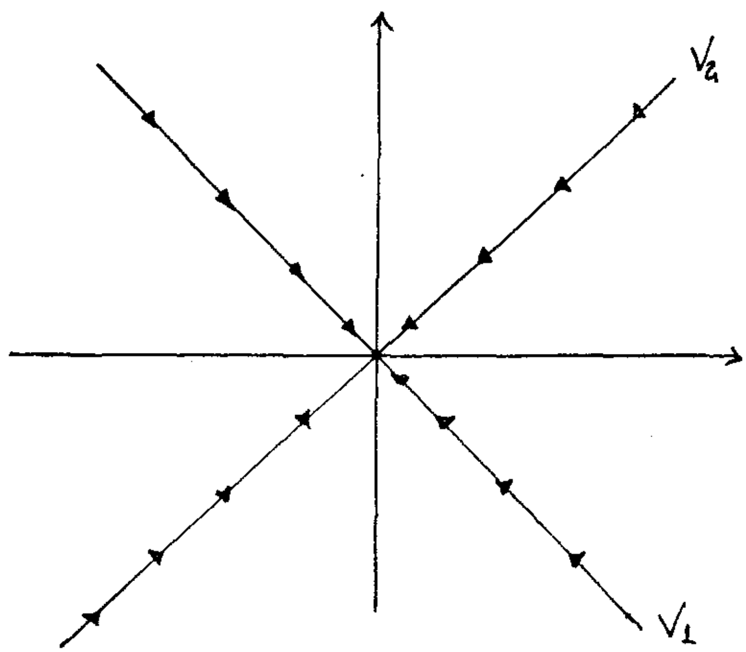
con el vector de estado $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, con $\mathbf{V}_i$ el "espacio propio" generado por el vector propio v_i. De acuerdo a las observaciones de estabilidad de la ecuación (2.8), tenemos que el caso c) corresponde a un comportamiento asintóticamente estable, siendo los casos a) y b) inestables.



a) inestable



b) inestable



c) asintóticamente estable

Ahora, calcularemos A^k para cuando

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

El polinomio característico de A es

$$P(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) = 0$$

Por lo tanto $\lambda_1=a$ y $\lambda_2=c$.

Por ser A una matriz de 2x2

$$A^k = \beta_0 I + \beta_1 A \tag{2.9}$$

donde β_0 y β_1 son las incógnitas. El polinomio característico de la matriz A es

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

donde,

$$\lambda_i^{\,k} = \beta_0 + \beta_1\lambda_i$$

Sustituyendo el valor de $\lambda_1 = a$ tenemos

$$a^k = \beta_0 I + \beta_1 a \tag{2.10}$$

Sustituyendo el valor de $\lambda_2=c$

$$c^k = \beta_0 + \beta_1 c \tag{2.11}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.10) y (2.11) encontraremos los valores de las incógnitas.

Multiplicando por (-1) a la ecuación (2.10) y sumandola a

(2.11) tendremos

$$
\begin{array}{rl}
 & -a^k = -\beta_0 - \beta_1 a \\
+ & c^k = \beta_0 + \beta_1 c \\
\hline
 & (c^k - a^k) = \beta_1 (c-a)
\end{array}
$$

Despejando β_1 obtenemos

$$\beta_1 = \frac{(c^k - a^k)}{(c-a)}$$

Sustituyendo el valor de β_1 en (2.10) y despejando β_0

$$a^k = \beta_0 + \left[\frac{(c^k - a^k)}{(c-a)}\right] a$$

$$\beta_0 = a^k - \left[\frac{(c^k - a^k)}{(c-a)}\right] a$$

Sustituyendo β_0 y β_1 en (2.10)

$$A^k = \left[\frac{ca^k - ac^k}{c-a}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left[\frac{c^k - a^k}{c-a}\right] \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$A^k = \left[\frac{1}{c-a}\right] \begin{bmatrix} ca^k - ac^k + ac^k - a^{k+1} & (c^k - a^k) b \\ 0 & ca^k - ac^k + c^{k+1} - ca^k \end{bmatrix}$$

$$A^k = \left[\frac{1}{c-a}\right] \begin{bmatrix} a^k (c-a) & (c^k - a^k) b \\ 0 & c^k (c-a) \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & \dfrac{b(c^k - a^k)}{c - a} \\ 0 & c^k \end{bmatrix}$$

caso (ii). Valores propios múltiples.

Si A en $x(k+1) = Ax(k)$ tiene algún valor propio λ_i repetido m_i veces, la solución en forma canónica de Jordan se obtiene usando el cambio de variable (2.6), por lo que tenemos

$$x(k+1) = P^{-1}APy(k) \equiv Jy(k)$$

donde

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ & 0 & & & & \lambda_i \end{array}\right]$$

Tomando el caso de 2x2.

La ecuación característica $P(\lambda)= |A-\lambda^{*}I|= (\lambda^{*}-\lambda\ )(\lambda^{*}-\lambda\ ) =$
$= (\lambda^{*} -\lambda\ )^{2} =0$

tiene como valores propios a $\lambda^{*}=\lambda$

Utilizando el cambio de variable (2.6) tenemos

$$x(k+1)= P^{-1}APy(k)\equiv Jy(k)$$

$$y(k+1) = Jy(k) \equiv \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} y(k)$$

donde P es elegido como en el anexo. Por lo tanto (2.7) se reduce a un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden cuya solución es

$$y(k+1) = J^{k}y_0 = \begin{bmatrix} \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k} \end{bmatrix} y_0$$

donde $y_0 = P^{-1}x_0$

Observamos que $\lim_{k\to\infty} J^k = \lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} = 0$ si y sólo sí $|\lambda| < 1$. Ya que $\lim_{k\to\infty} k\lambda^{k-1} = 0$.

Ahora calcularemos J^k para cuando

$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

El polinomio característico de J es $P(\lambda) = |J-\lambda I| = \det(J-\lambda^* I) = (\lambda^* - \lambda)^2 = 0$

Por lo tanto $\lambda^* = \lambda$.

Por ser J una matriz de 2x2, tenemos de nuevo a (2.9) donde β_0 y β_1 son las incógnitas. El polinomio característico de la matriz J es,

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

donde,

$$\lambda_i^k = \beta_0 + \beta_1\lambda_i \qquad (2.12)$$

Sustituyendo el valor de $\lambda_1 = \lambda$ tenemos

$$\lambda^k = \beta_0 + \beta_1\lambda \qquad (2.13)$$

Derivando (2.12) con respecto a λ_i, y sustituyendo el valor de $\lambda_2 = \lambda$ nos da

$$k(\lambda_i)^{k-1} = \beta_1$$

$$k(\lambda)^{k-1} = \beta_1$$

Sustituimos β_1 en (2.13) para encontrar el valor de la incógnita β_0

$$\lambda^k = \beta_0 + k(\lambda)^{k-1}\lambda$$

$$\lambda^k = \beta_0 + k\lambda^k$$

$$\beta_0 = \lambda^k - k\lambda^k$$

Sustituyendo el valor de las constantes β_0 y β_1 en (2.9), pero con A = J tenemos

$$J^k = (\lambda^k - k\lambda^k)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (k\lambda^{k-1})\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k - k\lambda^k + k\lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k - k\lambda^k + k\lambda^k \end{bmatrix}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Caso (iii). A tiene valores propios complejos.

Cuando A en $x(k+1) = Ax(k)$ tiene algunos valores propios complejos λ_i, estos vienen en pares, $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ donde α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$ y $i^2 = -1$. Por simplicidad tomemos el caso de 2x2, donde .

$P(\lambda) = |A-\lambda I| = 0$; $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.
Cambiando a coordenadas polares, $\alpha = r\cos\theta$ y $\beta = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, nos da la base estandar de R_θ mediante la igualdad

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

usando el cambio de variable (2.6), la solución para $y(k+1) = Ay(k)$ es

$$y(k) = J^k y_0 = r^k \begin{bmatrix} \cos\theta k & \mathrm{sen}\,\theta k \\ -\mathrm{sen}\,\theta k & \cos\theta k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

donde $\theta = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$, $c = P^{-1}x_0 = y_0$.

Hemos obtenido A^k para los casos en que A puede representarse mediante los diferentes bloques de Jordan.

Una manera más para calcular la matriz A^k, una vez que la matriz A (de dimensión nxn) es conocida, es mediante el algoritmo de Putzer.

TEOREMA II.4.1: (Algoritmo de Putzer).
Sea A una matriz nxn con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Entonces

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(k)\; P_j$$

donde $P_0 = I$ y $P_j = \prod_{k=1}^{j} (A - \lambda_k I)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

y $r_1(k), \ldots, r_n(k)$ es la solución del sistema triangular

$r_1(k+1) = \lambda_1 r_1(k)$

$$r_j(k+1) = r_{j-1}(k) + \lambda_j r_j(k), \qquad j=2,3,\dots,n.$$

con $r_1(0)=1$, $r_j(0)=0$, $j=2,3,\dots,n.$

Observaciones al teorema:

a) Los n valores propios pueden repetirse según su multiplicidad,

b) Una vez fijo el orden de los valores propios consideraremos el orden en el producto $(A-\lambda_i I)(A-\lambda_j I)$ si $i>j$,

c) El sistema triangular de ecuaciones en diferencias puede resolverse recursivamente.

Ver demostración del teorema en el anexo A.III.1.

Aplicaremos el teorema de Putzer para la matriz

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Calculando primero los valores propios

$$\det(\mathbf{J}-\lambda I) = (\alpha-\lambda)^2+\beta^2=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = \alpha+\beta i \; ; \qquad \lambda_2 = \alpha-\beta i$$

de acuerdo al algoritmo resolveremos ahora el sistema triangular

$$r_1(k+1) = \lambda_1 r_1(k) \qquad \text{con} \quad r_1(0)=1$$

$$r_2(k+1) = r_1(k) + \lambda_2 r_2(k) \qquad \text{con} \quad r_2(0)=0$$

reescribiendo en forma matricial

$$r(k+1) = \begin{bmatrix} r_1(k+1) \\ r_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix}$$

con condición inicial

$$r(0) = \begin{bmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = r_0$$

La solución general es

$$r(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^k r_0$$

Calcularemos $B^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^k$ mediante la observación

$$(B^t)^k = (B^k)^t$$

donde B^t es la transpuesta de la matriz B, de manera que utilizaremos el cálculo de (2.9) para obtener

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^k$$

$$(B^t)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \dfrac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \qquad B^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ \dfrac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

de manera que

$$r(k) = \begin{bmatrix} r_1(k) \\ \\ r_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ \\ \dfrac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad r(k) = \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \dfrac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}$$

Calculando ahora los P_i

$$P_0 = I \ , \qquad P_1 = (J-\lambda_1 I) = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\beta$$

$$\Rightarrow \qquad J^k = r_1 P_0 + r_2 P_1$$

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ \\ 0 & \lambda_1^k \end{bmatrix} + \frac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ \\ -1 & -i \end{bmatrix} \beta$$

donde tenemos que

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \alpha - \beta i - (\alpha+\beta i) = -2\beta i$$

y $\lambda_2^k - \lambda_1^k = (\alpha-\beta i)^k - (\alpha+\beta i)^k$. Considerando $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .y $\Theta = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$, con $a \neq 0$. Tenemos de ésta última ecuación que,

$$\lambda_2^k - \lambda_1^k = (r\cos\Theta - ir\operatorname{sen}\Theta)^k - (r\cos\Theta + ir\operatorname{sen}\Theta)^k$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_2^k - \lambda_1^k = r^k(\cos k\Theta - i\operatorname{sen} k\Theta) - r^k(\cos k\Theta + i\operatorname{sen} k\Theta)$$

$$= -r^k\, 2i\operatorname{sen} k\Theta$$

$$\Rightarrow J^k = \begin{bmatrix} r^k(\cos k\Theta + i\,\mathrm{sen}\,k\Theta) & 0 \\ 0 & r^k(\cos k\Theta + i\,\mathrm{sen}\,k\Theta) \end{bmatrix} + \frac{r^k\ 2i\,\mathrm{sen}\,k\Theta}{2\beta i} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \beta$$

$$\Rightarrow J^k = r^k \begin{bmatrix} \cos k\Theta + i\,\mathrm{sen}\,k\Theta & 0 \\ 0 & \cos k\Theta + i\,\mathrm{sen}\,k\Theta \end{bmatrix} + r^k \begin{bmatrix} -i\,\mathrm{sen}\,k\Theta & \mathrm{sen}\,k\Theta \\ -\mathrm{sen}\,k\Theta & -i\,\mathrm{sen}\,k\Theta \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$J^k = r^k \begin{bmatrix} \cos(k\Theta) & \mathrm{sen}(k\Theta) \\ -\mathrm{sen}(k\Theta) & \cos(k\Theta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J^k = \left[\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right]^k \begin{bmatrix} \cos(k\Theta) & \mathrm{sen}(k\Theta) \\ -\mathrm{sen}(k\Theta) & \cos(k\Theta) \end{bmatrix}$$

El cálculo anterior implica que la solución al problema de condición inicial

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} x(k)$$

$$x(k)\big|_{k=0} = x_0$$

es dada por la sucesión vectorial

$$J^k x_0 = \left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right]^k \begin{bmatrix} \cos(k\Theta) & \operatorname{sen}(k\Theta) \\ -\operatorname{sen}(k\Theta) & \cos(k\Theta) \end{bmatrix} x_0$$

Podemos mostrar que (considerando la norma usual $\| \ \|$ en $\mathbb{R}^2$)

$$\|x(k)\| = \left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right]^k \|x_0\| \quad \text{para toda } k \geq 0.$$

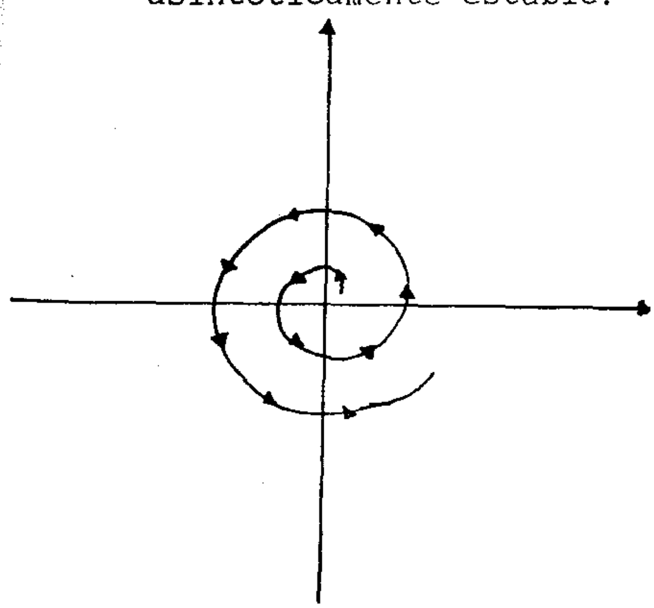
De éste último cálculo observese que

a) si $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{k \to \infty} \|x(k)\| = \infty$

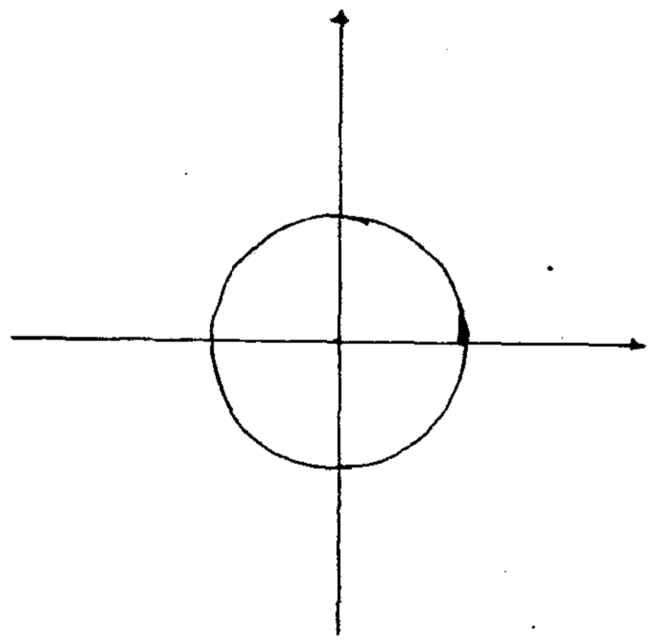
b) si $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \|x(k)\| = \|x_0\| \quad$ para toda $k \geq 0$

c) si $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{k \to \infty} \|x(k)\| = 0$

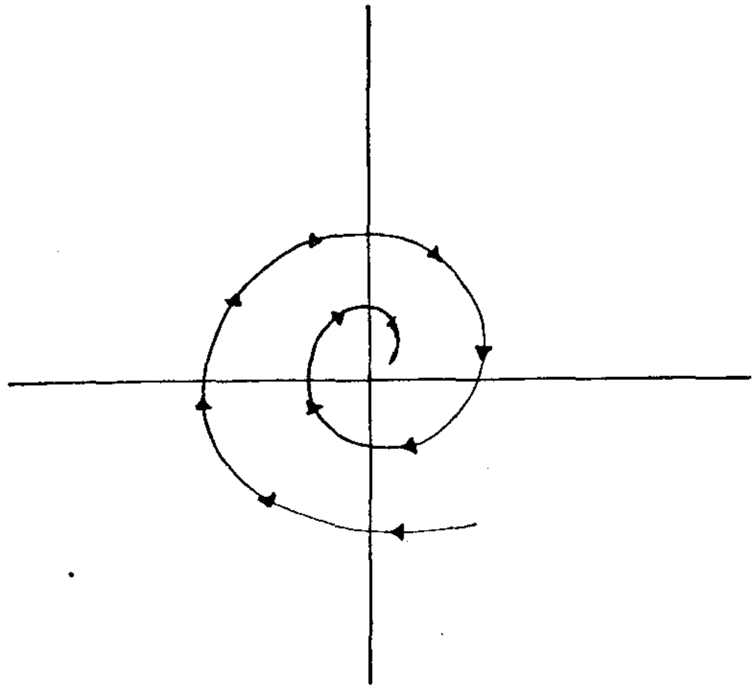
Según las definiciones de estabilidad dadas, el caso a) corresponde a un comportamiento inestable; el caso b) a un comportamiento estable y el caso c) a un comportamiento asintóticamente estable.



a) inestable



b) estable



c) asintóticamente estable

Observese que si el módulo del valor propio es menor que 1, entonces el punto fijo es asintóticamente estable.

Como una observación, si tomamos $\alpha=0$ en el caso de arriba, tenemos

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad J^2 = \begin{bmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{bmatrix} \quad , \quad J^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta^3 \\ \beta^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^4 = \begin{bmatrix} \beta^4 & 0 \\ 0 & \beta^4 \end{bmatrix} \quad J^5 = \begin{bmatrix} 0 & \beta^5 \\ -\beta^5 & 0 \end{bmatrix} \quad J^6 = \begin{bmatrix} -\beta^6 & 0 \\ 0 & -\beta^6 \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente

$J^k = [J_{ij}(k)]$; donde,

$$|J_{ij}(k)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i=j \\ |\beta^k| & \text{si} \quad i\neq j \end{cases} \qquad \text{para } k \text{ impar}$$

$$|J_{ij}(k)| = \begin{cases} |\beta^k| & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{para } k \text{ par}$$

lo que implica que si $|\beta| < 1$ entonces $\lim_{k \to \infty} J^k = 0$.

Es conveniente dar las siguientes definiciones de ciclo y período para despues ver un ejemplo de este tipo.

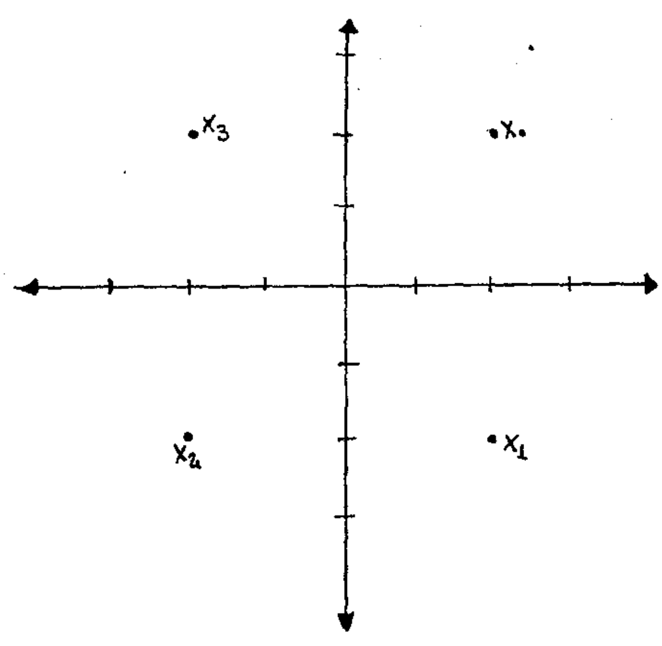
DEFINICION II.4.5:
Una solución $F^k x^0 = x^0$ se dice ser *periódica* (*o cíclica*) si para algún número entero s >0, $F^s x^0 = x^0$. En esta definición retomamos la notación que se vió al inicio de este capítulo.

DEFINICION II.4.6:
El menor valor s que cumpla la definición anterior es llamado el *período* de la solución o el *orden* de el ciclo.

EJEMPLO: Un sistema donde el período es 4 es el siguiente.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \qquad \text{con } x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ya que $x_0 = x_4 = x_8 = \ldots$, y x_0 es diferente a x_1, x_2 y x_3.



Con la descripción del comportamiento de las soluciones de los tres casos a), b) y c), mencionados anteriormente, se concluye el siguiente teorema de estabilidad para matrices de 2x2 y $\det(A-I)\neq 0$.

TEOREMA II.2.2: La solución trivial de la ecuación en diferencias

$$x(k+1) = Ax(k)$$

es asintóticamente estable si y sólo sí $\rho(A) < 1$. Es inestable si $\rho(A)>1$. Donde $\rho(A)\equiv$ máximo $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz A.

DEMOSTRACION:
Si $A\equiv P^{-1}JP$, entonces $A^k\equiv P^{-1}J^kP$ donde hemos visto los tres casos para J. ■

Como una generalización de los resultados anteriores, daremos respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo describir el comportamiento de las soluciones del sistema

$$x(k+1) = Ax(k) + E \qquad (2.14)$$

cuando el $\det(A-I)\neq 0$ y $E\neq 0$ es un vector constante?
Para dar respuesta a ésta pregunta, determinamos los puntos fijos x^* de (2.14) en base a la igualdad

$$Ax^*+E = x^*$$

$$\Rightarrow \quad Ax^*-x^* = -E$$

$$\Rightarrow \quad (A-I)x^* = -E$$

$$\Rightarrow \quad x^* = -(A-I)^{-1}E$$

considerando ahora el cambio de variable

$$y(k) = x(k) - x^{*} \tag{2.15}$$

$$\Rightarrow \quad y(k+1) = x(k+1) - x^{*}$$

$$y(k+1) = Ax(k) + E - x^{*}$$

$$y(k+1) = A(y(k) + x^{*}) + E - x^{*}$$

$$y(k+1) = Ay(k) + Ax^{*} + E - x^{*}$$

$$\Rightarrow \qquad y(k+1) = Ay(k) \tag{2.16}$$

De manera que si tenemos la descripción de las soluciones del sistema (2.16), entonces podemos describir las soluciones en términos de la variable x(k) mediante la traslación (2.15). Sin embargo, se puede obtener la solución analítica del sistema (2.14) como sigue:

$$x(k+1) = Ax(k) + E, \qquad \text{con } x(0) = x_0$$

para k=0, $x(1) = Ax(0) + E$

para k=1, $x(2) = Ax(1) + E = A[Ax(0) + E] + E$

para k=2, $x(3) = Ax(2) + E = A[A^2x(0) + AE + E] + E$

para k=3, $x(4) = Ax(3) + E = A[A^3x(0) + A^2E + AE + E] + E$

$\vdots$

para k=k-1, $x(k) = Ax(k-1) + E = A[A^{k-1}x(0) + A^{k-2}E + \ldots + E] + E$

$$x(k) = A^kx(0) + A^{k-1}E + A^{k-2}E + \ldots + AE + E$$

$$x(k) = A^kx(0) + [A^{k-1} + A^{k-2} + \ldots + A + I]\, E$$

donde $[A^{k-1} + A^{k-2} + \ldots + A + I]\,(I - A) = I - A^k$

así,

$$[A^{k-1} + A^{k-2} + \ldots + A + I] E = (I - A^k) (I - A)^{-1} E.$$

Por lo tanto

$$x(k) = A^k x(0) + (I-A^k) (I-A)^{-1} E.$$

A continuación se ilustra este resultado con un ejemplo.

EJEMPLO: Un modelo de comercio (internacional) entre dos paises. Plantearemos este modelo mediante los siguientes cuatro incisos:

i) Sea $Y \equiv$ el ingreso nacional
$C \equiv$ egresos por consumo
$i \equiv$ inversión neta
$X \equiv$ exportaciones
$M \equiv$ importaciones

$$Y = C + i + X - M$$

ii) $D \equiv$ desembolso de dinero por consumo doméstico
$M \equiv$ importaciones
$D = C - M$
$C = D + M$

iii) El tiempo es dividido en períodos de igual longitud, denotado por $k = 0,1,2,\ldots$. Todas las cantidades varían de período a período con la excepción de la inversión neta, la cual se supone constante.
Usaremos subíndices 1 y 2 para distinguir las variables de cada país.

De acuerdo a las hipótesis i) y ii), tenemos las siguientes ecuaciones para el país 1:

$$Y_1(k) = c_1(k) + i_1 + X_1(k) - M_1(k)$$

$D_1(k) = C_1(k) - M_1(k)$

Con ayuda de la segunda ecuación, la primera puede escribirse como sigue

$$Y_1(k) = D_1(k) + X_1(k) + i_1 \qquad (2.17)$$

donde hemos escrito i_1 como constante de inversión neta.

La ecuación correspondiente al país 2 es

$$Y_2(k) = D_2(k) + X_2(k) + i_2 \qquad (2.18)$$

iv) El consumo doméstico (≡D) y las importaciones (≡M) de cada país en cualquier período son múltiplos constantes del ingreso nacional del país (≡Y) en un período de tiempo anterior, es decir;

$$D_1(k+1) = m_{11}Y_1(k) \qquad M_1(k+1) = m_{21}Y_1(k)$$

$$D_2(k+1) = m_{22}Y_2(k) \qquad M_2(k+1) = m_{12}Y_2(k)$$

donde m_{11}, m_{22}, m_{21}, m_{12} son constantes (llamadas "tendencias marginales").
Ya que consideramos solo dos países, las exportaciones de uno son las importaciones del otro, es decir

$$M_1(k) = X_2(k) \qquad M_2(k) = X_1(k)$$

De manera que al considerar las ecuaciones (2.17) y (2.18) y la hipótesis iv) obtenemos que

$$Y_1(k+1) = m_{11}Y_1(k) + m_{12}Y_2(k) + i_1$$

$$Y_2(k+1) = m_{21}Y_1(k) + m_{22}Y_2(k) + i_2$$

en forma matricial

$$Y(k+1) = AY(k) + I$$

donde

$$Y(k) = \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \qquad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

También suponemos que $\quad Y(0) = \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix}$ es dado.

La solución a el sistema anterior es la solución obtenida para (2.14), es decir

$$Y(k) = A^k Y(0) + (I-A^k)(I-A)^{-1} i \ ; \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Deducimos que una condición necesaria y suficiente para que el ingreso nacional Y se aproxime a un valor constante (de equilibrio), independientemente del valor inicial Y(0), es que

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0$$

lo que a la vez implica que

$$\lim_{k \to \infty} Y(k) = (I-A)^{-1} i$$

CAPITULO III. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS NO LINEALES.

III.1.- Ecuación en Diferencias Escalar no Lineal y Descripción Cualitativa del Comportamiento de las Soluciones.

Consideremos el sistema no-lineal

$$x(k+1) = F(x(k)), \qquad k = 0,1,2,... \tag{3.1}$$

con condición inicial

$$x(k)\big|_{k=0} = x_0$$

donde $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y no-lineal respecto a la variable de estado $x(k)$. Al igual que en el capítulo anterior, consideraremos $\mathbb{R}^n$ con la norma usual $\| \cdot \|$.

Describiremos resultados y métodos para estudiar el comportamiento dinámico de éstas ecuaciones en diferencias no-lineales. Al igual que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, éstos métodos cualitativos consisten en deducir el comportamiento de las soluciones a partir de las características de la parte derecha de (3.1). Es decir, en base a las características de la función F, determinaremos la estabilidad de las soluciones de (3.1). Obviamente, los resultados aquí expuestos también serán válidos si el sistema (3.1) es escalar.

Un criterio útil para determinar el comportamiento de las soluciones $x(k)$ de (3.1) es la condición de Lipschitz.

DEFINICION III.1.1:
Una función $F:\Omega \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ se llama "*de Lipschitz* " con constante L en Ω si $\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|$ para cada pareja $x,y \in \Omega$.

Es sabido que la sucesión solución $\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo $x^* \in \Omega$ si F es función de Lipschitz en Ω con constante $L<1$. Ver la prueba de éste teorema en la referencia [13], página 331, de la bibliografía.

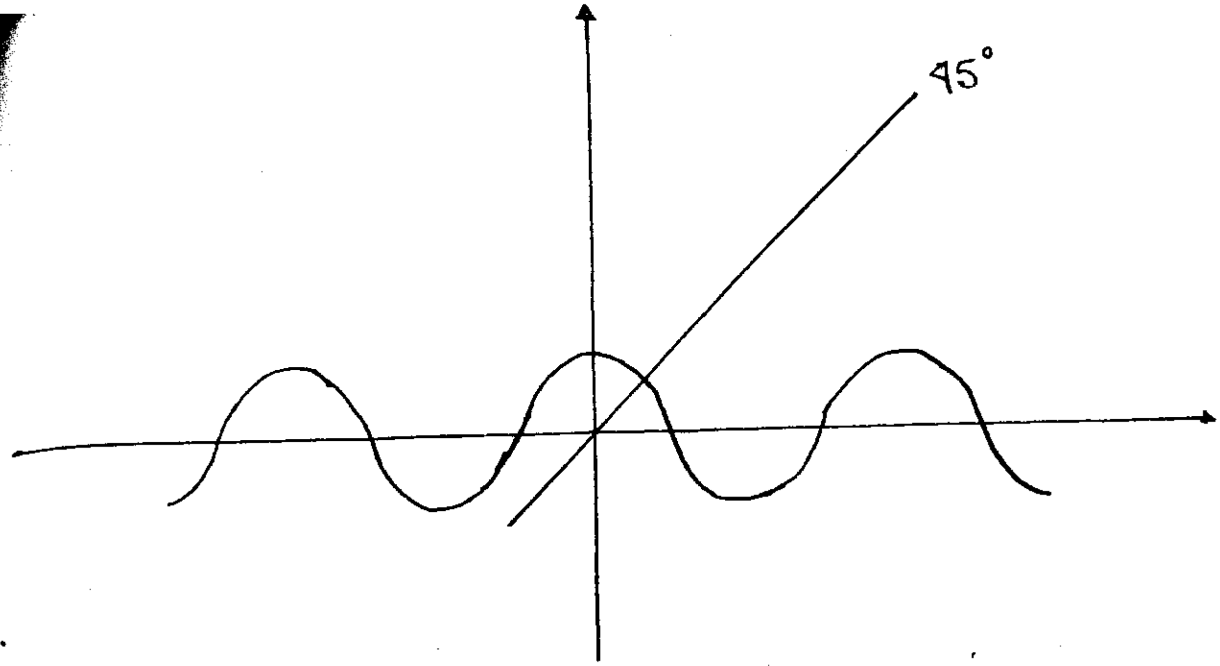
A manera de ejemplo, tenemos que la función $f(x) = \cos(x)$ es de Lipschitz con $L = \text{sen}(2\pi/5) = 0.951 < 1$ en $\Omega = (-2\pi/5, 2\pi/5)$. Por lo que el teorema mencionado anteriormente asegura que las soluciones $x(k)$ de la ecuación en diferencias no-lineal

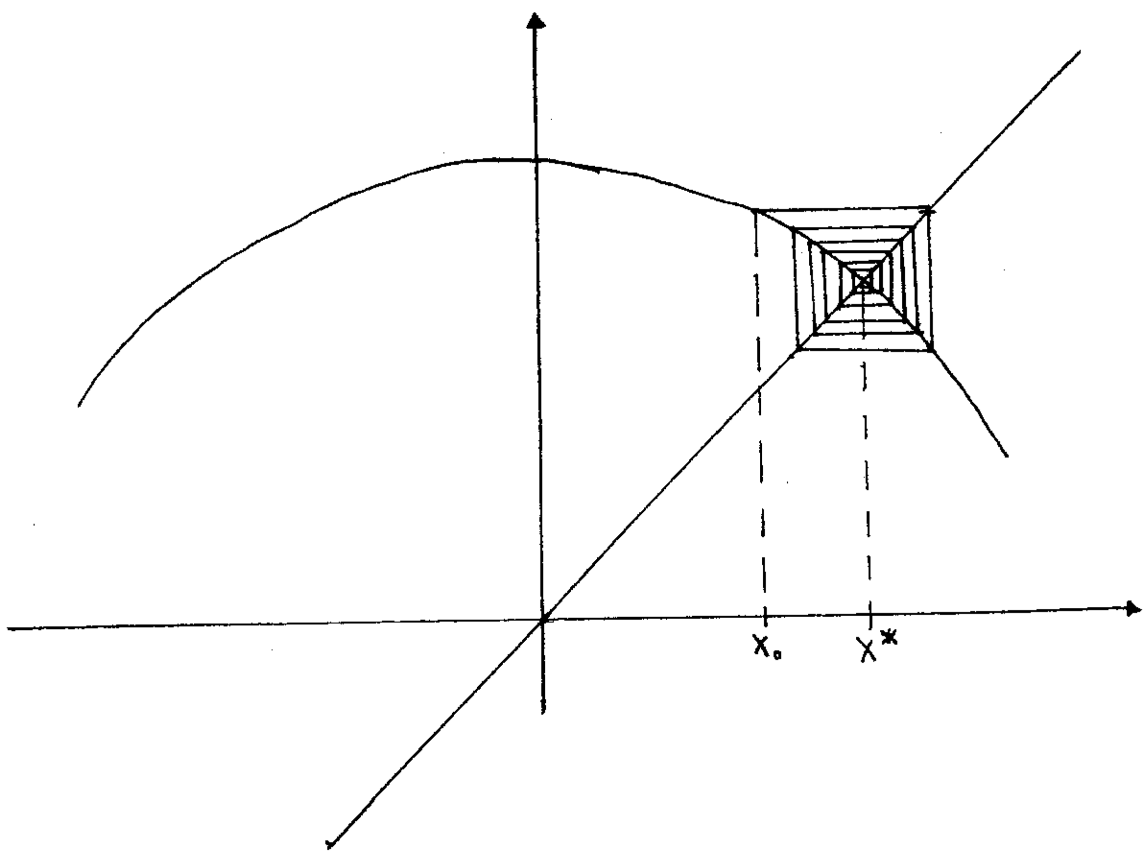
$$x(k+1) = \cos(x(k))$$

converge al punto fijo $x^* = 0.739$ si el estado inicial $x_0 \in \Omega$.

En el caso de que el sistema (3.1) sea escalar, $x(k) \in \mathbb{R}$, podemos deducir gráficamente los puntos fijos de (3.1) al graficar a $F(x(k))$ (como si $x(k)$ variara continuamente) y observar la intersección de ésta con la recta de 45° que pasa por el origen ($y=x$). Tal punto de intersección corresponde a un punto fijo (también llamado *"solución de equilibrio"*) de (3.1). Se sabe que si en una vecindad del punto de equilibrio se tiene que F es diferenciable con $|F'(x(k))|<1$, entonces las soluciones que inician en tal vecindad se aproximan al punto de equilibrio. Es decir, el punto fijo es asintóticamente estable. Por el contrario, si $|F'(x(k))|>1$ en tal vecindad, las soluciones que inician en ésta se alejan del punto de equilibrio.

Continuando con el ejemplo anterior, deducimos gráficamente el valor de x^* al obtener la intersección de la gráfica de $f(x) = \cos(x)$ con la recta $y=x$.


45°


x_0
x^*

III.2.- Linealización.

El siguiente teorema presenta una forma de linealizar sistemas no lineales.

TEOREMA III.2.2:
Considere el sistema dinámico no lineal dos dimensional

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x(k),y(k)) \\ q(x(k),y(k)) \end{bmatrix}$$

donde h y q son funciones continuamente diferenciables de dos variables. Supóngase que el punto

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

es un punto de equilibrio para el sistema dinámico, esto es,

$$a = h(a,b) \qquad y \qquad b = q(a,b)$$

Construimos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} h_1(a,b) & h_2(a,b) \\ q_1(a,b) & q_2(a,b) \end{bmatrix}$$

donde $h_1(x,y) = \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ y $h_2(x,y) = \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial y}$; similarmente para la función q definimos las funciones $q_1(x,y)$ y $q_2(x,y)$.

Si $\rho(R)<1$, donde $\rho(R)$ =máximo $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,...|\lambda_n|\}$, y λ_i son los valores propios del polinomio característico de R para $i=1,2,...n$; entonces A es un punto de equilibrio estable y

$$\lim_{k \to \infty} X(k) = A$$

si X(0) está suficientemente cercano de A. Si $\rho(R)>1$, entonces A es inestable.

DEMOSTRACION:

Nuestra hipótesis es que tenemos el sistema dinámico

$$x(k+1) = h(x(k),y(k)) \tag{3.2}$$

$$y(k+1) = q(x(k),y(k)) \tag{3.3}$$

y el punto de equilibrio

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

esto es, $a=h(a,b)$ y $b=q(a,b)$. Analizaremos la diferencia

$$x(k) - a$$

para deducir el comportamiento de la solución $x(k)$ en una vecindad del punto fijo a.

Restando a en ambos lados de (3.2) combinada con la sustitución de $a=h(a,b)$ nos da

$$x(k+1) - a = h(x(k),y(k)) - h(a,b).$$

Ahora usando el teorema del valor medio en dos variables, donde

$x_2= x(k)$, $y_2= y(k)$, $x_1= a$, $y_1= b$; y denotando por (x_0,y_0) el punto intermedio, tenemos que

$$\begin{aligned} x(k+1) - a &= h(x(k),y(k)) - h(a,b) \\ &= h_1(x_0,y_0)[x(k) - a] + h_2(x_0,y_0)[y(k) - b]. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$y(k+1) - b = q(x(k),y(k)) - q(a,b)$$

$$= q_1(x_0',y_0')[x(k) - a] + q_2(x_0',y_0')[y(k) - b].$$

Note que se obtienen diferentes puntos para h y q. Lo importante es que, si x(k) está cerca de a y y(k) está cerca de b, entonces (x_0,y_0) y (x_0',y_0') están ambos cerca de (a,b) y así $h_1(x_0,y_0)$ está cerca de $h_1(x,y)$, y así sucesivamente.
Por tanto, el sistema lineal dado por

$$\begin{bmatrix} x(k+1) - a \\ y(k+1) - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(a,b) & h_2(a,b) \\ q_1(a,b) & q_2(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) - a \\ y(k) - b \end{bmatrix}.$$

da una buena aproximación para nuestro sistema no lineal (3.2) y (3.3) cuando (x(0),y(0)) está cerca de (a,b) (al menos para algunos de los primeros valores de k). Pero la solución a este sistema es

$$\begin{bmatrix} x(k) - a \\ y(k) - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(a,b) & h_2(a,b) \\ q_1(a,b) & q_2(a,b) \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x(0) - a \\ y(0) - b \end{bmatrix}$$

Sabemos que si $\rho(R)<1$, donde

$$R = \begin{bmatrix} h_1(a,b) & h_2(a,b) \\ q_1(a,b) & q_2(a,b) \end{bmatrix}$$

entonces

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \begin{bmatrix} x(k) - a \\ y(K) - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN 1:

El único problema con esta demostración es que se aproximó la matriz R evaluada en los puntos (x_0,y_0) y (x'_0,y'_0), con una matriz R_e evaluada en el vector de equilibrio (a,b). Supóngase que $\rho(R_e)<1$. En una demostración formal, se necesitaría concluir que si (x(0),y(0)) empieza suficientemente cerca de (a,b), entonces $\rho(R)$ está cerca de $\rho(R_e)$, y por lo tanto $\rho(R)<1$ tambien.

OBSERVACIÓN 2:

En la demostración del teorema se desarrolló el sistema linealizado

$$\begin{bmatrix} x(k+1) - a \\ y(k+1) - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(a,b) & h_2(a,b) \\ q_1(a,b) & q_2(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) - a \\ y(k) - b \end{bmatrix}$$

para aproximar nuestro sistema dinámico no lineal. Permitiendo

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} h_1(a,b) & h_2(a,b) \\ q_1(a,b) & q_2(a,b) \end{bmatrix},$$

este sistema de ecuaciones puede ser reescrito como

$$X(k+1) -A = R[X(k) - A]$$

el cual es el sistema dinámico afin

$$X(k+1) = RX(k) + (I - R)A$$

■

Con el siguiente ejemplo ilustramos el resultado anterior.

EJEMPLO:

Considere el sistema dinámico no lineal

$$x(k+1) = 1.3x(k) - 0.3x^2(k) - 0.15x(k)y(k)$$
$$y(k+1) = 1.3y(k) - 0.3y^2(k) - 0.15x(k)y(k)$$

Aqui tenemos

$$h(x,y) = 1.3x - 0.3x^2 - 0.15xy,$$
$$h_1(x,y) = 1.3 - 0.6x - 0.15y,$$
$$h_2(x,y) = -0.15x.$$

$$q(x,y) = 1.3y - 0.3y^2 - 0.15xy,$$
$$q_1(x,y) = -0.15y,$$
$$q_2(x,y) = 1.3 - 0.6y - 0.15x.$$

Primero se necesita encontrar los puntos de equilibrio. Para hacer esto, se hace la sustitución de x por x(k) y x(k+1), y y por y(k) y y(k+1) en el sistema no lineal, esto nos da

$$x = 1.3x - 0.3x^2 - 0.15xy$$
$$y = 1.3y - 0.3y^2 - 0.15xy$$

Entonces se resuelve el sistema para las incógnitas x y y.

Pasando todos los términos a la izquierda y factorizando, tenemos

$$x(-0.3 + 0.3x - 0.15y) = 0$$
$$y(-0.3 + 0.3y - 0.15x) = 0$$

Si $x=0$, de la segunda ecuación se ve que $y=0$ o $y=1$. Si $y=0$, de la primera ecuación se ve que $x=0$ o $x=1$. Así, los tres puntos de equilibrio son

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces se puede dividir la primera ecuación por x y la segunda ecuación por y, dando las dos ecuaciones

$$-0.3 + 0.3x + 0.15y = 0$$
$$-0.3 + 0.3y + 0.15x = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones lineales encontramos que $x=y = (2/3)$, por lo que el cuarto (y último) punto de equilibrio es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2/3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se estudiará el comportamiento de las soluciones en una vecindad del primer punto de equilibrio,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tenemos

$h_1(0,0) = 1.3 - 0.6(0) -0.15(0) = 1.3.$

$h_2(0,0) = -0.15(0) = 0.$

Similarmente

$q_1(0,0) = 0$

$q_2(0,0) = 1.3.$

Así se tiene

$$R = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Es fácil de encontrar que el polinomio característico

$$|R - \lambda I| = (1.3 - \lambda)^2,$$

asi, $\lambda = 1.3$ es una raíz doble de la ecuación característica y $\rho(R) = 1.3 > 1$. Así, por el teorema III.2.2, este punto de equilibrio es inestable.

Ahora se estudiará el comportamiento de las soluciones en una vecindad del segundo punto de equilibrio

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} h_1(1,0) & h_2(1,0) \\ q_1(1,0) & q_2(1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.15 \\ 0 & 1.15 \end{bmatrix}$$

Así,

$$|R - \lambda I| = (0.7-\lambda)\ (1.15-\lambda)$$

y $\rho(R) = 1.15 > 1$. Así, por el teorema III.2.2, este punto de equilibrio es inestable también. Similarmente, el punto de equilibrio

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es inestable.

Finalmente, para el punto de equilibrio

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2/3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se tiene

$h_1(2/3,2/3) = 0.8$
$h_2(2/3,2/3) = -0.1$
$q_1(2/3,2/3) = -0.1$
$q_2(2/3,2/3) = 0.8.$

En este caso,

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

y $|R - \lambda I| = (0.8 - \lambda)^2 - 0.1$. Como
$(0.8 - \lambda)^2 - 0.1 = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.63 = (\lambda - 0.9)(\lambda - 0.7)$,
de aquí que los valores característicos son $\lambda = 0.9$ y $\lambda = 0.7$, y así

$$\rho(R) = 0.9 < 1.$$

Por lo tanto, este punto de equilibrio es estable.
Cabe comentar que el teorema III.2.2 puede ser extendido de manera similar a ecuaciones en diferencias n-dimensionales.

Los siguientes resultados también representan métodos directos y se enmarcan dentro de la teoría de Lyapunov para las ecuaciones en diferencias.

III.3.- **Método Directo de Lyapunov.**

En esta sección introducimos el concepto de la función de Lyapunov para responder a las preguntas de estabilidad para ecuaciones en diferencias. Considere la ecuación en diferencias

$$x(k+1) = F(x(k)) \qquad x(0)=x_0 \qquad (3.4)$$

donde $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua. Durante toda esta sección, suponemos que x^* es un punto fijo para (3.4) de manera que $F(x^*)= x^*$, donde $x(k) = x^*$ es una solución de equilibrio.

DEFINICION III.3.1:
Si $\delta > 0$ entonces la *δ-bola* alrededor de un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es definida como

$$B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x-x_0\| < \delta \}.$$

DEFINICION III.3.2:
Decimos que x^* es una *solución estable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $F^k(B_\delta(x^*)) \subset B_\varepsilon(x^*)$; es decir, $\|F^k(x_0) - x^*\| < \varepsilon$ siempre que $\|x_0 - x^*\| < \delta$ para toda $k \geq 0$.

Esto dice que la variable de estado x(k) puede estar tan cerca del punto de equilibrio para tiempos futuros al tener una condición inicial suficientemente cerca.

DEFINICIÓN III.3.3:
Si la solución de equilibrio x^* no es estable, se dice que es *inestable*.

DEFINICION III.3.4:
Sea $V:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Relativo a (3.4) (o a F) definimos

$$\dot{V}(x(k)) = V(F(x(k))) - V(x(k))$$

Si x(k) es una solución de (3.4),

$$\dot{V}(x(k)) = V(x(k+1)) - v(x(k))$$

$\dot{V}(x) \leq 0$ significa que V no se incrementa a lo largo de las soluciones. De ahora en adelante, tendremos que $V(x^*) = 0$.

DEFINICION III.3.5:
Sea G cualquier conjunto en $\mathbb{R}^n$. Decimos que V es una *función de Lyapunov* para (3.4) en G si:
i) V es continua en $\mathbb{R}^n$; y
ii) $\dot{V}(x(k)) \leq 0$ para toda $x(k) \in G$.

DEFINICION III.3.6:
Una función V se dice estar *definida positiva* con respecto a x^* si:
i) $V(x^*) = 0$; y
ii) Existe un $\eta > 0$ tal que $V(x(k)) > 0$ siempre que $x(k) \in B_\eta(x^*)$, con $x \neq x^*$.

DEFINICION III.3.7:
Un subconjunto $A \in \mathbb{R}^n$ se dice ser *invariante* si $F(A) \subset A$, es decir si $x(k) \in A$ entonces $F(x(k)) \in A$.

DEFINICION III.3.8:

El conjunto $\{F^k(x_0): k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ es llamado la *órbita* de x_0 y es invariante.

Esta definición equivale a lo que hasta ahora hemos llamado la solución $x(k)$. Geometricamente se pueden representar mediante puntos en el espacio de estado.

PROPOSICION III.3.1: (teorema de Estabilidad de Lyapunov).

Si V es una función de Lyapunov para F en alguna vecindad de x^* y V se define positiva con respecto a x^*, entonces x^* es un equilibrio estable.

DEMOSTRACION:

Podemos tomar η tan pequeña que $V(x(k))>0$ y $\dot{V}(x(k)) \leq 0$ para $x(k) \in B_\eta(x^*)$.

Sea $\varepsilon>0$ dado; no hay perdida de generalidad si tomamos $0<\varepsilon<\eta$.

Sea $m = \min\{ V(x(k)) : \|x(k) - x^*\| = \varepsilon \}$. m es positiva ya que estamos tomando el mínimo de una función continua positiva sobre un conjunto compacto.

Sea $G= \{ x(k) | V(x(k))< m/2\}$ y G_0 la componente conectada a G la cual contiene a x^*.

Ambos G y G_0 son abiertos. Si $x_0\in G_0$ entonces $\dot{V}(x_0)\leq 0$ así $V(F(x_0))\leq V(x_0)< m/2$ así $x_0\in G$.

Ya que x_0 y x^* estan en la misma componentes de G asi es que $F(x)=x^*$ y $F(x_0)$. Por tanto G_0 es un conjunto abierto invariante que contiene a x^* y está contenido en $B_\varepsilon(x^*)$.

Como V es continua existe un $\delta>0$ tal que $B_\delta(x^*)\subset G_0$. Así si $x_0\in B_\delta(x^*)$, entonces $x_0 \in G$ y $F(x_0)\subset G_0\subset B_\varepsilon(x^*)$. ■

DEFINICION III.3.9:

Decimos que la solución através de x_0 es *acotada* siempre que exista una constante M tal que $\|F^k(x_0)\| \leq M$ para toda $k\geq 0$.

DEFINICION III.3.10:
La solución de equilibrio x^* es *asintóticamente estable* si
i) Esta es estable; y
ii) Existe un $\eta>0$ tal que si $x_0 \in B_\eta(x^*)$ entonces $\lim_{k\to\infty} F^k(x_0) = x^*$.

En el ejemplo dado en la sección III.1, tenemos que $x^* = 0.739$ es un punto fijo asintóticamente estable, ya que podemos considerar que $B_\eta(x^*) = (-2\pi/5,\ 2\pi/5)$.

DEFINICION III.3.11:
Un punto $y \in \mathbb{R}^n$ es un *punto límite* de $F^k(x_0)$ si existe una subsucesión η_i con $F^{\eta_i}(x_0) \longrightarrow y$.

DEFINICION III.3.12:
El *conjunto límite* (o conjunto w-límite) $w(x_0)$ de $F^k(x_0)$ es el conjunto de todos los puntos límite de $F^k(x_0)$.

Tenemos un resultado el cual establece la estabilidad, así que lo que necesitamos es un resultado separado el cual pruebe que las soluciones tiendan al origen. Este tipo de resultado puede ser obtenido de la consideración de los conjuntos w-límite de una órbita.

PROPOSICION III.3.2: (principio de invarianza).
i) Si V es una función de Lyapunov para (3.2) en G; y
ii) La solución $F^k(x_0)$ de (3.4) está en G y es acotada, entonces existe un número c tal que $F^k(x_0) \longrightarrow M \cap V^{-1}(c)$, donde M es el conjunto más grande invariante contenido en el conjunto E $= \{x(k) \in \mathbb{R}^n : \dot{V} = 0\} \cap \overline{G}$.

OBSERVACION:
La proposición anterior se conoce como el teorema de LaSalle y el conjunto E es llamado el conjunto LaSalle.

DEMOSTRACION:
Como $x(k) = F^k(x_0)$ es acotado y en G tenemos $w = w(x_0) \neq \emptyset$, $w \subset \overline{G}$ y

$x(k) \longrightarrow w$. Ahora $V(x(k))$ es decreciente y acotada por abajo , así $V(x(k)) \longrightarrow c$.
Si $y \in w$ entonces hay una subsucesión η_i tal que $[x(k)]^{\eta_i} \longrightarrow y$, así $V(x(k)^{\eta_i}) \longrightarrow V(y)$ o $V(y)=c$. Por tanto $V(w)=c$ ó $w \subset V^{-1}(c)$.

También como $V(w)=c$ y w es invariante $\dot{V}(w)=0$ así $x(k) \longrightarrow w \subset \{x(k) \in \mathbb{R}^n : \dot{V}=0\} \cap \bar{G} \cap V^{-1}(c)$.

Como w es invariante tenemos que $w \subset M$. ∎

La dificultad en las aplicaciones es encontrar una "buena" función de Lyapunov -una que haga que M sea tan pequeña como sea posible-. Por ejemplo una función constante es una función de Lyapunov pero no da información.

Veremos en un simple ejemplo el cual ilustra como el resultado es aplicado. Consideremos el sistema 2-dimensional

$$x(k+1) = \frac{ay(k)}{1+x(k)^2} \qquad , \qquad y(k+1) = \frac{bx(k)}{1+y(k)^2}$$

a,b son constantes. Tomamos $V = x(k)^2 + y(k)^2$, así

$$\dot{V} = (x(k+1))^2 + (y(k+1))^2 - (x(k)^2 + y(k)^2)$$

$$\dot{V} = \left[\frac{b^2}{(1+y(k)^2)^2} - 1 \right] x(k)^2 + \left[\frac{a^2}{(1+x(k))^2)^2} - 1 \right] y(k)^2$$

$$\dot{V} \le (b^2-1)x(k)^2 + (a^2-1)y(k)^2.$$

Si tenemos que $a^2 \le 1$ y $b^2 \le 1$, entonces V es una función de Lyapunov en todo $\mathbb{R}^2$. Como V está definida positiva con respecto al origen, el origen es estable por el teorema de estabilidad de Lyapunov.

CASO 1: $a^2<1$, $b^2<1$.
En este caso $M = E = \{(0,0)\}$ y así todas las soluciones tienden al origen. Cuando todas las soluciones son acotadas, el origen es estable y, si todas las soluciones tienden al origen, entonces

el origen se dice que es globalmente asintóticamente estable.

CASO 2: $a^2 \leq 1$, $b^2 \leq 1$ pero $a^2+b^2 \neq 2$.

En este caso podemos suponer que $a^2<1$ y $b^2=1$. $\dot{V} \leq (a^2-1)y(k)^2$ y $E=\{(x,0)\}$ el eje x. Ahora $F(x,0)=(0,bx)=(0,x)$ así el único subconjunto invariante de E es el origen. Por lo tanto todavía tenemos estabilidad asintótica global.

CASO 3: $a^2=b^2=1$.

V es aún una función de Lyapunov y E=M es la unión de los ejes x, y. Por el principio de invarianza todas las soluciones tienden a $\{(c,0),(-c,0),(0,c),(0,-c)\}$, la intersección de E y el círculo $v=c^2$. Hay dos subcasos.

(i) ab=1. Entonces $F(c,0)=(0,bc)$, $F^2(c,0) = F(abc,o) = (c,0)$. Como los conjuntos límites son invariantemente conectados, cada solución se aproxima a el origen ó a una solución periódica de período 2.

(ii) ab=-1. Aquí $F(c,0)=(0,bc)$, $F^2(c,0)=(abc,0)=(-c,0)$, $F^3(c,0)=(0,-bc)$ y $F^4(c,0)=(-abc,0)=(c,0)$. Si $c \neq 0$, cada solución se acerca al origen ó a una solución periódica de período 4.

COROLARIO III.3.1:

Si V y $-\dot{V}$ son definidos positivos con respecto a x^* y V es continua, entonces x^* es asintóticamente estable. Este es el clásico teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica.

DEMOSTRACION:

Como $-\dot{V}>0$ en una vecindad de x^* el punto x^* es estable por el proposición III.3.1.

De la demostración de ése teorema, existe una vecindad pequeña arbitraria G_0 de x^* la cual es invariante. Podemos hacer a G_0 tan pequeña que $V(x(k))>0$ y $\dot{V}(x(k))<0$ para $x(k) \in G\setminus\{x^*\}$.

Dando cualquier $x_0 \in G_0$ tenemos por la proposición III.3.2 que $F^k(x_0)$ tiende a el conjunto invariante más grande en $G_0 \cap \{\dot{V}(x(k))=0\}= x^*$ ya que $-\dot{V}$ es definido positivo.

Por tanto, x^*es asintóticamente estable. ■

PROPOSICION III.3.3:

Sea $\dot{V}$ definida positiva con respecto a x^* y $V(x(k)$ continua toma valores positivos para $x(k)$ arbitrariamente cercanos a x^*, entonces x^* es inestable.

DEMOSTRACION:

Supongamos lo contrario, que x^* es estable. Sea $\varepsilon>0$ tan pequeño que $\dot{V}(x)>0$ para $x \in B_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$ y $\delta>0$, así que si $x_0\in B_\delta(x^*)$ entonces $x(k)=F^k(x_0) \in B_\varepsilon(x^*)$ para toda k.

Por hipótesis, hay un punto $x_0 \in B_\delta(x^*)$ tal que $V(x_0)>0$.

Como $x(k)$ permanece en $B_\varepsilon(x)$ es acotada, entonces $x(k)$ tiende a $x^*= \{x(k)/\dot{V}(x(k)) =0 \}\cap B_\varepsilon(x^*)$.

Ya que $x(k)\longrightarrow x^*$ tenemos que $V(x(k))\longrightarrow V(x^*)=0$. Pero $\dot{V}(x(k))>0$ así $V(x(k))>0$, de manera que

$$V(x(k))>V(x(k-1))> \ldots >V(x_0)>0.$$

Esta contradicción prueba el teorema. ■

Los teoremas aquí expuestos se deben, básicamente, al matemático ruso A. M. Lyapunov; los cuales constituyen su "método directo" ya que ellos establecen estabilidad, inestabilidad, etc. sin especificar conocimiento de la solución $x(k)$.

retroalimentación, es decir $u_k = u(x_k)$, entonces podemos definir una función g mediante la igualdad

$$F(x_k, u(x_k)) = g(x_k)$$

por lo que el sistema (1) puede escribirse como

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

de tal manera que podemos aplicar, en la teoría del control, los resultados expuestos en este trabajo.

La linealidad de la función F_1 que interviene en la ecuación (1) da lugar al capítulo II. El Algebra Lineal, mediante los bloques de Jordan, representan en este trabajo un paso clave para describir las soluciones.

A lo largo del trabajo podemos observar la analogía entre la teoría de las ecuaciones en diferencias y la teoría de las ecuaciones diferenciales; claro está que las ecuaciones en diferencias no son solo útiles para la teoría decontrol, también existen otras áreas de la matemática para las cuales éstas ecuaciones son necesarias.

Es conveniente mencionar que existen paquetes computacionales para obtener y describir las soluciones de las ecuaciones en diferencias. Algunos de estos son el PHASER, SIMNON y el MATLAB. En general, la rapidez de cálculo que representa el uso de la computadora ha atraído una mayor atención al estudio de las ecuaciones en diferencias.

ANEXO I

TEOREMA A.I.1: (del binomio).
Sea S el conjunto de los enteros positivos 0,1,...,n para los cuales la propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

es verdadera, siendo a y b números reales diferentes de cero.

TEOREMA A.I.2: (De DeMoivre).
Para cualquier entero $n \geq 1$,

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta).$$

DEMOSTRACION:
Se procede por inducción en n. Si n=1, la expresión es obviamente cierta. Supóngase que para cierto k,

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^k = \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^k (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta)\ (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &= [\cos(k\theta)\cos\theta - \mathrm{sen}(k\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta] + i[\mathrm{sen}(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta]\end{aligned}$$

Como en esta igualdad hay dos identidades trigonométricas

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{k+1} = \cos(k\theta+\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta+\theta)$$

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i\,\mathrm{sen}(k+1)\theta$$

Esto completa el paso de inducción, por consiguiente, el teorema es verdadero para todos los enteros $n \geq 1$. ■

A.I.3.- Unicidad del problema del valor inicial.

$$x_{k+1}=F(x_k), \qquad x_k|_{k=0}=0$$

Por su naturaleza, no es posible imaginar que un problema de progresión geométrica tuviera dos soluciones. Si bien se obtuvo ciertamente una solución única de una progresión geométrica utilizando un método iterativo, se considera el procedimiento general para resolver una ecuación en diferencias mediante este método.

i) El valor inicial x(0) es dado

ii) Dados valores arbitrarios de la variable k y x(k), x(k+1) es determinado de manera única mediante la ecuación en diferencias.

Las dos condiciones anteriores se pueden escribir de nuevo como sigue

i′) El valor x(0) de x(k) en k=0 es único

ii′) Si el valor x(i) para i=k está determinado de manera única, entonces el valor x(i+1) para k=i+1 también está determinado de manera única.

Dado que x(0) es único, si se hace k=0 en (ii′), la condición implica que x(1) es único. Si x(1) es único, entonces por (ii′) x(2) es único. Si se repite este procedimiento, x(k) resulta determinado de manera única para todo número natural que pertenezca al dominio donde x(k) está definida. De esta manera, para las ecuaciones en diferencias que satisfagan la condición (ii), la existencia y unicidad de las soluciones bajo las condiciones iniciales dadas, quedan probadas. Se hace notar que estas propiedades son tambien útiles para resolver algunos problemas prácticamente.

ANEXO II

Respecto a la forma de Jordan recordemos el siguiente resultado.

PROPOSICION A.II.1:
Sea A una matriz real (2x2), entonces existe una matriz real no singular F tal que $F^{-1}AF=J$ donde la forma Jordaniana J es uno de los siguientes tipos

$$(a) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

donde $\lambda= 1/2 \ (\tau \mp \sqrt{\tau^2 - 4\delta} \ )$, τ = trA ; δ = detA.

(a) Es el caso de 2 valores propios reales distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$); no consideraremos el subcaso $\lambda_1=\lambda_2$ debido a que éste puede estudiarse con un análisis trivial.
(b) Es el caso de dos valores propios repetidos $\lambda=\tau/2 =\lambda_1=\lambda_2$ ($\tau^2= 4\delta$); (c) Es el caso de dos valores propios complejos $\lambda=\alpha \pm i\beta$ donde $\alpha= \tau/2$ y $\beta = 1/2 \ (\sqrt{4\delta - \tau^2} \ )$; α y β son números reales con $\beta>0$. Así para el caso complejo (c), J es una matriz simétrica cuyos elementos en la diagonal son la parte real y los elementos fuera de la diagonal son la parte imaginaria del valor propio respectivamente.

A continuación citamos la demostración correspondiente al inciso c).

TEOREMA A.II.2:
Sea A un operador lineal en un espacio vectorial de 2 dimensiones con valores propios complejos $\lambda=\alpha \pm i\beta$. Entonces existe una matriz representación J donde

$$J \equiv \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \equiv \alpha I + \beta M \qquad \text{donde} \quad M \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

DEMOSTRACION:

Sea $w \equiv u+iv$ y $\bar{w} \equiv u-iv$, ($u,v \in \mathbb{R}^2$, $i=\sqrt{-1}$). Entonces tenemos $u=(1/2)(w + \bar{w})$ y $v=(1/2)(\bar{w} - w)$ es decir, u y v son vectores reales independientes dos-dimensionales y como tal [u,v] es una base para el espacio vectorial. Detalles de la decomplexificación de A son como sigue

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u +iv)$$

por definición

$$Au +iAv = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u).$$

quitando i, tenemos que $Au = (\alpha u - \beta v)$ y $Av = (\alpha v + \beta u)$, es decir

$$A(u,v) = (u,v) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \qquad o \qquad AP = PJ$$

$$P^{-1}AP = \mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \equiv \alpha I + \beta M$$

donde **J** tiene a α en la diagonal y la matriz βM con $\pm\beta$ fuera de la diagonal. ■

DEFINICION A.II.1:

Una matriz cuadrada A se dice que es *similar* a otra matriz B si existe una matriz no singular P tal que

$B = P^{-1}AP$

DEFINICION A.II.2:

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Se dice que una matriz es *diagonal* si todas sus componentes son iguales a cero, excepto quizás las componentes de la diagonal, esto es: si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Toda matriz diagonal es una matriz simétrica.

DEFINICION A.II.3:

Un *bloque de Jordan* es una matriz cuadrada triangular superior

$J(\lambda)$ tal que:

a) Todos sus elementos en la diagonal principal son iguales a λ: $< J(\lambda) >_{ii} = \lambda$, donde λ representa a los valores propios de A.

b) Todos sus elementos en la primera sobrediagonal son iguales a 1: $< J\lambda) >_{i,i+1} = 1$

c) Todos los demás elementos son iguales a cero.

De este modo

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots 0 \\ & & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \lambda \end{bmatrix}$$

El objetivo consiste en que, dada A, por escoger P tal que $P^{-1}AP$ sea lo más diagonal posible.

Veremos que el objetivo anterior se alcanza si $P^{-1}AP$ tiene la forma de Jordan. De acuerdo a las definiciones anteriores, la forma de Jordan es

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & J_2 & \ldots 0 \\ & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & \ldots J_s \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

donde J_i es bloque de Jordan para $i= 1,2,3,\ldots,s$.

Una versión preliminar del teorema de Jordan es como sigue:

Si una matriz tiene s vectores propios linealmente independientes, entonces es similar a una matriz que tiene la forma de Jordan (A.1).

Para establecer la demostración del teorema de Jordan se procede por inducción matemática, partiendo del hecho de que cada matriz de 1x1 está ya en su forma de Jordan. Podemos suponer que se logra la construcción para todas las matrices de orden menor que n (ésta es la "hipótesis de inducción") y después explica los pasos para una matriz de orden n.Paso 1: Si suponemos que A es singular, entonces su espacio columna tiene dimensión r<n. En lo que respecta solamente a este espacio pequeño (de dimensión r),

la hipótesis de inducción garantiza que una forma de Jordan es posible; debe haber r vectores independientes w_i en el espacio columna tales que

$$Aw_i = \lambda_i w_i \qquad \text{o} \qquad Aw_i = \lambda_i w_i + w_{i-1}$$

Paso 2: Supongamos que el espacio nulo y el espacio columna de A tienen una intersección de dimensión ρ. Desde luego, cada vector del espacio nulo es un vector propio correspondiente a $\lambda=0$. Por lo tanto, debe haber ρ hileras en el paso 1 que comienzan a partir de este valor propio, y nos interesan los vectores w_i que tienen al final de estas hileras. Cada uno de estos ρ vectores está en el espacio columna, así que cada uno es una combinación de las columnas de A: $w_i = Ay_i$ para algún y_i.

Paso 3: El espacio nulo siempre tiene dimensión n-r. Por lo tanto, independiente de su intersección ρ-dimensional con el espacio columna, debe contener n-r-ρ vectores básicos adicionales z_i fuera de esa intersección.

Juntando los pasos obtenemos el teorema de Jordan:
Los r vectores w_i, los ρ vectores y_i y los n-r-ρ vectores z_i forman las hileras de Jordan para la matriz A, y estos vectores son linealmente independientes. Van en las columnas de P, y $J = P^{-1}AP$ está en la forma de Jordan.

ANEXO III

A.III.1:(Demostración del teorema de Putzer).

La idea de la demostración consiste en probar que la sucesión

$$\phi(k) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(k) P_j$$

satisface el problema de valor inicial

$$\phi(k+1)=A\phi(k)$$
$$\phi(0)=I$$

lo que implica que, por unicidad, $\phi(k)=A^k$. Por conveniencia en la demostración definimos $r_0(k)=0$.

$$\phi(k+1)=\sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(k+1) P_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1} \left[r_j(k) + \lambda_{j+1} r_{j+1}(k)\right] P_j ,$$

de manera que

$$\phi(k+1) - \lambda_n \phi(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[r_j(k) + \lambda_{j+1} r_{j+1}(k)\right] P_j - \lambda_n \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(k) P_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\lambda_{j+1}-\lambda_j\right] r_{j+1}(k) P_j + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(k) P_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\lambda_{j+1}-\lambda_j\right] r_{j+1}(k) P_j + \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(k) P_{j+1}$$

Considerando que $P_{j+1}= (A - \lambda_{j+1}I) P_j$ en la última igualdad, obtenemos que

$$\phi(k+1) - \lambda_n \phi(k) = \sum_{j=0}^{n-2} \left[(A - \lambda_{j+1}I)P_j + (\lambda_{j+1}-\lambda_j)P_j\right] r_{j+1}(k)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} (A - \lambda_n I) P_j r_{j+1}(k)$$

$$= (A - \lambda_n I) \sum_{j=0}^{n-2} P_j \, r_{j+1}(k)$$

reescribiendo la sumatoria que aparece en ésta parte derecha

$$\sum_{j=0}^{n-2} P_j \, r_{j+1}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} P_j \, r_{j+1}(k) - P_{n-1} \, r_n(k)$$

$$= \phi(k) - r_n(k) \, P_{n-1}$$

entonces

$$\phi(k+1) - \lambda_n \, \phi(k) = (A - \lambda_n I) \, (\phi(k) - r_n(k) \, P_{n-1})$$

$$= (A - \lambda_n I) \, \phi(k) - r_n(k) \, (A - \lambda_n I) \, P_{n-1}$$

$$= (A - \lambda_n I) \, \phi(k) - r_n(k) \, P_n$$

De acuerdo al teorema de Cayley-Hamilton tenemos que

$$P_n = (A - \lambda_1 I) \, (A - \lambda_2 I) \, \ldots \, (A - \lambda_n I) = 0$$

De manera que la última igualdad nos queda

$$\phi(k+1) - \lambda_n \phi(k) = (A - \lambda_n I) \, \phi(k)$$

$$\Rightarrow \qquad \phi(k+1) = A\phi(k)$$

También observamos que

$$\phi(0) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(0) \, P_j = r_1(0) I$$

$$\phi(0) = I$$

Es decir, tenemos que $\phi(k)$ y A^k son soluciones del problema de valor inicial. De acuerdo a la unicidad tenemos que

$$\phi(k) = A^k \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

1.- "Introduction to Difference Equation". Samuel Goldberg. Dover Publications Inc.; N. Y., 1986.

2.- "Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias". Próspero García M. y Carlos de la Lanza E. Editorial Limusa, 1a. ed., 1984.

3.- "Calculus of Finite Differences and Difference Equations". Murray R. Spiegel. McGraw-Hill Book Company, nov. 1970.

4.- "Ecuaciones en Diferencias con Aplicaciones". Takehito Takahashi. Grupo Editorial Iberoamérica, México, marzo 1990.

5.- "Elementos de Análisis Numérico". Peter Henrici. Ed. Trillas, México, enero 1980.

6.- "Difference Equations with Applications". Donald R. Sherbert. umap 5/30/79.

7.- "The Stability and Control of Discrete Processes". J. P. LaSalle. Ed. Springer-Verlag, New York, 1986.

8.- "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones". William R. Derrick y Stanley I. Grossman. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, México D. F., 1986.

9.- "Dynamical Systems". Pierre N. V. Tu. Springer-Verlang, 2da. ed., Alemania, 1994.

10.- "Algebra Abstracta". I. N. Herstein. Grupo Ed. Iberoamérica, México D. F. 1988.

11.- "Algebra Lineal y sus Aplicaciones". Gilbert Strang. Ed. Sitesa-Addison-Wesley, México D. F. 1986.

12.- "A Second Course in Elementary Differential Equations". Paul Waltman, Academic Press, 1986.

13.- "Numerical Mathematics". Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, Springer-Verlang New York Inc. 1991.

14.- "Linear Multivariable Control: A Geometric Approach". W. Murray Wonham, Springer-Verlang ,Third ed. 1985.

15.- "Stability Theory for Difference Equations". J. P. LaSalle.

16.- "Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications". James T. Sandefur. Clarendon Press. Oxford, 1990.