

**U N I V E R S I D A D D E S O N O R A**

**DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

**TEORIA Y APLICACION DE SISTEMAS  
REGULADORES ESTABLES  
AUTO-AJUSTADOS**

**T E S I S**

que para obtener el título de Licenciado en Matemáticas

presenta

**Maximino Dórame Velásquez**

asesor

**M.C. Rodrigo González González**

*Hermosillo, Sonora, México.*

*Julio de 1996.*

Matemáticas



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMATICAS

# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>1 Conceptos Básicos y Notas Históricas</b>	<b>1</b>
1.0 Introducción	1
1.1 Diseño de Controladores para Sistemas Lineales	2
1.1.1 Resultados de la Teoría de Control Lineal	6
1.1.2 El Principio de Separación	7
1.2 Preliminares de Control Adaptativo	9
1.2.1 Definiciones de Control Adaptativo	9
1.2.2 Sistemas Adaptados a un Modelo de Referencia y Reguladores Auto-Ajustados	10
1.3 Lineas de Aplicación del Control Adaptativo	19
<b>2 Estabilidad de Lyapunov</b>	<b>21</b>
2.1 Definiciones de Estabilidad	22
2.2 Método Directo de Lyapunov	33
2.2.1 Teoremas sobre Estabilidad	36
2.2.2 Estabilidad de Lyapunov de Sistemas Lineales	45
2.3 Funciones Reales Positivas	51
2.3.1 Positividad Real de Matrices de Transferencia	56
2.3.2 Algunos Lemmas Importantes	57
2.4 Estabilidad de Sistemas Adaptativos	59
<b>3 Control Adaptativo Simple</b>	<b>65</b>
3.1 El Problema de Identificación	66
3.1.1 Relaciones Algebraicas	66
3.1.2 Sistemas Dinámicos	68
3.2 El Problema de Control	76
3.2.1 Caso Escalar (Control Directo)	76
3.2.2 Caso Escalar (Control Indirecto)	81
3.2.3 Caso Vectorial	85

<b>4</b>	<b>Control Adaptativo Ideal</b>	<b>103</b>
4.1	Regulación y Rastreo . . . . .	104
4.2	Plantas con Grado Relativo Unitario . . . . .	108
4.2.1	Caso (i) $k_p$ Desconocida . . . . .	110
4.2.2	Caso (ii) Ceros Desconocidos . . . . .	112
4.2.3	Caso (iii) Polos Desconocidos . . . . .	118
4.2.4	Caso General ( $n^* = 1$ ) . . . . .	121
4.3	Plantas con Grado Relativo $\geq 2$ . . . . .	132
4.3.1	Implementación, Caso $n^* \geq 2$ , del Control Adaptado a un Modelo de Referencia . . . . .	133
<b>5</b>	<b>Una Aplicación de Los Reguladores Auto-Ajustados</b>	<b>135</b>
5.1	Una Columna de Destilación . . . . .	136
<b>A</b>	<b>Resultados de Diferenciación</b>	<b>145</b>
	<b>R E F E R E N C I A S</b>	<b>148</b>

T  
2.  
Ej

# P r e f a c i o

La naturaleza no lineal y tiempo invariante de los modelos derivados de procesos industriales ha sido la motivación principal en el desarrollo de técnicas cada vez más sofisticadas para el control automático de los mismos, de entre los cuales los métodos del control adaptativo resultan atractivos por su potencia, efectividad y bajo costo. Además, como en cualquier proceso real siempre están presentes incertidumbres y cambios en las condiciones de operación, es deseable tener un control totalmente automático que afine cientos de parámetros de tal forma que mantenga al sistema funcionando de manera estable.

El presente trabajo pretende establecer y aplicar la teoría del control adaptativo aunque sea de una manera un tanto ideal a problemas de esta naturaleza y en mi opinión es un buen esfuerzo ya que es poco lo que existe acerca de la materia. En este trabajo se tratan en detalle aplicaciones simples, como las que se muestran en los Capítulos 3 y 4 cuyo propósito es extender las mismas ideas a problemas reales más complejos como el que se menciona en el Capítulo 5.

Agradezco a mi asesor M.C. Rodrigo González González el tema de tesis que desde el primer instante llamó mi atención puesto que pertenece a la rama de las matemáticas que resulta atractiva a cualquier Ingeniero, las Matemáticas Aplicadas. Después, mi agradecimiento es en el sentido que siempre estuvo disponible para cualquier aclaración, deducción, demostración o en la misma edición del trabajo, pero sobre todo le agradezco algo que aprendí de él, la forma y filosofía de como escribir un trabajo de matemáticas aplicadas la cual quedó plasmada en este trabajo. Esta forma es diferente a la empleada en las matemáticas "formales" o tradicionales donde el estilo es definición, proposición, teorema, lema y corolario con sus respectivas demostraciones, tengo conocimiento de esto más sin embargo, en mi trabajo rara vez sigo este orden, sino al contrario el punto principal es deducir algún método o resultado partiendo de lo que está bien establecido y de suposiciones sobre el proceso para el cual es el modelo, que en la mayoría de los casos es un proceso real y esto es precisamente lo que se hace en la realidad.

Maximino Dórame V.

9 de Julio de 1996.

## Capítulo 1

# Conceptos Básicos y Notas Históricas

La Teoría del Control tiene varios enfoques y técnicas de análisis para el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos "forzados". Sin embargo, una de las ramas más nuevas y con resultados más potentes es la Teoría del Control Adaptativo la cual surge al mundo científico en la segunda mitad de este siglo.

El tema central del presente trabajo es la Estabilidad de Sistemas Adaptativos y Reguladores Automáticos el cual desarrollaremos basándonos en el convencimiento de que este tipo de sistemas pueden diseñarse con confianza únicamente cuando son bien entendidas sus propiedades de estabilidad global.

Este capítulo, lo dedicaremos simplemente para dar una reseña histórica del Control Adaptativo así como para establecer los conceptos básicos con los que se tratará a lo largo del trabajo. En la primera sección, hablaremos sobre algunos desarrollos que tuvo la Teoría del Control hasta la aparición del Control Adaptativo. En la segunda sección, estableceremos algunas de las principales definiciones que existen acerca del Control Adaptativo. Por último, en la tercera sección, discutiremos algunas de las posibles líneas de aplicación del Control Adaptativo.

### 1.0 Introducción

Cualitativamente, al hablar de control de un proceso nos referiremos a la habilidad para dirigir, cambiar o mejorar su funcionamiento y un sistema de control será aquel en el cual se pueden mantener ciertas cantidades de interés cercanas a un valor establecido. El control es efectivamente automático cuando los sistemas pueden regularse a si mismos. Esta propiedad se representa con el concepto de **retroalimentación**, el cual es una de las ideas fundamentales en Ingeniería. La esencia de este concepto consiste en la terna: *medición, comparación y corrección*. Medir la cantidad de interés, compararla con el valor deseado y usar el error para corregir el proceso, convierte a la familiar cadena de *causa y efecto* en un lazo cerrado de eventos interdependientes. Esta secuencia cerrada de transmisión de

información, referida como retroalimentación (*feedback*), soporta por completo la tecnología del control automático, basado en la auto-regulación.

Aún cuando la existencia de mecanismos autoreguladores en organismos vivos siempre ha sido reconocida, así como la construcción planeada de sistemas autoreguladores, como por ejemplo los flotadores de agua cuyos orígenes se remontan a la antigüedad, el concepto de *lazo-cerrado* es un logro del siglo XX. Desde los orígenes de la Teoría del Control, con sus diferentes técnicas de análisis y diseño para sistemas dinámicos, el diseñador lo que ha perseguido es la *estabilidad* de la planta que tiene bajo estudio. Condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas lineales han sido bien establecidas. En contraste, métodos generales para el análisis y síntesis de sistemas no lineales no existen y solo ciertas condiciones de estabilidad se pueden establecer sobre la base de sistema a sistema.

Cuando los parámetros de la planta son bien conocidos, la base del control lineal, usando sólo datos de entrada-salida, es el **Principio de Separación**. De acuerdo a este principio, si el estado puede ser estimado, entonces puede ser determinado por un *estimador* llamado *Observador de Luenberger*. Entonces, una combinación lineal de estos estados estimados puede ser retroalimentada para controlar al sistema de una manera estable la cual es la característica de funcionamiento que debe tener cualquier sistema real. Por lo tanto, el problema de control consiste en el diseño independiente de un observador (estimador) del estado y un controlador de retroalimentación (regulador automático), siendo los resultados del diseño invariantes a su conexión con la planta.

## 1.1 Diseño de Controladores para Sistemas Lineales

El modelo estándar para un sistema de control lineal es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Eu \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el *estado* del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la *entrada o control*,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la *salida* y  $A, B, C, E$  son matrices de dimensiones compatibles ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la *matriz de estado*,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la *matriz de control*,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es la *matriz de medición de la salida* y  $E \in \mathbb{R}^{p \times m}$  es la *matriz de transmisión directa del control en la salida*).

**Nota:** Las matrices pueden ser de dos formas: cuando son constantes, el sistema se llama autónomo o tiempo invariante (LTI) y cuando los parámetros de las matrices cambian con el tiempo, tenemos un sistema lineal no autónomo llamado también tiempo variante (LTV).

Las técnicas de diseño tienen su fundamento en las propiedades cualitativas de los sistemas. Por ejemplo, el diseño de controladores de retroalimentación está basado en las propiedades de *estabilidad*, *controlabilidad* y *observabilidad* (ver [19], Caps. 5 y 9 o [5], Caps. I y II).

Consideremos un sistema, llamado *planta* y una *señal de referencia*: el problema de control es encontrar una señal o ley de control tal que la salida de la planta sea tan cercana como sea posible a un valor establecido. Si la señal de control es predeterminada e independiente de la respuesta efectiva de la planta, el control es llamado, *control de lazo-abierto*. Este tipo de control no es muy satisfactorio o recomendable si hay cambios o perturbaciones en el sistema (ver Fig. 1.1).

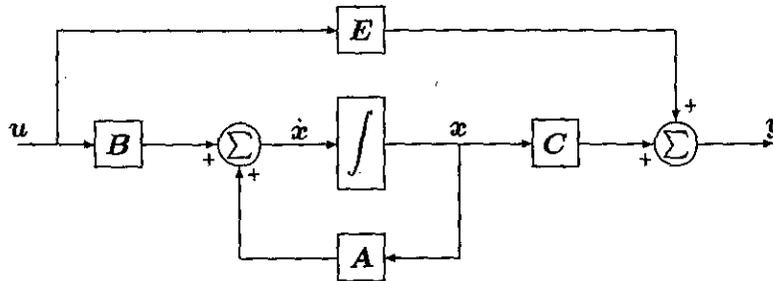


Fig. 1.1 Control de Lazo-Abierto.

Si el control depende de la respuesta real del sistema, este es llamado un *control de retroalimentación o de lazo-cerrado*. Dado que el estado de un sistema contiene toda la información de la planta, si una señal de control es diseñada como una función del estado y de la señal de referencia, es razonable suponer que un buen control puede ser efectuado. En el caso de retroalimentación lineal, el control es de la forma

$$u = -Kx + r \tag{1.1.2}$$

el cual genera el sistema de lazo-cerrado (ver Fig. 1.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Br \\ y &= (C - EK)x + Er \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

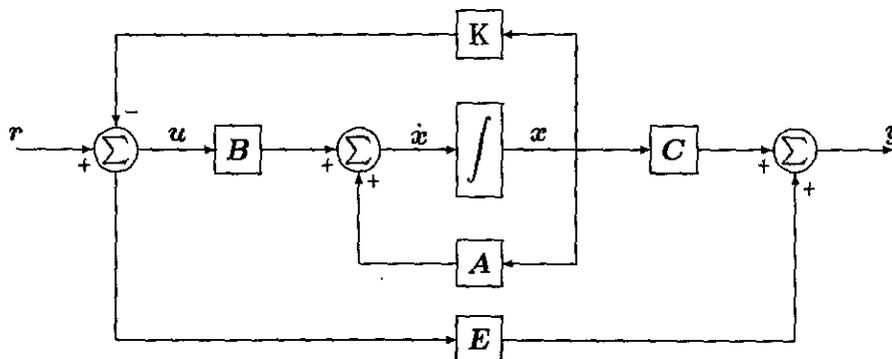


Fig. 1.2 Control de Lazo-Cerrado.

Para la estabilidad del sistema lo único que influye es el espectro de la matriz de estado. En el caso del sistema retroalimentado (1.1.3), tenemos

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br = A_c x + Br.$$

El Teorema de Asignación del Espectro ([5], Sección 1.1.4) establece que los valores propios de  $A_c = A - BK$  pueden ser localizados arbitrariamente (en pares complejos) al elegir convenientemente la matriz constante  $K$  si y solo si  $(A, B)$  es controlable. La no unicidad de  $K$  puede ser usada para moldear el espectro del sistema de lazo-cerrado de tal forma que tengamos estabilidad (valores propios con parte real negativa) y no tengamos oscilación (valores propios en un conjunto especial, conocido como "conjunto bueno", contenido casi totalmente en el lado izquierdo del plano complejo, ver Fig. 1.3. De entre varios resultados, referirse a [24], Pags. 689-692). También, existen algoritmos numéricos para determinar la matriz  $K$ . Por ejemplo, el Método III, [4], Pag. 347.

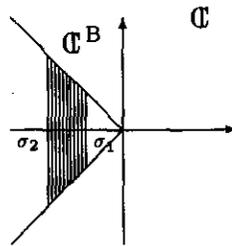


Fig. 1.3 "Conjunto Bueno" del Plano Complejo.

En la retroalimentación de estados, se asume que todas las variables de estado están disponibles como salidas. Sin embargo, en la práctica, generalmente esta suposición no se cumple. Por lo tanto, si queremos introducir un estado de retroalimentación, el vector de estado tiene que ser generado o estimado de la información disponible. Esta estimación puede efectuarse bajo la suposición de observabilidad y puede hacerse mediante el diseño de un *observador de orden completo* o por un *observador de orden reducido*.

**Observación:** El término  $Eu$  en la ecuación de salida de (1.1.1) se puede omitir, ya que

$$y = Cx + Eu$$

con  $y$  y  $u$  conocidos para cada tiempo  $t$ , es equivalente a

$$\tilde{y} = y - Eu = Cx. \quad (1.1.4)$$

Al considerar un observador de orden completo, determinamos el vector de estado completo. Mientras que con un observador de orden reducido se determinan todas aquellas entradas del estado que no son observables. Es decir,

$$y = Cx \quad \Rightarrow \quad x_o = C^{-1}y$$

donde  $x_o$  son las entradas del estado observables y  $C^{-1}$  representa a la pseudo-inversa de  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  (el número de medidores de la salida es limitado).

Para aplicar un retroalimentador de estados (controlador o regulador), para estabilizar, optimizar o desacoplar perturbaciones en un sistema, es razonable sustituir por el vector de estado uno que ha sido estimado. El dispositivo que construye una aproximación del vector de estado es llamado un *observador o estimador*.

Consideremos el sistema (planta) lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

y consideremos un observador del estado como una replica del sistema original (1.1.5)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t). \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Aún cuando las variables de estado no son accesibles, se asume que las matrices  $A, B$  y  $C$  son completamente conocidas. Por lo tanto el problema es generar o estimar  $x(t)$  de la entrada y salida las cuales también son conocidas. Si no hay perturbaciones o cambios en el sistema y si  $\hat{x}(t_0)$  y  $x(t_0)$  son iguales, entonces  $\hat{x}(t)$  es igual a  $x(t)$ . Sin embargo, lo anterior es demasiado restrictivo y no siempre es posible conocer  $x(t_0)$ . Además, típicamente nunca es posible eliminar (en caso de existir) todas las perturbaciones que afectan al sistema.

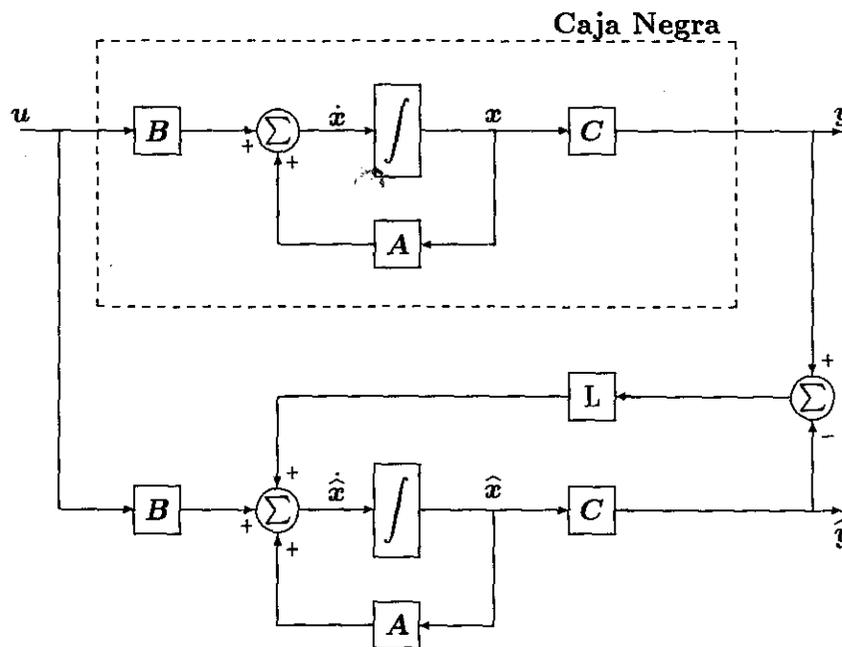


Fig. 1.4 Estimador Asintótico del Estado.

El estimador del estado mostrado en la Fig. 1.4, es manejado por la entrada así como por la salida del sistema original (1.1.5). La salida del sistema,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ , es comparada con la salidas del estimador,  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$  y su diferencia es usada como un término corrector. La diferencia  $\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$  es multiplicada por una matriz constante  $\mathbf{L}$  y sumada a la entrada del integrador del estimador, lo cual hace que la ecuación (1.1.6) se transforme en

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}\quad (1.1.7)$$

El término  $\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$  representa el error entre  $\mathbf{y}(t)$  y  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  el cual es usado para llevar  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  hacia  $\mathbf{x}(t)$ .

#### Observación:

1.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
2.  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y$ .

Sea  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ . Entonces,

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \quad (1.1.8)$$

La Ec. (1.1.8) gobierna la dinámica del error. Si los valores propios de  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$  pueden ser elegidos arbitrariamente, entonces el desarrollo del error  $\mathbf{e}(t)$  puede ser controlado. Por ejemplo, si todos los valores propios de  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$  tienen parte real menor que  $-\sigma$ , entonces los elementos de  $\mathbf{e}(t)$  convergerán a cero a una razón más rápida que  $\exp(-\sigma t)$ . Por lo tanto, aún si existe un error grande entre  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  y  $\mathbf{x}(t_0)$ , en el tiempo inicial  $t_0$ , el vector  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  convergerá rápidamente al vector  $\mathbf{x}(t)$  en  $\mathbb{R}^n$ .

#### 1.1.1 Resultados de la Teoría de Control Lineal

**RESULTADO 1:** Los valores propios de  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  pueden ser localizados arbitrariamente (en pares complejos) al elegir convenientemente la matriz constante  $\mathbf{K}$  si y solo si  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es controlable.

**RESULTADO 2:** Si el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  es observable, entonces los valores propios asociados con la dinámica del error pueden ser localizados en cualquier parte del plano complejo.

**RESULTADO 3:**  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  es observable si y solo si  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$  es controlable. Esto implica que existe una matriz  $\hat{\mathbf{K}}$  tal que los valores propios de  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\hat{\mathbf{K}}) = \lambda(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}^T\mathbf{C})$ , donde  $\lambda(\mathbf{G})$  denota al espectro de la matriz  $\mathbf{G} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{G}) = 0\}$ , pueden ser asignados libremente en el plano complejo. Por lo tanto,

$$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{K}}^T.$$

**Nota:** Localizar los valores propios de  $(A - LC)$  diseñando  $L$  es el problema dual de localizar los valores propios de  $(A^T - C^T \hat{K})$  con  $\hat{K}$ . Por lo tanto, podemos usar cualquier técnica empleada en la retroalimentación de estado para determinar la matriz  $L$ .

### 1.1.2 El Principio de Separación

El principio de separación es la propiedad más elegante que pueden tener los sistemas lineales bien determinados. Esta propiedad se obtiene a partir de combinar un observador con un regulador en el diseño de un sistema de control retroalimentado (ver Fig. 1.5).

Consideremos el sistema (1.1.5) con  $u = -K\hat{x}$ , donde  $\hat{x}$  es el estado estimado por el observador, entonces

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} - BK\hat{x} + LCx - LC\hat{x}\end{aligned}$$

En forma matricial el sistema completo se escribe en la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix}}_{\dot{x}_c} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{x_c}$$

En este punto, podemos hacernos la pregunta: ¿Cuales son los valores propios de  $A_c$ ? Para darle respuesta, consideremos el nuevo estado:

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

con lo cual tenemos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T^{-1} & & \\ & A_c & \\ & & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}}_{\bar{A}_c} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}\end{aligned}$$

**Nota:**  $\bar{A}_c$  fue obtenida de  $A_c$  al aplicar una transformación de similaridad. Dado que el espectro de un operador lineal es invariante bajo transformación de coordenadas:  $\lambda(\bar{A}_c) = \lambda(TA_cT^{-1}) = \lambda(A_c)$ . Entonces,

$$\lambda(\bar{A}_c) = \underbrace{\lambda(A - BK)}_{\substack{\text{Valores propios del diseño} \\ \text{de la retroalimentación} \\ \text{de estados.}}} \cup \underbrace{\lambda(A - LC)}_{\substack{\text{Valores propios del diseño} \\ \text{del observador.}}} \quad (1.1.9)$$

**PROPIEDAD O PRINCIPIO DE SEPARACION:** La matriz de retroalimentación,  $K$  (estabilidad de la planta) y la matriz del observador,  $L$  (buena aproximación para el estado) pueden ser diseñadas independientemente (relación (1.1.9)).

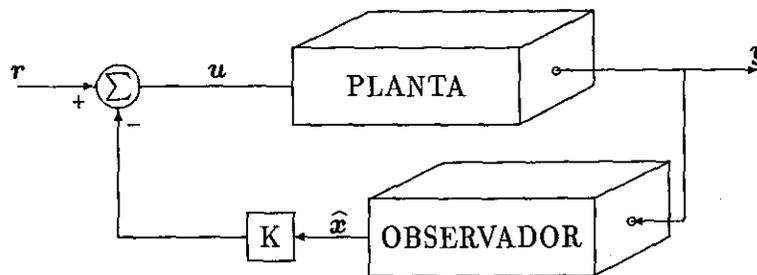


Fig. 1.5 Estructura del Compensador.

### COMENTARIO:

1. El Principio de Separación es una de las propiedades más importantes dentro de la teoría de control lineal. Si se desea estudiar con detalle, este es un resultado bien establecido que se encuentra en el texto: **“TEORIA MODERNA DE SISTEMAS DE CONTROL”**, Rodrigo González González, Universidad de Sonora, el cual está por editarse.
2. Existen otros tipos de retroalimentación. Por ejemplo, retroalimentar con las salidas:

$$u = -\bar{K}y = -\bar{K}Cx \implies \dot{x} = (A - B\bar{K}C)x.$$

Sin embargo, ¿Que podemos decir acerca de la estabilidad en este caso?

3. También podemos introducir filtros en forma de integrales o derivadas, lo cual nos lleva al Control PI (Proportional Integral Control) o al Control PID (Proportional Integral Derivative Control) los cuales son usados ampliamente por la mayoría de los sistemas de control reales existentes. El objetivo de estos filtros o amplificadores es hacer más efectivo el control retroalimentado, teniendo aplicación en casi todo proceso automático.

## 1.2 Preliminares de Control Adaptativo

En el control de un sistema dinámico pueden aparecer ciertas incertidumbres causadas por perturbaciones externas, variaciones en la planta o a la introducción de modelos matemáticos deficientes. Los cambios en las materias primas usadas y los cambios en las unidades de procesamiento son también algunas causas típicas de la variación de los parámetros de la planta. Aún cuando el modelo que describe al proceso es lineal, si sus parámetros no son bien conocidos debido a alguna de estas incertidumbres, las técnicas de la teoría del control lineal las cuales están bien establecidas no se pueden aplicar en este caso y por lo tanto debemos ser capaces de analizar el sistema con otro enfoque. Esta es la razón del presente trabajo. Es decir, empezaremos por estudiar plantas LTI con parámetros desconocidos o inciertos, lo cual nos llevará al análisis de técnicas de **Control Adaptativo**.

El Control Adaptativo se refiere al control de sistemas parcialmente conocidos. Esto es, al control de sistemas dinámicos cuyas características no son completamente conocidas. Sabemos, de la experiencia o de la simple intuición, que un diseñador mientras controla un proceso real pocas veces conoce los parámetros exactamente. Las características del proceso pueden cambiar con el tiempo a causa de una variedad de factores como los que se mencionaron anteriormente. También, podría haber cambios imprevistos en las estadísticas de las entradas y perturbaciones las cuales podrían considerarse como cambios en el medio ambiente en el que opera el sistema. Las herramientas del control convencional, aún cuando son usadas eficientemente en el diseño de controladores, pueden no ser adecuadas para alcanzar un funcionamiento satisfactorio en el rango total sobre el cual las características del sistema podrían variar. Por consiguiente, debemos hacer (de alguna forma) que el sistema se adapte a los cambios que ocurren dentro y a su alrededor.

El término "**adaptación**" se define en Biología como "*conformación ventajosa que tiene un organismo a los cambios en su medio ambiente*". En 1957, inspirados por esta definición, Drenick y Shahbender introdujeron el término **Sistema Adaptativo** en la Teoría del Control para representar a un sistema de control que monitorea su propio funcionamiento y ajusta sus parámetros en la dirección del mejor funcionamiento.

Ahora, cuatro décadas después de que el término adaptación fue introducido, es bien sabido que los sistemas adaptativos son una clase especial de sistemas no lineales y por lo tanto capaces de presentar comportamientos no encontrados en los sistemas lineales. Sin embargo, para diseñar procedimientos de síntesis bien establecidos, los sistemas adaptativos serán estructurados de tal forma que sus comportamientos se acerquen asintóticamente al de un sistema lineal.

### 1.2.1 Definiciones de Control Adaptativo

La definición de un sistema adaptativo es multifacética y no puede ser restringida a un simple enunciado sin perder contenido vital. En la actualidad, existe un gran número de definiciones las cuales dependen del área y de la perspectiva del interesado. En este trabajo, solamente examinaremos o utilizaremos las tres definiciones siguientes:

La definición más básica:

**Definición 1.2.1** Un *Sistema Adaptativo* es un sistema que está provisto con un dispositivo que continuamente monitorea su propio funcionamiento en relación a una figura de referencia dada o a una condición óptima, así como de un dispositivo que modifica sus propios parámetros mediante una acción de lazo cerrado con el fin de alcanzar el óptimo.

La definición más simple y descriptiva:

**Definición 1.2.2** Un *Sistema de Control Adaptativo* se define como un sistema de control retroalimentado lo suficientemente inteligente como para ajustar sus características en un medio ambiente cambiante, así como para operar de manera óptima de acuerdo a algún criterio especificado.

Por último, la definición que probablemente tiene la mayor aceptación entre los teóricos del control, la cual se debe a Bellman y Kalaba:

**Definición 1.2.3** El *Control Adaptativo* se define como un proceso de control que pertenece a la última de las tres etapas en la evolución de la Teoría del Control: cuando el proceso que va a ser controlado es ampliamente especificado y el controlador tiene información completa acerca del comportamiento de las entradas, tenemos un *proceso de control determinista*; cuando factores desconocidos están presentes en el proceso los cuales matemáticamente se conocen como variables aleatorias con funciones de distribución conocidas, tenemos un *proceso de control estocástico*; la tercera etapa es cuando aún con menos información el funcionamiento del proceso es posible. En este caso, el conjunto de decisiones admisibles, el efecto de las decisiones sobre el proceso o la dirección misma del proceso pueden no ser conocidas. En tal situación, el controlador tiene que "aprender" a mejorar el funcionamiento del sistema a través de la observación de las salidas del proceso. Es decir, mientras el proceso se desarrolla, cierta información adicional es disponible y por lo tanto mejores decisiones son posibles. Esto es a lo que se define como un *Proceso de Control Adaptativo*.

## 1.2.2 Sistemas Adaptados a un Modelo de Referencia y Reguladores Auto-Ajustados

Si la entrada y la salida de una planta son como las que se muestran en la Fig. 1.6 b), entonces el objetivo del control será determinar la entrada  $u$  de tal manera que el error  $e_s = y_p - y_m$ , entre la salida de la planta  $y_p$  y una salida deseada  $y_m$ , se mantenga cercano a un valor pequeño prescrito. Si  $y_m$  es constante, el problema es un *problema de Regulación* alrededor de este valor (conocido como un *punto de operación*). Cuando  $y_m$  es una función del tiempo, el problema es referido como un *problema de rastreo*.

Cuando las características de la planta son completamente conocidas, el primer problema envuelve la determinación de un controlador que estabilice el lazo de retroalimentación alrededor del punto de operación. En el segundo caso, podría emplearse una estructura conveniente para el controlador junto con parámetros de control determinados de tal manera que minimicen un índice de funcionamiento basado en la naturaleza del error  $e_s$ .

Cuando las características de la planta son desconocidas, ambos problemas, regulación y rastreo pueden verse como problemas de control adaptativo. Así, nuestro interés estará puesto en determinar controladores convenientes para estos dos casos, suponiendo que conocemos que la planta es lineal pero que contiene parámetros desconocidos. Las dos clases de sistemas que alcanzan este objetivo son:

- i) Sistemas Adaptados a un Modelo de Referencia (SAMR) y
- ii) Reguladores Auto-Ajustados (RAA).

Estos problemas pueden intentarse usando un enfoque indirecto o un enfoque directo. En el enfoque indirecto, los parámetros desconocidos de la planta son estimados usando un modelo de la planta antes de elegir una entrada de control. En el enfoque directo, se selecciona una estructura apropiada para el controlador y los parámetros del controlador se ajustan directamente para reducir alguna medida del error  $e_s$ . Mientras se trata el problema de rastreo, es necesario en ambos casos especificar la salida deseada  $y_m$  en una forma adecuada para poder tener rastreabilidad. Esto generalmente tiene que estar acompañado con el uso de un modelo de referencia. Así, un enfoque indirecto requiere de un modelo explícito de la planta así como de un modelo de referencia, mientras que el enfoque directo requiere únicamente del segundo. Los sistemas adaptativos que hacen uso explícito de tales modelos de referencia para propósitos de identificación o control son llamados SAMR. En vista del papel tan importante que juegan los modelos de indentificación y referencia en la formulación de los problemas de control adaptativo, daremos algunos comentarios adicionales acerca de su elección.

### 1.2.2.1 Control Directo e Indirecto

Un organismo vivo, como el prototipo de un sistema adaptativo, tiene que hacer frente a los cambios en su medio ambiente para sobrevivir, crecer y desarrollarse. La familiaridad con el medio ambiente le permite un mejor entendimiento que lo capacita para predecir cambios, lo cual es útil para su sobrevivencia. Ya que entender y controlar el mundo son dos actividades totalmente diferentes, la habilidad predictiva no siempre implica la habilidad para controlar el medio ambiente. Aunque esto parece reflejar el poder del organismo para explotar su medio ambiente, muchas veces el propósito más necesario es entenderlo. Por lo tanto, existe una conexión cercana entre el entender o identificar el medio ambiente y su control.

Estas ideas fueron aplicadas a sistemas de control automático parcialmente conocidos por A. A. Feldbaum en 1965. Suponiendo que un controlador  $C$  es usado para controlar una planta o proceso  $P$ , el problema de control se puede clasificar como determinístico, estocástico o adaptativo, dependiendo de la información que se tenga en el controlador  $C$  acerca de la planta  $P$ . Por ejemplo, en el caso determinista, donde las características del proceso  $P$ , la información acerca de las perturbaciones que actúan sobre  $P$ , el conocimiento

del estado del sistema y el índice de funcionamiento son disponibles, la acción del control óptimo puede determinarse usando los resultados clásicos de la Teoría del Control. Por otro lado, si las características del proceso  $P$  o las perturbaciones que actúan sobre él son desconocidas, entonces se pueden emplear métodos de estimación a partir de la observación directa del sistema. Sin embargo, si lo que se requiere es controlar un sistema parcialmente conocido, como en el caso del control adaptativo, ninguno de los procedimientos mencionados es adecuado. La identificación de las características del proceso da como resultado un control que no es satisfactorio, mientras que si se intenta controlar la planta desconocida sin identificación puede dar como resultado una respuesta demasiado pobre. Por lo tanto, de acuerdo con Feldbaum, el controlador  $C$  de un sistema de control automático que tiene información incompleta acerca de la planta  $P$  debe resolver simultáneamente dos problemas que están muy relacionados pero con diferentes características. Esto es a lo que se le llama *control dual*. Primero, en base a la información recolectada, el controlador debe determinar las características y el estado de la planta  $P$ . Segundo, en base a este conocimiento adquirido, se debe determinar que acciones son necesarias para un control exitoso. El primer problema puede ser considerado como un problema de identificación o estimación mientras que el segundo como un problema de control, Fig. 1.6.

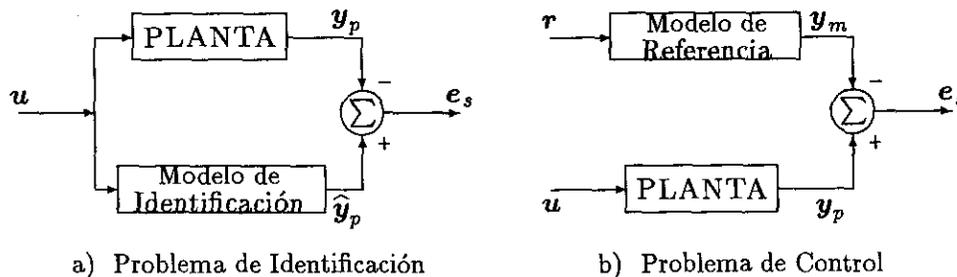


Fig. 1.6 Problemas de Identificación y Control.

Hay dos enfoques diferentes para la solución del problema de control adaptativo discutido anteriormente. En el primer enfoque, llamado *control indirecto*, los parámetros de la planta son estimados en cada instante y los parámetros del control son ajustados en base a estas estimaciones. A este procedimiento también se le conoce como *identificación explícita*. En contraparte a este, tenemos un procedimiento que es llamado *control directo*, donde no es necesario esforzarse por la identificación de los parámetros de la planta, sino que los parámetros de control son ajustados directamente para mejorar el índice de funcionamiento del proceso. A este procedimiento se le conoce como *identificación implícita*. Por lo tanto, la entrada del proceso se usa simultáneamente para propósitos de control o identificación. Sin embargo, no cualquier esquema de estimación, seguido por una acción de control conveniente, dará como resultado un óptimo o un comportamiento estable del sistema completo.

Por lo tanto, los procedimientos de control y estimación tienen que combinarse cuidadosamente para lograr el objetivo deseado. Podemos ilustrar los esquemas del control directo e indirecto en la Fig. 1.7.

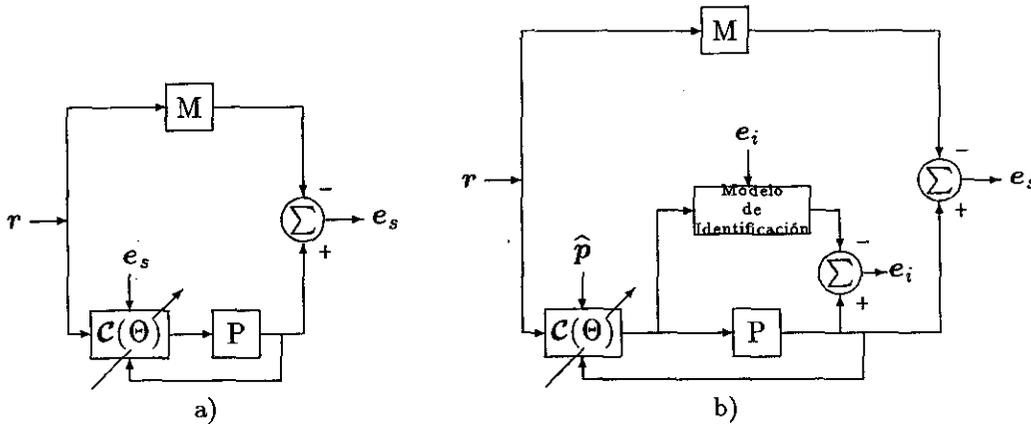


Fig. 1.7 a) Control Adaptativo Directo, b) Control Adaptativo Indirecto.

Los esquemas de control utilizados posteriormente pueden ser considerados como casos especiales de uno donde un control dual ha sido realizado.

### 1.2.2.2 Modelo de Identificación

Los modelos matemáticos en cualquier área de la ciencia son de fundamental importancia y por lo tanto es necesario determinar la estructura de tales modelos que caracterize el enlace entre la causa y el efecto del fenómeno observado. Una vez determinada la estructura, los parámetros del modelo son afinados de tal manera que el comportamiento del modelo es una buena aproximación del comportamiento real del fenómeno. Por otra parte, un modelo matemático general tal como una ecuación diferencial o una ecuación en diferencia puede ser usado para representar la relación entrada-salida de un proceso real dado y los parámetros del modelo son usados para minimizar el error entre la salida del proceso y la salida del modelo. En este caso, el modelo obtenido es llamado *modelo de identificación* que en resumen se puede establecer como:

La entrada y la salida de una planta LTI son  $u$  y  $y_p$  respectivamente, donde  $u$  es una función del tiempo uniformemente acotada. La suposición es que la planta tiene parámetros desconocidos y es estable con una determinada parametrización. El objetivo es construir un modelo apropiado a partir de toda la información disponible sujeto a la misma entrada  $u(t)$  como la de la planta de tal forma que produzca una salida  $\tilde{y}_p$  la cual tienda asintóticamente a la salida  $y_p$ .

Como se mencionó anteriormente la salida se supone libre de ruido. En caso contrario, debe usarse algún criterio estadístico para determinar el modelo que mejor ajuste los datos observados, lo cual queda fuera de nuestro objetivo.

### 1.2.2.3 Modelo de Referencia

El uso de un modelo de referencia para propósitos de control es un desarrollo reciente el cual tuvo sus principios en el control de aeronaves. La suposición implícita es que el diseñador debe de estar bien familiarizado con el modelo bajo consideración. Al elegir convenientemente la estructura y los parámetros del modelo de referencia, la respuesta deseada puede ser especificada en términos de las salidas del modelo. Aunque tal modelo puede ser lineal o no lineal, tanto las consideraciones prácticas como la manejabilidad analítica limitan a los modelos a la clase de sistemas LTI.

Suponiendo que una planta puede ser descrita adecuadamente por la ecuación diferencial LTI

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_p &= \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p\end{aligned}\quad (1.2.1)$$

donde  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  y  $\mathbf{C}_p$  son matrices constantes ( $n \times n$ ), ( $n \times m$ ) y ( $p \times n$ ) respectivamente, el modelo de referencia se elegirá de tal manera que tenga la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{r} \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m\end{aligned}\quad (1.2.2)$$

donde  $\mathbf{A}_m$  es una matriz constante  $n \times n$  asintóticamente estable,  $\mathbf{B}_m$  y  $\mathbf{C}_m$  son matrices constantes de dimensiones apropiadas y  $\mathbf{r}$  es una función continua por piezas uniformemente acotada. El objetivo es determinar la entrada  $\mathbf{u}(t)$  para la planta (1.2.1) tal que su salida  $\mathbf{y}_p(t)$  este cercana, en algún sentido, a la salida  $\mathbf{y}_m(t)$  del modelo de referencia (1.2.2) conforme  $t \rightarrow \infty$ . En este caso, la entrada de referencia  $\mathbf{r}$  junto con la terna  $\{\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m\}$ , la cual especifica por completo al modelo de referencia, determinan la salida  $\mathbf{y}_m$  y por lo tanto el funcionamiento esperado para la planta.

**Definición 1.2.4** El modelo se denomina "modelo perfecto a seguir" si sucede que

$$\|\mathbf{y}_p(t) - \mathbf{y}_m(t)\| \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.2.3)$$

**Definición 1.2.5** El modelo se denomina "modelo asintótico a seguir" si sucede que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_p(t) - \mathbf{y}_m(t)\| = 0. \quad (1.2.4)$$

### 1.2.2.4 Control Adaptado a un Modelo de Referencia

El problema de los Sistemas Adaptados a un Modelo de Referencia (SAMR) puede establecerse de la siguiente manera:

Sea P un planta LTI con una pareja entrada-salida  $\{\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}_p(\cdot)\}$  dada. Sea M un modelo de referencia LTI especificado por su respectiva pareja de entrada-salida  $\{\mathbf{r}(\cdot), \mathbf{y}_m(\cdot)\}$ ,

donde  $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función acotada continua por piezas. El objetivo es determinar la entrada de control  $u(t)$  para todo  $t \geq t_0$  tal que la condición (1.2.4) de la Definición 1.2.5 se satisfaga.

Es evidente que es necesario tener información primaria acerca de la planta  $P$  para tener un problema bien propuesto. Además, la elección de la entrada de control así como el modelo de referencia depende críticamente de esta información. Por lo tanto, podemos hacer las siguientes discusiones:

**El conjunto de entradas  $\mathcal{U}$ .** Sea  $u$  la entrada de la planta la cual pertenece a un determinado conjunto  $\mathcal{U}$ . Desde un punto de vista práctico, la entrada  $u$  debe ser generada usando un controlador  $\mathcal{C}$  que tenga acceso a todas las señales que se puedan medir. Por ejemplo, un requerimiento natural es que  $u$  sea uniformemente acotada. Además, dado que los sistemas invariablemente tienen ruido, impondremos la condición de que el controlador  $\mathcal{C}$  que genera  $u$  sea libre de diferenciadores.

**La Clase de Modelos de Referencia  $\mathcal{M}$ .** De la discusión anterior acerca de los modelos de referencia es claro que si la salida de la planta va a seguir asintóticamente a la salida de un modelo de referencia, la clase de modelos  $\mathcal{M}$  tiene que ser restringida en algún sentido. Obviamente,  $\mathcal{M}$  depende de la información primaria acerca de la clase  $\mathcal{P}$  de sistemas LTI a la cual pertenece la planta  $P$ . Por ejemplo, si la entrada de referencia  $r$  es una onda cuadrática y el modelo  $M$  tiene una función de transferencia unitaria, es claro que la salida de la planta (la cual tiene una función de transferencia estrictamente propia) no puede seguir a  $y_m$  asintóticamente con alguna entrada  $u$  uniformemente acotada generada por un controlador libre de diferenciadores. Para determinar  $\mathcal{M}$ , retrataremos los resultados de la Teoría de Sistemas Lineales usando las características conocidas de la planta. Por lo tanto, dada alguna información primaria acerca de la planta  $P$ , se puede elegir la clase de modelos de referencia  $\mathcal{M}$ .

**El Controlador  $\mathcal{C}$ .** De la información primaria acerca de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{M}$ , puede determinarse la estructura de un controlador  $\mathcal{C}$  que genera a  $u$ . Teóricamente,  $\mathcal{C}$  puede ser no lineal, pero debido a que nuestro objetivo es extender los conceptos de diseño lineal al control adaptativo, asumiremos que  $\mathcal{C}$  puede ser parametrizado por un vector  $\Theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que para todos los valores constantes de  $\Theta \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{C}$  es LTI. Para toda  $P \in \mathcal{P}$  y  $M \in \mathcal{M}$ , existe un  $\Theta^* \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\Theta \equiv \Theta^*$ , la función de transferencia de la planta junto con el controlador coincide con la función de transferencia del modelo de referencia  $M$ . Esta es la parte algebraica del problema de control adaptativo.

El objetivo de la adaptación es generar la entrada de control  $u$  tal que (1.2.4) se cumpla.

Dado que  $u(t)$  es determinado por la forma en la cual los parámetros  $\Theta(t)$  son ajustados, el problema puede establecerse equivalentemente en términos de  $\Theta(t)$ . La regla con la cual  $\Theta(t)$  es ajustado es llamada *ley adaptativa*. La determinación de la ley adaptativa asegura la estabilidad del sistema completo y constituye la parte analítica del problema de control adaptativo.

### Establecimiento del Problema de Control Adaptativo:

La entrada y la salida de una planta  $P$  LTI con parámetros desconocidos son  $u(\cdot)$  y  $y_p(\cdot)$  respectivamente. Entonces, el problema de control adaptativo consiste en:

- (i) determinar la clase,  $\mathcal{M}$ , de modelos de referencia LTI estables tal que si  $M \in \mathcal{M}$  con una pareja  $\{r(\cdot), y_m(\cdot)\}$ , entonces existe una entrada de control  $u(\cdot)$  acotada la cual asegura la condición (1.2.4).
- (ii) determinar un controlador sin diferenciadores,  $\mathcal{C}(\Theta)$ , parametrizado por un vector  $\Theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  que genere  $u$  y tal que exista un valor constante  $\Theta \equiv \Theta^* \in \mathbb{R}^m$  para el cual la función de transferencia de la planta junto con el controlador sea igual a la función de transferencia de  $M$ .
- (iii) determinar una regla de ajuste para  $\Theta(t)$  tal que se tenga (1.2.4).

Para la situación establecida en los puntos (i) y (ii), la información primaria acerca de la planta es esencial. La determinación de la clase  $\mathcal{M}$  en el punto (i) y  $\mathcal{C}(\Theta)$  en el punto (ii) representa la parte algebraica y el punto (iii) constituye la parte analítica del problema de control adaptativo. El enlace de la parte algebraica y la parte analítica es la esencia de la adaptación.

En el establecimiento del problema de control adaptativo, se supone que la planta es LTI. Sin embargo, en la práctica la necesidad de adaptación surge principalmente porque los parámetros de la planta varían con el tiempo. Por consiguiente, la planta tiene que ser modelada parcialmente o sujeta a perturbaciones acotadas. En tales casos, no es posible satisfacer la condición de la ecuación (1.2.4) y en vez de esto, el objetivo sería determinar una regla para ajustar  $\Theta(t)$  tal que  $\|y_p(t) - y_m(t)\|$  sea acotada.

Como se mencionó al principio, el control adaptativo puede ser tratado usando un enfoque directo o indirecto. La estructura del sistema adaptativo usando estos dos métodos se muestra en la Fig. 1.7 a) y b) respectivamente. Como se muestra en la figura, la estructura de los controladores en a) y b) son idénticos excepto en la forma de ajuste de  $\mathcal{C}(\Theta)$ . La información acerca del error,  $e_s$ , entre las salidas se usa directamente en la Fig. 1.7 a) para ajustar  $\mathcal{C}(\Theta)$ , mientras que el error de identificación,  $e_i$ , se usa para ajustar los parámetros de identificación  $\hat{p}$  los cuales son usados para ajustar  $\mathcal{C}(\Theta)$  en la Fig. 1.7. b).

En ambos casos, mientras el identificador y controlador pueden parametrizarse en varias formas de tal manera que exista solución para la parte algebraica, únicamente alguna (algunas) de estas parametrizaciones llevará a soluciones analíticas estables las cuales aseguran la acotación o convergencia del vector de parámetros a su valor deseado. La elección de la estructura del modelo de referencia, el identificador y el controlador para diferentes clases de problemas y la generación de leyes adaptativas estables en cada caso, es el objetivo que perseguiremos en los capítulos 3 y 4.

### 1.2.2.5 Reguladores Auto-Ajustados

El problema SAMR discutido anteriormente fue producto de investigaciones en control óptimo de servomecanismos deterministas. Como contra parte a este, los reguladores auto-ajustados surgen en el estudio de problemas de reguladores estocásticos. El enfoque principal de los RAA es el control indirecto donde los parámetros de la planta son estimados antes de determinar los parámetros de control. Los RAA fueron propuestos originalmente por Kalman los cuales consisten de un estimador de parámetros, un controlador lineal y un bloque que determina los parámetros de control de los parámetros de la planta estimados. Existen varias posibilidades para diseñar tales reguladores lo cual depende de los esquemas de estimación y control, siendo su implementación un trabajo agradable debido a su flexibilidad y manipulación.

Esta clase de reguladores fueron desarrollados originalmente para el problema de control estocástico de varianza mínima. Dado que el enfoque del diseño es flexible, se han hecho varias extensiones: aproximación estocástica, mínimos cuadrados, mínimos cuadrados extendidos y generalizados, filtración extendida de Kalman, entre otros y todos han sido incorporados al diseño de RAA. En cada instante el control correspondiente puede calcularse usando los métodos de diseño: asignación del espectro, control PID (Proportional Integral Derivative) o LQG (Linear Quadratic Gain).

Los RAA explícitos consisten de una estimación explícita del proceso que es controlado seguido de un ajuste de los parámetros del regulador. Los RAA implícitos se basan en una estimación implícita del proceso y en un ajuste directo de los parámetros del regulador. Por lo tanto, estos dos métodos son idénticos a los métodos indirecto y directo discutidos anteriormente en el contexto de los SAMR.

### 1.2.2.6 Sistemas Adaptativos Estables

En casi cualquier ejemplo de sistemas adaptativos que existen en la actualidad, los parámetros del control se ajustan en relación a las medidas de algunas de las salidas del sistema. Esto hace que el sistema modificado sea no lineal. Además, si el sistema tiene entradas externas, entonces existe la posibilidad de que el sistema sea no autónomo. De aquí que el análisis o la síntesis de sistemas adaptativos invariablemente envuelve el estudio de las propiedades teóricas: estabilidad, controlabilidad, observabilidad y optimalidad de sistemas no lineales no autónomos. La mayoría de los enfoques empleados durante los años 60's en el estudio de sistemas adaptativos fue sobre su optimalidad. Los procedimientos analíticos para ajustar los parámetros del control que optimiza un índice de funcionamiento elegido fueron desarrollados usando argumentos heurísticos basados en el comportamiento de sistemas LTI. Una vez que el diseño estaba terminado, la estabilidad del sistema no lineal era analizada y únicamente se generaban condiciones de estabilidad local. Más aún, en algunos casos no se analizaba cuantitativamente la estabilidad sino que se usaban extensas simulaciones en la computadora para justificar el uso de los métodos desarrollados. Naturalmente, esto implicaba un alto costo, en todos los sentidos.

Debido a que la estabilidad es una propiedad de fundamental importancia para la operación satisfactoria de cualquier sistema y como los sistemas adaptativos son indudablemente no lineales, una de las dificultades más grandes encontradas en el diseño de sistemas adaptativos es acerca del análisis de la estabilidad de la correspondiente ecuación diferencial que gobierna al proceso. En 1963, se sugirió una inversión de los procedimientos antes adoptados, lo cual conceptualmente es mucho más eficiente. Es decir, los sistemas adaptativos deben ser diseñados de tal manera que sean estables para todos los valores de los parámetros que intervienen y una vez que la estabilidad es asegurada, la optimización puede ser buscada.

La metodología que seguiremos en este trabajo para el análisis y síntesis de sistemas adaptativos, está basada en la convicción de que la estabilidad de un sistema adaptativo debe ser asegurada antes de cualquier intento por alcanzar respuestas óptimas. Esto implica que la forma de la ley adaptativa debe elegirse de tal manera que el sistema completo no lineal tenga las propiedades de estabilidad deseadas. En vista de la importancia que tiene la estabilidad, dedicaremos por completo el capítulo 2 para presentar una colección de diferentes resultados de la Teoría de Estabilidad que son esenciales para el estudio de los sistemas adaptativos. Dado que el Método Directo de Lyapunov es una de las técnicas más conocidas para el análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos, la mayor parte de los resultados presentados pertenecen a este método.

El primer paso en el enfoque sobre la estabilidad en el diseño de sistemas adaptativos, como ya se ha mencionado, es la elección de la ley adaptativa que ajuste los parámetros del control para asegurar la estabilidad. Sea  $\Theta^*$  un vector constante desconocido tal que la salida del sistema adaptativo siga la salida del modelo de referencia exactamente cuando  $\Theta(t) \equiv \Theta^*$ . Si el vector error del estado  $e(t)$  y el vector error de los parámetros  $\phi(t)$  son definidos como

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) - x^*(t), \quad \phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(t) - \Theta^* \quad (1.2.5)$$

donde  $x^*(t)$  es la trayectoria de estado deseada, estamos interesados en que  $e(t)$  tienda a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , en ausencia de perturbaciones. En muchos casos, también es conveniente asegurar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ . En términos del vector error  $(e, \phi)$ , el problema puede establecerse como:

A partir de la evolución del vector error  $e(t)$ , descrita por la ecuación diferencial

$$\dot{e}(t) = f_1(e(t), \phi(t), t), \quad (1.2.6)$$

determinar la ley adaptativa

$$\dot{\phi}(t) = f_2(e(t), t) \quad (1.2.7)$$

tal que el origen de las ecuaciones (2.1.6), (2.1.7) sea

- i) estable con  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ ,
- ii) asintóticamente estable.

Enfocar la atención directamente sobre el vector del error, en vez de la respuesta efectiva de la planta o el modelo de referencia, es el principal cambio que se tiene con este enfoque. La ecuación diferencial (1.2.6) del error es usada únicamente para propósitos de análisis y para asegurar que  $e(t)$  y  $\phi(t)$  se desarrollen de una manera aceptable. Una vez que el análisis se completa, la ley adaptativa se implementa usando el hecho que  $\phi(t) = \Theta(t) - \Theta^*$ , así que la ley adaptativa tiene la forma

$$\dot{\Theta}(t) = f_2(e(t), t). \quad (1.2.8)$$

La ecuación del error (1.2.6) representa a un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales no autónomas. Mientras que la ecuación (1.2.6) puede ser fácilmente derivada usando la información acerca del proceso a ser controlado y la estructura del controlador, la ley adaptativa dada por la ecuación (1.2.7) tiene que ser elegida por el diseñador.

### 1.3 Líneas de Aplicación del Control Adaptativo

El ímpetu del desarrollo de metodologías de diseño de controladores adaptativos prácticos, durante la década antepasada (1975-1980), proviene de tres fuentes principales: la demanda del avance tecnológico por controladores más sofisticados, la disponibilidad de microprocesadores que a pesar de sus limitaciones hicieron posible la implementación de algoritmos adaptativos económicamente factibles y los recientes avances en teoría que han proporcionado un riguroso marco teórico para el diseño práctico de controladores adaptativos. La demanda de una tecnología en crecimiento por controladores más rápidos y exactos tuvo una gran influencia en el progreso del control automático, desde su aparición hace más de cinco décadas. El avance en la tecnología computacional también tuvo un gran impacto sobre esta área debido a la invención de procesadores rápidos, efectivos y de bajo costo. Esto trajo consigo la implementación de algoritmos complejos que únicamente estaban limitados por la teoría disponible y la imaginación del diseñador.

El diseño de controladores industriales para alcanzar rapidez, exactitud y robustez está industrialmente dictado por consideraciones económicas. Esto por supuesto, implica que en cualquier situación práctica, el controlador más simple capaz de alcanzar las especificaciones de funcionamiento señaladas es el elegido. Por otro lado, en el sector industrial el cual es altamente competitivo, la tolerancia de un controlador es constantemente revisada para alcanzar funcionamientos cada vez mejores y por lo mismo se tiene la necesidad de tomar en cuenta incertidumbres que muchas veces han sido descartadas en diseños anteriores. Esto demanda el uso de controladores más complejos y versátiles y naturalmente, los controladores adaptativos son candidatos en tales casos. Otro factor por lo cual se requiere el uso de un control más sofisticado es el costo de las labores especializadas en las sociedades industriales avanzadas. Por ejemplo, en procesos químicos complejos, constantemente se tiene la necesidad de afinar cientos de parámetros para mantener el sistema operando cerca de su punto óptimo. Las consideraciones económicas demandan el uso de dispositivos de ajuste automático sobre los cuales casi no se tenga la intervención humana.

En años recientes, el control adaptativo ha sido aplicado a un gran número de problemas industriales tales como minas y cementeras, fabricas de papel y sistemas de potencia, autopilotos en aeroplanos y barcos, trenes de alta velocidad y transbordadores espaciales.

Aunque la razón general para requerir el uso de control adaptativo en todas las aplicaciones es enfrentarse con incertidumbres en el sistema, la razón específica puede variar de un área a otra o aún para diferentes aplicaciones en la misma área. Por ejemplo, en algunas áreas puede ser que no se tengan disponibles sensores para medir las salidas o si se tienen, puede ser que no sean económicamente atractivos.

La meta del presente trabajo es llegar a establecer un modelo y aplicarle la teoría que vamos a empezar a estudiar a un problema real, a una *Columna de Destilación*, con el fin de ilustrar la eficiencia del control adaptativo.

## Capítulo 2

# Estabilidad de Lyapunov

En este capítulo, estudiaremos el concepto de Estabilidad de Lyapunov el cual juega un papel fundamental en la Teoría de Sistemas y Control.

La Teoría de Estabilidad es una materia antigua que aparece casi al mismo tiempo que la Teoría de Ecuaciones Diferenciales. El objetivo de la Teoría de Estabilidad en el sentido de Lyapunov es extraer conclusiones acerca del comportamiento de un sistema sin determinar sus trayectorias solución. Quizás el primero en estudiar estabilidad en el sentido "moderno" fue Lagrange (1788), quien analizó sistemas mecánicos usando lo que ahora llamamos Mecánica Lagrangiana. Una de sus conclusiones fue que en ausencia de fuerzas externas el estado de equilibrio de un sistema mecánico conservativo es *estable* siempre que este corresponda a un mínimo de la energía potencial del sistema. Varios investigadores siguieron los métodos de Lagrange, pero la mayor parte de su trabajo estuvo restringida a sistemas mecánicos conservativos descritos por ecuaciones de movimiento Lagrangiano. El avance significativo en la Teoría de Estabilidad que nos permite analizar ecuaciones diferenciales arbitrarias se debe al Matemático Ruso A.M. Lyapunov (1892). Lyapunov no únicamente introdujo las definiciones básicas de estabilidad que en la actualidad son usadas, sino que demostró muchos de los teoremas fundamentales. El trabajo de Lyapunov fue desconocido en el Oeste hasta alrededor de 1960 y todo el avance en la Teoría de Estabilidad hasta ese tiempo se debe a Matemáticos Rusos. Ahora, los fundamentos de la teoría están bien establecidos y se le considera como una herramienta indispensable en el análisis y síntesis de sistemas no lineales.

La Teoría de Control trata con el análisis y diseño de Sistemas Dinámicos en los cuales una o más variables se mantienen en ciertos límites prescritos. La efectividad de cualquier sistema de control es determinada principalmente por la exactitud y velocidad con la cual las variables son controladas. Sin embargo, antes de que se haga cualquier esfuerzo por satisfacer algún criterio de funcionamiento específico para optimizar el sistema de alguna manera, es imperativo que su estabilidad sea asegurada. Por lo tanto, uno de los objetivos primordiales en el análisis de sistemas de control es la comprensión clara de sus propiedades de estabilidad.

En los Sistemas Adaptativos, los parámetros de control son ajustados usando toda la información disponible, obtenida aún cuando el sistema está en operación. Esto vuelve al sistema completo no lineal y no autónomo el cual no necesariamente es estable. La estructura de retroalimentación que tienen los Sistemas Adaptativos también introduce la posibilidad de inestabilidad. En los primeros días del Control Adaptativo, el énfasis en el diseño fue sobre la optimización de un criterio de funcionamiento. La estabilidad del sistema completo era analizada después de ser elegida una ley de control conveniente para la optimización. Sin embargo, dado que en general, la estabilidad de un sistema no lineal es un buen problema, usando este enfoque los resultados para la mayor parte de los problemas únicamente pueden ser resultados de estabilidad locales. En contraste a este procedimiento, el enfoque que empezó en los 60's asegura la estabilidad global del sistema adaptativo completo al ser elegida una ley adaptativa conveniente.

En este capítulo, discutiremos resultados importantes sobre estabilidad de sistemas no lineales los cuales son directamente relevantes en el estudio de sistemas adaptativos y reguladores. Aunque algunos de estos resultados son teoremas generales de estabilidad que pueden encontrarse en cualquier texto sobre la materia, otros son de origen más reciente (80's) desarrollados en el contexto específico de sistemas adaptativos los cuales se presentan aquí en una forma coherente. Sin embargo, debido a la limitación de espacio y dado que esto nos desviaría un poco de nuestro objetivo, únicamente algunos de los teoremas son establecidos y demostrados con detalle, las demostraciones de otros son brevemente bosquejadas o se da la referencia apropiada en la que se puede encontrar un análisis más detallado.

## 2.1 Definiciones de Estabilidad

Esta sección la dedicaremos a establecer varios tipos de estabilidad dando definiciones ilustradas con ejemplos. En todo el capítulo, el objetivo de estudio es la ecuación diferencial vectorial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad t \geq 0, \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^0, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

donde  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial continua. Además, se asume que la ecuación diferencial (2.1.1) tiene solución única para cada condición inicial. Este es el caso, por ejemplo, si  $\mathbf{f}$  satisface una condición global de Lipschitz. También, es fácil demostrar (ver Apéndice A) que la suposición anterior es válida para casi todas las funciones continuas  $\mathbf{f}$ .

Denotemos por  $\phi(t; t_0, \mathbf{x}^0)$  a la solución de la ecuación (2.1.1) correspondiente a la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ , evaluada en el tiempo  $t$ . En otras palabras,  $\phi$  satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} \phi(t; t_0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{f}(t, \phi(t; t_0, \mathbf{x}^0)), \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.1.2)$$

$$\phi(t_0; t_0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0.$$

La solución  $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface las propiedades siguientes:

- i)  $\phi(t_0; t_0, x^0) = x^0, \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n,$
- ii)  $\phi(t; t_1, \phi(t_1; t_0, x^0)) = \phi(t; t_0, x^0) \quad \forall t_1 \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n.$

**Definición 2.1.1** Un vector  $x_e \in \mathbb{R}^n$  es un estado (punto) de equilibrio del sistema (2.1.1) o simplemente un equilibrio si

$$f(t, x_e) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.1.3}$$

Es claro que si (2.1.3) se cumple, entonces

$$\phi(t; t_0, x_e) = x_e, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{2.1.4}$$

En otras palabras, si el sistema empieza en un punto de equilibrio, entonces permanece en este y viceversa. A lo largo del capítulo, se asume que  $x_e = 0$  es un punto de equilibrio del sistema (2.1.1). Si el punto de equilibrio bajo estudio no es el origen, podemos siempre redefinir las coordenadas sobre  $\mathbb{R}^n$  de tal forma que el punto de equilibrio de interés este en el nuevo origen (cambio de coordenadas). Así, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0$  lo cual es equivalente a

$$\phi(t; t_0, 0) = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

La Teoría de Lyapunov se concentra en el comportamiento de la función  $\phi(t; t_0, x^0)$  cuando  $x^0 \neq 0$  pero es cercano a este. Sin embargo, algunas veces cuando  $x^0$  está "lejos" de 0, también es de interés.

**Definición 2.1.2** El estado de equilibrio  $x_e = 0$  es estable (en el sentido de Lyapunov) si para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $t_0 \in \mathbb{R}^+,$  existe un  $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$  tal que

$$\|x^0\| < \delta(\epsilon, t_0) \implies \|\phi(t; t_0, x^0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \text{ (Fig. 2.1a)}. \tag{2.1.5}$$

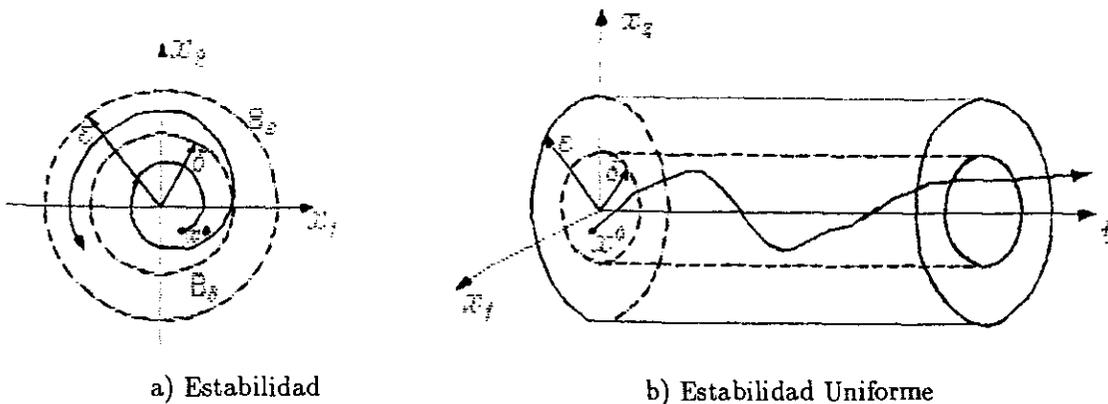


Fig. 2.1 Estabilidad y Estabilidad uniforme.

**Definición 2.1.3** El estado de equilibrio  $x_e = 0$  es *uniformemente estable* si para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que

$$\|x^0\| < \delta(\epsilon) \implies \|\phi(t; t_0, x^0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{Fig. 2.1b}). \quad (2.1.6)$$

**Definición 2.1.4** El estado de equilibrio  $x_e = 0$  es *inestable* si no es estable de acuerdo a la Definición 2.1.2.

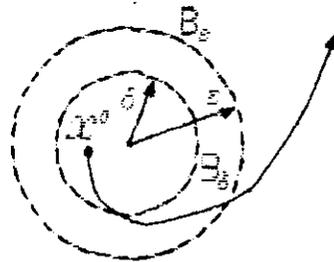


Fig. 2.3 Inestabilidad.

Si el estado de equilibrio es un nodo o un foco estable (inestable), también es estable (inestable) de acuerdo a Lyapunov.

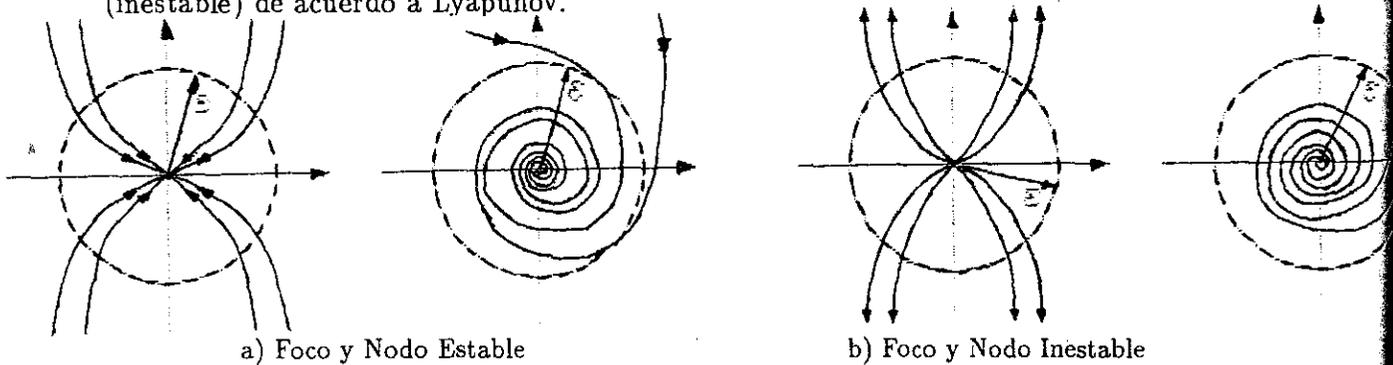
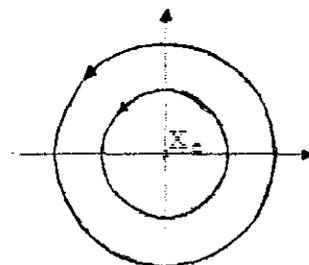


Fig. 2.4 Estabilidad e Inestabilidad.

Cuando el estado de equilibrio  $x_e = 0$  es un centro,  $x_e$  se puede o no considerar estable en el sentido de Lyapunov.



Centro.

**Nota:** La inestabilidad de un estado de equilibrio no necesariamente significa que las trayectorias solución se disparan (ver Ejemplo 2.3).

De acuerdo a la Definición 2.1.2, el estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es estable si la trayectoria solución se mantiene cercana al estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  si empieza cerca de este (pequeñas perturbaciones en el estado inicial dan como resultado pequeñas desviaciones de las trayectorias solución del estado de equilibrio). En otras palabras, dado que queremos que la norma de la solución de la ecuación (2.1.1),  $\|\mathbf{x}(t)\|$ , no exceda un número positivo específico  $\epsilon$ , debemos ser capaces de determinar una cota  $\delta(\epsilon, t_0)$  para la norma de la condición inicial,  $\|\mathbf{x}(t_0)\|$ , de tal forma que la trayectoria solución de la ecuación (2.1.1), que empieza en el tiempo  $t_0$  en un estado inicial  $\mathbf{x}^0$  dentro de la bola de radio  $\delta(\epsilon, t_0)$  siempre permanece dentro de la bola de radio  $\epsilon$  para todo tiempo posterior  $t \geq t_0$ .

También, es posible interpretar la estabilidad como una forma de continuidad de las trayectorias solución con respecto a las condiciones iniciales. Sabemos, de la teoría de ecuaciones diferenciales, que bajo hipótesis razonables tal como continuidad de Lipschitz de  $f$ , la solución de la ecuación (2.1.1) es una función continua de la condición inicial. Esto significa que, dado cualquier  $t_0 \geq 0$  y cualquier tiempo finito  $T$ , la función  $\phi(t; t_0, \mathbf{x}^0)$ , la cual lleva a la condición inicial  $\mathbf{x}^0$  a la correspondiente trayectoria solución en  $C^n[t_0, T]$ , es continua. Esta propiedad es válida si el estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es o no estable. Sin embargo, la estabilidad requiere de algo más. Para establecer esto, sea  $C^n[t_0, \infty)$  el espacio de las funciones vectoriales continuas sobre  $[t_0, \infty)$  y sea  $C_A^n[t_0, \infty)$  el espacio de las funciones continuas acotadas. Si definimos la norma

$$\|\mathbf{x}(\cdot)\|_S = \sup_{t \in [t_0, \infty)} \|\mathbf{x}(t)\|, \quad (2.1.7)$$

entonces  $C_A^n[t_0, \infty)$  es un espacio de Banach. Ahora, la estabilidad es equivalente a:

1. Para cada  $t_0 \geq 0$ , existe un número  $d(t_0)$  tal que  $\phi(\cdot; t_0, \mathbf{x}^0) \in C_A^n[t_0, \infty)$  siempre que  $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{B}_{d(t_0)}$ , donde  $\mathcal{B}_{d(t_0)}$  es la bola

$$\mathcal{B}_d \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < d\}. \quad (2.1.8)$$

2. La función  $\phi(\cdot; t_0, \mathbf{x}^0)$ , la cual lleva a la condición inicial  $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{B}_{d(t_0)}$  a la correspondiente trayectoria solución en  $C_A^n[t_0, \infty)$ , es continua en  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$  para cada  $t_0 \geq 0$ .

Es decir, la estabilidad es aproximadamente lo mismo que la dependencia continua de la solución sobre la condición inicial en un intervalo finito.

Otro pequeño punto que necesitamos aclarar es sobre la norma empleada en (2.1.5). Tal norma, es *cualquier* norma sobre  $\mathbb{R}^n$ . Dado que todas las normas en  $\mathbb{R}^n$  son topológicamente equivalentes, se sigue que el status de estabilidad de un estado de equilibrio no depende de la norma particular usada para verificar (2.1.5).

Una vez que la noción de estabilidad es entendida, es más fácil entender lo que estabilidad uniforme significa. De acuerdo a la Definición 2.1.2, el estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es estable si para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $t_0 \geq 0$ , se puede encontrar un  $\delta$  tal que la condición (2.1.5)



se satisface. En general, este  $\delta$  depende tanto de  $\epsilon$  como de  $t_0$ . Sin embargo, si se puede encontrar un  $\delta$  que dependa únicamente de  $\epsilon$  y no dependa de  $t_0$ , entonces el estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es uniformemente estable. Si el sistema (2.1.1) es autónomo ( $\mathbf{f}$  no depende explícitamente de  $t$ ), entonces no hay distinción entre estabilidad y estabilidad uniforme ya que cambiar el tiempo inicial simplemente es trasladar las trayectorias solución resultantes en una cantidad igual de tiempo. En términos de la función  $\phi$ , la estabilidad uniforme es rigurosamente equivalente a la continuidad uniforme con respecto a  $t_0$ . Más precisamente, la estabilidad uniforme es equivalente a:

- 1.' Existe un número  $d > 0$  tal que  $\phi(\cdot; t_0, \mathbf{x}^0) \in C_A^n[t_0, \infty)$  siempre que  $\mathbf{x}^0 \in B_d, t_0 \in \mathbb{R}^+$ ,
- 2.' La función  $\phi(\cdot; t_0, \mathbf{x}^0) : B_d \rightarrow C_A^n[t_0, \infty)$  es uniformemente continua en  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$  con respecto a  $t_0$ .

**Ejemplo 2.1 (Péndulo simple).** Si  $l$  es la longitud del péndulo,  $\theta$  es el ángulo de desviación con respecto a la vertical y  $g$  es la aceleración gravitacional, entonces el movimiento del péndulo es gobernado por

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin(\theta) = 0 \quad (2.1.9)$$

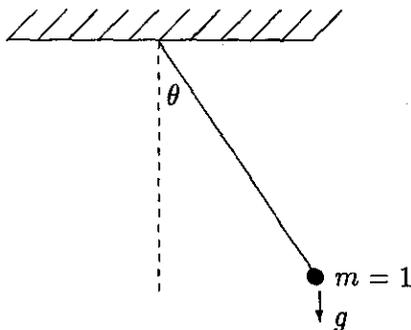


Fig. 2.5 El péndulo Simple.

Al introducir las variables  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ , la ecuación (2.1.9) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Las trayectorias de este sistema son descritas por

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{g}{l} \cos x_1 = \frac{x_{20}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos x_{10} \stackrel{\text{def}}{=} a_0. \quad (2.1.11)$$

Ahora, podemos demostrar que  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es un estado de equilibrio estable, verificando directamente la condición de la Definición 2.1.2. Supongamos que damos un  $\epsilon > 0$ , entonces

es posible elegir un número  $a_0 > 0$  tal que la curva descrita por (2.1.11) esté por completo en la bola  $B_\epsilon$ . Ahora, eligiendo  $\delta > 0$  tal que la bola  $B_\delta$  este por completo en la bola  $B_\epsilon$ , (2.1.5) se satisface. Dado que este procedimiento puede hacerse para cada  $\epsilon > 0$ , se sigue que  $x_e = 0$  es un punto de equilibrio estable.  $\square$

Como fue mencionado arriba, no hay diferencia entre estabilidad y estabilidad uniforme para sistemas autónomos. El siguiente ejemplo, ilustra que para sistemas no autónomos los dos conceptos son realmente diferentes.

**Ejemplo 2.2 (Massera 1949).** Considerar la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = (6t \operatorname{sen} t - 2t)x(t). \quad (2.1.12)$$

La solución de la ecuación (2.1.12) está dada por

$$x(t) = x(t_0) \exp \{6 \operatorname{sen} t - 6t \cos t - t^2 - 6 \operatorname{sen} t_0 - 6t_0 \cos t_0 - t_0^2\}. \quad (2.1.13)$$

Para mostrar que el origen es un estado de equilibrio estable, sea  $t_0 \geq 0$  cualquier tiempo inicial fijo. Entonces,

$$\left| \frac{x(t)}{x(t_0)} \right| = \exp \{6 \operatorname{sen} t - 6t \cos t - t^2 - 6 \operatorname{sen} t_0 - 6t_0 \cos t_0 - t_0^2\}. \quad (2.1.14)$$

Ahora, si  $t - t_0 > 6$ , entonces la función del lado derecho de la expresión (2.1.14) es acotada por arriba por  $\exp \{12 + T(6 - T)\}$ , donde  $T = t - t_0$ . Dado que esta función es continua en  $t$ , es acotada en  $[t_0, T]$ . Por lo tanto, si definimos

$$c(t_0) = \sup_{t \geq t_0} \exp \{6 \operatorname{sen} t - 6t \cos t - t^2 - 6 \operatorname{sen} t_0 - 6t_0 \cos t_0 - t_0^2\}.$$

entonces,  $c(t_0)$  es finita para cada  $t_0$  fijo. Así, dado cualquier  $\epsilon > 0$ , la condición de la Definición 2.1.2 se satisface si elegimos  $\delta(\epsilon, t_0) = \epsilon/c(t_0)$ . Esto muestra que  $x_e = 0$  es un estado de equilibrio estable. Por otro lado, si  $t_0 = 2n\pi$ , entonces se sigue de (2.1.13) que

$$x((2n+1)\pi) = x(2n\pi) \exp \{(2n+1)(6-\pi)\pi\}.$$

Esto muestra que

$$c(2n\pi) \geq \exp \{(2n+1)(6-\pi)\pi\}.$$

Por lo tanto,  $c(t_0)$  no es una función acotada de  $t_0$ . Así, dado  $\epsilon > 0$ , no es posible encontrar un simple  $\delta = \delta(\epsilon)$ , independiente de  $t_0$ , tal que la condición (2.1.6) sea válida. Por lo tanto, el estado de equilibrio  $x_e = 0$  no es uniformemente estable.  $\square$

Por último, pongamos nuestra atención sobre la inestabilidad. De acuerdo a la Definición 2.1.4, inestabilidad es simplemente la ausencia de estabilidad. Es común que el término "inestabilidad" nos lleve a visualizar una situación donde algunas trayectorias del sistema se "disparan" en el sentido que  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Aunque esta es una forma en la que la inestabilidad puede ocurrir, no es la única. La estabilidad del estado de equilibrio  $x_e = 0$  significa que dado cualquier  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar algún  $\delta > 0$  tal que (2.1.5) es válida. Por lo tanto,  $x_e = 0$  es un estado de equilibrio inestable si para algún  $\epsilon > 0$ , no se puede encontrar un  $\delta > 0$  tal que (2.1.5) se satisfaga. Equivalentemente, existe una bola  $B_\epsilon$  tal que la trayectoria correspondiente a  $x^0 \in B_\delta \subset B_\epsilon$  en algún momento sale de  $B_\epsilon$  (Fig. 2.3). Esta y únicamente esta es la definición de inestabilidad en el sentido de Lyapunov. Además, esta situación la podemos ilustrar con el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 2.3 (El Oscilador de Van der Pol).** Consideremos el sistema oscilatorio descrito por la ecuación,

$$\ddot{y} - \epsilon(1 - y^2)\dot{y} - y = 0 \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

la cual es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{1}{2}(1 - x_1^2)x_2, \quad \epsilon = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

El origen es el único estado de equilibrio de este sistema. Sin embargo, las trayectorias solución que empiezan de todo estado inicial diferente de cero, no importando que tan cercano este al origen, en algún momento alcanzan el círculo límite como se muestra en la Fig. 2.6.

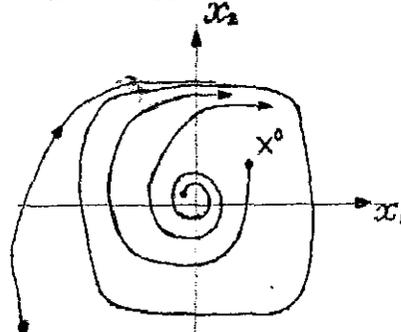


Fig. 2.6 Trayectorias Solución del Oscilador de Van der Pol.

Ahora, estudiemos la estabilidad del estado de equilibrio  $x_e = 0$  usando la Definición 2.1.2. Elijamos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, de tal forma que podamos asegurar que la bola  $B_\epsilon$  este totalmente contenida en el círculo límite (ver Fig. 2.6). Esto implica que todas las trayectorias que empiezan en un estado inicial diferente de cero dentro de  $B_\epsilon$  en algún momento dejan  $B_\epsilon$  y así ningún  $\delta > 0$  puede encontrarse tal que (2.1.5) se satisfaga. De acuerdo a esto, el origen es un estado de equilibrio inestable. Sin embargo, nótese que todas las trayectorias del sistema son acotadas y ninguna se dispara. Por lo tanto, el sistema es bien desarrollado en este sentido.

□

**Definición 2.1.5** El estado de equilibrio  $x_e = 0$  de la ecuación (2.1.1) se dice ser *atractor* si para cada  $t_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe un  $\eta(t_0) > 0$  tal que

$$\|x^0\| < \eta(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; t_0, x^0) = x_e. \quad (2.1.16)$$

Es decir, dado cualquier  $\rho > 0$ , existe un número  $T(\rho, t_0, x^0)$  tal que

$$\|x^0\| < \eta \implies \|\phi(t; t_0, x^0)\| < \rho \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (2.1.17)$$

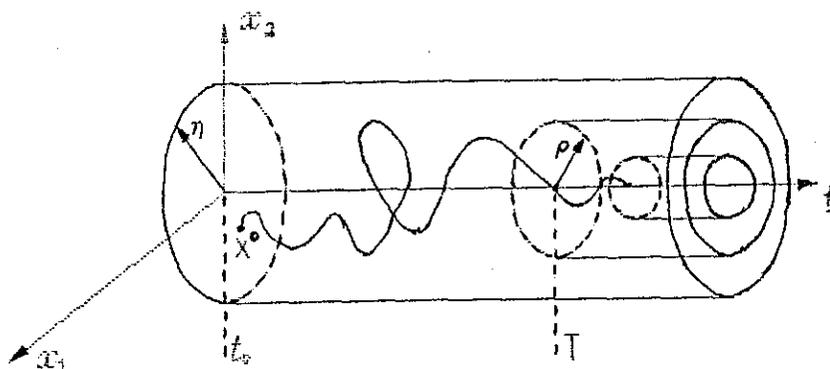


Fig. 2.7 Estado de Equilibrio Atractor.

La atractividad implica que todas las trayectorias que empiezan en una vecindad del estado de equilibrio, en algún momento alcanzan el estado de equilibrio. Si el vector inicial  $x^0$  tiene norma menor que  $\eta$ , entonces para todo tiempo  $t$  más grande que  $t_0 + T$ , la trayectoria está a una distancia menor que  $\rho$  del estado de equilibrio. Podríamos concluir que los sistemas atractores también son estables. Sin embargo, atractividad y estabilidad son conceptos totalmente independientes. ¿Como puede un estado de equilibrio ser atractor sin ser estable? Esta pregunta la podemos contestar mediante el siguiente ejemplo, debido a Vinograd (1957) y reproducido en [8] Hahn, Sección 40, Pags. 191-194.

**Ejemplo 2.4 (Vinograd 1957).** Consideremos el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2) [1 + (x_1^2 + x_2^2)^2]}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2) [1 + (x_1^2 + x_2^2)^2]}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

La situación que ocurre con este ejemplo está resumida en la Fig. 2.8,

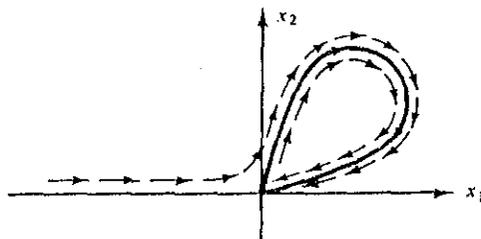


Fig. 2.8 Estado Atractor Inestable.

**Observaciones:**

- i) Las trayectorias fase del sistema son simétricas alrededor del origen.
- ii) En el primer cuadrante (y por lo tanto en el tercero, por simetría), existe una curva  $\gamma$  tal que si el estado inicial está dentro de esta curva, entonces también la trayectoria resultante. Por otro lado, si el estado inicial está fuera de  $\gamma$ , entonces también lo está la trayectoria resultante.
- iii) El origen es un atractor ya que todas las trayectorias se van a él cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo, esto no significa que el origen sea uniformemente atractor, dado que entre más cercana está la condición inicial al origen, más lentamente converge a 0 la trayectoria correspondiente.
- iv) El origen es un equilibrio inestable. Elegir  $\varepsilon > 0$  tal que  $\gamma$  no esté dentro de  $B_\varepsilon$ .

□

Se puede demostrar que si el origen de un sistema autónomo es estable y atractor, entonces este también es uniformemente atractor.

**Definición 2.1.6** El estado de equilibrio  $x_e = 0$  de la ecuación (2.1.1) se dice ser *asintóticamente estable* si es estable y atractor. Este es *asintóticamente estable uniforme (a.e.u.)* si es uniformemente estable y uniformemente atractor. En este caso, las trayectorias solución tienden al origen cuando  $t \rightarrow \infty$  y al mismo tiempo permanecen cercanas al origen si empiezan suficientemente cerca de este.

**Definición 2.1.7** El estado de equilibrio  $x_e = 0$  de la ecuación (2.1.1) es *exponencialmente estable* si existen constantes  $\tau, a, b > 0$  tales que

$$\|x(t; t_0, x^0)\| \leq a \|x^0\| \exp \{-b(t - t_0)\} \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x^0 \in B_\tau.$$

Es claro que la estabilidad exponencial es una propiedad más fuerte que la estabilidad asintótica uniforme.

Todos los conceptos de estabilidad introducidos son locales por naturaleza, en el sentido de que ellos pertenecen únicamente al comportamiento de trayectorias solución que empiezan en estados iniciales cercanos al equilibrio. La última definición, en contraste, pertenece al comportamiento global de la trayectoria solución.

La estabilidad implica que la solución permanece cerca del estado de equilibrio mientras que la estabilidad asintótica implica que la solución tiende al equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$  y la estabilidad asintótica uniforme implica que la convergencia de la solución es independiente del tiempo inicial  $t_0$ . Si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = \infty$  en las definiciones de arriba, entonces la estabilidad se dice ser válida *en lo grande* o que el estado de equilibrio es *globalmente estable*. Si la Definición 2.1.3 es válida para todo  $\varepsilon > 0$ , entonces  $x_e = 0$  en la ecuación 2.1.1 es asintóticamente estable uniformemente en lo grande (**a.e.u.g.**).

La estabilidad exponencial de un sistema siempre implica estabilidad asintótica uniforme. En general, el inverso no es válido. Un ejemplo simple es el origen de la ecuación diferencial  $\dot{x} = -x^3$  el cual es (**a.e.u.**) pero no exponencialmente estable. Sin embargo, en el caso de los sistemas lineales, la estabilidad asintótica uniforme es equivalente a la estabilidad exponencial. También, para los sistemas lineales, todas las propiedades de estabilidad son válidas en lo grande (globalmente). Si el sistema es autónomo, todas las trayectorias son uniformes. Si  $B_r = \mathbb{R}^n$  en la Definición 2.1.7, entonces el estado de equilibrio es exponencialmente estable globalmente.

### Definición 2.1.8 Estabilidad de Movimiento.

Aunque todas las definiciones anteriores se refieren al comportamiento de los estados de equilibrio de un sistema dinámico libre, el concepto de estabilidad a un movimiento establecido también es de interés. Sin embargo, como fue sugerido por Lyapunov, tal problema de estabilidad puede transformarse a un problema equivalente de estabilidad de un estado de equilibrio, donde el movimiento establecido de interés es tal punto el equilibrio bajo investigación. Brevemente, esto lo describiremos como sigue.

Sea  $x(t)$  una trayectoria solución de  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x^0$ , y sea  $x^*(t)$  otra trayectoria que empieza en  $x^*(t_0) = x^{*0}$ .

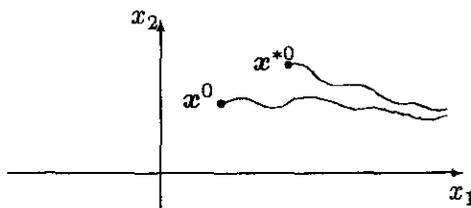


Fig. 2.9 Estabilidad de Movimiento.

Nos referiremos a  $\mathbf{x}^*(t)$  como la *solución nominal* para el sistema. Para determinar su estabilidad, perturbaremos la condición inicial a  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{*0} + \delta\mathbf{x}^0$  y observaremos la desviación de la solución correspondiente  $\mathbf{x}(t)$  con respecto a la nominal. Como  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{x}^*(t)$  son soluciones de la misma ecuación diferencial, tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*), & \mathbf{x}^*(t_0) &= \mathbf{x}^{*0}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^{*0} + \delta\mathbf{x}^0.\end{aligned}$$

Si  $\mathbf{e}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$ , entonces  $\mathbf{e}(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t, \mathbf{e}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^* + \mathbf{e}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*) \\ \mathbf{e}(t_0) &= \delta\mathbf{x}^0.\end{aligned}\tag{2.1.19}$$

Dado que  $\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ , la solución  $\mathbf{e} \equiv \mathbf{0}$  corresponde al estado de equilibrio de la ecuación diferencial modificada (2.1.19). Esto implica que el problema de estabilidad asociado con la solución nominal  $\mathbf{x}^*(t)$  de la ecuación (2.1.1) puede transformarse en un problema equivalente de estabilidad del estado de equilibrio de la ecuación (2.1.19).

**Ejemplo 2.5** Consideremos el siguiente sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= -2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2(x_1^2 - 1) + 2\text{sen } 3t, & x_2(0) &= 0,\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -2\cos t, \\ x_2(t) &= 2\text{sen } t.\end{aligned}$$

Definir

$$\begin{aligned}e_1(t) &= x_1 + 2\cos t, \\ e_2(t) &= x_2 - 2\text{sen } t.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= e_2, \\ \dot{e}_2(t) &= -e_2(4\cos^2 t - 1 + e_1^2 - 4e_1\cos t) - e_1(1 - 8\text{sen } t\cos t + 2e_1\text{sen } t)\end{aligned}$$

y así

$$\left. \begin{aligned}e_1 &= 0 \\ e_2 &= 0\end{aligned} \right\} \text{ es un punto de equilibrio.}$$

□

## 2.2 Método Directo de Lyapunov

El Método Directo de Lyapunov permite determinar si un punto de equilibrio de un sistema dinámico de la forma (2.1.1) es estable sin determinar explícitamente sus soluciones. La idea detrás de varios teoremas de estabilidad de Lyapunov, estabilidad asintótica e inestabilidad es como sigue: considerar un sistema que este "aislado" en el sentido de que no hay fuerzas externas actuando sobre él. La ecuación (2.1.1), establecida en la Sección 2.1, es un modelo conveniente para el sistema ya que ninguna entrada se identifica explícitamente en el lado derecho de esta ecuación. Supongamos que podemos identificar los estados de equilibrio del sistema y que  $x_e = 0$  es uno de los puntos de equilibrio (posiblemente el único). Ahora, supongamos que es posible definir, en algún sentido, la *energía total* del sistema, la cual es una función que tiene la propiedad de ser igual a cero en el origen y positiva en otra parte. En otras palabras, la energía tiene un mínimo local o global en  $x_e = 0$ . Si el sistema, el cual está inicialmente en el estado de equilibrio  $x_e = 0$ , es perturbado a un nuevo estado inicial diferente de  $x_e$  (donde el nivel de energía es positivo), entonces hay varias posibilidades. Si la dinámica del sistema es tal que la energía no crece con el tiempo, entonces el nivel de energía del sistema no se incrementa más allá del valor positivo inicial. Dependiendo de la naturaleza de la función de energía, esto podría ser suficiente para concluir que el equilibrio  $x_e$  es estable. Si la dinámica es tal que la energía del sistema es decreciente monótonamente con el tiempo (la energía de hecho se reduce a cero), entonces esto podría ser suficiente para concluir que el equilibrio  $x_e$  es asintóticamente estable. Por último, si la función de energía continúa incrementándose más allá del valor inicial, entonces uno podría ser capaz de concluir que el equilibrio  $x_e$  es inestable. Tal enfoque de analizar el desarrollo cualitativo de sistemas mecánicos fue inicialmente explorado por Lagrange quien mostró que *el equilibrio de un sistema mecánico conservativo es estable si corresponde a un mínimo local de la función de energía potencial y que este es inestable si corresponde a un máximo local*. El genio de Lyapunov yace en su habilidad de extraer de este tipo de razonamiento una teoría general que es aplicable a cualquier ecuación diferencial. Esta teoría requiere de la búsqueda de una función que satisfaga algunas propiedades especificadas. Esta función comúnmente es conocida como una **función de Lyapunov** y es una generalización de la energía de un sistema mecánico.

Esta sección trata con el así llamado **Método Directo de Lyapunov**, algunas veces también llamado el Segundo Método de Lyapunov. El Primero o Método Indirecto está basado en expansiones en series de potencias el cual queda fuera de nuestro interés. En esta sección, son presentados tres tipos de teoremas básicos, a decir: Teoremas de Estabilidad, Teoremas de Estabilidad Asintótica y Teoremas de Inestabilidad. Varios de los teoremas son ilustrados con ejemplos. El análisis de estabilidad mediante el Método Directo de Lyapunov únicamente proporcionará condiciones suficientes para la estabilidad de un sistema dinámico a diferencia, por ejemplo, del Criterio de Hurwitz el cual establece condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas lineales.

A lo largo de esta sección, las siguientes abreviaciones serán empleadas para hacer los enunciados de los teoremas más compactos.

- $C^1$  : continuamente diferenciable,
- fdp** : función definida positiva,
- fdn** : función definida negativa,
- fsdp** : función semi-definida positiva,
- fsdn** : función semi-definida negativa,
- fdpl** : función definida positiva localmente,
- fdnl** : función definida negativa localmente,
- fnar** : función no acotada radialmente.

**Funciones Signo Definidas:** Estaremos interesados en la estabilidad del estado de equilibrio  $x_e$  del sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.2.1)$$

y para tal propósito usaremos funciones escalares de la forma  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $B_r$  es una región acotada en  $\mathbb{R}^n$  o la bola  $B_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ , tenemos que

**Definición 2.2.1**  $V(x)$  es una **fsdpl** si

- i)  $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_r$ ,
- ii)  $V(0) = 0$ ,
- iii)  $V(x) \in C^1(B_r)$ .

**Definición 2.2.2**  $V(x)$  es una **fdpl** si

- i)  $V(x) > 0 \quad \forall x \in B_r$ ,
- ii)  $V(x) = 0 \iff x = 0$ ,
- iii)  $V(x) \in C^1(B_r)$ .

$V(x)$  es una **fdp** (o **fsdp**) cuando en las Definiciones 2.2.1 – 2.2.2  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Alternativamente a la condición i), podemos establecer que  $V(x) > \alpha(\|x\|) \quad \forall x$ , donde  $\alpha(r)$  es una función escalar monótonamente creciente definida positiva de  $r = \|x\|$  (ver Fig. 2.10).

**Ejemplo 2.6**

- \*  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  es una **fdp**.
- \*  $V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$  es una **fsdp**, pero no una **fdp**.

Nótese que  $V(x) = 0$  cuando  $x_1 = -x_2$ .

□

**Definición 2.2.3**  $V(\mathbf{x})$  es una **fdn** (**fsdn**) si  $-V(\mathbf{x})$  es una **fdp** (**fsdp**).

**Definición 2.2.4**  $V(\mathbf{x})$  es *indefinida* si no es **fsdp** o **fsdn**.

**Ejemplo 2.7**  $V(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$ .

□

**Formas Cuadráticas:** Las formas cuadráticas son una clase especial de las funciones  $V(\mathbf{x})$ .

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad (2.2.2)$$

donde  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Nota:** Si  $\mathbf{M} \equiv \mathbf{I}$ , entonces

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

**Criterio de Sylvester para Checar si una Función es Definida Positiva:**

Si todos los menores principales de la matriz  $\mathbf{M}$  son positivos, entonces la función en la ecuación (2.2.2) es una **fdp**.

Si

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix},$$

entonces,

i)  $m_{11} > 0,$

ii)  $\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} > 0,$

⋮

n)  $\det \mathbf{M} > 0.$

□

### 2.2.1 Teoremas sobre Estabilidad

En los tres teoremas siguientes se establecen las condiciones que aseguran los diferentes casos de estabilidad para los estados de equilibrio de sistemas autónomos.

**Teorema 2.2.1** *El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  del sistema (2.2.1) es estable si existen una función  $C^1$ ,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y una constante  $r > 0$  tales que*

- i)  $V(\mathbf{x})$  es una **fdp** en  $B_r(\mathbf{x}_e) \subset \mathbb{R}^n$ ,
- ii)  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es una **fsdn** a lo largo de las trayectorias solución del sistema (2.2.1) en  $B_r$ .

■

**Teorema 2.2.2** *El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  del sistema (2.2.1) es asintóticamente estable si existen una función  $C^1$   $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r > 0$  tales que*

- i)  $V(\mathbf{x})$  es una **fdp** en  $B_r$ ,
- ii)  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es una **fdn** en  $B_r$ .

■

**Teorema 2.2.3**  *$\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  del sistema (2.2.1) es asintóticamente estable globalmente si existe una función  $C^1$   $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

- i)  $V(\mathbf{x})$  es una **fdp** en  $\mathbb{R}^n$ ,
- ii)  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es **fdn** en  $\mathbb{R}^n$ ,
- iii)  $V(\mathbf{x})$  es una **fnar**. Es decir,  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$  (Definición 2.2.8).

■

Las demostraciones de estos teoremas siguen casi directamente de la demostración del Teorema 2.2.5 (caso general) las cuales omitimos ya que incluirlas representaría una gran pérdida de espacio en este trabajo. Para una demostración completa, referirse a [12], Lefschetz, (1963) o [11], LaSalle–Lefschetz, (1961).

**Ejemplo 2.8** Consideremos el sistema lineal,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

cuyo único estado de equilibrio es  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ .

Intentaremos demostrar estabilidad introduciendo la función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  la cual es una **fdp** en  $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$ .

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(x_2) + x_2(-x_1) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

esto implica que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es una **fsdn** y por el Teorema 2.2.1, tenemos que  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es estable.

Nótese que los valores propios para este sistema son  $\lambda_{\pm} = \pm i$  con lo que se tiene un centro el cual siempre es estable. □

**Ejemplo 2.9** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - \varepsilon x_2^3, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Intentar con  $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$  la cual es una **fdp**, **nar**.

$$\frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(x_2 - x_1) + x_2(-x_1 - x_2 - \varepsilon x_2^3) = -(x_1^2 + x_2^2) - \varepsilon x_2^4.$$

Así,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es una **fdn** y esto implica que el estado de equilibrio  $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$  es asintóticamente estable globalmente. □

**Proposición 2.2.1** Si  $V(\mathbf{x}) > 0$  y  $\frac{dV}{dt} < 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[\mathbf{x}(t)] = 0.$$

**Demostración:** Supongamos lo contrario, esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = L, \quad L \neq 0.$$

$$\text{Entonces, } \frac{dV}{dt} < 0 \implies \exists t_1 \ni \frac{dV}{dt} \leq -m \quad \forall t \geq t_1$$

$$\implies \int_{t_1}^t \frac{dV}{dt} dt \leq \int_{t_1}^t -m dt \implies V[\mathbf{x}(t)] - V[\mathbf{x}(t_1)] \leq -m(t - t_1)$$

$$\implies \lim_{t \rightarrow \infty} V[\mathbf{x}(t)] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \{V[\mathbf{x}(t_1)] - m(t - t_1)\} = -\infty.$$

Esto es una contradicción, puesto que  $V(\mathbf{x})$  es una **fdp**. Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[\mathbf{x}(t)] = 0. \quad \blacksquare$$

Ahora, una **fdp**  $V(\mathbf{x})$  implica que si  $V(\mathbf{x}^*(t)) = 0$ , entonces  $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{0}$ . Es decir, si  $V$  es una **fdp** y  $\dot{V}$  es una **fdn**, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  (estabilidad asintótica).  $\mathbf{x}^*$  es la solución de equilibrio.

**Observaciones:**

- i) Los teoremas dan una condición suficiente para la estabilidad, pero no necesaria.
- ii)  $V(\mathbf{x})$  no es única.
- iii) Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que satisface todas las condiciones para concluir estabilidad, se llama *función de Lyapunov*. Antes o al momento de la prueba, nos referiremos a  $V(\mathbf{x})$  como una *función candidata de Lyapunov*.
- iv) Existen teoremas similares para los sistemas no autónomos.

**Resultados de Estabilidad para Sistemas No Autónomos:**

Consideremos el sistema no lineal y no autónomo descrito en la ecuación (2.1.1).

**Definición 2.2.5** Una función  $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice ser una **fsdpl** si

- i)  $V(t, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_r, \quad t \in \mathbb{R}^+$ ,
- ii)  $V(t, \mathbf{0}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ ,
- iii)  $V(t, \mathbf{x})$  tiene derivadas con respecto a los elementos de  $\mathbf{x}$  y  $t$  continuas (i.e.,  $V \in C^1$ ).

**Definición 2.2.6** Una función  $V(t, \mathbf{x})$  es una **fdpl** si

- i) existe una **fdpl**  $W(\mathbf{x})$  tal que  

$$V(t, \mathbf{x}) > W(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_r, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$
- ii)  $V(t, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ ,
- iii)  $V \in C^1$

Alternativamente, en i) existe una función escalar continua no decreciente  $\alpha$  tal que  $\alpha(0) = 0$  y  $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$  y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

**Ejemplo 2.10**

\*  $V(t, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  es una **fdp**

$$* V(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(1+t)} (x_1^2 + x_2^2) \quad \text{no es una fdp,}$$

Nótese que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $V(t, \mathbf{x})$  se va a cero y por lo tanto  $V \not\geq (x_1^2 + x_2^2)$ ,

$$* V(t, \mathbf{x}) = \left(1 + \frac{1}{t+1}\right) (x_1^2 + x_2^2) \quad \text{es una fdp.}$$

□

**Definición 2.2.7**  $V(t, \mathbf{x})$  es una **fdn (fsdn)** si  $-V(t, \mathbf{x})$  es una **fdp (fsdp)**.

**Definición 2.2.8**  $V(t, \mathbf{x})$  es una **fnar** si cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , se tiene que  $V(t, \mathbf{x})$  tiende a infinito uniformemente en  $t$ . Esto es,  $V(t, \mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad \forall t$ .

**Ejemplo 2.11**  $V(t, \mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{tx_2^2}{1+x_2^2}$ .

$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(t, \mathbf{x}) = 1+t$ , tiende a infinito únicamente cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $V$  no es una **fnar**.

□

**Definición 2.2.9**  $V(t, \mathbf{x})$  se dice ser una función *decreciente* en  $B_r \subset \mathbb{R}^n$  si

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} V(t, \mathbf{x}) = 0$$

uniformemente en  $t$ . Alternativamente, existe una función escalar continua no decreciente  $\beta$  tal que  $\beta(0) = 0$  y  $\beta(\|\mathbf{x}\|) \geq V(t, \mathbf{x}) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$  (ver Fig. 2.10).

**Ejemplo 2.12**

\*  $V(t, \mathbf{x}) = e^{-t} (x_1^2 + x_2^2)$  únicamente es una **fsdp** ya que no podemos encontrar una **fdp**  $W(\mathbf{x})$  tal que  $V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ , pero si es una función decreciente.

\*  $V(t, \mathbf{x}) = e^t (x_1^2 + x_2^2)$  es una **fdp** ya que  $V(t, \mathbf{x}) \geq (x_1^2 + x_2^2) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ , pero no es una función decreciente.

\*  $V(t, \mathbf{x}) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)(1+t^2)}{(2+x_1^2)}$  es una **fdp** ya que  $V \geq x_1^2 + x_2^2$ , pero no es una **fnar** y no es decreciente.

\*  $V(t, \mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2) \left(\frac{1+t^2}{2+t^2}\right)$  es una **fdp**, decreciente y **nar** ya que

$$\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \leq V \leq (x_1^2 + x_2^2).$$

□

**Definición 2.2.10** Sea  $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  respecto a todos sus argumentos y sea  $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$  el gradiente de  $V$  con respecto a  $\mathbf{x}$ . Entonces, la función  $\dot{V} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se define como

$$\begin{aligned} \dot{V} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= [\nabla V(t, \mathbf{x})]^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

y es llamada la *derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias solución del sistema (2.1.1)*.

Los siguientes teoremas son de fundamental importancia en la teoría de estabilidad en especial el teorema 2.2.5 del cual se incluye la demostración ya que este es el que se utiliza en el diseño de controladores adaptativos estables.

**Teorema 2.2.4** *El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  del sistema (2.1.1) es estable si existe una vecindad  $\mathcal{B}_r$  de  $\mathbf{x}_e$  y es posible encontrar una función de clase  $C^1$   $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

- i)  $V(t, \mathbf{x})$  es una **fdp** en  $\mathcal{B}_r$ ,
- ii)  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  es una **fsdn** a lo largo de las trayectorias solución del sistema en  $\mathcal{B}_r$ .

*Además, si  $V(t, \mathbf{x})$  es decreciente, entonces  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es uniformemente estable.*

■

**Teorema 2.2.5** *El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  del sistema (2.1.1) es asintóticamente estable uniformemente globalmente si existe una función escalar  $V(t, \mathbf{x})$  de clase  $C^1$  tal que  $V(t, \mathbf{0}) = 0$  y*

- i)  $V(t, \mathbf{x})$  es una **fdp**, esto es, existe una función escalar continua no decreciente  $\alpha$  tal que  $\alpha(0) = 0$  y  $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) > 0 \quad \forall t$  y  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,
- ii)  $V(t, \mathbf{x})$  es decreciente en el sentido que existe una función escalar continua no decreciente  $\beta$  tal que  $\beta(0) = 0$  y  $\beta(\|\mathbf{x}\|) \geq V(t, \mathbf{x}) \quad \forall t$ .
- iii)  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  es una **fdn**, esto es

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V)^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|) < 0.$$

donde  $\gamma$  es una función escalar continua no decreciente con  $\gamma(0) = 0$ , y la derivada de  $V$  con respecto al tiempo está evaluada a lo largo de las trayectorias solución del sistema (2.1.1).

iv)  $V(t, \mathbf{x})$  es una fnar, esto es,

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \rightarrow \infty \text{ cuando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty.$$

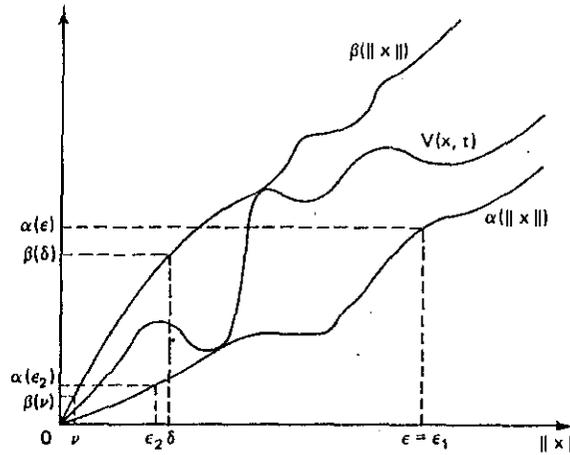


Fig. 2.10 Estabilidad Uniforme y Estabilidad Asintótica Uniforme.

**Demostración:** Daremos un bosquejo de la demostración en dos pasos:

1) **Estabilidad uniforme:** De i) y ii), tenemos

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|).$$

Para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $\beta(\delta) < \alpha(\epsilon)$ . Elijamos la condición inicial  $\mathbf{x}^0$  de tal forma que  $\|\mathbf{x}^0\| < \delta$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha(\epsilon) > \beta(\delta) &\geq V(t, \mathbf{x}^0) \\ &\geq V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)) \text{ ya que } \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \text{ por la condición iii)} \\ &\geq \alpha(\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)\|). \end{aligned}$$

Como  $\alpha(\cdot)$  es no decreciente, esto implica que (Fig. 2.10)

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

y por lo tanto, el origen de la ecuación (2.1.1) es uniformemente estable.

- 1) **Estabilidad Asintótica Uniforme:** Para establecer la estabilidad asintótica uniforme, necesitamos que dado un  $\varepsilon_2$ , existe  $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  tal que

$$\|\mathbf{x}^0\| < \varepsilon_1 \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon_2 \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

Sean  $\delta$  y  $\varepsilon_1$  tales que  $\beta(\delta) < \alpha(\varepsilon_1)$  y por lo tanto, por 1), si  $\|\mathbf{x}^0\| < \delta$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)\| < \nu$  para algún tiempo  $t = t_0 + T$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)\| < \varepsilon_2$  para todo  $t \geq t_0 + T$ . La existencia de tal  $T$  se demuestra por contradicción. Mantengamos  $\|\mathbf{x}(t)\|$  en el intervalo compacto  $[\nu, \varepsilon_1] \quad \forall t \geq t_0$ . La función continua  $\gamma(\|\mathbf{x}\|)$  en la condición *iii*) del Teorema 2.2.5 alcanza un valor mínimo  $\gamma_0 > 0$  en este intervalo. Definiendo  $T = \beta(\delta)/\gamma_0$  entonces existe un tiempo  $t_2 = t_0 + T$  para el cual

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha(\nu) \leq V(t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}^0)) \\ &\leq V(t_0, \mathbf{x}^0) - T \cdot \gamma_0 \\ &\leq \beta(\delta) - \beta(\delta) = 0. \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el origen de la ecuación (2.1.1) es **a.e.u.** Como por la condición *iv*),  $\alpha(\cdot)$  es **nar**, podemos encontrar un  $\varepsilon$  tal que  $\beta(\delta) \leq \alpha(\varepsilon)$  para cualquier  $\delta$ . Además,  $\delta$  puede ser arbitrariamente grande. Por lo tanto,  $\mathbf{x}_e = 0$  del sistema (2.1.1) es **a.e.u.g.**

### Ejemplo 2.13 (Ecuación de Mathieu Amortiguada)

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} + \dot{y} + (2 + \sin t)y = 0$$

la cual es equivalente al sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - (2 + \sin t)x_1 \end{aligned}$$

cuyo único estado de equilibrio es el punto  $\mathbf{x}_e = 0$ .

Sea  $V(t, \mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{(2 + \sin t)}$  una función candidata de Lyapunov.

Nótese que  $V(t, \mathbf{x}) \geq x_1^2 + \frac{x_2^2}{3}$  lo cual implica que  $V$  es una **fdp**.

Ahora,  $V(t, \mathbf{x}) \leq x_1^2 + x_2^2$  y con esto  $V$  es un función decreciente.

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 2x_1\dot{x}_1 + \frac{2x_2(2 + \operatorname{sen} t)\dot{x}_2 - \cos t x_2^2}{(2 + \operatorname{sen} t)^2} \\ &= 2x_1x_2 + \frac{2}{2 + \operatorname{sen} t}x_2\{-x_2 - (2 + \operatorname{sen} t)x_1\} - \frac{x_2^2 \cos t}{(2 + \operatorname{sen} t)^2} \\ &= -\frac{x_2^2}{(2 + \operatorname{sen} t)^2}\{\cos t + 2(2 + \operatorname{sen} t)\}.\end{aligned}$$

Esto implica que  $\dot{V}$  es una fsdn. Por lo tanto,  $x_e = 0$  es uniformemente estable.

□

**Ejemplo 2.14** Dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - e^{-2t}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1.\end{aligned}$$

Investigar la estabilidad del origen.

Seleccionemos la función candidata de Lyapunov como

$$V(t, \mathbf{x}) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2.$$

Nótese que  $x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, \mathbf{x}) \leq x_1^2 + 2x_2^2$  lo cual implica que  $V$  es una fdp y decreciente. También,  $V$  es una fnar (ya que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ).

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}) &= 2x_1(-x_1 - e^{-2t}x_2) + (1 + e^{-2t})2x_2(-x_2 + x_1) + x_2^2(-2e^{-2t}) \\ &= -2[x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t})].\end{aligned}$$

Esto implica que  $\dot{V}$  es una fdn y por lo tanto, el estado de equilibrio  $x_e = 0$  es asintóticamente estable uniformemente globalmente.

□

### **Teorema 2.2.6 (Teorema sobre Inestabilidad de Chetaev)**

El estado de equilibrio del sistema (2.2.1) no es asintóticamente estable si existe una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades en una vecindad  $\Omega$  de  $x_e = 0$ .

i)  $V(\mathbf{x})$  se anula en el origen (i.e.,  $V(0) = 0$ ),  $V(\mathbf{x})$  tiene primeras derivadas continuas con respecto a todos los elementos de  $\mathbf{x}$  (i.e.,  $V \in C^1(\Omega)$ ) y arbitrariamente cerca del origen toma valores negativos.

ii)  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es una fsdn a lo largo de las trayectorias solución del sistema (2.2.1).

El estado de equilibrio es inestable si además de las condiciones de arriba,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es una fsdn o si no se anula a lo largo de cualquier otra solución del sistema (2.2.1) diferente de la solución nula.

### Teorema 2.2.7 (Teorema sobre Inestabilidad de Lyapunov)

Supongamos que existe una función  $V(\mathbf{x})$  tal que

- i)  $V(\mathbf{0}) = 0, \quad V \in C^1,$
- ii)  $V(\mathbf{x})$  toma valores negativos arbitrariamente cerca del origen.

Ahora, si  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , a lo largo de las trayectorias solución del sistema (2.2.1), se puede expresar como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \alpha V(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})$$

donde  $\alpha$  es una constante y  $W(\mathbf{x})$  es una fsdn, entonces el estado de equilibrio es

- 1) no asintóticamente estable si  $\alpha \geq 0,$
- 2) inestable si  $\alpha > 0.$

**Ejemplo 2.15** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 - x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 + x_1^2x_2.\end{aligned}$$

El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es inestable ya que si elegimos  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ , entonces

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \underbrace{2}_{\alpha} \underbrace{(x_1^2 - x_2^2)}_{V(\mathbf{x})} + \underbrace{(-4x_1^2x_2^2)}_{W(\mathbf{x})}$$

con  $W(\mathbf{x})$  una fsdn y  $\alpha = 2 > 0.$

**Nota:** A pesar de la generalidad y no unicidad que tienen las funciones de Lyapunov, no existe un método explícito para determinarlas a menos que el sistema sea lineal.

### 2.2.2 Estabilidad de Lyapunov de Sistemas Lineales

En esta subsección estudiaremos estabilidad de Lyapunov de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0. \quad (2.2.4)$$

El sistema (2.2.4) es autónomo (LTI) si  $A(\cdot)$  es una función matricial constante en el tiempo; en otro caso, el sistema es no autónomo (LTV). Es claro que el único estado de equilibrio del sistema (2.2.4) es el punto  $x_e = 0$ . La solución general del sistema (2.2.4) es dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) = \Phi(t, t_0)x^0$$

donde  $\Phi(\cdot, \cdot)$  es la *matriz de transición* asociada con  $A(\cdot)$  y es la única solución de la ecuación

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

$$\Phi(t_0, t_0)I, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Con esta caracterización explícita de las soluciones de (2.2.4), es posible derivar algunas condiciones útiles para la estabilidad del estado de equilibrio  $x_e = 0$ . Como las condiciones envuelven a la matriz de transición  $\Phi$ , estas no son de mucho valor computacional porque en general es imposible derivar expresiones analíticas para  $\Phi$ . Sin embargo, estas son de valor conceptual y nos ayudan a entender el mecanismo de la estabilidad e inestabilidad de los sistemas lineales.

**Teorema 2.2.8** *El estado de equilibrio  $x_e = 0$  del sistema (2.2.4) es estable si y solo si para cada  $t_0 \geq 0$  se tiene*

$$\sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t, t_0)\| \stackrel{\text{def}}{=} m(t_0) < \infty. \quad (2.2.5)$$

**Nota:** En el caso de los sistemas lineales, la inestabilidad del estado de equilibrio en realidad significa que algunas de las soluciones se “disparan”. Esto es en contraste a los sistemas no lineales, donde la inestabilidad puede estar acompañada por la acotación de todas las soluciones (ver el Ejemplo 2.6).

Las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad uniforme son dadas en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.9** *El estado de equilibrio  $x_e = 0$  del sistema (2.2.4) es uniformemente estable si y solo si*

$$m_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t_0 \geq 0} m(t_0) = \sup_{t_0 \geq 0} \sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t, t_0)\| < \infty. \quad (2.2.6)$$

El siguiente teorema caracteriza la estabilidad asintótica uniforme. ■

**Teorema 2.2.10** *El estado de equilibrio  $x_e = 0$  del sistema (2.2.4) es (globalmente) asintóticamente estable uniformemente si y solo si*

- i)  $\sup_{t_0 \geq 0} \sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t, t_0)\| < \infty$ ,
- ii)  $\|\Phi(t_0 + t, t_0)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $t_0$ .

**Teorema 2.2.11** *El estado de equilibrio  $x_e = 0$  del sistema (2.2.4) es asintóticamente estable uniformemente si y solo si existen constantes  $m, \lambda > 0$  tales que*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq m e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (2.2.7)$$

**Nota:** Si (2.2.7) se satisface, entonces

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x^0\| \leq m e^{-\lambda(t-t_0)} \|x^0\| \quad \forall t \geq t_0.$$

En el caso de los sistemas LTI descritos por la ecuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.2.8)$$

la teoría de Lyapunov es bien completa.

**Teorema 2.2.12** *El estado de equilibrio  $x_e = 0$  del sistema (2.2.8) es (globalmente) exponencialmente estable si y solo si  $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ . El estado de equilibrio  $x_e = 0$  es estable si y solo si todos los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa y además, todo valor propio de  $A$  que tiene parte real igual a cero es un cero simple del polinomio mínimo de  $A$ .* ■

Así, en el caso de los sistemas LTI's de la forma (2.2.8), el status de estabilidad del estado de equilibrio  $x_e = 0$  puede establecerse estudiando los valores propios de la matriz de estado  $A$ . Sin embargo, es posible formular un enfoque diferente al problema en base al uso de funciones de Lyapunov cuadráticas. Este enfoque es de interés y es utilizado en el estudio de sistemas no lineales con métodos de linealización.

Dado el sistema (2.2.8), la idea es elegir una función candidata de Lyapunov de la forma

$$V(x) = x^T P x \quad (2.2.9)$$

con  $P$  una matriz real simétrica. Entonces,  $\dot{V}$  es dada por

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = -x^T Q x$$

donde

$$A^T P + P A = -Q. \quad (2.2.10)$$

La ecuación (2.2.10) comunmente se conoce como *Ecuación Matricial de Lyapunov*. Por medio de esta ecuación es posible estudiar las propiedades de estabilidad del estado de equilibrio  $x_e = 0$  del sistema (2.2.8). Por ejemplo, si podemos encontrar una pareja de matrices  $(P, Q)$  que satisfagan (2.2.10) y tal que ambas matrices  $P, Q$  sean matrices definidas positivas, entonces  $V$  y  $-\dot{V}$  serán **fdp's** y  $V$  será una **fnar**. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.3 el estado de equilibrio será exponencialmente estable globalmente. Por otro lado, si podemos encontrar una pareja  $(P, Q)$  tal que  $Q$  sea una matriz definida positiva y  $P$  tenga al menos un valor propio negativo, entonces  $-\dot{V}$  será una matriz definida positiva y  $V$  tomará valores negativos arbitrariamente cerca del origen. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.6 el origen será un estado de equilibrio inestable. Formalmente, lo anterior lo podemos deducir del teorema siguiente.

**Teorema 2.2.13** *El estado de equilibrio  $x_e = 0$  del sistema (2.2.8) es asintóticamente estable si y solo si dada cualquier matriz definida positiva y simétrica  $Q$ , existe una matriz definida positiva y simétrica  $P$ , la cual es la única solución del conjunto de  $n(n+1)/2$  ecuaciones lineales dadas en (2.2.10) (ya que  $P$  es simétrica).*

**Demostración:** La suficiencia sigue directamente al elegir una matriz  $P = P^T > 0$  que satisfaga la ecuación (2.2.10).

Para probar la necesidad, asumamos que  $x_e = 0$  en la ecuación (2.2.8) es asintóticamente estable. Entonces, existe una matriz  $P$  definida como

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt \quad (2.2.11)$$

la cual es definida positiva y simétrica. Ahora solo falta demostrar que tal  $P$  definida en (2.2.11) es la única solución de la ecuación (2.2.10). Sea  $\tilde{P}$  cualquier otra solución de la ecuación (2.2.10), entonces

$$\begin{aligned} P &= - \int_0^{\infty} \exp(A^T t) (A^T \tilde{P} + \tilde{P} A) \exp(At) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \exp(A^T t) \tilde{P} \exp(At) \right] dt \quad \text{ya que } \exp(At) \text{ conmuta con } A \forall t \\ &= - \exp(A^T t) \tilde{P} \exp(At) \Big|_0^{\infty} = \tilde{P} \quad \text{ya que } \mathbf{x}_e = \mathbf{0} \text{ en la ecuación (2.2.8) es a.e.} \end{aligned}$$

■

**Corolario 2.2.1** Si  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $(C, A)$  es observable, el origen de la ecuación (2.2.8) es asintóticamente estable si y solo si existe una matriz definida positiva y simétrica  $P$  la cual es la única solución de la ecuación  $A^T P + P A = -C^T C$ .

■

El siguiente lema da condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales la ecuación (2.2.10) tiene solución única correspondiente a cada elección de  $Q$ .

**Lema 2.2.1** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  el conjunto de valores propios (no necesariamente diferentes) de  $A$  llamado el espectro de  $A$ . Entonces, la ecuación (2.2.10) tiene una única solución  $P$  para cada selección de  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si y solo si

$$\lambda_i + \lambda_j^* \neq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

( $\lambda_j^*$  es el complejo conjugado de  $\lambda_j$ ).

**Demostración:** [4], Chen, 1984, Apéndice F.

■

Muchas de las técnicas para determinar las condiciones de estabilidad de un sistema LTI no son aplicables cuando el sistema es LTV ya que en general, la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$  es difícil de determinar y las condiciones de estabilidad establecidas por los teoremas para el caso LTI son difíciles de verificar.

El teorema siguiente muestra que existe una función cuadrática de Lyapunov si y solo si el estado de equilibrio de la ecuación (2.2.4) es asintóticamente estable uniformemente.

**Teorema 2.2.14** Consideremos el sistema LTV descrito en la ecuación (2.2.4) donde  $A(t)$  tiene elementos uniformemente acotados para todo tiempo  $t$ . Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica uniforme del estado de equilibrio de la ecuación (2.2.4) es que para cualquier matriz definida positiva  $Q(t)$  la cual es acotada, existe una función escalar

$$V(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{\infty} \mathbf{x}^T(\tau) \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (2.2.12)$$

la cual es una función de Lyapunov.

Ahora, estableceremos uno de los principales resultados de la Teoría de Sistemas Lineales.

**Teorema 2.2.15** Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$  (i.e.,  $A$  es una matriz Hurwitz).
- 2) Existe alguna matriz definida positiva  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $A^T P + P A + Q = 0$  tiene solución única  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P = P^T > 0$ .
- 3) Para toda matriz definida positiva y simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la ecuación matricial de Lyapunov (2.2.10) tiene solución única  $P = P^T > 0$ .

**Demostración:** Es obvio que 3)  $\implies$  2). Para mostrar que 2)  $\implies$  1), supongamos que 2) se cumple para alguna matriz en particular  $Q$ . Entonces, podemos aplicar el Teorema 2.2.13 con la función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ . Así,  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$  y por consiguiente, podemos concluir que  $\mathbf{x}_e = 0$  es un estado de equilibrio asintóticamente estable. El Teorema 2.2.12 implica que  $A$  es Hurwitz.

Para mostrar que 1)  $\implies$  3), supongamos que  $A$  es Hurwitz y sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz definida positiva, pero arbitraria. Por el Teorema 2.2.13, la ecuación (2.2.10) tiene una única solución correspondiente dada por  $P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ . Solo falta demostrar que  $P$  es definida positiva. Para esto, factorizemos  $Q$  en la forma  $M^T M$  donde  $M$  no es singular. Ahora podemos afirmar que  $P$  es definida positiva ya que  $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$ . Con  $Q = M^T M$ , tenemos

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} M^T M e^{A t} dt.$$

Así, para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T e^{A^T t} \mathbf{M}^T \mathbf{M} e^{A t} \mathbf{x} dt = \int_0^{\infty} \| \mathbf{M} e^{A t} \mathbf{x} \|_2^2 dt \geq 0.$$

donde  $\| \cdot \|_2$  denota la norma Euclideana.

Ahora, si  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 0$ , entonces  $\mathbf{M} e^{A t} \mathbf{x} \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$ . En particular, si  $t = 0$ , tenemos que  $\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  lo cual implica que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ya que  $\mathbf{M}$  es una matriz no singular. Por lo tanto,  $\mathbf{P}$  es definida positiva y así 1)  $\implies$  3).

### Observaciones:

- i) El Teorema 2.2.15 es muy importante ya que nos permite determinar la estabilidad del estado de equilibrio de la siguiente manera: dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , elegir como  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cualquier matriz definida positiva (una elección lógica es la matriz identidad  $\mathbf{I}$  o alguna otra matriz diagonal); intentar resolver (2.2.10) para  $\mathbf{P}$ . Si (2.2.10) no tiene solución o no tiene solución única, entonces  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  no es asintóticamente estable. Si  $\mathbf{P}$  es única pero no definida positiva, entonces de nuevo  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  no es asintóticamente estable. Por otro lado, si  $\mathbf{P}$  es determinada de manera única y definida positiva,  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  es un estado de equilibrio asintóticamente estable.
- ii) El Teorema 2.2.15 establece que si  $\mathbf{A}$  es una matriz Hurwitz, entonces siempre y cuando  $\mathbf{Q}$  sea una matriz definida positiva y simétrica, así es la matriz  $\mathbf{P}$  correspondiente dada por la ecuación (2.2.10).

**Ejemplo 2.16** Consideremos el siguiente sistema LTI

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Si elegimos  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz identidad y  $\mathbf{P}$  como

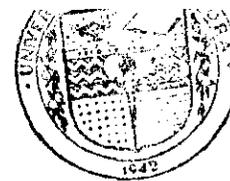
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix},$$

entonces  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$  lleva a la solución

$$p_{11} = \frac{67}{60} \quad p_{12} = \frac{5}{60} \quad p_{22} = \frac{7}{60}.$$

$\mathbf{P}$  es definida positiva y por lo tanto el origen del sistema dado es asintóticamente estable.

□



EL SABER DE MIS HIJOS  
PARA MI GRANDEZA  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMÁTICAS

## 2.3 Funciones Reales Positivas

El concepto de *positividad real* juega un papel central en la Teoría de Estabilidad en general y en particular en muchas de las demostraciones de estabilidad de sistemas adaptativos. La definición de un función Real Positiva (**RP**) de un variable compleja  $s$  aparece en el contexto de la Teoría de Circuitos. Por ejemplo, se ha demostrado que la impedancia en una red eléctrica (con inductores, capacitores y resistores) es racional y RP. Si la red es disipativa, debido a la presencia de capacitores, la impedancia es un función Estrictamente Real Positiva (**ERP**). Por otro lado, una función RP (**ERP**) puede ser realizada como la impedancia de una red pasiva (disipativa).

Las propiedades principales de las funciones RP's han sido estudiadas extensivamente en la Teoría de Redes y en lo que sigue pondremos nuestra atención sobre funciones RP's racionales.

Las siguientes definiciones equivalentes de funciones RP's ahora son bien aceptadas en la literatura.

**Definición 2.3.1** Un función racional  $G(s)$  de la variable compleja  $s = \sigma + j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$ , es RP si

- i)  $G(s)$  es real para  $s$  real,
- ii)  $\Re\{G(s)\} \geq 0$  para todo  $\Re\{s\} \geq 0$ .

**Definición 2.3.2** Un función racional  $G(s)$  es RP si

- i)  $G(s)$  es real para  $s$  real,
- ii)  $G(s)$  es analítica en  $\Re\{s\} > 0$  y los polos sobre el eje imaginario son simples y tales que el residuo asociado a cada uno de ellos es positivo,
- iii) para todo valor real de  $\omega$  para el cual  $j\omega$  no es un polo de  $G(s)$ ,  $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ .

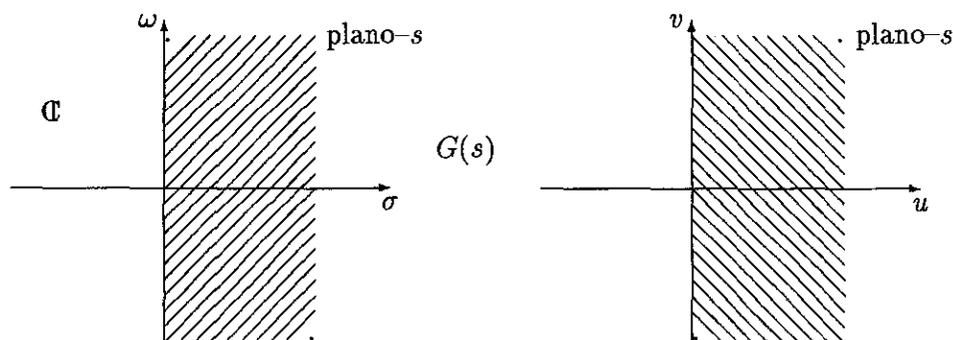


Fig. 2.15 Esquema de Funciones RP's.

Por otro lado, las funciones estrictamente real positivas (ERP) no han recibido la misma atención que las funciones RP's y se han dado muchas definiciones en la literatura acerca de una función ERP  $G(s)$  en términos de la variable compleja  $s$  así como de la respuesta a la frecuencia  $G(j\omega)$ . En la Subsección 2.3.2, discutiremos el Lema de Kalman-Yakubovich el cual es el enlace vital entre funciones ERP's y la existencia de una función de Lyapunov y por lo tanto asegurar la estabilidad del sistema dinámico correspondiente. Esto remarca la importancia de las funciones ERP's en muchos de los problemas de estabilidad tratados posteriormente. En vista de esto, empazaremos por definir una función ERP.

**Definición 2.3.3** Una función racional  $G(s)$  es ERP si  $G(s - \varepsilon)$  es RP para algún número real  $\varepsilon > 0$ .

De acuerdo a la Definición 2.3.3, una función  $G(s)$  es ERP si la función asociada  $G(s - \varepsilon)$  es RP. En la literatura, se han dado otras definiciones de ERP directamente en términos de  $G(s)$  y el comportamiento de la parte real de  $G(j\omega)$ :

- a) Si  $G(s)$  es analítica para  $\Re\{s\} \geq 0$  y  $\Re\{G(j\omega)\} > 0 \forall \omega \in (-\infty, \infty)$ .
- b) Si  $G(s)$  es analítica para  $\Re\{s\} \geq 0$  y  $\Re\{G(j\omega)\} \geq \delta > 0 \forall \omega \in (-\infty, \infty)$ .

Si  $G(s) = \frac{1}{s + \alpha}$  con  $\alpha > 0$ , se sigue que  $G(s)$  es ERP de acuerdo a la Definición 2.3.3. Sin embargo, esta satisface a) pero no b). Por lo tanto, la condición b) es suficiente pero no necesaria. Por otro lado, si  $G(s) = \frac{s + \alpha + \beta}{(s + \alpha)(s + \beta)}$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , entonces  $\Re\{G(j\omega)\} > 0$  pero no existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $G(s - \varepsilon)$  sea RP. Por lo tanto, de acuerdo a la Definición 2.3.3, a) es necesario, pero no suficiente.

**Ejemplo 2.17 (Un Sistema ERP)** Impedancia en una red eléctrica.

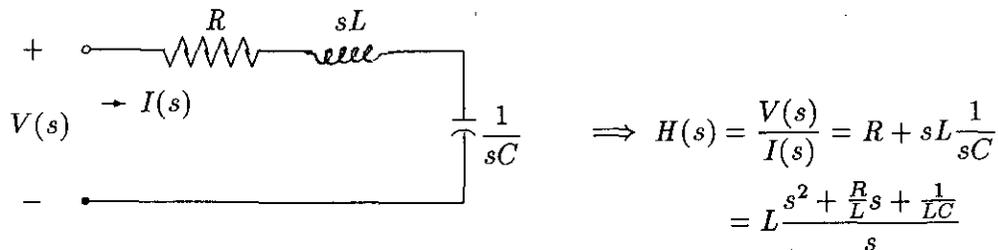


Fig. 2.16 Red Eléctrica Disipativa.

$H(s)$  es una función ERP. □

Se ha demostrado que si  $G(s)$  es estrictamente propia, entonces  $\Re\{G(j\omega)\}$  no va a cero más rápido que  $\omega^{-2}$  cuando  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

**Definición 2.3.4** Una función racional  $H(s)$  es ERP si y solo si

- 1)  $H(s)$  es analítica en  $\Re\{s\} > 0$ .

Esto implica que todos los polos de  $H(s)$  están en  $\mathbb{C}^-$ .

- 2)  $\Re\{H(j\omega)\} > 0 \forall \omega \in (-\infty, \infty)$ .

Esto implica que  $\Re\{N(j\omega)D^*(j\omega)\} > 0$  si  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ .

- 3) a)  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Re\{H(j\omega)\} > 0$  cuando  $n^* = 1$ , donde el grado relativo

$$n^* = \# \text{de polos de } H - \# \text{de ceros de } H.$$

Esto implica que  $b_{n-1} > 0$  y  $a_{n-1} \cdot b_{n-1} - b_{n-2} > 0$ , donde

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

- b)  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Re\{H(j\omega)\} > 0$

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{H(j\omega)}{j\omega} > 0, \text{ cuando } n^* = -1.$$

Esto implica que  $b_{n+1} > 0$  y  $b_n - b_{n-1} \cdot a_{n-1} > 0$ , donde

$$H(s) = \frac{b_{n+1}s^{n+1} + b_n s^n + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Si  $n^* = 0$ , entonces  $H(s)$  es ERP si y solo si se satisface 1) y 2) de la Definición 2.3.4. Es decir, cuando  $H(s)$  es propia pero no estrictamente propia, las condiciones 1) y 2) son necesarias y suficientes para que  $H(s)$  sea ERP.

### Propiedades de las Funciones RP:

Las condiciones i) y ii) en la Definición 2.3.1 deben investigarse independientemente.

\* La condición i)  $\implies$  Los coeficientes en  $G(s)$  deben ser reales.

\* La condición ii)  $\implies$  cualquier punto  $s$  en el lado derecho del plano complejo  $\mathbb{C}^+$  o sobre el eje  $j\omega$  debe ser mapeado via  $G(s)$  de nuevo sobre  $\mathbb{C}^+$  o sobre el eje  $j\omega$ .

**Observación:** Supongamos que  $G(s)$  es RP y es representada por

$$G = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega),$$

entonces

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{u + jv} \left( \frac{u - jv}{u - jv} \right) = \frac{u}{u^2 + v^2} - j \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Como  $u \geq 0$  si  $G$  es RP, entonces esto muestra que la parte real de  $1/G$  es también positiva. Por lo tanto, si  $G(s)$  es RP así lo es  $\frac{1}{G(s)}$ . Esto implica que cualquier restricción sobre las posibles posiciones de los polos de una función RP también debe ser aplicada sobre los ceros de tal función.

En general, la condición *ii*) de la Definición 2.3.1 no es fácil de checarsé. Si  $G(s)$  es una función racional, entonces puede usarse el siguiente teorema para checarsé la positividad real.

**Teorema 2.3.1** Una función racional  $G(s)$  es RP si y solo si se satisfacen todas las condiciones siguientes:

- $G(s)$  es real para  $s$  real,
- el polinomio del denominador de  $G(s)$  es estable o tiene raíces sobre el eje imaginario,
- si  $G$  tiene polos sobre el eje imaginario, estos deben ser simples y tener residuos reales y positivos.
- la parte real de  $G$  es positiva a lo largo del eje  $j\omega$ , i.e.,  $\Re \{G(j\omega)\} \geq 0$  para todo  $\omega$  que no es polo de  $G(s)$ .

■

Para que  $G$  sea RP es necesario que no tenga ceros o polos en el lado derecho del plano complejo,  $\mathbb{C}^+$ . Esto implica que una condición necesaria sobre una función RP es que los coeficientes del numerador o denominador no sean negativos.

Como el origen y el infinito están sobre el eje imaginario  $j\omega$ , las frecuencias críticas en estos puntos deben ser simples. Esto implica que las potencias más grandes del numerador y denominador, también como sus potencias menores, no pueden diferir por más de uno. Por ejemplo,

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+3)} \quad \text{tiene 2 polos en el infinito.}$$

$$G(s) = \frac{s^3(s+1)}{s^4 + 4s^3 + 2s^2 + s + 1} \quad \text{tiene 3 ceros en el origen.}$$

Supongamos que la función RP  $G$  se escribe como

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\beta\omega} \quad (\text{forma polar}).$$

Entonces, dado que  $\Re \{G(j\omega)\} = |G(j\omega)| \cos \beta\omega$ , la condición sobre  $\beta$  es  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  para mantener a  $\Re \{G(j\omega)\}$  positivo. Por ejemplo, si las potencias del numerador y denominador difieren en más de uno,

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s + 1}{s^5 + 4s^4 + 5s^3}.$$

Cuando "s" se hace muy grande  $G(s)$  se comporta como  $\frac{1}{s^2}$  lo cual nos lleva a la condición  $\left| \angle \frac{1}{s^2} \right| > \frac{\pi}{2}$ .

**Criterio para Probar que una Función es RP:**

**Teorema 2.3.2** Una función racional real es RP si y solo si satisface ambos puntos:

- i) Aplicar el criterio de Hurwitz al denominador para checar que este no tiene raíces en  $\mathbb{C}^+$ . Si la función tiene polos sobre el eje  $j\omega$ , checar que estos son simples (no repetidos) y tienen asociados residuos positivos.
- ii) Determinar si

$$\Re \{(\text{Numerador}(j\omega))(\text{Denominador}^*(j\omega))\}$$

es positivo para valores grandes de  $\omega$ . Es decir, tiene un coeficiente positivo en su potencia más grande. Entonces, checar que este polinomio no tiene raíces positivas de  $\omega^2$  de multiplicidad impar.

**Nota:** \* denota conjugación compleja  $((\sigma + j\omega)^* = \sigma - j\omega)$ .

**Razón del 2<sup>do</sup> punto del Teorema 2.3.2:**

Supongamos que  $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , entonces

$$\Re \{G(j\omega)\} = \Re \left\{ \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \right\} = \Re \left\{ \frac{B(j\omega)A(-j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} \right\}.$$

Como el denominador es positivo, únicamente necesitamos determinar si

$$\Re \{B(j\omega)A(-j\omega)\} \geq 0 \quad \text{para } \omega \gg 0.$$

Supongamos que  $B(j\omega)A(-j\omega)$  tiene una raíz positiva. Es decir,  $\omega^2 = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Esto produce el factor  $(\omega^2 - \alpha)$  el cual si es de multiplicidad impar, no será positivo para algunos valores de  $\omega$ . Así,  $\Re \{B(j\omega)A(-j\omega)\} \not\geq 0$ .

**Ejemplo 2.18** Supóngase que tenemos  $G(s) = \frac{s+a}{s^2+bs+c}$ . Si  $b$  y  $c$  son constantes positivas, ¿para que valores de "a"  $G(s)$  es RP?

1) El denominador es Hurwitz ya que  $b$  y  $c$  son ambas positivas.

$$2) \frac{j\omega + a}{(j\omega)^2 + b(j\omega) + c} \cdot \frac{(c - \omega^2) - j(b\omega)}{(c - \omega^2) - j(b\omega)} = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \frac{N}{D}$$

$$\Re\{N\} = a(c - \omega^2) + b\omega^2 = (b - a)\omega^2 + ac.$$

Como el primer coeficiente tiene que ser positivo, entonces esto nos lleva a que  $b - a \geq 0$  o  $a \leq b$ .

El factor es impar así que este necesita ser una raíz negativa para que  $\omega^2 = -\frac{ac}{b-a}$  sea negativo,  $a \geq 0$ .

Por lo tanto,  $G(s)$  es RP si y solo si  $b, c \geq 0$  y  $0 \leq a \leq b$ .

□

La diferencia principal entre las funciones de transferencia RP's y ERP's es que una función de transferencia RP puede tolerar polos en el eje imaginario  $j\omega$ , mientras que una función de transferencia ERP no.

### 2.3.1 Positividad Real de Matrices de Transferencia

El concepto de función racional RP puede generalizarse a matrices de transferencia racionales RP's. Tales matrices encuentran aplicación en el análisis de estabilidad de sistemas adaptativos multivariados, el cual es un tema que queda fuera de nuestro objetivo. Esta es la razón por la cual solo daremos una breve introducción a las matrices de transferencia.

**Definición 2.3.6** Una matriz  $n \times n$   $Z(s)$  de funciones de una variable compleja  $s$  es llamada RP si

1.  $Z(s)$  tiene elementos que son analíticos para  $\Re\{s\} \geq 0$ ,
2.  $Z^*(s) = Z(s^*)$  para  $\Re\{s\} \geq 0$  y
3.  $Z^T(s^*) + Z(s)$  es semi-definida positiva para  $\Re\{s\} \geq 0$ ,  
donde  $*$  denota la transpuesta conjugada compleja.

Como en el caso de las funciones escalares, las matrices ERP se pueden definir como sigue.

**Definición 2.3.7** Una matriz  $n \times n$   $Z(s)$  es ERP si  $Z(s - \epsilon)$  es RP para todo  $\epsilon > 0$ .

### 2.3.2 Algunos Lemas Importantes

El concepto de positividad real ha encontrado una gran aplicación en las investigaciones teóricas de sistemas en los últimos años, en los que se han desarrollado criterios de estabilidad para sistemas retroalimentados con características no lineales simples. Tales criterios son suficientes para asegurar la existencia de una función de Lyapunov y con ella la estabilidad de un sistema. Un lema importante que establece la relación entre las condiciones en el dominio de frecuencia de la parte LTI de un sistema y la existencia de una función de Lyapunov es debido a Kalman y Yakubovich.

Como ya se mencionó, nuestro interés es en la estabilidad de una clase de sistemas no lineales usando el Método de Lyapunov. La elección de la función de Lyapunov se simplifica considerablemente cuando la función de transferencia del sistema LTI es ERP. En este contexto, el Lema de Kalman-Yakubovich encuentra aplicación en la Teoría del Control Adaptativo.

**Lema 2.3.1 (Lema de Kalman-Yakubovich (KY))** *Existen matrices simétricas definidas positivas P y Q tales que*

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.3.1)$$

$$y \quad B^T P = C \quad (2.3.2)$$

*si y solo si el sistema asintóticamente estable, controlable (estabilizable) y observable (detectable)*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

*es ERP.*

**Demostración:** Por una parte, vamos a demostrar que

$$\Re \left\{ C(sI - A)^{-1} B \right\} > 0,$$

para así probar la positividad real de la función de transferencia.

**Observaciones:**

$$(1) \quad G(j\omega) + G^*(j\omega) = 2\Re \{G(j\omega)\}$$

$$(2) \quad G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} B$$

$$G^*(j\omega) = C(-j\omega I - A^T)^{-1} B$$

$$(3) \quad -(A^T P + P A) = -A^T P - P A + j\omega P - j\omega P = (-j\omega P - A^T) P + P (j\omega P - A) = Q$$

(por la hipótesis (2.3.1)).

Trabajemos con la última igualdad:

$(-j\omega P - A^T)P + P(j\omega P - A) = Q$ . Multiplicando esta ecuación en la derecha por  $(j\omega - A)^{-1}B$  y en izquierda por  $B^T(-j\omega - A^T)^{-1}$ , obtenemos

$$B^T P (j\omega I - A)^{-1} B + B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} P B = B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} Q (j\omega I - A)^{-1} B > 0.$$

Esta relación es positiva ya que  $Q > 0$ ,  $B \neq 0$ . Si  $B^T P = C$  (hipótesis (2.3.2)), entonces

$$\underbrace{C(j\omega I - A)^{-1} B + B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} C^T}_{2\Re \{ C(j\omega I - A)^{-1} B \}} > 0.$$

La otra implicación, cuya demostración no es nada trivial, se puede encontrar en [14], Narendra, 1989. ■

Este lema establece que un sistema es ERP si y solo si las conexiones de su entrada y su salida con el exterior están relacionadas en una forma especial. Además, la existencia de la matriz simétrica definida positiva  $P$  la cual satisface la ecuación matricial de Lyapunov para probar estabilidad es asegurada cuando la función de transferencia es ERP. También, en algunos casos, esta matriz  $P$  aparece explícitamente en las leyes adaptativas y su existencia se puede asegurar directamente del Lema KY.

Más precisamente, el Lema de KY se puede establecer de manera más completa en los siguientes dos lemas, cuyas demostraciones se pueden encontrar en la referencia citada arriba.

**Lema 2.3.2 (Lema de Lefschetz-Kalman-Yakubovich (LKY))** *Dado un escalar  $\gamma \geq 0$ , un vector  $h$ , una matriz asintóticamente estable  $A$ , un vector  $b$  tal que  $(A, b)$  es controlable y una matriz definida positiva  $L$ , existe un escalar  $\varepsilon > 0$ , un vector  $q$  y una matriz simétrica definida positiva  $P$  que satisfacen*

$$A^T P + P A = -q q^T - \varepsilon L \quad (2.3.3)$$

$$P b - h = \sqrt{\gamma} q \quad (2.3.4)$$

si y solo si

$$H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \gamma + h^T (sI - A)^{-1} b \quad (2.3.5)$$

es ERP. ■

Por el lema anterior, la positividad real estricta de  $H(s)$  es necesaria y suficiente para la existencia de una matriz  $P$  y un vector  $q$  que simultáneamente satisfacen la ecuación matricial de Lyapunov (2.3.3) y la ecuación vectorial (2.3.4).

Como se mencionó anteriormente, el sistema dinámico representado por la función de transferencia  $H(s)$  (2.3.5) es asintóticamente estable y controlable.

La condición de controlabilidad en el Lema LKY se puede debilitar y su versión se establece en

**Lema 2.3.3 (Lema de Meyer–Kalman–Yakubovich (MKY))** Sea  $\gamma \geq 0$  un escalar,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{h}$  dos vectores dados,  $\mathbf{A}$  una matriz asintóticamente estable y  $\mathbf{L}$  una matriz simétrica definida positiva. Si

$$\Re \{H(s)\} \stackrel{\text{def}}{=} \Re \left\{ \frac{\gamma}{2} + \mathbf{h}^T (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \right\} > 0 \quad \forall \omega \text{ real,}$$

entonces existe un escalar  $\varepsilon > 0$ , un vector  $\mathbf{q}$  y una matriz  $\mathbf{P}$  simétrica definida positiva tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} &= -\mathbf{q} \mathbf{q}^T - \varepsilon \mathbf{L} \\ \mathbf{P} \mathbf{b} - \mathbf{h} &= \sqrt{\gamma} \mathbf{q}. \end{aligned}$$

**Observación:** (1) Debido a la naturaleza especial de los problemas que surgen en los sistemas adaptativos, la constante  $\gamma$  en la ecuación (2.3.5) será cero para todos los problemas que consideraremos. Por lo tanto, la positividad real estricta de la función de transferencia  $\mathbf{h}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$  asegura la existencia de una matriz  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  la cual satisface

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{h}, \quad \text{donde } \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0.$$

(2) En muchos de los problemas adaptativos, la función de transferencia se obtiene mediante cancelación de polos–ceros estable. Por lo tanto, aunque el sistema es asintóticamente estable, este no es controlable u observable. Por eso se necesita el Lema de MKY para probar tal estabilidad.

## 2.4 Estabilidad de Sistemas Adaptativos

Muchas de las propiedades de los sistemas adaptativos se derivan de los teoremas conocidos sobre estabilidad establecidos en las Sección 2.2. Sin embargo, frecuentemente aparecen ecuaciones diferenciales para las cuales los teoremas básicos no son aplicables directamente. En vista de esto, discutiremos las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial especial que será utilizada posteriormente.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{u}(t) \mathbf{u}^T(t) \mathbf{x}(t) \tag{2.4.1}$$

donde  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  es una función acotada continua por piezas.

Si  $Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t)u^T(t)$  entonces  $Q(t)$  es una matriz semi-definida positiva. Si  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$  es una función cuadrática, su derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación (2.4.1) es dada por  $\dot{V} = -x^T Q(t)x$ . Por lo tanto, el estado de equilibrio  $x_e = 0$  de la ecuación (2.4.1) es uniformemente estable. Ninguno de los teoremas de la Sección 2.2 asegura que el estado de equilibrio sea a.e.u ya que  $Q(t)$  es tiempo-variante y semi-definida positiva. La condición sobre  $Q(t)$  (y por lo tanto sobre  $u(t)$ ) bajo la cual se sigue la estabilidad asintótica uniforme es de interés y se establece en el siguiente

**Teorema 2.4.1** *Las condiciones a) - d) son equivalentes y aseguran la estabilidad asintótica uniforme del estado de equilibrio  $x_e = 0$  de la ecuación diferencial (2.4.1):*

- a) *existen constantes positivas  $t_0, T_0$  y  $\varepsilon_1$  tales que para todos los vectores unitarios  $w \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\int_t^{t+T_0} w^T u(\tau) u^T(\tau) w d\tau \geq \varepsilon_1 \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.4.2)$$

- b) *existen constantes positivas  $t_0, T_0$  y  $\varepsilon_2$  tales que para todos los vectores unitarios  $w \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\int_t^{t+T_0} \|u(\tau) u^T(\tau) w\| d\tau \geq \varepsilon_2 \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.4.3)$$

- c) *existen constantes positivas  $t_0, T_0$  y  $\varepsilon_3$  tales que para todos los vectores unitarios  $w \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \|u^T(\tau) w\| d\tau \geq \varepsilon_3 \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.4.4)$$

- d) *existen constantes positivas  $t_0, T_0$  y  $\varepsilon_4$  tales que*

$$\lambda_i \left[ \int_t^{t+T_0} u(\tau) u^T(\tau) d\tau \right] \geq \varepsilon_4 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.4.5)$$

donde  $\lambda_i[A]$  denota el  $i$ -ésimo valor propio de  $A$ .

**Demostración:** (i) Sea  $u_{\max}$  una constante tal que  $\|u(t)\| \leq u_{\max}$ . Si  $w$  es cualquier vector unitario, se sigue que

$$w^T u(t) u^T(t) w \leq \|u(t) u^T(t) w\| \leq \|u^T(t) w\| u_{\max}.$$

Por lo tanto,  $a) \implies b)$ , y  $b) \implies c)$ . Además, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\int_t^{t+T_0} \mathbf{w}^T \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{w} d\tau \geq \frac{1}{T_0} \left[ \int_t^{t+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{w}\| d\tau \right]^2.$$

Esto es,  $c) \implies a)$ . El valor propio más pequeño de la matriz

$$\bar{\mathbf{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{t+T_0} \mathbf{Q}(\tau) d\tau$$

es igual a

$$\inf_{\|\mathbf{w}\|=1} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{w} = \inf_{\|\mathbf{w}\|=1} \int_t^{t+T_0} \mathbf{w}^T \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{w} d\tau.$$

Por lo tanto,  $d) \iff a)$ .

(ii) Sea  $t_1 \geq t_0$ . Si  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ , entonces la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación (2.4.1) es  $\dot{V} = -(\mathbf{u}^T \mathbf{x})^2$ . Integrando  $\dot{V}$  sobre un intervalo  $[t_1, t_1 + T_0]$ , obtenemos

$$-\int_{t_1}^{t_1+T_0} \dot{V}(t, \mathbf{x}) dt = \int_{t_1}^{t_1+T_0} \{\mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{x}(\tau)\}^2 \geq \left( \int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{x}(\tau)\| d\tau \right)^2$$

o equivalentemente

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{x}(\tau)\| d\tau \leq \sqrt{T_0} \{V(t_1) - V(t_1 + T_0)\}^{1/2}. \quad (2.4.6)$$

El lado izquierdo puede también expresarse como

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{x}(\tau)\| d\tau \geq \int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{x}(t_1)\| d\tau - \int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) [\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(\tau)]\| d\tau. \quad (2.4.7)$$

De la ecuación (2.4.4) en la condición  $c)$ , se sigue que

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{x}(t_1)\| d\tau \geq \|\mathbf{x}(t_1)\| T_0 \varepsilon_3.$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (2.4.7) está dado por

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau) [\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(\tau)]\| d\tau &\leq \mathbf{u}_{\max} T_0 \sup_{\tau \in [t_1, t_1+T_0]} V \|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(\tau)\| \\ &\leq \mathbf{u}_{\max} T_0 \int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

ya que la distancia entre dos puntos  $\mathbf{x}(t_1)$  y  $\mathbf{x}(\tau)$ ,  $\tau \in [t_1, t_1 + T_0]$ , es menor que la longitud de arco  $\int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau$ . Por lo tanto, evaluando  $\dot{\mathbf{x}}$  de la ecuación (2.4.1), la ecuación (2.4.7) toma la forma

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{x}(\tau)\| d\tau \geq \|\mathbf{x}(t_1)\| T_0 \varepsilon_3 - \mathbf{u}_{\max}^2 T_0 \int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{x}(\tau)\| d\tau.$$

Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \|\mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{x}(\tau)\| d\tau \geq \frac{\|\mathbf{x}(t_1)\| T_0 \varepsilon_3}{1 + \mathbf{u}_{\max}^2 T_0}. \quad (2.4.8)$$

De las ecuaciones (2.4.6) y (2.4.8), tenemos

$$V(t_1 + T_0) \leq (1 - \gamma)V(t_1) \quad \text{donde} \quad \gamma = 1 - \frac{2T_0 \varepsilon_3^2}{(1 + \mathbf{u}_{\max}^2 T_0)^2}.$$

Como  $\varepsilon_3 \leq \mathbf{u}_{\max}$ ,  $\gamma \in (0, 1)$  y por lo tanto, el origen de la ecuación (2.4.1) es asintóticamente estable uniformemente. ■

En casi todos los problemas de estabilidad discutidos en los capítulos siguientes, únicamente es posible mostrar que un error de salida  $e \in \mathcal{L}^2$ . El hecho de que  $e$  sea acotado se utiliza para llegar a la conclusión deseada  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Este resultado se deriva del siguiente

**Lema 2.4.1** Si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua para  $t \geq 0$ , y si el límite de la integral

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| d\tau$$

existe y es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

**Demostración:** Sea  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq 0$ . Entonces, existe una sucesión infinita no acotada y  $\varepsilon > 0$  tal que  $|f(t_i)| > \varepsilon$ . Como  $f$  es uniformemente continua,

$$|f(t) - f(t_i)| \leq k|t - t_i| \quad \forall t, t_i \in \mathbb{R}^+$$

para alguna constante  $k > 0$ . También,

$$|f(t)| \geq \varepsilon - |f(t) - f(t_i)|.$$

Integrando esta última ecuación sobre un intervalo  $[t_i, t_i + \delta]$ , donde  $\delta > 0$ , tenemos

$$\int_{t_i}^{t_i + \delta} |f(\tau)| d\tau \geq \varepsilon \delta - \frac{k\delta^2}{2}.$$

Eligiendo  $\delta = \varepsilon/k$ , obtenemos

$$\int_{t_i}^{t_i + \delta} |f(\tau)| d\tau \geq \frac{\varepsilon\delta}{2} \quad \forall t_i.$$

Esta contradice la suposición que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| d\tau$  es finito. ■

**Corolario 2.4.1** Si  $g \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty$  y  $\dot{g}$  es acotada, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ .

**Demostración:** Elegir  $f(t) = g^2(t)$ . Entonces,  $f(t)$  satisface las condiciones del Lema 2.4.1, de donde se sigue el resultado. ■



## Capítulo 3

# Control Adaptativo Simple

En este capítulo, estableceremos los principios básicos que serán usados en el diseño de observadores y controladores de plantas que poseen parámetros desconocidos, ilustrando en algunos casos con ejemplos simples. La primer clase de ejemplos giran alrededor de plantas cuya relación entrada-estado-salida se describe mediante una ecuación diferencial de primer orden lineal tiempo-invariante con coeficientes desconocidos o inciertos. En la segunda clase de ejemplos, las mismas ideas se extienden a plantas descritas por ecuaciones diferenciales vectoriales LTI en el entendido de que las variables de estado del sistema son accesibles. En ambos casos, los problemas fundamentales son:

- i) *El problema de identificación*, donde los parámetros de la planta son estimados usando solo datos de entrada-salida y
- ii) *El problema de control*, donde los parámetros de un controlador convenientemente elegido son ajustados para hacer que el error entre la salida de la planta y la salida de un modelo de referencia tienda asintóticamente a cero.

La herramienta principal usada en la derivación de leyes adaptativas estables es el Método Directo de Lyapunov. Este método puede aplicarse sistemáticamente para diseñar una gran cantidad de sistemas adaptativos estables. En todos los casos considerados, la estabilidad global se asegura demostrando la existencia de una función de Lyapunov para el sistema completo. Por lo tanto, la elección de una de tales funciones juega un papel fundamental en la selección de una ley adaptativa conveniente. Para los sistemas no lineales, es bien sabido que aunque la existencia de una función de Lyapunov asegura la estabilidad del sistema dado, la selección de una de esas funciones no sigue una receta sino por el contrario depende del sistema y la forma de hacerlo no es única. Los ejemplos simples que se incluyen en este capítulo servirán para dar una idea de la manera en la que la función candidata de Lyapunov y la ley adaptativa conveniente son elegidas en el caso de que todas las variables de estado de la planta sean accesibles y tal vez con esto se facilite la extensión a problemas más complejos o prácticos.

### 3.1 El Problema de Identificación

#### 3.1.1 Relaciones Algebraicas

**Caso Escalar:** Consideremos un sistema en el cual la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  están relacionadas por la ecuación algebraica

$$y(t) = \theta u(t) \quad (3.1.1)$$

donde  $\theta$  es una constante desconocida. Suponiendo que  $u(t)$  y  $y(t)$  pueden medirse para todos los valores de  $t \geq t_0$ , ¿cómo podríamos identificar  $\theta$ ? Una solución obvia es observar  $\{u(t), y(t)\}$  sobre un intervalo  $[t_0, t_0 + T]$  y estimar  $\theta$  por simple división,

$$\hat{\theta} = \frac{y(t_i)}{u(t_i)} \quad \text{para algún } t_i. \quad (3.1.2)$$

Naturalmente, este método nos lleva a las siguientes dificultades:

- 1)  $u(t_i)$  puede ser cero o tomar valores arbitrariamente cercanos a cero, lo cual implica grandes errores en  $\hat{\theta}$ .
- 2) La situación es mucho más mala si se tienen señales con ruido para  $y(t_i)$  y  $u(t_i)$ , lo cual implica un gran esparcimiento de los valores de  $\hat{\theta}$  correspondientes a diferentes valores de  $t_i$ ,

$$\hat{\theta}_{t=t_1} \neq \hat{\theta}_{t=t_2} \neq \dots \neq \hat{\theta}_{t=t_n}.$$

Debido a lo anterior, necesitamos considerar otro enfoque.

¿Cómo podríamos ajustar  $\hat{\theta}(t)$  tal que  $\hat{y}(t) = \hat{\theta}(t)u(t)$ ?

Una posible solución sería tratar de minimizar la diferencia entre  $y$  y  $\hat{\theta}(t)u(t)$ . Es decir,

$$\min (y(t) - \hat{\theta}(t)u(t)).$$

Obviamente no podemos minimizar en este sentido ya que obtendríamos  $\hat{\theta}(t) = \infty$  puesto que la cantidad dentro del paréntesis en algún momento es negativa.

Por otro lado, podríamos intentar minimizar el error cuadrático integral  $\mathcal{J}_0$  sobre un intervalo  $[t_0, t_0 + T]$ . Es decir, estimar  $\hat{\theta}$  tal que minimice

$$\mathcal{J}_0 = \int_{t_0}^{t_0+T} [y(t) - \hat{y}(t)]^2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} [y(t) - \hat{\theta}u(t)]^2 dt. \quad (3.1.3)$$

Si el denominador no es cero, el valor de  $\hat{\theta}$  puede calcularse como

$$\hat{\theta} = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)y(t)dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)dt} \quad (3.1.4)$$

Cuando no hay ruido presente, es evidente que la estimación  $\hat{\theta}$  puede obtenerse en un solo paso usando ya sea la ecuación (3.1.2) o la ecuación (3.1.4). Sin embargo, tal procedimiento no produce el valor real de  $\theta$  si hay ruido presente, independientemente de su magnitud. Los esfuerzos para mejorar la estimación deben estar basados sobre la primer información acerca del ruido. Tal vez, bajo ciertas condiciones, incrementando la longitud del intervalo de observación se pueda encontrar una mejor estimación de  $\theta$ . Alternadamente, la estimación  $\hat{\theta}$  en el tiempo  $nT$  puede ser usada junto con la observación de la entrada y la salida sobre el intervalo  $[nT, (n+1)T]$ . Este enfoque tiene propiedades asintóticas, pero no está relacionado con el enfoque en el que estamos interesados. Otro método para obtener  $\hat{\theta}(t)$  es minimizar el índice de funcionamiento

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} [y(t) - \hat{\theta}(t)u(t)]^2. \quad (3.1.5)$$

Supongamos que queremos afinar  $\hat{\theta}(t)$  en la dirección que minimice a  $\mathcal{J}_1$ . Entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \hat{\theta}} = - [y(t) - \hat{\theta}u(t)] u(t) = [\hat{\theta}u(t) - y(t)] u(t).$$

Esto nos lleva a

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \hat{\theta}} = -u^2(t)\hat{\theta}(t) + u(t)y(t) = -u^2(t) [\hat{\theta}(t) - \theta]. \quad (3.1.6)$$

Es decir, el lado derecho de (3.1.6) es el gradiente negativo del índice de funcionamiento  $\mathcal{J}_1$  con respecto a  $\hat{\theta}$ . La Ecuación diferencial (3.1.6) tiene como estado de equilibrio a  $\hat{\theta}(t) = \theta$ , con  $\theta$  constante. Definiendo

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\theta}(t) - \theta$$

la ecuación (3.1.6) se puede expresar como

$$\dot{\phi}(t) = -u^2(t)\phi(t). \quad (3.1.7)$$

La ecuación diferencial (3.1.7) gobierna al error entre  $\hat{\theta}(t)$  y  $\theta$ . Ahora, ¿es esta una dinámica estable?

Si  $\int_t^{t+T} u^2(t)dt \geq \varepsilon > 0 \forall t \geq t_0$  y alguna constante  $T$ , entonces se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$$

o  $\hat{\theta}(t)$  tiende a  $\theta$  asintóticamente. Este resultado se justifica con la ecuación (2.4.2) establecida en el Teorema 2.4.1, Capítulo 2.

La idea principal detrás de este enfoque es convertir la solución de una ecuación algebraica en la solución de una ecuación diferencial, asegurando que su estado de equilibrio sea asintóticamente estable uniformemente.

**Caso Vectorial.** Consideremos ahora la identificación de un vector  $n$ -dimensional  $\theta$ , donde

$$y(t) = \theta^T u(t) \quad (3.1.8)$$

$u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Se puede usar el mismo procedimiento que en el caso escalar con la excepción que los cálculos de las matrices y sus inversas no necesariamente son fáciles de manipular. En particular, la solución

$$\hat{\theta} = \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)u^T(t)dt \right]^{-1} \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)y(t)dt \right] \quad (3.1.9)$$

corresponde a la ecuación (3.1.4).

Similarmente, la extensión de la ecuación (3.1.6) al caso vectorial está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -u(t)u^T(t)\hat{\theta} + u(t)y(t) \\ &= -u(t)u^T(t) [\hat{\theta} - \theta] \end{aligned}$$

o

$$\dot{\phi}(t) = -u(t)u^T(t)\phi(t), \quad \text{donde } \phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\theta}(t) - \theta. \quad (3.1.10)$$

Para tener estabilidad asintótica,  $u(t)$  debe de ser suficientemente rica (persistentemente excitada). Por ejemplo, si

$$\int_t^{t+T} u(\tau)u^T(\tau)d\tau \geq \alpha > 0 \quad \forall t > t_0, \quad (3.1.11)$$

entonces,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta$ .

La condición (3.1.11) implica que la matriz  $u(\tau)u^T(\tau)$ , la cual tiene rango 1 en cada instante, debe de alcanzar rango completo cuando se integre sobre algún intervalo  $[t, t+T]$ . Esto es, el vector  $u(\tau)$  debe generar el espacio  $n$ -dimensional completo cuando  $\tau$  varía de  $t$  a  $t+T$ . Precisamente a esto es a lo que se le llama "excitación persistente".

### 3.1.2 Sistemas Dinámicos

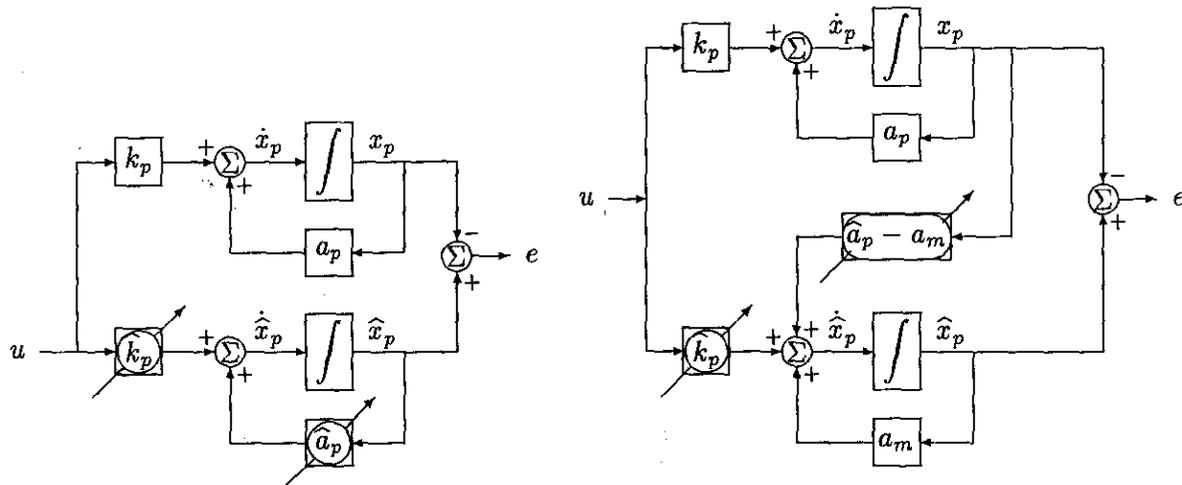
**Caso Escalar.** Consideremos el problema de identificación de una planta con una entrada acotada  $u$  y una salida  $x_p$ , descrita por la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{x}_p(t) = a_p x_p(t) + k_p u(t) \quad (3.1.12)$$

donde los parámetros  $a_p$  y  $k_p$  son constantes, pero desconocidas. El estado de equilibrio de la ecuación  $\dot{x}_p = a_p x_p$  se supone que es asintóticamente estable, así que  $a_p < 0$ . Entonces,

el problema de identificación se reduce a la determinación de  $a_p$  y  $k_p$  de la observación de la paraja entrada-salida  $\{u(t), x_p(t)\}$ .

Para desarrollar el procedimiento para el problema de identificación describiremos dos modelos de estimadores que tienen estructuras diferentes, ver Fig. 3.1.



a) ESTRUCTURA 1 (Modelo Intuitivo)      b) ESTRUCTURA 2 (Modelo que se Puede Extender a Ordenes Mayores)

Fig. 3.1 El Problema de Identificación.

La entrada  $u$  y la salida  $\hat{x}_p$  para los dos modelos están relacionadas mediante las ecuaciones diferenciales

$$\hat{\dot{x}}_p(t) = \hat{a}_p(t)\hat{x}_p(t) + \hat{k}_p(t)u(t) \quad (\text{Modelo 1}) \quad (3.1.13)$$

y

$$\hat{\dot{x}}_p(t) = a_m\hat{x}_p(t) + (\hat{a}_p(t) - a_m)x_p(t) + \hat{k}_p(t)u(t) \quad (\text{Modelo 2}) \quad (3.1.14)$$

El objetivo es ajustar  $\hat{a}_p$  y  $\hat{k}_p$  de manera que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{a}_p(t) = a_p \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{k}_p(t) = k_p.$$

Definiendo el error entre la salida real de la planta  $x_p(t)$  y la salida estimada  $\hat{x}_p$  como  $e(t)$  y los errores de los parámetros entre  $\hat{a}_p(t)$  y  $a_p$  y  $\hat{k}_p(t)$  y  $k_p$  como  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  respectivamente, tenemos las ecuaciones diferenciales del error,

$$\dot{e}(t) = a_p e(t) + \phi(t)\hat{x}_p(t) + \psi(t)u(t) \quad (\text{Modelo 1}) \quad (3.1.15)$$

y

$$\dot{e}(t) = a_m e(t) + \phi(t)x_p(t) + \psi(t)u(t) \quad (\text{Modelo 2}) \quad (3.1.16)$$

con  $e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{x}_p(t) - x_p(t)$ ,  $\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{a}_p(t) - a_p$  y  $\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{k}_p(t) - k_p$ .

En términos de la ecuación del error (3.1.15) o (3.1.16), el objetivo puede establecerse como la determinación de una regla para ajustar  $\hat{a}_p(t)$  y  $\hat{k}_p(t)$  tal que los errores de los parámetros  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además, es claro que si  $u(t)$  y  $x_p(t)$  son uniformemente acotadas y  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  tienden a cero, entonces el error  $e(t)$  también tenderá a cero asintóticamente. Por lo tanto, la convergencia del error de las salidas a cero, evidentemente se seguirá si la estimación de los parámetros es alcanzada. Dado que el error de los parámetros nunca se conoce explícitamente, entonces en la práctica el resultado del procedimiento de identificación deberá de inferirse del comportamiento del error medido de la salida.

### Determinación de la Ley Adaptativa:

En la elección de la ley adaptativa únicamente utilizaremos el Modelo 2 (el mismo análisis, con pequeñas diferencias, puede hacerse para el Modelo 1).

La ecuación (3.1.16) representa el primer paso en la descripción matemática del problema de identificación usando el Modelo 2. La ecuación (3.1.16) indica la forma en la que los errores de los parámetros afectan al error de la salida del sistema. Dado que el identificador no tiene diferenciadores, intentaremos obtener leyes de identificación adaptativa de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}}_p(t) &= f_1(x_p(t), u(t), \hat{x}_p, \hat{a}_p), \\ \dot{\hat{k}}_p(t) &= f_2(x_p(t), u(t), \hat{x}_p, \hat{k}_p).\end{aligned}\tag{3.1.17}$$

así que el ajuste de los parámetros  $\hat{a}_p(t)$  y  $\hat{k}_p(t)$  se basa sobre todas las señales que se pueden medir directamente. Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  en la ecuación (3.1.17) tienen que elegirse de tal manera que las ecuaciones (3.1.16) y (3.1.17) constituyen un sistema de tercer orden cuyo estado de equilibrio dado por

$$\hat{a}_p = a_p, \hat{k}_p = k_p \text{ y } e = 0$$

sea globalmente estable. Una de tales reglas es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}}_p(t) &= -e(t)x_p(t) \\ \dot{\hat{k}}_p(t) &= -e(t)u(t).\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

Como  $a_p$  y  $k_p$  son constantes, las leyes adaptativas descritas en la ecuación (3.1.18) también se pueden expresar en términos de los errores de los parámetros  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  como

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= -e(t)x_p(t) \\ \dot{\psi}(t) &= -e(t)u(t).\end{aligned}\tag{3.1.19}$$

En este caso, puede demostrarse que el estado de equilibrio  $e = \phi = \psi = 0$  es globalmente estable.

La justificación de la elección de las leyes adaptativas descritas por la ecuación (3.1.19) se hace en base a la función candidata de Lyapunov

$$V(e, \phi, \psi) = \frac{1}{2} [e^2(t) + \phi^2(t) + \psi^2(t)]. \quad (3.1.20)$$

La función  $V(e, \phi, \psi)$  es una *forma cuadrática* en  $e(t)$ ,  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  y es definida positiva. Evaluar la derivada con respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de las ecuaciones diferenciales (3.1.16) y (3.1.19), da como resultado

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \phi, \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV}{dt}(e, \phi, \psi) = e\dot{e} + \phi\dot{\phi} + \psi\dot{\psi} \\ &= e(a_m e + \phi x_p + \psi u) + \phi\dot{\phi} + \psi\dot{\psi} \\ &= a_m e^2 + \underbrace{e\phi x_p}_{\widehat{e\phi x_p}} + \underbrace{e\psi u}_{\widehat{e\psi u}} + \underbrace{\phi\dot{\phi}}_{\widehat{\phi\dot{\phi}}} + \underbrace{\psi\dot{\psi}}_{\widehat{\psi\dot{\psi}}} \\ &= a_m e^2 + (e x_p + \dot{\phi}) \phi + (e u + \dot{\psi}) \psi. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

$\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  en la ecuación (3.1.21) deberán ser de tal forma que los términos que contienen  $\phi$  y  $\psi$  se cancelen para que  $\dot{V}$  sea semi-definida negativa. Esto sugiere las leyes adaptativas descritas en la ecuación (3.1.19) con las que obtenemos

$$\dot{V}(e, \phi, \psi) = a_m e^2(t) \leq 0 \quad \text{ya que } a_m < 0. \quad (3.1.22)$$

Por lo tanto,  $V(e, \phi, \psi)$  es una función de Lyapunov y el origen del espacio  $(e, \phi, \psi)$  es uniformemente estable.

#### Observaciones:

- (1)  $e, \phi, \psi$  son acotadas para todo  $t \geq t_0$ ,  
(debido a que la función de Lyapunov,  $0 \leq V(t_0) < \infty$  y  $\dot{V} \leq 0$ ).
- (2) Los errores de los parámetros  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  en cualquier tiempo  $t$  no son conocidos (ya que  $a_p$  y  $k_p$  son desconocidos). Esto implica que la ley adaptativa no puede implementarse tal como está dada en la ecuación (3.1.19). Por lo tanto, mientras que el análisis del sistema adaptativo puede ser convenientemente efectuado usando las ecuaciones de los errores (3.1.16) y (3.1.19), la implementación práctica de la ley adaptativa tiene que ser efectuada en términos de los parámetros  $\hat{a}_p(t)$  y  $\hat{k}_p(t)$  dados por la ecuación (3.1.18).

$$(3) \quad e(t) \in \mathcal{L}^2 \left( e \in \mathcal{L}^2 \iff \int_0^\infty e^2(\tau) d\tau < \infty \right).$$

Como

$$-\int_{t_0}^{\infty} \dot{V}(e(\tau), \phi(\tau), \psi(\tau)) d\tau = V(t_0) - V(\infty) < \infty$$

entonces,

$$-\int_{t_0}^{\infty} a_m e^2(\tau) d\tau < \infty \implies e(t) \in \mathcal{L}^2.$$

(4)  $\dot{e}(t)$  es acotada,

$$\dot{e} = a_m e + \phi x_p + \psi u$$

$\uparrow$  acotada     $\uparrow$  señal acotada     $\uparrow$  se asume acotada desde el principio.

son acotadas por el argumento de Lyapunov.

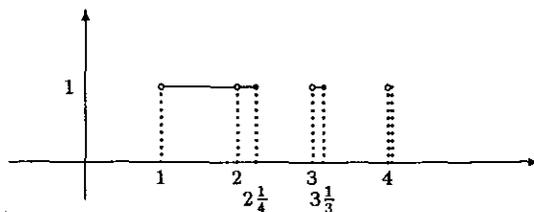
Por lo tanto, por el corolario del Lema 2.4.1 se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

En los primeros días del control adaptativo, se concluía directamente de las ecuaciones (3.1.20) y (3.1.22) que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Sin embargo, como se puede ver del análisis de arriba, lo único que podemos concluir es que  $e \in \mathcal{L}^2$ . Dado que una función puede ser cuadrado integrable sin tender a cero como lo podemos mostrar en el ejemplo siguiente, es claro que se necesitan condiciones adicionales para que  $e(t)$  tienda asintóticamente a cero.

**Ejemplo que muestra una función  $e \in \mathcal{L}^2$  sin que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .**

$$e(t) = \begin{cases} 1 & n < t \leq n + \frac{1}{n^2} \\ 0 & n + \frac{1}{n^2} < t \leq n + 1 \end{cases} \quad n \text{ entero positivo.}$$



$$\int e^2 dt < \infty.$$

El problema aquí es que la derivada de  $e(t)$  no es acotada. Se necesita que tanto  $e(t)$  como  $\dot{e}(t)$  sean acotadas y que  $e(t) \in \mathcal{L}^2$  para concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Por otro lado, si (3.1.14) y (3.1.19) fueran autónomas o periódicas, entonces sus soluciones convergerían al más grande de los conjuntos invariantes en  $E = \{(e, \phi, \psi) : e = 0\}$ , pero tanto (3.1.14) como (3.1.19) son no autónomas y únicamente podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

- (5) Usando un análisis similar con el Modelo 1 y usando la misma  $V(e, \phi, \psi)$  como en la ecuación (3.1.20), obtenemos leyes adaptativas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}}_p(t) &= -e(t)\hat{x}_p(t) \\ \dot{\hat{k}}_p(t) &= -e(t)u(t),\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

dando como resultado que

$$\dot{V}(e, \phi, \psi) = a_p e^2(t) \leq 0.\tag{3.1.24}$$

Por lo tanto, se pueden sacar las mismas conclusiones que para el caso del Modelo 2. Sin embargo, mientras que  $a_p$  es desconocida en la ecuación (3.1.24),  $a_m$  es conocida en la ecuación (3.1.21). Esta es la razón por la cual el Modelo 2 se puede rápidamente extender al caso multidimensional.

- (6) El procedimiento de identificación discutido arriba, únicamente proporciona

$$e(t) = \hat{x}_p(t) - x_p(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Este procedimiento no establece que  $\phi(t) = \hat{a}_p(t) - a_p \rightarrow 0$  o que  $\psi(t) = \hat{k}_p(t) - k_p \rightarrow 0$ . Todo lo que podemos decir es que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= -e(t)x_p(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \\ \dot{\psi}(t) &= -e(t)u(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{3.1.25}$$

Sabemos que  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$  son acotadas y también que  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  son acotadas, pero  $\phi \notin \mathcal{L}^2$  o  $\psi \notin \mathcal{L}^2$ . Por ejemplo, si alguna de ellas digamos  $\phi$  es constante, entonces  $\int \phi^2 d\tau < \infty$ . Esto únicamente nos dice que los errores de los parámetros  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  cambian cada vez más despacio cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo, nada podemos decir acerca de la convergencia a cero de  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$ . Para que esto suceda, nuestra entrada  $u(t)$  necesita ser persistentemente excitada, lo cual pertenece a un tema en el que no vamos a entrar en detalles.

**Identificación de Plantas No Lineales.** En la ecuación diferencial del error (3.1.16), el lado derecho es una función lineal de los errores de los parámetros  $\phi$  y  $\psi$ . Además, estos errores están asociados con señales  $x_p$  y  $u$  que pueden medirse. Este hecho nos permite construir leyes de identificación estables de la forma (3.1.19). Por lo tanto, podemos extender el mismo procedimiento a la identificación de una clase especial de plantas no lineales descritas por una ecuación de la forma

$$\dot{x}_p = a_p x_p + \alpha f(x_p) + k_p g(u) \quad (3.1.26)$$

donde  $a_p$ ,  $\alpha$ , y  $k_p$  son parámetros escalares desconocidos.  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  son funciones no lineales suaves conocidas tales que  $x_p = 0$  es el único punto de equilibrio de la ecuación (3.1.26) cuando  $g(u) \equiv 0$  y la ecuación (3.1.26) tiene soluciones acotadas para entradas acotadas  $u$ . Para estimar los parámetros desconocidos, construiremos un estimador de la forma

$$\dot{\hat{x}}_p = a_m \hat{x}_p + (\hat{a}_p(t) - a_m) x_p + \hat{\alpha}(t) f(x_p) + \hat{k}_p(t) g(u)$$

de tal manera que el error satisface la ecuación diferencial

$$\dot{e} = a_m e + (\hat{a}_p(t) - a_m) x_p + (\hat{\alpha}(t) - \alpha) f(x_p) + (\hat{k}_p(t) - k_p) g(u)$$

y tiene la misma forma que la ecuación (3.1.16). Por lo tanto, de esto sigue que las leyes de identificación adaptativa son de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_p &= -e x_p \\ \dot{\hat{\alpha}} &= -e f(x_p) \\ \dot{\hat{k}}_p &= -e g(u) \end{aligned}$$

las cuales pueden usarse para asegurar la estabilidad global del sistema completo con el error de la salida tendiendo a cero asintóticamente.

**Caso Vectorial.** El procedimiento utilizado para el caso escalar, visto anteriormente, puede extenderse directamente a plantas de orden más alto cuando su vector de estado es accesible.

Consideremos una planta LTI de entrada-múltiple, salida-múltiple con parámetros desconocidos. Sea  $n$  el orden de la planta cuyos estados son accesibles y descritos por la ecuación diferencial

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \quad (3.1.27)$$

donde  $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_p \in \mathbb{R}^{n \times m}$  son matrices desconocidas,  $A_p$  es asintóticamente estable y  $u$  es acotada. Elegiremos un estimador de la forma

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = A_m \hat{x}_p(t) + [\hat{A}_p(t) - A_m] x_p(t) + \hat{B}_p(t) u(t) \quad (3.1.28)$$

donde  $A_m$  es una matriz  $n \times n$  asintóticamente estable,  $\hat{A}_p(t)$  es una matriz  $n \times n$  y  $\hat{B}_p(t)$  es una matriz  $n \times m$ . Los elementos de  $\hat{A}_p(t)$  y  $\hat{B}_p(t)$  pueden ser ajustados a discreción del diseñador. Si el error del estado y los errores de los parámetros se definen como

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{x}_p(t) - x_p(t), \quad \Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}_p(t) - A_p, \quad \Psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{B}_p(t) - B_p,$$

entonces la ecuación del error está dada por

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + \Phi(t)x_p + \Psi(t)u(t). \quad (3.1.29)$$

Como en el caso escalar discutido anteriormente, el problema es ajustar los elementos de las matrices  $\hat{A}_p(t)$  y  $\hat{B}_p(t)$  o equivalentemente  $\Phi(t)$  y  $\Psi(t)$  de tal forma que las cantidades  $e(t)$ ,  $\Phi(t)$  y  $\Psi(t)$  tiendan a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Elegiremos las leyes adaptativas

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}}_p(t) &= \dot{\Phi}(t) = -P e(t) x_p^T(t) \\ \dot{\hat{B}}_p(t) &= \dot{\Psi}(t) = -P e(t) u^T(t) \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

donde  $P$  es una matriz  $n \times n$  simétrica definida-positiva ( $P > 0$ ), la cual depende de  $A_m$ .

Vamos a demostrar a continuación que el *estado de equilibrio* ( $e = 0, \Phi = 0, \Psi = 0$ ) de las ecuaciones (3.1.29) y (3.1.30) es uniformemente estable y que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Efectivamente, sea  $V(e, \Phi, \Psi)$  una función de Lyapunov candidata, la cual tiene la forma

$$V(e, \Phi, \Psi) = e^T P e + Tr(\Phi^T \Phi + \Psi^T \Psi) \quad (3.1.31)$$

donde  $Tr(A)$  denota la traza de la matriz  $A$ . Si  $P$  es una matriz simétrica definida-positiva, entonces también  $V(e, \Phi, \Psi)$  es definida-positiva. La derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov  $V(e, \Phi, \Psi)$  (3.1.31) a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación (3.1.29) está dada por

$$\dot{V} = e^T (P A_m + A_m^T P) e + 2e^T P \Phi x_p + 2e^T P \Psi u + Tr(2\dot{\Phi}^T \Phi + 2\dot{\Psi}^T \Psi). \quad (3.1.32)$$

Como  $A_m$  es una matriz asintóticamente estable, la solución de la ecuación matricial de Lyapunov

$$A_m^T P + P A_m = -Q_0 < 0$$

donde  $Q_0$  es una matriz  $n \times n$  simétrica y definida-positiva, produce una matriz simétrica definida-positiva  $P$ . Con una ley adaptativa como la definida en la ecuación (3.1.30),

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e^T Q_0 e + 2e^T P \Phi x_p - 2Tr(x_p e^T P \Phi) + 2e^T P \Psi u - 2Tr(u e^T P \Psi) \\ &= -e^T Q_0 e \leq 0 \end{aligned}$$

ya que  $Tr(ab^T) = b^T a$  donde  $a$  y  $b$  son vectores columna. Por lo tanto, el estado de equilibrio ( $e = 0, \Phi = 0, \Psi = 0$ ) de las ecuaciones (3.1.29) y (3.1.30) es globalmente estable. También,  $e \in \mathcal{L}^2$  y  $\dot{e}$  es acotado, lo cual implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

## COMENTARIOS:

- i) Este análisis, al igual que en el caso escalar, asegura la convergencia asintótica del error del estado a cero. La convergencia de los parámetros a sus valores reales, el cual es el objetivo principal del procedimiento de identificación, depende de una excitación persistente de la entrada  $u$ . Sin embargo, no entraremos en detalle a cerca de esto ya que nuestro objetivo no es el problema de identificación si no el problema de control, Sección 3.2.
- ii) Las propiedades de convergencia del esquema de identificación son gobernadas por la elección de las matrices  $A_m$ ,  $Q_0$  y por la entrada  $u$ .
- iii) El procedimiento puede ser rápidamente extendido a la identificación de parámetros de sistemas no lineales estables de la forma

$$\dot{x}_p = A_p x_p + C_p f(x_p) + B_p g(u) \quad (3.1.33)$$

donde  $A_p$ ,  $B_p$  y  $C_p$  son matrices constantes desconocidas,  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  son funciones suaves conocidas y tales que la ecuación (3.1.33) tiene soluciones acotadas para una entrada acotada  $u$ . La estabilidad global del estado de equilibrio de las ecuaciones diferenciales para el error puede ser mostrada como en el caso escalar.

## 3.2 El Problema de Control

### 3.2.1 Caso Escalar (Control Directo)

El problema más simple al controlar un sistema dinámico adaptativamente es el caso cuando la planta, con una pareja entrada-salida  $\{u(\cdot), x_p(\cdot)\}$ , se describe con una ecuación diferencial escalar de la forma

$$\dot{x}_p(t) = a_p(t)x_p(t) + k_p(t)u(t)$$

donde  $a_p(t)$  y  $k_p(t)$  son los parámetros de la planta. Un modelo de referencia se describe por la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{x}_m(t) = a_m x_m(t) + k_m r(t) \quad (3.2.1)$$

donde  $a_m < 0$ ,  $k_m$  son constantes conocidas, y  $r$  es una función del tiempo acotada continua por partes. Suponiendo que  $a_m$ ,  $k_m$  y  $r$  han sido elegidas de tal manera que  $x_m$  representa la salida deseada de la planta en el tiempo  $t$ , el objetivo es determinar una entrada de control acotada  $u$  tal que mantenga todas las señales del sistema acotadas y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_p(t) - x_m(t)| = 0. \quad (3.2.2)$$

Si  $a_p(t)$  y  $k_p(t)$  pueden ajustarse directamente y sus valores son conocidos, esto se puede lograr trivialmente escogiendo

$$a_p(t) \equiv a_m, \quad k_p(t) \equiv k_m, \quad \text{y} \quad u(t) = r(t) \quad \forall t \geq t_0.$$

Para hacer el problema mas realista, supongamos que los valores iniciales de  $a_p(t)$  y  $k_p(t)$  son desconocidos pero que sus derivadas con respecto al tiempo pueden ser ajustadas usando las señales medidas en el sistema. Cuando el problema de control se propone de esta manera, este puede ser visto de la misma forma que el problema de identificación usando el Modelo 1 discutido anteriormente (Sección 3.1) con los papeles de la planta y modelo de referencia intercambiados. En este caso, el error entre las salidas de la planta y del modelo de referencia satisfacen la ecuación diferencial

$$\dot{e}(t) = a_m e(t) + (a_p(t) - a_m) x_p(t) + (k_p(t) - k_m) r(t). \quad (3.2.3)$$

Si son usadas las leyes adaptativas

$$\begin{aligned} \dot{a}_p(t) &= -e(t)x_p(t) \\ \dot{k}_p(t) &= -e(t)r(t). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4) son similares a las ecuaciones (3.1.16) y (3.1.18). Su estabilidad global puede mostrarse de la misma manera como se describió en la sección anterior.

**Control Retroalimentado.** En la práctica no es posible ajustar directamente los parámetros de la planta tal como se realizó anteriormente y el comportamiento de la planta puede ser alterado solo usando multiplicadores de alimentación y retroalimentación. Si  $a_p$  y  $k_p$  son constantes conocidas de tal forma que la planta esta dada por

$$\dot{x}_p(t) = a_p x_p(t) + k_p u(t), \quad (3.2.5)$$

entonces se puede elegir un control de entrada de la forma

$$u(t) = \theta^* x_p(t) + k^* r(t) \quad (3.2.6)$$

donde

$$\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_m - a_p}{k_p} \quad \text{y} \quad k^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_m}{k_p}.$$

Usando la expresión de la ecuación (3.2.6) en la ecuación (3.2.5) se ve que la función de transferencia de la planta junto con el controlador deberá ser la misma que la del modelo de referencia. Suponiendo que  $k_p \neq 0$ , podemos asegurar la existencia de tales parámetros  $\theta^*$  y  $k^*$ , esto es, cuando la planta es controlable. Cuando  $a_p$  y  $k_p$  son desconocidas, la entrada de control se puede elegir (ver Fig. 3.2) de la forma

$$u(t) = \theta(t)x_p(t) + k(t)r(t) \quad (3.2.7)$$

donde  $\theta(t)$  y  $k(t)$  son los parámetros ajustables del controlador. La adaptación deberá ser tal que  $\theta(t)$  y  $k(t)$  involucren a los valores constantes  $\theta^*$  y  $k^*$  respectivamente. De aquí

en adelante, a la planta dada por la ecuación (3.2.5) junto con el controlador adaptativo descrito por (3.2.7), simplemente la denominaremos *sistema* el cual puede ser descrito por

$$\dot{x}_p(t) = (a_p + k_p\theta(t))x_p(t) + k_p k(t)r(t). \quad (3.2.8)$$

Definiendo el error de salida  $e$  y los errores de los parámetros  $\phi$  y  $\psi$  como

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_p(t) - x_m(t), \quad \phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(t) - \theta^* \quad \text{y} \quad \psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} k(t) - k^*$$

obtenemos la ecuación del error de las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.8) como

$$\dot{e}(t) = a_m e(t) + k_p \phi(t)x_p(t) + k_p \psi(t)r(t). \quad (3.2.9)$$

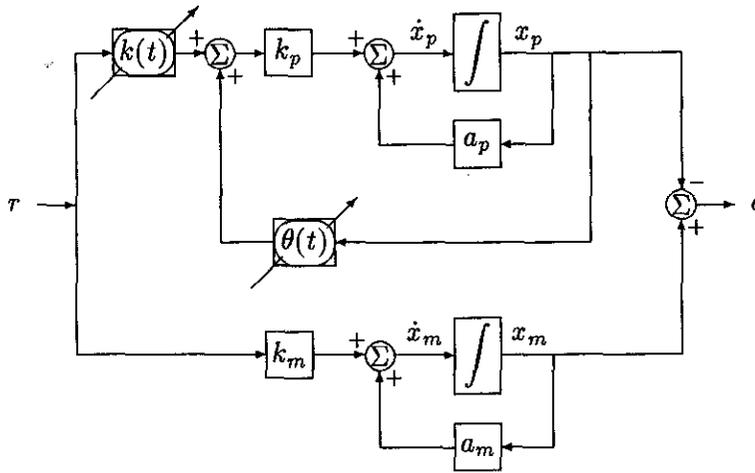


Fig. 3.2 El Problema de Control: Caso Escalar.

El problema entonces consiste en determinar la forma en la que  $\theta(t)$  y  $k(t)$ , o alternativamente  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$  son ajustados usando toda la información disponible.

**Caso (i)  $k_p$  Conocida.** En este caso, el parámetro de control  $k(t)$  puede elegirse directamente igual a  $k^*$  tal que la entrada de control, de la ecuación (3.2.7), es de la forma

$$u(t) = \theta(t)x_p(t) + k^*r(t)$$

y únicamente el parámetro  $\theta(t)$  tiene que ser ajustado. La ecuación del error se reduce a

$$\dot{e}(t) = a_m e(t) + k_p \phi(t)x_p(t). \quad (3.2.10)$$

La regla para poner al corriente  $\theta(t)$  (o  $\phi(t)$ ) está dada por

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\phi}(t) = -k_p e(t)x_p(t) \quad (3.2.11)$$

y la justificación de porqué se elige tal ley adaptativa, como en el problema de identificación, es demostrando la existencia de una función de Lyapunov que asegure la estabilidad global del sistema no lineal resultante.

**Análisis de Estabilidad.** Sea  $V$  una función de Lyapunov candidata dada por

$$V(e, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [e^2 + \phi^2]. \quad (3.2.12)$$

La derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.2.12) evaluada a lo largo de las trayectorias solución de las ecuaciones (3.2.10) y (3.2.11) es

$$\dot{V}(e, \phi) = e\dot{e} + \phi\dot{\phi} = a_m e^2 \leq 0.$$

Esto implica que el origen de las ecuaciones (3.2.10) y (3.2.11) es uniformemente estable a lo grande. Como en el problema de identificación, podemos mostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Sin embargo, no podemos concluir directamente la estabilidad asintótica del origen del espacio  $(e, \phi)$  ya que  $\dot{V}$  únicamente es semi-definida negativa. La convergencia de  $\theta(t)$  al valor deseado  $\theta^*$  depende de la excitación persistente de la entrada de referencia  $r$  lo cual pertenece a un tema que no vamos a estudiar en el presente trabajo.

**Caso (ii)  $k_p$  Desconocida** (signo de  $k_p$  conocido). En este caso la entrada tiene la forma dada en la ecuación (3.2.7). La presencia del término  $k_p$  en la ecuación del error (3.2.9) requiere una modificación de las leyes adaptativas para mantener la estabilidad. Así que las leyes adaptativas se eligen como:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = \dot{\phi}(t) &= -\text{sgn}(k_p) e(t) x_p(t) \\ \dot{k}(t) = \dot{\psi}(t) &= -\text{sgn}(k_p) e(t) r(t) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

donde  $\text{sgn}(x)$  se define como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función candidata de Lyapunov

$$V(e, \phi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [e^2 + |k_p| (\phi^2 + \psi^2)] \quad (3.2.14)$$

tiene derivada  $\dot{V}(e, \phi, \psi)$ , la cual al evaluarse en las soluciones de las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.13), lleva a

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \phi, \psi) &= e\dot{e} + |k_p| [\phi\dot{\phi} + \psi\dot{\psi}] \\ &= a_m e^2 + k_p \phi e x_p + k_p \psi e r - |k_p| [\text{sgn}(k_p) \phi e x_p + \text{sgn}(k_p) \psi e r] \\ &= a_m e^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

como en el caso (i), concluimos de las ecuaciones (3.2.14) y (3.2.15) que el estado de equilibrio del sistema descrito por las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.13) es uniformemente estable. En ambos casos, como  $\dot{e}$  es acotada y  $e \in \mathcal{L}^2$ , se puede demostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

**Control de Plantas no Lineales.** En la Sección 3.1 mostramos el procedimiento seguido para obtener control adaptativo estable de la planta lineal representada por la ecuación (3.2.8), puede también extenderse a cierta clase de plantas no lineales.

Consideremos una planta no lineal que deseamos controlar adaptativamente la cual está dada por

$$\dot{x}_p = a_p x_p + \alpha f(x_p) + k_p u \quad (3.2.16)$$

donde  $a_p$ ,  $k_p$  y  $\alpha$  son desconocidas,  $x_p$  así como  $f(x_p)$  pueden medirse y  $f(\cdot)$  es una función suave con  $f(0) = 0$ . El objetivo es que  $x_p$  siga la salida  $x_m$  del modelo de referencia lineal dado en la ecuación (3.2.1). Eligiendo una entrada de control de la forma

$$u = \theta(t)x_p + \hat{\alpha}(t)f(x_p) + k(t)r \quad (3.2.17)$$

las leyes adaptativas correspondientes para ajustar  $\theta(t)$ ,  $\hat{\alpha}(t)$  y  $k(t)$  están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\text{sgn}(k_p) e x_p \\ \dot{\hat{\alpha}} &= -\text{sgn}(k_p) e f(x_p) \\ \dot{k} &= -\text{sgn}(k_p) e r. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Usando los mismos argumentos de antes, se puede mostrar que el sistema completo dado por las ecuaciones (3.2.16) y (3.2.18) tiene soluciones acotadas y que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

**Conclusión:** Aunque los procedimientos adoptados en el problema de control para determinar leyes adaptativas estables paralelas a las del problema de identificación abordado en la Sección 3.1, vale la pena mencionar explícitamente algunas de las diferencias en las suposiciones hechas en los dos casos.

- (i) En la ecuación (3.1.12), la planta se supone que es estable y por lo tanto  $a_p$  negativa. En el problema de control, la planta, como se describió en la ecuación (3.2.5), puede ser inestable.
- (ii) En el problema de identificación, el objetivo principal es estimar los parámetros  $a_p$  y  $k_p$  de la planta. En contraste a esto, el objetivo en el problema de control precisamente es que la salida de la planta siga asintóticamente a la salida del modelo de referencia. Por lo tanto, la convergencia de los parámetros a sus valores deseados, lo cual es lo más importante para el problema de identificación, no es relevante para el problema de control.
- (iii) En el problema de identificación, los parámetros del modelo de identificación son ajustados. Cualquier inestabilidad que pueda resultar, puede manifestarse únicamente en este modelo. En contraste a esto, en el problema de control, los parámetros del controlador se ajustan en el sistema de lazo retroalimentado. Por lo tanto, el proceso controlado puede resultar inestable, el cual desde un punto de vista práctico puede ser catastrófico.

- (iv) La estructura del modelo de identificación es a criterio del diseñador y es determinada por la parametrización específica de la planta que se usa. La identificación de los parámetros se fundamenta en el contexto de esta estructura predeterminada. Dado que la planta se supone estable y la entrada acotada, la parametrización puede escogerse de tal manera que la identificación sea obtenida usando señales acotadas conocidas. En contraste con esto, únicamente la entrada de referencia  $r$  puede suponerse acotada en el problema de control y la acotación para todas las señales en el lazo adaptativo tiene que ser demostrada usando la ley adaptativa específica elegida.

De los análisis hechos en los dos problemas (caso escalar), el problema de identificación y el problema de control no resultan muy difíciles y no parece haber diferencia entre ellos ya que esencialmente tiene el mismo análisis de estabilidad. Sin embargo, este no resulta ser el caso para sistemas de mayor orden donde el problema de control es significativamente más complejo. Esta diferencia se debe a las suposiciones  $i$ - $iv$ ) que se hacen en los dos casos.

### 3.2.2 Caso Escalar (Control Indirecto)

En la Subsección 3.2.1, se abordó el control de una planta desconocida ajustando directamente los parámetros de control en un lazo retroalimentado, basándose en el error entre las salidas de la planta y el modelo. Un método alternativo es estimar los parámetros de la planta como se describió en la Subsección 3.2.1 y ajustar los parámetros de control basándose en tales estimaciones. Este procedimiento es llamado *control indirecto* (Sección 1.2.2). Mostraremos brevemente que tal esquema también da como resultado un control acotado y un error  $e(t)$  el cual tiende asintóticamente a cero.

Cuando los parámetros de la planta  $a_p$  y  $k_p$  son conocidos, se mostró en la Subsección 3.2.1 que existen parámetros constantes  $\theta^*$  y  $k^*$ , donde

$$\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_m - a_p}{k_p} \quad \text{y} \quad k^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_m}{k_p}.$$

Esto puede ser usado para generar la salida  $u(t)$  como

$$u(t) = \theta^* k_p(t) + k^* r(t)$$

tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_p(t) - x_m(t)| = 0.$$

En el caso del control directo, esto motivó la elección de la estructura del controlador dada por la ecuación (3.2.7). Cuando el enfoque del control indirecto es usado, los parámetros de la planta  $a_p$  y  $k_p$  son estimados como  $\hat{a}_p(t)$  y  $\hat{k}_p(t)$  respectivamente y los parámetros de control se ajustan suponiendo que estos corresponden a los valores reales de los parámetros de la planta. Esto motiva el uso de una entrada de control de la forma (Fig. 3.3)

$$u(t) = \frac{a_m - \hat{a}_p(t)}{\hat{k}_p(t)} x_p(t) + \frac{k_m}{\hat{k}_p(t)} r(t). \quad (3.2.19)$$

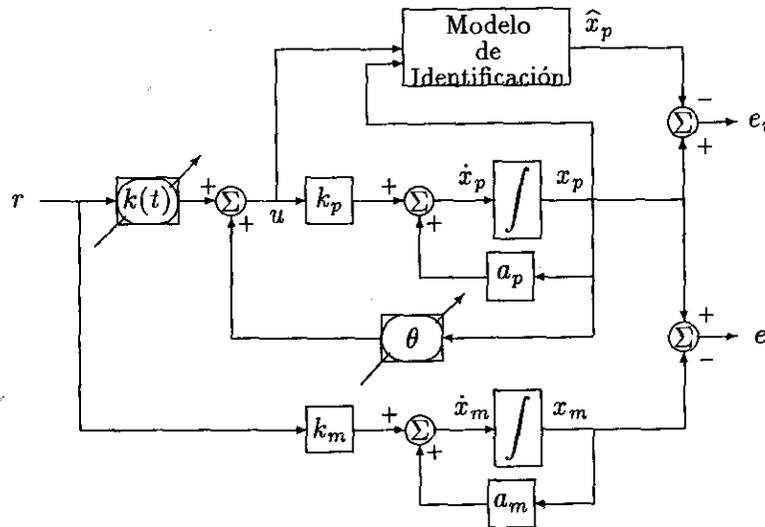


Fig. 3.3 Control Indirecto. Caso Escalar.

Por lo tanto, aunque un modelo de identificación es usado para estimar  $\hat{a}_p$  y  $\hat{k}_p$ , se ve que un modelo de referencia explícito no es usado para propósitos de control. En vez de esto, los parámetros  $a_m$  y  $k_m$  son usados implícitamente en la ecuación (3.2.19) para determinar los parámetros de control. Esta tiene la misma forma que la mostrada en la ecuación (3.2.7) obtenida usando control directo, si definimos

$$\theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_m - \hat{a}_p(t)}{\hat{k}_p(t)} \quad \text{y} \quad k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_m}{\hat{k}_p}.$$

Como en la subsección anterior, consideraremos dos casos basados en la información acerca de  $k_p$ .

**Caso (i)  $k_p$  Conocida.** Con en la Subsección 3.1.2, construimos un estimador de la forma

$$\dot{\hat{x}}_p = a_m \hat{x}_p + (\hat{a}_p(t) - a_m) x_p + k_p u. \quad (3.2.20)$$

Definiendo el error de la identificación de la salida y el error de los parámetros de la estimación como

$$e_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_p(t) - \hat{x}_p(t) \quad \text{y} \quad \tilde{a}_p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{a}_p(t) - a_p,$$

obtenemos la ecuación del error

$$\dot{e}_i(t) = a_m e_i(t) - \tilde{a}_p(t) x_p(t). \quad (3.2.21)$$

La ley adaptativa para la identificación se elige como se describió en Subsección 3.1.2,

$$\dot{\hat{a}}_p(t) = \dot{\tilde{a}}_p(t) = -e_i(t)x_p(t) \quad (3.2.22)$$

y entonces el control de entrada es implementado como

$$u(t) = \frac{a_m - \hat{a}_p(t)}{k_p} x_p(t) + \frac{k_m}{k_p} r(t). \quad (3.2.23)$$

Se puede demostrar que el esquema de estimación descrito en las ecuaciones (3.2.20) y (3.2.22) junto con el esquema del controlador de la ecuación (3.2.23) es un sistema adaptativo globalmente estable así como un modelo asintótico ideal a seguir.

**Análisis de Estabilidad.** Una función candidata de Lyapunov

$$V(e_i, \tilde{a}_p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [e_i^2 + \tilde{a}_p^2]$$

tiene derivada con respecto al tiempo  $\dot{V}(e_i, \tilde{a}_p)$ , la cual cuando se evalúa a lo largo de las trayectorias de las ecuaciones (3.2.21) y (3.2.22) no llevan a la ecuación

$$\dot{V} = a_m e_i^2 \leq 0.$$

Por lo tanto,  $e_i(t)$  y  $\tilde{a}_p(t)$  (y por lo tanto  $\hat{a}_p(t)$ ) son acotadas uniformemente. Aún más, con la entrada de control de la forma (3.2.23), el estimador puede ser expresado como

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = a_m \hat{x}_p(t) + k_m r(t). \quad (3.2.24)$$

Eligiendo  $\hat{x}_p(t_0) = x_m(t_0)$ , se sigue de las ecuaciones (3.2.24) y (3.2.1) que

$$\hat{x}_p(t) = x_m(t) \quad \forall t \geq t_0$$

y por lo tanto,  $\hat{x}_p(t)$  es uniformemente acotada. Por lo tanto, la salida de la planta  $x_p(t) = \hat{x}_p(t) + e_i(t)$  también es acotada uniformemente. Como en la Subsección 3.2.1, obtenemos de la ecuación (3.2.21) que  $\dot{e}_i(t)$  es acotada y  $e_i \in \mathcal{L}^2$ . Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_p(t) - x_m(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_p(t) - \hat{x}_p(t)| = 0.$$

El hecho de que la ecuación del estimador (3.2.24) es idéntica a la ecuación (3.2.1) en la Subsección 3.2.1 y que las leyes adaptativas son también idénticas implica que el control directo e indirecto son equivalentes cuando  $k_p$  es conocida.

**Caso (ii)  $k_p$  Desconocida.** El problema resulta considerablemente más difícil cuando  $k_p$  es desconocida y se usa un enfoque indirecto para controlar la planta. Esto puede atribuirse al hecho de que  $k_p$  ha sido estimado como  $\hat{k}_p$  y la entrada de control como el dado por la ecuación (3.2.19) dependen de  $\frac{1}{\hat{k}_p(t)}$ . Por lo tanto, aunque los parámetros estimados

son acotados, la entrada de control puede resultar no acotada cuando  $\hat{k}_p(t)$  toma valores cercanos a cero.

Sea  $\text{sgn}(k_p) = +1$  y sea  $\underline{k}_p$  una cota inferior para  $k_p$  conocida tal que

$$k_p \geq \underline{k}_p.$$

Elegiendo un estimador de la forma

$$\dot{\hat{x}}_p = a_m \hat{x}_p + [\hat{a}_p(t) - a_m] x_p + \hat{k}_p(t) u,$$

las leyes adaptativas para ajustar  $\hat{a}_p(t)$  y  $\hat{k}_p(t)$  son elegidas como

$$\dot{\hat{a}}_p = e_i x_p \quad (3.2.25)$$

y

$$\dot{\hat{k}}_p = f(e_i, u, \underline{k}_p) \quad \hat{k}_p(t_0) > \underline{k}_p \quad (3.2.26)$$

donde  $e_i = x_p - \hat{x}_p$ , y

$$f(e_i, u, \underline{k}_p) = \begin{cases} e_i u & \text{si } \hat{k}_p(t) > \underline{k}_p \\ e_i u & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u > 0 \\ 0 & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u \leq 0 \end{cases}$$

La ley adaptativa en la ecuación (3.2.26) asegura que  $\hat{k}_p(t) \geq \underline{k}_p \forall t \geq t_0$ .

**Análisis de Estabilidad.** Definiendo los errores de los parámetros  $\tilde{a}_p$  y  $\tilde{k}_p$  como

$$\tilde{a}_p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{a}_p(t) - a_p \quad \text{y} \quad \tilde{k}_p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{k}_p(t) - k_p$$

la ecuación del error es derivada como

$$\dot{e}_i = a_m e_i - \tilde{a}_p(t) x_p - \tilde{k}_p(t) u. \quad (3.2.27)$$

Escogiendo una función cuadrática

$$V = \frac{1}{2} (e_i^2 + \tilde{a}_p^2 + \tilde{k}_p^2)$$

su derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de las ecuaciones (3.2.25), (3.2.26) y (3.2.27) está dada por

$$\dot{V} = a_m e_i^2 - e_i \tilde{a}_p x_p - e_i \tilde{k}_p u + \tilde{a}_p e_i x_p + \tilde{k}_p f(e_i, u, \underline{k}_p).$$

De la elección de  $f(e_i, u, \hat{k}_p)$ , se sigue que

$$\dot{V} = \begin{cases} a_m e_i^2 & \text{si } \hat{k}_p(t) > \underline{k}_p \\ a_m e_i^2 & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u > 0 \\ a_m e_i^2 - \tilde{k}_p e_i u & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u \leq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $\dot{V} \leq 0$  y  $e_i, \hat{a}_p$  y  $\hat{k}_p$  son acotadas. Usando argumentos similares que en la subsecciones anteriores, puede mostrarse también que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_p(t) - x_m(t)| = 0.$$

### 3.2.3 Caso Vectorial

La exposición del problema de control para una planta LTI de orden  $n$  con parámetros desconocidos y variables de estado accesibles puede establecerse como sigue:

La planta que va a ser controlada se describe con la ecuación diferencial LTI,

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (\text{Modelo de la Planta}) \quad (3.2.28)$$

donde  $A_p$  es una matriz constante  $n \times n$  y desconocida,  $B_p$  es una matriz constante  $n \times m$  y desconocida y el par  $(A_p, B_p)$  es controlable. Además, el estado  $n$ -dimensional  $x_p$  se supone que es accesible.

El modelo de referencia que va a ser utilizado puede especificarse con la ecuación diferencial LTI,

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \quad (\text{Modelo de Referencia}) \quad (3.2.29)$$

donde  $A_m$  es una matriz  $n \times n$  asintóticamente estable,  $B_m$  es una matriz  $n \times m$  y  $r$  es una entrada de referencia acotada. Se asume que  $x_m(t)$ , para todo  $t \geq t_0$ , representa la trayectoria ideal que se desea siga  $x_p$ . El objetivo es determinar un método para controlar la planta de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_p(t) - x_m(t)] = 0. \quad (3.2.30)$$

Podemos intentar resolver este problema bajo diferentes suposiciones, considerando la primer información disponible a la que se tenga acceso respecto a la planta. Básicamente tenemos los tres casos siguientes:

#### Caso I. Ajuste Directo de los Parámetros de la Planta:

Sea  $u(t) = r(t)$ ,  $\forall t \geq t_0$  la entrada de control de la planta y sean  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  los parámetros de la planta los cuales son los elementos de las matrices  $A_p$  y  $B_p$  que se supone

son desconocidos y pueden ajustarse directamente. Suponiendo que las derivadas con respecto al tiempo de estos parámetros pueden ser ajustadas usando datos de entrada-salida, la ecuación diferencial que describe al sistema completo es

$$\begin{cases} \dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \\ \dot{x}_p = A_p x_p + B_p r, \end{cases} \quad (3.2.31)$$

con leyes adaptativas, obtenidas similarmente como en el caso del problema de indentificación las cuales son:

$$\begin{aligned} \dot{A}_p &= -P e x_p^T \\ \dot{B}_p &= -P e r^T \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

donde  $P$  es una matriz  $n \times n$  simétrica, definida positiva, la cual es la solución de la ecuación matricial de Lyapunov

$$A_m^T P + P A_m = -Q_0, \quad Q_0 > 0 \quad (3.2.33)$$

la cual puede resolverse utilizando algún paquete numérico como por ejemplo **MATLAB** o **MATHEMATICA**. Esta solución  $P$  de la ecuación matricial de Lyapunov (3.2.33) da como resultado que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , donde  $e(t) = x_p(t) - x_m(t)$ .

El hecho que los errores de los parámetros no necesariamente tiendan a cero no es muy relevante ya que este es el primer intento del control adaptativo para ajustar los parámetros que se desconocen. Sin embargo, con un poco más de teoría disponible se puede demostrar que si la entrada de referencia se exita persistentemente, entonces

$$\|A_p(t) - A_m\| \text{ y } \|B_p(t) - B_m\| \rightarrow 0.$$

### Caso II. Control Retroalimentado con $B_p$ Conocida:

La matriz  $A_p$  es desconocida mientras que la matriz  $B_p$  se supone conocida. La matriz  $B_m$  del modelo de referencia, la cual es a criterio del diseñador, se puede elegir igual a  $B_p$ . En otro caso,  $B_m$  se puede elegir como  $B_m = B_p Q^*$ , donde  $Q^*$  es una matriz constante conocida. Entonces, la entrada de control de la planta  $u(t)$  puede ser generada usando la retroalimentación:

$$u(t) = \Theta(t)x_p(t) + Q^*r(t) \quad (3.2.34)$$

donde  $Q^*$  depende de  $B_p$  y la matriz de retroalimentación  $\Theta$  es ajustada adaptativamente. Además, vamos a suponer que existe una matriz constante  $\Theta^*$  tal que

$$A_p + B_p \Theta^* = A_m. \quad (3.2.35)$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales del error pueden expresarse como

$$\begin{aligned}
 \dot{e}(t) &= \dot{x}_p(t) - \dot{x}_m(t) = A_p x_p(t) + B_p \Theta(t) x_p(t) + B_p Q^* r(t) - A_m x_m(t) - B_m r(t) \\
 &= A_m (x_p(t) - x_m(t)) + B_p \Theta(t) x_p(t) - A_m x_p(t) + A_p x_p(t) + (B_p Q^* - B_m) r(t) \\
 &= A_m e(t) + B_p \Theta(t) x_p(t) - (A_p + B_p \Theta^*) x_p(t) + A_p x_p(t) \\
 &= A_m e(t) + B_p (\Theta(t) - \Theta^*) x_p(t) \\
 &= A_m e(t) + B_p \Phi(t) x_p(t)
 \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

y el objetivo es determinar una ley adaptativa para ajustar  $\Theta(t)$  de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Los métodos de control adaptativo directo o indirecto, producen la misma ley adaptativa:

$$\dot{\Theta}(t) = \dot{\Phi}(t) = -B_p^T P e x_p^T, \tag{3.2.37}$$

donde  $\Phi(t) = \Theta(t) - \Theta^*$  y  $P$  es la solución simétrica, definida positiva de la ecuación matricial de Lyapunov (3.2.33). Esto asegura que la función

$$V(e, \Phi) \stackrel{\text{def}}{=} e^T P e + Tr [\Phi^T \Phi] \tag{3.2.38}$$

es una función de Lyapunov para el sistema de ecuaciones (3.2.36) y (3.2.37),

$$\begin{cases} \dot{e} = A_m e + B_p [\Theta - \Theta^*] x_p \\ \dot{\Theta} = -B_p^T P e x_p^T \end{cases}$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + Tr [2\dot{\Phi}^T \Phi] \\
 &= e^T (A_m^T P + P A_m) e + x_p^T \dot{\Phi}^T B_p^T P e + e^T P B_p \dot{\Phi} x_p + 2Tr [\dot{\Phi}^T \Phi] \\
 &= -e^T Q_0 e + 2Tr [e^T P B_p \dot{\Phi} x_p + \dot{\Phi}^T \Phi]
 \end{aligned}$$

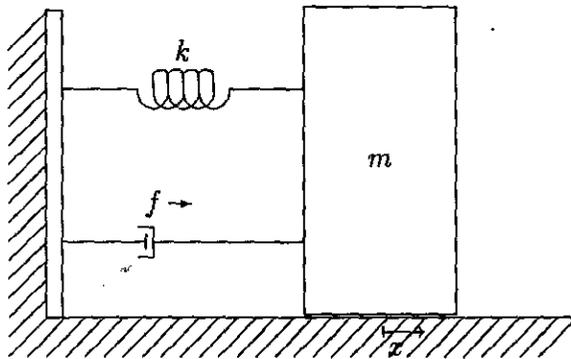
la cual al elegir la ley adaptativa (3.2.34) se reduce a

$$\dot{V} = -e^T Q_0 e \leq 0$$

y con esto tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} [x_p(t) - x_m(t)] = 0$ .

### Ejemplo 3.1 (Sistema Masa-Resorte de 2<sup>do</sup> Orden)

Consideremos el sistema masa-resorte que se muestra en la Fig. 3.4,



el cual se describe mediante la ecuación

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f = K_f u.$$

Fig. 3.4 Sistema Masa-Resorte.

Así, tenemos que la planta está descrita mediante el sistema LTI:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_p(1) \\ \dot{x}_p(2) \end{bmatrix}}_{\dot{x}_p} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_{A_p} \underbrace{\begin{bmatrix} x_p(1) \\ x_p(2) \end{bmatrix}}_{x_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_f}{m} \end{bmatrix}}_{B_p} u.$$

Supongamos que conocemos exactamente el factor eléctrico de amplificación de la entrada,  $K_f$ . Esto implica que  $B_p$  es conocida si conocemos la masa  $m$  del bloque. Por lo tanto, si no se conocen exactamente la constante de elasticidad  $k$  y el factor de fricción  $b$ , entonces  $A_p$  es desconocida. Es decir, tenemos un ejemplo del Caso II discutido anteriormente.

El problema es estabilizar el bloque utilizando una ley de control adaptativa y para objetivos de simulación, la cual la vamos a hacer usando MATLAB, vamos a suponer que  $k = 925 \text{ N/M}$ ,  $b = 4 \text{ N/(M/S)}$ ,  $m = 3 \text{ Kg}$  y  $K_f = 9000 \text{ N/V}$  lo cual es como una condición inicial para los parámetros.

El modelo de referencia es de la forma:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r$$

con

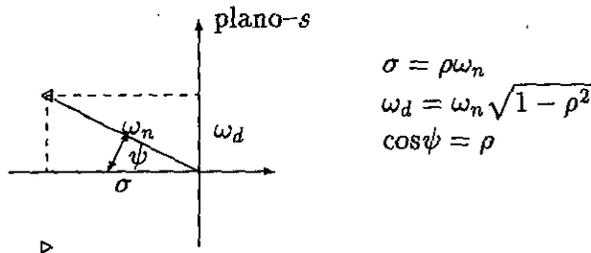
$$\begin{aligned} B_m &= B_p Q^* \implies Q^* = ? \\ A_m &= A_p + B_p \Theta^* \end{aligned}$$

donde  $A_m$  es una relación de la forma  $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}$  ya que necesita ser consistente con la matriz de la planta y el control de retroalimentación es

$$u(t) = \Theta(t)x_p(t) + Q^*r(t).$$

Supongamos que queremos un tiempo de asentamiento de  $1/10$  de segundo. Entonces,

$$T_s = 4/\sigma = 1/10 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 40.$$



$\sigma$  afecta la respuesta oscilatoria ya que entre más grande sea  $\psi$  (frecuencia) más grande es la oscilación.

La idea es encontrar las raíces del polinomio  $s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ , el cual se propone en Ingeniería como polinomio característico del sistema (de referencia) con el fin de tener las especificaciones deseadas. Es decir, amortiguamiento grande con oscilaciones pequeñas. Para ajustar tal polinomio se utiliza un método llamado ITAE (Integral Time Absolute Error), Respuesta Integral al Tiempo del Error Absoluto, el cual asegura que con un ángulo de aproximadamente  $45^\circ$  se obtienen las especificaciones mencionadas. Por lo tanto, tenemos que

$$\rho \approx 0.7 \quad \Rightarrow \quad 2\rho = 1.4 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

el cual junto con el tiempo de asentamiento produce  $\omega_n = \frac{40}{0.7} \approx 57$ .

Por lo tanto, tenemos que el polinomio característico de  $A_m$  es:

$$P(s) = s^2 + 80s + 3250$$

de donde deducimos la forma canónica de la matrix  $A_m$ ,

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3250 & -80 \end{bmatrix}$$

Efectivamente,  $\lambda(A_m) \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda I - A_m| = \lambda^2 + 80\lambda + 3250$  cuyos valores propios son  $\lambda = -40 \pm 5\sqrt{66}j$ .

La función de transferencia del sistema de referencia es

$$G(s) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3250 & s + 80 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{s^2 + 80s + 3250}$$

Suponiendo que queremos un multiplicador de Control Directo (CD) unitario. Es decir,  $G(s)|_{s=0} = 1$ . Entonces,  $\alpha = 3250$  y así,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = B_m = B_p Q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3000 \end{bmatrix} Q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3250 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^* = 1.0833$$

Ahora, ¿Existirá  $\Theta^*$  tal que  $A_p + B_p \Theta^* = A_m$ ? La ecuación (3.2.32) implica que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^* & \Theta_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3250 & -80 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la respuesta es que sí existen tales  $\Theta_1^*$  y  $\Theta_2^*$  (el sistema es consistente).

Recordemos que la retroalimentación está dada por  $u(t) = \Theta(t)x_p + Q^*r$  con  $Q^* = 1.0833$  y la ley adaptativa es

$$\dot{\Theta}(t) = -B_p^T P e x_p^T, \quad (3.2.39)$$

donde P es la solución de la ecuación matricial de Lyapunov  $A_m^T P + P A_m = -Q_0 = -I$  de la cual podemos obtener el resultado usando **MATLAB** con la simple instrucción:  $P = \text{lyap}(A_m^*, \text{eye}(2))$ , la cual da como respuesta

$$P = \begin{bmatrix} 20.333 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0063 \end{bmatrix}.$$

El error está dado por  $e(t) = x_p(t) - x_m(t)$ .

Ahora, con todos los elementos anteriores, podemos hacer una simulación del sistema utilizando algún algoritmo numérico ya que es la forma más fácil de resolver la ecuación (3.2.39) la cual no es lineal. Por ejemplo, podemos utilizar **MATLAB** como se muestra a continuación.

## SIMULACION DEL PROBLEMA MASA-RESORTE CON MATLAB

Necesitamos dos archivos m para hacer la simulación usando MATLAB. El primer m-archivo es un archivo de texto y tiene la siguiente estructura:

```
% Archivo -----> Ejec_masa.m <-----
t0=0.0; tf=0.3;          % Tiempo inicial y final.
x0=[0.5;0.0;0.0;0.0;-1.0;0.0];    % Condicion inicial.
[t,x]=ode45('masa',t0,tf,x0);
xp1=x(:,1); xp2=x(:,2);
xm1=x(:,3); xm2=x(:,4);
th1=x(:,5); th2=x(:,6);
ep=xp1-xm1;
subplot(221)
plot(t,xm1)
title('Posicion de Referencia')
subplot(222)
plot(t,xp1)
title('Posicion de la Masa')
subplot(223)
plot(t,ep)
title('Error de la Posicion')
subplot(224)
plot(xp1,xp2)
title('Posicion VS Velocidad')
xlabel('xp1')
ylabel('xp2')
```

El segundo m-archivo es un archivo función el cual debe acompañar al archivo anterior

```
% Archivo -----> masa.m <-----
function xdot = masa(t,x)
Am = [0,1;-3250,-80]; Bm = [0;3250];    % Matrices de Referencia.
Ap = [0,1;-308,-1.33]; Bp = [0;3000];  % Matrices de la Planta.
P = [20.33,0.0002;0.0002,0.0063];      % Soln. de Am'*P + P*Am = - I.
xp = x(1:2); xm = x(3:4); th(5:6);
r = 1.0;                                % Entrada de Referencia.
Qs = 1.0833;                             % Valor de Q*.
e = (xp - xm);                           % Error.
u = th'*xp + Qs*r;                       % Control de Retroalimentacion.
xmdot = Am*xm + Bm*r;                   % Dinamica del sistema de Referencia.
xpdot = Ap*xp + Bp*u;                   % Dinamica de la Planta.
thdot = -Bp'*P*e*xp';                   % Ley Adaptativa para Ajustar el control.
xdot = [xpdot;xmdot;thdot'];            % Resultados.
```

Los resultados de la simulación se resumen en la Fig. 3.5

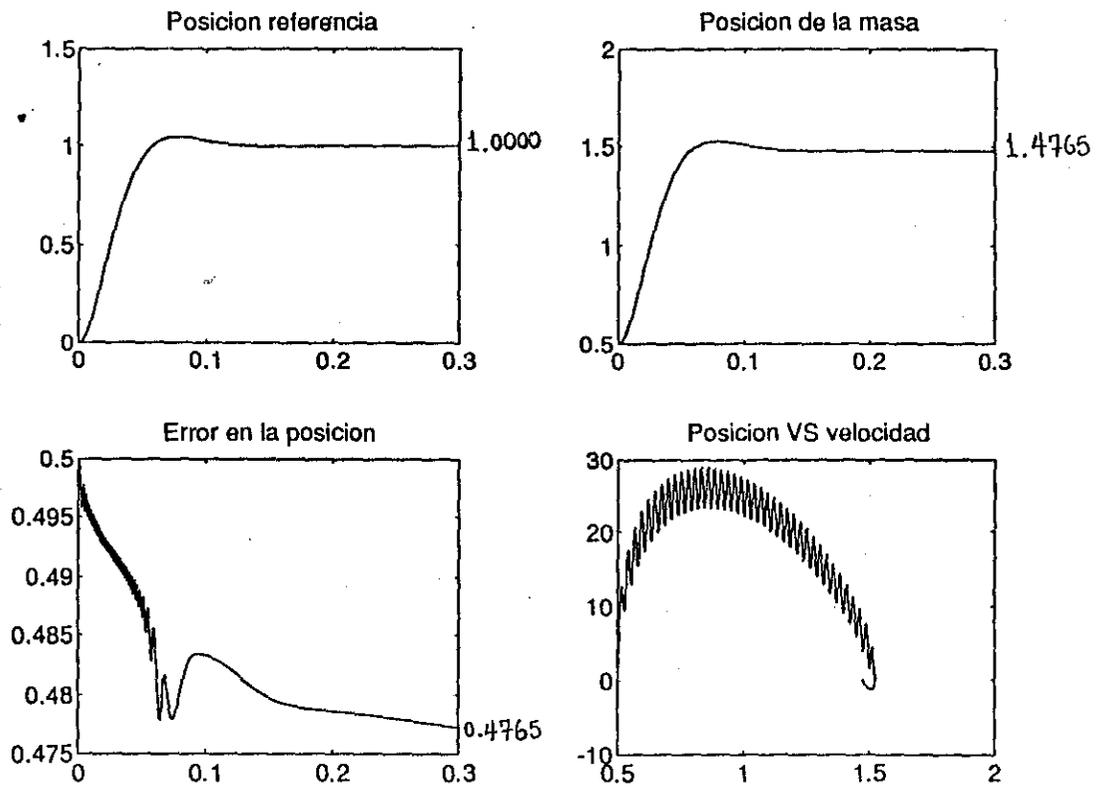


Fig. 3.5 Simulación del Problema Masa-Resorte.

**Caso III.  $A_p$  y  $B_p$  Desconocidas:**

El problema se complica considerablemente cuando  $B_p$  es desconocida puesto que ya no es posible elegir la matriz  $B_m$  del modelo de referencia de forma que  $B_m = B_p$ . Entonces el diseño del controlador debe fundarse sobre suposiciones más fuertes acerca de la estructura de  $B_p$ . En particular, se asume que existen matrices constantes  $\Theta^*$  y  $Q^*$  tales que

$$\begin{aligned} A_p + B_m \Theta^* &= A_m \\ B_p Q^* &= B_m \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Dos posibles estructuras para el controlador se muestran a continuación en la Fig. 3.6

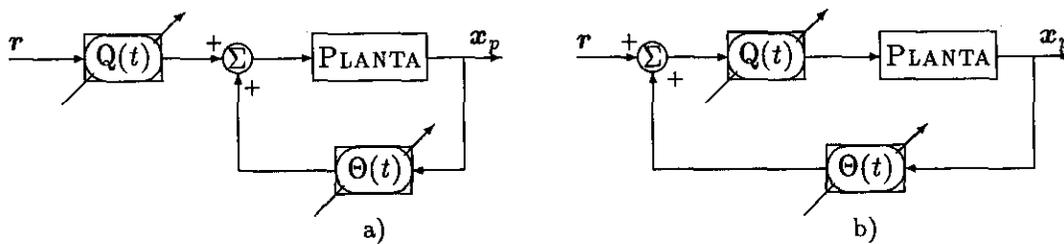


Fig. 3.6 Control Adaptativo cuando las Variables de Estado son Accesibles.

Analizando el sistema adaptativo de la Fig. 3.6 a), encontramos ecuaciones para el error que no son lineales en estos parámetros, así que no podemos aplicar ninguna de los métodos discutidos para generar leyes adaptativas estables. Por lo tanto, pondremos nuestra atención en la estructura mostrada en la Fig. 3.6 b). Los parámetros de la matriz multiplicadora  $Q(t)$  (alimentación hacia adelante) y de la matriz multiplicadora  $\Theta(t)$  (retroalimentación) son ajustados usando las señales disponibles del mismo sistema. Si  $Q(t) \equiv Q^*$  y  $\Theta(t) \equiv \Theta^*$ , se sigue que la matriz de transferencia de la planta junto con el controlador es idéntica a la del modelo de referencia. Como se muestra en seguida, las leyes adaptativas derivadas para este problema aseguran la acotación de los parámetros y los errores de las salidas convergen a cero únicamente cuando los valores iniciales de los parámetros  $Q(t_0)$  y  $\Theta(t_0)$  pertenecen a alguna vecindad acotada de los valores deseados de  $Q^*$  y  $\Theta^*$ , es decir, tenemos solo estabilidad local. Este resultado contrasta con el del Caso II donde el resultado obtenido es válido para condiciones iniciales arbitrarias.

Cuando el controlador tiene la estructura mostrada en la Fig. 3.6 b), la entrada de control puede expresarse como

$$\begin{aligned} u(t) &= Q(t) [r(t) + \Theta(t)x_p] \\ &= Q(t)\Theta(t)x_p(t) + Q(t)r(t) \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

la cual produce un sistema completo descrito por

$$\dot{x}_p = [A_p + B_p Q(t)\Theta(t)] x_p + B_p Q(t)r. \quad (3.2.42)$$

De la ecuación (3.2.42) y de la ecuación del modelo de referencia (3.2.29), obtenemos las ecuaciones para el error,

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= x_p - x_m = [A_p + B_p Q \Theta] x_p + B_p Q r - A_m x_m - B_m r \\
 &= A_m (x_p - x_m) + [A_p + B_p Q \Theta - A_m] x_p + [B_p Q - B_m] r \\
 &= A_m e + [A_p + B_p (Q^* + Q - Q^*) \Theta - A_m] x_p + B_p [Q - Q^*] r \\
 &= A_m e + B_m [\Theta - \Theta^*] x_p + B_m [Q^{*-1} Q - I] \Theta x_p + B_m [Q^{*-1} Q - I] r \quad (3.2.43) \\
 &= A_m e + B_m \Phi x_p + B_m [Q^{*-1} - Q^{-1}] Q \Theta x_p + B_m [Q^{*-1} - Q^{-1}] Q r \\
 &= A_m e + B_m \Phi x_p + B_m \Psi [Q \Theta x_p + Q r] \\
 &= A_m e + B_m \Phi x_p + B_m \Psi u
 \end{aligned}$$

donde,

$$\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(t) - \Theta^* \quad \text{y} \quad \Psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} Q^{*-1} - Q^{-1}(t). \quad (3.2.44)$$

Ahora, podemos elegir las leyes adaptativas para ajustar  $\Phi$  y  $\Psi$  como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi} &= -B_m^T P e x_p^T \\
 \dot{\Psi} &= -B_m^T P e u
 \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

donde,  $A_m^T P + P A_m = -Q_0 < 0$ . Esto asegura la acotación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales para  $e$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  lo cual puede ser mostrado como sigue:

Como la ecuación del error (3.2.43) tiene la misma forma que la ecuación (3.2.36), entonces podemos elegir la función candidata de Lyapunov como

$$V = e^T P e + \text{Tr} (\Phi^T \Phi + \Psi^T \Psi) \quad (3.2.46)$$

la cual tiene derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de las ecuaciones para  $e$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -e^T Q_0 e + 2e^T P B_m \Phi x_p + 2e^T P B_m \Psi u - \text{Tr} (2x_p e^T P B_m \Phi) - \text{Tr} (2u e^T P B_m \Psi) \\
 &= -e^T Q_0 e \leq 0.
 \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

El controlador adaptativo puede ser implementado en términos de  $\dot{\Phi}(t)$  y  $\dot{Q}(t)$  como:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\Theta} &= -B_m P e x_p^T \\
 \dot{Q} &= -Q B_m^T P e u^T Q
 \end{aligned} \right\} \text{Leyes Adaptativas para la Implementación.} \quad (3.2.48)$$

La existencia de la función de Lyapunov  $V$  en la ecuación (3.2.46), asegura la estabilidad global en el espacio  $\{e, \Phi, \Psi\}$ . Sin embargo,  $\Psi = [Q^{*-1} - Q^{-1}(t)]$ , y nuestro interés es en los parámetros de los errores

$$\tilde{Q}(t) \stackrel{\text{def}}{=} Q(t) - Q^*.$$

Por lo tanto, únicamente tendremos estabilidad uniforme local en vez de estabilidad uniforme completa en el espacio  $\{e, \Phi, \tilde{Q}\}$  debido a la existencia de tal función de Lyapunov ya que el último término no es radialmente acotado en este espacio.

**Ejemplo 3.2** Consideremos el sistema de dos tanques mostrado en la Fig. 3.7,

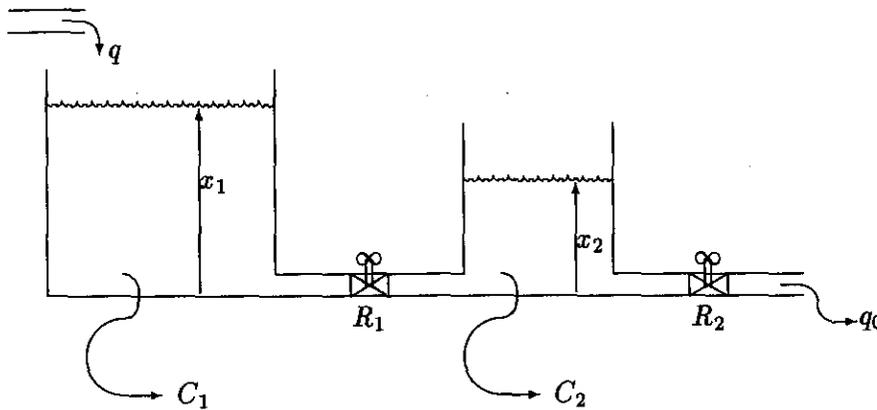


Fig. 3.7 Sistema de Dos Tanques.

O EQUIVALENTEMENTE

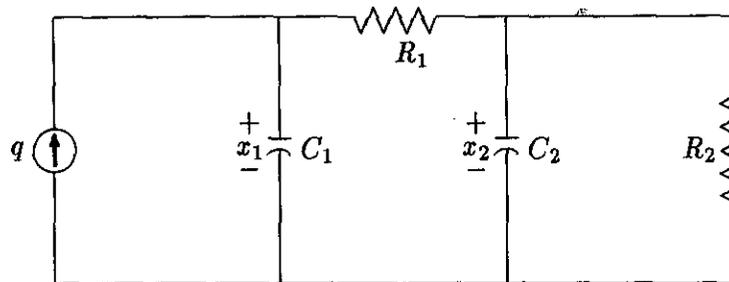


Fig. 3.8 Circuito Eléctrico Simple.

Aplicando la Ley de Corriente De Kirchhoff, obtenemos

$$(1) \quad q = C_1 \dot{x}_1 + \frac{x_1 - x_2}{R_1}$$

$$(2) \quad \frac{x_2 - x_1}{R_1} + C_2 \dot{x}_2 + q_0 = 0, \quad q_0 = \frac{x_2}{R_2}.$$

Por lo tanto, el modelo de la planta es lineal de la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_p^1 \\ \dot{x}_p^2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}_p} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{bmatrix}}_{A_p} \underbrace{\begin{bmatrix} x_p^1 \\ x_p^2 \end{bmatrix}}_{x_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_p} \underbrace{q}_u$$

la cual es la ecuación diferencial que describe al sistema de dos tanques Fig. 3.7 o al sistema eléctrico simple Fig. 3.8 que va a ser usada para propósitos adaptativos ya que este sistema se supone que tiene parámetros,  $R_1, R_2, C_1$  y  $C_2$ , desconocidos (es decir, los parámetros no se conocen con exactitud).

El modelo de referencia que va a ser utilizado requiere que los valores propios esten en  $-2, -2$  y para obtener su ecuación dinámica haremos uso de los resultados del Caso II o el Caso III establecidos anteriormente. Para el Caso II, vamos a suponer que conocemos exactamente las capacidades (capacitancias)  $C_1 = 2, C_2 = \frac{3}{2}$  con lo cual tenemos que  $B_p$  es conocida. Entonces, necesitamos

$$B_m = B_p Q^* \quad y \quad A_m = A_p + B_p \Theta^*$$

Para encontrar  $A_m$  y  $B_m$ , asumamos que  $R_1 = R_2 = 1$  (condición inicial). Por lo tanto,

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{para propósitos de simulación}).$$

Por un lado, usar estos valores asumidos para  $A_p$  y  $B_p$  para determinar  $A_m$ ,

$$A_m = A_p + B_p \Theta^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Theta_1^* & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Theta_2^* \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

cuyo polinomio característico es

$$\det(\lambda I - A_m) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta_1^* & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta_2^* \\ -\frac{2}{3} & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \Theta_1^* \right) \lambda + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \Theta_1^* - \frac{1}{3} \Theta_2^* \right),$$

y por otro lado,

$$\det(\lambda I - A_m) = \lambda_{des.} = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4,$$

con lo cual tenemos que  $\Theta_1^* = -5$  y  $\Theta_2^* = -4$ .

Por lo tanto,

$$A_m = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Pero, ¿cómo será  $B_m$ ? o ¿cuál será el valor de  $Q^*$ ?

Supongamos que nos gustaría un multiplicador CD igual a 1 en nuestro modelo de referencia. Ahora, necesitamos decidir cual de los niveles del líquido vamos a considerar como salida!

La matriz de transferencia del sistema de referencia es

$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m,$$

donde  $B_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}Q^* \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $(sI - A_m)^{-1} = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & s+3 \end{bmatrix}$ .

Si  $x_1$  es el nivel que se mide, entonces  $C_m = [1, 0]$  lo cual nos lleva a

$$G_{m_1}(s) = \frac{\frac{1}{2}Q^*(s+1)}{(s+2)^2}$$

Por lo tanto,  $Q^* = 8$  para un multiplicador CD igual a 1 ( $G_{m_1}(0) = 1$ ).

Si  $x_2$  es el nivel que se mide, entonces  $C_m = [0, 1]$  lo cual nos lleva a

$$G_{m_2}(s) = \frac{\frac{2}{3}(\frac{1}{2}Q^*)}{(s+2)^2}.$$

Por lo tanto,  $Q^* = 12$  para un multiplicador CD igual a 1 ( $G_{m_2}(0) = 1$ ).

Ahora, lo que falta es poner al corriente la ecuación de la ley adaptativa

$$\dot{\Theta}(t) = -B_p^T P e x_p^T, \quad \text{con } P = P^T > 0 \quad \text{y tal que } A_m^T P + P A_m = -Q_0.$$

Si  $Q_0 = I$ , entonces  $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1701 & 0.0156 \\ 0.0156 & 0.4766 \end{bmatrix}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t) &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p^1(t) & x_p^2(t) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} (p_{11}e_1 + p_{12}e_2) \begin{bmatrix} x_p^1(t) & x_p^2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_1(t) &= -\bar{e}(t)x_p^1(t), \\ \dot{\Theta}_2(t) &= -\bar{e}(t)x_p^2(t), \quad \text{con } \bar{e}(t) = \frac{1}{2}[p_{11}e_1(t) + p_{12}e_2(t)].\end{aligned}$$

### Implementación:

- (1) Vamos a partir de un modelo aproximado para la planta dado por

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} q,$$

- (2) con la retroalimentación

$$q = u(t) = [\Theta_1 \quad \Theta_2] \begin{bmatrix} x_p^1 \\ x_p^2 \end{bmatrix} + Q^*r(t).$$

- (3) donde  $Q^* = 8$  si  $y = x_1$  o  $Q^* = 12$  si  $y = x_2$ ,

- (4)  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  son ajustadas con la ley adaptativa

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_1(t) &= -\bar{e}(t)x_p^1(t), & \bar{e}(t) &= \frac{1}{2}[p_{11}e_1(t) + p_{12}e_2(t)] \\ \dot{\Theta}_2(t) &= -\bar{e}(t)x_p^2(t), & e_1(t) &= x_p^1 - x_m^1, \quad e_2(t) = x_p^2 - x_m^2.\end{aligned}$$

- (5) Además, el modelo de referencia es

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}Q^* \\ 0 \end{bmatrix} r$$

### Suposiciones:

- (i)  $Q_0 = I$ ,
- (ii)  $Q^*$
- (iii)  $A_m$  fué creada bajo la suposición de que  $R_1 = R_2 = 1$ .

Si los valores reales de  $R_1$  y  $R_2$  no son iguales a 1, entonces una podría no existir  $\Theta^*$  de forma que  $A_m = A_p + B_p\Theta^*$  se satisfaga. La razón de que  $A_m = A_p + B_p\Theta^*$  pudiera fallar es debida a que no podemos influenciar el renglón de abajo de  $A_p$  por la elección de  $\Theta^*$ . Sin embargo, aún cuando  $A_m$  no sea igual a  $A_p + B_p\Theta^*$  estaremos en la posibilidad de obtener resultados aceptables.

Si las  $R$ 's y  $C$ 's son desconocidas, entonces estamos en el Caso III.

Para obtener  $A_m$  y  $B_m$ , asumamos que la planta es tal que  $R_1 = R_2 = 1$ ,  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = \frac{3}{2}$  y la retroalimentación está dada por

$$u(t) = Q(t) [\Theta(t)x_p(t) + r(t)]$$

la cual nos lleva a que  $A_p + B_p Q^* \Theta^* = A_m$  y  $B_m = B_p Q^*$ .

Similarmente, como en el caso anterior supongamos que

$$Q^* \begin{bmatrix} \Theta_1^* & \Theta_2^* \end{bmatrix} = [-5, -4] \quad \Rightarrow \quad A_m = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Si } y = x_1, \text{ entonces } Q^* = 8 \quad \Rightarrow \quad [\Theta_1^*, \Theta_2^*] = [-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}]$$

$$\text{Si } y = x_2, \text{ entonces } Q^* = 12 \quad \Rightarrow \quad [\Theta_1^*, \Theta_2^*] = [-\frac{5}{12}, -\frac{1}{3}].$$

#### Implementación:

- i)  $\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u$ ,
- ii)  $u(t) = Q(t) [\Theta(t)x_p(t) + r(t)]$ ,
- iii)  $\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r$ ,
- iv) leyes adaptativas

$$\dot{\Theta} = -B_m^T P e x_p^T, \quad \dot{Q} = -Q B_m^T P e u^T Q.$$

Al igual que en el caso anterior, al hacer la simulación con MATLAB, obtenemos los resultados mostrados en Fig. 3.9 y Fig. 3.10 de las cuales podemos concluir varias cosas.

La siguiente figura muestra los resultados obtenidos haciendo la simulación cuando se conocen  $C_1$  y  $C_2$  (Caso II):

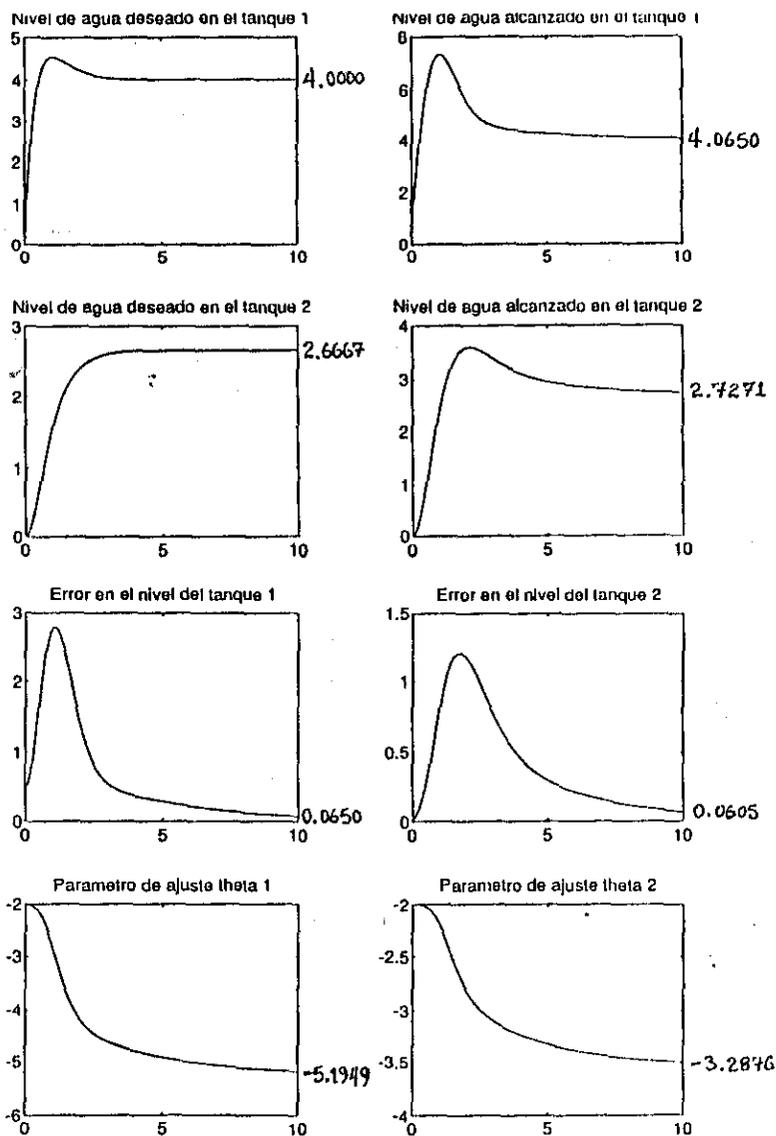


Fig. 3.9 Respuestas del Sistema de los Dos-Tanques, con  $B_p$  conocida y  $A_p$  desconocida.



La siguiente figura muestra los resultados obtenidos haciendo la simulación cuando se desconocen todos los parámetros (Caso III):

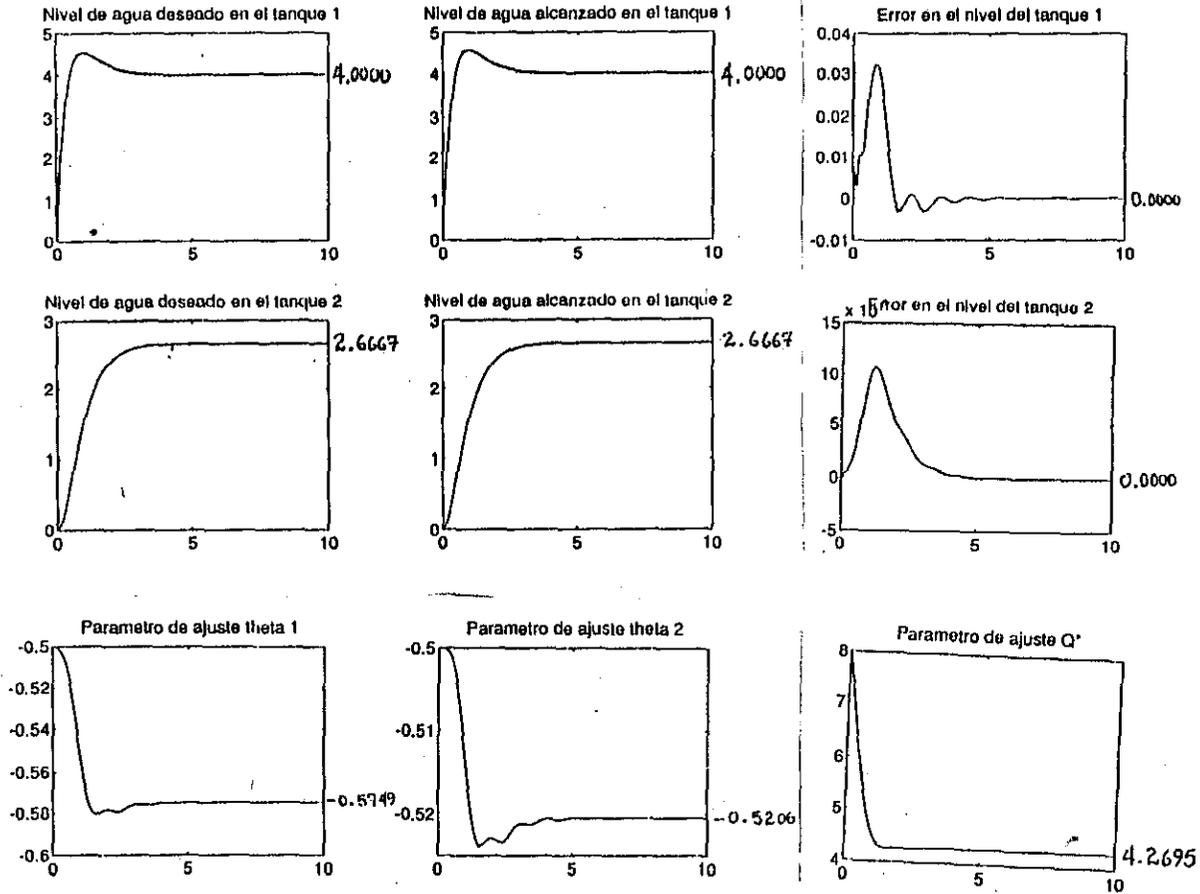


Fig. 3.10 Respuestas del Sistema de los Dos-Tanques, con  $A_p$  y  $B_p$  desconocidas.



## Capítulo 4

# Control Adaptativo Ideal

Desde que el término *control adaptativo* fue introducido a principios de los años 60's, el objetivo de teóricos y diseñadores ha sido controlar sistemas dinámicos cuyas características no son completamente conocidas. Este capítulo, el cual se dedica por completo a la discusión del problema de control, ocupa una parte importante del trabajo.

Como fue mencionado en la Sección 1.2, para mantener el problema analíticamente manipulable, su alcance tiene que ser restringido principalmente a plantas LTI con parámetros desconocidos. Sabemos de la Teoría de Sistemas Lineales (Sección 1.1) que cuando los parámetros de tales sistemas son conocidos, la base teórica del control usando solo datos de entrada-salida se funda en el Principio de Separación. Por otro lado, cuando los parámetros del sistema son desconocidos es posible reconstruir el estado del sistema de datos de entrada-salida usando observadores adaptativos estables. El tema acerca del diseño de observadores adaptativos es interesante y de resultados novedosos, pero no lo vamos a estudiar en este trabajo por dos razones: está fuera de nuestro objetivo y además no existe una equivalencia del principio de separación en el contexto del control adaptativo.

En el Capítulo 3 fue posible tener control adaptativo estable ya que el estado completo era accesible. En los primeros días del control adaptativo, se pensaba que cuando el estado no era accesible, podía ser posible combinar los resultados del diseño de observadores adaptativos con los resultados del Capítulo 3, pero desafortunadamente esto no es posible o por lo menos es una tarea que no es fácil de hacer. La razón es que debemos mantener todas las señales acotadas en el sistema de lazo-cerrado y la dificultad principal está en la suposición, hecha en el diseño de observadores adaptativos, de que la entrada y la salida de la planta observada son uniformemente acotadas siendo que esta suposición no es válida en el problema de control ya que precisamente este es el problema de estabilidad del sistema retroalimentado completo con el que nos tenemos que enfrentar. Como consecuencia, el período 1975-1980 fue testigo de una intensa actividad en el área y finalmente en 1980 cuando el problema fue resuelto, este representó uno de los pasos más importantes en la evolución del campo del control adaptativo.

El enfoque con el que trataremos de abordar la solución para el problema de control consiste de dos pasos:

- 1) **La Parte Algebraica.** Es el problema formulado de tal forma que tenga solución cuando todos los parámetros ajustados sean constantes. Es decir, tanto la elección del modelo de referencia como la estructura del controlador es importante para asegurar la existencia de una solución.
- 2) **La Parte Analítica.** Seleccionar los esquemas de ajuste de los parámetros tal que den como resultado soluciones globalmente acotadas y/o nos lleven hacia los valores deseados.

El problema del control adaptativo para el caso donde el *grado relativo*  $n^*$  de la planta,

$$n^* = (\# \text{ de polos}) - (\# \text{ de ceros}) \text{ de la función de transferencia de la planta}$$

es la unidad, fue resuelto y publicado por varios autores en los 70's. En la Sección 4.2, trataremos con detalle la solución más simple y elegante. En este caso, la motivación para elegir la estructura del controlador así como las leyes adaptativas es relativamente transparente y se basa en la positividad real de la función de transferencia del modelo de referencia. En contraste a este, el problema general del control adaptativo de una planta con  $n^* \geq 2$  es considerablemente más complejo. Por lo tanto, no es sorprendente que por varios años después de que se dió solución al problema con  $n^* = 1$ , este caso general permaneciera como un problema abierto. Para una solución completa para el caso general se necesitan algunas modificaciones en la estructura del controlador así como ciertos cambios en la ley adaptativa y esto es lo que trataremos de establecer de una manera más o menos clara (pero resumida) en la Sección 4.3.

## 4.1 Regulación y Rastreo

El problema de controlar una planta P con parámetros desconocidos puede dividirse convenientemente en dos tipos de problemas: Regulación y Rastreo.

**Regulación.** Sea P una planta LTI representada por la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_p u \\ y_p &= h_p^T x_p \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

donde  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es la entrada,  $y_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es la salida y  $x_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el vector de estado  $n$ -dimensional de la planta. Sea la terna

$$\{h_p^T, A_p, b_p\} \text{ observable y controlable} \tag{4.1.2}$$

con elementos desconocidos. Usando solo datos de entrada-salida  $u(t)$  y  $y_p(t)$ , determinar un esquema de control  $u(t)$ , sin diferenciadores, tal que estabilice al sistema completo alrededor de un punto de operación fijo.

**Rastreo.** Si  $y_m(t)$  es una señal de salida uniformemente acotada, determinar una entrada acotada  $u(t)$ , usando un controlador sin diferenciadores tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = 0. \quad (4.1.3)$$

Esto es, diseñar una ley de control tal que la salida de la planta siga asintóticamente a una salida deseada.

El problema de regulación, demanda una solución no trivial únicamente cuando la planta es inestable. Por lo tanto, la inestabilidad de la matriz  $A_p$  puede también tomarse como una suposición al establecer el problema. Además, podemos observar que aún si la matriz  $A_p$  es estable, el sistema completo puede no serlo mientras la adaptación progresa. Por lo tanto, los dos problemas son equivalentes si se asume que el diseñador no se da por enterado de la estabilidad o inestabilidad de  $A_p$  al empezar el proceso adaptativo. Pero, si el diseñador le da importancia a que  $A_p$  es estable, la naturaleza del problema cambia de manera significativa. Para el problema de regulación, se sabe que existe un controlador estabilizante cuando los parámetros de la planta son conocidos. En contraste, esto no es evidente inmediatamente cuando se quiere alcanzar un rastreo perfecto. Por lo tanto, el problema de rastreo implica restricciones sobre el modelo de referencia que genera a  $y_m(t)$ . Es decir, la clase de funciones  $y_m(t)$  para las cuales la condición (4.1.3) se satisface debe de ser especificado para que el problema de rastreo sea bien desarrollado. Para hacer a este problema analíticamente manipulable, asumiremos que la señal deseada  $y_m$  es la salida de un modelo de referencia que tiene función de transferencia  $W_m(s)$  cuya entrada  $r$  es una función uniformemente acotada continua por partes. Así, el problema se reduce a determinar condiciones sobre  $W_m(s)$  tal que sea posible un rastreo perfecto. Es bien sabido, de la Teoría de Sistemas Lineales, que para alcanzar un rastreo perfecto, el grado relativo del modelo de referencia debe ser mayor o igual que el de la planta. Por lo tanto, el problema de rastreo puede ser establecido en términos del problema de Control Adaptado a un Modelo de Referencia (CAMR).

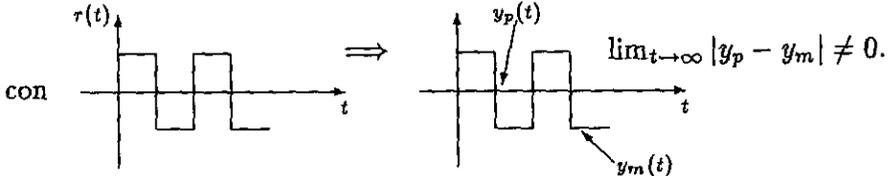
#### Restricciones Principales:

- 1) Grado Relativo del Modelo de Referencia  $n_m^* \geq n^*$  Grado Relativo de la Planta. A la condición  $n_m^* \geq n^*$  se le denomina *requerimiento de fase mínima*. Si no se tiene el requerimiento de fase mínima, entonces  $y_p(t) \not\rightarrow y_m(t)$  asintóticamente. La razón física detrás de esto se ilustra con el Ejemplo 4.1, descrito a continuación.

**Ejemplo 4.1** Supongamos que

$$y_p(t) = \frac{1}{s+1} r(t)$$

$$y_m(t) = (1)r(t)$$

con 

2) El sistema CAMR tiene

- \* función de transferencia  $W_m(s)$  asintóticamente estable,
- \* una pareja entrada-salida  $\{r(\cdot), y_m(\cdot)\}$ ,
- \* entrada de control  $r$  uniformemente acotada continua por partes.

3) La planta LTI con parámetros desconocidos es descrita por la ecuación (4.1.1),

$$\dot{x}_p = A_p x_p + b_p u$$

$$y_p = h_p^T x_p$$

con  $u \in \mathbb{R}^1$ ,  $y_p \in \mathbb{R}^1$ ,  $x_p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\{h_p^T, A_p, b_p\}$  observable y controlable y función de transferencia

$$W_p(s) \stackrel{\text{def}}{=} h_p^T (sI - A_p)^{-1} b_p = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (4.1.4)$$

donde

- i) el signo del multiplicador de la frecuencia más alta,  $k_p$ , es conocido,
- ii) una cota superior sobre el orden  $n$  es conocida,
- iii) el grado relativo  $n^*$  de  $W_p(s)$  es conocido, y
- iv) los ceros del polinomio mónico  $Z_p(s)$  están en  $\mathbb{C}^-$ , el lado izquierdo del plano complejo.

Con estas suposiciones, el objetivo es determinar un controlador sin diferenciadores que genere una entrada de control  $u$  acotada, tal que todas las señales del sistema de lazo cerrado se mantengan acotadas y  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = 0$ .

Cuando  $r(t) \equiv 0$  para toda  $t \geq t_0$  y las condiciones iniciales del modelo de referencia también son cero,  $y_m(t) \equiv 0$ . En este caso, el problema de rastreo es un caso especial del problema de regulación. Por lo tanto, los métodos desarrollados para el primero son aplicables también al segundo.

Las condiciones *ii*) y *iii*) de la suposición 3 son relevantes para la parte algebraica y aseguran la existencia de la solución. Las condiciones *i*) y *iv*) son usadas por la parte analítica y requeridas para generar leyes adaptativas estables.

Las implicaciones de estas suposiciones se harán transparentes poco a poco durante la discusión de la solución para el problema CAMR donde consideraremos plantas con  $n^* = 1$  y  $n^* \geq 2$ . La razón por la cual se consideran únicamente estos dos casos es que si la planta es de grado relativo cero,  $n^* = 0$ , entonces podemos transformarla introduciendo un *filtro débil*. Es decir, un filtro de baja capacidad.

Si la planta está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= h^T x + du\end{aligned}$$

entonces,  $y(s) = G(s)u(s)$ , donde  $G(s) = h^T(sI - A)^{-1}b + d$  es su función de transferencia. El truco es reemplazar la entrada original  $u$  con una entrada filtrada:

$$u = \frac{1}{s+a}v$$

lo cual da como resultado

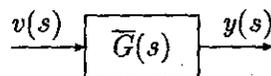
$$y(s) = G(s)\frac{1}{s+a}v(s).$$

**Ejemplo 4.2** Sea  $G(s) = \frac{s+2}{(s+4)(s+5)} + 6 = \frac{6s^2 + 55s + 122}{s^2 + 9s + 20}$ . Así,  $n^* = 0$ .

Consideremos el filtro de baja capacidad,  $u = \frac{1}{s+a}v$ . Entonces,

$$\begin{aligned}y(s) &= G(s)u(s) = G(s)\left(\frac{1}{s+a}\right)v(s) \\ &= \left[\frac{s+2}{(s+4)(s+5)(s+a)} + \frac{6}{s+a}\right]v(s) \\ &= \left[\frac{(s+2) + 6(s+4)(s+5)}{(s+4)(s+5)(s+a)}\right]v(s) \\ &= \bar{G}(s)v(s)\end{aligned}$$

donde  $\bar{G}(s)$  tiene  $n^* = 1$ .



Por lo tanto, únicamente consideraremos plantas con  $n^* = 1$ , el caso fácil de tratar y plantas con  $n^* \geq 2$ , el caso de mayor grado de dificultad.

## 4.2 Plantas con Grado Relativo Unitario

Sea  $P$  la planta que va a ser controlada descrita por la ecuación (4.1.1) con función de transferencia  $W_p(s)$  dada por la ecuación (4.1.4), donde  $Z_p(s)$  y  $R_p(s)$  son polinomios mónicos de orden  $n-1$  y  $n$  respectivamente. De la suposición en la ecuación (4.1.2) también se sigue que  $Z_p(s)$  y  $R_p(s)$  son polinomios coprimos (no tienen factores en común). El modelo de referencia se supone de orden  $n$  con función de transferencia ERP,

$$W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (4.2.1)$$

con  $Z_m(s)$  y  $R_m(s)$  polinomios mónicos de Hurwitz (raíces en el lado izquierdo del plano complejo,  $\mathbb{C}^-$ ) de grados  $n-1$  y  $n$  respectivamente y  $k_m$  positiva. El objetivo, como fue discutido en la Sección 4.1, es determinar la entrada  $u$  para la planta de tal forma que su salida  $y_p(t)$  se acerque asintóticamente a  $y_m(t)$ .

La solución más simple para este problema consiste de un *controlador en cascada* de la forma

$$u(t) = W_c(s)r(t) \quad (4.2.2)$$

donde

$$W_c(s) = \frac{k_m}{k_p} \cdot \frac{Z_m(s)R_p(s)}{Z_p(s)R_m(s)} \quad (4.2.3)$$

y la función de transferencia propia que resulta es idéntica a la del modelo de referencia. Esta solución es posible únicamente cuando  $R_p(s)$  es un polinomio de Hurwitz, de tal forma que cualquier cancelación de polos y ceros ocurre en  $\mathbb{C}^-$ . Sin embargo, esta solución sufre de las inconveniencias de un control de lazoabierto. Por lo tanto, una estructura para el controlador con retroalimentación, la cual es demandada cuando  $R_p(s)$  no es Hurwitz, se tiene que usar en un diseño práctico. Consideraremos tres casos específicos simples donde la estructura del controlador y las leyes adaptativas pueden determinarse de forma clara.

Estos casos corresponden a diferente información primaria disponible acerca de la planta:

- i) la función de transferencia de la planta es conocida excepto el multiplicador de la frecuencia más alta  $k_p$  y  $Z_p(s) = Z_m(s)$ ,  $R_p(s) = R_m(s)$ .
- ii) el polinomio denominador de la planta  $R_p(s)$  es conocido,  $R_p(s) = R_m(s)$ , el polinomio numerador  $k_p Z_p(s)$  es desconocido, pero  $Z_p(s)$  es Hurwitz.
- iii) el polinomio mónico  $Z_p(s)$  es Hurwitz y conocido,  $Z_p(s) = Z_m(s)$ , mientras que  $k_p$  y  $R_p(s)$  son desconocidos.

Las leyes adaptativas para estos casos especiales así como el caso general (todo sea desconocido) para  $n^* = 1$ , que estudiaremos en la Subsección 4.2.4, se derivan del lema siguiente.

**Lema 4.2.1** Consideremos un sistema dinámico descrito por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b\phi^T(t)w(t), & y(t) &= h^T x(t) \\ z_1(t) &= ky(t) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

donde  $(A, b)$  es estabilizable,  $(h^T, A)$  es detectable y  $h^T(sI - A)^{-1}b \stackrel{\text{def}}{=} H(s)$  es una función de transferencia ERP. Además, sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  un vector de parámetros ajustables,  $k$  una constante desconocida con signo conocido,  $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $z_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  funciones del tiempo que pueden medirse.

Si  $\phi(t)$  es ajustado por

$$\dot{\phi}(t) = -\text{sgn}(k)z_1(t)w(t), \quad (4.2.5)$$

entonces el estado de equilibrio  $(x = 0, \phi = 0)$  de las ecuaciones (4.2.4) y (4.2.5) es uniformemente estable globalmente.

#### Observaciones:

- 1) La estabilidad no es asintótica.
- 2)  $\phi^T w$  es como una entrada en el sistema ERP,  $H(s)$ .
- 3)  $z_1$  es una versión a escala de la salida del sistema

$$\begin{cases} |k| < 1 \\ |k| > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} |z_1| < |y| \\ |z_1| > |y|. \end{cases}$$

- 4) se debe parametrizar el sistema de lazo-cerrado en una parte ERP la cual tiene entrada de la forma  $\phi^T w$  ( $H(s)$  puede no representar a la función de transferencia del sistema original o puede que no tengamos un conocimiento explícito de  $H(s)$ ).

**Demostración:** Dado que  $H(s) = h^T(sI - A)^{-1}b$  es ERP, se sigue del Lema 2.3.1 que dada una matriz  $Q = Q^T > 0$ , existe una matriz  $P = P^T > 0$  tal que

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= -Q \\ P b &= h. \end{aligned}$$

Sea  $V$  una función definida positiva de la forma

$$V = x^T P x + \frac{1}{|k|} \phi^T \phi.$$

La derivada  $\dot{V} = \frac{d}{dt}V$ , evaluada a lo largo de las soluciones de las ecuaciones (4.2.4) y (4.2.5), lleva a la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + \frac{2}{|k|} \phi^T \dot{\phi} = (Ax + b\phi^T w)^T P x + x^T P (Ax + b\phi^T w) + \frac{2}{|k|} \phi^T \dot{\phi} \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x + w^T \phi b^T P x + x^T P b \phi^T w + \frac{2}{|k|} \phi^T \dot{\phi} \\ &= -x^T Q x + \underbrace{2x^T P b}_{\text{escalar } y} \phi^T w + 2 \frac{1}{|k|} \phi^T \dot{\phi} = -x^T Q x + 2 \left[ y \phi^T w + \frac{1}{|k|} \phi^T \dot{\phi} \right] \\ &= -x^T Q x + 2 \phi^T \left[ y w + \frac{1}{|k|} \dot{\phi} \right]\end{aligned}$$

Poniendo  $y w + \frac{1}{|k|} \dot{\phi} = 0$ , tenemos que  $\dot{\phi} = -|k| y w = -\text{sgn}(k) \underbrace{ky}_{z_1} w$  y así

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -\text{sgn}(k) z_1 w, \\ \dot{V} &= -x^T Q x \leq 0\end{aligned}$$

y el origen de  $(x, \phi)$  es globalmente estable. ■

Este lema únicamente requiere que  $(A, b)$  sea estabilizable y que  $(h^T, A)$  sea detectable. Esto implica que los modos no controlables y no observables son estables. Por lo tanto, si el sistema (4.2.4) es de orden  $n$ , la función de transferencia  $H(s)$  es de orden  $\leq n$ . El Lema 2.3.1, el cual asegura la existencia de una matriz  $P$ , es necesario en este caso. Sin embargo, si  $(h^T, A, b)$  es controlable y observable, el Lema 2.3.2 (LKY) puede aplicarse. En los tres casos que vamos a discutir, el Lema 2.3.2 es el adecuado para el Caso (i) mientras que el Lema 2.3.3 es necesario en los últimos dos casos.

#### 4.2.1 Caso (i) $k_p$ Desconocida

La función de transferencia de la planta difiere de la función de transferencia del modelo de referencia únicamente en su multiplicador de la frecuencia más alta. Un parámetro ajustable  $k(t)$  se conecta en serie con la planta (ver Fig. 4.1) y la entrada de control para la planta se elige como

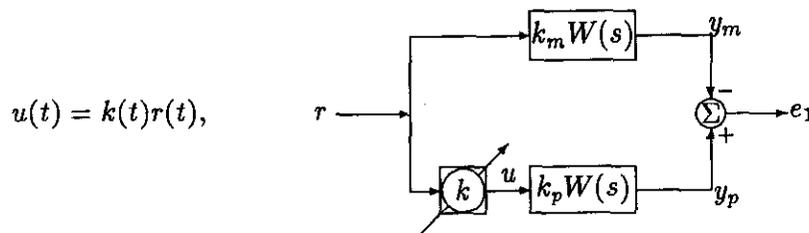


Fig. 4.1  $k_p$  Desconocido.

Si  $W(s) = \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$ , entonces las salidas de la planta y el modelo de referencia pueden expresarse como

$$\begin{aligned} y_p(t) &= W(s)k_p k(t)r(t) \\ y_m(t) &= W(s)k_m r(t). \end{aligned}$$

**Nota:** Podemos mezclar frecuencia y tiempo si consideramos a  $s$  como un operador diferencial,  $s = \frac{d}{dt}$ . Por ejemplo, sea

$$y(t) = \frac{1}{s+5}u(t)$$

entonces,  $(s+5)y(t) = u(t)$  o  $\dot{y} + 5y = u$ . Con esta nota también aclaramos la introducción del controlador en cascada (4.2.2).

Definiendo el error entre las salidas de la planta y modelo de referencia como  $e_1$  y el error de los parámetros como  $\psi$ , tenemos

$$e_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} y_p(t) - y_m(t) \quad \text{y} \quad \psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} k(t) - \frac{k_m}{k_p}.$$

Entonces, la ecuación del error puede establecerse como

$$\begin{aligned} e_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} y_p(t) - y_m(t) &= W(s)k_p k(t)r(t) - W(s)k_m r(t) \\ &= W(s)k_p \left[ k(t) - \frac{k_m}{k_p} \right] r(t) \\ &= W(s)k_p \psi(t)r(t). \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

¿Como podemos aplicar aquí el Lema 4.2.1? Para dar respuesta a esta pregunta, hecharemos un vistazo a la ecuación del error (4.2.6),

$$e_1 = k_p \overbrace{W(s)\psi(t)r(t)}^{y_e}$$

↑ sea este término igual a  $y_1$  en el lema.

Con  $y_e(t) = W(s)\psi(t)r(t)$ , sea  $e(t)$  el estado de este sistema el cual corresponde a  $x(t)$  en el lema. Dado que  $W_m(s)$  es ERP y  $k_m$  es positiva,  $W(s)$  también es ERP. Supongamos que  $W(s) = \mathbf{h}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ , entonces

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \mathbf{A}e(t) + \mathbf{b}\psi(t)r(t), \quad y_e(t) = \mathbf{h}^T e(t) \\ e_1(t) &= k_p y_e(t). \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Ahora sí, el Lema 4.2.1 implica la ley adaptativa:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt} \left[ k(t) - \frac{k_m}{k_p} \right] = \dot{k}(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) r(t), \quad (4.2.8)$$

donde  $e_1(t) = y_p(t) - y_m(t)$ . Se sigue del mismo lema que el estado del sistema dinámico  $e(t)$  descrito en la ecuación (4.2.7) y  $\psi(t)$  de la ecuación (4.2.8) son acotados para toda  $t \geq t_0$ . Además, como  $r(t)$  es acotada uniformemente, se sigue de la ecuación (4.2.7) que  $\dot{e}$  es acotada. Por lo tanto, del Corolario del Lema 2.4.1, tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = 0$ .

### Implementación:

Modelo de la Planta:	$y_p = k_p W(s) u(t)$
Modelo de Referencia:	$y_m = k_m W(s) r(t)$
Entrada de la Planta:	$u(t) = k(t) r(t)$
Ecuación por Ajustar:	$\dot{k}(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) r(t)$ .

### 4.2.2 Caso (ii) Ceros Desconocidos

La planta que va a ser controlada es descrita por la ecuación diferencial (4.1.1) y tiene una función de transferencia  $W(s)$  dada por la ecuación (4.1.4). El polinomio denominador  $R_p(s)$  es conocido y Hurwitz, mientras que el polinomio numerador  $k_p Z_p(s)$  es desconocido pero tiene que ser Hurwitz. Se elige un modelo de referencia tal que  $R_m(s) = R_p(s)$ , esto es, los polos del modelo son los mismos que los de la planta. Esto implica que

$$W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_p(s)} \text{ es ERP.}$$

El objetivo es hacer idéntica  $W_p(s)$ , al ser controlada, a  $W_m(s)$ . Pero, esto nos lleva a cambiar los ceros de  $W_p(s)$ .

Recordemos que la retroalimentación de estado o de salida no cambia los ceros del sistema.

**Ejemplo 4.2** Breve discusión acerca de los ceros de un sistema dinámico.

Dado el sistema de entrada simple, salida simple

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= h^T x, \end{aligned}$$

$z$  es un cero de  $G(s) = h^T (sI - A)^{-1} b$  si y solo si

$$\rho \begin{bmatrix} zI - A & b \\ -h^T & 0 \end{bmatrix} < n + \min\{\dim y, \dim u\} = n + 1$$

([7] Chen, Apéndice H).

Si introducimos una retroalimentación de estado  $u = -Kx + v$ , donde  $K = k^T$  es un vector  $1 \times n$ , tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - bK)x + bv \\ y &= h^T x.\end{aligned}$$

Los ceros del sistema de lazo-cerrado están condicionados por el rango de

$$\begin{bmatrix} zI - A + bK & b \\ -h^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Mediante una operación elemental (sustraer  $2^{\text{nda}}$  columna  $\cdot K$  de la  $1^{\text{ra}}$  columna) la cual es una operación que no cambia el rango, tenemos

$$\begin{bmatrix} zI - A & b \\ -h^T & 0 \end{bmatrix}$$

la misma matriz que en el caso de lazo-abierto.

Por otro lado, si introducimos una retroalimentación con la salida,  $u = -\tilde{K}y + v$ , entonces  $u = -\underbrace{\tilde{K}h^T}_{\tilde{K}h^T}x + v$  y así

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - b\tilde{K}h^T)x + bv \\ y &= h^T x\end{aligned}$$

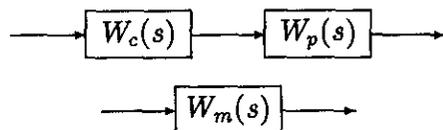
Al igual que en el caso anterior, al obtener los ceros del sistema de lazo-cerrado, se tiene

$$\begin{bmatrix} zI - A + b\tilde{K}h^T & b \\ -h^T & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} zI - A & b \\ -h^T & 0 \end{bmatrix}$$

¡matrices del mismo rango!

**Conclusión:** Los ceros de un sistema son invariantes a la retroalimentación de estado o de salida.

Por lo tanto, en nuestro problema utilizaremos un controlador en forma de un prefiltro conectado en serie a la planta (controlador en cascada)  $W_c(s)$  para modificar los ceros de la planta.



y el objetivo se convierte en encontrar una parametrización del prefiltro de tal manera que su función de transferencia pueda igualarse a

$$W_c^*(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_m Z_m(s)}{k_p Z_p(s)} \quad (4.2.9)$$

para alguna elección conveniente de los parámetros de control.

#### Observaciones:

- 1) No hay cancelación en la ecuación (4.2.9) ya que los ceros de  $Z_p(s)$  están en  $\mathbb{C}^-$ , mientras que los ceros de  $Z_m(s)$ , los cuales se pueden asignar libremente diferentes a los ceros de  $Z_p(s)$ , también están en  $\mathbb{C}^-$ , por ERP.
- 2) La planta junto con el controlador tienen una función de transferencia asintóticamente estable con  $n$  polos, mientras que  $n - 1$  ceros de esta función de transferencia son cancelados en  $\mathbb{C}^-$  por los  $n - 1$  polos de  $W_c^*(s)$ .
- 3) El sistema completo es de dimensión  $2n - 1$ , del cual  $n - 1$  modos son no observables pero estables.

#### Requisitos para el Controlador:

i) De entre las muchas realizaciones que a partir de la función de transferencia del controlador,  $W_c^*(s)$ , pueden obtenerse, la elegida debe de permitir el diseño de leyes adaptativas estables.

ii) El controlador debe de ser sin diferenciadores,

$$(\{\text{grado del numerador}\} \leq \{\text{grado del denominador}\}).$$

iii) El controlador debe tener ceros predeterminados,

$$(W_c^*(s) \implies \text{los ceros son las raíces de } Z_m(s)).$$

iv) El controlador debe ser capaz de asignar la posición de los polos en cualquier parte, de hecho en  $\mathbb{C}^-$ ,

$$(W_c^*(s) \implies \text{los polos son las raíces de } Z_p(s)).$$

El requerimiento iv) implica que el controlador debe contener parámetros ajustables y el requerimiento iii) implica poder poner los parámetros ajustables en un lazo de retroalimentación (este no cambia los ceros del controlador). Por lo tanto, el controlador elegido es como el que se muestra en la Fig. 4.2.

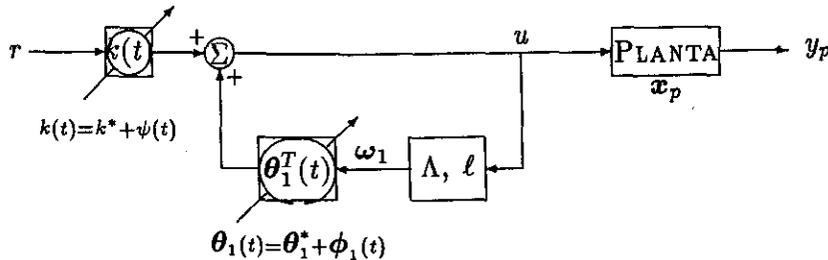


Fig. 4.2 Controlador Adaptativo con Ceros Desconocidos.

El controlador adaptativo consiste de un parámetro simple  $k(t)$  conectado en serie con el lazo de retroalimentación que contiene a un multiplicador unitario en la trayectoria de alimentación y un sistema dinámico en el lazo de retroalimentación. Por lo tanto, la ecuación diferencial asociada con el controlador está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda \omega_1(t) + \ell u(t) \\ u(t) &= \theta_1^T(t) \omega_1(t) + k(t)r(t) \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

donde  $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  es una matriz asintóticamente estable,  $\det(sI - \Lambda) = \lambda(s)$  y  $(\Lambda, \ell)$  es controlable.

**Parte Algebraica** (¿Existirá una solución para valores constantes de los parámetros?).

Supongamos que  $k(t) \equiv k_c$  y  $\theta(t) = \theta_{1c}$ , donde  $k_c \in \mathbb{R}$  y  $\theta_{1c} \in \mathbb{R}^{n-1}$  son constantes.

Sea  $\theta_{1c}^T (sI - \Lambda)^{-1} \ell = \frac{C(s)}{\lambda(s)}$ , entonces

$$W_c(s) = k_c \left[ \frac{1}{1 - \theta_{1c}^T (sI - \Lambda)^{-1} \ell} \right] = k_c \left[ \frac{1}{1 - \frac{C(s)}{\lambda(s)}} \right].$$

Por lo tanto, la función de transferencia del controlador es

$$W_c(s) = k_c \frac{\lambda(s)}{\lambda(s) - C(s)}. \tag{4.2.11}$$

Queremos que  $W_c(s) \equiv W_c^*(s)$ , así que tenemos que elegir  $\Lambda$  tal que  $\lambda(s) = Z_m(s)$  y  $k_c = \frac{k_m}{k_p}$ . Como el polinomio  $C(s)$  depende del vector  $\theta_{1c}$ , se debe elegir un valor específico  $\theta_1^*$  de  $\theta_{1c}$  tal que el valor correspondiente de  $C(s)$  sea  $C^*(s)$ , donde  $C^*(s) = Z_m(s) - Z_p(s)$ . Si  $k^* = \frac{k_m}{k_p}$ , entonces eligiendo  $k_c = k^*$  y  $\theta_{1c} = \theta^*$ , la función de transferencia deseada (4.2.9) puede realizarse y por lo tanto, existe un vector constante  $\bar{\theta}_1^{*T}$  definido como  $\bar{\theta}_1^{*T} = [k^*, \theta_1^{*T}]$ .

**Parte Analítica (Ajuste de  $k(t)$  y  $\theta_1(t)$ ):**

El análisis anterior muestra la existencia del vector constante  $\bar{\theta}_1^{*T}$ , tal que el objetivo del problema de control puede ser alcanzado cuando los parámetros de la planta son conocidos. Con estos valores para los parámetros, consideremos el modelo de referencia mostrado en la Fig. 4.3 donde las señales correspondientes a  $\omega_1(t)$  y  $x_p(t)$  son dados por  $\omega_1^*(t)$  y  $x_p^*(t)$  respectivamente. En el caso adaptativo, los parámetros  $k_c$  y  $\theta_{1c}$  son remplazados por funciones del tiempo  $k(t)$  y  $\theta_1(t)$  y el objetivo es determinar las reglas a través de las cuales estas son ajustadas de forma que el sistema resultante sea estable.

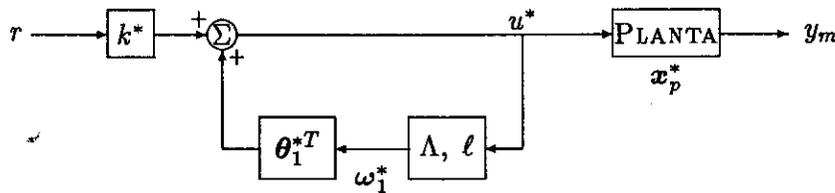


Fig. 4.3 Representación No mínima de la Planta con Ceros Desconocidos.

Definiendo

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} k(t) - k^*, \quad \phi_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_1(t) - \theta_1^*, \quad \bar{\theta}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} [k(t), \theta_1^T(t)]^T,$$

$$\bar{\phi}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\psi(t), \phi_1^T(t)]^T \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} [r(t), \omega_1^T(t)]^T,$$

la representación del sistema completo y el modelo de referencia es

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_p u \\ \dot{\omega}_1 &= \Lambda \omega_1 + \ell u \\ u &= \theta_1^{*T} \omega_1 + k r + (\theta_1^{*T} - \theta_1^T) \omega_1 + (k^* - k) r \\ &= (\theta_1^T - \theta_1^{*T}) \omega_1 + (k - k^*) r + \theta_1^{*T} \omega_1 + k^* r = \phi_1^T \omega_1 + \psi r + \theta_1^{*T} \omega_1 + k^* r \\ &= [\psi, \phi_1^T] \begin{bmatrix} r \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \theta_1^{*T} \omega_1 + k^* r = \bar{\phi}_1^T \bar{\omega}_1 + \theta_1^{*T} \omega_1 + k^* r. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_p \bar{\phi}_1^T \omega_1 + b_p \theta_1^{*T} \omega_1 + b_p k^* r \\ \dot{\omega}_1 &= \Lambda \omega_1 + \ell \bar{\phi}_1^T \bar{\omega}_1 + \ell \theta_1^{*T} \omega_1 + \ell k^* r \end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{\omega}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_p & -b_p \bar{\phi}_1^T \\ 0 & \Lambda + \ell \bar{\phi}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^* b_p \\ k^* \ell \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} b_p \\ \ell \end{bmatrix} \bar{\phi}_1^T \bar{\omega}_1 \\ y_p &= [h_p^T, 0] x, \quad x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_p \\ \omega_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Para el modelo de referencia ( $\bar{\phi}_1^T = 0$ ), tenemos (ver Fig. 4.3).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^* \\ \dot{\omega}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & -b_p \theta_1^{*T} \\ 0 & \Lambda + \ell \theta_1^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p^* \\ \omega_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^* b_p \\ k^* \ell \end{bmatrix} r$$

$$y_m = [h_p^T, 0] x_{mn}, \quad x_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_p^* \\ \omega_1^* \end{bmatrix}. \quad (4.2.13)$$

De las ecuaciones (4.2.12 y (4.2.13), las ecuaciones que describen al error entre el sistema y el modelo de referencia son dadas por

$$\dot{e} = A_{mn} e + b_{mn} \bar{\phi}_1^T \bar{\omega}_1, \quad e_1 = h_{mn}^T e$$

donde

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} A_p & -b_p \theta_1^{*T} \\ 0 & \Lambda + \ell \theta_1^{*T} \end{bmatrix}, \quad b_{mn} = \begin{bmatrix} b_p \\ \ell \end{bmatrix}, \quad h_{mn} = \begin{bmatrix} h_p \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$e = x - x_{mn} \quad \text{y} \quad e_1 = y_p - y_m.$$

De la ecuación (4.1.4), se sigue que

$$h_{mn}^T (sI - A_{mn})^{-1} b_{mn} k^* = W_m(s).$$

Por lo tanto, tenemos

$$e_1 = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \bar{\phi}_1^T \bar{\omega}_1. \quad (4.2.14)$$

La ecuación (4.2.14) está en la forma estándar tratada en el Lema 4.2.1 y por lo tanto, la ley adaptativa

$$\dot{\bar{\phi}}_1 = -\text{sgn}(k_p) e_1 \bar{\omega}_1 \quad (4.2.15)$$

asegura la acotación de  $e(t)$  y  $\bar{\phi}_1(t)$  para todo  $t \geq t_0$ .

Cuando  $\bar{\theta}_1(t) \equiv \theta_1^*$ , de la estructura del controlador, se sigue que  $\bar{\omega}_1^*(t)$  es acotada. Además, como  $e(t)$  es acotada,  $\bar{\omega}_1(t)$  también es acotada. Por lo tanto, una vez más se muestra que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ .

### Observaciones:

- 1) La planta junto con el controlador adaptativo mostrados en la Fig. 4.2 pueden expresarse en términos del sistema LTI mostrado en la Fig. 4.3 junto con la entrada  $\bar{\phi}_1^T \bar{\omega}_1$  en el sumador. Esto lleva a la ecuación del error (4.2.14).
- 2) La elección del controlador asegura que los polos del controlador cancelarán a los ceros de la planta para obtener la función de transferencia del modelo de referencia. Por lo tanto, los ceros de la planta necesariamente deberán estar en  $\mathbb{C}^-$  de tal manera que no tomen lugar cancelaciones de polos y ceros inestables. Por lo tanto, la suposición de que  $Z_p(s)$  es Hurwitz es común a todos los sistemas adaptativos discutidos en esta parte.

- 3) El controlador descrito en la ecuación (4.2.10) tiene una estructura de retroalimentación. Para evitar lazos algebraicos, el sistema dinámico en el lazo de retroalimentación debe tener función de transferencia estrictamente propia (para valores constantes de  $\theta_1$ ). Esto explica el hecho de que aún cuando los coeficientes del polinomio denominador de  $W_c(s)$  son determinados por los parámetros en la trayectoria de retroalimentación, su frecuencia más alta se determina en la trayectoria hacia adelante.

### 4.2.3 Caso (iii) Polos Desconocidos

Consideremos una planta con función de transferencia (4.1.4),

$$W_p(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

con  $Z_p(s) = Z_m(s)$ , un determinado polinomio Hurwitz de grado  $(n-1)$  y  $R_p(s)$  un polinomio mónico de grado  $n$  con coeficientes desconocidos. Debido a que las raíces de  $R_p(s)$  pueden estar en  $\mathbb{C}^+$ , no podemos usar un controlador en cascada de la forma (4.2.10), considerado en la subsección anterior. En vez de este, la planta se estabiliza usando un controlador de retroalimentación definido por

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda \omega_2(t) + \ell y_p(t) \\ u(t) &= k(t)r(t) + \theta_0(t)y_p(t) + \theta_2^T(t)\omega_2(t) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

donde  $\theta_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega_2, \theta_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Lambda$  es una matriz  $(n-1) \times (n-1)$  asintóticamente estable con  $\lambda(s)$  como su polinomio característico y  $(\Lambda, \ell)$  controlable.

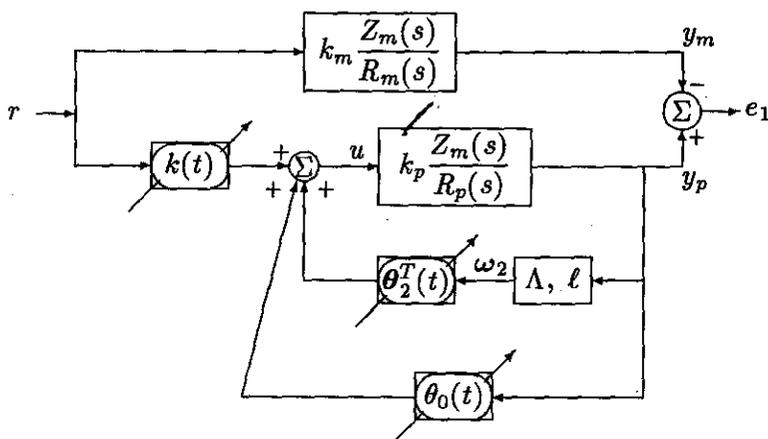


Fig. 4.4 Controlador Adaptativo con Polos Desconocidos.

Cuando  $\theta_0(t) \equiv \theta_{0c}$  y  $\theta_2(t) \equiv \theta_{2c}$  son constantes, la función de transferencia del controlador de retroalimentación puede escribirse como

$$W_c(s) = \theta_{0c} + \theta_{2c}^T (sI - \Lambda)^{-1} \ell \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D(s)}{\lambda(s)}$$

Si  $k(t) \equiv k_c$ , donde  $k_c$  es una constante, entonces la función de transferencia de la planta junto con el controlador está dada por

$$W_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} k_c \frac{W_p(s)}{1 - W_p(s)W_c(s)} = \frac{k_c k_p Z_m(s)}{R_p(s) \left[ 1 - k_p \frac{Z_m(s)}{R_p(s)} \cdot \frac{D(s)}{\lambda(s)} \right]}$$

Como la matriz  $\Lambda$  (y por lo tanto el polinomio  $\lambda(s)$ ) es a criterio del diseñador, esta se puede elegir de tal forma que  $\lambda(s) = Z_m(s)$ . Además, como se supone que  $R_p(s)$  y  $R_m(s)$  son mónicos, entonces existe un vector de parámetros  $[\theta_0^*, \theta_2^{*T}]$  tal que si  $\theta_{0c} = \theta_0^*$  y  $\theta_{2c} = \theta_2^*$ , entonces  $D(s) = D^*(s)$  y

$$R_p(s) - k_p D^*(s) = R_m(s).$$

Aún más, si  $k_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_m}{k_p}$ , entonces la función de transferencia  $W_0(s)$  puede hacerse idéntica a la función de transferencia  $W_m(s)$  (Fig. 4.5).

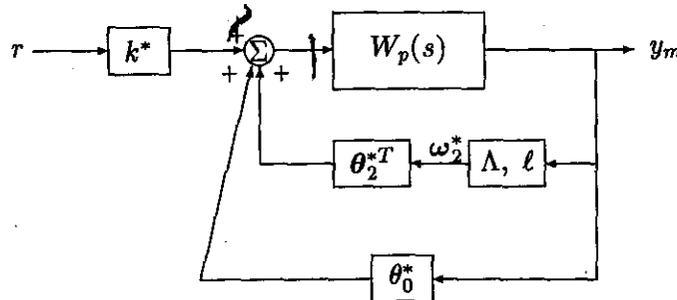


Fig. 4.5 Representación No mínima de la Planta con Polos Desconocidos.

De nuevo, nótese que  $n-1$  modos escondidos que resultan de la cancelación ceros-polos son estables, dada que  $Z_m(s)$  es un polinomio Hurwitz.

En el caso adaptativo, cuando  $k$ ,  $\theta_0$  y  $\theta_2$  son funciones del tiempo como en la ecuación (4.2.16), los errores de los parámetros se definen como

$$\psi(t) = k(t) - k^*, \quad \phi_0(t) = \theta_0(t) - \theta_0^* \quad \text{y} \quad \phi_2(t) = \theta_2(t) - \theta_2^*.$$

Por conveniencia, representaremos el vector error de los parámetros de control  $(n+1)$ -dimensional como

$$\bar{\phi}_2(t) = [\psi(t), \phi_0(t), \phi_2^T(t)]^T.$$

Usando el mismo procedimiento que en la Subsección 4.2.2, la salida de la planta puede entonces expresarse como

$$y_p(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) [k^* r(t) + \bar{\phi}_2^T(t) \bar{\omega}_2(t)]$$

donde  $\bar{\omega}_2(t) = [r(t), y_p(t), \omega_2^T(t)]$ . Como  $y_m(t) = W_m(s)r(t)$ , el error de la salida  $e_1(t) = y_p(t) - y_m(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \bar{\phi}_2^T \bar{\omega}_2(t). \quad (4.2.17)$$

Del Lema 4.2.1, inferimos que las leyes adaptativas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \dot{\psi}(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) r(t) \\ \dot{\theta}_0(t) &= \dot{\phi}_0(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) y_p(t) \\ \dot{\theta}_2(t) &= \dot{\phi}_2(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) \omega_2(t) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

aseguran que las soluciones de las ecuaciones (4.2.17) y (4.2.18) son acotadas. Como  $e_1(t)$  así como la salida del modelo de referencia son acotadas, se sigue que  $y_p$  es acotada. Por lo tanto, el vector  $(n-1)$ -dimensional  $\omega_2$  es acotado. Además, como en todos los casos anteriores, de nuevo mostramos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = 0$ .

**Conclusión:** Las leyes adaptativas sugeridas para los tres casos especiales, estudiados en las Subsecciones 4.2.1 - 4.2.3, las podemos resumir en la siguiente tabla:

RESUMEN DE LAS LEYES ADAPTATIVAS PARA LOS CASOS ESPECIALES, $n^* = 1$ .				
Cantidades Desconocidas	Parámetros Ajustables	Parámetros Fijos	Leyes Adaptativas	Parámetros Deseados
$k_p$	$k$	$\theta_1 = \theta_2 = 0$ $\theta_0 = 0$	$\dot{k} = -\text{sgn}(k_p) e_1 r$	$k^*$
$k_p$ , Ceros	$k, \theta_1$	$\theta_2 = 0$ $\theta_0 = 0$	$\dot{k} = -\text{sgn}(k_p) e_1 r$ $\dot{\theta}_1 = -\text{sgn}(k_p) e_1 \omega_1$	$k^*, \theta_1^*$
$k_p$ , Polos	$k, \theta_0, \theta_2$	$\theta_1 = 0$	$\dot{k} = -\text{sgn}(k_p) e_1 r$ $\dot{\theta}_0 = -\text{sgn}(k_p) e_1 y_p$ $\dot{\theta}_2 = -\text{sgn}(k_p) e_1 \omega_2$	$k^*, \theta_0^*, \theta_2^*$

#### 4.2.4 Caso General ( $n^* = 1$ )

La discusión de los tres casos especiales en las subsecciones anteriores nos permite ahora presentar la estructura del controlador y la solución para el problema de control adaptativo de una planta con entrada-simple, salida-simple cuyo grado relativo es unitario. Supongamos, como en los casos espaciales de las Subsecciones 4.2.1 - 4.2.3, que la planta se describe por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p u, \\ y_p &= \mathbf{h}_p^T \mathbf{x}_p,\end{aligned}$$

donde la matriz constante  $\mathbf{A}_p$  y los vectores  $\mathbf{b}_p$  y  $\mathbf{h}_p$  tienen elementos desconocidos. Si la función de transferencia de la planta es dada por

$$W_p(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} = \mathbf{h}_p^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{b}_p,$$

$$k^* = \frac{k_m}{k_p}, \quad \theta_1^{*T} (s\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \ell = \frac{Z_m(s) - Z_p(s)}{Z_m(s)}, \quad \theta_0^* + \theta_2^{*T} (s\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \ell = \frac{R_p(s) - R_m(s)}{k_p Z_m(s)}.$$

Entonces, por la suposición de arriba, tanto  $k_p$  como los  $(2n - 1)$  coeficientes de los polinomios mónicos  $Z_p(s)$  y  $R_p(s)$  son desconocidos. Otra suposición que haremos es que  $Z_p(s)$  es un polinomio Hurwitz y que el signo del multiplicador de la frecuencia más alta,  $k_p$ , es conocido.

El modelo de referencia se elige de tal forma que su función de transferencia  $W_m(s)$  sea ERP, definida en la ecuación (4.2.1) y tiene una pareja entrada-salida  $\{r(\cdot), y_m(\cdot)\}$ . El multiplicador de la frecuencia más alta,  $k_m$ , se supone positivo. El objetivo del problema del control adaptativo, como en los casos anteriores, es determinar una entrada de control sin diferenciadores tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = 0$ .

**El Concepto de un Ajustador (Afinador).** En los tres casos simples que consideramos en las Subsecciones 4.2.1 - 4.2.3, la estructura del controlador fue elegida de tal manera que existen valores constantes de los parámetros del controlador  $\theta$  para los cuales se alcanza una regulación o un rastreo perfecto asintóticamente. El ajuste del vector de parámetros se logra usando las leyes adaptativas establecidas en la tabla mostrada arriba. Entonces, la generación de la entrada de control  $u$  puede describirse convenientemente en términos de un controlador y un *ajustador*. El primero es lineal e invariante en el tiempo para valores constantes del vector de parámetros del control  $\theta$  y el segundo determina como  $\theta(t)$  tiene que ser ajustado en base únicamente a información de entrada-salida. Esto se muestra en la Fig. 4.6,

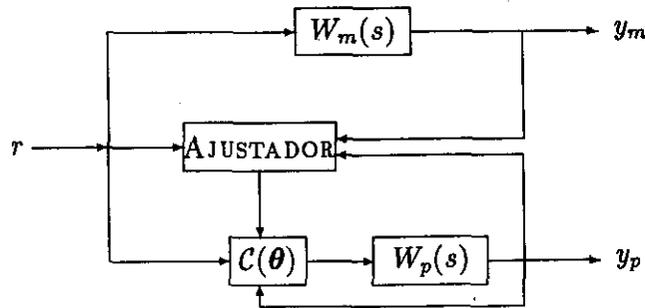


Fig. 4.6 Ajustador Adaptativo.

En este caso, la estructura del controlador  $C(\theta)$  incluye todos los elementos utilizados en las Subsecciones 4.2.1 – 4.2.3, resumidos en la tabla anterior (ver Fig. 4.7).

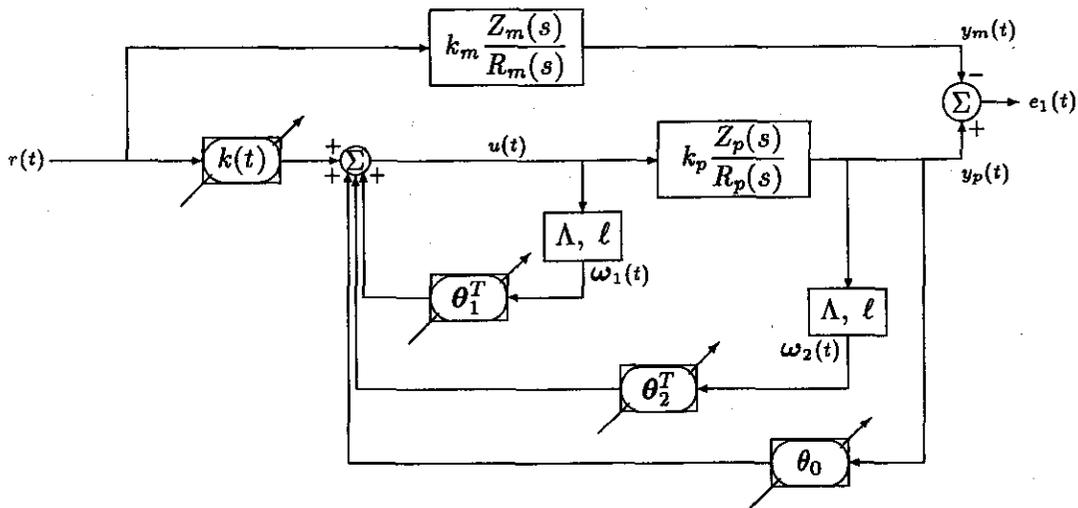


Fig. 4.7 Controlador Adaptativo para el Caso General ( $n^* = 1$ )

En particular, el controlador contiene un multiplicador  $k(t)$  como el usado en la Subsección 4.2.1, un lazo de control de alimentación con un vector de parámetros  $\theta_1(t)$  como en la Subsección 4.2.2 y un controlador de retroalimentación con parámetros  $\theta_0$  y  $\theta_2(t)$  como en la Subsección 4.2.3. El controlador se describe completamente con la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda \omega_1(t) + \ell u(t) & \omega &\stackrel{\text{def}}{=} [r(t), \omega_1^T(t), y_p(t), \omega_2^T(t)]^T \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda \omega_2(t) + \ell y_p(t), & \theta &\stackrel{\text{def}}{=} [k(t), \theta_1^T(t), \theta_0(t), \theta_2^T(t)]^T \quad \text{y} \quad (4.2.19) \\ & & u(t) &= \theta^T(t) \omega(t). \end{aligned}$$

donde  $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\theta_1, \omega_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\theta_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\theta_2, \omega_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Lambda$  es una matriz asintóticamente estable y  $\det [sI - \Lambda] = \lambda(s)$ .

Se sigue que cuando los parámetros de control  $k(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_0(t)$  y  $\theta_2(t)$  asumen valores constantes,  $k_c$ ,  $\theta_{1c}$ ,  $\theta_{0c}$  y  $\theta_{2c}$  respectivamente, las funciones de transferencia de los controladores en alimentación y retroalimentación son respectivamente

$$\frac{\lambda(s)}{\lambda(s) - C(s)} \quad \text{y} \quad \frac{D(s)}{\lambda(s)}$$

y la función de transferencia completa de la planta junto con el controlador puede expresarse como

$$W_0(s) = \frac{k_c k_p Z_p(s) \lambda(s)}{[\lambda(s) - C(s)] R_p(s) - k_p Z_p(s) D(s)}. \quad (4.2.20)$$

Como en las Subsecciones 4.2.1 - 4.2.3,  $\lambda(s)$  es un polinomio mónico de grado  $n - 1$  y  $C(s)$ ,  $D(s)$  son polinomios de grado  $n - 2$  y  $n - 1$  respectivamente. El vector de parámetros  $\theta_1$ , determina los coeficientes de  $C(s)$  mientras que  $\theta_0$  y  $\theta_2$  determinan los coeficientes de  $D(s)$ .

Sean  $C^*(s)$  y  $D^*(s)$  polinomios en  $s$  tales que

$$\lambda(s) - C^*(s) = Z_p(s), \quad R_p(s) - k_p D^*(s) = R_m(s).$$

Más aún, sea  $\lambda(s) = Z_m(s)$ . Entonces, existen escalares  $k^*$ ,  $\theta_0^*$  y vectores  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  tales que

$$k^* = \frac{k_m}{k_p}, \quad \theta_1^{*T} (sI - \Lambda)^{-1} \ell = \frac{C^*(s)}{\lambda(s)} \quad \text{y} \quad \theta_0^* \theta_2^{*T} (sI - \Lambda)^{-1} \ell = \frac{D^*(s)}{\lambda(s)}.$$

Eligiendo  $\theta = \theta^*$ , donde  $\theta^*$  se define como

$$\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} [k^*, \theta_1^{*T}, \theta_0^*, \theta_2^{*T}]^T,$$

la función de transferencia  $W_0(s)$  en la ecuación (4.2.20) es

$$W_0(s) = k_m \frac{Z_p(s) Z_m(s)}{Z_p(s) [R_p(s) - k_p D^*(s)]} = W_m(s).$$

**Las Leyes Adaptativas.** Tal como en los tres casos especiales, el vector de parámetros de control debe de ser ajustado como una función del tiempo usando toda la información disponible acerca de la planta. La ecuación diferencial que describe a la planta junto con el controlador puede representarse por el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_p x_p(t) + b_p (\theta^T(s) \omega(t)) \\ \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda \omega_1(t) + \ell (\theta^T(t) \omega(t)) \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda \omega_2(t) + \ell (h^T(t) x_p(t)). \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Como en los casos anteriores, definimos los siguientes errores de los parámetros:

$$\begin{aligned}\psi(t) &\stackrel{\text{def}}{=} k(t) - k^*, & \phi_0(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_0(t) - \theta_0^*, \\ \phi_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_1(t) - \theta_1^*, & \phi_2(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_2(t) - \theta_2^*, \\ \phi(t) &\stackrel{\text{def}}{=} [\psi(t), \phi_1^T(t), \phi_0(t), \phi_2^T(t)]^T.\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (4.2.21) puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_{mn}x + b_{mn} [\phi^T \omega + k^* r] \\ y_p &= h_{mn}x\end{aligned}\quad (4.2.22)$$

donde

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} A_p + b_p \theta_0^* h_p^T & b_p \theta_1^{*T} & b_p \theta_2^{*T} \\ \ell \theta_0^* h_p^T & \Lambda + \ell \theta_1^{*T} & \ell \theta_2^{*T} \\ \ell h_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_{mn} = \begin{bmatrix} b_p \\ \ell \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.23)$$

$$h_{mn} = [h_p^T, 0, 0]^T, \quad y \quad x \stackrel{\text{def}}{=} [x_p^T, \omega_1^T, \omega_2^T]^T.$$

Dado que  $W_0(s) \equiv W_m(s)$  cuando  $\theta(t) \equiv \theta^*$ , se sigue que el modelo de referencia puede describirse por la ecuación diferencial de  $(3n - 2)$ º orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_{mn} &= A_{mn}x_{mn} + b_{mn}k^*r, \\ y_m &= h_{mn}^T x_{mn}\end{aligned}$$

donde

$$x_{mn} = [x_p^{*T}, \omega_1^{*T}, \omega_2^{*T}]^T, \quad h_{mn}^T [sI - A_{mn}]^{-1} b_{mn} = \frac{k_p}{k_m} W_m(s).$$

$x_p^*$ ,  $\omega_1^*$  y  $\omega_2^*$  pueden ser consideradas como señales en el modelo de referencia que corresponden a  $x_p$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en el sistema completo. Por lo tanto, la ecuación del error para el sistema completo puede expresarse como

$$\dot{e} = A_{mn}e(t) + b_{mn} [\phi^T(t)\omega(t)], \quad e_1(t) = h_{mn}^T e(t) \quad (4.2.24)$$

donde  $e = x - x_{mn}$  y  $e_1 = y_p - y_m$ . La ecuación (4.2.24) es de dimensión  $3n - 1$  mientras que la función de transferencia correspondiente  $W_m(s)$  es de orden  $n$ . Los modos que corresponden a los  $2n - 1$  polos restantes son no controlable y/o no observables pero asintóticamente estables ya que  $Z_p(s)$  es Hurwitz. Por inspección, directamente del Lema 4.2.1, podemos escribir las leyes adaptativas

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t)r(t) \\ \dot{\theta}_0(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t)y_p(t) \\ \dot{\theta}_1(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t)\omega_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t)\omega_2(t).\end{aligned}\quad (4.2.25)$$

Y por supuesto, usando los mismos argumentos que para los tres casos especiales, podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ .

**Observaciones:**

- I. La estructura del controlador descrito en la Fig. 4.7, es básica y es usada en la mayoría de los problemas para casos donde el grado relativo es más grande que la unidad. Siempre que sea necesario, nos referiremos a la ecuación (4.2.25) como la *ley adaptativa estándar* para plantas con  $n^* = 1$ .
- II. En la ecuación del error (4.2.24), no suponemos que  $\omega(t)$  es acotada. Dado que podemos demostrar que  $e(t)$ , el vector error del estado, es acotado y el modelo de referencia es asintóticamente estable, entonces de aquí sigue la acotación de  $x(t)$ .
- III. Si el modelo de referencia tiene una función de transferencia  $W_m(s)$ , la cual es de grado relativo unitario pero no es ERP, se necesita la siguiente modificación:  
 Sea  $W_m(s) = W(s)\bar{W}_m(s)$  donde  $\bar{W}_m(s)$  es ERP y  $W(s)$  es una función de transferencia de grado relativo cero con polos y ceros en  $\mathbb{C}^-$ . Si  $\tilde{r}(t) = W(s)r(t)$ , entonces usamos  $\tilde{r}(t)$  en lugar de  $r(t)$  como entrada de referencia a la planta.

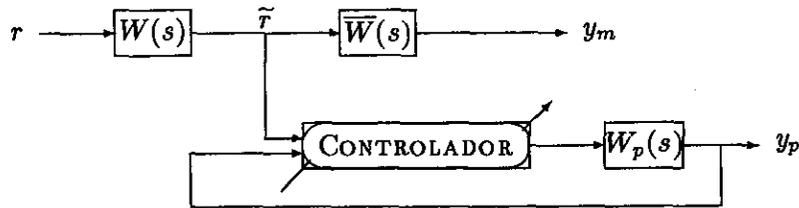


Fig. 4.8 Controlador Modificado.

**Ejemplo 4.3** Consideremos la función de transferencia  $W_m(s) = \frac{s+6}{s^2+2s+1}$ . Entonces, podemos modificarla de la siguiente manera:

$$W_m(s) = \frac{(s+a)(s+6)}{(s+a)(s^2+2s+1)} = \underbrace{\left[ \frac{s+6}{s+a} \right]}_{W(s)} \underbrace{\left[ \frac{s+a}{s^2+2s+1} \right]}_{\bar{W}(s)},$$

donde  $\bar{W}(s)$  es ERP siempre y cuando  $0 < a < 2$ .

Una modificación similar también se puede adoptar cuando  $W_m(s)$  tiene grado relativo  $n_m^* > 1$ . Si  $W_m(s) = W(s)\bar{W}_m(s)$  donde  $\bar{W}_m(s)$  es ERP y  $W(s)$  es asintóticamente estable, entonces la entrada de referencia en la planta se modifica como  $\tilde{r}(t) = W(s)r(t)$ .

**Ejemplo 4.4**  $W_m(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \underbrace{\left[ \frac{1}{s+1} \right]}_{W(s)} \underbrace{\left[ \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} \right]}_{\bar{W}(s)}$ .

IV. En la Sección 4.1, se estableció que la inestabilidad de la función de transferencia de la planta puede suponerse explícitamente en el enunciado del problema de control adaptativo. Cuando la planta es asintóticamente estable y el diseñador toma en cuenta este hecho, la naturaleza del problema cambia significativamente ya que la estabilidad del sistema completo deja de ser el resultado principal. Ciertamente, el diseñador puede identificar los parámetros de la planta exactamente antes de controlarla (un procedimiento que en algunos casos es sugerido). Por otra parte, si un algoritmo adaptativo se usa para mejorar funcionamiento pero el comportamiento de los sistemas tienden a ser inestables, el diseñador siempre tiene el recurso de cortar el control de tal manera que se mantengan todas las señales acotadas. Lo mismo es cierto si sabemos que al menos para un valor específico del vector de retroalimentación  $\theta$  el sistema completo es estable. En cualquier problema de control que tratamos, tales suposiciones no se hacen, siendo el principal objetivo el determinar un vector de parámetros de control  $\theta$  el cual estabilice al sistema antes de que la respuesta resulte ser no acotada.

Por último, como un especie de conclusión para lo estudiado hasta aquí en este capítulo, vamos a estudiar de nuevo el problema de los dos tanques estudiado al final del Capítulo 3 con una pequeña modificación.

**Ejemplo 4.5** Considerar el sistema de dos tanques del Ejemplo 3.2 modificado o equivalentemente, ver el circuito eléctrico de la Fig. 4.9.

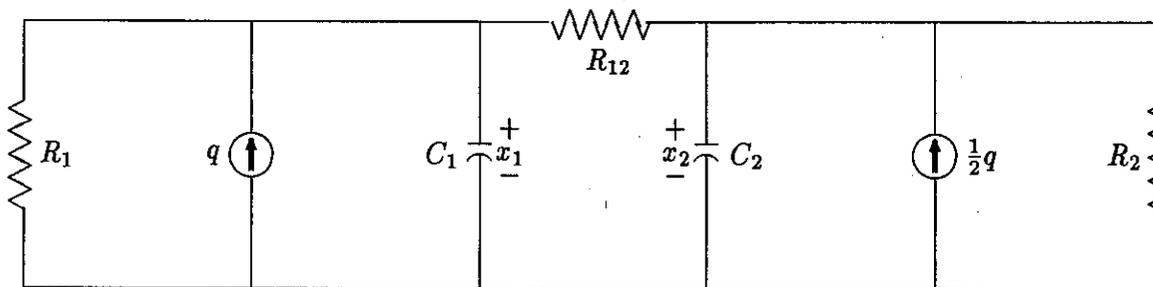


Fig. 4.9 Circuito Eléctrico Simple.

descrito por la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{12}} \right) & \frac{1}{R_{12}C_1} \\ \frac{1}{R_{12}C_1} & -\frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{12}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{2C_2} \end{bmatrix} q.$$

En la simulación, sean  $C_1 = 1.0$ ,  $C_2 = 1.0$ ,  $R_1 = 2/3$ ,  $R_2 = 1/2$ , y  $R_{12} = 1/2$ . Supongamos que no conocemos "a" y "b" en  $y_p(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ . El objetivo es diseñar un controlador adaptativo tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = 0$$

cuando

$$y_m(t) = \frac{s + 5}{s^2 + 7.5s + 10} r(t)$$

donde  $r(t) = 6.0$ ,  $t \geq 0$ . Usar  $a = 1/2$  y  $b = 1/2$  como una especie de condición inicial para poner en funcionamiento la simulación.

Trabajaremos todo este problema en la computadora. Todo el material de MATLAB está en las páginas siguientes. El análisis siguiente lo realizaremos con el propósito de profundizar y comprender el problema.

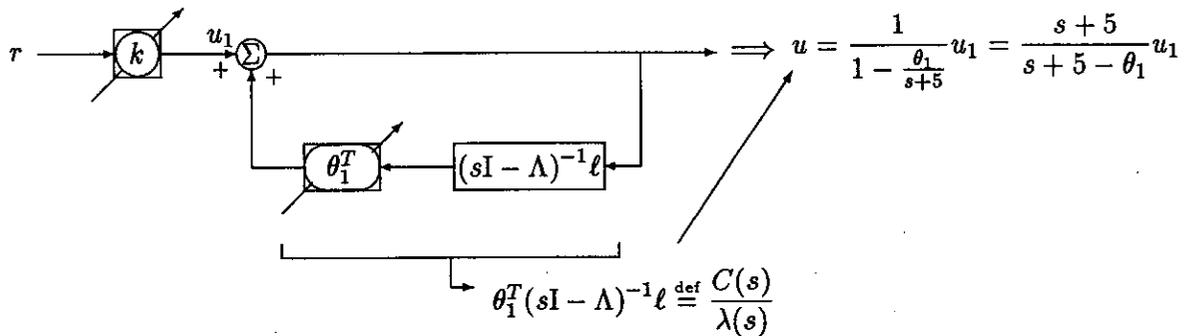


Fig. 4.10 Estructura del Controlador para el Problema de los Tanques.

De  $Z_m(s) = s + 5$ , tenemos que  $\Lambda = -5$ . Haciendo  $\ell = 1$ , obtenemos

$$\theta_1 (s + 5)^{-1}(1) = \frac{\theta_1}{s + 5}.$$

Por lo tanto,

$$u = \frac{k(s + 5)}{(s + 5 - \theta_1)} r \quad y$$

$$y_p = \left[ \frac{0.75(s + 5.8333)}{s^2 + 7.5s + 10} \right] \left[ \frac{k(s + 5)}{(s + 5 - \theta_1)} \right] r$$

Como  $W_m(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 7.5s + 10}$ , entonces

$$0.75k = 1 \implies k^* = 1/0.75 = 1.3333,$$

$$5 - \theta_1 = 5.8333 \implies \theta_1^* = -0.8333.$$

## SIMULACION CON MATLAB

```

% *****
% * ARCHIVO -----> distanks.m <----- *
% * Creado el dia 31 de Mayo de 1996. *
% * Este archivo m realiza los calculos necesarios para *
% * formular el problema de los tanques modificado. *
% *****
% Valores para los capacitores y resistores, respectivamente.
c10=1.0; c2=1.0; r1=2/3; r2=0.5; r12=0.5;
% Factores de escala para la variable de salida.
a=0.5; b=0.5;
% Examinar la matriz de estado del sistema.
Ap=[-(1/c1)*(1/r1 + 1/r12), 1/(r12/c1);
     1/(r12*c2), -(1/c2)*(1/r2 + 1/r12)],
% Examinar la matriz (vector) de control.
bp=[1/c1; 1/(2*c2)],
% Esta es la matriz de salida
hp=[a;b],
% Obtener una funcion de transferencia del espacio de estados.
[Zp,Rp]=ss2tf(Ap, bp, hp', 0)
% Calcular los ceros de la planta.
rzp=roots(Zp),
% Calcular los polos de la planta.
rrp=roots(Rp),

```

Al tener convenientemente posicionado este archivo, hacemos la corrida desde MATLAB:

```

>> distanks
Ap =
   -3.5000    2.0000
    2.0000   -4.0000
bp =
    1.0000
    0.5000
hp =
    0.5000
    0.5000

Zp =
    0    0.7500    4.3750
Rp =
    1.0000    7.5000   10.0000

rzp =
   -5.8333
rrp =
   -5.7656
   -1.7344

>> diary off

```

Después de haber analizado las matrices, polinomios de la función de transferencia y sus respectivos ceros, corremos el programa que nos dará la simulación.

```
% *****
% * ARCHIVO -----> ejec_tanks.m <----- *
% * Creado el día 31 de Mayo de 1996. *
% * Este archivo m implementa el Caso II, Subseccion 4.2.2 *
% *****
% Seleccionar los tiempos inicial y final.
t0=0.0; tf=10.0;
% Establecer la condicion inicial,
% x0=[xp1(0); xp2(0); xm1 (0); xm2 (0); k (0); w1 (0); th1 (0)].
x0=[0.0; 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; 0.0];
% LLamar la subrutina que resuelve EDO's.
[t,x]=ode45('tanks', t0, tf, x0);
yp=0.5*(x(:,1) + x(:,2));
ym=5.0*x(:,3) + 1.0*x(:,4);
k=x(:,5);
w1=x(:,6);
th1=x(:,7);
subplot(321)
plot(t,ym)
title('Respuesta de la Salida Deseada')
e1=yp - ym;
subplot(325)
plot(t,e1)
title('Error en la Respuesta de Salida')
subplot(322)
plot(t,k)
title('Multiplicador Ajustable, k(t)')
subplot(323)
plot(t,yp)
title('Respuesta Actual de Salida')
subplot(324)
plot(t,w1)
title('Estado del Controlador, w1(t)')
subplot(326)
plot(t,th1)
title('Parametro Ajustable, th1(t)')
```

```

% *****
% * ARCHIVO -----> tanks.m <----- *
% * Creado el 31 de Mayo de 1996. *
% * Este es un archivo de funcion que siempre tiene que *
% * acompañar al archivo ejec_tanks.m *
% *****
function xd=tanks(t,x)
km=1.0; sgnkp=1.0;
% Matriz de estado y de control del modelo de referencia.
Am=[0, 1.0; -10.0, -7.5]; bm=[0; 1]; %(FORMA CANONICA DE CONTROL).
% Crear la matriz de salida del modelo de referencia basado
% en ym = Km*(5*x1 + x2).
cm=km*[5, 1];
% Establecer las matrices de la planta.
Ap=[-3.5, 2.0; 2.0, -4.0]; bp=[1.0; 0.5];
hp=[0.5;0.5]; % Matriz de salida de la planta.
xp=x(1:2); % xp es el vector de las primeras dos columnas de x.
xm=x(3:4); % xm es el vector de la 3ra y 4ta columna de x.
k=x(5,:); % Parametro multiplicador de entrada.
w1=x(6,:); % Estado del Controlador.
th1=x(7,:); % Theta de una variable.
r=6.0; % Entrada de referencia.
%Generar las salidas de la planta y modelo de referencia.
yp=hp'*xp; ym=cm*xm;
% Crear la senal del error de la salida.
e1=yp - ym;
u=k*r + th1*w1; % Senal de Entrada.
xmpunto=Am*xm + bm*r; % Dinamica del modelo de Referencia.
xppunto=Ap*xp + bm*u; % Dinamica de la planta.
kpunto=-sgnkp*e1*r; % Ley de Ajuste para el parametro de entrada.
wipunto=-5*w1 + 1*u; % Dinamica del Controlador.
thipunto=-sgnkp*e1*w1;% Ley de Ajuste para el parametro en cascada.
% Asignar los valores correspondientes a la funcion derivada xd.
xd=[xppunto; xmpunto; kpunto; wipunto; thipunto];

```

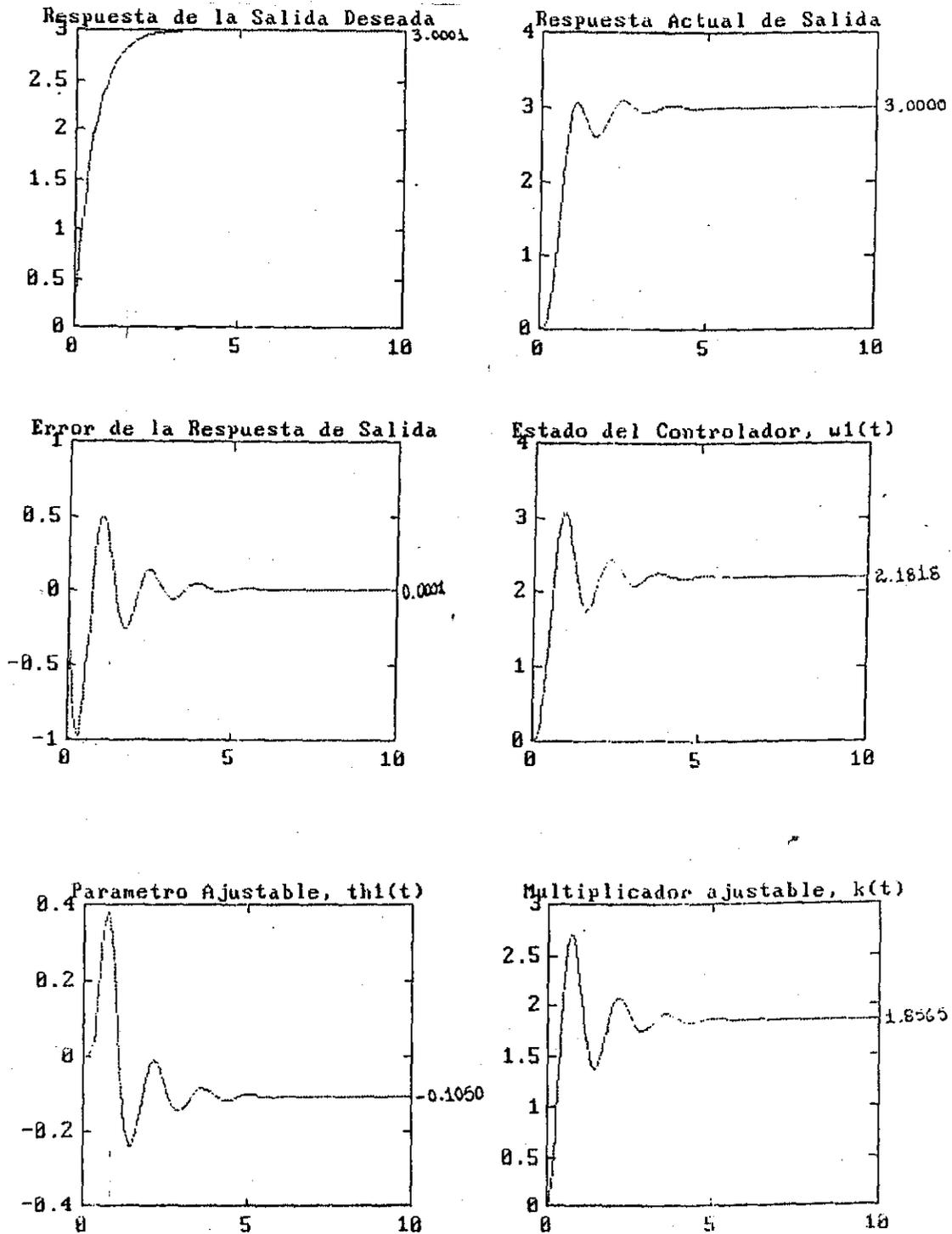


Fig. 4.10 Resultados de la Simulación del Problema de los Dos Tanques Modificado.

**Conclusión:**

Aquí hemos inicializado todo en cero. En la práctica, usted podría usar su conocimiento sobre el sistema para tratar de seleccionar  $k(0)$  y  $\theta_1(0)$  efectivamente.

Comparar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k = \underbrace{1.8562\dots}_{\bar{k}} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1 = \underbrace{-0.1045\dots}_{\bar{\theta}_1}$$

con  $k^* = 1.3333\dots$  y  $\theta_1^* = -0.8333\dots$

Comparar los multiplicadores de control directo (CD) de la función de transferencia,

$$W_m(0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_p(0)}{r} = \left[ \frac{0.75(5.8333)}{10} \right] \left[ \frac{5\bar{k}}{5 - \bar{\theta}_1} \right] = 0.5$$

Por lo tanto,  $\bar{k}$  y  $\bar{\theta}_1$  producen el multiplicador CD deseado.

### 4.3 Plantas con Grado Relativo $\geq 2$

Como mostramos en la sección anterior, cuando  $n^* = 1$ , tanto la parte algebraica como la parte analítica del problema del control adaptativo son considerablemente simples. La parte algebraica se reduce a determinar un polinomio  $Z_2(s)$  de grado  $n - 1$ , tal que dado el polinomio mónico  $Z_1(s)$  de grado  $n$ ,  $Z_1(s) + Z_2(s)$  puede hacerse de tal forma que tenga raíces deseadas. Por otro lado, la parte analítica es simplificada al elegir el modelo de referencia ERP de tal manera que las leyes adaptativas pueden determinarse usando el Lema de Kalman-Yakovovich (Lemas 2.3.2 y 2.3.3.). Ambas partes del problema del control adaptativo se vuelven realmente difíciles cuando el grado relativo de la planta excede a la unidad. Demostrar que la estructura del controlador tiene suficiente libertad para asegurar la existencia de una solución, cuando los parámetros de la planta son conocidos, envuelve la solución de ecuaciones algebraicas realmente complejas. Además, el Método Directo de Lyapunov ya no es suficiente para probar la acotación de todas las señales en el sistema y entonces debemos usar argumentos adicionales basados en razones de crecimiento de las señales. El ajuste de los parámetros de control se lleva a cabo usando un nuevo concepto, la *señal del error aumentado*  $\varepsilon_1$ . Se puede demostrar, aunque es un tanto complejo y por consiguiente solo lo mencionaremos, que usando diferentes parametrizaciones de la planta así como ajustes dinámicos de las estimaciones de los parámetros de control es posible controlar adaptativamente el sistema con la primer información disponible que se tenga y el resultado es el mismo al utilizar el enfoque directo o indirecto.

La parte algebraica para el caso cuando  $n^* \geq 2$  tiene el mismo grado de dificultad y análisis que los casos anteriores, mientras que la parte analítica solo es así para el caso  $n^* = 2$  ya que para el caso  $n^* > 2$  se necesita un cambio total en la estructura de las

leyes adaptativas con el fin de poder alcanzar soluciones estables. De nuevo, se pueden considerar varios casos dependiendo de si  $k_p$  (el multiplicador de la frecuencia más alta) es conocido o desconocido lo mismo acerca de la otra información de la planta. Por esta razón, esquivando los procedimientos para los casos particulares, solo daremos en forma resumida la implementación del controlador adaptativo que resuelve el problema general del caso  $n^* \geq 2$ .

#### 4.3.1 Implementación, Caso $n^* \geq 2$ , del Control Adaptado a un Modelo de Referencia

- **Modelo de Referencia:**  $y_m(t) = W_m(s)r(t) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}r(t)$ .
- **Error de la Salida:**  $e_1(t) = y_p(t) - y_m(t)$ .
- **Dinámica del Controlador:**  $\lambda(s) = Z_m(s)\lambda_1(s) = \det(sI - \Lambda)$ ,  
 $\lambda_1(s)$  es un polinomio Hurwitz de grado  $n - m - 1$   
y  $Z_m(s)$  es de grado  $m$ .

donde

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \Lambda\omega_1 + \ell u, & \Lambda &\in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \\ \dot{\omega}_2 &= \Lambda\omega_2 + \ell y_p, & (\Lambda, \ell) &\text{ controlable.} \end{aligned}$$

- **Entrada de la Planta:**  $u(t) = \theta^T(t)\omega(t)$   
con  $\theta^T(t) = [k, \theta_1^T, \theta_0, \theta_2^T]$  y  $\omega^T(t) = [r(t), \omega_1^T(t), y_p(t), \omega_2^T(t)]$ .
- **Ecuaciones de Ajuste:**  $\Gamma = I + \bar{\zeta}^T \bar{\zeta}$

$$\bar{\zeta} = \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \bar{\zeta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_m(s)I_{(n-1) \times (n-1)}\omega_1(t) \\ W_m(s)y_p(s) \\ W_m(s)I_{(n-1) \times (n-1)}\omega_1(t) \end{bmatrix},$$

$$\dot{k} = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) W_m(s) r(t) = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) y_m(t)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) W_m(s) I_{(n-1) \times (n-1)} \omega_1(t) = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) \bar{\zeta}_1(t)$$

$$\dot{\theta}_0 = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) W_m(s) y_p(t) = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) \bar{\zeta}_2(t)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) W_m(s) I_{(n-1) \times (n-1)} \omega_2(t) = -\Gamma^{-1}(t) \operatorname{sgn}(k_p) \varepsilon_1(t) \bar{\zeta}_3(t)$$

$$\dot{k}_1 = -\Gamma^{-1}(t) \varepsilon_1(t) e_2(t).$$

- **Error Auxiliar:**

$$\begin{aligned}
 e_2(t) &= [\theta^T(t)W_m(s)I_{n \times n} - W_m(s)\theta^T] \omega(t) \\
 &= \theta^T(t)\zeta(t) - W_m(s)u(t) \\
 &= k(t)W_m(s)r(t) + [\theta_1^T(t), \theta_0(t), \theta_2^T(t)] \bar{\zeta}(t) - W_m(s)u(t) \\
 &= k(t)y_m(t) + \bar{\theta}^T(t)\bar{\zeta}(t) - W_m(s)u(t),
 \end{aligned}$$

con  $\bar{\theta}(t) = [\theta_1^T(t), \theta_0(t), \theta_2^T(t)]$ .

- **Error Aumentado:**  $\varepsilon_1(t) = e_1(t) + k(t)e_2(t)$ .
- **Simulación:**  $y_p(t) = W_p(s)u(t)$ .

**Conclusión:** En el Capítulo 3 el problema de control se realiza utilizando un control retroalimentado en términos del estado del sistema y con parámetros ajustables por leyes adaptativas convenientemente elegidas para asegurar la estabilidad del sistema. En este capítulo, como el estado no es accesible, se tiene que hacer un análisis solo con la información entrada-salida utilizando para ello el concepto bien conocido de función de transferencia, solo que en este caso dicha función de transferencia involucra parámetros desconocidos los cuales se tienen que ajustar eligiendo estructuras de control adaptativo que además tienen que hacer posible la estabilidad de la planta desacoplando perturbaciones que entran al sistema. Tal análisis se efectúa utilizando el concepto de positividad real de las funciones de transferencia el cual es un concepto nuevo que se discute en el Capítulo 2 y que se utiliza como criterio para establecer estabilidad.

Por lo tanto, la conclusión principal que se desprende de todo esto es que podemos hacer funcionar una planta aún cuando tengamos muy poca información acerca de ella y lo más sorprendente todavía es que tal funcionamiento puede ser estable o de la manera que más convenga al diseñador.

## Capítulo 5

# Una Aplicación de Los Reguladores Auto-Ajustados

Las aplicaciones industriales de la Teoría del control son muy variadas encontrándose en el control de servomecanismos (sistemas de control de posición) y sistemas de control de procesos los cuales forman las dos grandes ramas del control automático en ingeniería. El control de barcos, robots, aparatos eléctricos y el control de la velocidad de motores pertenecen a la primera categoría. El control de columnas de destilación así como aplicaciones en biomedicina son problemas típicos de Química y caen dentro de la segunda clase de problemas de control. Tales procesos industriales consisten de secuencias de operaciones necesarias para convertir determinada materia prima en algún productos de calidad.

Para asegurar una operación eficiente de un proceso, la acción del control es esencial en cada etapa y en cada uno de tales procesos, por más simple que sea, tal acción debe ser automática. Sin embargo, debido a la presencia de varios tipos de perturbaciones, por naturaleza, un proceso nunca está en equilibrio por más de cierto período de tiempo y por lo tanto, es necesaria la acción de un control para regresarlo constantemente al equilibrio. Las perturbaciones que sacan al proceso del equilibrio pueden ser de varias formas. Estas incluyen cambios en las propiedades de las materias primas que entran al proceso, deterioro en el funcionamiento de las plantas debido al salitre, enmohecimiento y desgaste por la antigüedad y los efectos de las condiciones atmosféricas y climatológicas tales como la temperatura y presión sobre la dinámica del proceso. Todos estos cambios demandan un modelo bien exacto pero bastante complejo e invariablemente de mucho costo. Aún cuando tal modelo es posible y disponible, la presencia de grandes incertidumbres hace al diseño de controladores óptimos una tarea extremadamente difícil. Los controladores adaptativos, los cuales se pueden auto-ajustar durante el funcionamiento, son en consecuencia bastante atractivos en los sistemas de control de procesos.

En este capítulo, como una aplicación y conclusión de los conceptos de control adaptativo estudiados, daremos una introducción al control adaptativo de columnas de destilación, las cuales frecuentemente se encuentran en algunos procesos químicos.

## 5.1 Una Columna de Destilación

La mayoría de los procesos industriales son tiempo invariantes (no autónomos) y no lineales por naturaleza. La tarea de modelar tales procesos es, en muchos ejemplos, muy difícil y en especial cuando las condiciones de operación cambian frecuentemente. Esta es la razón del porqué muchos métodos de control moderno que requieren de un conocimiento exacto del modelo del proceso no pueden aplicarse satisfactoriamente en el control de tales procesos. Además, tales estrategias de control fijas no pueden acomodarse satisfactoriamente a los cambios de las condiciones de operación de la planta. Esta naturaleza no lineal y tiempo invariante de los procesos industriales ha sido el factor principal en el desarrollo del control adaptativo. El control de una columna de destilación demuestra el potencial y alcance de la aplicación del control adaptativo a procesos industriales.

La *destilación* es un proceso eficiente para separar mezclas de líquidos con diferentes puntos de ebullición en sus componentes originales al usar una serie de evaporaciones y condensaciones. Alternativamente, esta también se utiliza para dividir líquidos en mezclas que tienen composiciones diferentes de la composición de la mezcla original.

La historia de la destilación se remonta a la antigüedad cuando fue usada en la separación de aceites esenciales, perfumes y medicinas. Su primer rastro es en los tiempos de Cleopatra en el antiguo Egipto. Aunque la destilación fue practicada como un arte por más de 2 mil años, fue hasta el siglo XIX cuando se le dió por primera vez descripción matemática.

El proceso de destilación es usado para separar compuestos utilizando las diferencias en sus presiones de vapor. Si la mezcla original contiene dos componentes, el proceso de destilación se dice ser *binario*. Si el número de componentes es mayor, este es llamado proceso multicomponente. Los procesos de destilación también se clasifican de acuerdo al tipo de separación como equilibrada, diferencial o fraccionada, de acuerdo al medio como al vapor, al vacío o a presión y de acuerdo al modo de operación como direccionada o continua.

Nuestro interés estará puesto sobre un proceso típico de destilación: una **Columna de Destilación Binaria, Continua y de Evaporación**.

Una columna de destilación con estas características es como la que se muestra en la Fig. 5.1. La columna tiene varios platos numerados  $1, 2, \dots, N$  de arriba hacia abajo. Una mezcla de dos componentes A y B (por ejemplo, alcohol y agua) es alimentada en la columna cerca del centro y sobre un plato de alimentación con una razón de flujo  $F_a$ . En la base de la columna, el líquido cae a un calentador a base de gas como se muestra en la Fig. 5.1. El vapor sube por la columna a través de los platos. Arriba de la columna, el vapor es completamente condensado usando agua fría y recolectado en un recipiente para su retralimentación. De dicho recipiente, el líquido es parcialmente bombeado de nuevo sobre el plato más alto de la columna y otro tanto es parcialmente removido como el *producto destilado*. Similarmente, una parte del líquido del fondo es removido abajo. La diferencia de temperatura entre el producto de arriba y el producto de abajo en la columna da lugar a un gradiente de concentración que causa que los dos componentes se separen.

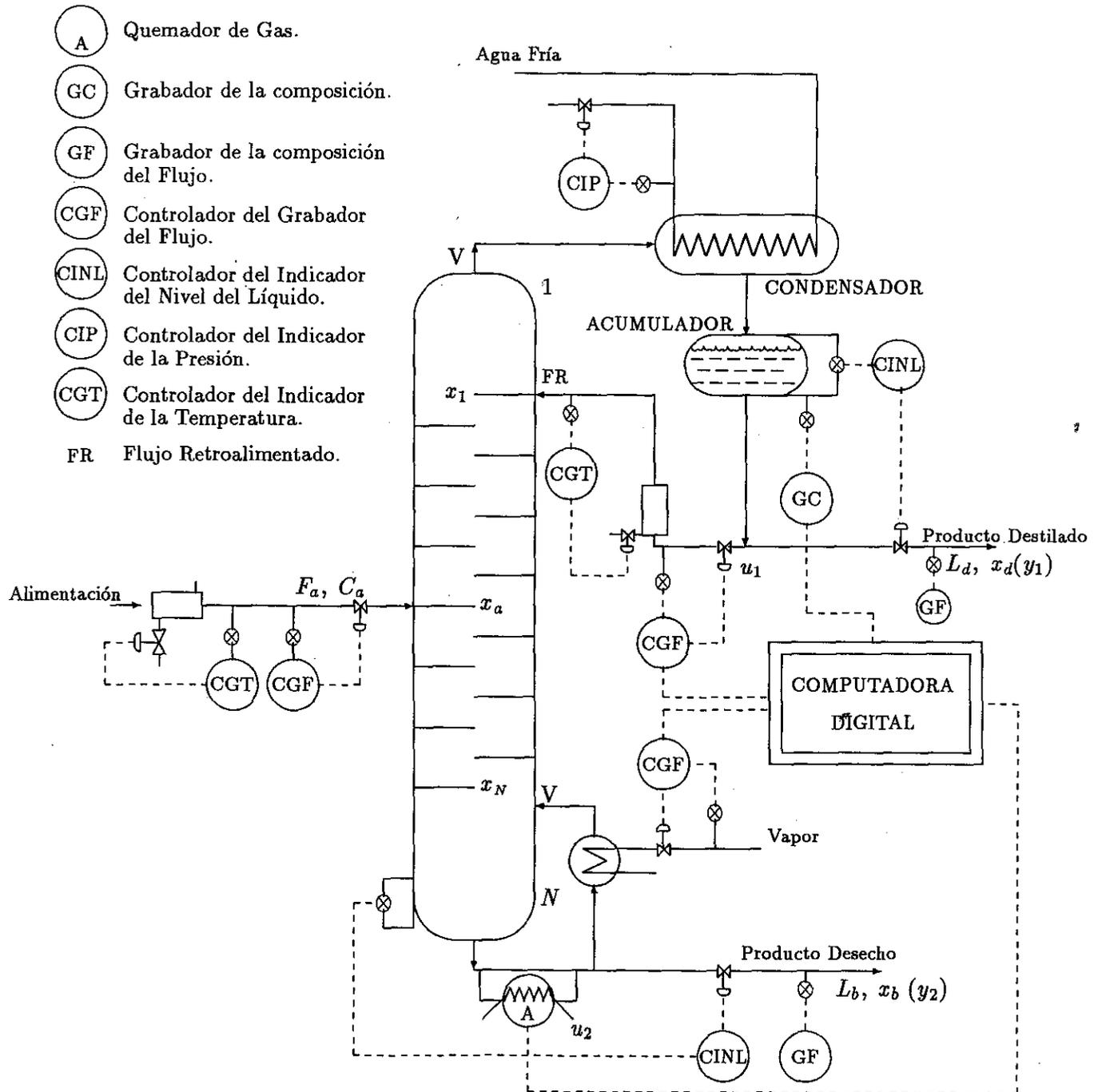


Fig. 5.1 Columna de Destilación Binaria.

Para obtener un modelo matemático de la columna de destilación considerada, denotaremos por  $x_i$  la composición del líquido definida como la fracción de A en la mezcla en el  $i$ -ésimo plato. Entonces,  $x_1, x_N$  y  $x_a$  se refieren a la composición del líquido en los platos de arriba, abajo y de alimentación respectivamente. Sean  $C_a, x_d$  y  $x_b$  las composiciones de los productos de alimentación, destilado y desecho respectivamente. Entonces, las composiciones representan a las variables de estado del sistema y la complejidad de un modelo matemático depende tanto del número de platos en la columna así como de los elementos adicionales usados para describir al sistema exactamente.

El objetivo principal del control en el sistema es mantener las composiciones de los productos destilado y desecho de tal manera que estas alcancen las especificaciones deseadas las cuales se indican en términos de su pureza, esto es,  $x_d$  y  $x_b$  respectivamente. El control tiene que ser alcanzado en presencia de una razón de flujo, composición y temperatura de la alimentación variantes. La razón del flujo del líquido en el flujo retroalimentado (arriba) y la razón del flujo del vapor (abajo) son dos variables típicas que se usan para propósitos de control. Por lo tanto, la posición de la válvula  $u_1$  que gobierna al primero y la posición de la válvula  $u_2$  que determina la razón de flujo del vapor al salir del calentador corresponderían a las variables de control usadas.

El modelo matemático de la columna de destilación se determina en base a un balance masa-energía. Como ya se mencionó, el número de variables de estado depende del número de platos así como de elementos adicionales incluidos en el modelo. En todo caso, el balance masa-energía se efectúa alrededor de cada uno de estos elementos dando como resultado un número grande de ecuaciones algebraicas y diferenciales y por lo tanto, un sistema dinámico de orden grande.

Para una descripción completa de la columna, se debe también tomar en cuenta la composición del vapor  $y_i$  del componente A de la mezcla en el  $i$ -ésimo plato. Se sabe que  $x_i$  y  $y_i$  están relacionadas mediante la *volatilidad relativa*  $\alpha_i$  definida como

$$\alpha_i = \frac{y_i/(1 - y_i)}{x_i/(1 - x_i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1.1)$$

Luego, si se asume que

1. La volatilidad relativa es constante a través de toda la columna de destilación, esto es,  $\alpha_i = \alpha$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Entonces, podemos usar  $x_i$  como variable de estado en vez de la paraja  $(x_i, y_i)$ . Así, la dinámica en la columna puede expresarse mediante la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d(H_i x_i)}{dt} &= V_{i+1} y_{i+1} - V_i y_i + L_{i-1} x_{i-1} - L_i x_i \\ \frac{d(H_i)}{dt} &= V_{i+1} - V_i + L_{i-1} - L_i \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

donde  $H_i$  es la *retención* y  $L_1$  y  $V_i$  son la razón de flujo del líquido y vapor respectivamente en el plato  $i$ . La ecuación (5.1.2) representa el balance de la masa en cada plato y vale para  $i = 1, \dots, N$ , pero si  $i \neq a$ , donde  $a$  es el plato de alimentación.

Cuando  $i = a$ , tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d(H_a x_a)}{dt} &= V_{a+1} y_{a+1} - V_a y_a + L_{a-1} x_{a-1} - F_a C_a \\ \frac{d(H_a)}{dt} &= F_a + L_{a-1} - L_a.\end{aligned}\tag{5.1.3}$$

Las ecuaciones para el condensador y calentador se pueden derivar similarmente.

2. Un gasto de alimentación simple es alimentado como un líquido saturado sobre el plato de alimentación. La composición en el gasto de alimentación es igual a la del líquido sobre el plato de alimentación.
3. El vapor que sube a través de la columna es totalmente condensado en el condensador.
4. Las retenciones de líquido en cada plato, condensador y calentador son constantes y perfectamente mezcladas.
5. La retención de vapor es despreciable en todo el sistema.
6. Las razones de flujo molar del vapor y el líquido a través de las secciones son constantes.
7. Cualquier retraso en la tubería por donde pasa el vapor desde arriba de la columna hasta el condensador y la tubería de retroalimentación sobre el plato más alto se pueden despreciar.
8. La dinámica en el acumulador también se puede despreciar.

la dinámica del modelo puede expresarse por

$$\begin{aligned}\text{Condensador:} & \quad \dot{x}_d = \frac{V}{H_d}(y_1 - x_d) \\ n\text{-ésimo plato, } n = 1, 2, \dots, a-1: & \quad \dot{x}_n = \frac{V}{H}(y_{n+1} - y_n) + \frac{L_1}{H}(x_{n-1} - x_n) \\ \text{plato de alimentación:} & \quad \dot{x}_a = \frac{V}{H}(y_{a+1} - y_a) + \frac{L_1}{H}(x_{a-1} - x_a) \\ m\text{-ésimo plato, } m = a+1, \dots, N: & \quad \dot{x}_m = \frac{V}{H}(y_{m+1} - y_m) + \frac{L_1}{H}(x_{m-1} - x_m) \\ \text{En el fondo} & \quad \dot{x}_b = \frac{V}{H_b}(x_b - y_b) + \frac{L_2}{H_b}(x_N - x_b)\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

donde  $x_0 = x_d$  y  $y_{N+1} = y_b$ . Nótemos que  $V$  y  $H$  se suponen constantes a través de la columna, la razón de flujo del líquido constante ( $= L_1$ ) arriba y ( $= L_2$ ) abajo del plato de alimentación y  $L_2 = L_1 + F_a$ . Además, como se remueve una parte del producto arriba como producto destilado con razón de flujo  $L_d$  y una fracción del producto de abajo con una razón de flujo  $L_b$ , tenemos que  $L_1 + L_d = V$  y  $L_b + V = L_2$ .

A pesar de las suposiciones 1)–8), la ecuación (5.1.4) la cual representa a la columna de destilación no es lineal debido a la relación entre  $x_i$  y  $y_i$  en la ecuación (5.1.1). Las salidas de interés son las composiciones del producto destilado arriba  $x_d$  y el producto desecho abajo  $x_b$ . El objetivo es mantener estas cantidades dentro de ciertos límites específicos bajo razones de alimentación  $F_a$  variantes y diferentes composiciones  $C_a$ . Varias variables de control pueden elegirse para alcanzar este objetivo. Sin embargo, en lo que sigue consideraremos la razón de flujo del líquido  $L_1$  arriba y la razón de flujo del vapor  $V$  abajo como las entradas de control. A su vez, estas razones pueden controlarse manipulando la posición de la válvula  $u_1$  en el recipiente de retroalimentación y la posición de la válvula  $u_2$  en el calentador, suponiendo características lineales para estas válvulas.

Aún cuando el modelo de la columna de destilación establecido arriba está simplificado, este sirve para remarcar la enorme complejidad del proceso. Como la ecuación (5.1.4) no es lineal, para poder tener una manipulación matemática simple, puede ser linealizada alrededor de un punto de operación nominal como

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} z$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} \\ b_{n,1} & b_{n,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ d_{a,1,1} & d_{a,2} \\ 0 & d_{a+1,2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & d_{n,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (5.1.5)$$

$$y_1 = z_1,$$

$$y_2 = z_n.$$

donde el estado, la entrada, la salida y las perturbaciones estan definidas como

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \\ \Delta x_b \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} u_1 &= \Delta L_1, & u_2 &= \Delta V, \\ y_1 &= \Delta x_d, & y_2 &= \Delta x_2, \\ v_1 &= \Delta F_a, & v_2 &= \Delta C_a. \end{aligned}$$

La ecuación (5.1.5) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu + Dw, \\ y &= Cz. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

El modelo en la ecuación (5.1.6) consiste de  $N + 1$  variables de estado, dos entradas, dos salidas y dos perturbaciones. Las entradas son cambios en la razón de flujo del líquido y vapor respectivamente. Las salidas son cambios en las composiciones de los productos destilado y desecho. Las perturbaciones son desviaciones del conjunto de puntos de la composición de la alimentación y razón de flujo de la alimentación.

Como el proceso natural es no lineal, el controlador diseñado al linealizar el modelo es exacto únicamente en una vecindad del punto de operación real. Por lo tanto, si existe un gran conjunto de puntos de perturbación o cambios en la alimentación, un controlador fijo puede ser inadecuado y dar como resultado un funcionamiento pobre. Además, aún cuando los parámetros del sistema linealizado son conocidos, la ecuación (5.1.5) contiene un gran número de variables ( $\approx N$ ) así como parámetros ( $\approx N^2$ ) los cuales necesitan un modelo de orden reducido para una implementación práctica. Esta puede llegar a ser una tarea bastante difícil, especialmente sobre un amplio rango de puntos de operación. Por lo tanto, el controlador tiene que ser afinado de vez en cuando para proveer un funcionamiento satisfactorio bajo diferentes condiciones de operación.

Mientras que el comentario anterior asume que los parámetros de la planta en cualquier punto de operación pueden ser calculados, en la práctica, un conocimiento previo acerca de la dinámica del proceso únicamente es parcialmente disponible. Por lo tanto, en general, los elementos de las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en la ecuación (5.1.6) pueden considerarse como desconocidos. Esto hace la afinación de los parámetros del control muy costosa y de mucho tiempo. Por lo tanto, es deseable tener controladores que compensen los cambios en los parámetros del proceso y condiciones de operación sin sacrificar el funcionamiento. Esto demanda la popularidad del control adaptativo en los procesos de Ingeniería para controlar composiciones de productos en las columnas de destilación.

El modelo de la columna de destilación en la ecuación (5.1.6) puede ser expresado en el dominio de frecuencia como

$$y_p(t) = G(s)u(t) + D(s)v(t) \quad (5.1.7)$$

donde  $y_p = [y_1, y_2]^T$ ,  $u = [u_1, u_2]^T$ ,  $v = [v_1, v_2]^T$  y  $G(s)$ ,  $D(s)$  son matrices de transferencia  $2 \times 2$ . Los elementos de estas matrices en general son funciones de transferencia de orden  $N$ ,

donde  $N$  es el número de platos en la columna. Como  $N$  es grande el controlador resultante es de orden alto y por lo tanto no muy conveniente. Los elementos de  $G(s)$  tiene que ser aproximados por funciones de transferencia de orden bajo con retraso en el tiempo.

Cuando no hay adaptación, los errores en el estado son de magnitud considerable cuando hay perturbaciones presentes, si la acción integral (control PI) se remueve de los métodos del control tradicional (control clásico). Estos errores son grandes si los parámetros de control están lejos de sus valores reales. En cambio cuando estos parámetros son ajustados adaptativamente, el funcionamiento es considerablemente mejorado, esto es, se tiene un mejor rechazo de las perturbaciones presentes. Esto se puede apreciar en las Figs. 5.2 y 5.3 donde los resultados experimentales fueron obtenidos de una columna de destilación piloto ([29], Martín-Sánchez).

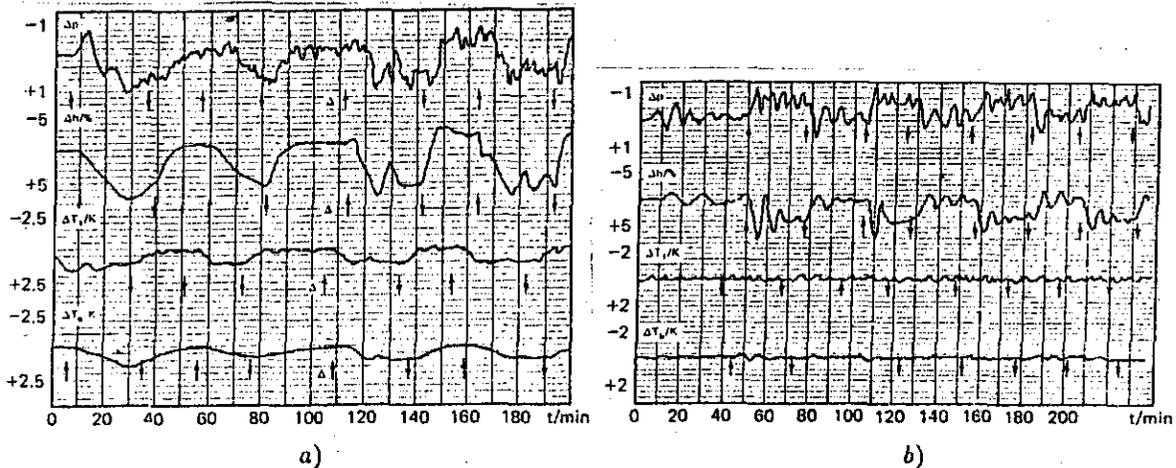


Fig. 5.2 Control Clásico a) y Control PI Clásico b).

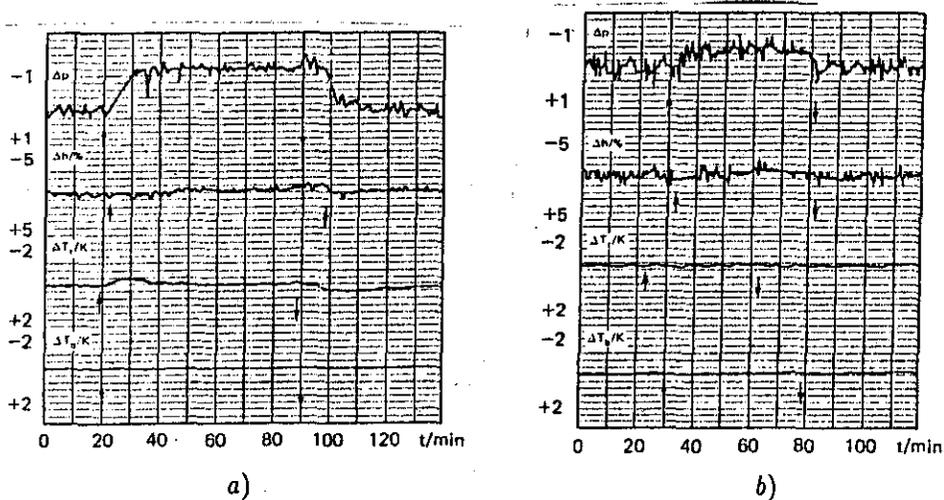


Fig. 5.3 Control Adaptativo a) y Control PI Ajustable b).

En ambos casos, se tienen dos variables de control  $\Delta\rho, \Delta h$  y dos variables de salida  $\Delta T_t, \Delta T_b$ .  $\Delta\rho$  corresponde a la desviación en la razón de flujo de la retroalimentación, la fracción entre la cantidad retroalimentada y la cantidad de producto destilado removido.  $\Delta h$  corresponde a los cambios en la fuente de calentamiento.  $\Delta T_t$  y  $\Delta T_b$  corresponden a las desviaciones en las temperaturas arriba y abajo de la columna respectivamente. Aunque el interés primario es sobre las composiciones de los productos de arriba y de abajo en la columna, las temperaturas son usadas en lugar de las composiciones como variables de salida. Esto se debe a la dificultad que se tiene en la medición de las composiciones así como al hecho que, bajo condiciones isobáricas, las composiciones son proporcionales a las temperaturas.

En la Fig. 5.2, las respuestas se obtuvieron utilizando un controlador retroalimentado con parámetros fijos Fig. 5.2 a) y un controlador fijo PI Fig. 5.2 b). Las flechas indican la dirección del cambio.  $\Delta T_t$  y  $\Delta T_b$  se ven más pequeños en la Fig. 5.2 b) en comparación con los de la Fig. 5.2 a) lo cual es producto de la acción integral.

En la Fig. 5.3, el desarrollo del lazo de control, cuando los parámetros de control son ajustados adaptativamente, indica un buen rechazo a las perturbaciones. Se ve que las entradas de control generadas por el controlador adaptativo Fig. 5.3 a) tienen amplitudes menores lo cual implica grandes ahorros de energía. El rechazo de perturbaciones también se encuentra que es mejor. Sin embargo, el introducir una acción integral con parámetros ajustables Fig. 5.3 b) da resultados mucho mejores.

**Conclusión:** El análisis de la columna de destilación dado y los resultados presentados para un sistema específico, indican que en tales situaciones es recomendable hacer aproximaciones antes de disponer de los métodos del control adaptativo. Los resultados que se obtienen indican que los métodos del control adaptativo son suficientemente robustos y prácticamente exitosos cuando tales aproximaciones substanciales han sido hechas. Esto simplemente sirve para subrayar el hecho que la teoría es relativamente nueva en esta área.

Las aplicaciones de los métodos del control adaptativo a columnas de destilación en *gran-escala* usualmente son secretos comerciales de cada compañía. Sin embargo, recientemente han sido publicados algunos resultados de la aplicación a columnas de *gran-escala*. Los esquemas adaptativos descritos en tales publicaciones (por ejemplo, [?], Unbehauen) indican que cuando tales esquemas adaptativos fueron aplicados a grandes columnas de reciclado, la energía ahorrada estuvo en un rango de 10% en relación con el control convencional. Al mismo tiempo, la continuidad en la calidad del producto destilado también fue incrementada así como la pureza del producto de desecho fue mejorada de 200 ppm (partes-por-millón) con control PI convencional a 20 ppm con control adaptativo. Otros investigadores en el área de control de procesos quienes han tenido la experiencia de aplicar control adaptativo a columnas de destilación, comparten el optimismo de Unbehauen y sus discípulos.

Como comentario final, cabe señalar que esto es algo bastante interesante tanto teórica como prácticamente y tiene mucho arsenal matemático detrás de ello, ya que todo lo realizado es con control adaptativo multivariado.

En lo que fue el trabajo, solo presentamos una introducción a los métodos del control adaptativo para sistemas simple-entrada, simple-salida y tal vez en mi caso aún me falte estudiar mucho acerca del control y en especial del control multivariable el cual recomiendo como tema atractivo y digno de estudio al que se haya atrevido o se atreva a leer este trabajo.

**Maximino Dórame Velásquez**  
**9 de Julio de 1996.**

## Anexo A

# Resultados de Diferenciación

**Resultado 1.** Dada  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  con  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ , tenemos

i)  $\nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}] = 2\mathbf{x}^T \mathbf{Q},$

ii)  $\frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}] = 2\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}}.$

La traza de un operador lineal  $A$  se define como

$$\text{Tr}(A) = \text{traza de } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

**Propiedades de la Traza:**

a)  $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

b)  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

c) Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces

i)  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ji}, \quad AB = BA \text{ o } AB \neq BA.$

ii)  $\text{Tr}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \text{Tr}(\mathbf{b}\mathbf{a})$  ( $m = 1$  en el inciso c), i)).

iii) Si  $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , entonces

$$\mathbf{a}^T C \mathbf{a} = \text{Tr}(\mathbf{a}^T C \mathbf{a}) = \text{Tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^T C) = \text{Tr}(C \mathbf{a} \mathbf{a}^T).$$

**Resultado 2.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $B = B^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces,

$$\frac{d}{dA} [\text{Tr}(ABA^T)] = 2AB.$$

**Resultado 3.** Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , entonces  $AB^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y

$$\frac{d}{dA} [\text{Tr}(AB^T)] = B \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dA} [\text{Tr}(BA^T)] = B.$$

**Resultado 4.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Entonces,

- i)  $\frac{d}{dA} [\text{Tr}(BACA^T)] = B^T AC^T + BAC,$
- ii)  $\frac{d}{dA} [\text{Tr}(BACA)] = B^T A^T C^T + C^T A^T B^T,$
- iii)  $\frac{d}{dA} [\text{Tr}(BAC)] = B^T C^T,$
- iv)  $\frac{d}{dA} [\text{Tr}(BA^T C)] = CB.$

**Resultado 5.**

$$\frac{d}{dt} [\text{Tr}(\Phi^T(t)\Phi(t))] = \text{Tr}(\dot{\Phi}^T \Phi(t) + \Phi^T(t)\dot{\Phi}(t)) = \text{Tr}(2\dot{\Phi}^T(t)\Phi(t)).$$

**Resultado 6.** En algunos de los casos de la Sección 3.2 se utiliza un función candidata de Lyapunov de la forma

$$V(e, \Phi, \Psi) = e^T P e + \text{Tr}(\Phi^T \Phi + \Psi^T \Psi),$$

donde P es la solución de la ecuación matricial de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q < 0 \quad y$$

$$\dot{e} = A e + \Phi x + \Psi u.$$

Tenemos,

$$V = e^T P e + \text{Tr}(\Phi^T \Phi) + \text{Tr}(\Psi^T \Psi),$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + Tr \left( 2\dot{\Phi}^T \Phi + 2\dot{\Psi}^T \Psi \right) \\
 &= [Ae\Phi x + \Psi u]^T P e + e^T P [Ae + \Phi x + \Psi u] + Tr \left[ 2\dot{\Phi}^T \Phi + 2\dot{\Psi}^T \Psi \right] \\
 &= e^T (A^T P + P A) e + x^T \Phi^T P e + e^T P \Phi x + e^T P \Psi u + Tr \left[ 2\dot{\Phi}^T \Phi + 2\dot{\Psi}^T \Psi \right] \\
 &= e^T (A^T P + P A) e + Tr \left[ 2e^T P \Phi x \right] + Tr \left[ 2e^T P \Psi u \right] + Tr \left[ 2\dot{\Phi}^T \Phi + 2\dot{\Psi}^T \Psi \right] \\
 &= e^T (A^T P + P A) e + 2Tr \left[ (x P e^T P) \Phi + \dot{\Phi}^T \Phi \right] + 2Tr \left[ (u e^T P) \Psi + \dot{\Psi}^T \Psi \right] \\
 &= e^T (A^T P + P A) e + 2Tr \left[ (x e^T P + \dot{\Phi}^T) \Phi \right] + 2Tr \left[ (u e^T P + \dot{\Psi}^T) \Psi \right]
 \end{aligned}$$

Eligiendo,  $\dot{\Phi} = -P e x^T$   $\dot{\Psi} = -P e u^T$ , obtenemos

$$\dot{V} = e^T [A^T P + P A] e = -e^T Q e \leq 0,$$

en el espacio  $(e, \Phi, \Psi)$ . Esto hace de  $V$  una función de Lyapunov la cual asegura que el origen de este espacio es uniformemente estable.

## REFERENCIAS

## Libros:

- [1] V. I. ARNOLD, "*Ordinary Differential Equations*", M.I.T Press, Cambridge, MA. 1973.
- [2] K. J. ÅSTRÖM AND B. WITTENMARK, "*Adaptive Control*", Academic Press, New York, 1980.
- [3] G. BACHMAN Y L. NARICI, "*Análisis Funcional*", Ed. Tecnos, 1981.
- [4] R. E. BELLMAN, "*Stability of Differential Equations*", McGraw-Hill, New York, 1953.
- [5] R. E. BELLMAN, "*Adaptive Control - A Guided Tour*", Princeton University Press, Princeton, 1961.
- [6] J. L. CASTI, "*Dynamical Systems and Their Applications, Linear Theory*" Academic Press, 1977.
- [7] C. T. CHEN, "*Introduction to Linear Systems Theory*" (2<sup>nd</sup> Edition), Holt, Rinehart and Winston, New York, 1986.
- [8] R. GONZÁLEZ GONZÁLEZ, "*Estabilidad con Teoría de Control Lineal*" (Tesis), Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, 1992.
- [9] R. GONZÁLEZ GONZÁLEZ, "*Programación con MATLAB*" (Notas-Manual), Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, 1995.
- [10] W. HAHN, "*Theory and Applications of Lyapunov's Direct Method*", Prentice-Hall, Inc., EnglewoodCliffs, N.J., 1963.
- [11] W. HAHN, "*Stability of Motion*", Springer-Verlag, New York, 1967.

- [12] M. W. HIRSH AND S. SMALE, "*Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*",  
Academic Press, New York, 1974.
- [13] A. ISIDORI, "*Nonlinear Control Systems*" (Second Edition),  
Springer-Verlag, 1989.
- [14] E. KREYSZIG, "*Introductory Functional Analysis with Application*"  
John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [15] J. P. LASALLE AND S. LEFSCHETZ, "*Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications*",  
Academic Press, New York, 1961.
- [16] S. LEFSCHETZ, "*Stability of Nonlinear Control Systems*",  
Academic Press, New York, 1963.
- [17] E. B. LEE AND L. MARKUS, "*Foundations of Optimal Control Theory*",  
Wiley, New York, 1967.
- [18] K. S. NARENDRA AND A. M. ANNASWAMY, "*Stable Adaptive Systems*",  
Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [19] K. OGATA, "*Dinámica de Sistemas*",  
Prentice-Hall, México, 1987.
- [20] N. F. POWELL, "*Feedback Control and Dynamical Systems*",  
Plenum Press, New York, 1966.
- [21] N. ROUCHE, P. HABETS AND M. LALOY, "*Stability Theory by Liapunov's Direct Method*",  
Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [22] H. L. ROYDEN, "*Real Analysis*",  
MacMillan, New York, 1963.
- [23] J. C. WILLIAMS, "*The Analysis of Feedback Systems*" (Second Edition),  
Springer-Verlag, New York, 1971.
- [24] M. VIDYASAGAR, "*Nonlinear Systems Analysis*" (Second Edition),  
Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [25] W. M. WONHAM, "*Linear Multivariable Control*" (Second Edition),  
Springer-Verlag, 1979.

## Artículos:

- [26] K. J. ÅSTRÖM, "Theory and Application of Adaptive Control - A Survey", *Automatica* Vol. 19, pp. 471-486, 1983.
- [27] K. J. ÅSTRÖM AND B. WITTENMARK, "On Self-tuning Regulators", *Automatica* Vol. 9, pp. 185-199, 1973.
- [28] K. J. ÅSTRÖM AND B. WITTENMARK, "Self-Tuning Controllers Based on Pole-Zero Placement", *Procs. IEE Part D*, Vol. 127, pp. 120-130, 1980.
- [29] J. M. MARTIN-SANCHEZ AND S. L. SHAH, "Multivariable Adaptive Predictive Control of a Binary Distillation Column", *Automatica* Vol. 20, pp. 607-620, 1984.
- [30] B. C. MOORE, "Pole-zero Placement for Control Purposes", *IEEE Trans. Automatic Control*, pp. 689-692, 1976.
- [31] H. UNBEHAUEN AND P. WIEMER, "Applications of Multivariable Adaptive Control Schemes to Distillation Columns",  
In Proceedings of the 4<sup>th</sup> Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory, Yale University, New Haven, CT, 1985.
- [32] B. WITTENMARK AND K. J. ÅSTRÖM, "Practical Issues in the Implementation of Self-Tuning Control", *Automatica* Vol. 20, pp. 595-605, 1984.