

7. 16

UNIVERSIDAD DE SONORA
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

**"CARACTERIZACIONES FUNDAMENTALES EN TEORIA DE
GRAFICAS: TEOREMA DE MENGER, BROOKS, EULER,
DIRAC, BERGE"**



EL SABER DE NOSOTROS
CON LA GRANDEZA

**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

MARICELA ARMENTA CASTRO

Hermosillo, Sonora.

T83
Mayo de 1996 Ej. 1

AGRADEZCO AL *M.C. CARLOS ALBERTO ROBLES CORBALA*, NO SOLO POR HABER DIRIGIDO ESTE TRABAJO, SINO TAMBIEN POR SU CONSTANTE APOYO A FIN DE QUE QUEDARA CONCLUIDO.

AGRADEZCO TAMBIEN A LOS MAESTROS *M.C. PEDRO FLORES PEREZ*, *M.I.O. JOAQUIN H. LOPEZ BORBON* Y AL *P.M.C. HECTOR A. HERNANDEZ HERNANDEZ* POR SUS ATINADAS SUGERENCIAS, A FIN DE QUE ESTE TRABAJO SE CONCLUYERA DE LA MEJOR MANERA.

A LA *L.M. MARIA TERESA VALENZUELA SASTRE*, POR SU IMPORTANTISIMA COLABORACION EN EL PROCESO DE CAPTURA DEL MISMO.

ASI MISMO DESEO EXPRESAR UN RECONOCIMIENTO A LOS PROFESORES DE LA GENERACION 83-2 / 87-1 DE LA LICENCIATURA EN MATEMATICAS.

A MIS HIJOS:

ADRIANA ZULEMA,

GLADYS IRASEMA,

AARON FRANCISCO.

A MI ESPOSO

PEDRO AARON

A MIS PADRES, A MI TIA IRENE Y A LA MEMORIA
DE MI NANA PAZ.

A LOS COMPAÑEROS DE LA GENERACIÓN 83-2 / 87-1 DE L.M.

A MIS HIJOS:

ADRIANA ZULEMA,

GLADYS IRASEMA,

AARON FRANCISCO.

A MI ESPOSO

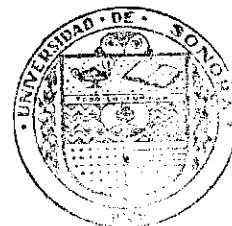
PEDRO AARON

A MIS PADRES, A MI TIA IRENE Y A LA MEMORIA
DE MI NANA PAZ.

A LOS COMPAÑEROS DE LA GENERACIÓN 83-2 / 87-1 DE L.M.

INDICE

Contenido	Página
INTRODUCCION	1
CAPITULO CERO: Conceptos Elementales y Primeros Resultados	4
1) Introducción	
2) Gráfica: Definición y Ejemplos	
3) Subgráficas, Gráfica Completa	
4) Grado de un vértice	
5) Gráficas Isomorfas	
6) Caminos en gráficas	
7) Gráficas Bipartitas	
8) Conexidad, definición y caracterizaciones.	
CAPITULO UNO: Bloques, Arboles y Conexidad	23
1) Introducción	
2) Vértice y arista de Corte	
3) Condiciones Necesarias y Suficientes para la existencia de vértices y aristas de Corte	
4) Bloques	
5) Arboles, definición y ejemplos	
6) Arboles Generadores	
7) Conexidad puntual y Conexidad Lineal	
8) Teorema de Menger	



EL SABER DE NUESTROS DIJOS
HARA A GRANDEZCA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

CAPITULO DOS: Coloración de Vértices 45

- 1) Introducción
- 2) Coloración Propia
- 3) Número cromático
- 4) Gráficas críticas
- 5) Teorema de Brooks

CAPITULO TRES: Planaridad y El Teorema de Euler 55

- 1) Introducción
- 2) Gráficas planas y gráficas aplanables
- 3) Gráficas Duales
- 4) El Teorema de Euler
- 5) El Teorema de los Cinco Colores
- 6) Clasificación de los Poliedros Regulares

CAPITULO CUATRO: Paseos Eulerianos y Ciclos Hamiltonianos 72

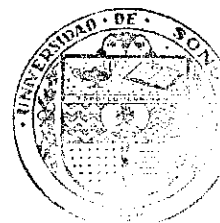
- 1) Introducción
- 2) Gráficas Eulerianas
- 3) Condiciones Necesarias y suficientes para que una gráfica sea Euleriana
- 4) Gráficas Hamiltonianas
- 5) Teorema de Dirac

CAPITULO CINCO: Apareamientos 85

- 1) Introducción
- 2) Apareamiento Perfecto
- 3) Teorema de Berge
- 4) Teorema de Hall

CONCLUSIONES 100

BIBLIOGRAFIA



EL SAUPE DE MIS NIÑOS
HA A M GUANLEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

INTRODUCCION

La Teoría de Gráficas, es una rama muy antigua de las matemáticas, sin embargo sus resultados constituyen una herramienta muy poderosa en áreas tan diversas como la Investigación de Operaciones, la Química, la Genética, la Lingüística, además de constituir por si misma una importante disciplina matemática. Se clasifica como una rama de la Topología, aunque también está ligada al Álgebra y a las Matrices.

El presente trabajo, tiene como principal objetivo, hacer una presentación introductoria a la Teoría de Gráficas, analizando el material que constituyen los elementos indispensables que deben conocer quienes inician sus estudios en esta rama de las matemáticas. Hacemos especial referencia a las caracterizaciones que consideramos fundamentales bajo este contexto: Teorema de Menger, Brooks, Euler, Dirac y el Teorema de Berge, los cuales son resultados básicos que nos permiten construir las bases teóricas para la aplicabilidad de los algoritmos utilizados en la resolución de algún problema particular.

Es importante señalar que unicamente nos limitamos a considerar el aspecto teórico de dicha teoría y que no presentamos los algoritmos de resolución a los diferentes problemas de aplicación, pues consideramos que tales algoritmos aunados a su implementación computacional, constituyen por si mismos, el material suficiente, para el desarrollo de diferentes trabajos.

Hemos estructurado el trabajo en 6 capítulos, los cuales describimos a continuación.

En el Capítulo Cero, iniciamos presentando los conceptos elementales y los resultados importantes que serán de utilidad en el desarrollo de los capítulos consecuentes. Iniciaremos estableciendo el concepto de gráfica y hacemos énfasis en que nuestro estudio se limita sólo a gráficas simples, aunque muchos de los resultados expuestos pueden cumplirse en el caso más general.



El Capítulo Uno, tiene como principal objetivo, definir los cortes de una gráfica. Analizamos primero los vértices de corte y los puentes, estableciendo aquí el concepto de Bloque. Posteriormente, definimos la conexidad puntual y la conexidad lineal de una gráfica, y establecemos la relación entre ellas, concluyendo con la demostración del Teorema de Menger. También presentamos en este capítulo un caso particular de gráficas: Los árboles, para los cuales estableceremos algunas de sus caracterizaciones.

En el Capítulo dos, estaremos interesados en buscar coloraciones apropiadas para los vértices de una gráfica, presentamos dos cotas para el número cromático, una de ellas dada por el Teorema de Brooks, y además, enunciaremos el Teorema de los Cinco Colores, el cual demostraremos en el siguiente capítulo.

En el Capítulo Tres, estudiamos una propiedad importante en las gráficas: La planaridad. Enunciaremos la caracterización de Kuratowsky la cual nos proporciona un criterio para decidir si una gráfica puede ser o no aplanable. Además, ejemplificaremos la noción de planaridad a otras superficies. Asimismo demostraremos el Teorema de Euler, el cual extendemos para poliedros utilizándolo para dar una clasificación de los poliedros regulares. Otro resultado que demostraremos es el Teorema de los Cinco Colores.

En el Capítulo Cuatro, caracterizaremos aquellas gráficas que tienen la propiedad de que puede hallarse un recorrido que inicie y finalice en el mismo vértice después de pasar por todas sus aristas sólo una vez, a saber, las gráficas eulerianas. Además veremos que no existen condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica sea hamiltoniana. Se demostrará el Teorema de Dirac.

En el Capítulo Cinco, presentamos condiciones necesarias y suficientes, para hallar apareamientos perfectos en gráficas. Demostraremos el Teorema de Berge, y analizaremos primero gráficas bipartitas, demostrando aquí el conocido Teorema de Hall, y finalmente estableceremos condiciones necesarias y suficientes en gráficas no bipartitas.



CAPITULO CERO

CONCEPTOS ELEMENTALES Y PRIMEROS RESULTADOS

En el año de 1736, se le planteó al matemático Leonard Euler el "Problema de los puentes de Königsberg", ciudad formada por las riberas y por dos de las islas del Río Pregel. Ambas islas estaban comunicadas entre sí y además con ambas riberas, como se muestra en la figura 0.1. El problema consiste en encontrar un paseo que inicie y termine en el mismo sitio, después de atravesar los siete puentes de la ciudad sin pasar dos veces por ninguno de ellos.

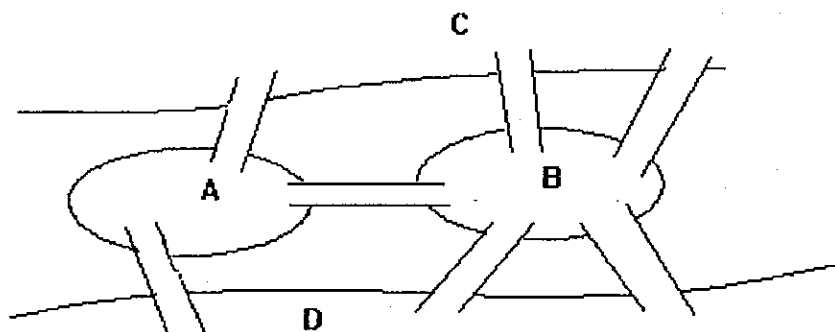


FIGURA 0.1

Euler realizó un modelo del problema, representando tanto las riberas del río como las islas por un punto y, cada puente por una línea continua, obteniendo así la figura 0.2, posteriormente dió respuesta.

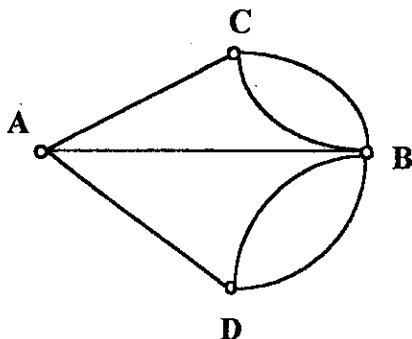


FIGURA 0.

Formalmente, podemos definir una gráfica como:

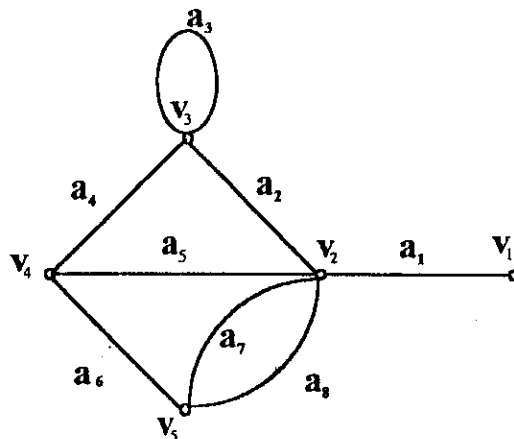
DEFINICION: Una GRAFICA $G=(V, A, f)$ es una terna que consta de:

- i) Un conjunto finito $V=V(G)$ cuyos elementos se llaman vértices, puntos o nodos de G .
- ii) Un conjunto finito $A=A(G)$ cuyos elementos se llaman aristas, líneas o ramas de G .
- iii) Una función $f:A(G) \rightarrow V(G) \times V(G)$ llamada la función de incidencia de G , donde $V(G) \times V(G)$ es un conjunto de parejas no ordenadas, no necesariamente distintas.

Cuando una gráfica G consta de un sólo vértice, G se dice TRIVIAL, en otro caso G es NO TRIVIAL.

EJEMPLO: Sea $G=(V(G), A(G), f)$ dada por: $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $A(G)=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ y la función de incidencia f definida por:
 $f(a_1)=(v_1, v_2)$, $f(a_2)=(v_2, v_3)$, $f(a_3)=(v_3, v_3)$, $f(a_4)=(v_3, v_4)$, $f(a_5)=(v_2, v_4)$, $f(a_6)=(v_4, v_5)$,
 $f(a_7)=(v_2, v_5)$, $f(a_8)=(v_2, v_5)$

El término GRAFICA se utiliza puesto que estas pueden ser representadas gráficamente, y esta representación será muy útil para entender muchas de sus propiedades. Cada vértice se representa por un punto y cada arista por una línea que une la pareja de vértices que la definen. Así tenemos que la representación de la gráfica dada por el ejemplo anterior es:



Los polígonos y las configuraciones formadas por las aristas y los vértices de cada uno de los sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro); FIGURA 0.3, son también ejemplos de gráficas.

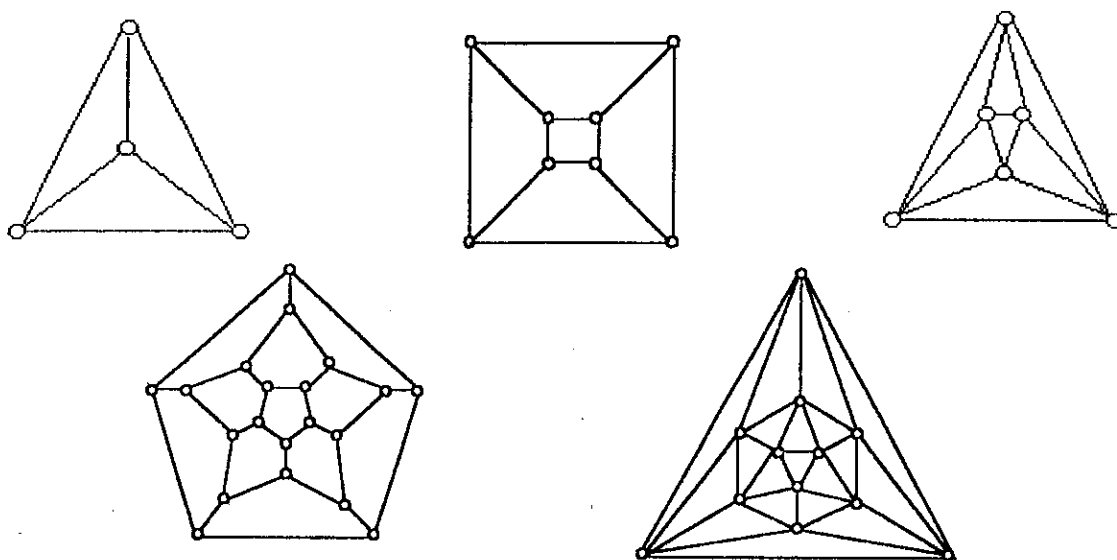


FIGURA 0.3

El objetivo de este capítulo es presentar los conceptos y resultados que serán de utilidad en el desarrollo del trabajo.

El ejemplo anterior menciona algunas de las gráficas cuyo uso aparece con frecuencia, sin embargo, muchas situaciones prácticas que pueden modelarse a través de gráficas, tal es el caso donde los vértices representan personas y las aristas parejas de amigos; o donde los vértices representan centros de población y las aristas las vías de comunicación entre ellos, o bien puede describir una situación como la del:

EJEMPLO: Suponga que 6 equipos de fútbol hacen parte de una misma liga. Designemos a los equipos con $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Una vez jugados algunos partidos se tiene la siguiente información:

v_1 ha jugado con v_3, v_4 y v_6 ,
 v_2 ha jugado con v_3, v_5 y v_6 ,
 v_3 ha jugado con v_1 y v_2 ,
 v_4 ha jugado con v_5, v_1 y v_6 ,
 v_5 ha jugado con v_2, v_4 y v_6 ,
 v_6 ha jugado con v_1, v_2, v_4 y v_5

Esta situación puede ilustrarse por medio de una gráfica. Los equipos representen los vértices y se conectan por medio de aristas cuando los equipos han jugado entre si. La gráfica obtenida es la que se da en la figura 0.4.

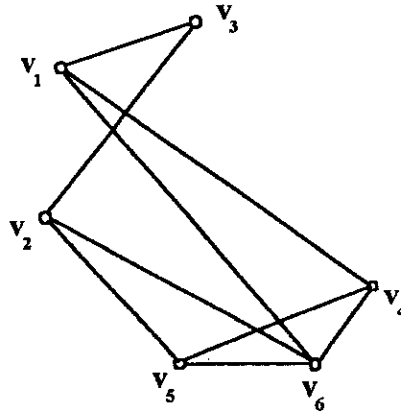


FIGURA 0.4

Este ejemplo será utilizado posteriormente, para exhibir distintos conceptos, por el momento daremos algunas definiciones importantes, en cuya ilustración se usarán ejemplos diferentes.

Las aristas de una gráfica, se clasifican de acuerdo a la:

DEFINICION: Si a es una arista de G y $f(a)=(u,v)$, se dice que u y v son los extremos o vértices de a . Si a es tal que $f(a)=(u,u)$, a es un lazo y, si para $a \neq a'$ $f(a)=f(a')$, a y a' se dicen aristas paralelas o múltiples.

EJEMPLO: Las gráficas de las figuras 0.5 y 0.6 muestran lazos y aristas múltiples respectivamente.

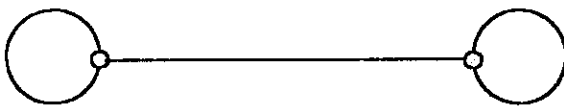


FIGURA 0.5

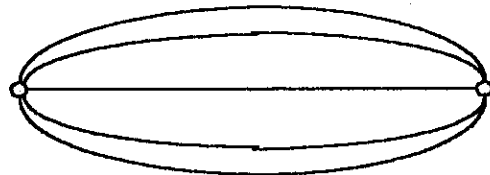


FIGURA 0.6

Un caso especial de gráficas se establece en la siguiente definición.

DEFINICION: Una gráfica en la que no aparecen lazos ni aristas múltiples se llama **GRAFICA SIMPLE**. Para este caso puede hablarse de la Gráfica $G=(V(G),A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito de vértices y $A(G)$ una colección de pares no ordenados de $V(G)$, sin mencionar la función de incidencia. Se escribe $a=uv$, para indicar que $f(a)=(u,v)$.

EN EL PRESENTE TRABAJO SOLO SE ANALIZARAN GRAFICAS DE ESTE TIPO, POR LO TANTO EL TERMINO GRAFICA SIGNIFICARA GRAFICA SIMPLE, SALVO QUE SE ESPECIFIQUE LO CONTRARIO.

Los vértices y las aristas de una gráfica G , se relacionan de acuerdo a la siguiente:

DEFINICION: Dos vértices son adyacentes si existe una arista que los tiene por extremos. Se denota $u \text{ ady}_G v$. Dos aristas son adyacentes si tienen un extremo en común y, una arista y un vértice inciden si éste último es un extremo de la arista.

EJEMPLO: En la gráfica de la figura 0.7, se tiene:

Son vértices adyacentes v_1 y v_2 , v_4 y v_6 , v_7 y v_8 , etc.

Son aristas adyacentes a_1 y a_2 , a_3 y a_4 , a_6 y a_7 , etc.

a_5 y v_6 inciden, v_1 y a_1 inciden, etc.

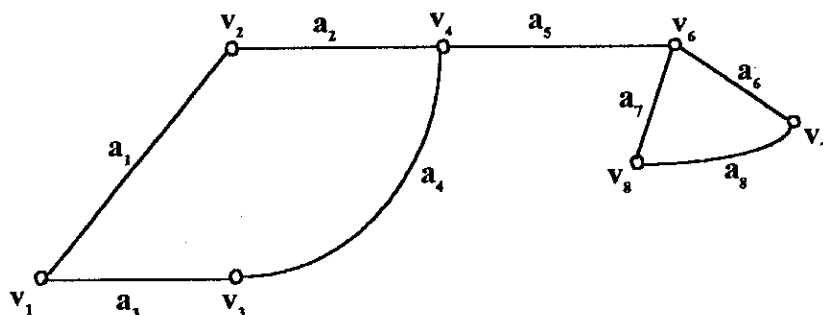


FIGURA 0.7

Volvamos al ejemplo de los equipos de fútbol, notemos que puede hablarse no solo de todos los partidos que se han jugado, sino solamente de los que han jugado uno o varios equipos, lo cual origina el concepto de subgráfica, dado por:

DEFINICION: Sean $G=(V,A)$ y $G'=(V',A')$ dos gráficas. Diremos que G' es subgráfica de G , denotada por $G' \subseteq G$ si: $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$ y $f(G')$ es la restricción de $f(G)$ a $A(G')$.

Si $G' \subseteq G$ pero $G' \neq G$, G' se dice subgráfica propia de G . Las subgráficas pueden clasificarse en distintas categorías dados por:

- i) G' es Generadora de G , cuando $V'=V$.
- ii) G' es inducida por V' si su conjunto de vértices es V' y sus aristas las de G que tienen sus dos extremos en V' . Se denota por $\langle V' \rangle$.
- iii) G' es inducida por A' si su conjunto de aristas es A' y cuyos vértices son los extremos de las mismas. Se denota $\langle A' \rangle$.
- iv) $G-V'$ es la subgráfica inducida por $V-V'$.
- v) $G-A'$ es la subgráfica cuyas aristas son $A-A'$, y cuyos vértices son los extremos de las mismas.

EJEMPLO: En figura 0.8 se muestra una gráfica y en la figura 0.9 las subgráficas respectivas.

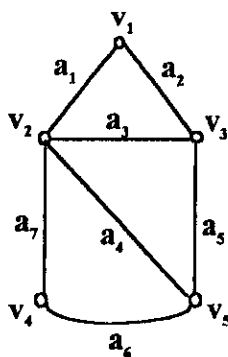
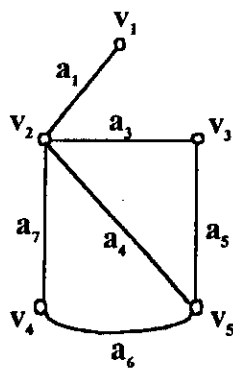
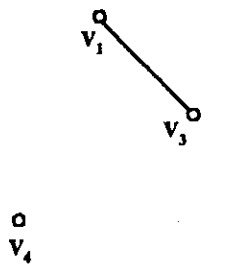


FIGURA 0.8

SUBGRAFICAS

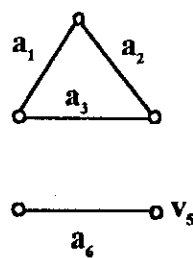


GENERADORA



$\langle V' \rangle$

$$V' = \{v_1, v_3, v_4\}$$



$\langle A' \rangle$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_6\}$$

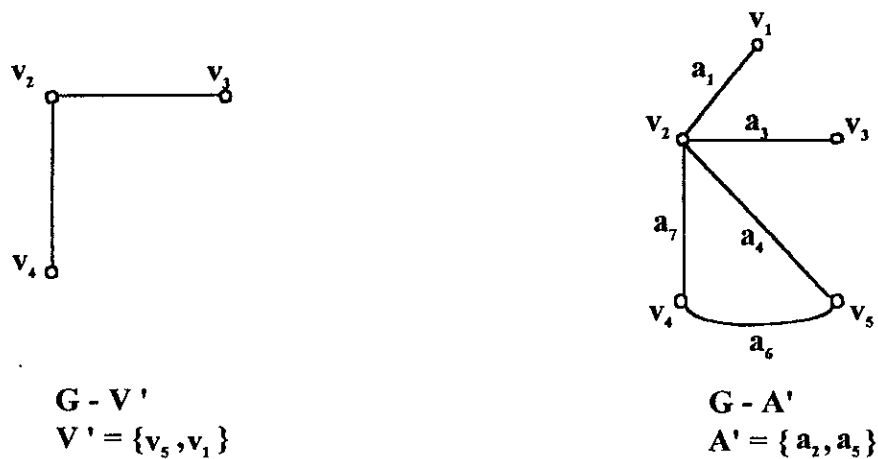


FIGURA 0.9

Como veremos en el desarrollo del trabajo, las subgráficas generadoras y las subgráficas inducidas serán de particular importancia.

En el ejemplo, al que hemos estado haciendo referencia, supongamos que al terminar el torneo, cada equipo ha jugado con los restantes sólo una vez, entonces cada par de vértices está conectado, esto produce un tipo particular de gráficas en la cual es imposible añadirle aristas, sin obtener lazos o aristas múltiples, su definición se da por:

DEFINICION: Una gráfica G es completa si todo par de vértices distintos son adyacentes. Se denota por K_n , donde n es el número de vértices de G .

EJEMPLO: La gráfica completa para el ejercicio 0.3 se da en la figura 0.10.

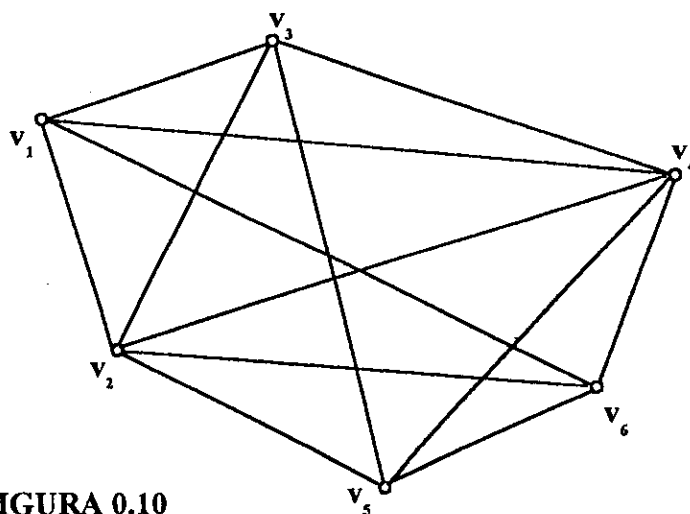


FIGURA 0.10

Notemos que el número de aristas de una gráfica completa de p vértices está dado por:

$$\frac{p(p-1)}{2}.$$

De nuevo, consideremos el ejemplo de los equipos de futbol y consideremos los partidos que en un momento dado hacen falta para completar el torneo, de acuerdo a las suposiciones dadas en la gráfica completa, se tiene:

DEFINICION: El complemento de $G = (V, A)$, en símbolos G^c , se define como $G^c = (V, A^c)$, donde $A^c = \{(u, v) | u, v \in V, (u, v) \notin A\}$.

Así tenemos que el complemento del ejemplo que hemos venido manejando es el mostrado en la figura 0.11.

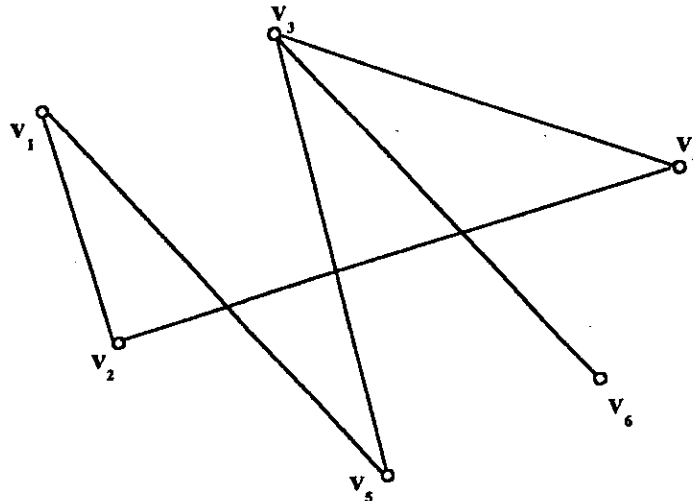


FIGURA 0.11

Otro aspecto importante, resulta al considerar el número de aristas que inciden en cada vértice, lo cual en el ejemplo mencionando equivale al número de juegos que ha tenido cada equipo, esto se establece en:

DEFINICION: Sea v un vértice de la gráfica G , el grado o valencia de v , es el número de veces que v figura como extremo de una arista de G . Se denota $gr_G v$.

OBSERVACION: Si $gr_G v = 0$, se dice que v es un vértice aislado.

DEFINICION: El grado menor de los vértices de G , se le llama grado mínimo y se le denota $\delta(G)$. Analogamente se define el grado máximo y se le denota $\Delta(G)$.

Notemos que en G no hay lazos ni aristas múltiples, por lo tanto para cada vértice v se tiene que puede no ser adyacente a ningún vértice y, que a lo más puede ser adyacente a $p-1$, con lo cual se tiene que en toda gráfica simple de p vértices:

$$0 \leq \text{gr}_G v \leq p-1$$

La relación existente entre los grados de una gráfica G y sus vértices nos la proporciona la expresión anterior, de igual manera se plantean otras relaciones en los teoremas consecuentes.

TEOREMA 0.1 En toda gráfica G , siempre existen dos vértices que tienen el mismo grado.

DEMOSTRACION: Se hará por contradicción. Sea G una gráfica con p vértices, entonces por el Teorema 0.17 $0 \leq \text{gr}_G v \leq p-1 \quad \forall v \in V(G)$. Sean $v_i, v_j \in V(G)$ y supongamos que si $v_i \neq v_j$ entonces $\text{gr}_G(v_i) \neq \text{gr}_G(v_j)$, $\forall i, j \in V(G)$. Así se tiene que existen $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p-1}$, tal que $\text{gr}_G(v_0)=0$, $\text{gr}_G(v_1)=1$, $\text{gr}_G(v_2)=2, \dots$, y $\text{gr}_G(v_{p-1})=p-1$, pero esto es imposible, pues v_{p-1} debería ser adyacente a todos los demás vértices, mientras que v_0 no lo es a ninguno, esto indica que v_0 y v_{p-1} no pueden existir simultáneamente y eliminado alguno de estos grados se tiene al menos dos vértices de igual grado, concluyendo así el teorema.

TEOREMA 0.2 En toda gráfica G , se tiene: $\sum_{v \in V(G)} \text{gr}_G(v) = 2|A(G)|$.

DEMOSTRACION: Al efectuar la suma de los grados de una gráfica G , las aristas se cuentan dos veces, pues cada una de ellas está determinada por dos vértices, de donde se concluye que la sumatoria debe ser par.

Un resultado inmediato que podemos obtener a partir del teorema anterior lo es el:

COROLARIO 0.1 En toda gráfica G , el número de vértices de grado impar, es par.

DEMOSTRACION: Sean $V_1 = \{v \in V(G) / \text{gr}(v) \text{ es impar}\}$ y $V_2 = \{v \in V(G) / \text{gr}(v) \text{ es par}\}$. Claramente $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(G)$, de donde:

$$2|A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \text{gr}_G(v) = \sum_{v \in V_1} \text{gr}(v) + \sum_{v \in V_2} \text{gr}(v)$$

Luego por ser $2|A(G)|$ par y $\sum_{v \in V_2} \text{gr}(v)$ también par se tiene que $\sum_{v \in V_1} \text{gr}(v)$ no puede ser impar y como aquí cada sumando es impar se concluye que el número de ellos debe ser par.

Continuamos presentando algunos conceptos cuya utilidad aparecerá en desarrollos posteriores, particularmente nos referiremos a establecer el isomorfismo en gráficas, el cual se utilizara en el capítulo tres. Observemos las gráficas dadas por las figuras 0.11.

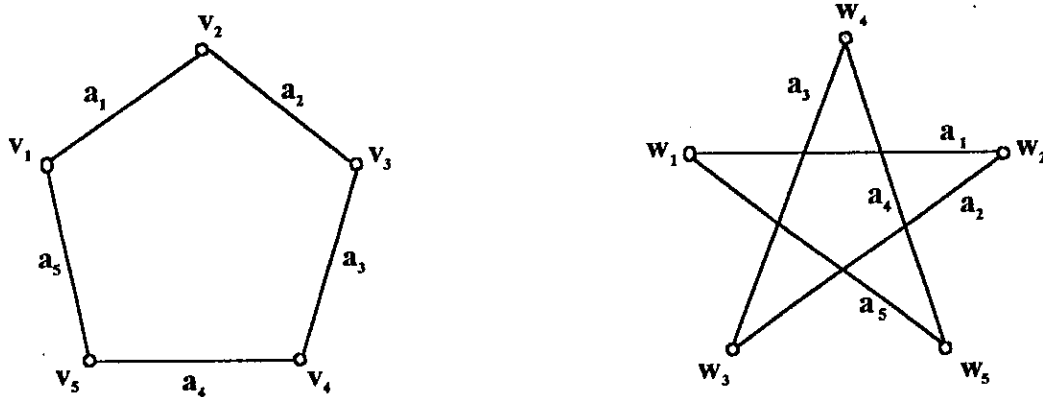


FIGURA 0.11

Las gráficas de la figura 0.11 son ejemplos de gráficas que pueden representarse de diferentes maneras, pero que son esencialmente iguales, lo cual podemos ver inmediatamente después de la siguiente definición.

DEFINICION: Dos gráficas son isomorfas si y solo si existe una función biyectiva $f: G \rightarrow H$ tal que si $u \text{ ady}_G v$ entonces $f(u) \text{ ady}_H f(v)$.

Capítulo 0 Conceptos elementales y primeros resultados.

Las gráficas G y H , dadas por las figuras 0.11 son isomorfas a través de $f: G \rightarrow H$, ya que si tomamos:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1, f(v_2) = w_2, f(v_3) = w_3, f(v_4) = w_4, f(v_5) = w_5, \text{ se cumple que:} \\ v_1 \text{ ady}_G v_2 &\text{ y } f(v_1) = w_1 \text{ ady}_H w_2 = f(v_2), \\ v_2 \text{ ady}_G v_3 &\text{ y } f(v_2) = w_2 \text{ ady}_H w_3 = f(v_3), \\ v_3 \text{ ady}_G v_4 &\text{ y } f(v_3) = w_3 \text{ ady}_H w_4 = f(v_4), \\ v_4 \text{ ady}_G v_5 &\text{ y } f(v_4) = w_4 \text{ ady}_H w_5 = f(v_5), \\ v_5 \text{ ady}_G v_1 &\text{ y } f(v_5) = w_5 \text{ ady}_H w_1 = f(v_1), \end{aligned}$$

El problema de decidir cuando dos gráficas son isomorfas, se presenta con frecuencia. En ciertas circunstancias existen razones claras para concluir que no lo son. Cuando no existe una manera obvia de mostrar que dos gráficas no son isomorfas, es a veces difícil decidir si es posible nombrar a los vértices de tal manera que se obtenga un isomorfismo entre las gráficas.

Continuaremos dando una serie de definiciones, que por si mismas son casos particulares de gráficas.

DEFINICION: Sea G una gráfica. Un CAMINO en G , es una sucesión alternante de vértices y aristas $v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n$ donde cada arista a_i , tiene por extremos a los vértices v_{i-1}, v_i para $i = 1, 2, \dots, n$.

OBSERVACION : En el caso de gráficas simples, un camino queda definido como una sucesión de vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ donde v_i ady v_{i+1} , para $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

DEFINICION: Un camino en el que no se repiten aristas se llama PASEO. Un paseo en el que no se repiten vértices se llama TRAYECTORIA.

DEFINICION: Un camino (paseo) no nulo cuyos extremos son iguales se dice CERRADO. En caso contrario se dice ABIERTO.

DEFINICION: Un paseo cerrado $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v_0$, en el cual no hay ocurrencia de vértices repetidos, excepto v_0 y v_n se llama **CICLO**.

En la gráfica de la figura 0.12, ejemplificamos cada uno de los conceptos, en los que además se indica la notación que se utilizará para cada caso, en el desarrollo posterior del trabajo.

$C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_2, v_6, v_7, v_8)$ es un camino abierto,

$C_2 = (v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_2, v_1)$ es un camino cerrado,

$P_1 = (v_1, v_2, v_6, v_7)$ es un paseo abierto,

$P_2 = (v_1, v_4, v_3, v_2)$ es un paseo cerrado,

$T_1 = (v_6, v_7, v_8)$ es una trayectoria,

$C_3 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_2, v_3)$ es un ciclo.

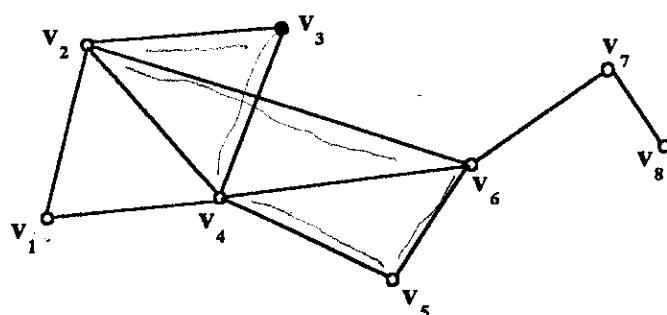


FIGURA 0.12

DEFINICION: Un camino con vértice inicial u y vértice final v se llama **uv-camino** y su **LONGITUD** es el número de aristas que lo forman.

En el ejemplo anterior se tienen C_1 y C_2 tienen longitud 6.

El siguiente problema, nos sirve para ilustrar un tipo de gráficas, cuya particularidad estriba en el hecho de que no hay aristas entre los elementos de cada conjunto. Uno de los principales usos de éstas es en el problema de asignación, al cual haremos referencia en el capítulo cinco. A este problema se le conoce como: El problema de los Casamientos.

En una pequeña población hay el mismo número de muchachos que de muchachas casaderos. Por costumbres y tabús a los hombres no se les permite casarse con parientes cercanos como hermanas, mediohermanas o primas; ¿Cuándo es posible que todos los hombres consigan una novia en el pueblo? Las posibilidades de casamiento para cada individuo pueden ilustrarse considerando la gráfica de la figura 0.13.

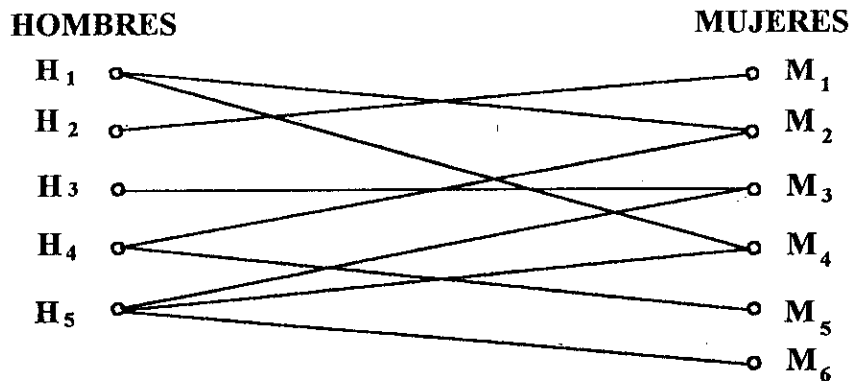


FIGURA 0.13

Donde cada elemento del conjunto de muchachos esta conectado por una arista con el conjunto de muchachas cuando no están emparentados, formalmente establecemos su definición a continuación.

DEFINICION : Una gráfica G , es BIPARTITA, si existe una biparticion $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$, tal que toda arista en $A(G)$ tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 .

DEFINICION : G es BIPARTITA COMPLETA si cada vértice de V_1 es adyacente a todos los de V_2 , lo cual denotamos por $K_{n,m}$, donde $n=|V_1|$ y $m=|V_2|$.

Las gráficas de la figuras 0.13, son bipartitas.

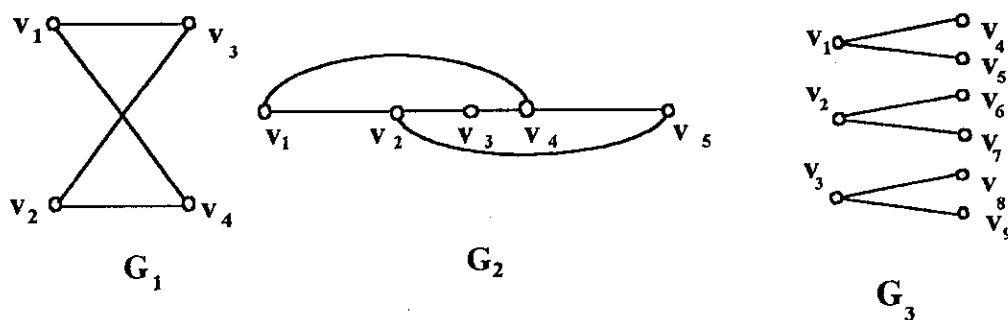


FIGURA 0.13

En el ejemplo anterior podemos observar que G_3 es una gráfica bipartita con más de una bipartición de sus vértices, por ejemplo: $V_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_7\}$, $V_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_8, v_9\}$, y $U_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$, lo que no sucede si la gráfica es bipartita completa, como lo demostramos en el siguiente teorema.

TEOREMA 0.3 En toda gráfica bipartita completa existe una única bipartición.

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica bipartita completa y sean $\{V_1, V_2\}$ y $\{U_1, U_2\}$ dos biparticiones de $V(G)$. Sea $v \in V_1$, entonces $v \in U_1$ ó $v \in U_2$. Supongamos que $v \in U_1$ y tomemos $u \in V_2$, $u \text{ ady}_G v$, pues G es bipartita completa, así que como $v \in U_1$ se tiene que $u \in U_2$, esto se puede hacer para todos los vértices de V_1 , con lo cual podemos concluir que $U_1 \subseteq V_1$, y $U_2 \subseteq V_2$. Similarmente puede tomarse $v \in U_1$ y concluir que $V_1 \subseteq U_1$ y $V_2 \subseteq U_2$, de donde concluimos que $V_1 = U_1$ y $V_2 = U_2$, finalizando así el teorema.

Otra situación especial se da en la siguiente:

DEFINICION: Una gráfica es k -regular o de grado k es aquella en la que todos los vértices son de grado k .

Como ejemplo podemos mencionar a todos los ciclos, los cuales son 2-regulares, K_n que es $(n-1)$ -regular y $K_{n,n}$ que es n -regular.

Capítulo 0 Conceptos elementales y primeros resultados.

El siguiente teorema relaciona los conceptos dados por las dos definiciones anteriores, y es importante destacar que este resultado será utilizado en el capítulo cinco en la demostración del teorema matrimonial de Hall.

TEOREMA 0.4 Si G es bipartita y k -regular ($k>0$), entonces toda bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ es tal que $|V_1| = |V_2|$

DEMOSTRACION: Por ser G bipartita, cada arista de G tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 , esto implica que:

$$|A(G)| = \sum_{u \in V_1} \text{gr}(u)$$

por otro lado :

$$|A(G)| = \sum_{v \in V_2} \text{gr}(v)$$

Luego además G es k -regular, así que $\sum_{u \in V_1} \text{gr}(u) = k|V_1|$ y $\sum_{v \in V_2} \text{gr}(v) = k|V_2|$, de donde: $k|V_1| = k|V_2|$, y ya que $k>0$, se tiene que $|V_1| = |V_2|$.

Otro resultado interesante resultado importante se establece en:

TEOREMA 0.5: Si $\delta(G)=k$, entonces existe en G una trayectoria de longitud al menos k .

DEMOSTRACION: Sea una trayectoria $T=u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$ de longitud máxima en G . Si u_0 fuera adyacente a algún vértice $v \in V(G)$ $v \neq u_i$, $i=0,1,2,\dots,m$ se tendría una trayectoria $T'=v, u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$ de longitud mayor T , lo que contradice la elección de T ; esto indica que $\text{gr}(u_0) \leq m$, luego como $k=\delta(G) \leq \text{gr}(u_0) \leq m$, se tiene que T es de longitud al menos k .

Una de las propiedades más elementales que puede poseer una gráfica se refiere a la **CONEXIDAD**, pues generalmente es una condición para que puedan establecerse muchos resultados. Su definición se da a continuación.

DEFINICION: Una gráfica G es **CONEXA** si y solo si para cualquier par de vértices de G existe una trayectoria que los une.

Son gráficas conexas $K_n \forall n \in \mathbb{N}$, $K_{n,m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$; los ciclos y trayectorias de cualquier longitud también son conexas.

Otras condiciones equivalentes a la definición de conexidad pueden establecerse a través de los siguientes teoremas.

TEOREMA 0.6 Una gráfica G con $|V(G)| \geq 2$ es conexa, si y solo si para cualquier partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ existe una arista con un extremo en V_1 y otro en V_2 .

DEMOSTRACION: Sea G conexa y $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$. Sean $u \in V_1$ y $w \in V_2$, como G es conexa existe una uw -trayectoria en G , y ya que $u \in V_1$ y $w \in V_2$ al menos una arista de esta trayectoria es tal que tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 .

Ahora supongamos que para cualquier partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ existe una arista con un extremo en V_1 y otro en V_2 , demostraremos G es conexa. Sean u y v dos vértices de $V(G)$. Definamos:

$$V_1 = \{w \in V(G) / \text{existe una } uw\text{-trayectoria en } G\} \text{ y } V_2 = V(G) \setminus V_1$$

Por construcción $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(G)$. Tomemos $v \in V_2$ por hipótesis existe $a=xy$ tal que $x \in V_1$ y $y \in V_2$ pero según se ha definido a V_1 existe una ux -trayectoria en G , T , ahora $T \cup \{a\}$ nos da una uy -trayectoria, lo que implica que $y \in V_2$, de donde se concluye que $v \in V_1$, esto es $V_2 = \emptyset$ y entonces existe una uv -trayectoria en G , y por lo tanto G es conexa.

La conexidad define una relación de equivalencia sobre el conjunto de vértices de G . Entonces existe una partición de $V(G)$ en subconjuntos no vacíos $V_1, V_2, \dots, V_n$ tal que dos vértices u y v están conectados si y solo si ambos pertenecen al mismo conjunto.

DEFINICION: Las COMPONENTES CONEXAS de una gráfica G , son las subgráficas de G que son máximas con respecto a la propiedad de ser conexas.

Denotaremos $c(G)$ al número de componentes conexas de G .



EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

OBSERVACION: Si G es conexa, entonces $c(G)=1$, otro caso $c(G)>1$ y en ese caso G se dice DISCONEXA. Además si G tiene p vértices $c(G) \leq p$, lo cual se demostrará posteriormente.

Finalmente presentamos la última definición del capítulo.

DEFINICION: Dada una gráfica G , la DISTANCIA entre cada par de vértices, u y v denotada por $d(u,v)$ se define como:

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ \infty & \text{si no existe una } uv\text{-trayectoria en } G. \\ m & \text{si } m \text{ es el mínimo de las longitudes} \\ & \text{de las } uv\text{-trayectorias en } G. \end{cases}$$

En las gráficas de la figura 0.14 se tiene $d(a,b)=1$, $d(a,c)=2$, $d(a,f)=\infty$, $d(i,i)=0$, $d(f,h)=3$.

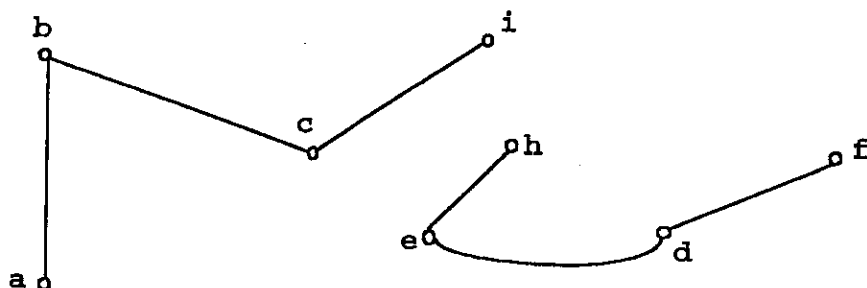


FIGURA 0.14

Finalizamos el capítulo, presentando dos últimos resultados, el primero de ellos será de utilidad en el capítulo cuatro, y en el siguiente daremos una caracterización para gráficas bipartitas.

TEOREMA 0.7 En una gráfica G , todo paseo cerrado es la unión de ciclos ajenos en aristas.

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica y P un paseo cerrado en G . Sea $S(P)$ el conjunto de vértices repetidos en P . La demostración se hará por inducción sobre $S(P)$.

Si $|S(P)|=1$ entonces $S(P)=\{u_0\}$, donde u_0 es el vértice inicial y final de $S(P)$ y por

definición es un ciclo. Con el propósito de mostrar el proceso inductivo que se utilizará en la demostración consideremos el caso $|S(P)|=2$. Sea $P=v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n=v_0$ un paseo cerrado tal que: $|S(P)|=2$ $v_0=v_n$ y $v_i=v_j$ $0 < i < j < n$, entonces:

$$C_1 = v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n = v_0,$$

y

$$C_2 = u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_i = u_j$$

son dos ciclos ajenos en aristas, cuya unión es P (figura 0.15).

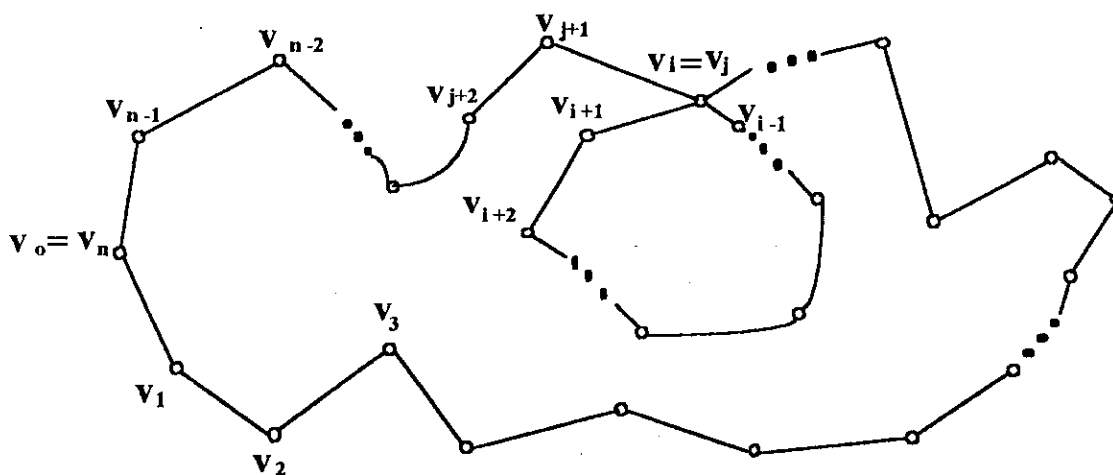


FIGURA 0.15

Supongamos que todo paseo cerrado con $|S(P)| \leq k$ es la unión de ciclos ajenos en aristas y sea $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v_0$, un paseo cerrado con $|S(P)| = k$ e i, j tales que para $0 < i < j < n$, $v_i = v_j$, demostraremos que P es la unión de ciclos ajenos en aristas, lo que se logra tomando::

$$P_1 = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_i = v_j, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n = v_0\},$$

y

$$P_2 = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j\}$$

dos paseos cerrados cuya unión es P, con $|S(P_1)| \leq k$ y $|S(P_2)| \leq k$ y, ya que por hipótesis de inducción son la unión de ciclos ajenos en aristas, tenemos como consecuencia $P_1 \cup P_2 = P$ también lo es, con lo que se concluye el teorema.

TEOREMA 0.8 Una gráfica G es bipartita si y solo si todos los ciclos son de longitud par.

DEMOSTRACION: Para iniciar la demostración, primero consideremos G bipartita y demostremos que todos sus ciclos son de longitud par. Supongamos que G contiene al menos un ciclo, ya que en otro caso el teorema se cumple trivialmente. Sea G bipartita y $\{V_1, V_2\}$ una bipartición de $V(G)$. Sea $C = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k = u_0\}$ un ciclo de G de longitud k . Como $\{V_1, V_2\}$ es una bipartición de $V(G)$, tenemos que: Si $u_0 \in V_1$ entonces $u_1 \in V_2$, luego $u_2 \in V_1$, $u_3 \in V_2, \dots$, así:

$$u_i \in \begin{cases} V_1 & \text{si } i \text{ es par} \\ V_2 & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases} \quad (1)$$

luego, si $u_0 \in V_2$, entonces $u_1 \in V_1$, luego $u_2 \in V_2, \dots$, así:

$$u_j \in \begin{cases} V_1 & \text{si } j \text{ es impar} \\ V_2 & \text{si } j \text{ es par} \end{cases} \quad (2)$$

Por lo tanto si $u_0 \in V_1$, k es par pues $u_0 = u_k \in V_1$ por (1), luego si $u_0 \in V_2$, k es par por (2) y por lo tanto concluimos que todos los ciclos son de longitud par.

Ahora supongamos que todos los ciclos son de longitud par, y demostremos que G es bipartita. Supongamos que G es conexa, en caso contrario la demostración se aplica a cada componente y además que $|V(G)| > 1$. Sea $u \in V(G)$, definimos:

$$U_0 = \{v \in V(G) \mid d(u, v) \text{ es par}\},$$

y

$$U_1 = \{v \in V(G) \mid d(u, v) \text{ es impar}\}$$

Demostremos que $\{U_0, U_1\}$ es una bipartición de $V(G)$. Claramente: $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ y $U_0 \cup U_1 = V(G)$, falta por demostrar que $\forall v, w \in U_i$ v no $\text{ady}_{U_i} w$, $i=0,1$. Se procederá por contradicción. Sean v y $w \in U_0$ y supongamos que $v \text{ ady}_{U_0} w$ y sean T_1 y T_2 uv y uw -trayectorias mínimas en G respectivamente. Sean x_k el último vértice que T_1 y T_2 tienen en común, de forma que las secciones ux_k de T_1 y la sección ux_k de T_2 tienen la misma longitud, pues T_1 y T_2 son trayectorias mínimas en G . Luego puesto que la longitud de T_1 y T_2 es par, pues consideramos u y v en U_0 , se tiene que las secciones x_kv de T_1 y x_kv de T_2 tienen la misma paridad

esto es, si v y $w \in U_0$ como lo supusimos, entonces por definición $d(u,v)$ y $d(u,w)$ es par, de donde:

$$d(u,v) = d(u, x_k) + d(x_k, v),$$

y,

$$d(u,w) = d(u, x) + d(x, w),$$

lo que implica que $d(x_k, v)$ y $d(x_k, w)$ son ambas de longitud par, así que la sección $x_k v$ unido a la sección $x_k w$ más la arista vw forman un ciclo impar, lo cual contradice las hipótesis, y por lo tanto podemos concluir que v y w no pueden ser adyacentes. Similarmente, se demuestra que dos vértices de U_1 no pueden ser adyacentes y así concluimos que G es bipartita.

(Figura 0.16).

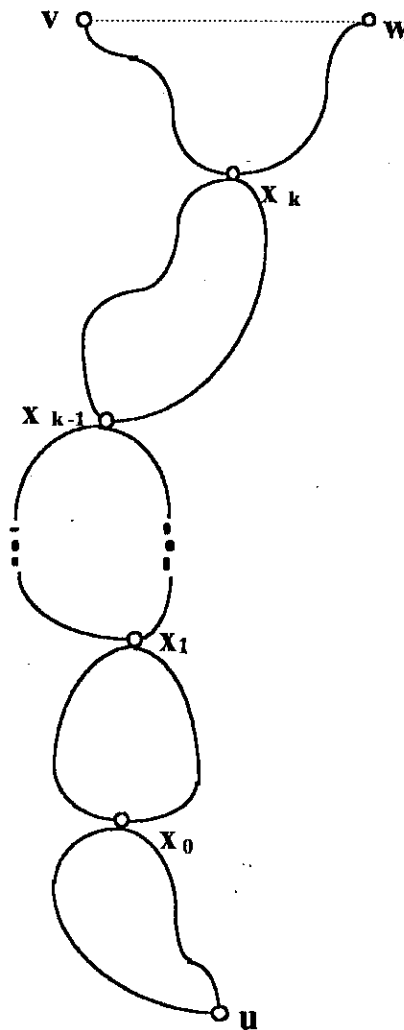


FIGURA 0.16

CAPITULO UNO

BLOQUES, ARBOLES Y CONEXIDAD

El número de componentes conexas de una gráfica G , es un parámetro de ésta que puede modificarse al eliminarle un vértice o una arista. No todos los vértices o aristas tienen la particularidad de que al ser eliminados logren alterar dicho parámetro. El inicio de éste capítulo, establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de vértices, o aristas cuya eliminación altera el número de componentes conexas de la gráfica, asimismo se establece un intervalo para tal parámetro; además se dan ejemplos de gráficas donde la conexidad permanece invariante ante la remoción de cualquier vértice o arista.

Otro de los objetivos de este capítulo es el estudio de una de las clases más útiles de las gráficas: LOS ARBOLES, cuya particularidad estriba en el hecho de que son mínimas con respecto a la propiedad de ser conexas. Demostramos la fórmula de Cayley.

Finalmente se concluye el capítulo, planteando el eliminar no unicamente un vértice o una arista de la gráfica, sino el eliminarle un conjunto de vértices o un conjunto de aristas, de tal forma que la conexidad de la gráfica sea alterada. Un resultado que sobresale de manera especial lo es El Teorema de Menger, pues es uno de los resultados más importantes de la Teoría de Gráficas.

DEFINICION: Dada una gráfica G , un vértice v es de corte si $c(G-v) > c(G)$.

EJEMPLO En la gráfica, de la figura 1.1, se tiene que v es un vértice de corte, pues $c(G)=1$, mientras que $c(G-v)=2$.

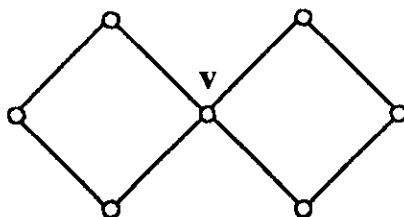


FIGURA 1.1

OBSERVACION: Obviamente, si G es conexa, un vértice v es de corte, si y solo si $G-v$ no es conexa.

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para que un vértice v sea de corte.

TEOREMA 1.1 Sea G una gráfica conexa. Un vértice v es de corte, si y solo si existen dos subconjuntos U y W de $V(G)$ con $v \notin U \cup W$, tales que v está contenido en toda trayectoria que una a un vértice de U con uno de W .

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica conexa y sea v un vértice de corte, entonces $G-v$ no es conexa y tiene al menos dos componentes. Sean $H_1, H_2, H_3, \dots, H_j$, las componentes de $G-v$ y $U = V(H_1)$ y $W = V(H_2) \cup V(H_3) \cup \dots \cup V(H_j)$. Si tomamos $u \in U$ y $w \in W$, estos son vértices de componentes distintas de U y W , por lo que no existe una uw -trayectoria, que en caso de existir tendría que pasar por v necesariamente (Figura 1.2).

Por otro lado, si G es conexa y U y W subconjuntos de $V(G)$ como los de la hipótesis, entonces $G-v$ no puede ser conexa puesto que toda uv -trayectoria contiene a v , por lo tanto v es un vértice de corte.

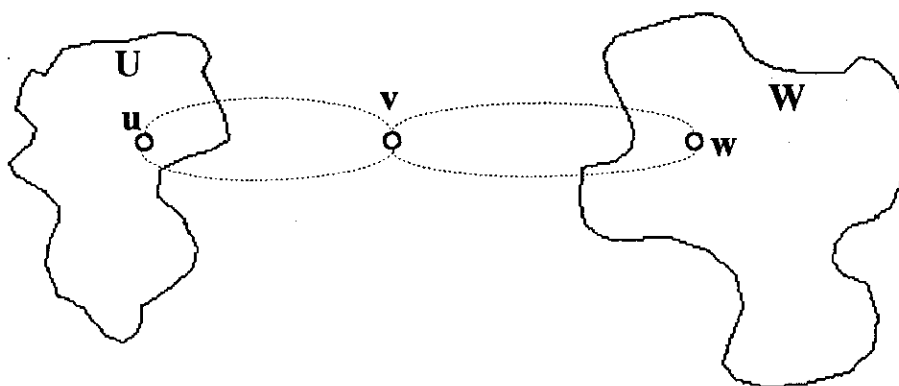


FIGURA 1.2

Del resultado anterior, podemos desprender el corolario siguiente:

COROLARIO 1.1 Toda gráfica G con $|v(G)| > 2$ tiene al menos dos vértices que no son de corte.

DEMOSTRACION: Se analizará solo el caso en que G sea conexa, de no serlo el resultado se aplica a cada una de sus componentes conexas. Sean u y $v \in V(G)$ tales que la distancia entre ellos es máxima. Demostraremos que u y v no son vértices de corte, para lo cual se procederá por contradicción. Supongamos que $G - u$ es desconexa, entonces existen $U, W \subseteq V(G)$ tales que u está contenido en toda trayectoria que una a un vértice de U con uno de W , de donde se tienen dos posibilidades para v : $v \in U$ ó $v \in W$, si $v \in U$, consideremos $w \in W$. Ya que u está contenido en toda wv -trayectoria, tenemos que:

$$d(w, v) = d(w, u) + d(u, v)$$

luego, puesto que $d(w, u) \geq 1$, se tiene que:

$$d(w, v) \geq d(u, v) + 1,$$

lo cual contradice las hipótesis.

Lo mismo sucede si $v \in W$, esto implica que u no es de corte. Análogamente se puede demostrar que v no es de corte y así se concluye el teorema.

De manera similar puede plantearse la definición de arista de corte.

DEFINICION: Dada una gráfica G y $a \in A(G)$, se dice que a es una arista de corte o un puente de G , si y sólo si $c(G-a) > c(G)$.

EJEMPLO: En la gráfica de la figura 1.3 a es un puente.

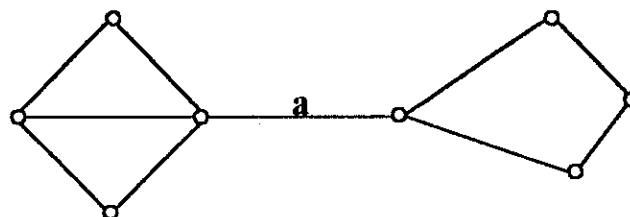


FIGURA 1.3

El siguiente teorema nos proporciona una manera de identificar las aristas de corte:

TEOREMA 1.2 Sea G una gráfica conexa. Una arista a es un puente de G si y solo si a no pertenece a ningún ciclo de G .

DEMOSTRACION: Sea a un puente de G , demostremos que a no pertenece a ningún ciclo de G . Puesto que $c(G-a) > c(G)$, existen vértices u y v en $V(G)$ que están conectados en G , pero no están en $G-a$. Entonces existe una uv -trayectoria en G a la que llamaremos P , que necesariamente contiene a a . Supongamos que $a = xy$ y que x precede a y en P . En $G-a$, u está conectado a x por una sección de P , y otra sección de la misma trayectoria conecta a y y v . Si a estuviera en algún ciclo C de G , x y y estarían conectados en $G-a$ por la trayectoria $C-a$. La unión de la sección de P que une a x y a u con la trayectoria $C-a$ y con la sección de P que conecta a y con v , conecta a u y a v en $G-a$, lo cual es una contradicción, (Figura 1.4), ya que por hipótesis a es un puente.

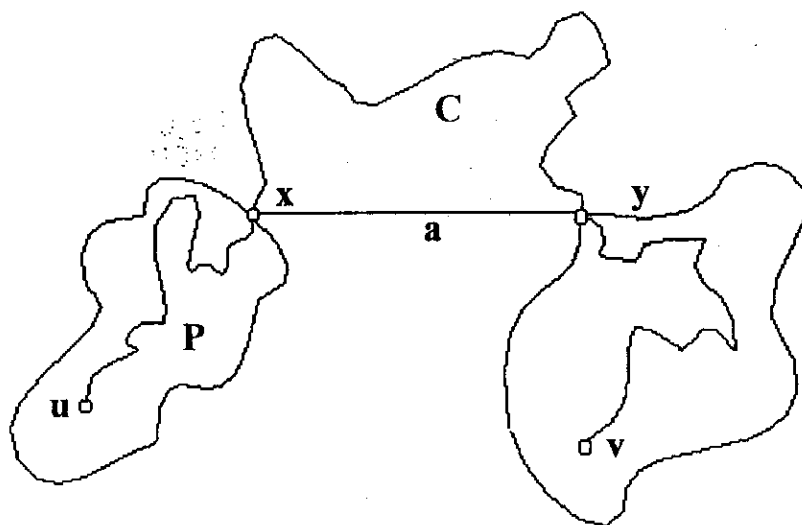


FIGURA 1.4

Supongamos ahora, que $a = xy$ es una arista de G que no está en ningún ciclo de G y que a no es un puente, esto quiere decir que $G-a$ es conexa y por lo tanto existe una xy -trayectoria P . La unión de a y P produce un ciclo que contiene a a y esto contradice las hipótesis, concluyendo así el teorema.

La existencia de una arista de corte implica la existencia de un vértice de corte, esto se demuestra a continuación.

TEOREMA 1.3 Si una gráfica conexa G con $|V(G)| > 2$, tiene una arista de corte, entonces G tiene también un vértice de corte.

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica conexa con $|V(G)| > 2$ y $a \in A(G)$ un puente con extremos en u y v . $G-a$ no es conexa y tiene al menos dos componentes conexas H_1 y H_2 tales que $u \in H_1$ y $v \in H_2$, como G es conexa y tiene al menos 3 vértices, entonces existe $w \in V(G-a)$, $w \neq u$, $w \neq v$. Si $w \in V(H_1)$, entonces en $G-u$ no existen wv -trayectorias. Análogamente, si $w \in V(H_2)$, entonces en $G-v$ no hay wu -trayectorias, con lo cual concluimos que $G-u$ es desconexa o $G-v$ es desconexa, esto es u o v son vértices de corte. (Figura 1.5).

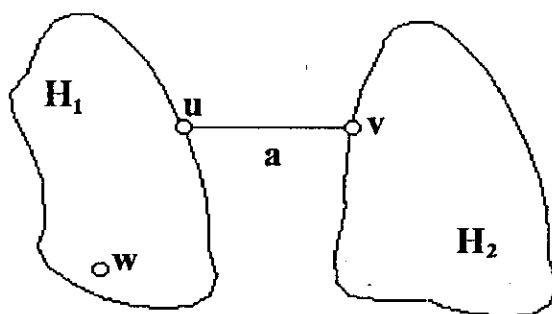


FIGURA 1.5

La eliminación de una arista o un vértice de corte altera el número de componentes conexas de una gráfica, sin embargo existen cotas para este número, lo cual se demuestra en el siguiente resultado.

TEOREMA 1.4 Sea G una gráfica conexa con $|V(G)| > 1$ y sean $v \in V(G)$ y $a \in A(G)$, entonces:

$$1 \leq c(G-v) \leq gr_G(v), \text{ y}$$

$$1 \leq c(G-a) \leq 2.$$

DEMOSTRACION: Obviamente se cumple $1 \leq c(G-v)$ y $1 \leq c(G-a)$. Como G es conexa, cada componente de $G-v$ contiene al menos uno de los vértices adyacentes a v en G , por lo tanto $c(G-v) \leq gr_G(v)$. De igual forma, cada componente de $G-a$ contiene por lo menos a uno de los extremos de a , por lo que $c(G-a) \leq 2$, concluyendo así el teorema.

Una observación importante es señalar que no todas las gráficas poseen vértices o aristas de corte, por ejemplo los ciclos no tienen ni aristas de corte ni vértices de corte. El teorema 1.2

señala que tipo de gráficas poseen puentes y , con la otra característica las agrupamos en la siguiente definición.

DEFINICION: Un BLOQUE es una gráfica conexa sin vértices de corte. Los BLOQUES DE UNA GRAFICA G son las subgráficas máximas de G , con la propiedad de ser bloques.

La figura 1.6 , presenta una gráfica G y sus bloques.

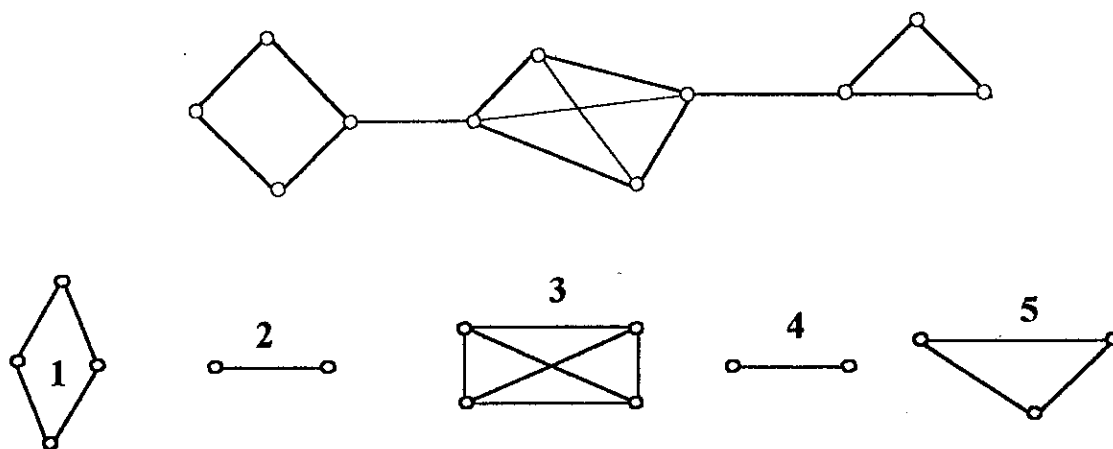


FIGURA 1.6

El siguiente teorema, presenta algunas condiciones equivalentes a estos.

TEOREMA 1.5 Sea G una gráfica conexa con $|V(G)| > 2$, las siguientes proposiciones son equivalentes.

- 1) G es un BLOQUE.
- 2) Cada par de vértices de G está en un ciclo común.
- 3) Dados un vértice y una arista de G , existe un ciclo que contiene a ambos.
- 4) Cada par de aristas de G están en un ciclo común.

DEMOSTRACION: Para probar esta equivalencia, procederemos demostrando que cada proposición implica la siguiente. Iniciamos demostrando que si G está en un bloque

entonces cada par de vértices de G está en un ciclo común, para lo cual se seguirá un proceso inductivo sobre la distancia entre dos vértices de G .

Consideremos $u, v \in V(G)$ con $d(u, v) = 1$ y $a = uv$. G es un bloque y además $|V(G)| > 2$, por el teorema 1.3, a no es un puente de G y por lo tanto a está en algún ciclo de G y en consecuencia u y v también lo están.

Supongamos que todo par de vértices cuya distancia sea menor que k , están en un ciclo común. Sean $u, v, w \in V(G)$, tomados de forma que $d(u, w) = k-1$ y $v \text{ ady}_G w$. Por hipótesis de inducción u y w están en un ciclo común. Llamemos T_0 y T_1 a las dos uw -trayectorias que forman este ciclo, (Figura 1.7). Como G es un bloque w no es un vértice de corte y por tanto existe una uv -trayectoria que no lo contiene, a la que llamaremos T_2 . T_2 puede intersectar a T_i , ($i=0$ ó 1) o no hacerlo. Consideremos los dos casos:

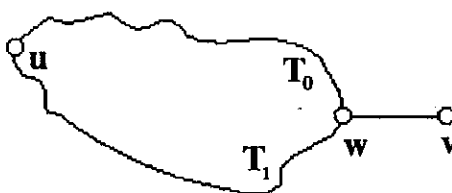


FIGURA 1.7

1) Si T_2 no intersecta a T_i ($i=0$ ó 1), entonces $T_2 \cup \{wv\} \cup T_i$ es un ciclo que contiene a u y a v , y como $d(u, v) = k$, el teorema es válido, (Figura 1.8).

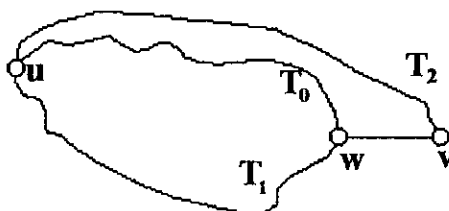


FIGURA 1.8

2) Si T_2 intersecta a T_0 o a T_1 o a ambas, llamemos w_0 al último vértice de T_2 que está en T_0 o en T_1 , $w_0 \notin V(T_0) \cap V(T_1)$ puesto que $T_0 \cap T_1 = \{u, w\}$. Supongamos que $w_0 \in V(T_0)$. Si

$$T_0 = u, u_1, u_2, \dots, w_0, \dots, w$$

$$T_1 = u, w_1, w_2, \dots, w$$

$$T_2 = u, v_1, v_2, \dots, v_k, w_0, v_{k+1}, \dots, v;$$

La siguiente construcción muestra las dos uv-trayectorias ajenas :

$$T_3 = u, u_1, u_2, \dots, w_0, v_{k+1}, \dots, v$$

$$T_4 = T_1 \cup \{wv\}$$

cuya unión da por resultado un ciclo C que contiene a u y a v (Figura 1.9)

$$C = u, u_1, u_2, \dots, w_0, v_{k+1}, \dots, v, w, \dots, w_2, w_1, u.$$

y ya que $d(u,v)=k$, concluimos que para todo $u,v \in V(G)$ u y v están en un ciclo común, concluyendo así esta primera implicación.

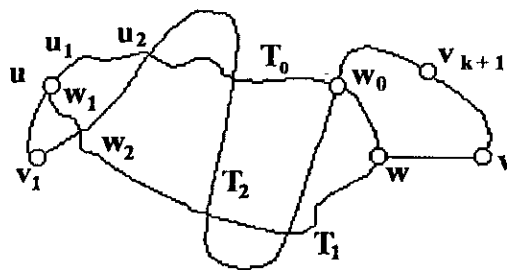


FIGURA 1.9

2) implica 3), esto es, supongamos que cada par de vértices están en un ciclo común y demostremos que dado un vértice y una arista de G, existe un ciclo que contiene a ambos.

Sean $u \in V(G)$ y $a \in A(G)$, $a = wv$. Por hipótesis existe un ciclo C que contiene a u y a w, así que existen dos posibilidades para v : $v \in V(C)$ o $v \notin V(C)$.

Si $v \in V(C)$, se obtiene un ciclo C_0 que contiene al vértice v y a la arista a de la siguiente manera: Si

$$C = u, u_1, \dots, w, w_1, \dots, v, v_1, \dots, u$$

entonces

$$C = u, u_1, \dots, w, v, v_1, \dots, u.$$

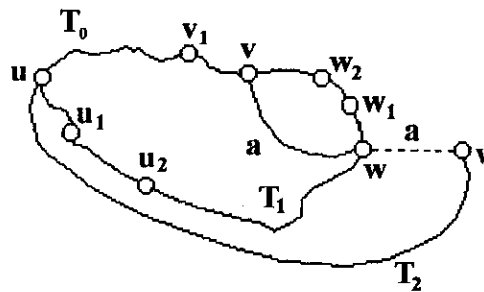


FIGURA 1.10

Si $v \notin V(C)$, se tiene una situación similar a la anterior, pues por hipótesis G es conexa, así que existe una uv -trayectoria T , de donde el ciclo buscado en este caso es:

$$C_1 = \{u, u_1, u_2, \dots, w, v\} \cup T$$

3) implica 4) En este caso, supongamos que si dados un vértice v y una arista a en G existe un ciclo que contiene a ambos, entonces cada par de arista a y b de G están en un ciclo común.

Sean a y b aristas de G y sean w y v los extremos de b , por hipótesis existe un ciclo C que contiene a la arista a y al vértice w , en cuanto a v se tienen dos posibilidades:

Si $v \in V(C)$, entonces se tiene el ciclo buscado, trivialmente.

Si $v \notin V(C)$, entonces consideremos $a=xy$ y

$$C = \{x, y, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, w, w_1, w_2, \dots, x\}$$

el ciclo buscado se obtiene considerando que G es una gráfica conexa, así se tiene una xv -trayectoria T de donde:

$$C' = \{x, y, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, w, v\} \cup T$$

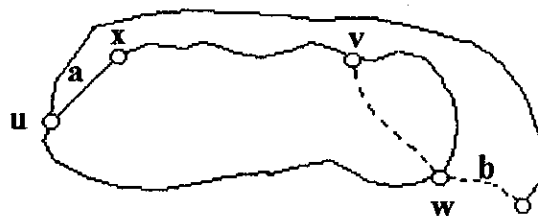


FIGURA 1.11

4) implica 1) Demostraremos que si cada par de aristas de G están en un ciclo común, entonces G es un bloque, para lo cual procederemos por contradicción.

Supongamos que cada par de aristas está en un ciclo común y que G no es un bloque, esto implica que existe al menos un vértice $u \in V(G)$ tal que $G-u$ es desconexa. Sean v y w vértices de componentes distintas de $G-u$ y consideremos dos aristas a y b de modo que a incida en v y b en w , por hipótesis existen 2 vw -trayectorias ajenas que forman un ciclo que contiene a a y a b , ya que u es de corte, debe estar contenido en toda trayectoria que una dos vértices de componentes conexas distintas de $G-u$, lo cual es imposible pues tales trayectorias son ajenas en todo vértice distinto de v y w , por tanto v y w no están en componentes distintas y en consecuencia u no es de corte, esto es G es un bloque.

(figura 1.12).

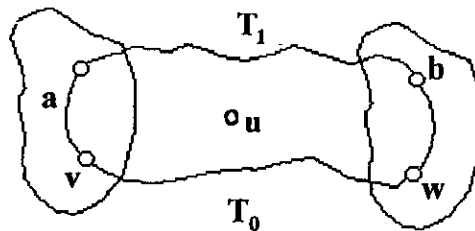


FIGURA 1.12

Las proposiciones 2) y 4) del teorema que hemos probado son un caso particular del Teorema de Menger, el cual presentaremos al final del capítulo.

Como lo mencionamos anteriormente, los árboles constituyen una de las clases mas útiles de las gráficas. Intuitivamente, un árbol es una gráfica que en su trazo se asemeja a un árbol con su ramificación hacia abajo, formalmente su definición es:

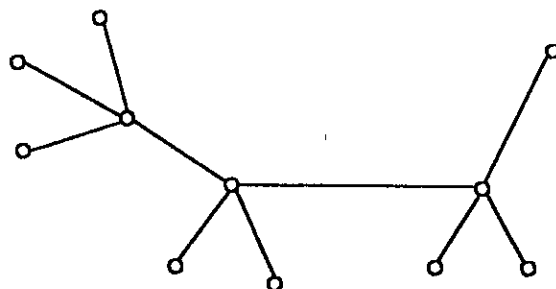
DEFINICION: Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos no triviales.

A partir de la definición anterior, podemos obtener la siguiente caracterización de los árboles, de igual forma se establecerán otras posteriormente.

TEOREMA 1.6 Una gráfica conexa G es un árbol, si y solo si toda arista de G es un puente.

DEMOSTRACION: Sea G un árbol y sea $a \in A(G)$. Obviamente a no puede estar en ningún ciclo de G y por el teorema 1.6, a es un puente de G . Por otro lado, si G es conexa y toda arista $a \in A(G)$ es un puente, lo cual significa que ninguna arista de G está en un ciclo, esto es G es acíclica y por definición un árbol.

La figura 1.13, muestra un árbol.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

FIGURA 1.13

Eliminando la condición de conexidad tenemos:

DEFINICION: Un bosque es una gráfica acíclica cuyas componentes conexas son árboles.

Los vértices y las aristas de un árbol T , guardan la relación que se probará en el siguiente:

TEOREMA 1.7 Sea G un árbol, denotemos por $|V(G)|=p$ y $|A(G)|=q$, entonces:
 $q=p-1$.

DEMOSTRACION: Se hará por inducción sobre el número de vértices de G . Si $p=1$, $G=K_1$ y entonces $q=0=p-1$. Supongamos que el resultado es válido para todos los árboles con menos de p vértices y sea G un árbol con p vértices y $a \in A(G)$. Por definición G no tiene ciclos y como consecuencia del Teorema 1.6 a es un puente, por tanto $G-a$ es disconexa y por el Teorema 1.6 G tiene dos componentes exactamente que por definición son acíclicas y conexas, esto es árboles con menos de p vértices cada una. Llamemos G_1 y G_2 a estas componentes y, sean:

$$p_1 = |V(G_1)| \text{ y } p_2 = |V(G_2)|, \text{ } q_1 = |A(G_1)| \text{ y } q_2 = |A(G_2)|,$$

por hipótesis de inducción, sabemos que:

$$q_1 = p_1 - 1 \text{ y } q_2 = p_2 - 1,$$

luego $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ entonces, $p = p_1 + p_2$

y $A(G) = A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{a\}$, por lo tanto:

$$A(G) = q_1 = q_1 + q_2 + 1 = p_1 - 1 + p_2 - 1 + 1 = p_1 + p_2 - 1 = p - 1, \text{ concluyendo así el teorema.}$$

Otra de las características de los árboles, es que toda pareja de vértices está unido por una única trayectoria, lo cual demostramos en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.8 Una gráfica G es un árbol, si y solo si para cualquiera u y $v \in |V(G)|$, existe una única uv -trayectoria.

DEMOSTRACION: Demostraremos primero, que si G es un árbol, entonces para cualquier $u, v \in V(G)$, existe una única uv -trayectoria. Se hará por contradicción. Sea T_1 una uv -trayectoria y supongamos que no es única, esto es existe T_2 una uv -trayectoria distinta de T_1 .

1) Si $T_1 \cap T_2 = \{u, v\}$, entonces $T_1 \cup T_2$ es un ciclo, (Figura 1.14).

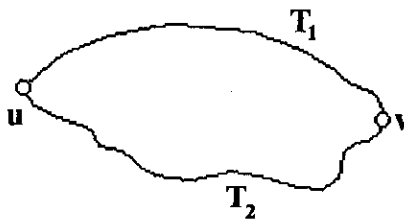


FIGURA 1.14

2) Si T_1 y T_2 no son ajenas, sea w el primer vértice donde se intersectan ($w \neq u, v$).

Sean :

$$T_1 = u, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, w, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, v ;$$

$$T_2 = u, v_1, v_2, v_3, \dots, v_j, w, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n, v$$

y tomemos:

$$C = u, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, w, v_j, v_{j-1}, \dots, v_2, v_1, u$$

un ciclo en G , contradiciendo de nuevo las hipótesis, (Figura 1.15).

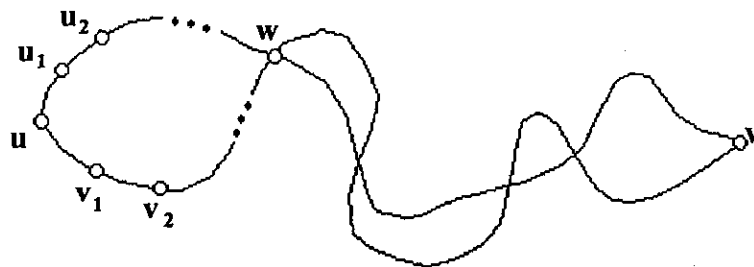


FIGURA 1.15

Por otro lado, si entre cada par de vértices u, v de $V(G)$ existe una única trayectoria, G es conexa y no tiene ciclos, pues en caso de existir se tendría:

$$C = u, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u \text{ y}$$

$$T_1 = u, u_1, u_2, u_3, \dots, u_r \text{ y}$$

$$T_2 = u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u;$$

serían dos trayectorias distintas de u a u_r , lo que contradice nuestra hipótesis, (Figura 1.16).

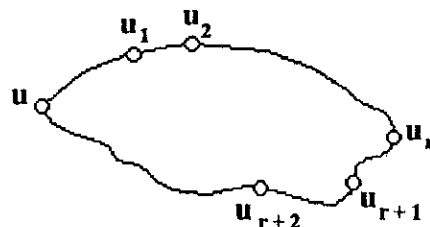


FIGURA 1.16

Una característica común de los árboles es la existencia de al menos dos vértices de grado uno, denominados vértices terminales (exceptuando el caso del árbol trivial), esto se prueba en el teorema siguiente.

TEOREMA 1.9 Todo árbol no trivial tiene al menos dos vértices terminales.

DEMOSTRACION: Sea G un árbol y T una trayectoria de longitud máxima en G .

$T = v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$; $l(T) = m-1$. Demostremos que v_1 y v_m tienen grado uno. Lo haremos por contradicción. Supongamos que v_1 y v_m no son de grado uno, por lo que $gr_G(v_1) > 1$ y $gr_G(v_m) > 1$, lo que significa que existe un vértice $v_{m+1} \neq v_2$ tal que v_1 ady_G v_{m+1} . Si $v_{m+1} \in v(T)$, por ser G conexa existe una $v_i v_{m+1}$ -trayectoria para cualquier vértice $v_i \in v(T)$, $i=1,2,3,\dots,m$. Llamemos T_1 a tal trayectoria y consideremos

$$C = \{v_1, \dots, v_i\} \cup T_1 \cup \{v_1 v_{m+1}\}$$

un ciclo en G , que contradice la hipótesis. Por otro lado, si $v \notin V(T)$ se tendría:

$$T_0 = \{v_{m+1}\} \cup T,$$

una trayectoria de longitud m y contradice la elección de T , por tanto se concluye que $gr_G(v_1)=1$. (Figura 1.17). Análogamente se demuestra que v tiene también grado uno, con lo que se concluye el teorema.

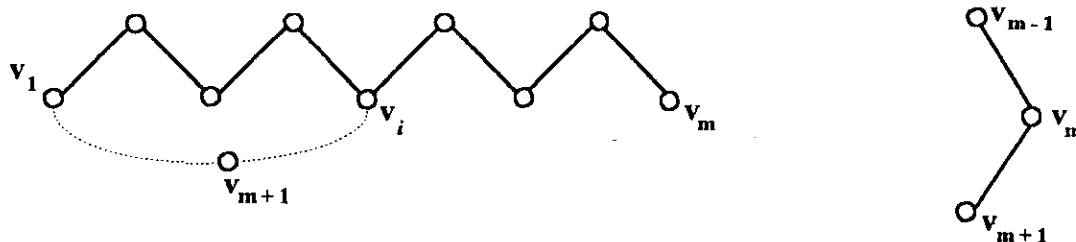


FIGURA 1.17

Dada una gráfica G , un problema importante es de hallar una subgráfica G' , de modo que G' sea un árbol que contenga todos los vértices de G .

DEFINICION: Decimos que T es un **ARBOL GENERADOR** de una gráfica G , si T es una subgráfica de G tal que T es un árbol con $V(T) = V(G)$ y $A(T) \subseteq A(G)$.

La figura 1.18, muestra un árbol generador, (el señalado con líneas gruesas), para una gráfica conexa G .

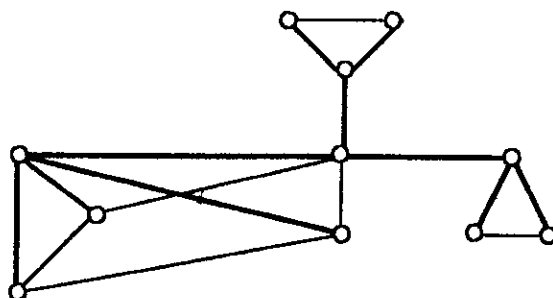


FIGURA 1.18

Un resultado importante lo constituye el siguiente teorema, pues garantiza que en una gráfica conexa, siempre es posible hallar una subgráfica mínima que conecte todos sus vértices.

TEOREMA 1.10 Toda gráfica conexa G tiene un árbol generador.

DEMOSTRACION: Se hará por inducción sobre el número de ciclos de G .

Si G es una gráfica conexa sin ciclos, el resultado se obtiene trivialmente. Sea G una gráfica conexa con un ciclo al que llamaremos γ y sea $a \in A(\gamma)$, entonces $G-a$ es acíclica y conexa, además $V(G-a)=V(G)$ y $A(G-a) \subseteq A(G)$, por tanto $G-a$ es un árbol generador de G . Supongamos que toda gráfica conexa con menos de n ciclos contiene un árbol generador. Sea G una gráfica con n ciclos a los que llamaremos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ y sea $a \in \gamma_n$, $G-a$ tiene $n-1$ ciclos y por hipótesis de inducción tiene un árbol generador T con $V(T)=V(G-a)=V(G)$ y $A(T) \subseteq A(G-a) \subseteq A(G)$, esto es T es un árbol generador de G .

El teorema anterior garantiza la existencia de un árbol generador bajo la condición de conexidad de la gráfica. Un problema importante es precisamente determinar el número de árboles generadores de una gráfica G . Una expresión que nos permite hallar el número de árboles generadores de una gráfica se dará después de presentar la siguiente definición.

DEFINICION: Una $a \in A(G)$, se dice contractible, si es eliminada y sus extremos son unificados.

Denotaremos $G \bullet a$ la gráfica resultante de contraer la arista a .

Obviamente $V(G \bullet a) = V(G)-1$, $A(G \bullet a) = A(G)-1$ y $c(G \bullet a) = c(G)$, así que si T es un árbol $T \bullet a$ también lo es.

Denotaremos por $\tau(G)$ el número de árboles generadores de G .

TEOREMA 1.11 Si a es una arista de G , entonces:

$$\tau(G) = \tau(G-a) + \tau(G \bullet a)$$



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

DEMOSTRACION: Sea $a \in A(G)$ y sea T un árbol generador de G tal que $a \notin T$, entonces T es también un árbol generador de $G-a$, así que $\tau(G-a)$ es el número de árboles generadores de G que no contienen a la arista a . Luego, por el Teorema 1.10 para cada arista a

Si $a \in A(G)$ existe $T \bullet a$ un árbol generador de $G \bullet a$, entonces para cada árbol generador T de G que contiene a la arista a , le asociamos el árbol generador $T \bullet a$, de donde :

$$\tau(G) = \tau(G-a) + \tau(G \bullet a).$$

La figura 1.19, muestra el cálculo de $\tau(G)$ por medio del teorema anterior.

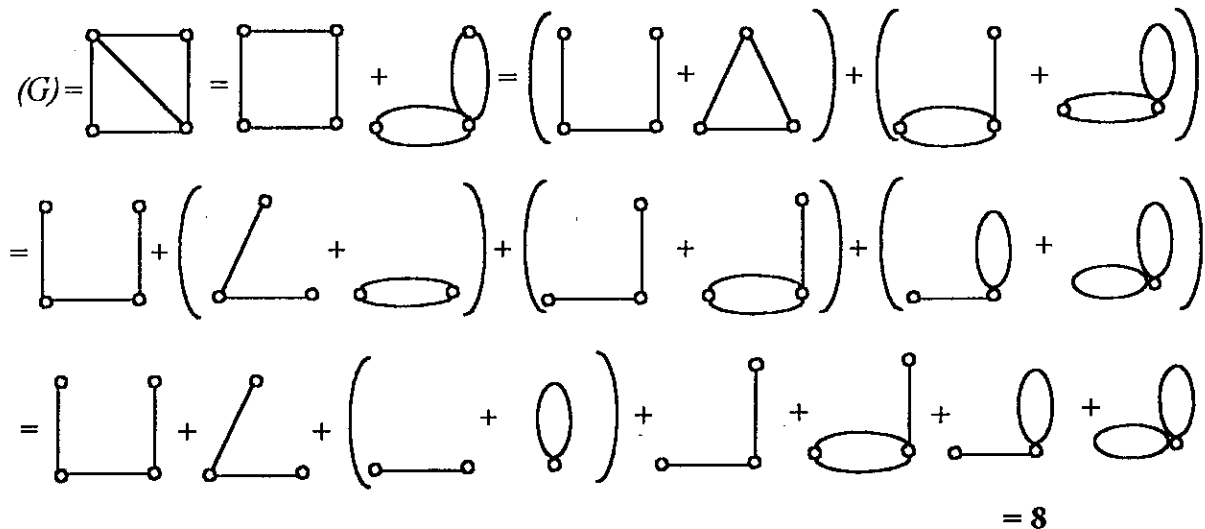


FIGURA 1.19

Observemos que este método no es muy apropiado, para estudiar un procedimiento más conveniente puede consultarse [2], pps. 218.

Presentamos una expresión que permite hallar el número de árboles generadores de una gráfica completa y esta dada en el siguiente teorema, a la cual se le conoce como la fórmula de Cayley.

TEOREMA 1.12 $\tau(K_n) = n^{n-2}$

DEMOSTRACION: Sea $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ el conjunto de vértices de K_n , entonces n^{n-2} es el número de sucesiones de longitud $n-2$ que pueden formarse de N . Para probar el teorema es suficiente establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de árboles generadores de K_n y el conjunto de tales sucesiones. Supondremos que $n > 2$, pues en caso contrario el resultado

es inmediato. Primero a cada árbol generador T de K_n asociamos una única sucesión $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$ de la siguiente manera:

Consideremos N como un conjunto ordenado, entonces sea v_1 el primer vértice de grado uno en T , el vértice adyacente a v_1 se toma como t_1 y eliminamos v_1 de T ; luego sea v_2 el primer vértice de grado uno de $T - \{v_1\}$ y tomamos el vértice adyacente a v_2 como t_2 y de nuevo eliminamos v_2 de T , consideramos ahora v_3 el primer vértice de grado uno en $T - \{v_1, v_2\}$ y repetimos el procedimiento para obtener t_3 . Este proceso se continúa hasta obtener t_{n-2} y por lo tanto sólo queda un árbol con dos vértices.

Por otro lado, sea $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$ una sucesión de N y obtengamos T a partir de esta. Notemos primero que cada vértice v_i de T aparece $\text{gr}_T(v_i) - 1$ veces en $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$, así que los vértices de grado uno son precisamente aquellos que no aparecen en esta sucesión. Entonces para obtener T a partir de $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$ procedemos de la siguiente manera: Sea v_1 el primer vértice de N que no aparece en $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$, entonces unimos v_1 a t_1 , luego sea v_2 el primer vértice de $N - \{v_1\}$ que no aparece en $(t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$ entonces unimos v_2 a t_2 y continuamos este proceso hasta que se hayan determinado las $n-2$ aristas de T :

$$v_1 t_1, v_2 t_2, v_3 t_3, \dots, v_{n-2} t_{n-2}$$

finalmente la última arista de T se obtiene uniendo los dos vértices restantes de:

$$N - \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-2}\}.$$

Una de las propiedades más interesantes que puede poseer una gráfica es la conexidad. Sin embargo, no es posible manejar siempre gráficas conexas, incluso dada una gráfica conexa se puede pensar en eliminarle un conjunto de vértices o aristas y verificar si la gráfica resultante sigue siendo conexa o no, esto es analizar que tan "débil" o "fuerte" es la conexidad de dicha gráfica.

En el inicio de este capítulo, estudiamos dos formas de desconectar una gráfica: eliminando un vértice o bien eliminarle una arista, extendamos ahora esta idea a un conjunto de vértices o bien a un conjunto de aristas. Los conceptos estan dados a continuación.

DEFINICION: Sea G una gráfica **CONEXA**. Un **CORTE** de G , es un subconjunto $\tilde{V}$ de los vértices de G tal que $G - \tilde{V}$ es desconexa. Si G es **DISCONEXA** diremos que $\tilde{V}$ es un corte de G si y solo si $c(G - \tilde{V}) > c(G)$. $\tilde{V}$ es un k -corte si V es un conjunto con k elementos que es un corte.

Un corte $\tilde{V}$, tiene un determinado número de elementos que depende de las características de la gráfica misma, esto origina la siguiente:

DEFINICION: La conexidad puntual de una gráfica conexa G , con $|V(G)| > 2$ es k , si el mínimo número de vértices para el cual G tiene un corte es k . Se denota $K(G)$.

Como ejemplo tenemos que:

- i) Para la gráfica completa K_n , $K(K_n) = n - 1$.
- ii) Para cualquier ciclo no trivial C , $K(C) = 2$.
- iii) Para cualquier árbol T , con $p > 1$, $K(T) = 1$.

Es importante señalar que el ejemplo anterior no afirma que la remoción de cualquier conjunto $\tilde{V}$ con $|V(G)| = k$ desconecta a G , lo que asegura es la existencia de al menos un conjunto de esa naturaleza.

DEFINICION: Una gráfica es k -conexa si y solo si $K(G) \geq k$. Obviamente, todas las gráficas conexas no triviales son 1-conexas.

Ahora consideremos el caso de eliminar aristas. Los conceptos se definen de manera análoga.

DEFINICION: Un corte lineal de una gráfica conexa G , es un subconjunto $\tilde{A}$ de $A(G)$ tal que $G - \tilde{A}$ es desconexa. Un k -corte lineal es un corte lineal con k elementos.

DEFINICION: La conexidad lineal de una gráfica conexa G , denotada $\lambda(G)$, es el mínimo número k para el cual G tiene un corte lineal. y si $\lambda(G) \geq k$, decimos que G es k -conexa linealmente.

Como ejemplos notemos que:

- i) Si G es conexa y tiene un puente, entonces $\lambda(G) = 1$, por ejemplo los árboles.
- ii) Todas las gráficas conexas no triviales son 1-conexas linealmente.

La relación entre la conexidad puntual y la conexidad lineal se establece en el siguiente teorema

TEOREMA 1.13 Sea G una gráfica conexa, entonces: $K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

DEMOSTRACION

- i) Si G es la gráfica trivial, entonces $K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 0$.
- ii) En otro caso, sea $z_0 \in V(G)$ tal que $gr_G(z_0) = \delta(G)$ y sea $\tilde{A} = \{a \in A(G) \text{ tal que } a \text{ incide en } z_0\}$. Obviamente $\tilde{A}$ es un corte lineal y por definición se tiene que:

$$\lambda(G) \leq |\tilde{A}| = gr_G(z_0) = \delta(G), \text{ así que}$$

$$\lambda(G) \leq \delta(G)$$

una de las desigualdades. Falta por demostrar que $\lambda(G) \leq K(G)$, para lo cual se procederá por inducción sobre $\lambda(G)$:

Si $\lambda(G) = 1$ y $|V(G)| = 2$, entonces G es K_2 y $K_2 - \{v\}$ con $v \in V(K_2)$ es la gráfica trivial, así $K(G) = 1$ y por tanto se cumple la desigualdad. Luego si $\lambda(G) = 1$ y $|V(G)| > 3$, significa que G tiene un puente y en consecuencia tiene un vértice de corte (Teorema 1.7), esto es $K(G) = 1$, por tanto también se cumple la desigualdad. Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para todas las gráficas cuya conexidad lineal sea menor que k . Sea G una gráfica tal que $\lambda(G) = k$

y sean a una arista de un k -corte lineal de G . Tomemos $H=G-a$ entonces $\lambda(H)=k-1$ y por hipótesis de inducción $K(H) \leq k-1$. Sea $\tilde{V}$ un corte puntual de H con $K(H)$ elementos, como $H-\tilde{V}$ es desconexa necesariamente ocurre uno de los dos casos:

i) $G-\tilde{V}$ es desconexa.

Lo cual indica que $K(G) \leq K(H) \leq k-1 = \lambda(H) < k = \lambda(G)$, así que $K(G) \leq \lambda(G)$, con lo que la relación se cumple en este caso.

ii) $G-\tilde{V}$ es conexa, en cuyo caso a es un puente de $G-\tilde{V}$ y nuevamente hay dos casos:

a) $|V(G-\tilde{V})| = 2$, entonces:

$$K(G) \leq |V(G)| - 1 = K(H) + 1 = k = \lambda(G)$$

b) $|V(G-\tilde{V})| > 2$, entonces dado que G tiene un puente a , $G-\tilde{V}$ tiene un vértice de corte al que llamaremos v , lo que indica que $\tilde{V} \cup \{v\}$ es un corte puntual de G y por lo tanto

$$K(G) \leq K(H) + 1 \leq k = \lambda(G),$$

concluyendo así el teorema.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de gráficas lo constituye el teorema de Menger, con el cual concluimos este capítulo.

DEFINICION: Sea $S \subseteq V(G)$. Decimos que S es un SEPARADOR de G , si dados $u, v \in V(G)$, con u no ady_G v , se cumple que u y v están en componentes distintas de $G-S$.

El Teorema de Menger, establece para una gráfica G , cual es el mínimo número de elementos de S .

TEOREMA 1.14 (Menger, 1927) Si u y v son dos vértices distintos no adyacentes en una gráfica G , entonces el máximo número de uv -trayectorias internamente ajenas en G , es igual al mínimo número de vértices de G que separan a u de v .

DEMOSTRACION: Consideraremos sólo el caso en que G sea conexa, pues en caso contrario el resultado es trivial.

Si el mínimo número de vértices que separan a dos vértices distintos no adyacentes es $n=1$, entonces no puede haber más de $n=1$ trayectorias internamente ajenas en G , con lo cual el teorema es válido para $n=1$.

Sean u y v dos vértices distintos no adyacentes en G . Denotemos por $S_n(u,v)$, la propiedad de que ningún conjunto de vértices de cardinalidad menor que n separe a u de v en G , y supongamos que el teorema no se cumple. Esto es existe $m \in \mathbb{Z}^+$, para el cual existen gráficas conexas G , con vértices u y v distintos y no adyacentes para los cuales existe $S_m(u,v)$ y sin embargo en G no hay un conjunto de m uv -trayectorias ajenas internamente.

Obviamente $m \geq 2$. Consideremos F con esas características y con el menor número de vértices posible y sea H una subgráfica generadora de F que satisfaga $S_m(u,v)$ y tal que $H-a$ no cumpla $S_m(u,v)$ para toda $a \in A(H)$. Entonces H tiene 3 propiedades:

1) Si $a = v_1 v_2 \in A(H)$, la gráfica $H-a$ no satisface $S_m(u,v)$, lo que significa que en $H-a$, existe un subconjunto $U(a)$ con $|U(a)| < m$ que separa a u de v , y como v_1 ady_H v_2 necesariamente v_1 ó v_2 son distintos de u y v . Supongamos que $v_1 \neq u, v$. $|U(a)| = m-1$, pues en caso contrario H no cumpliría $S_m(u,v)$, pues $U(a) \cup \{v_1\}$ separa a u y v en H , contrariamente a lo que hemos supuesto. De aquí que existe un conjunto de m vértices que separan a u y v en H . Ese conjunto es:

$$U(a) \cup \{v_1\} \text{ o bien } U(a) \cup \{v_2\}.$$

2) Para cualquier $w \in V(H)$, $w \neq u$ y $w \neq v$ podemos ver que uw y vw no son simultaneamente aristas de H , ya que de ser así $H-w$ cumpliría con $S_m(u,v)$ y $H-w$ contendría un subconjunto de $m-1$ trayectorias internamente ajenas, si así fuera H tendría un conjunto de m uv -trayectorias internamente ajenas lo que contradice la forma en que H fue elegida.

3) Si $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ es cualquier conjunto de m vértices que separan a u de v en H , entonces alguna de las siguientes posibilidades ocurren:

- a) $uw_i \in A(H)$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$
- b) $vw_i \in A(H)$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$

Para verificar esto, llamemos H_u a la subgráfica determinada por todas las uw -trayectorias de H que contienen exactamente un elemento de W y llamemos H_v a la subgráfica definida de manera semejante. De este modo $V(H_u) \cap V(H_v) = W$. Supongamos que ni $uw_i \in A(H)$ ni $vw_j \in A(H)$, para $i, j = 1, 2, \dots, m$, y denotemos por H_{u^*} la gráfica obtenida a partir de H_u añadiendo un nuevo vértice u^* y las aristas u^*w_i , $i=1, 2, \dots, m$. Similarmente denotemos por H_{v^*} a la gráfica que se obtiene al añadir un nuevo vértice v^* y las aristas v^*w_i , $i=1, 2, \dots, m$, (Figura 1.20). H_{u^*} y H_{v^*} tienen menos vértices que H y sin embargo H_{u^*} satisface $S_m(u, v^*)$, lo cual implica que H_{u^*} contiene un conjunto de m uv^* -trayectorias ajenas en H y, de igual modo H_{v^*} contiene un conjunto de m u^*v -trayectorias ajenas en H . Estas $2m$ trayectorias determinan un conjunto de m trayectorias en H , lo cual es una contradicción. Así que para cada conjunto de vértices W que separe a u de v , u o v es adyacente a cada uno de los vértices de W .

Para demostrar que esas m trayectorias son internamente ajenas, tomemos T la uv -trayectoria mas corta en H , por la propiedad (2), la longitud de T es al menos 3. De esta forma podemos denotar a T como $T = u, u_1, u_2, u_3, \dots, v$, donde u_1 y $u_2 \neq v$. Si hacemos $a = u_1, u_2$, entonces por (1) $U(a) \cup \{u_1\}$ es un conjunto de m vértices que separan a u de v . Puesto que $uu_1 \in A(H)$ de (2) y (3) podemos desprender que u es adyacente a todo vértice de $U(a)$, sin embargo $U(a) \cup \{u_2\}$ es también un conjunto de m vértices que separan a u de v . Como $U(a) \neq \emptyset$, por (2) y (3) tenemos que $uu_2 \in A(H)$, pero esto contradice el hecho de que T sea la uv -trayectoria más corta de G .

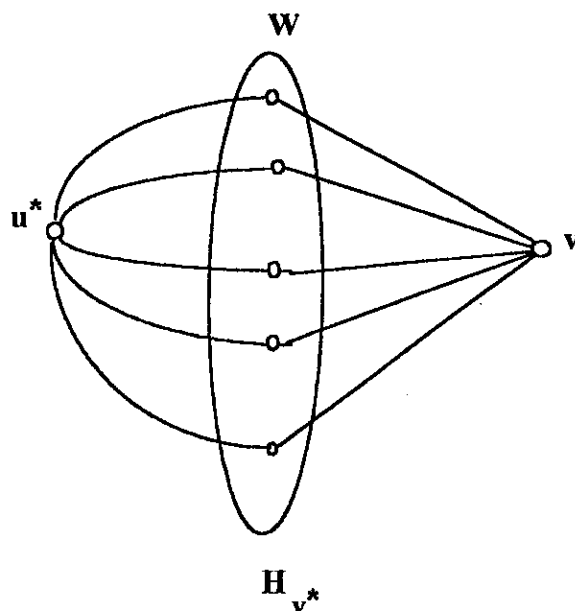


FIGURA 1.20

Esta demostración constituye la prueba de una de las versiones del Teorema de Menger, el otro caso es considerar el S el conjunto separador como un conjunto de aristas, en cuyo caso el teorema queda establecido de la siguiente manera:

" Sean u y v vértices distintos de G , entonces el mínimo número de aristas que separan a u y v es igual al máximo número de uv -trayectorias disjuntas en aristas".

Otro comentario adicional es que el el Teorema de Menger, es una de las principales consecuencias de un teorema fundamental acerca de flujo en gráficas dirigidas: el teorema de flujo máximo y corte mínimo, cuyo enunciado y demostración puede encontrarse en: [2], [1].



CAPITULO DOS

COLORACION DE VERTICES

Cuando estamos frente a un mapa poligonal, podemos siempre considerar que sus caras son países o estados rodeados por el océano, que corresponde a la cara infinita (exterior). En un Atlas, todos los países, junto con el océano, están coloreados de diferentes maneras. Esto quiere decir que los matices han sido aplicados de tal manera que las regiones con frontera comunes tengan colores diferentes. Si uno cuenta con una gran cantidad de colores, esto no representa mayor complicación, el problema más difícil es hallar el menor número de colores suficiente para colorear "adecuadamente" un mapa.

La famosa conjetura de los cuatro colores, afirma que todo mapa puede colorearse de manera adecuada usando cuatro colores. El matemático inglés Cayley, uno de los pioneros de la Teoría de Gráficas, publicó en 1879, un artículo sobre el problema de los cuatro colores. Este artículo se considera a menudo como el certificado de nacimiento del problema de los cuatro colores. Sin embargo, esto no es correcto. El físico escocés Frederick Guthrie, relata que alrededor de 1850 este era un problema familiar entre los estudiantes de matemáticas de Londres y que su hermano, Francis llamó sobre él la atención de su profesor de matemáticas, De Morgan.

Parece que en un principio, el problema no fue tomado muy en serio, los matemáticos parecen haberlo considerado como un hecho evidente. Más tarde aparecieron numerosas demostraciones algunas de ellas imprecisas, y el problema de los cuatro colores se vió resistido en las tentativas de algunos de los matemáticos mas capaces del mundo, hasta que finalmente en 1976, K. Appel y W. Haken, pudieron dar una solución, auxiliandose de técnicas computacionales. El gran interés mostrado hacia este problema, estimuló poderosamente el desarrollo de la Teoría de Gráficas, pues muchos de sus resultados, se alcanzaron gracias a que parecían contribuir a resolver dicha conjetura.

Consideremos el mapa de la figura 2.1, la gráfica obtenida que representa al mapa se da en la figura 2.2, donde a cada región le asignamos un vértice y unimos dos vértices por una arista siempre que estos tengan frontera común.

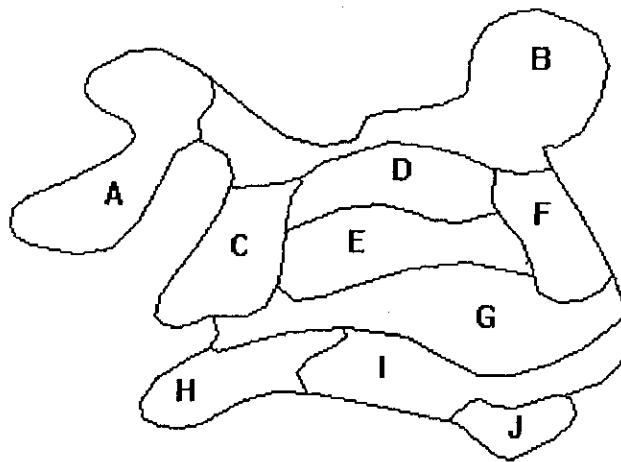


FIGURA 2.1

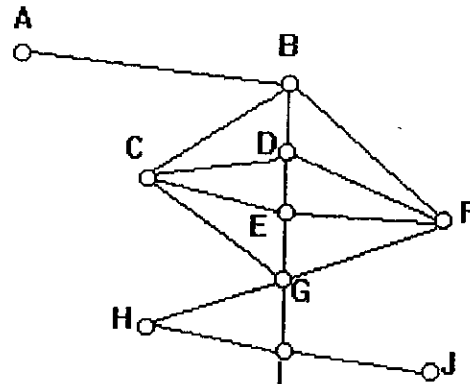


FIGURA 2.2

Con esta representación, la coloración del mapa es equivalente a colorear los vértices de G , de modo que si dos vértices son adyacentes entonces tengan asignados colores distintos.

DEFINICION: Sea G una gráfica. Una coloración en vértices de G , es una función $\gamma : V(G) \rightarrow Q$, donde Q es un conjunto finito de objetos que serán llamados colores. Si $|Q|=k$, se dirá que γ es una k -coloración.

Notemos que en la definición anterior, no queda excluida la posibilidad de que a dos vértices les sea asignado el mismo color y esto es precisamente lo que se desea evitar.

DEFINICION: Sea G una gráfica. Una coloración propia de G , es tal que para cualquiera $u, v \in V(G)$ con $uv \in A(G)$, $\gamma(u) \neq \gamma(v)$.

A partir de la definición anterior, siempre que se trate de una coloración, se supondrá que es una coloración propia.

Toda gráfica de p vértices es p -coloreable, lo que si es interesante es saber cual es el mínimo número k para el cual una gráfica G es k -coloreable, y esta es precisamente la relación con el problema de los cuatro colores, dado que si se puede demostrar que una gráfica G que representa un mapa de n regiones, puede colorearse utilizando cuatro colores entonces se habría demostrado el famoso teorema.

DEFINICION: n es el número cromático de G si n es mínimo valor, para el cual G admite una n -coloración. Se denota $\chi(G)$

Si $\chi(G) \leq n$, se dice que G es n -coloreable y si $\chi(G) = n$, G se dice n -cromática.

La coloración de una gráfica determina subconjuntos de vértices que corresponden al mismo color, los cuales se definen a continuación.

DEFINICION: Dada una coloración de G . Al conjunto de vértices de G que les ha sido asignado el mismo color se le llama clase cromática de G .

DEFINICION: Sea G una gráfica y $\bar{V} \subseteq V$, decimos que $\bar{V}$ es un conjunto independiente si dados $u, v \in \bar{V}$, sucede que $uv \notin A(G)$.

Observemos que si G es completa, entonces no tiene Conjuntos Independientes.

De la definición anterior podemos deducir que toda clase cromática es un conjunto independiente y además el número cromático de G es el mínimo número de clases cromáticas en que se pueden partir los vértices de una gráfica G .

Presentamos a continuación algunos ejemplos de gráficas para las cuales puede determinarse el número cromático de manera muy sencilla.

- i) Si C_{2n} , un ciclo par, entonces $\chi(C_{2n}) = 2$
- ii) Si C_{2n+1} , es un ciclo impar, entonces $\chi(C_{2n+1}) = 3$
- iii) Para la gráfica completa K_n , entonces $\chi(K_n) = n$
- iv) Si B es una gráfica bipartita con aristas $\chi(B) = 2$, lo cual demostramos enseguida.

TEOREMA 2.1 Para toda gráfica G , $\chi(G) = 2$ si y solamente si G es bipartita.

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica tal que $\chi(G) = 2$, entonces existen en G dos clases cromáticas $V_1, V_2 \neq \emptyset$, que son dos conjuntos independientes e inducen una bipartición de G , ya que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(G)$, de donde G es bipartita. Por otro lado, si G es bipartita, entonces por definición $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(G)$, donde V_1 y V_2 son dos conjuntos independientes y $V_1, V_2 \neq \emptyset$, entonces asignando un color a los vértices de V_1 y otro a V_2 , lo cual es posible pues $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, se tiene una 2-coloración de $V(G)$.

Una consecuencia inmediata del teorema 2.1 es que si T es un árbol no trivial, entonces $\chi(T) = 2$. También equivale a decir que una gráfica es 2-cromática si y solo si no contiene ciclos impares (Teorema 0.8).

Aunque hemos mencionado algunos ejemplos de gráficas cuyo número cromático puede determinarse de manera muy simple, es muy importante señalar que en general el determinar el número cromático de una gráfica no es un problema trivial, en general el procedimiento para encontrarlo es proporcionar buenas cotas para el. El objetivo primordial de este capítulo es proponer algunas de tales cotas. Otro aspecto interesante es también resaltar que sólo hablaremos de las circunstancias bajo las cuales las gráficas pueden ser coloreadas y no del número de formas en que esto pueda llevarse a cabo.

DEFINICION: Una gráfica G es crítica con respecto a su número cromático si:
 $\chi(H) < \chi(G)$, para toda H , subgráfica propia de G . Si G crítica y k -cromática, G se dice k -crítica.

La gráfica de la figura 2.3 (Gráfica de Grötzsch) es 4-crítica.

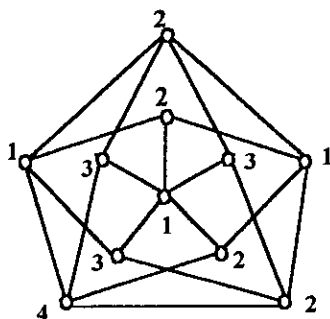
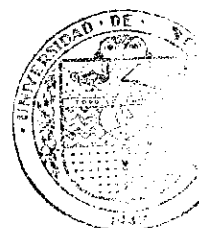


FIGURA 2.3



EL SABER DE NOS HACE
HACER MI GRANDEZ
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO
NACIONAL

T83

TEOREMA 2.2 Si G es k -crítica, entonces $\delta(G) \geq k-1$.

DEMOSTRACION: Lo haremos por contradicción. Supongamos que $\delta(G) < k-1$, entonces existe un vértice $v \in V(G)$ con $gr_G(v) = \delta(G) < k-1$. Como G es k -crítica $G-v$ es $k-1$ coloreable $\forall v \in V(G)$. Sean $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{k-1}$, las clases cromáticas de una $(k-1)$ -coloración de $G-v$. Como $\delta < k-1$, entonces v es adyacente a menos de $k-1$ vértices por tanto existe $j \in \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$ tal que v no es adyacente a ningún vértice de V_j , y por lo tanto v puede ser coloreado con el color j , $j \in \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$, así :

$$\{V_1, V_2, \dots, V_j \cup \{v\}, V_{j+1}, \dots, V_{k-1}\}$$

es una $k-1$ coloración de G , lo que contradice las hipótesis.

COROLARIO 2.1 Una gráfica k -cromática tiene por lo menos k vértices de grado por lo menos $k-1$.

DEMOSTRACION: Sea G k -cromática y H una subgráfica k -crítica de G . Por el teorema 2.2 $gr_H(v) \geq k-1$ para todo $v \in H \subseteq G$. Al ser H k -cromática, H tiene por lo menos k vértices con lo cual se concluye el teorema.

Como lo mencionamos anteriormente, estableceremos algunas cotas para $\chi(G)$. Uno de ellos puede deducirse inmediatamente a partir del corolario 2.1.

COROLARIO 2.2 Para cualquier gráfica G , $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

DEMOSTRACION: Sea $\chi(G) = k$ y sea H una subgráfica k -crítica de G , por el teorema 2.2 $k-1 \leq \delta(H) \leq \delta(G) \leq \Delta(G)$, entonces $\Delta(G) + 1 \geq k$, esto es $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Con el propósito de establecer otros criterios para acotar el número cromático de G , damos las siguientes definiciones.

DEFINICION: Sea S un corte de una gráfica conexa G . Sean $V_1, V_2, \dots, V_n$ el conjunto de vértices de las componentes de $G-S$, las subgráficas $G_i = \langle V_i \cup S \rangle$ se llaman las S -componentes de G .

La figura 2.4 muestra G y las S -componentes para $S = \{u, v\}$.

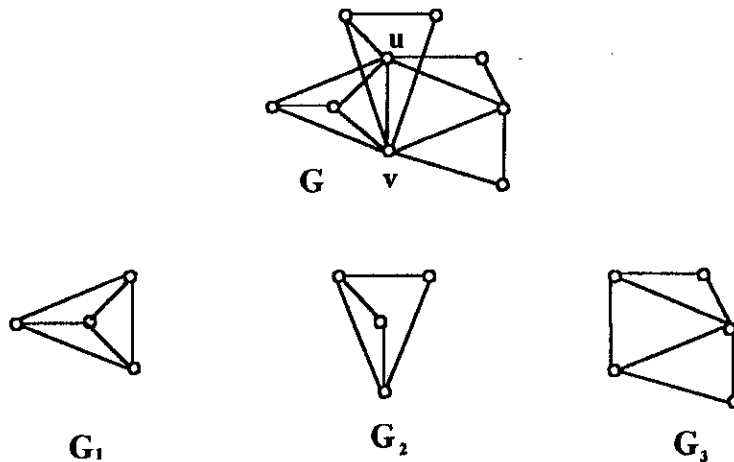


FIGURA 2.4



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

DEFINICION: Decimos que las coloraciones $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ coinciden en un corte S , si para todo $v \in S$, v tiene asignado el mismo color en cada una de ellas.

DEFINICION: Si H es una subgráfica de G que es completa, entonces decimos que H es un clan.

TEOREMA 2.3 En toda gráfica crítica G , ninguno de sus cortes es un Clan.

DEMOSTRACION: Se hará por contradicción. Sea G k -crítica y supongamos que G tiene un corte S tal que $\langle S \rangle$ es un Clan. Denotemos por $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ las S -componentes de G . Al ser G k -crítica cada $G_i, i=1,2,\dots,n$ es $(k-1)$ -coloreable. Además puesto que $\langle S \rangle$ es un clan, los vértices de $\langle S \rangle$ deben recibir distintos colores en cualquier $(k-1)$ -coloración de G , así que hay una $(k-1)$ -coloración en G que coinciden en S , y que inducen una $(k-1)$ -coloración en G , lo cual es imposible, pues G es k -crítica.

COROLARIO 2.3 Toda gráfica crítica es un Bloque.

DEMOSTRACION: Supongamos que G es crítica y que no es un bloque. Sea $S=\{v\}$, con $v \in V(G)$, vértice de corte. $S=K_1$, el clan trivial, lo que contradice el teorema 2.15.

Otra consecuencia del teorema 2.15 es que si $S=\{u,v\}$ es un corte de una gráfica k -crítica, entonces u y v no pueden ser adyacentes, pues en caso de serlo se tendría $S=\{u,v\}=K_2$ lo cual contradice el teorema 2.15. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICION: Sea $\{u,v\}$ un corte de S . Diremos que la $\{u,v\}$ -componente G de G , es de tipo 1 si toda $(k-1)$ -coloración de G_i asigna el mismo color a u y v . Del tipo 2 si toda $(k-1)$ -coloración de G_i asigna distinto color a u y v .

La figura 2.5 muestra una componente de cada tipo.

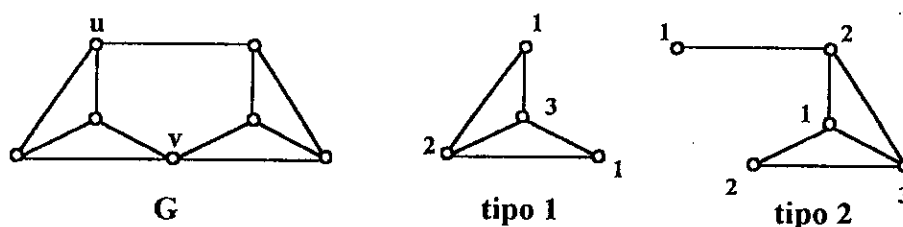


FIGURA 2.5

TEOREMA 2.4 Sea G una gráfica k -crítica con un 2-corte $S=\{u,v\}$ entonces:

- $G = G_1 \cup G_2$, donde G_i es una S -componente del tipo i ($i=1,2$).
- $G_1 + uv$ y $G_2 \circ uv$ son k -críticas, donde $G_2 \circ uv$ es la gráfica que se obtiene unificando u y v .

DEMOSTRACION:

i) Como G es k -crítica, toda $\{u,v\}$ -componente de G es $(k-1)$ -coloreable, y además no existe en G , una $(k-1)$ -coloración de esas componentes que coincidan en $\{u,v\}$, pues en caso de existir llevarían a una $(k-1)$ -coloración para G . Así existen dos $\{u,v\}$ -componentes de G , G_1 , y G_2 tales que ninguna $(k-1)$ -coloración de G_1 coincide con ninguna $(k-1)$ -coloración de G_2 . Claramente, si G_1 es del tipo 1 entonces G_2 es del tipo 2 y la subgráfica $G_1 \cup G_2$, no es $(k-1)$ -coloreable, y puesto que G es k -crítica $G = G_1 \cup G_2$.

ii) Sea $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 es del tipo 1, H_1 es k -cromática. Debemos probar que H_1 es crítica, mostrando que $H_1 - a$ es $(k-1)$ -coloreable $\forall a \in A(H_1)$. Si $a = uv$, el resultado es obvio, pues $G_1 = H_1 - a$. Sea a alguna otra arista de H_1 . En alguna $(k-1)$ -coloración de $G - a$ los vértices u y v deben recibir diferentes colores, pues G_2 es una subgráfica de $G - a$, aplicando tal coloración a los vértices de G_1 tenemos una $(k-1)$ -coloración de $H_1 - a$. Así $G_1 + uv$ es k -crítica.

Demostremos ahora que $G_2 \circ uv$ es también k -crítica. Para lo cual procederemos al igual que en el caso anterior. Sea $H_2 = G_2 \circ uv$, H_2 es k -cromática, puesto que al unificar los vértices u y v , se obtiene una nueva adyascencia. Para probar que H_2 es crítica, mostraremos que para toda $a \in A(H_2)$, $H_2 - a$ es $(k-1)$ -coloreable. Si a es la arista obtenida al unificar u y v el resultado es trivial, pues G_2 es $(k-1)$ -coloreable. En otro caso, sea $a \in A(H_2)$, $H_2 - a$ es $(k-1)$ -coloreable, puesto que al eliminar a , puede asignarsele a sus extremos el mismo color.

COROLARIO 2.4 Sea G k -crítica con un 2-corte $\{u,v\}$, entonces:

$$gr_G(u) + gr_G(v) \geq k-5.$$

DEMOSTRACION: Sea G_1 la $\{u,v\}$ -componente del tipo 1 y G_2 la $\{u,v\}$ -componente del tipo 2. Sean $H_1 = G_1 + uv$ y $H_2 = G_2 \circ uv$ por el teorema 2.9:

$$gr_{H_1}(u) + gr_{H_1}(v) \geq 2k-2, \text{ y}$$

$$gr_{H_2}(w) \geq k-1,$$

donde w es el vértice obtenido al unificar a u y v . Como $G_1 = H_1 - uv$ tenemos:

$$gr_{G_1}(u) + gr_{G_1}(v) \geq 2k-4$$

$$gr_{G_2}(u) + gr_{G_2}(v) \geq k-1$$

pues w es u unificado con v y por el teorema anterior tenemos que: $G = G_1 \cup G_2$, de donde concluimos:

$$gr_G(u) + gr_G(v) \geq 3k-5.$$

OBSERVACION : Notemos que si G es una gráfica 1-crítica, entonces $G = K_1$, puesto que las gráficas 1-coloreables son las que no tienen aristas y obviamente si $|V(G)| > 1$, para toda $H \subset G$, $\chi(H) = \chi(G)$, por lo que G no es crítica, en cambio si $|V(G)| = 1$, tenemos que si $H \subset G$, entonces $H = \emptyset$, por lo cual $\chi(H) < \chi(G)$, de donde $G = K_1$. Luego si G es una gráfica 2-crítica, entonces $G = K_2$, puesto que si G es 2-cromática, entonces G tiene al menos una arista, así consideremos dos casos:

a) Si $|A(G)| > 1$ y $|V(G)| > 2$, considerando $G - a$, para $a \in A(G)$ se tiene que $\chi(G - a) = \chi(G)$, lo mismo sucede si $|A(G)| = 1$ y $|V(G)| > 2$, así en este caso G es 2-cromática y no es crítica.

b) Si $|A(G)| = 1$ y $|V(G)| = 2$, se tiene que si $H \subset G$, entonces $\chi(H) < \chi(G)$, por lo que en este G es 2-crítica, así $G = K_2$.

De igual forma observemos que si G es 3-crítica, entonces G es un k -ciclo impar con $k \geq 3$.

Al concluir este último resultado, nos hemos provisto de los fundamentos que necesitamos para establecer otra de las cotas para el número cromático. Notemos también que la cota superior para $\chi(G)$ dada por el corolario 2.2 en ocasiones es mucho mayor que su verdadero valor. Por ejemplo en caso de que G sea bipartita $\chi(G) = 2$ mientras que $\Delta(G)$ puede ser mucho mayor.

El siguiente teorema, debido a Brooks, muestra que hay solamente dos tipos de gráficas para las cuales $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

TEOREMA 2. 5 (TEOREMA DE BROOKS): Si G es una gráfica simple y conexa y no es completa, y además no es un ciclo impar, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica k -cromática que satisface las hipótesis del teorema. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que G es k -crítica, así que por el corolario 2.3 G es un bloque. Como la gráfica 1-crítica y la 2-crítica son completas, y además dado que las tres 3-críticas son ciclos impares, tenemos que $k \geq 4$. Luego, si G tiene un 2-corte $\{u, v\}$ por corolario 2.4:

$$2\Delta(G) \geq gr_G(u) + gr_G(v) \geq 3k-5 \geq 2k-1,$$

lo que implica que:

$$\chi(G) = k \leq \Delta(G),$$

pues $2\Delta(G)$ es par.

Supongamos ahora que G es 3-conexa. Puesto que G no es completa, hay 3 vértices u, v y $w \in V(G)$ tal que uv y $vw \in A(G)$ pero $uw \notin A(G)$. Sean $u=v_1$, $w=v_2$ y sean $v_3, v_4, v_5, \dots, v_k = v$ cualquier ordenamiento de los vértices de $G - \{u, w\}$ tal que cada v_i es adyacente a algún v_j para $j > i$, lo cual puede lograrse colocando los vértices de $G - \{u, w\}$ en orden no creciente de su distancia a v . Podemos entonces describir una Δ -coloración para G , a saber:

Asignemos el color 1 a $v_1 = u$ y $v_2 = w$, luego coloreamos sucesivamente: $v_3, v_4, v_5, \dots, v_k$ con el primero color disponible en el conjunto $Q = \{1, 2, \dots, \Delta\}$. Por la construcción de la sucesión cada v_i $1 \leq i \leq k-1$ es adyacente a algún vértice v_j con $j > i$ y así a lo más $\Delta-1$ vértices con $j < i$. Por tanto cuando toca colorearse a v_i , este es adyacente a lo más a $\Delta-1$ colores, y así uno de los colores de Q está disponible. Finalmente como v_k es adyacente a dos vértices de color 1, (digamos v_1 y v_2) y como es adyacente a lo más a $\Delta-2$ colores entonces puede asignársele uno de los colores $\{2, 3, \dots, \Delta\}$.

Para concluir este capítulo, hacemos tres últimos comentarios.

a) También existen cotas inferiores para $\chi(G)$, si $\omega(G)$ denota el orden de un clan de cardinalidad máxima; entonces se cumple que $\omega(G) \leq \chi(G)$, puesto que $\chi(K_n) = n$.

b) El motivo por el cual nos limitamos a proponer cotas superiores para el número cromático, se debe a que no existen condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica sea k -cromática cuando $k \geq 3$. En 1961, Hajós, propuso una posible condición necesaria:

"Si G es k -cromática, entonces G contiene una subdivisión de K_k ".

Este resultado se conoce como la CONJETURA DE HAJÓS. Notemos que la condición no es suficiente, por ejemplo, un 4-ciclo es una subdivisión de K_3 , pero no es 3-cromático. Para $k=1$ y $k=2$, la validez de la Conjetura es obvia. También puede verificarse en el caso $k=3$, puesto que toda gráfica 3-cromática necesariamente contiene un ciclo impar, y todo ciclo impar es una subdivisión de K_3 . En 1952, Dirac estableció el caso $k=4$. En el caso general, la conjetura de

Hajós no ha sido probada y su resolución se sabe que no es un problema trivial. Hay una conjetura debida a Hadwiger (1943):

" Si G es k -cromática, entonces G es contractible a una gráfica que contiene K_k "

En 1964, Wagner demostró que el caso $k=5$ de la conjetura de Hadwiger, es equivalente al famoso Teorema de los Cuatro Colores.(ver [2], pps.124).

c) En el siguiente capítulo demostraremos que toda gráfica plana es 5-coloreable.

CAPITULO TRES

PLANARIDAD Y EL TEOREMA DE EULER

Para muchas finalidades el modo de dibujar una gráfica carece de importancia, es decir, gráficas isomorfas se consideran idénticas, puesto que proporcionan la misma información. Sin embargo, existen finalidades para las cuales es esencial que una gráfica pueda dibujarse en una forma particular.

Pensemos en el siguiente caso: "Tres ciudades C_1, C_2, C_3 deben comunicarse directamente por medio de autopistas con cada una de tres ciudades C_4, C_5, C_6 , ¿Se puede diseñar un sistema de carreteras de manera que las autopistas no se crucen?"

La búsqueda de una solución para este tipo de problemas y para otros similares nos conduce al análisis de un caso particular de gráficas, dados por:

DEFINICION: Una gráfica G es plana, si está dibujada en el plano de tal manera que sus aristas sólo se intersectan en los vértices de la gráfica misma.

DEFINICION: Una gráfica es aplanable, si es isomorfa a una gráfica plana.

OBSERVACION: Notemos que si G es plana, entonces por definición es también aplanable.

Existen gráficas que a pesar de no ser planas, si son aplanables, y obviamente otras que ni son planas ni se pueden aplanar, los criterios para distinguir cuando una gráfica puede aplanarse o no, son precisamente uno de los objetivos de este capítulo. Asimismo demostraremos el la fórmula de Euler, de donde obtendremos algunos resultados que utilizaremos para demostrar el teorema de los cinco colores, al que hacíamos referencia en el capítulo anterior. Concluiremos el capítulo dando una clasificación de los poliedros regulares.

El estudio de las gráficas aplanables está estrechamente vinculado a la Topología del Plano y haremos uso de algunos de sus resultados.

DEFINICION: Una curva de Jordan es una curva cerrada simple.

- i) Si G es plana, la unión de las aristas de un ciclo, es una curva de Jordan.
- ii) También lo son las curvas de la figura 3.1

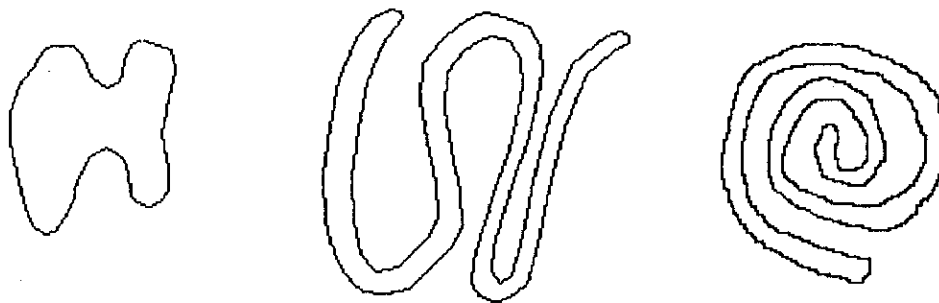


FIGURA 3.1

TEOREMA 3.1 Supongase que J es una curva de Jordan, entonces J divide al plano en una parte interior y otra exterior del mismo de tal manera que siempre que un punto P de la parte interior se conecta con un punto Q de la parte exterior por medio de una curva continua I , entonces I intersecta a J . (Figura 3.2).



FIGURA 3.2

El enunciado anterior, presenta de una manera intuitiva, el conocido teorema de la curva de Jordan sin embargo si deseamos ser más precisos podemos expresarlo de la siguiente forma:

TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN: Sea C una curva cerrada simple en el plano Euclídeo. Entonces $\mathbb{R}^2 - C$ no es conexo y consta exactamente de dos componentes que tienen a C como frontera común. Una y sólo una de esas componentes es acotada.

Recibe este nombre de C. Jordan, que observó al inicio de 1890, que a pesar de que parece intuitivamente evidente, se requiere una demostración rigurosa. En ([6] Capítulo 12A, pps. 107-116), se presenta la demostración. En el presente trabajo, sólo nos limitaremos a utilizarlo, siempre que se requiera.

Por otro lado, notemos que K_1 , K_2 y K_3 son gráficas planas. K_4 no es plana, pero si es aplanable (figura 3.3), sin embargo K_5 no es plana y tampoco aplanable, lo cual demostramos en el siguiente teorema.

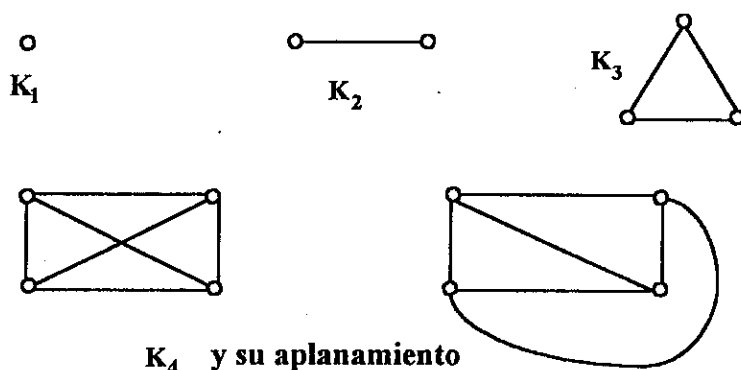


FIGURA 3.3

TEOREMA 3.2 K_5 no es aplanable.

DEMOSTRACION: Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una gráfica G , que es un aplanamiento de K_5 . Sea $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ sus vértices. Como G es completa, cualesquiera dos de sus vértices son adyacentes, por lo que podemos considerar el ciclo $C = v_1, v_2, v_3, v_1$, el cual es una curva de Jordan en el plano, entonces v_4 debe estar en el interior de C o en el exterior de C . Supongamos que v_4 está en el interior de C , (Si está en el exterior el análisis es análogo), entonces las aristas $v_1 v_4$, $v_2 v_4$, $v_3 v_4$ están en el interior de C , y lo dividen en 3 regiones interior de C_1 , interior de C_2 , interior de C_3 , donde $C_1 = v_1, v_2, v_4, v_1$;

$C_2 = v_2, v_4, v_3, v_2$; $C_3 = v_3, v_1, v_4, v_3$; (figura 3.4). Ahora tomemos el vértice v_5 , el cual debe estar en alguna de las cuatro regiones: exterior de C , interior de C_1 , interior de C_2 , interior de C_3 . Si v_5 está en el exterior de C , como v_4 está en el interior de C , podemos aplicar el teorema 3.1 obteniendo así, que la arista v_4v_5 debe intersectar a C en algún punto, pero esto contradice la hipótesis de que G es plana. Similarmente, se puede analizar el caso $v_5 \in \text{int } C_i$ ($i=1,2,3$). Por tanto no existe una gráfica G que sea un applanamiento para K_5 , esto es K_5 no es aplanable.

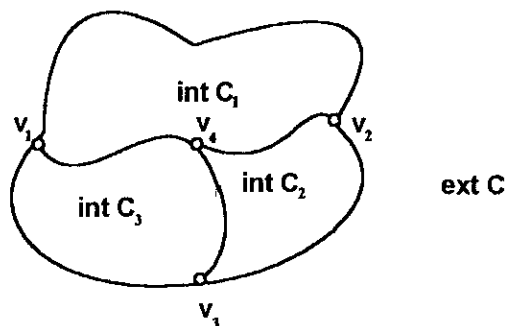


FIGURA 3.4

Otra gráfica no aplanable, lo es $K_{3,3}$, cuya demostración es similar a la anterior.

Con el propósito de enunciar un criterio para determinar si una gráfica es o no aplanable, damos la siguiente definición.

DEFINICION: Una subdivisión de una arista es el procedimiento que consiste en eliminarla de una gráfica y sustituirla por una trayectoria de longitud dos. El nuevo vértice se considera elemento del conjunto de vértices de la gráfica.

DEFINICION: Una subdivisión de una gráfica G , es una gráfica que puede obtenerse a partir de G , a través de una secuencia de subdivisiones de sus aristas. (Figura 3.5).



FIGURA 3.5

En términos de la definición anterior, puede establecerse un criterio para decidir si una gráfica es o no aplanable. Dicho criterio se debe a Kuratowsky y su demostración que aquí omitimos, requiere de un conjunto de resultados, que al igual que el Teorema de la Curva de Jordan, quedan fuera del alcance de este trabajo. Por lo tanto, sólo nos limitaremos a enunciarlo y ejemplificarlo. (ver [2], pps. 145, 154)

TEOREMA 3.3 (Kuratowsky, 1930) Una gráfica es aplanable si y sólo si no contiene ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$.

La gráfica de la figura 3.6, no es aplanable, pues contiene una subdivisión de $K_{3,3}$.

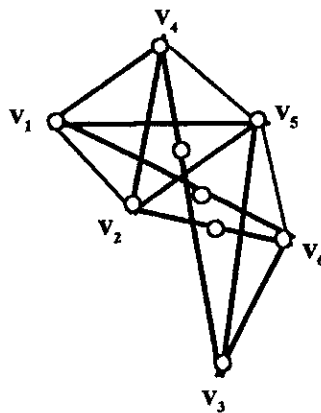
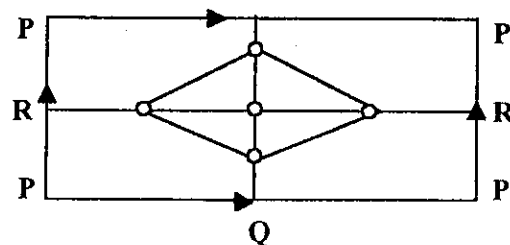
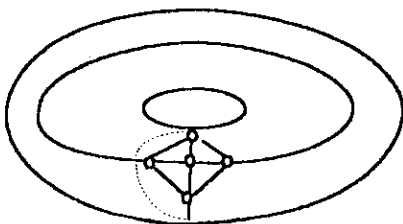


FIGURA 3.6

La noción de planaridad puede extenderse a otras superficies. Una gráfica G es sumergible en una superficie S , si puede ser trazada en S , de manera que sus aristas sólo se intersecten en sus extremos, en cuyo caso se dice que es un aplanamiento de G en S . La figura 3.7 muestra un aplanamiento de K_5 en el toro y de $K_{3,3}$ en la banda de Möbius. Como ya lo hemos notado, no todas las gráficas pueden ser aplanables en el plano. Sin embargo todas las gráficas pueden ser aplanables en el espacio tridimensional.



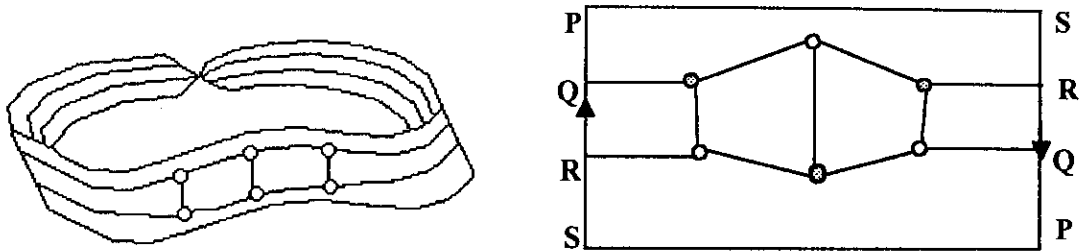


FIGURA 3.7

De igual forma podemos hablarse de planaridad en la botella de Klein y en la esfera, las cuales son fundamentales porque clasifican al conjunto de todas las superficies (Teorema de Clasificación de Superficies, [6]), y esto tiene repercusiones importantes, que no mencionamos, pues quedan fuera del alcance de este trabajo..

Existe una equivalencia entre aplanamientos de gráficas en el Plano y en la esfera, con el propósito de demostrar este resultado, damos la siguiente definición.

DEFINICION: Consideremos la esfera S sobre el plano P y denotemos por z el punto que es diagonalmente opuesto al punto de contacto de S y P . El mapeo $\Pi(s): S/\{z\} \rightarrow P$ definido por $\Pi(s)=p$ si y solo si z, s y p son colineales se llama la proyección estereográfica desde z , figura 3.8.

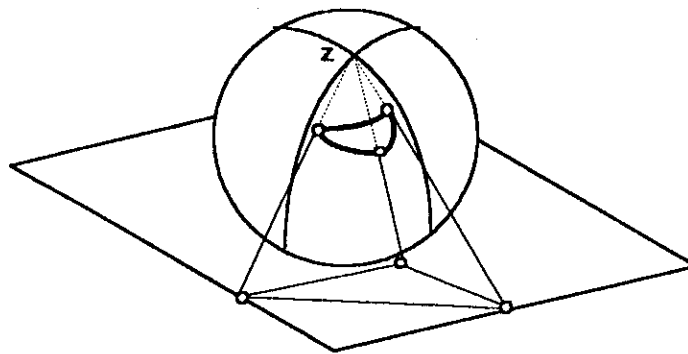


FIGURA 3.8

Un resultado que puede obtenerse a partir de la definición anterior lo es el teorema siguiente:

TEOREMA 3.4 Una gráfica G es aplanable si y solo si es sumergible en la esfera.

DEMOSTRACION: Supongamos que G' es un aplanamiento de G en la esfera. Tomemos z un punto de la esfera que no está en G' , entonces la imagen de G' bajo la proyección estereográfica desde z es una representación plana de G . El recíproco es análogo.

Una gráfica plana G , divide al resto del plano en un número regiones conexas. Llamaremos cerradura de una región a la unión de esta con las aristas que la delimitan. Las siguientes definiciones, válidas para gráficas planas, nos permitirán posteriormente construir para una gráfica G , su dual G^* , cuyas propiedades serán importantes en la demostración del corolario 3.2.

DEFINICION: Una cara de una gráfica plana G , es la cerradura de una de las regiones del plano, generada por G . Se denota f .

OBSERVACION : En toda gráfica G , existe una única cara que no está delimitada por sus aristas, a la que llamaremos cara exterior.

La figura 3.9, muestra una gráfica con 6 caras, $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$

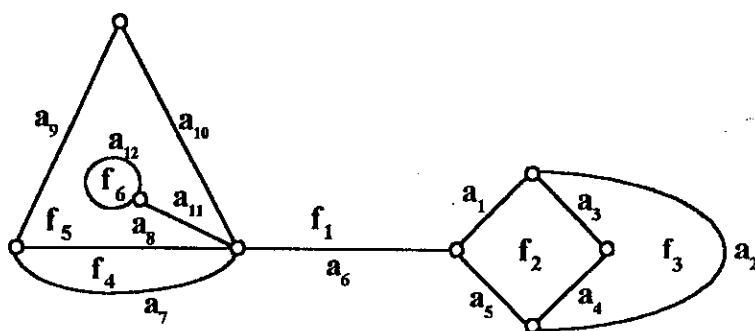


FIGURA 3.9

NOTACION: $F(G)$ es el conjunto de caras de G y $\phi(G)$ la cardinalidad de $F(G)$.

DEFINICION: La frontera de f es la unión de las aristas que bordean a una cara. Se denota $b(f)$.

Notemos que:

- i) Una cara de una gráfica G , es una de sus regiones unida a su frontera.
- ii) Si G es conexa, $b(f)$ es un camino cerrado.
- iii) Si $b(f)$ no contiene puentes, entonces $b(f)$ es un ciclo de G .

Una cara f incide en los vértices y aristas de su frontera. Notemos que si a es un puente de G , solamente una de sus caras incide en a , ya que en caso contrario, hay dos caras de G que inciden en a en cuyo caso, decimos que a separa a tales caras.

DEFINICION: El grado de una cara, es el número de aristas que inciden en ella. Los puentes deben contarse dos veces. Se denota $d_G(f)$.

En la figura 3.9, se tiene:

$$d_G(f_2) = 4, d_G(f_1) = 8,$$

$$b(f_2) = \{ a_1, a_3, a_4, a_5 \},$$

$$b(f_5) = \{ a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_8, a_9 \}$$

Considerando las definiciones anteriores podemos definir para una gráfica plana G , su dual G^* , de la siguiente manera.

DEFINICION

- 1) A cada cara f de G , le corresponde un vértice f^* de G^* y a cada arista a de G una arista a^* de G^* .
- 2) Sean f_1 y f_2 dos caras en G y f_1^* y f_2^* los vértices que la representan en G^* . Entre f_1^* y f_2^* existen tantas aristas como en la frontera común de f_1 y f_2 .
- 3) Dos vértices f_1^* y f_2^* de G^* son adyacentes en G^* si y solo si las dos caras correspondientes de f_1 y f_2 están separadas en G por la arista a .

La figura 3.10, muestra G y su dual G^* .

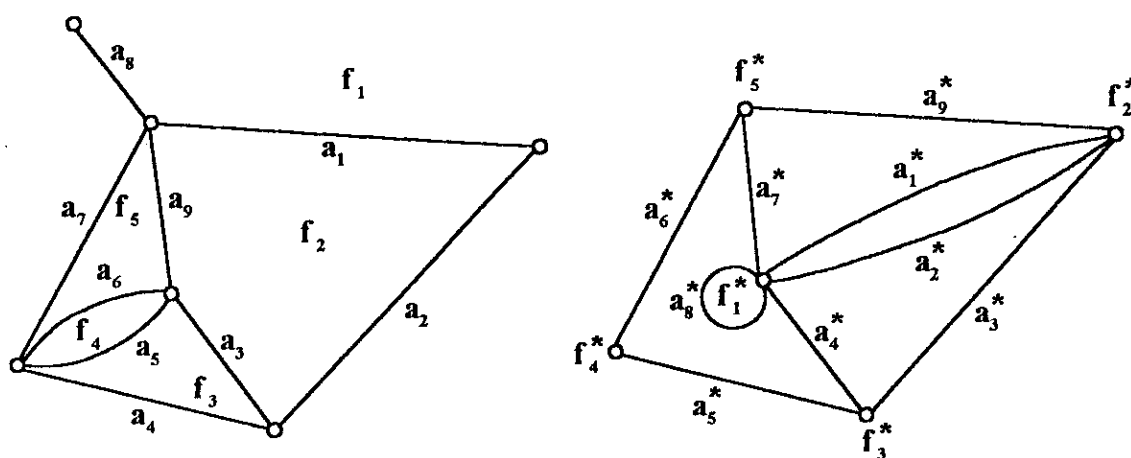


FIGURA 3.10

Hay una forma natural de obtener el dual de una gráfica G . Tomemos cada vértice f^* en la cara correspondiente a f de G y trazamos cada arista a^* de G^* en forma que cruce la correspondiente a de G exactamente una vez, (figura 3.11). Notemos que si a es un lazo de G , entonces a^* es un puente de G^* y viceversa. El dual G^* de una gráfica plana G es también una gráfica plana.

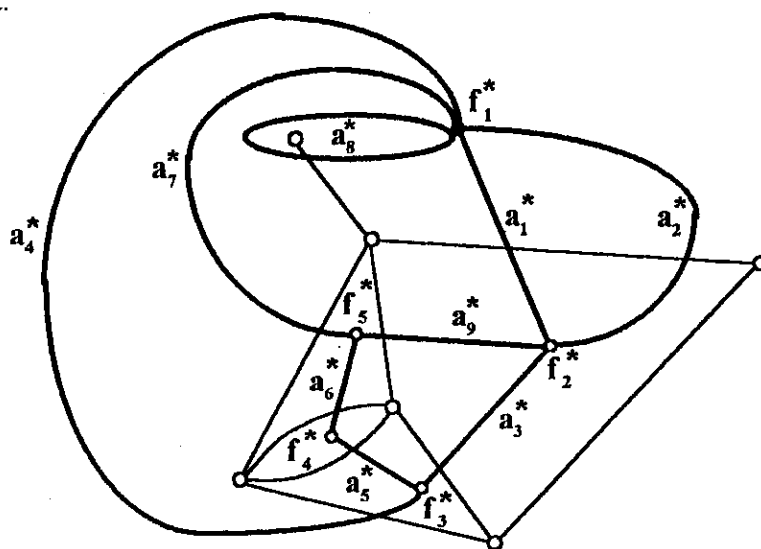


FIGURA 3.11

Las relaciones siguientes son consecuencia directa de la definición de gráfica dual:

- i) $|V(G^*)| = \phi(G)$
- ii) $|A(G^*)| = |A(G)|$
- iii) $d_{G^*}(f) = d_G(f)$ para toda $f \in F(G)$.

Una observación importante, es que gráficas isomorfas pueden tener duales no isomorfos, por ejemplo las gráficas de la figura 3.12 tienen duales no isomorfos pues sus duales tienen respectivamente, un vértice de grado cuatro y un vértice de grado tres, que corresponde precisamente al vértice que representa a la cara exterior.

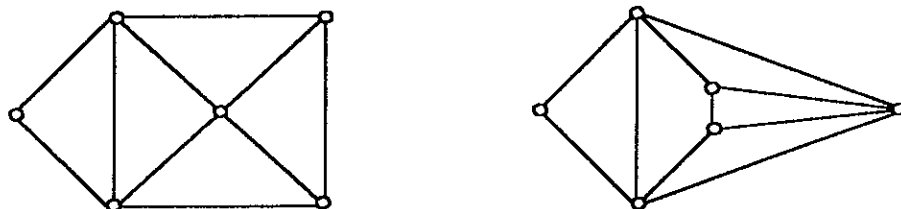


FIGURA 3.12

En base a iii) de la definición de dual podemos probar el siguiente teorema.

TEOREMA 3.5 Si G es una gráfica aplanable, entonces:

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|A(G)|$$

DEMOSTRACION: Sea G^* la gráfica dual de G . Entonces:

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} gr(f^*) = 2|A(G^*)| = 2|A(G)|$$

Por el teorema 0.19 y ii) de la observación anterior, respectivamente

EL TEOREMA DE EULER

Continuamos demostrando la fórmula de Euler para gráficas, que relaciona su número de vértices, aristas y caras.

TEOREMA 3.6 Si G es una gráfica conexa y plana con p vértices, q aristas y ϕ caras, entonces:

$$p - q + \phi = 2.$$

DEMOSTRACION: La demostración se hará por inducción sobre el número de aristas de la gráfica.

Obviamente, si G no tiene aristas se cumple la relación, pues $q=0$, $p=1$, $\phi=1$ y $p-q+\phi=2$. Luego, si $q=1$, $p=2$ y $\phi=1$, y también se cumple en este caso. Supongamos que la relación se cumple para cualquier gráfica plana y conexa con menos de q aristas. Si G es un árbol entonces

$$p=q+1, \quad y \quad \phi=1,$$

de donde también se satisface la fórmula. Si G no es un árbol, sea a una arista de un ciclo de G , y consideremos a la gráfica $G-a$. Esta gráfica es plana, conexa y tiene p vértices, $q-1$ aristas y $\phi-1$ caras, pues dos caras de G se combinan para formar una sola cara, de donde aplicando la hipótesis de inducción, tenemos:

$$p-(q-1)+(\phi-1)=2$$

COROLARIO 3.1 Si G conexa y aplanable, entonces cualquier gráfica plana isomorfa a G tiene el mismo número de caras.

DEMOSTRACION: Sean H_1 y H_2 dos gráficas planas isomorfas a G , con las características de las hipótesis. Como H_1 y H_2 son isomorfas, entonces:

$$|V(H_1)| = |V(H_2)| \quad y \quad |A(H_1)| = |A(H_2)|$$

luego por el teorema de Euler se tiene:

$$\phi(H_1) = |A(H_1)| - |V(H_1)| + 2 = |A(H_2)| - |V(H_2)| + 2 = \phi(H_2)$$

por lo tanto:

$$\phi(H_1) = \phi(H_2)$$

COROLARIO 3.2 Si G es una gráfica simple aplanable y conexa con $p \geq 3$, y q aristas, entonces:

$$q \leq 3p-6.$$

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica como la de las hipótesis. Como toda cara está limitada por al menos 3 aristas, entonces $d_G(f) \geq 3$, para toda cara de G . Se cumple entonces que:

$$\sum_{f \in F} d_G(f) \geq 3\phi$$

Por otro lado:

$$\sum_{f \in F} d_G(f) = 2q$$

entonces $2q \geq 3\phi$, esto es $\phi \leq \frac{2q}{3}$. Sustituyendo en el teorema de Euler, se tiene que:

$$p - q + \frac{2q}{3} \geq 2$$

de aquí que:

$$3p - q \geq 6$$

y por tanto

$$q \leq 3p - 6.$$

Anteriormente se demostró que K_5 no es aplanable, esto también puede verse con el resultado anterior, pues $V(K_5) = 5$ y $A(K_5) = 10$, y sustituyendo tenemos que:

$$10 = 3(5) - 6 = 9,$$

que es una contradicción.

También podemos demostrar a partir de los resultados anteriores que $K_{3,3}$ no es aplanable, lo cual lo mencionamos al inicio del capítulo, de esta forma mostramos la importancia del teorema de Euler.

COROLARIO 3.3 $K_{3,3}$ no es aplanable.

DEMOSTRACION: Por contradicción. Supongamos que $K_{3,3}$ es aplanable y sea H un aplanamiento de $K_{3,3}$. Puesto que en $K_{3,3}$ no hay ciclos de longitud menor que 4, cada cara de G debe tener grado al menos 4 entonces usando el teorema 3.5, se tiene:

$$4\phi \leq \sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|A(H)| = 18$$

de aquí que $\phi \leq 4$. Aplicando el Teorema de Euler, tenemos:

$$2 = p - q + \phi \leq 6 - 9 + 4 = 1,$$

lo cual es una contradicción y así concluimos que $K_{3,3}$ no es aplanable.

Retomemos el problema del Coloreado de gráficas y recordemos que en general no siempre es posible hallar el número cromático, sin embargo es posible demostrar que cuando se trata de gráficas planas, el problema se reduce considerablemente. El siguiente resultado provee elementos que necesitaremos para demostrar el famoso Teorema de los Cinco Colores.

TEOREMA 3.7 Toda gráfica aplanable contiene un vértice de grado a lo más cinco.

DEMOSTRACION: Sea $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, si $p \leq 6$ el resultado se obtiene trivialmente. En otro caso, sea G con $p \geq 6$ y supongamos que $gr_G(v) \geq 6$ para toda $v \in V(G)$, así que:

$$p\delta(G) \leq \sum_{v \in V(G)} gr(v)$$

lo que implica que:

$$2q \geq 6p,$$

esto es:

$$q \geq 3p$$

lo cual es imposible pues por el corolario 3.2 se tiene que:

$$q \leq 3p-6,$$

de modo que existe al menos un vértice $v \in V(G)$ tal que $gr(v) \leq 5$.

TEOREMA 3.8 Toda gráfica plana es cinco-coloreable.

DEMOSTRACION: Se hará por contradicción. Supongamos que el resultado es falso, entonces existe una gráfica plana 6-coloreable que es crítica a la que llamaremos G . Por el teorema 3.22 $\delta(G) \leq 5$ y por el teorema 2.9 $\delta(G) \geq 5$, de donde $\delta = 5$. Sea $v \in V(G)$ tal que $gr(v) = 5$. Como G es crítica, $G-v$ es 5-coloreable. Sea $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ las clases cromáticas de una 5-coloración de $G-v$. Dado que G no es 5-coloreable v debe ser adyacente a un vértice de cada una de las clases cromáticas. Llamemos v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 a cada uno de los vértices adyacentes a v , donde $v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq 5$, tomados en sentido contrario a las manecillas del reloj (Figura 3.13).



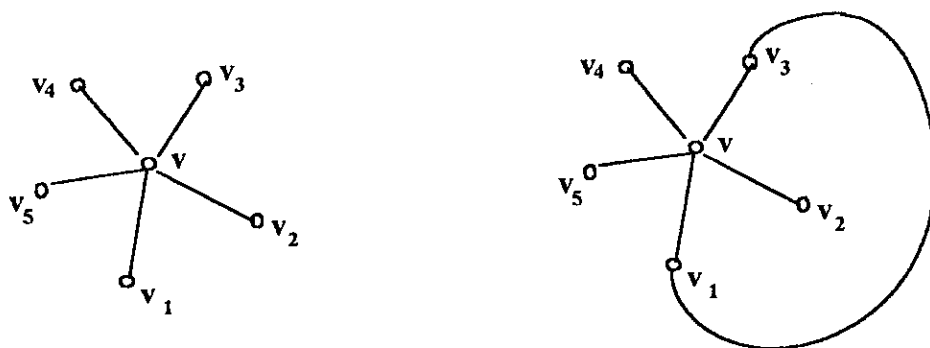


FIGURA 3.13

Sea $G_{ij} = \langle V_i \cup V_j \rangle$, entonces v_i y v_j deben estar en la misma componente conexa de G_{ij} pues de no ser así, podríamos considerar a la componente G_{ij} que contuviera a v_i e intercambiar en ella los colores i por j , obteniendo así una 4-coloración de $G-v$, lo cual no puede ocurrir pues $G-v$ es 5-coloreable. Consideremos entonces a T_{ij} una $v_i v_j$ -trayectoria en G_{ij} y C el ciclo v, v_1, T_{13}, v , (suponiendo $i=1, j=3$, los otros casos son análogos) Figura 3.13. Como C separa a v_2 y v_4 entonces por el teorema de Jordan, cualquier T_{24} -trayectoria debe cruzar a C en algún punto ya que $v_2 \in \text{int}(C)$ y $v_4 \in \text{ext}(C)$, y puesto que G es una gráfica plana, este punto debe ser un vértice, pero esto es imposible, ya que los vértices de una T_{24} -trayectoria están coloreados con los colores 2 y 4, que no son los asignados a ningún vértice de C , por lo cual concluimos que G no puede ser 6-coloreable, esto es G es 5-coloreable.

Hemos demostrado el teorema de los cinco colores, sin embargo es conveniente comentar que una 4-coloración de una gráfica plana es la mejor posible, pues existen gráficas planas que no son 3-coloreables, K_4 es el ejemplo más simple.

Finalmente para concluir el capítulo extenderemos la fórmula de Euler para poliedros

La teoría de gráficas aplanables está estrechamente ligada con el estudio de los poliedros. A cada poliedro P puede asociarse una gráfica conexa plana $G(P)$, cuyos vértices y aristas son los vértices y aristas de P . Todo vértice de $G(P)$ tiene grado por lo

menos 3. Ya que $G(P)$ es una gráfica plana, las caras de P son las regiones de $G(P)$, y toda arista de $G(P)$ está en la frontera de 2 regiones. A partir de esto, puede verse que la fórmula de Euler es también válida para los poliedros, si P es un poliedro con V vértices, A aristas y F caras, se cumple que:

$$V - A + F = 2.$$

La figura 3.14 muestra un poliedro P y su gráfica asociada.



FIGURA 3.14

DEFINICION: Un poliedro regular es aquel en que las fronteras de sus caras son polígonos regulares congruentes y todos los ángulos de sus vértices son iguales

Si V_n denota número de elementos del conjunto de vértices de grado n y F_n el número de elementos del conjunto de caras cuya frontera es un ciclo de longitud n , entonces, para un poliedro regular $V=V_k$ para alguna k , y $F=F_h$ para alguna h . Por ejemplo en el caso del cubo se tiene $V=V_3$ y $F=F_4$. Además:

$$2A = \sum_{n \geq 3} nV_n = \sum_{n \geq 3} nF_n$$

Lo cual nos será muy útil, en la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 3.9 La frontera de al menos una cara de cualquier poliedro es un ciclo de longitud n , para $n \in \{3, 4, 5\}$.

DEMOSTRACION: Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos $F_3=F_4=F_5=0$

entonces:

$$2A = \sum_{n \geq 6} n F_n \geq \sum_{n \geq 6} 6 F_n = 6 \sum_{n \geq 6} F_n = 6F$$

de donde

$$F \leq \frac{A}{3}$$

Además:

$$2A = \sum_{n \geq 3} n V_n \geq \sum_{n \geq 3} 3 V_n = 3 \sum_{n \geq 3} V_n = 3V$$

de aquí que

$$V \leq \frac{2}{3} A$$

Sustituyendo en el Teorema de Euler:

$$\frac{2}{3}A - A + \frac{A}{3} \geq V - A + F = 2$$

lo cual es una contradicción, de donde concluimos el teorema.

Para concluir el capítulo, presentamos el siguiente teorema, el cual nos proporciona una clasificación de los poliedros regulares.

TEOREMA 3.10 Existen exactamente cinco poliedros regulares.

DEMOSTRACION: Sea P un poliedro regular y sea $G(P)$ su gráfica plana asociada.

Entonces:

$$V - A + F = 2.$$

De aquí que:

$$-8 = 4A - 4V - 4F = 2A + 2A - 4V - 4F = \sum_{n \geq 3} n V_n + \sum_{n \geq 3} n F_n - 4 \sum_{n \geq 3} V_n - 4 \sum_{n \geq 3} F_n$$

De donde:

$$\sum_{n \geq 3} (n-4)V_n + \sum_{n \geq 3} (n-4)F_n$$

Ya que P es regular existen h y k ($h \geq 3, k \geq 3$) tales que $F = F_h$ y $V = V_k$,
Por lo tanto:

$$-8 = (h-4)F_h + (k-4)V_k,$$

además por el teorema 3.9,

$$3 \leq h \leq 5 \text{ y } 3 \leq k \leq 5,$$

Además:

$$hF_h = kV_k = 2A,$$

de donde se obtienen nueve casos a considerar:

CASO 1: Si $h=3$ y $k=3$, se tiene $-8 = -F_3 - V_3$ y $3F_3 = 3V_3$, así que $F_3 = V_3 = 4$, de donde P es **Tetraedro**.

CASO 2: Si $h=3$ y $k=4$, se tiene $-8 = -F_3$ y $3F_3 = 4V_4$, esto es $F_3 = 8$ y $V_4 = 6$, en este caso P es el **Octaedro**.

CASO 3: Si $h=3$ y $k=5$, se tiene $-8 = -F_3 + V_5$ y $3F_3 = 5V_5$, sustituyendo se obtiene $F_3 = 20$ y $V_5 = 12$, P es el **Icosaedro**.

CASO 4: Si $h=4$ y $k=3$, se tiene $-8 = -V_3$ y $4F_4 = 3V_3$, esto es $V_3 = 8$ y por tanto $F_4 = 6$, de modo que P es el **cubo**.

CASO 5: Si $h=4$ y $k=4$ se obtiene $-8=0$, lo cual es imposible.

CASO 6: Si $h=4$ y $k=5$ se obtiene $V_5 = -8$, lo cual también es imposible.

CASO 7: Si $h=5$ y $k=3$ se obtiene $-8=F_5 - V_3$ y $5F_5 = 3V_3$, de donde sustituyendo tenemos que $V_3=20$ y $F_5=12$, esto es P es el **dodecaedro**.

CASO 8: Si $h=5$ y $k=4$, se obtiene $-8=F_5$, lo cual también es imposible.

CASO 9: Si $h=5$ y $k=5$, se obtiene $-8 = F_5 + V_5$ y $5F_5 = 5V_5$, sustituyendo se obtiene $F_5 = V_5 = -4$, lo que es imposible.

Finalmente, comentaremos que una aplicación de las gráficas planas es la colocación del circuito impreso en el cual el interés es conocer si una red eléctrica (la cual puede representarse como una gráfica), es aplanable, pues de no serlo provocaría un corto circuito. Un algoritmo para resolver este problema fué desarrollado por Demoucron, Malgrange y Pertuiset (1964) y puede hallarse en [2], pps. 163, 169.

CAPITULO CUATRO

PASEOS EULERIANOS Y CICLOS HAMILTONIANOS

Un problema típico que aparece en los libros de Matemáticas Recreativas, consiste en preguntar si un diagrama dado, puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ninguna línea del mismo. Tal es el caso del conocido problema de "Dibujar la firma del Diablo". Otro problema similar lo es el "Problema de los puentes de Königsberg", al que hacíamos referencia al inicio del presente trabajo.

El presente capítulo, esta dedicado a estudiar las condiciones bajo las cuales una gráfica puede recorrerse, si a tal recorrido se le imponen ciertas restricciones. Analizaremos primero el caso de las Gráficas Eulerianas, y posteriormente las Gráficas Hamiltonianas.

DEFINICION: Sea G una gráfica y sea v un vértice de la misma. Un paseo que inicia y concluye en el vértice v , después de recorrer todas las aristas de la gráfica una única vez, se llama PASEO EULERIANO CERRADO en G .

DEFINICION: Un paseo que cumple las condiciones dadas por la definición anterior excepto que sea cerrado, se llama PASEO EULERIANO.

Observemos que si una gráfica tiene un paseo euleriano cerrado, entonces también tiene un paseo euleriano.

DEFINICION: Una gráfica G es euleriana, si posee un paseo euleriano cerrado.

La gráfica del problema de los puentes de Königsberg, así como también la gráfica de la firma del Diablo, son ejemplos de gráficas que no son eulerianas, y, las gráficas de la figura 4.1 son eulerianas.

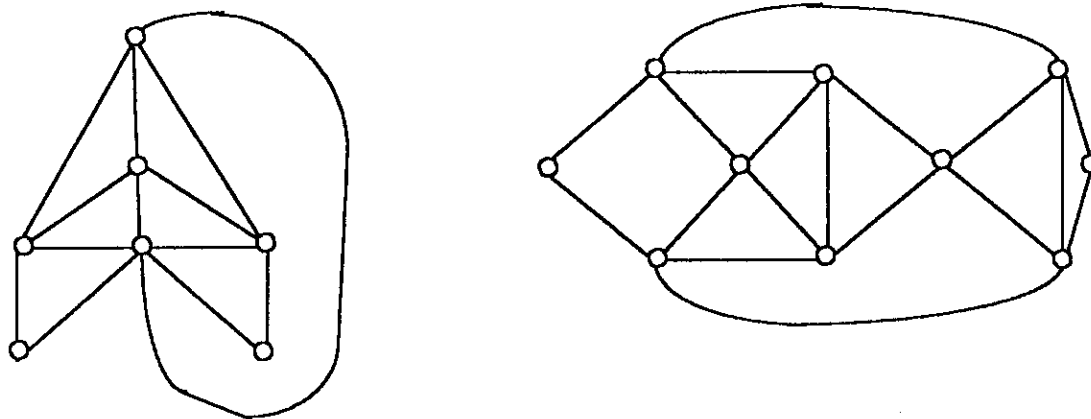


FIGURA 4.1

Existen condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica G sea euleriana, las cuales planteamos en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1 Una gráfica conexa G no trivial es euleriana si y solo si no contiene vértices de grado impar.

DEMOSTRACION: Iniciamos la demostración, probando que si G es euleriana, entonces no contiene vértices de grado impar. Sea G euleriana y P un paseo euleriano cerrado en G con origen y fin en el vértice u . Sea $v \neq u$, un vértice de G , ya que $v \in V(P)$, cada vez que se llega a v se utilizan dos aristas distintas de P , una para llegar a v , y otra para abandonarlo, y ya que un paseo euleriano contiene a todas las aristas de G , $gr_G(v)$ es par para todo $v \neq u$. Luego como P inicia y concluye en u , entonces se habrán utilizado dos aristas distintas incidentes en u , una para iniciar el paseo y otra para finalizarlo y si antes de concluir el paseo se pasa por u , se tendría que llegar por una arista distinta a la inicial y también abandonarlo por otra arista diferente, así que $gr_G(u)$ también es par, (FIGURA 4.2), con lo cual concluimos que todos los vértices de G son de grado par.

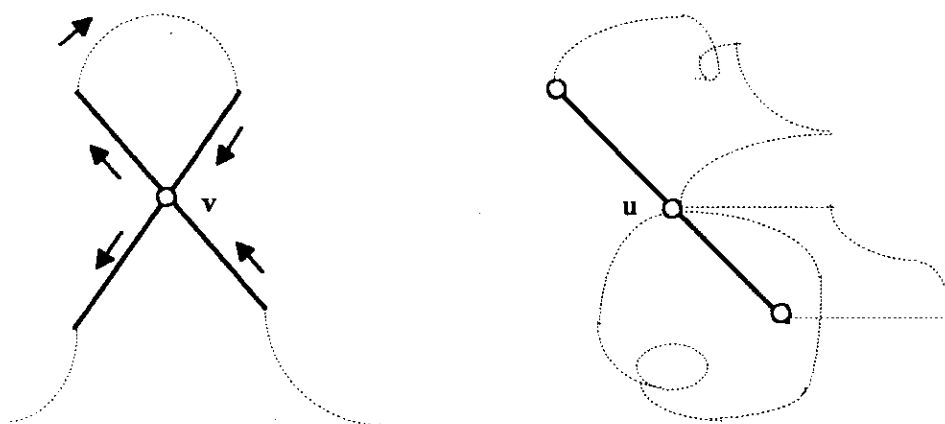


FIGURA 4.2

Por otro lado, supongamos $\text{gr}_G(v)$ es par, $\forall v \in V(G)$, y que G no es euleriana. Tomemos sin pérdida de generalidad, G con el menor número posible de aristas. Sea P un paseo cerrado de longitud máxima en G , demostraremos que P es euleriano, lo cual implicaría que G es euleriana, y así concluir la demostración. Lo haremos por contradicción. Supongamos que P no es euleriano, entonces existe una componente:

$$G' = A(G) - A(P)$$

G' tiene todas sus valencias pares y ya que G es conexa, entonces por el Teorema 0.33, existe al menos una arista a con uno de sus extremos en $V(P)$. Sea u un extremo de a , consideremos un paseo cerrado P' en G' con origen y fin en u , y cuya primera arista es a . Construyamos ahora un nuevo paseo cerrado como sigue: recorráse P hasta llegar por primera vez a u , recorráse enseguida P' (con lo cual regresamos a u) y continúese P hasta su término. Este nuevo paseo es más largo que P , lo cual está en contradicción con la maximalidad de P . (Figura 4.3), así se concluye que P es euleriano y al ser cerrado, G es euleriana.

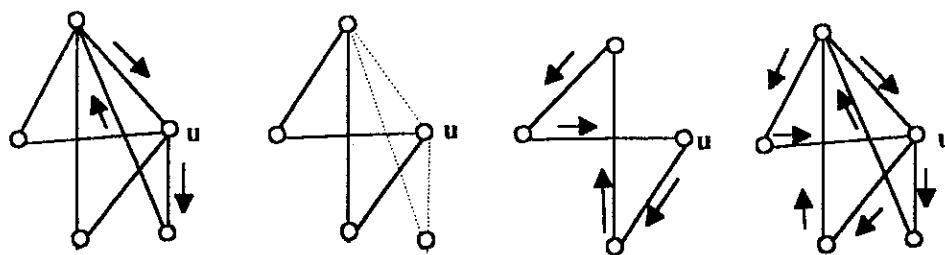


FIGURA 4.3

Puede considerarse el caso más general en donde G' resulte no conexa, pero en este caso podemos aplicar el teorema 0.7, además, haciendo una ligera modificación al teorema anterior podemos encontrar, en una gráfica G , un paseo euleriano.

COROLARIO 4.1 Si u y v son dos vértices distintos de una gráfica conexa G , entonces G contiene un uv -paseo euleriano, si y sólo si a lo más u y v tienen grado impar.

DEMOSTRACION: Si G contiene un paseo euleriano, entonces por el teorema 4.1, todos los vértices distintos a u y v son de grado par. Sólo u y v tienen grado impar pues no coinciden. Recíprocamente, si G no contiene vértices de grado impar, excepto u y v , G contiene un uv -paseo euleriano. Para lo cual basta con considerar la gráfica $G+uv$, la cual cumple con las condiciones del teorema 4.4, es decir, todos sus vértices tienen valencia par, así que contiene un paseo euleriano cerrado. Suprimiendo la arista uv , se obtienen el paseo euleriano buscado y además que, u y v son los únicos vértices de grado impar. (Figura 4.4).

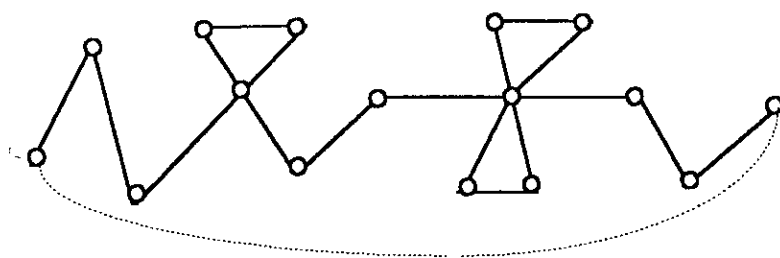


FIGURA 4.4

Existe otro tipo de gráficas con una característica muy similar a las eulerianas, sin embargo difieren notablemente. En 1855, Thomas P. Kirkman planteó el siguiente problema en un artículo dirigido a la Sociedad Real: "Dada la gráfica de un poliedro, ¿Puede siempre encontrarse un ciclo que pase por todos sus vértices?. Dos años más tarde, William Rowan Hamilton, introdujo un juego consistente en un dodecaedro regular de madera, veinte clavos (cada uno insertado en una esquina del sólido) y un trozo de cuerda. A cada clavo se le asignó el nombre de una ciudad importante de la época y el objetivo era encontrar una ruta a través de las aristas del dodecaedro que pasara por todas las ciudades exactamente una vez, y que además terminara en la ciudad que se había iniciado el recorrido. Para recordar que

ciudades ya habían sido visitadas, se utilizaba la cuerda conectando los clavos en el orden correspondiente. El dodecaedro resultó ser muy incómodo, de manera que se construyó una versión plana del juego (FIGURA 4.5). No se tienen indicios de que el juego haya tenido gran éxito popular, pero en cambio, entre los matemáticos ha quedado un recuerdo permanente.

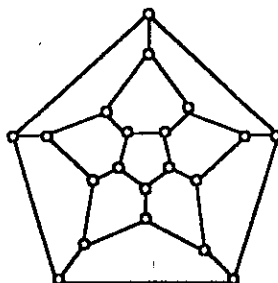


FIGURA 4.5

DEFINICION: Un ciclo Hamiltoniano en una gráfica G , es un ciclo que pasa por todos los vértices de G . Una gráfica hamiltoniana es aquella que contiene un ciclo hamiltoniano.

Las gráficas de la figura 4.6 son hamiltonianas.

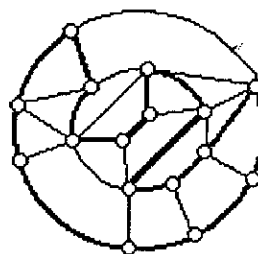
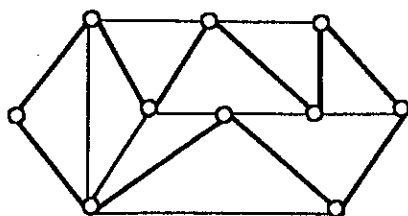


FIGURA 4.6

Dada la similitud entre los conceptos de gráfica euleriana y gráfica hamiltoniana y, basándose en la existencia de un criterio para decidir si una gráfica dada es euleriana o no, puede pensarse en la existencia de criterios análogos para determinar si una gráfica es o no Hamiltoniana. A pesar de esto, no es así y de hecho este es uno de los problemas aún abiertos en Teoría de Gráficas. Esta situación es lamentable pues la respuesta a muchas interrogantes

surgidas en la teoría de gráficas, depende de la existencia o no de ciclos de Hamilton, (por ejemplo el problema del agente viajero, que pertenece al campo de la optimización combinatoria).

Presentaremos a continuación, algunas condiciones necesarias y otras suficientes para la existencia de ciclos de Hamilton. La siguiente es una condición necesaria.

TEOREMA 4.2 Si G es Hamiltoniana, entonces para cualquier subconjunto propio no vacío S de los vértices de G , $c(G-S) \leq |S|$.

DEMOSTRACION: Sea C un ciclo hamiltoniano en G . Entonces, para cualquier subconjunto propio no vacío S de los vértices de G , se tiene que:

$$c(C-S) \leq |S|$$

Pues, podemos aplicar el teorema 1.8, para cada vértice de S . Y ya que $C-S$ es una subgráfica generadora de $G-S$, obtenemos que:

$$c(G-S) \leq c(C-S) \leq |S|$$

con lo cual:

$$c(G-S) \leq |S|$$

que es precisamente lo que deseabamos demostrar.

Podemos aplicar el teorema anterior para deducir que una gráfica no es hamiltoniana como sucede con la figura 4.7, la cual no es hamiltoniana, pues eliminándole el vértice de corte, podemos ver que la condición necesaria no se cumple, esto es $c(G-S)=2$ para $S=\{v\}$.

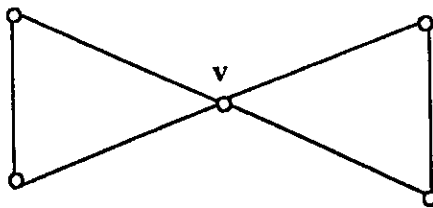


FIGURA 4.7

Aunque el teorema 4.2 puede usarse para mostrar que una gráfica no es hamiltoniana, hay casos en los que esto no puede deducirse a través de este criterio como sucede con la gráfica de Petersen (figura 4.8), ya que cumple con la condición necesaria para todo S subconjunto propio de la gráfica, como ejemplo si $S=\{v\}$, para cualquier vértice de G se tiene que $c(G-S)=1$

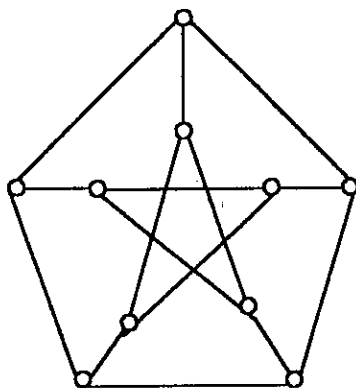


FIGURA 4.8

El siguiente resultado establece condiciones suficientes para que una gráfica sea hamiltoniana.

TEOREMA 4.3 (Dirac, 1952) Si G es una gráfica simple con p vértices, tal que $p \geq 3$ y $\delta(G) \geq \frac{p}{2}$, entonces G es hamiltoniana.

DEMOSTRACION: Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que el teorema es falso. Sea G una gráfica simple no hamiltoniana máxima respecto a esta propiedad, y con las características de las hipótesis. Como $p \geq 3$, G no puede ser completa. Sean u y v dos vértices no adyacentes en G . Por la forma en que se ha elegido a G , $G+uv$ es hamiltoniana. Y dado que G no es hamiltoniana, cualquier ciclo en $G+uv$ debe contener a la arista uv , esto permite ver que existe una trayectoria hamiltoniana T en G :

$$T = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$$

con origen en $u=v_1$ y fin en $v=v_n$. Sean:

$$R = \{v_i / uv_{i+1} \in A(G)\}$$

y,

$$S = \{v_i / v_i v \in A(G)\},$$

como $uv_n = v_1 v = uv$ no es arista de G , entonces $v_n \notin R \cup S$, de donde :

$$|T \cup S| < p$$

y, $R \cap S = \emptyset$, se tiene que:

$$|R \cap S| = 0$$

pues en caso de que existiera $v_i \in R \cap S$, se tendría un ciclo hamiltoniano de la forma :

$$C = v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1,$$

lo que contradice la hipótesis, de que G no es Hamiltoniana. (figura 4.9), por lo tanto:

$$gr_G(u) + gr_G(v) = |R| + |S| = |R \cup S| + |R \cap S| < p$$

luego considerando $gr_G(u)$ y $gr_G(v)$ son al menos $\delta(G)$, se tiene $\delta(G) < p/2$, contradiciendo las hipótesis, y así concluir el teorema.

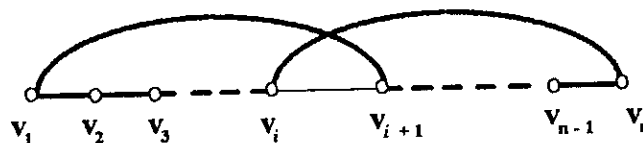


FIGURA 4.9

Como consecuencia del teorema anterior, vemos que haciendo una modificación se pueden establecer condiciones suficientes más fuertes, las cuales damos en el siguiente teorema:

TEOREMA 4.4 (Bondy y Chvátal) Sea G una gráfica simple y $p = V(G)$, además, si u, v vértices no adyacentes en G , tales que $gr_G(u) + gr_G(v) \geq p$. G es Hamiltoniana si y sólo si $G + uv$ es hamiltoniana.

DEMOSTRACION: Si G es hamiltoniana entonces $G+uv$ también lo es, por el teorema anterior. Por otro lado, supongamos que $G+uv$ es hamiltoniana y que G no lo es. Aplicando el desarrollo del teorema anterior se tendría $gr_G(u)+gr_G(v) < p$, lo que contradice las hipótesis, de donde podemos concluir que G es hamiltoniana.

Este resultado da origen a la siguiente:

DEFINICION: La cerradura de G , es la gráfica que se obtiene a partir de G , uniendo recursivamente parejas de vértices no adyacentes, cuya suma de grados sea al menos p , hasta agotar este tipo de parejas. Se denota $\alpha(G)$.

La figura 67 muestra la construcción de la cerradura de una gráfica G de 6 vértices, notemos que $\alpha(G)$ es completa, pero no siempre sucede así, por ejemplo si $\delta(G) < \frac{p}{2}$.

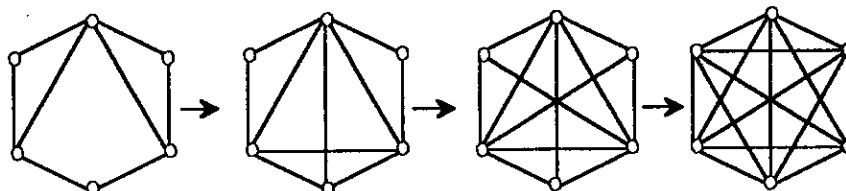


FIGURA 4.10

Utilizando la definición anterior podemos establecer un criterio para determinar si una gráfica es hamiltoniana, antes de presentarlo, demostraremos que $\alpha(G)$, está bien definida.

TEOREMA 4.5 $\alpha(G)$ está bien definida.

DEMOSTRACION: Sean G_1 y G_2 dos gráficas obtenidas a partir de G , uniendo recursivamente parejas de vértices no adyacentes, cuya suma de grados sea al menos p , hasta agotar tales parejas. Sean $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ y $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ las sucesiones de aristas unidas a G para formar G_1 y G_2 respectivamente. Demostraremos que toda arista de G_1 es una

arista de G_2 y que toda arista de G_2 es una arista de G_1 , lo cual haremos por contradicción. Supongamos que $a_{k+1} = uv$ es la primera arista en $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$, que no es arista de G_2 , y sea:

$$H = G + \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$$

De donde por la definición de G_1 se tiene:

$$gr_H(u) + gr_H(v) \geq p$$

Además por la elección de a_{k+1} , H es una subgráfica de G_2 , así que:

$$gr_{G_2}(u) + gr_{G_2}(v) \geq p$$

lo cual es una contradicción pues u y v no son adyacentes en G_2 , así toda arista de G_1 es también una arista de G_2 y reciprocamente, de donde concluimos que $\alpha(G)$ está bien definida.

A partir de lo anterior, podemos establecer el siguiente resultado.

TEOREMA 4.6: Una gráfica es hamiltoniana si y sólo si su cerradura es hamiltoniana.

DEMOSTRACION: Aplicamos el Teorema 4.4 cada vez que se le añade una nueva arista a G , para la formación de su cerradura. Luego, si la cerradura de G es hamiltoniana, entonces G también lo es trivialmente.

De aquí se deduce que todas las gráficas completas de tres o más vértices son hamiltonianas, lo cual se puede ver en el siguiente:

COROLARIO 4.2 Sea G una gráfica con $p \geq 3$. Si $\alpha(G)$ es completa, entonces G es hamiltoniana.

DEMOSTRACION: Sea $\alpha(G) = K_p$, entonces $\delta(G) = p-1 > p/2$, así se satisfacen las condiciones del teorema 4.3, y entonces $\alpha(G)$ es hamiltoniana, y aplicando el teorema 4.6, concluimos que G también lo es.

Como un ejemplo tenemos la gráfica de la figura 4.11 cuya cerradura es completa y por tanto se concluye que G es hamiltoniana, en tal figura el recorrido hamiltoniano se obtiene siguiendo la numeración de los vértices.

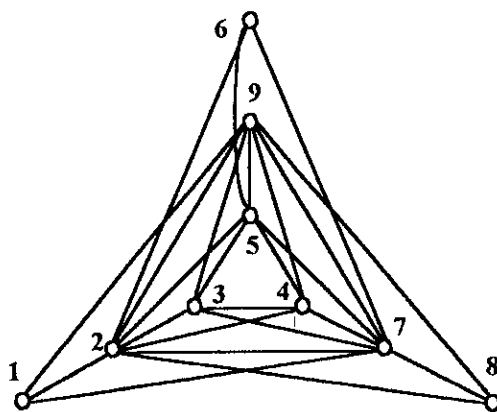


FIGURA 4.11

El Corolario 4.2, puede usarse para deducir condiciones suficientes para que una gráfica sea hamiltoniana, en términos de los grados de sus vértices, por ejemplo dado que $\alpha(G)$ es completa cuando $\delta(G) \geq \frac{p}{2}$, puede aplicarse la condición del teorema 4.3 (Dirac), y ver que es inmediata. En el siguiente teorema, con el cual concluimos el capítulo, se establece una condición suficiente más general.

TEOREMA 4.7 (Chvátal, 1972) Sea G una gráfica con sucesión de grados:

$$(d_1, d_2, d_3, \dots, d_p),$$

donde $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_p$ y $p \geq 3$. Si no existe $m < \frac{p}{2}$, para la cual se cumpla que $d_m \leq m$ y $d_{p-m} < p-m$, entonces G es hamiltoniana.

DEMOSTRACION: Sea G con las hipótesis del teorema. El procedimiento que utilizaremos en la demostración, será demostrar que la cerradura de G es completa, y posteriormente concluir que G debe ser hamiltoniana, por el Corolario 4.2.

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\alpha(G)$ no es completa y denotemos por $d'(v)$ al grado de un vértice v en $\alpha(G)$. Sean u y v vértices no adyacentes en $\alpha(G)$, tales que:

$$d'(u) \leq d'(v)$$

y $d'(u)+d'(v)$ lo más grande posible. Puesto que u y v son vértices no adyacentes en $\alpha(G)$, entonces:

$$d'(u)+d'(v) < p$$

Denotemos por S al conjunto de vértices en $V-\{v\}$ que no son adyacentes a v en $\alpha(G)$ y T al conjunto de vértices en $V-\{u\}$ que no son adyacentes a u en $\alpha(G)$. Claramente :

$$|S| = p-1 - d'(v)$$

y

$$|T| = p-1 - d'(u)$$

además por la forma en que se ha elegido a u y v , cada vértice en S tiene grado a lo más $d'(u)$, pues todo vértice no adyacente a v en $\alpha(G)$ es tal que $d'(u) \leq d'(v)$ y $d'(u)+d'(v)$ es lo más grande posible, y cada vértice de $T \cup \{u\}$ tiene grado a lo más $d'(v)$, pues $d'(u) \leq d'(v)$. Tomando $d'(u)=m$ vemos que $\alpha(G)$ tiene al menos m vértices de grado a lo más m y al menos $p-m$ vértices de grado menor que $p-m$, pues $d'(v) < p-m$. Luego ya que G es una subgráfica generadora de $\alpha(G)$, esto es válido para G , así :

$$d_m \leq m$$

y

$$d_{p-m} < p-m,$$



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

lo que contradice las hipótesis, pues:

$$d'(u) + d'(v) < p$$

y considerando que:

$$d'(u)=m$$

se tiene que:

$$d'(v) < p-m$$

luego:

$$m = d'(u) \leq d'(v) < p-m$$

así que:

$$m < p-m$$

de donde

$$m < p/2$$

lo que contradice las hipótesis del teorema. Concluimos que $\alpha(G)$ debe ser completa y así aplicando el Corolario 4.2, concluimos que G es hamiltoniana.

Un procedimiento para deducir si una gráfica es hamiltoniana o no, es encontrar la sucesión de grados de la gráfica, por ejemplo se puede hacer esto para la gráfica de la figura 4.11, donde la sucesión de grados es $(3,3,3,5,5,6,7,8,8)$ y verificando para $m=1, 2, 3, 4$ podemos ver que la condición suficiente se cumple y de aquí deducir que la gráfica es hamiltoniana. Sin embargo notemos que en la gráfica de la figura 4.10 donde la sucesión de grados es $(2,2,2,3,3,4,4)$ no cumple con la condición suficiente y puede demostrarse que es hamiltoniana por el Corolario 4.2, de donde podemos concluir que no es una condición necesaria. De aquí podemos ver que el Teorema 4.3 es más fuerte que el Teorema 4.7 pero no tan fuerte como el Corolario 4.2.

En el inicio del capítulo caracterizamos las gráficas eulerianas, históricamente éste es el primer teorema en teoría de gráficas, el cual fué utilizado por Euler en la resolución del problema de los puentes de Königsberg. Además, la demostración constructiva de la condición suficiente sugiere el algoritmo recursivo para encontrar paseos eulerianos no sólo en gráficas simples, sino en general en gráficas ([11], pp 412). Si consideramos el caso de gráficas ponderadas este problema se transforma en un problema de optimización.

Es importante notar que si una gráfica es euleriana, entonces también es hamiltoniana, pero no reciprocamente.

CAPITULO CINCO

APAREAMIENTOS

Supóngase que cuatro personas, A, B, C, D, llenan solicitudes para cinco trabajos t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , considere que el solicitante A está capacitado para los trabajos t_2, t_3 ; el trabajador B está capacitado para los trabajos t_2, t_5 ; el C para los trabajos t_1, t_3, t_4, t_5 ; y el D para los trabajos t_2, t_5 . ¿Es posible, dar trabajo a cada uno de los solicitantes?. Este problema se conoce como el Problema de Asignación de Personal.

En el presente capítulo estaremos interesados en estudiar las condiciones, bajo las cuales una gráfica dada, tiene un apareamiento perfecto. El problema de apareamientos es asociar parejas de objetos de dos conjuntos distintos, por ejemplo trabajadores con empleos como en el ejemplo anterior, en los cuales la gráfica asociada es una gráfica bipartita, o bien puede no involucrar conjuntos diferentes, como en la elección de los contrincantes en cada etapa de un torneo de ajedrez. Así, puede interesarnos encontrar en una gráfica dada apareamientos que contengan el mayor número de aristas o bien en otra versión, asignarle ponderación a cada una de las aristas de la gráfica y encontrar apareamientos de ponderación mínima o máxima. Esto último se enmarca dentro de los problemas de optimización, en el caso particular de gráficas bipartitas se conoce como el problema de asignación. Este tipo de problemas han sido atacados en las últimas décadas y se han desarrollado algoritmos que los resuelven de manera muy eficiente, (Ver, [8], pps. 608, 658; [11], pps. 218, 269).

Iniciaremos dando una serie de definiciones.

DEFINICION: Un subconjunto M de $A(G)$, es un apareamiento en G , si sus aristas forman un conjunto independiente, esto es, aristas dos a dos no adyacentes.

DEFINICION: Sea M un apareamiento en G . Si u y $v \in V(G)$ y $uv \in M$, diremos que u y v están apareados. Además si $u \in V(G)$ y u incide en alguna arista de M , diremos que u está M -saturado, en otro caso diremos que u no está M -saturado.

DEFINICION: M es un apareamiento perfecto, si para todo vértice $u \in V(G)$, u está M -saturado.

Toda gráfica G , con al menos una arista tiene al menos un apareamiento, el problema interesante es analizar bajo que condiciones este apareamiento es perfecto. Un procedimiento para hallar apareamientos perfectos es buscar aquellos que sean de cardinalidad máxima, es decir aquellos que saturen el mayor número de vértices, puesto que todo apareamiento perfecto es, obviamente de cardinalidad máxima.

En la figura 5.1, presentamos un apareamiento máximo, y un apareamiento perfecto.

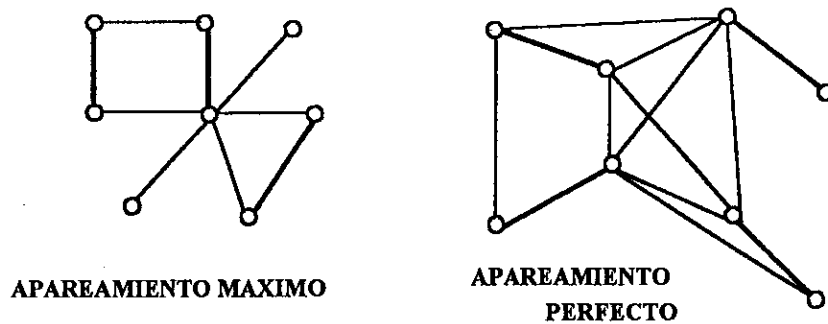


FIGURA 5.1

Para establecer un criterio que nos permita distinguir apareamientos máximos, daremos las siguientes definiciones.

DEFINICION: Sea G una gráfica y M un apareamiento en G . Una trayectoria M -alternada es una trayectoria en G , cuyas aristas están alternadamente en M y M^c .

DEFINICION: Una trayectoria M -aumentante es una trayectoria M -alternada que inicia y termina en vértices no M -saturados.

La figura 5.2 muestra una trayectoria M -aumentante.

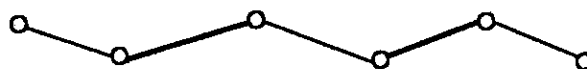


FIGURA 5.2

OBSERVACION: Notemos que en una trayectoria M-aumentante, se tiene un número par de vértices y un número impar $2s + 1$ de aristas, de las cuales s están en M y $s+1$ no están en M .

DEFINICION: Sean M y M' dos apareamientos. La diferencia simétrica de M y M' se define por:

$$M \Delta M' = (M - M') \cup (M' - M).$$

El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes para que un apareamiento M en G , sea de cardinalidad máxima.

TEOREMA 5.7 (Berge, 1957) Un apareamiento M en G , es de cardinalidad máxima si y solo si, G no contiene ninguna trayectoria M-aumentante.

DEMOSTRACION: Probaremos primero que si G no contiene ninguna trayectoria M-aumentante, entonces todo apareamiento en G es de cardinalidad máxima, lo cual haremos por contradicción.

Sea M un apareamiento en G y supongamos que G contiene una trayectoria M-aumentante, demostraremos que M no es de cardinalidad máxima. Sea

$$T = v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2m+1},$$

tal trayectoria. Definimos $M' \subseteq A(G)$ de la siguiente manera:

$$M' = (M \setminus \{v_1 v_2, v_3 v_4, \dots, v_{2m-1} v_{2m}\}) \cup \{v_0 v_1, v_2 v_3, \dots, v_{2m} v_{2m+1}\}$$

así M' es un apareamiento de G , y:

$$|M'| > |M|$$

con lo que M no es de cardinalidad máxima.

Ahora demostremos que si M es un apareamiento de cardinalidad máxima en G , entonces G no contiene ninguna trayectoria M-aumentante. Para lo cual, tomaremos M un apareamiento que no es de cardinalidad máxima y demostraremos que G contiene una trayectoria M-aumentante

Sea M' , un apareamiento de cardinalidad máxima en G , entonces, por hipótesis:

$$|M'| > |M|$$

para todo $M \subseteq G$. Tomemos $H = \langle M \Delta M' \rangle$, (Figura 5.3).

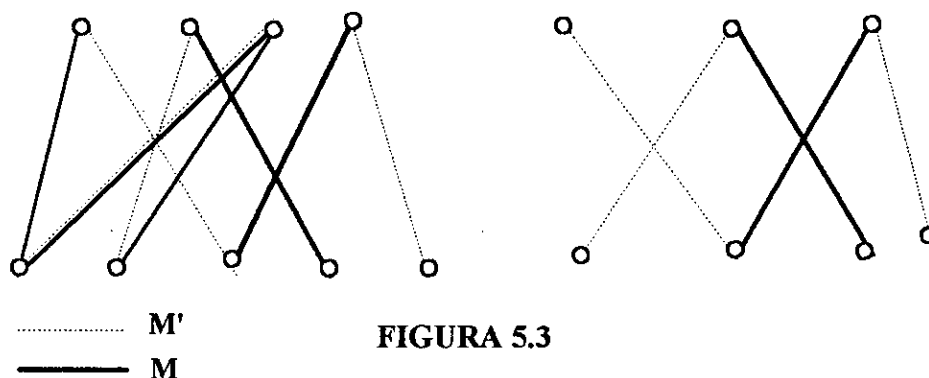


FIGURA 5.3

Para todo $v \in V(H)$, se tiene que $gr_H(v)$ es igual a uno o dos, pues cada vértice de H es a lo más incidente en una arista de M y una de M' , lo que significa que toda componente de H es un ciclo o una trayectoria, con aristas alternadamente en M y M' , pero ya que por hipótesis $|M'| > |M|$, H debe contener más aristas de M' que de M , por lo cual alguna trayectoria T de H debe empezar y finalizar en aristas de M' . El inicio y fin de esta trayectoria están M' -saturadas en H , entonces estos vértices no están M -saturados en G y así T es M -aumentante en G , con lo cual concluimos el Teorema.

En muchas aplicaciones se desea, hallar apareamientos que saturen a todo vértice de un subconjunto de la gráfica, Tal es el caso del Problema de la Asignación de Personal, o del Problema de los Casamientos, donde las gráficas correspondientes son Bipartitas. Para este caso existen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tales apareamientos, dados por Hall (1935). Antes de establecerlas necesitamos la siguiente definición.

DEFINICION: Sea S un subconjunto de vértices de G , definimos al conjunto de vecinos de S en G , como el conjunto de todos los vértices adyacentes a algún vértice de S . Lo cual denotamos por: $N_G(S)$. Al conjunto $N_G(S) - S$ se llama vecindad de S .

TEOREMA 5.2 Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) . G contiene un apareamiento que satura a todo vértice de X si y solo si :

$$|N_G(S)| \geq |S|, \text{ para todo } S \subseteq X$$

DEMOSTRACION: Sea G como en las hipótesis, demostremos que si G contiene un apareamiento que satura a todo vértice de X , entonces $|N_G(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Así, supongamos que G contiene un apareamiento M , que satura a todo vértice de X , y sea S un subconjunto de X . Ya que M es un apareamiento que satura todos los vértices de X , entonces todos los vértices de S están apareados bajo M , con vértices distintos de $N_G(S)$, así:

$$|N_G(S)| \geq |S| \text{ para todo } S \subseteq X$$

Recíprocamente, supongamos que si G es bipartita con $|N_G(S)| \geq |S|$, para todo S , entonces G contiene un apareamiento que satura a todo vértice de X . Lo haremos por contradicción. Esto es, supongamos que G es como en las hipótesis; y que no contiene un apareamiento que sature a todos los vértices de X . Sea M un apareamiento máximo en G . Por hipótesis M no satura a todos los vértices de X . Entonces, sea u un vértice no M -saturado de X y sea Z el conjunto de todos los vértices conectados a u por trayectorias M -alternantes. Como M es un apareamiento de cardinalidad máxima, por el teorema 5.1, G no contiene trayectorias M -aumentantes, de donde podemos inferir que u es el único vértice no M -saturado en Z . Sea:

$$S = Z \cap X \text{ y } T = Z \cap Y$$

(Figura 5.4).

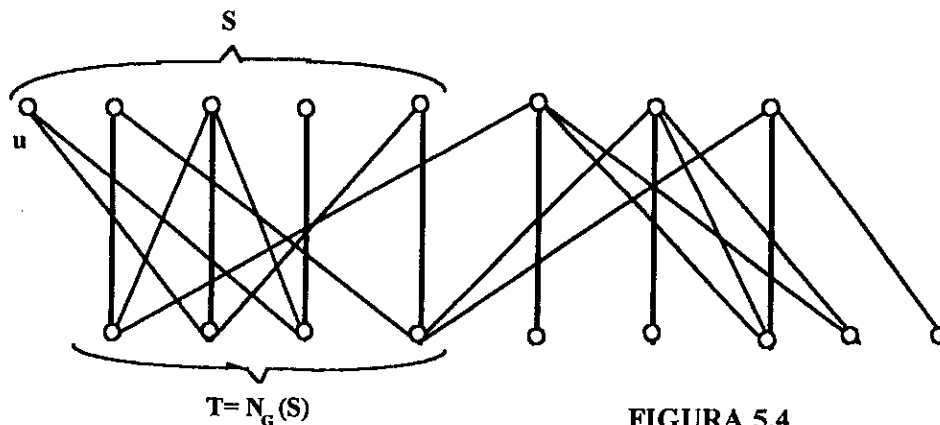


FIGURA 5.4

Claramente los vértices de $S - \{u\}$ están apareados bajo M con los vértices de T , por tanto

$$|T| = |S| - 1$$

y

$$T \subseteq N_G(S),$$

pero como todo vértice en $N_G(S)$ está conectado a u por una trayectoria M -alternante,

$$N_G(S) = T$$

Luego como:

$$|N_G(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$$

se tiene que:

$$N_G(S) < |S|$$

contradiendo las hipótesis. De donde podemos concluir que M satura a todos los vértices de X , y así queda demostrado el teorema.

Es importante señalar que este teorema provee las bases para un buen algoritmo que permita encontrar apareamientos máximos en gráficas bipartitas, el cual se puede encontrar en [2], pps. 80, 89). Además se tiene el siguiente corolario, el cual se conoce como el Teorema Matrimonial de Hall.

COROLARIO 5.1 Si G es bipartita y k -regular, $k > 0$, entonces G tiene un apareamiento perfecto.



DEMOSTRACION: Sea G bipartita y k -regular con bipartición (X, Y) . Por el corolario 0.4,

$$|X| = |Y|$$

Sea $S \subseteq X$ y A el conjunto de aristas incidentes en S , y A' el conjunto de aristas incidentes en $N_G(S)$. Por definición de $N_G(S)$, $A \subseteq A'$ y así:

$$k |N_G(S)| = |A| \geq |A'| = k|S|$$

así que:

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

Entonces, aplicando el teorema 5.2, concluimos que G tiene un apareamiento M que satura a todo vértice de X , y como

$$|X| = |Y|$$

se concluye que M es perfecto.

Con el propósito de establecer la relación entre el número de aristas de un apareamiento máximo y una cubierta mínima, damos las siguientes definiciones:

DEFINICION: Sea $K \subseteq E(G)$. K es una cubierta de G , si toda arista de G tiene al menos un extremo en K .

DEFINICION: K es una cubierta mínima de G , si no existe una cubierta K' , tal que $|K'| < |K|$.

La figura 5.5, muestra una cubierta y una cubierta mínima de una gráfica.



FIGURA 5.5.

Si K es una cubierta de G , y M es un apareamiento de G , entonces K contiene al menos uno de los extremos de las aristas de M . Entonces, para cualquier apareamiento M' y cualquier cubierta K , $|M| \leq |K|$. Particularmente, si M' es un apareamiento máximo y $\bar{K}$ es una cubierta mínima entonces:

$$|M'| \leq |\bar{K}|$$

En general, la igualdad no se cumple, por ejemplo en la figura 5.5, el apareamiento máximo es de cardinalidad 3 mientras que la cubierta mínima de cardinalidad 4. Sin embargo, si G es bipartita con bipartición (X, Y) la igualdad si se cumple, como lo probaremos inmediatamente después de nuestro siguiente resultado.

TEOREMA 5.3 Sea M un apareamiento y K una cubierta tal que $|M| = |K|$, entonces M es un apareamiento máximo y K una cubierta mínima.

DEMOSTRACION: Si M' es un apareamiento máximo y $\bar{K}$ una cubierta mínima, entonces:

$$|M| \leq |M'| \leq |\bar{K}| \leq |K|$$

y ya que $|M| = |K|$ se concluye que $|M| = |M'|$ y $|K| = |\bar{K}|$.

TEOREMA 5.4 Sea G una gráfica Bipartita. El número de aristas de un apareamiento máximo en G , es igual al número de vértices de una cubierta mínima.

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) , y sea M' un apareamiento máximo en G . Sea U el conjunto de vértices no M' -saturados en X y sea Z el conjunto de todos los vértices conectados con vértices de U por trayectorias M' -alternantes. Sean $S = Z \cap X$ y $T = Z \cap Y$, entonces como en el teorema 5.2, tenemos que todo vértice de T está M' saturado y así $N_G(S) = T$. Definiendo:

$$\bar{K} = (X \setminus S) \cup T$$

(Figura 5.6). Tenemos que toda arista de G debe tener al menos un extremo en $\bar{K}$, pues de otra forma, se tendría una arista con un extremo en S y otro en $Y \setminus T$ contradiciendo así la hipótesis de que $N_G(S) = T$, entonces $\bar{K}$ es una cubierta de G y claramente:

$$|M'| = |\bar{K}|$$

y por el teorema anterior, $\bar{K}$ es una cubierta mínima y así concluimos el teorema.

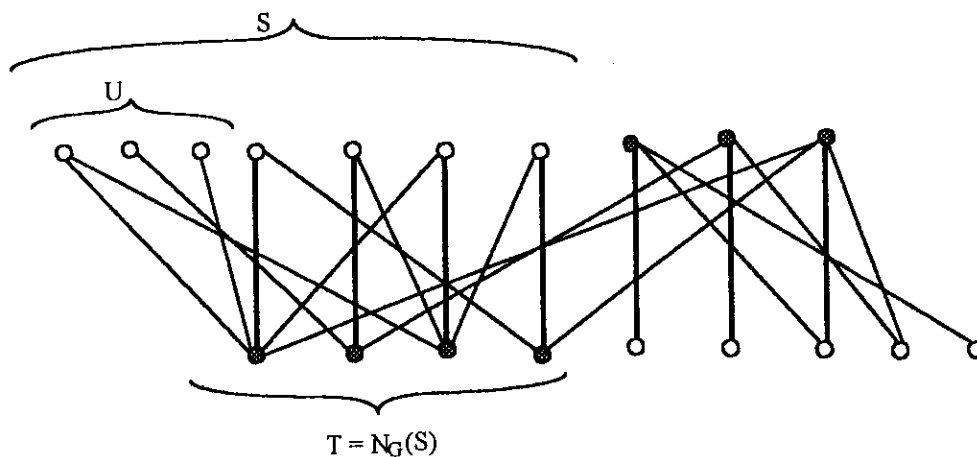


FIGURA 5.6

Finalmente concluimos el capítulo, presentando un resultado que nos da condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica G , tenga un apareamiento perfecto. Antes de establecer este resultado necesitamos dar la siguiente definición.

DEFINICION: Una componente conexa de una gráfica G es par o impar de acuerdo al número de sus vértices. Se denota $o(G)$ el número de componentes impares de G .

TEOREMA 5.5 (Tutte, 1947) Una gráfica G tiene un apareamiento perfecto si y solo si:

$$o(G-S) \leq |S|$$

para todo $S \subset V(G)$.

DEMOSTRACION: Primero demostraremos que si G tiene un apareamiento perfecto, entonces $o(G-S) \leq |S|$ para todo $S \subset V(G)$.

Así, supongamos que G tiene un apareamiento perfecto M . Sea $S \subset V(G)$, y sean $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ las componentes impares de $G-S$. Luego, como G_i es componente impar para todo $i, i=1, 2, \dots, n$, entonces algún vértice u_i de G_i debe ser apareado bajo M con un algún vértice v_i de S (Figura 5.7). Así como $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subseteq S$, se tiene que:

$$o(G-S) = n = |\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}| \leq |S|$$

con lo cual

$$o(G-S) \leq |S|$$

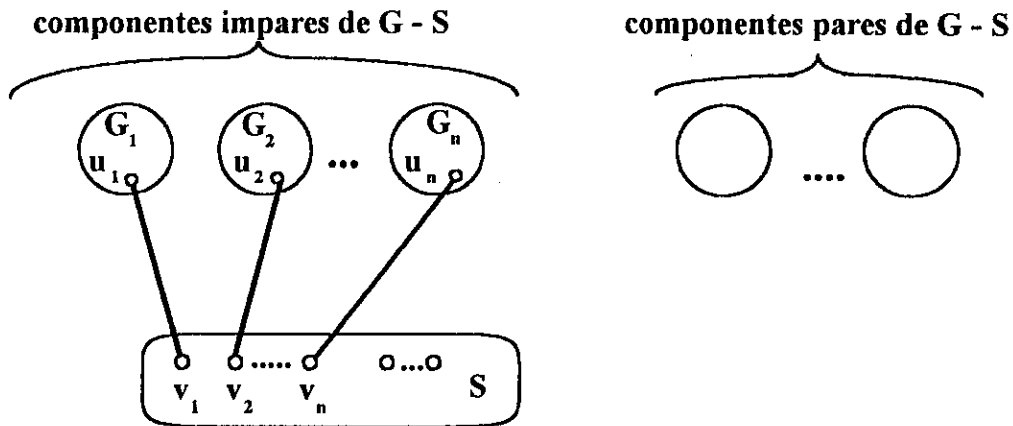


FIGURA 5.7

Recíprocamente, demostremos que si $o(G-S) \leq |S|$, para todo $S \subset V(G)$, entonces G tiene un apareamiento perfecto. Para lo cual procederemos por contradicción. Supongamos que se cumplen las hipótesis y que G no tiene apareamiento perfecto.

Así G es una subgráfica generadora de G^* , donde G^* es una gráfica máxima que no tiene apareamiento perfecto. Luego, como $G-S$ es una subgráfica generadora de G^*-S se tiene que:

$$o(G^*-S) \leq o(G-S) \leq |S|, \text{ para todo } S \subset V(G^*)$$

En particular si $S = \emptyset$, vemos que $o(G^*)=0$ y así $V(G^*)$ es par. Sea $V(G^*)=p$ y denotemos por U el conjunto de vértices de grado $p-1$ en G^* . Supongamos que $U \neq V(G^*)$, pues en caso contrario G^* tiene un apareamiento perfecto. Probaremos entonces que G^*-U es la unión disjunta de grafías completas, para posteriormente aplicar nuestras hipótesis y llegar a la contradicción deseada. Esto lo haremos por contradicción, esto es, supongamos que existe alguna componente de G^*-U que no es completa. Entonces en esta componente existen vértices x, y, z tal que:

$$xy \in A(G^*), yz \in A(G^*) \text{ pero } xz \notin A(G^*),$$

además, ya que $y \in G^*-U$, $y \notin U$, y puesto que G^*-U no es completa, existe un vértice $w \in G^*-U$ tal que $yw \notin A(G^*)$, (figura 5.8)

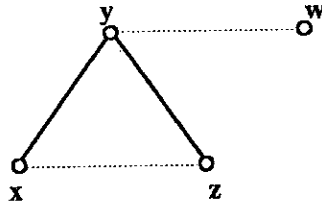


FIGURA 5.8

Luego, considerando que G^* es una grafica máxima, respecto a la propiedad de no tener apareamiento perfecto, $G^* + a$, tiene apareamiento perfecto para toda $a \notin A(G^*)$. Sean M_1 y M_2 apareamientos perfectos en $G^* + xz$ y $G^* + yw$, respectivamente, y denotemos por H la subgráfica de $G^* \cup \{xz, yw\}$ inducida por $M_1 \Delta M_2$. Como todo vértice de H tiene grado 2, H es la unión disjunta de ciclos, y además todos esos ciclos son pares, puesto que las aristas de M_1 y M_2 se alternan en ellos. Distinguimos dos casos:

CASO 1: xz y yw están en diferente componente de H (Figura 5.9). Entonces, si yw está en el ciclo C de H , las aristas de M_1 en C , junto con las aristas de M_2 que no están en C , constituyen un apareamiento perfecto de G^* , contradiciendo la forma en que G^* fué elegida.

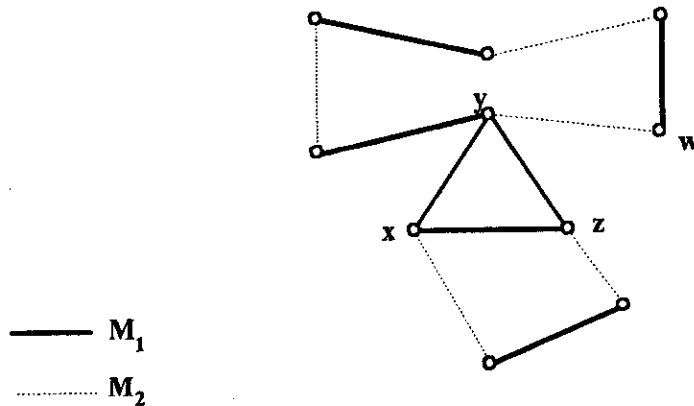
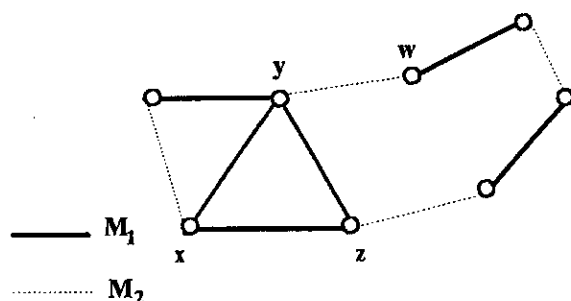


FIGURA 5.9

CASO 2: xz y yw están en la misma componente C de H . Supongamos que los vértices x, y, w, z están en este orden en C (Figura 5.10), entonces las aristas de M_1 en la sección $yw...z$ de C , junto con la arista yz y las aristas de M_2 que no están en la sección $yw...z$ de C constituyen un apareamiento perfecto en G^* , contradiciendo de nuevo la elección de G^* .



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

FIGURA 5.10

Ya que ambos casos llevan a una contradicción, concluimos que $G^* - U$ es necesariamente la unión disjunta de gráficas completas. Luego como por hipótesis:

$$o(G^* - U) \leq |U| \quad \forall U \subset V(G^*)$$

a lo sumo $|U|$ de esas componentes, son impares, pero entonces podemos dar un apareamiento perfecto para G^* : un vértice en cada componente impar de $G^* - U$ es apareado con un vértice de U , los vértices restantes en U y en $G^* - U$ son apareados como figura 5.11, lo cual es posible pues todas las componentes son gráficas completas.

Puesto que supusimos que G^* no tenía apareamiento perfecto y hemos llegado a una contradicción, concluimos que G necesariamente tiene un apareamiento perfecto, y por lo tanto concluimos el teorema.

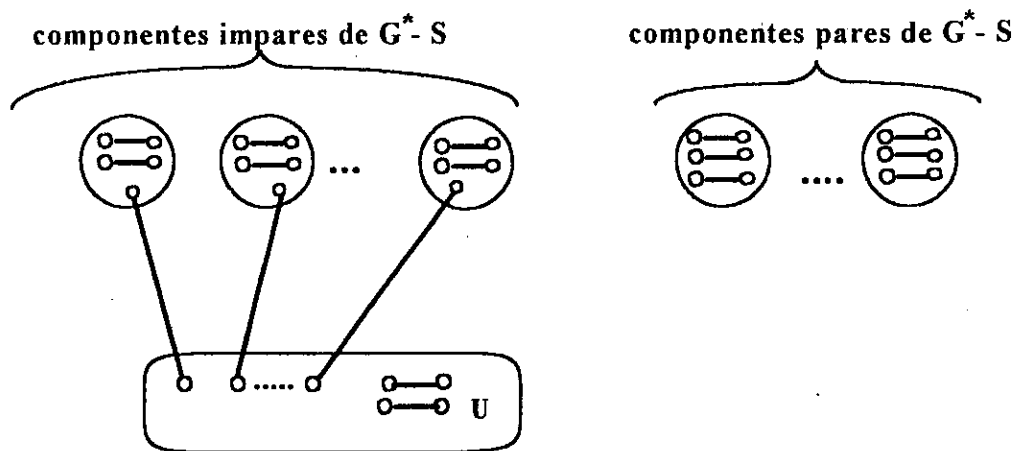


FIGURA 5.11

COROLARIO 5.17 Toda gráfica 3-regular sin puentes tiene un apareamiento perfecto.

DEMOSTRACION: Sea G una gráfica 3-regular sin corte lineal, y sea S un subconjunto propio de $V(G)$. Denotemos por $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ las componentes impares de $G-S$, y sea m_i el número de aristas con un extremo en G_i y otro extremo en S , $1 \leq i \leq n$. Como G es 3-regular:

$$\sum_{v \in V(G_i)} \text{gr}(v) = 3V(G_i), \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

y

$$\sum_{v \in S} \text{gr}(v) = 3|S|$$

así $m_i = \sum_{v \in V(G_i)} \text{gr}(v) - 2|A(G_i)|$ es impar. Ya que por hipótesis G no tiene puentes, entonces $m_i \neq 1$. Así:

$$m_i \geq 3 \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

de donde:

$$\sum_{i=1}^n m_i \geq 3n$$

De donde obtenemos que:

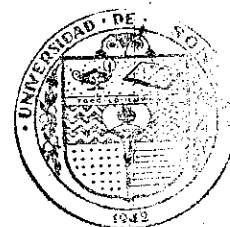
$$o(G-S) = n \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n m_i \leq \frac{1}{3} \sum_{v \in S} \text{gr}(v) = |S|,$$

esto es:

$$o(G-S) \leq |S|,$$

esta es, G cumple las hipótesis del Teorema anterior, y por lo tanto G tiene un apareamiento Perfecto, concluyendo así el corolario.

Del teorema anterior podemos observar que si G es 3-regular con un puente, entonces G no tiene apareamiento perfecto. Como un ejemplo tenemos la gráfica de la figura 5.12, que es 3-regular y tiene un puente. Así si $S = \{v\}$, se tiene que $o(G-S) = 3$, mientras que $|S| = 1$, de donde G no tiene apareamiento perfecto.



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

T83

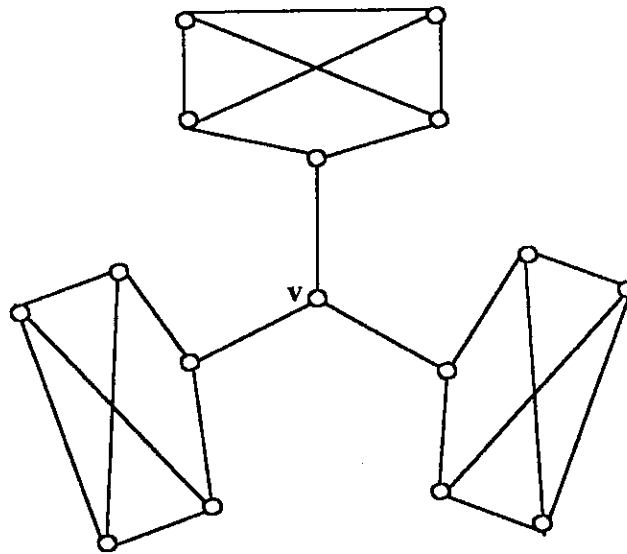


FIGURA 5.12

Finalmente podemos observar que en este capítulo se establecieron condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica tenga apareamiento perfecto. Es importante destacar que el caso de gráficas bipartitas es de gran relevancia en el caso de problemas de aplicación.

Como comentario adicional mencionaremos que el problema de apareamiento puede ser generalizado de la siguiente manera: dada una gráfica G , colorear las aristas de G con el mínimo número de colores, de tal forma que todas las aristas incidentes en un vértice dado tengan diferente color, lo que se conoce como "el problema de hallar una arista-coloración de la gráfica". Este aspecto no está contemplado en el trabajo, pero puede encontrarse en ([2] pps 90). Tal generalización puede llevarse a cabo puesto que una gráfica arista-coloreable, es aquella en la que todas las aristas con un mismo color forman un apareamiento, y puede formularse el problema del coloreado de aristas como el de cubrir las aristas de la gráfica con el mínimo número de apareamientos máximos.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un panorama introductorio a la Teoría de Gráficas. Hemos cubierto los aspectos más importantes que nos permiten estudiar con mayor profundidad tópicos específicos de esta área. También se hace referencia a algunos problemas donde la Teoría de Gráficas juega un papel fundamental como herramienta básica.

El trabajo se desarrolló de manera que en cada capítulo se abarcan los conceptos y los resultados más importantes, de los cuales algunos se utilizan para la demostración de las caracterizaciones que dan nombre al presente trabajo.

Iniciamos dando los conceptos primarios, a raíz de los cuales fijamos las bases sobre las que desarrollamos nuestro trabajo. En el Capítulo Uno se hace énfasis en el concepto de conexidad, cuya importancia estriba en el hecho de que los casos más interesantes de analizar son aquellos donde la gráfica es conexa. Los siguientes capítulos tratan tópicos importantes como la coloración de vértices que se analiza en el Capítulo Dos y la planaridad en el Capítulo Tres. Posteriormente el Capítulo Cuatro se dedica al estudio de gráficas eulerianas y hamiltonianas y en el último capítulo abordamos el problema de apareamientos.

Nuestro trabajo abarca el aspecto teórico de la Teoría de Gráficas, sin utilizar en ninguno de los casos la representación matricial de éstas, lo cual también puede ser motivo de un análisis formal. Además, el trabajo se limitó a considerar gráficas simples, aunque algunos de los resultados aquí expuestos pueden ser válidos para gráficas en general. Otra de las limitaciones fué que no se manejó la parte algorítmica, la cual podía haberse considerado desde los conceptos primarios, como tampoco se consideró la implementación computacional de dichos algoritmos, los cuales por si mismos constituyen material suficiente para el desarrollo de futuros trabajos.

Como inicialmente lo planteamos, nuestro principal objetivo fué el presentar un análisis general de la Teoría de Gráficas, presentando sus caracterizaciones más fundamentales.

De esta forma hemos cubierto tal objetivo, a continuación presentamos sólo el enunciado general de algunos problemas donde la Teoría de Gráficas juega un papel importante como herramienta básica. Es importante señalar que en la resolución de cada uno de estos problemas se requiere además otro tipo de herramienta, por ejemplo elementos de programación lineal, optimización combinatoria, programación entera, etc., y por supuesto hacer las consideraciones necesarias para que su implementación computacional pueda llevarse a cabo, por lo tanto merecen un tratamiento especial.

1.- Uno de los problema de Optimización, requiere encontrar, en una gráfica ponderada, una subgráfica de ponderación mínima. Uno de ellos lo es el Problema de la Ruta más Corta: "Dada una ruta que conecta varias puntos de una red, determinar la ruta más corta entre dos puntos específicos". Un algoritmo utilizado para resolver este problema lo es de Dijkstra (1959).

2.- Otro problema clásico de Teoría de Optimización se refiere a hallar una subgráfica generadora con una propiedad especial. Dada una gráfica $G=(V,A)$ y una función de costo definida sobre sus aristas $f:A \rightarrow \mathbb{R}^+$ encuentre una subgráfica generadora $T:(V,A')$, para la cual:

$$f(T) = \sum_{xy \in A'} f(xy)$$

sea mínimo. Tal subgráfica, se conoce como una SUBGRAFICA GENERADORA DE PONDERACION MINIMA.

3.- De nuevo, pensemos en una gráfica como una representación de una red de comunicación. La CONEXIDAD O CONEXIDAD LINEAL, será el menor número de estaciones de comunicación o líneas de comunicación, que al descomponerse serán un riesgo para el sistema. Desde este punto de vista, un árbol no es muy confiable, y en este caso necesitamos generalizar de la siguiente forma:

"Determinar una subgráfica generadora k-conexa de ponderación mínima".

4.- Una compañía manufactura n productos químicos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Ciertas parejas de esos productos químicos son incompatibles y pueden causar explosión. Como una medida de

precaución, la compañía desea dividir su almacén en compartimientos y almacenar productos químicos incompatibles en compartimientos diferentes. ¿Cual es el mínimo número de compartimientos en los que el almacén puede ser dividido?

5.- En su trabajo, un cartero lleva correspondencia desde la oficina postal y después regresa a la misma. El debe, naturalmente, recorrer cada calle en su área al menos una vez. Sujeto a esta condición, el desea elegir su ruta en tal forma que camine lo menos posible. Este problema se conoce como el **Problema del Cartero Chino**, puesto que fué inicialmente considerado por un matemático chino, Kuan.

6.- Un agente viajero desea visitar un número de ciudades y después regresar al punto de partida. Si conocemos el tiempo de viaje entre las ciudades, debemos planear su itinerario de forma que él visite cada ciudad exactamente una vez y viaje en la forma más corta como sea posible. Este problema se conoce como el Problema del Agente Viajero.

7.- En una escuela, hay m profesores $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ y n materias a impartir $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$. Si se requiere que el profesor X_i imparta la clase Y_j , un número p_{ij} de veces, el problema es encontrar un horario completo con el menor número posible de veces impartiendo la misma materia. Este problema se conoce como el Problema de Horarios.

8.- Hay situaciones prácticas, en las cuales es importante decidir si una gráfica dada es aplanable, y si es así hallar un aplanamiento de ella. Por ejemplo en la colocación del circuito impreso, se está interesado en reconocer si una red particular es plana o si no lo es, determinar si es aplanable.

Para concluir haremos un breve comentario respecto a la bibliografía consultada. El principal texto consultado fué Bondy y Murty (1979) y Neumann (1985), y como material de apoyo Bollobás (1979), Wilson (1972).

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Bollobás Béla,
Graph Theory, An Introductory Course,
Springer-Verlag, 1979.
- 2.- Bondy J. A. and Murty U.S.R.,
Graph Theory with Applications,
North Holland, 1979.
- 3.- Chartrand Gary, Alavi Yousef , Goldsmith Donald L.,
Lesniak-Foster Linda and Lick Don R.
The Theory and Applications of Graphs,
John Wiley & Sons, 1980.
- 4.- Harary Frank, Palmer Edgar M.,
Graphical Enumeration ,
Academic Press, 1973.
- 5.- Johnsonbaugh Richard,
Matemáticas Discretas,
Grupo Editorial Iberoamérica , 1988.
- 6.- Kosniowsky Czes,
Topología Algebraica,
Ed. Reverté, 1986.

7.- Liu C. L.,

Elements of Discrete Mathematics,
Mac-Graw-Hill, 1987.

8.- Nemhauser L. George, Wolsey A. Laurence

Integer and Combinatorial Optimization
Wiley Interscience, 1988.

9.-Neumann L. Victor,

Introducción a la Teoría de Gráficas,
IV Coloquio de Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y estudios avanzados del IPN
Taxco, Gro. 1985.

10.- Ore Oystein,

Teoría y Aplicaciones de los Gráficos,
Random House- Editorial Norma, 1963.

11.- Papadimitriou H. Christos, Steiglitz Kenneth, .

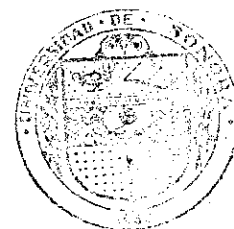
Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity
Prentice-Hall, Inc.

12.-Wilson Robin J.,

Introducción a la Teoría de los Grafos,
Alianza Editorial, 1972.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES



EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS