UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

"Análisis de la Convergencia de las Series de Fourier"

TESIS

Que para obtener el Título de:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presentan:

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Jorge Usbaldo Fierros Bobadilla

Hermenegildo Rivera Martínez

Hermosillo, Sonora. Septiembre de 1996.

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

"Análisis de la convergencia de las series de Fourier"

TESIS

que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presentan:

JORGE USBALDO FIERROS BOBADILLA

HERMENEGILDO RIVERA MARTINEZ

HERMOSILLO, SONORA SEPTIEMBRE 1996.

A NUESTRO DIRECTOR M.C. FERNANDO LUQUE

POR ACCEDER DIRIGIR EL PRESENTE TRABAJO, ASI

COMO EL APOYO Y LA PACIENCIA QUE DE EL RECIBIMOS.

GRACIAS.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

AGRADEZCO A TODA MI FAMILIA POR SU GRAN APOYO Y CONFIANZA Y DE UNA MANERA MUY ESPECIAL A MIS PADRES **ESTHER BOBADILLA RUELAS Y GUILIBALDO FIERRO GASTELUM** POR BRINDARME LA OPORTUNIDAD DE CONCLUIR UNA CARRERA, POR SU SACRIFICIO, SUS CONSEJOS Y SU AMOR.

GRACIAS.

A MI ESPOSA **MARIA DE LOS ANGELES PERALTA CORDOVA** POR SU PACIENCIA Y GRAN APOYO EN TODO MOMENTO ASI COMO A MI HIJO **JHONATAN** POR SU SONRISA Y GRAN VITALIDAD QUE SE CONTAGIA.

GRACIAS.

A MI HERMANA **LUPITA** POR SU AYUDA INCONDICIONAL EN TODO MOMENTO.

GRACIAS.

JORGE USBALDO FIERROS BOBADILLA

AGRADEZCO PRIMERAMENTE A **DIOS** POR HABERME PERMITIDO CONCLUIR SATISFACTORIAMENTE ESTE TRABAJO.

A MIS PADRES **JUANITA Y JOSE** POR DARME LA OPORTUNIDAD DE ESTUDIAR Y POR EL APOYO Y LAS PALABRAS DE ALIENTO QUE SIEMPRE ENCONTRE EN ELLOS.

GRACIAS VIEJOS.

A MIS **HERMANOS** Y SUS RESPECTIVAS **FAMILIAS** POR LA CONFIANZA QUE ME BRINDARON.

GRACIAS.

AL **COLEGIO DE BACHILLERES** POR EL APOYO BRINDADO.

AL **DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS** POR LA FACILIDADES PRESTADAS PARA LA ELABORACION DE ESTE TRABAJO.

GRACIAS.

A **JOSE MOISES** ESA PERSONITA QUIEN FUE LA QUE HIZO QUE TUVIERA MAS ALIENTO PARA PODER TERMINAR CON ESTE TRABAJO, QUE CUANDO SENTIA GANAS DE ABANDONARLO, EL SOLO PENSAR EN EL HACIA QUE ME VOLVIERA EL ANIMO DE CONTINUAR ADELANTE.

GRACIAS HIJO.

A MI ESPOSA **ROSA MARIA REYNOSO** , QUIEN ME TUVO LA PACIENCIA DE SOPORTAR LOS MOMENTOS DIFICILES Y QUE SIEMPRE DEPOSITO SU CONFIANZA EN MI.

GRACIAS AMOR.

FINALMENTE A TODOS AQUELLOS QUIENES CREYERON EN MI.

GRACIAS.

HERMENEGILDO RIVERA MARTINEZ.

MERE.

I N D I C E .

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Introducción

CAPITULO UNO: CONVERGENCIA PUNTUAL.

1.1.- Breve introducción histórica..... 1
1.2.- Series trigonométricas y series de Fourier.. 6
1.3.- Núcleo de Dirichlet y Teorema de Riemman-Lebesgue.....9
1.4.- Criterios de convergencia.....21
1.4.1.- Criterio de Dini 27
1.4.2.- Criterio de Jordan.....29
1.4.3.- Criterio de de La Valleé-Poussin....33
1.5.- Relación entre los criterios de convergencia.....34

CAPITULO DOS: OTROS TIPOS DE CONVERGENCIA.

2.1.- Convergencia absoluta y uniforme de la serie de Fourier.....42
2.2.- Convergencia de las sumas de Féjer.....46

CAPITULO TRES: CONVERGENCIA EN L2([a,b]).

3.1.- Análisis de Fourier en los espacios L2([a,b]).....51
3.1.1.- Desigualdad de Bessel.....51
3.1.2.- Identidad de Parseval.....53
3.1.3.- Teorema de Riesz-Fisher.....56
3.1.4.- Teorema de convergencia.....58
3.1.5.- Transformación de los resultados anteriores al caso particular de L2([a,b]).....59

CAPITULO CUATRO: FUNCIONES CONTINUAS CON SERIE DE FOURIER DIVERGENTE.

4.1.- Existencia de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge.....62

4.2.- Serie de Fourier de Funciones continuas.....69

APENDICE.....75

BIBLIOGRAFIA.....91

INTRODUCCION

La representación de una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica fué estudiado por algunos investigadores a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX.

Uno de estos investigadores fué Joseph Fourier, el cual dió una primera " demostración " de que cualquier función admite una representación en serie trigonométrica.

Después de esto se presentó el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales dicha serie converge.

En el presente trabajo analizaremos las condiciones bajo las cuales se da la convergencia de la serie trigonométrica a la función que la genera.

En el capítulo uno analizaremos la convergencia puntual de la serie de Fourier, iniciando con una breve reseña histórica de la forma en la cual se estuvó atacando el problema de la representación en serie trigonométrica de una función y de la convergencia de dicha serie.

En otra sección del capítulo uno analizamos dos resultados fundamentales en el desarrollo de este trabajo en los cuales nos apoyaremos, para demostrar los criterios de convergencia que se analizan en este capítulo.

En el capítulo dos, analizamos otro tipo de convergencia, como lo es la convergencia absoluta y uniforme de la serie de Fourier y la convergencia de las sumas de Féjer.

En el tercer capítulo , nos enfocaremos en demostrar que para toda función en el espacio de las funciones de cuadrado integrable en un intervalo cerrado, su serie de Fourier converge a ella.

Por último en el capítulo cuatro, a diferencia de los tres iniciales , analizaremos el conjunto de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge y daremos una idea de la cardinalidad de este conjunto.

C A P I T U L O U N O.

CONVERGENCIA PUNTUAL.

En este capítulo, iniciaremos con una breve reseña de la forma de como se atacó el problema de la convergencia de la serie de Fourier, y mencionaremos algunos resultados recientes.

Definiremos también el concepto de serie trigonométrica y serie de Fourier, analizando resultados importantes, los cuales nos permitirán demostrar algunos criterios que nos proporcionan condiciones para que se dé la convergencia puntual de la serie de Fourier.

Por último analizaremos la relación que existe entre los criterios.

1.1.- BREVE INTRODUCCION HISTORICA.

En esta sección nuestro próposito es el de dar una breve reseña histórica del desarrollo que tuvo la teoría de las series de Fourier.

Es importante aclarar que el análisis en esta sección es el de conocer el tratamiento que hicieron algunos personajes, al problema de la cuerda vibrante, así como el problema de la convergencia de la serie de Fourier.

El problema de la cuerda vibrante es el de encontrar una función $f(x,t)$ que represente el desplazamiento de la cuerda.

A mediados del siglo XVIII , se llegó a la ecuación que representa el movimiento de la cuerda vibrante, la cual está dada por:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2 \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (A)$$

donde "y" es el desplazamiento transversal en el instante "t" del punto "x" de una cuerda uniforme sujeta por sus extremos a dos puntos en el eje "x", distantes entre si π. Esta ecuación fué

estudiada, principalmente por Leonhard Euler, Jean Le Rond D'Alembert, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange y Joseph Fourier.

D'Alembert y Euler en 1747 y 1748 respectivamente, encontraron que la solución a la ecuación (A) es:

$$y = f(x + ct) + g(x - ct) \qquad (B)$$

donde f y g quedan determinadas por las condiciones iniciales.

Después de esto el problema fué el de ver qué características deben de cumplir las funciones f y g en (B).

Por un lado Euler afirmaba que estas funciones podían sustituirse por funciones arbitrarias y D'Alembert sostenía que la función g debía de tener propiedades que la restringieran al conjunto de funciones conocidas hasta entonces.

Posteriormente en 1753, Daniel Bernoulli, afirmó que el desplazamiento de la cuerda se podía expresar como:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ Sen } nx \text{ Cos } nt$$

la cuál para t = 0 se reduce a:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ Sen } nx$$

sin embargo no ofreció argumentos matemáticos para calcular los coeficientes b_n.

Una de las objeciones que presentaba Euler a la serie trigonométrica de Bernoulli, era el carácter periódico e impar de las funciones senos, que la integran, que impediría que se pudiera representar de esta manera una función arbitraria.

Lagrange en 1759, presentó un análisis nuevo del problema defendiendo la ecuación (B) y la interpretación hecha por Euler, sin embargo en este análisis obtiene fórmulas muy parecidas a las de Bernoulli.

En 1807, Fourier presentó una monografía sobre la transmisión del calor, en la cuál presentaba la ecuación de difusión que tenía la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dt} \qquad (C)$$

donde "y" representa la temperatura en un punto "x" de una barra horizontal en el instante "t" y resolviendo por el método de separación de variables las ecuaciones resultantes y sustituyendo la ecuación inicial y = f(x) para t = 0 obtuvó:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sen } nx) \qquad (D)$$

donde los coeficientes están dados por:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ Cos } nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ Sen } nx\, dx, \; x \in [0, 2\pi]$$

En el caso de ciertos cuerpos y ciertas condiciones iniciales solo aparecían en (D) los términos en senos, del tipo en el que había insistido ya, Bernoulli, al tratar el problema de la cuerda vibrante y en el caso de otras configuraciones solo aparecían los términos en cosenos y la constante a_o.

Otra cuestión fundamental relativa a las series de Fourier mencionada al inicio de esta sección fué el de su convergencia.

Debemos mencionar que este problema constituyó un reto muy interesante para el análisis matemático de la época, no solo por la importancia que estaba alcanzando el análisis de Fourier para la matemática aplicada, sino también para la mezcla de funciones, límites e integración que aparecían en torno al problema de la convergencia.

Una de las primeras demostraciones fué publicada en 1820 por Poisson, posteriormente, Cauchy en 1826 intentó demostrar la convergencia integrando término a término la serie, es decir suponia la convergencia que se quería demostrar.

Un año después Cauchy presentó otra demostración, en esta

también hace algunas hipótesis de convergencia y es muy restrictiva al tipo de funciones que se puede aplicar.

Uno de los errores de Cauchy era el de suponer que si;

$$a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ y si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente entonces } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

también convergen.

Este error fué detectado por Peter Lejeune-Dirichlet, en 1829, dando el siguiente contraejemplo:

$$a_n = (-1)^n n^{-1/2} \qquad \text{y} \qquad b_n = n^{-1} + (-1)^n n^{-1/2}.$$

Dirichlet desarrolló su propia demostración con el objeto de establecer condiciones para la convergencia de la serie de Fourier, estas condiciones agudizaron el choque con el Teorema de Cauchy sobre la continuidad de la función suma de una serie convergente de funciones continuas, debido a que incluían la posibilidad de que la función representada fuera discontinua en un número finito de puntos.

La contribución más importantes de la teoría de las series de Fourier después de que Dirichlet estableciera sus condiciones, fué la de Bernahard Riemann en 1854 sobre series trigonométricas. El trabajo de Riemann fué publicado hasta después de su muerte, por su amigo Dedekind en 1868.

En ese trabajo Riemann construyó funciones con una cantidad infinita de discontinuidades y estudió sus integrales así como la posibilidad de representarla por series de Fourier.

Riemann buscó condiciones necesarias para la convergencia de la serie de Fourier, posteriormente Rudolph Lipschitz en 1864 aborda el problema de como extender las condiciones suficientes de Dirichlet al caso de un número infinito de discontinuidades.

Durante el resto del siglo XIX se obtuvieron condiciones todavía mas generales para la convergencia de la serie de Fourier incluyendo la posibilidad de convergencia uniforme.

En 1876 Paul du Bois Reymond, refutó una conjetura de

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Dirichlet y de Riemann acerca de que toda función continua tiene una serie de Fourier convergente.

En 1904 el matemático húngaro Leopold Féjer obtuvó importantes resultados al considerar en lugar de convergencia puntual la convergencia de las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier.

Henri Lebesgue en 1906, probó el resultado según el cual la serie de Fourier de una función continua puede integrarse término a término si la serie integrada converge y aún mas esto mismo se puede realizar si la serie diverge.

Algunos resultados mas recientes sobre condiciones suficientes de la convergencia de la serie de Fourier son:

F. Riesz y E. Fisher probaron en 1907 que existen condiciones suficientes para que una serie trigonométrica sea una serie de Fourier.

Se ha mencionado que existen funciones continuas que no son la suma de su serie de Fourier. En 1935 J. Pál y H. Bohr demostraron que esta situación puede corregirse mediante un cambio de variable.

Otra corrección fué dada por D. E. Menchov:

"Si f es medible sobre $[0,2\pi]$, entonces, existe una función continua g, tal que $f(x) = g(x)$, excepto sobre un conjunto de medida cero y la serie de Fourier de g converge uniformemente".

Jean P. Kahane y Katznelson, en 1966 han probado que, dado cualquier conjunto de medida cero existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en cada punto de ese conjunto.

L. Carleson probó en ese mismo año que es imposible construir una función continua cuya serie de Fourier diverja sobre un conjunto de medida positiva. Su resultado fué: Si f es una función en $L_2(0,2\pi)$ (en particular si f es continua) su serie de Fourier converge excepto sobre un conjunto de medida cero.

R. A. Hunt extendió el resultado de Carleson en 1967 para funciones en L_p($1 \leq p$) y C. Fefferman lo extendió en 1971 a serie de Fourier múltiples.

1.2 SERIES TRIGONOMETRICAS Y SERIES DE FOURIER.

DEFINICION 1.1: Una serie trigonométrica, es una serie de la forma:

$$\frac{1}{2}\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sen} nx \right)$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots,$ son independientes de x.

El problema de la representación de una función f(x) por una serie de esta forma fué planteado por Fourier en el problema de la conducción del calor. Consecuentemente éste jugó un papel importante en la teoría de funciones de variables reales.

Primeramente analizaremos la fórmula para los coeficientes a_0, a_n y b_n, en términos de la función f(x).

Supongamos que la serie converge a una función integrable f(x) en el intervalo $[-\pi, \pi]$, es decir:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sen} nx \right) \qquad (1)$$

y que además la serie puede integrarse término a término. Para calcular los coeficientes multiplicaremos ambos lados de la igualdad (1) por las funciones del sistema trigonométrico básico {1, Cos x, Sen x, Cos 2x, ... }.

Multiplicando por la función Cos mx obtenemos:

$$f(x) \operatorname{Cos} mx = \frac{1}{2}\ a_0 \operatorname{Cos} mx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{Cos} nx \operatorname{Cos} mx + b_n \operatorname{Sen} nx \operatorname{Cos} mx \right)$$

e integrando ambos lados de la igualdad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Cos} mx\, dx = \frac{1}{2}\ a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Cos} mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Cos} nx \operatorname{Cos} mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Sen} nx \operatorname{Cos} mx\, dx \right).$$

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS HARA MI GRANDEZA

OBSERVACION 1.1: Como Sen nx es una función impar y Cos mx es una función par, el producto de ambas es una función impar por lo que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen } nx \text{ Cos } mx \, dx = 0.$$

De la observación anterior se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Cos } mx \, dx = \frac{1}{2} a_o \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \text{ Cos } mx \, dx \, .$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \text{ Cos } mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases} \qquad (1.a)$$

(ver Apéndice 2),

entonces:

Si m = 0 resulta que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2} a_o \, (2\pi)$$

de donde

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

Si m ≠ 0, por el resultado (1.a) tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Cos } mx \, dx = \frac{1}{2} a_o \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } mx \, dx + a_m \, (\pi)$$

$$= \pi \, a_m$$

de donde

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Cos } mx \, dx \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Para calcular los coeficientes b_n se multiplica (1) por Sen mx con m = 1,2,3,..., e integrando ambos lados de laigualdad, y procediendo de manera análoga se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Sen } nx \, dx = \pi \, b_n$$

de donde

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Sen } nx \, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

DEFINICION 1.2: Sea f una función integrable de $[-\pi,\pi]$. Los coeficientes de Fourier o de Euler-Fourier de la función f(x) se definen por:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \, , \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Cos } nx \, dx$$

$$\text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Sen } nx \, dx \quad \text{para} \quad n = 1,2,3\ldots$$

A la serie trigonométrica formada con estos coeficientes se le llama Serie de Fourier de la función f.

En la discusión anterior, para calcular los coeficientes de Fourier suponemos que la serie trigonométrica converge a f(x), y por lo tanto f(x), tiene que ser periódica con período 2π, ya que la serie está formada por funciones periódicas con período 2π, [6] pág. 51.

Por lo tanto de aquí en adelante trabajaremos con funciones periódicas con período 2π.

Siempre que f(x) sea integrable podemos calcular dichos coeficientes y por tanto formar su serie de Fourier, pero esto no indica que la serie converja y aunque esto suceda su suma puede ser una función distinta de f(x) (La igualdad se da cuando se sabe que la serie de Fourier converge y que su suma es f(x)).

Ejemplos en los cuales se calculan los coeficientes de Fourier de algunas funciones se pueden observar en apéndice (1).

1.3 NUCLEO DE DIRICHLET Y TEOREMA DE RIEMANN-LEBESGUE.

DEFINICION 1.3: Para $n \in N$, $x \in \mathbb{R}$, definimos la función

$$Dn(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } kx,$$

la cual llamaremos **NUCLEO DE DIRICHLET**.

Demostraremos algunas propiedades del nucleo de Dirichlet que enunciamos en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.1: El núcleo de Dirichlet satisface:

i).- $Dn(x)$ es par, es decir, $Dn(x) = Dn(-x)$.

ii).- $Dn(x)$ es una función periódica con período 2π, es decir, $Dn(x) = Dn(x + 2\pi)$.

iii).- $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Dn(x)dx = 1$, es decir,

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} Dn(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} Dn(x)dx = \frac{1}{2}$$

iv).- $$Dn(x) = \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\,\text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} \quad \text{con } x \neq 0 \text{ en } [-\pi, \pi].$$

Demostración:

$$\text{i).- } Dn(-x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } (-kx).$$

Ahora como $\text{Cos}(-kx) = \text{Cos}(kx)$, entonces:

$$Dn(-x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } kx = Dn(x).$$

ii).- $Dn(x + 2\pi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } k(x + 2\pi)$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } (kx + 2k\pi).$$

Como $\text{Cos}(kx + 2k\pi) = \text{Cos } kx$, entonces:

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

$$Dn(x + 2\pi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } kx = Dn(x).$$

iii).-

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } kx \right) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } kx\, dx \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } kx \right) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\pi \right)$$

$$= 1.$$

iv).- Basta demostrar que:

$$2 \text{ Sen}\left(\frac{1}{2} x\right) Dn(x) = \text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) x .$$

De la definición 1.3 se tiene:

$$2 \text{ Sen}\left(\frac{1}{2} x\right) Dn(x) = 2 \text{ Sen}\left(\frac{1}{2} x\right) \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos } kx \right]$$

$$2\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)D_n(x) = 2\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 2\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\sum_{k=1}^{n}\text{Cos}\ kx$$

$$= \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \sum_{k=1}^{n} 2\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\ \text{Cos}\ kx$$

Como:

$$2\ (\text{Sen}\ x)(\text{Cos}\ y) = \text{Sen}\ (x + y) - \text{Sen}\ (y - x),$$

$$2\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)D_n(x) = \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \sum_{k=1}^{n}\left\{\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + kx\right) - \right.$$

$$\left. - \text{Sen}\left(kx - \frac{1}{2}x\right)\right\}$$

$$= \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + x\right) - \text{Sen}\left(x - \frac{1}{2}x\right)$$

$$+\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + 2x\right) - \text{Sen}\left(2x - \frac{1}{2}x\right) + \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + 3x\right) -$$

$$- \text{Sen}\left(3x - \frac{1}{2}x\right) + \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + 4x\right) - \text{Sen}\left(4x - \frac{1}{2}x\right) + \text{---} +$$

$$+ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + nx\right) - \text{Sen}\left(nx - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \text{---} + \text{Sen}\left(\frac{2n - 1}{2}\right)x - \text{Sen}\left(\frac{2n - 3}{2}\right)x +$$

$$+ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + nx\right) - \text{Sen}\left(\frac{2n - 1}{2}\right)x$$

$$= \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + nx\right) = \text{Sen}\left(\frac{1}{2} + n\right)x\ .$$

Por lo tanto:

$$D_n(x) = \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} \quad \text{para } x \neq 0$$

■

TEOREMA 1.2:(Integral de Dirichlet) Supongamos que : $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, periódica con período 2π. Sea $S_n(x)$ la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier generada por f, definida por:

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{m=1}^{n} (a_m \operatorname{Cos} mx + b_m \operatorname{Sen} mx). \qquad (2)$$

Entonces $S_n(x)$ se puede representar como integral definida en la forma

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, D_n(t)\, dt. \qquad (3)$$

Demostración:

Sustituyendo los valores de los coeficientes, a_o, a_m y b_m generados por la función f(t) en (2), se tiene:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{m=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Cos} mt \operatorname{Cos} mx\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Sen} mt \operatorname{Sen} mx\, dt \right\}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \operatorname{Cos} mt \operatorname{Cos} mx + \operatorname{Sen} mt \operatorname{Sen} mx \right\} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \operatorname{Cos} m(t - x) \right\} f(t)\, dt \text{ , ya que}$$

$$\operatorname{Cos} (x - y) = \operatorname{Cos}x \operatorname{Cos}y + \operatorname{Sen}x \operatorname{Sen}y.$$

De la Definición 1.3 se tiene:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t - x)\, dt.$$

Haciendo $t = x + u$ ó $u = t - x$, tenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x + u)\, D_n(u)\, du.$$

Puesto que f toma los mismos valores en el intervalo $(-\pi-x, \pi-x)$ que en el intervalo $(-\pi, \pi)$, la última igualdad puede escribirse como

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + u)\, D_n(u)\, du. \quad \blacksquare$$

Esta fórmula es conocida como la **INTEGRAL DE DIRICHLET**, que puede escribirse haciendo $u = -v$ en el intervalo $[-\pi, o]$ en la forma:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(u)\, [\, f(x + u) + f(x - u)]\, du. \qquad (3.a)$$

Supongamos que $f(x) = 1 \ \forall \ x$, entonces los coeficientes de Fourier son:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\, x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\, (\pi + \pi) = 2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \text{Cos}\, nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}\, nx\, dx = \frac{1}{n\pi} (\text{Sen}\, nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\, (\text{Sen}\, n\pi + \text{Sen}\, n\pi) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \text{Sen}\, nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen}\, nx\, dx = \frac{-1}{n\pi}\, (\text{Cos}\, nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\, (\text{Cos}\, n\pi - \text{Cos}\, n\pi) = 0.$$

Entonces $S_n(x) = 1 \quad \forall\, n \geq 0$.

En este caso la fórmula (3), puede ser escrita de la siguiente forma:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt$$

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS HARA MI GRANDEZA

y por el Teorema 1.1 iii) se tiene:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2\, D_n(t) \cdot dt.$$

Sustituyendo $D_n(t)$ como en el Teorema 1.1 iv) se tiene:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(t)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(t)} (\,2\,)\, dt.$$

Si multiplicamos por $\mathbf{s} \in \mathbb{R}$, obtenemos:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(t)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(t)} (\,2\mathbf{s}\,)\, dt$$

Restando a $S_n(x)$ se obtiene:

$$S_n(x) - \mathbf{s} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(t)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(t)} [\, f(x + t) + f(x - t)\,]\, dt$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(t)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(t)} (\,2\mathbf{s}\,)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(t)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(t)} \left[\, f(x + t) + f(x - t) - 2\mathbf{s} \,\right] dt. \quad (4)$$

Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que la serie $S_n(x)$ converja a $\mathbf{s}$ es que (4) tienda a cero, entonces, el problema de la convergencia es encontrar condiciones bajo las cua-

les (4) tiende a cero y en ese caso, s es el límite de la serie.

En el desarrollo de la teoría es fundamental el siguiente resultado.

TEOREMA 1.3 (RIEMANN-LEBESGUE): Si f(x) es integrable sobre (a,b), entonces:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{Cos}\,\lambda x\,dx = 0 \quad , \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{Sen}\,\lambda x\,dx = 0.$$

Demostración: Para la demostración se seguirán los siguientes pasos:

i).- Lo haremos para cuando f(x) es una función constante,

ii).- después para cuando f(x) es una función escalonada,

iii).- cuando f(x) es una función simple no-negativa,

iv).- para f(x) no negativa y,

v).- por último para cuando f(x) es una función integrable.

i).- Sea f(x) = C (cte.)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b C\,\mathrm{Cos}\,\lambda x\,dx = C\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \mathrm{Cos}\,\lambda x\,dx = 0.$$

ii).- Sea $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, X_{A_i}$ con α_i constantes y A_i intervalos, contenidos en (a,b), donde:

$$A_i = \left\{ x\in(a,b) \,/\, f(x) = \alpha_i \right\} \text{ y },$$

$$X_{A_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A_i \\ 1 & \text{si } x \in A_i \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{Cos}\,\lambda x\,dx = \int_a^b \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, X_{A_i}\,\mathrm{Cos}\,\lambda x\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{a}^{b} \alpha_i \, X_{A_i} \, \mathrm{Cos}\, \lambda x \, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{a_i}^{b_i} \mathrm{Cos}\, \lambda x \, dx \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

donde $A_i = (a_i, b_i)$.

iii).- Sea $f(x)$ una función simple, no negativa, que toma los valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, y por supuesto, f es acotada, y puede representarse en la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, X_{A_i}$$

con A_i conjunto medible.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2mM}$ con $M = \max \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \}$. Para cada conjunto A_i, existen intervalos abiertos $I_1^i, I_2^i, \ldots, I_{k_i}^i$ tal que si $G_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} I_j^i$, entonces, $\mu(A_i \,\Delta\, G_i) < \varepsilon'$, donde $A_i \,\Delta\, G_i$ es la diferencia simétrica entre estos conjuntos [8] pág. 62.

Definamos la función escalonada $\psi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, X_{G_i}$.

entonces,

$$| \, f(x) - \psi(x) \, | = \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, X_{A_i} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, X_{G_i} \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, X_{A_i} - \alpha_i \, X_{G_i} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left| \, X_{A_i} - X_{G_i} \, \right|$$

y,

$$\int_a^b | \, f(x) - \psi(x) \, | \, dx \leq \int_a^b \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left| \, X_{A_i} - X_{G_i} \, \right| dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_a^b | X_{A_i} - X_{G_i} | \, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_a^b X_{(A_i \,\Delta\, G_i)} dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \mu(A_i \,\Delta\, G_i)$$

$$\leq m \, M \, \varepsilon'$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}.$$

BIBLIOTEC
DE CIENCIAS EXACTA
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Tomar λ_o suficientemente grande tal que:

$$\int_a^b \psi(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } \lambda > \lambda_o$$

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) + \psi(x) - \psi(x)] \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{Cos} \lambda x \, dx + \right.$$

$$\left. + \int_a^b \psi(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon.$$

iv).- Sea f una función no-negativa, entonces, existe $\{\psi_n\}$ una sucesión de funciones simples no-negativas que converge a f [2] pág. 51, entonces, por el Teorema de Convergencia Monótona para $\varepsilon > 0$ dado, existe N_o tal que para toda $n \geq N_o$,

$$\int_a^b [\, f(x) - \psi_n(x) \,]\, dx < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right| = \left| \int_a^b [\, f(x) - \psi_n(x) + \psi_n(x) \,] \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b [\, f(x) - \psi_n(x)] \operatorname{Cos} \lambda x \, dx + \right.$$

$$\left. + \int_a^b \psi_n(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b [\, f(x) - \psi_n(x)] \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b \psi_n(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| [\, f(x) - \psi_n(x)] \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right| +$$

$$+ \int_a^b \left| \psi_n(x) \operatorname{Cos} \lambda x \, dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } n \geq No \text{ y } \lambda \text{ suficientemente grande}$$

$$= \varepsilon .$$

v).- Sea $f(x)$ una función integrable, entonces, existen f^+, f^- funciones no-negativas tales que $f = f^+ - f^-$.

$$\int_a^b f(x)\ \text{Cos}\ \lambda x\ dx = \int_a^b (\ f^+ - f^-\ )\ (x)\ \text{Cos}\ \lambda x\ dx$$

$$= \int_a^b f^+(x)\ \text{Cos}\ \lambda x\ dx - \int_a^b f^-(x)\ \text{Cos}\ \lambda x\ dx$$

Tomando límite en ambos lados de la igualdad por iv) tenemos que:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x)\ \text{Cos}\ \lambda x\ dx = 0.$$

Análogamente se demuestra la otra parte del teorema. ■

El Teorema de RIEMANN-LEBESGUE tiene las siguientes consecuencias importantes:

1).- Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero.

2).- El comportamiento de la serie de Fourier para un valor determinado de **x** solamente depende del compor-- tamiento de la función en una vecindad de ese punto.

1) se sigue de la definición de los coeficientes de Fourier y para probar 2), sea δ un número positivo menor que π y sea $g(t) = f(t)$ en el intervalo $x - \delta < t < x + \delta$ y $g(t) = 0$ en el resto del intervalo $(x - \pi, x + \pi)$.

Sea S_n^* la suma parcial de la serie de Fourier de g(t). Entonces, por (3.a)

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_o^{\pi} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2} \right)(u)}{2\ \text{Sen}\ \frac{1}{2}\ (u)} \left\{ g(x + u) + g(x - u) \right\} du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_o^{\delta} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2} \right)(u)}{2\ \text{Sen}\ \frac{1}{2}\ (u)} \left\{ f(x + u) + f(x - u) \right\} du.$$

Ahora:

$$S_n(x) - \overset{*}{S_n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_o^{\pi} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2\ \text{Sen}\ \frac{1}{2}(u)} \left\{f(x+u) + f(x-u)\right\} du -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_o^{\delta} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2\ \text{Sen}\ \frac{1}{2}(u)} \left\{f(x+u) + f(x-u)\right\} du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2\ \text{Sen}\ \frac{1}{2}(u)} \left\{f(x+u) + f(x-u)\right\} du.$$

Ahora la función:

$H(u) = \text{Csc}\ \frac{1}{2}\ u \left\{ f(x+u) + f(x-u) \right\}$ es integrable en el intervalo (δ,π) si $\delta > 0$ y entonces por el teorema de RIEMANN-LEBESGUE:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2\ \text{Sen}\ \frac{1}{2}(u)} \left\{f(x+u) + f(x-u)\right\} du =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)\ H(u)\ du = 0, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \overset{*}{S_n} = 0.$$

Sin embargo, haciendo δ suficientemente pequeña, el comportamiento de $\overset{*}{S_n}(x)$ depende solamente de la naturaleza de $f(t)$ en el intervalo $(x - \delta,\ x + \delta)$ y no se afecta por el valor que tome $f(t)$ fuera del intervalo.

1.4 CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

El siguiente teorema tiene la ventaja de que es fácil comprobar si una función dada satisface sus hipótesis, y además, nos da condiciones para que la serie de Fourier de una función f(x) converja a f(x).

Es importante observar que las hipótesis del teorema son suficientes pero no necesarias.

A las hipótesis de este teorema se le llaman **CONDICIONES DE DIRICHLET**.

TEOREMA 1.4 (De Fourier): Sea f una función periódica con período 2π y suave por partes (es decir, f y f' son continuas por partes) en $[-\pi,\pi]$, entonces, la serie de Fourier de f converge en cada punto del intervalo a

$$\frac{1}{2}\left[\, f(x+) + f(x-) \,\right] .$$

OBSERVACION 1.2.: El número $\frac{1}{2}\left[\, f(x+) + f(x-)\right]$ es la media aritmética de los límites laterales de f en el punto x. Por tanto si f es continua en x :

$$\frac{1}{2}\left[\, f(x+) + f(x-) \,\right] = \frac{1}{2}\left[\, f(x) + f(x) \,\right] = f(x).$$

OBSERVACION 1.3.: Una función g es continua por partes si g es continua en cada intervalo [a,b], excepto posiblemente, en un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$$

en los cuales los límites laterales

$g(x_{i+})$ y $g(x_{i-})$ $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ existen.

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS HARA MI GRANDEZA

Demostración: Probaremos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\,a_o + \sum_{m=1}^{n}\left(\,a_m \operatorname{Cos} mx + b_m \operatorname{Sen} mx\,\right)\right] = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right] .$$

Del Teorema 1.2 tenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t + x)\, D_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o} f(t + x)\, D_n(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi} f(t + x)\, D_n(t)\, dt.$$

Por otra parte de i) y iii) del Teorema 1.1 se tiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o} D_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi} D_n(t)\, dt = \frac{1}{2},$$

multipliquemos por $f(x+)$ en ambos lados de la última igualdad tenemos,

$$\frac{1}{2}\, f(x+) = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi} f(x+)\, D_n(t)\, dt \qquad (5)$$

y analógamente obtenemos

$$\frac{1}{2}\, f(x-) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o} f(x-)\, D_n(t)\, dt. \qquad (6)$$

Sumando ambos lados de las ecuaciones (5) y (6) tenemos:

$$\frac{1}{2}\left[\, f(x+) + f(x-)\,\right] = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi} f(x+)\, D_n(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x-)\, Dn(t)\, dt,$$

entonces

$$Sn(x) - \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-) \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t + x)\, Dn(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t + x)\, Dn(t)\, dt - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+)\, Dn(t)\, dt$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x-)\, Dn(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \left[f(t + x) - f(x-) \right] Dn(t)\, dt \right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi} \left[f(t+x) - f(x+) \right] Dn(t)\, dt \right).$$

Sustituyendo $Dn(t) = \dfrac{Sen\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2\, Sen\left(\frac{1}{2}\, t\right)}$ en ambos términos del lado derecho tenemos:

$$Sn(x) - \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-) \right] = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \left[f(t + x) - f(x-) \right] \frac{Sen\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2\, Sen\left(\frac{1}{2}\, t\right)}\, dt \right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi} \left[f(t+x) - f(x+) \right] \frac{Sen\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2\, Sen\left(\frac{1}{2}\, t\right)}\, dt \right)$$

y tomando $\lim_{n\to\infty}$ en ambos lados:

$$\lim_{n\to\infty} Sn(x) - \frac{1}{2}\left[\, f(x+) + f(x-) \,\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{o} \left[f(t + x) - f(x-)\right] \frac{Sen\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2\, Sen\left(\frac{1}{2}\, t\right)}\, dt \right)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_{o}^{\pi} \left[f(t+x) - f(x+)\right] \frac{Sen\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2\, Sen\left(\frac{1}{2}\, t\right)}\, dt \right).$$

Si demostramos que el lado derecho de la igualdad es igual a cero el teorema quedará demostrado. Por el Teorema de Riemann-Lebesgue es suficiente probar que las funciones:

$$g(t) = \frac{f(t+x) - f(x-)}{2\, Sen\left(\frac{1}{2}\, t\right)} \quad \text{para } t \neq 0 \text{ y } g(t) = 0 \text{ para } t = 0$$

$$h(t) = \frac{f(t+x) - f(x+)}{2\, Sen\left(\frac{1}{2}\, t\right)} \quad \text{para } t \neq 0 \text{ y } h(t) = 0 \text{ para } t = 0$$

son funciones continuas por partes en $[-\pi,0)$ y $(0,\pi]$, respectivamente.

Como f y Sen $\left(\frac{1}{2}\, t\right)$ son continuas por partes en $[-\pi,0)$, entonces g también lo es, y de la misma forma h(t) es continua por partes en $(o,\pi]$.

Para ver que g es continua en t = 0, obtendremos $\lim_{t\to o-} g(t)$.

Multiplicando y dividiendo por $\frac{1}{2}\,t$ el lado derecho, en (7) obtenemos

$$\lim_{t\to 0-} g(t) = \lim_{t\to 0-} \frac{\left(f(t+x) - f(x-)\right)\left(\frac{1}{2}\,t\right)}{2\,\mathrm{Sen}\left(\frac{1}{2}\,t\right)\left(\frac{1}{2}\,t\right)} .$$

Reescribiendo tenemos:

$$\lim_{t\to 0-} g(t) = \lim_{t\to 0-} \left[\frac{f(t+x) - f(x-)}{t} \quad \frac{\frac{1}{2}\,t}{\mathrm{Sen}\left(\frac{1}{2}\,t\right)} \right]$$

$$= \lim_{t\to 0-} \frac{f(t+x) - f(x-)}{t} \quad \lim_{t\to 0-} \frac{\frac{1}{2}\,t}{\mathrm{Sen}\left(\frac{1}{2}\,t\right)}$$

$$= f'_{izq.}(x).$$

Como f es suave por partes entonces f'_{izq} existe en x.

Por lo tanto g(t) es continua en t = 0, entonces g(t) es continua para toda $t \in [-\pi, o]$.

Así mismo h(t) es continua por partes en el intervalo $[o, \pi]$ puesto que:

$$\lim_{t\to 0+} h(t) = f'_{der}(x).$$

Por lo tanto

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-) \right).$$

Por lo que la serie de Fourier de f converge a :

$$\frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-) \right). \quad \blacksquare$$

Ahora expresaremos la condición necesaria y suficiente para la convergencia a una suma en una forma más conveniente.

Si $\Phi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s$, entonces la condición (4) donde f es integrable en $[-\pi,\pi]$ puede escribirse en la forma:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2} \right)(u)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(u)} \Phi(u)\, du = 0 . \qquad (8)$$

Podemos reemplazar esto por

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2} \right)(u)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(u)} \Phi(u)\, du = 0, \text{ donde } 0 < \delta < \pi, \qquad (9)$$

puesto que por el teorema de Riemann-Lebesgue la diferencia de las integrales (8) y (9) tiende a cero.

Enseguida cambiamos (9) por:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2} \right)(u)}{u} \Phi(u)\, du = 0 \qquad (10)$$

puesto que la integrabilidad de $\left(\operatorname{Csc} \frac{1}{2} u - \frac{2}{u} \right)$ en $(0,\delta)$ y el Teorema de Riemann-Lebesgue implican:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u) \left\{ \frac{1}{\text{Sen}\,\frac{1}{2}u} - \frac{2}{u} \right\} \Phi(u)\, du = 0.$$

Ahora tomaremos postura para algunas condiciones de los criterios de convergencia. En el resto del capítulo, f es siempre una función periódica integrable en $[-\pi,\pi]$ y Φ es la función que se definió en la discusión anterior.

1.4.1 CRITERIO DE DINI

TEOREMA 1.5: Si $\frac{\Phi(u)}{u}$ es integrable sobre $(0,\delta)$, entonces la serie converge a la suma **s**.

Este teorema resulta obvio después de haber obtenido (10) y el Teorema de Riemann-Lebesgue. Recordemos que la integrabilidad de $\frac{\Phi(u)}{u}$ en el sentido de Lebesgue implica integrabilidad absoluta.

Demostración:

Por el Teorema de Riemann-Lebesgue tenemos que si $\frac{\Phi(u)}{u}$ es integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{u} \Phi(u)\, du = 0.$$

UNIVERSIDAD DE SONORA
1942
POR MIS HIJOS
MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

Como ya demostramos que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u) \left\{ \frac{1}{\text{Sen}\,\frac{1}{2}u} - \frac{2}{u} \right\} \Phi(u)\, du = 0,$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(u)} \Phi(u)\, du = 0 .$$

Por lo tanto $S_n \longrightarrow \mathbf{s}$ ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(u)} \Phi(u)\, du =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(u)} \Phi(u)\, du = 0,$$

y,

$$S_n - \mathbf{s} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(u)}{2 \operatorname{Sen} \frac{1}{2}(u)} \Phi(u)\, du. \quad \blacksquare$$

1.4.2. CRITERIO DE JORDAN.

TEOREMA 1.6: Si f(t) es de variación acotada(v.a.) en una vecindad de t = x entonces la serie converge a la suma:

$$s = \frac{1}{2}\left\{ f(x+) + f(x-)\right\}.$$

Demostración:

Dado que de v.a. quiere decir de v.a. sobre un intervalo, entonces esta condición es para convergencia sobre un intervalo.

Por otro lado si f(x) es de v.a., entonces los limites f(x+) y f(x-) existen dado que f(x) se puede poner como una diferencia de dos funciones crecientes.

Entonces, como

$$\Phi(u) = f(x + u) + f(x - u) - 2s$$

la podemos expresar de la siguiente manera

$$\Phi(u) = f(x + u) + f(x - u) - f(x+) - f(x-)$$

la cual es también de v.a. en un intervalo a la derecha de u = 0.

Si u tiende a cero por la derecha entonces :

$$f(x + u) \longrightarrow f(x+) \quad y \quad f(x - u) \longrightarrow f(x-)$$

de aqui que $\Phi(u)$ tiende a cero cuando u tiende a cero.

Por lo anterior, podemos escribir

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u)$$

donde $\Phi_1(u)$ y $\Phi_2(u)$ son funciones crecientes no-negativas; y además cada función tiende al mismo límite cuando u tiende a cero. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el límite común es 0.

Sea δ lo suficientemente pequeña para que $\Phi(u)$ sea de v.a. en $(0,\delta)$. Entonces:

$$\int_0^{\delta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \Phi(u)\, du = \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \Phi_1(u)\, du -$$

$$- \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \Phi_2(u)\, du$$

$$= J_1 - J_2$$

consideremos la integral J_1. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos η tan pequeña que $\Phi_1(\eta) < \varepsilon$, entonces por el segundo Teorema del valor medio [10] pág. 66,

$$\int_0^{\eta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \Phi_1(u)\, du = \Phi_1(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \frac{\operatorname{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u}\, du$$

$$= \Phi_1(\eta) \int_{(n + 1/2)\xi}^{(n + 1/2)\eta} \frac{\operatorname{Sen} v}{v}\, dv$$

donde $0 < \xi < \eta$.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Ahora bien, para ver que $\int_{(n + 1/2)\xi}^{(n + 1/2)\eta} \frac{\operatorname{Sen} v}{v}\, dv$ esta acotada, sea

$A > 0$ y $B > A$, entonces

$$\left| \int_A^B \frac{\text{Sen } v}{v}\, dv \right| = \left| \frac{-\text{Cos } v}{v} \right|_A^B - \int_A^B \frac{\text{Cos } v}{v^2}\, dv \Bigg|$$

$$\leq \left| \frac{-\text{Cos } v}{v} \right|_A^B \Bigg| + \left| \int_A^B \frac{\text{Cos } v}{v^2}\, dv \right|$$

$$\leq \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A} < \frac{3}{A}.$$

Por lo tanto

$$\left| \int_0^{\eta} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \Phi_1(u)\, du \right| < K\varepsilon, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

donde K es independiente de n.

Fijando η, por el Teorema de Riemann-Lebesgue, existe n_o tal que

$$\left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \Phi_1(u)\, du \right| < \varepsilon \quad (\forall\ n > n_o).$$

Entonces $J_1 \longrightarrow 0$ y similarmente $J_2 \longrightarrow 0$ .Esto prueba el teorema. ■

En particular si f(x) tiene un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades en el intervalo $(0,2\pi)$, la serie de Fourier es convergente para todo valor de x a la suma

$$\frac{1}{2}\left\{ f(x+) + f(x-) \right\}$$

puesto que f es de variación acotada en todo el intervalo.

TEOREMA 1.7: Si la función:

$$\Psi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(u)\, du$$

es de variación acotada en un intervalo a la derecha de $t = 0$, entonces, la serie es convergente.

Si **s** se elige tal que $\Psi(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow 0$, entonces, la serie converge a **s**.

Demostración: Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\Phi(t) = \frac{d}{dt} \left\{ t\ \Psi(t) \right\} = \Psi(t) + t\ \Psi'(t).$$

Entonces

$$\int_o^\delta \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{u} \Phi(u)du =$$

$$\int_o^\delta \frac{\text{Sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{u} [\psi(u) + u\ \psi'(u)]du$$

Como $\Psi(t)$ por hipótesis es de variación acotada, el primer sumando de la integral tiende a cero como en el criterio de Jordan puesto que $\Psi(t)$ es de variación acotada, entonces se puede poner como la diferencia de dos funciones no decrecientes, y como la derivada de una función no decreciente es integrable, por lo tanto $\Psi'(t)$ es integrable ([8] Cap. V), entonces, la integral correspondiente a $t\Psi'(t)$ tiende a cero por el teorema de Riemann- Lebesgue. Procediendo como en el criterio de Dini, podemos ver que S_n converge a **s**. ■

1.5 RELACION ENTRE LOS CRITERIOS

Consideremos la función:

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)} & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Tomando una vecindad de $x = 0$, vemos que la función es monótona(creciente) y acotada. Por lo tanto es de variación acotada, es decir, cumple con el criterio de Jordan por lo que la serie de $f(x)$ converge en $x = 0$.

Sustituyendo $x = 0$ en:

$$\Phi(u) = f(x + u) + f(x - u) - f(x+) - f(x-)$$

se obtiene:

$$\Phi(u) = f(u) + f(-u) - f(x+) + f(x-)$$

$$\Phi(u) = f(u).$$

Por lo tanto:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\ln\left(\dfrac{1}{u}\right)}$$

entonces

$$\int_0^{\delta} \frac{\Phi(u)}{u}\,du = \int_0^{\delta} \frac{\frac{1}{\ln \frac{1}{u}}}{u}\,du = \int_0^{\delta} \frac{du}{u \ln \frac{1}{u}}$$

Sea $t = \ln \frac{1}{u}$, $dt = \frac{-du}{u}$ entonces $du = -u\,dt$ sustituyendo

$$\int_0^{\delta} \frac{du}{u \ln \frac{1}{u}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\ln \frac{1}{\varepsilon}}^{\ln \frac{1}{\delta}} \frac{-u\,dt}{u\,t}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} - \int_{\ln \frac{1}{\varepsilon}}^{\ln \frac{1}{\delta}} \frac{dt}{t}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} - \ln t \Bigg|_{\ln \frac{1}{\varepsilon}}^{\ln \frac{1}{\delta}}$$

pero

$$-\ln u \Bigg|_{\ln \frac{1}{\varepsilon}}^{\ln \frac{1}{\delta}} = -\ln \left(\ln \frac{1}{\delta} \right) + \ln \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

por lo tanto la integral diverge.

O bien, haciendo el razonamiento de ver la integral del area bajo la curva en una vecindad de cero, el area tiende al infinito.

Por lo tanto JORDAN NO IMPLICA DINI.

Ahora consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{x} & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \qquad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

$$\Phi(u) = u^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{u}$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\Phi(u)}{u}\, du = \int_0^{\delta} \frac{u^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{u}}{u}\, du = \int_0^{\delta} u^{\alpha-1} \operatorname{Sen} \frac{1}{u}\, du$$

como:

$$\left| u^{\alpha-1} \operatorname{Sen} \frac{1}{u} \right| = \left| u^{\alpha-1} \right| \left| \operatorname{Sen} \frac{1}{u} \right| \leq \left| u^{\alpha-1} \right|$$

$$\int_0^{\delta} \left| u^{\alpha-1} \operatorname{Sen} \frac{1}{u} \right| du \leq \int_0^{\delta} u^{\alpha-1}\, du = \left. \frac{u^{\alpha}}{\alpha} \right|_0^{\delta} = \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} .$$

Por lo tanto, $\dfrac{\Phi(u)}{u}$ es integrable.

Por lo tanto f satisface la condición en el criterio de Dini. Por otro lado $f(x) = x^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{x}$ no es de variación acotada, puesto que si tomamos la partición.

$x_k = \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ de (o,δ), entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{x_k} - x_{k-1}^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{x_{k-1}} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} \right)^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{\frac{2}{(2k+1)\pi}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{1}{\frac{2}{(2k-1)\pi}} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} \right)^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^{\alpha} \operatorname{Sen} \frac{(2k-1)\pi}{2} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} \right)^{\alpha} (-1)^{k} - \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^{\alpha} (-1)^{k-1} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} \right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^{\alpha}$$

$$= \frac{2^{\alpha}}{\pi^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k+1)^{\alpha}} + \frac{1}{(2k-1)^{\alpha}} \right)$$

$$\geq \frac{2^{\alpha}}{\pi^{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \right)$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \geq \frac{2^{\alpha}}{\pi^{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \right).$$

Es decir f(x) no cumple la condición de Jordan.

Ahora bien el criterio de Dini o el criterio de Jordan implica el de de la Valleé-Poussin.

LEMA 1.1: Si g(u) es una función no-negativa, no-decreciente y acotada, entonces,

$$H(t) = \frac{1}{t} \int_{0}^{t} g(u)\, du$$

cumple con las mismas caracteristicas de g(u).

Demostración: Es claro que H(t) es no-negativa y acotada, para ver que sea no-decreciente tenemos que demostrar que si $0 < x_1 \leq x_2$, entonces,

$$\frac{1}{t_2} \int_{0}^{t_2} g(u)\, du \geq \frac{1}{t_1} \int_{0}^{t_1} g(u)\, du.$$

Analicemos la integral

$$t_1 \int_{t_1}^{t_2} g(u)\,du \geq t_1\,(t_2-t_1)\,g(t_1)$$

$$\geq (t_2-t_1) \int_0^{t_1} g(u)\,du, \text{ dado que } t_1\,g(t_1) \geq \int_0^{t_1} g(u)\,du$$

$$= t_2 \int_0^{t_1} g(u)\,du - t_1 \int_0^{t_1} g(u)\,du, \text{ entonces,}$$

$$t_1 \int_{t_1}^{t_2} g(u)\,du + t_1 \int_0^{t_1} g(u)\,du \geq t_2 \int_0^{t_1} g(u)\,du, \text{ de donde,}$$

$$t_1 \int_0^{t_2} g(u)\,du \geq t_2 \int_0^{t_1} g(u)\,du \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} g(u)\,du \geq \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} g(u)\,du.$$

■

PROPOSICION 1.1: Sea g(u) de variación acotada en $(0,\delta)$, entonces,

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^{x} g(u)\,du$$

es de variación acotada por lo tanto cumple el criterio de de la Valleé-Poussin.

Demostración: Como g(u) es de variación acotada ,entonces, se cumple el criterio de Jordan, ahora sea $g(u) = g_1(u) - g_2(u)$ las cuales son positivas y no decrecientes y acotadas, sustituyendo obtenemos:

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \Big(g_1(u) - g_2(u)\Big)\,du$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

$$= \frac{1}{x}\int_0^x g_1(u)\,du - \frac{1}{x}\int_0^x g_2(u)\,du$$

$$= G_1(x) - G_2(x).$$

Por el Lema 1.1 las funciones G_1 y G_2 cumplen con las mismas características de g_1 y g_2, por lo cual $G(x)$ es de variación acotada, por lo tanto, se cumple el criterio de de la Valleé-Poussin. ■

Supongamos que el criterio de Dini se cumple, es decir, la función

$$\frac{\Phi(u)}{u}$$

es integrable.

Sea $\chi(t) = \int_0^t \frac{\Phi(u)}{u}\,du$

la cual es de variación acotada, [8] pág. 101.

Sea $\psi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \Phi(u)\,du$, dado que:

$\chi'(u) = \frac{\Phi(u)}{u}$, entonces, $\Phi(u) = u\,\chi'(u)$, sustituyendo:

$$\psi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u\,\chi'(u)\,du$$

e integrando por partes

$$a = u \qquad db = \chi'(u)\,du$$

$$da = du \qquad b = \chi(u)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{t}\left(u\,\chi(u)\Big|_0^t - \int_0^t \chi(u)\,du \right) = \frac{1}{t}\,(u)(\chi(u))\Big|_0^t -$$

$$- \frac{1}{t}\int_0^t \chi(u)\,du$$

$$\psi(t) = \left(\frac{1}{t}\right)\left(\,t\,\right)\left(\chi(t)\right) - \frac{1}{t}\int_0^t \chi(u)\,du$$

$$\psi(t) = \chi(t) - \frac{1}{t}\int_0^t \chi(u)\,du.$$

Si $\chi(t)$ es de variación acotada, por la proposición 1.1

$$\frac{1}{t}\int_0^t \chi(u)\,du, \text{ es de variación acotada.}$$

Por lo tanto $\psi(u)$ es de variación acotada, es decir, se cumple la condición del criterio de la Valleé-Poussin.

Algunos ejemplos de funciones que satisfacen los criterios mencionados anteriormente son vistos en el Apéndice (3).

C A P I T U L O D O S.

OTROS TIPOS DE CONVERGENCIA.

En este capítulo, analizaremos algunas condiciones para la convergencia absoluta y uniforme de la serie de Fourier, asimismo la convergencia de las sumas de Féjer.

2.1 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y UNIFORME DE LA SERIE DE FOURIER.

LEMA 2.1: Supongamos que f es continua en el intervalo $[-\pi,\pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$, y que su derivada es continua por partes sobre $(-\pi,\pi)$. Entonces si a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de la función f, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

converge.

Demostración: Sean

$$\alpha_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx \quad , \qquad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\text{Cos}\,nx\,dx$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\text{Sen}\,nx\,dx$$

los coeficientes de Fourier de $f'(x)$, los cuales existen, debido a que $f'(x)$ es continua por partes.

Es claro que $\alpha_o = 0$, por otro lado, integrando por partes, para $n = 1,2,3,\ldots$ obtenemos

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\ \text{Cos}\ nx\ dx = \frac{1}{\pi}\left\{ f(x)\ \text{Cos}\ nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \text{Sen}\ nx\ dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\ f(x)\ \text{Cos}\ nx\ \Big|_{-\pi}^{\pi} + n\ b_n$$

$$= n\ b_n.$$

Análogamente se obtiene que $\beta_n = -\ n\ a_n$, por lo tanto

$$a_n = \frac{-\beta_n}{n} \text{ y } b_n = \frac{\alpha_n}{n}. \qquad (11)$$

Sea

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \qquad (12)$$

sustituyendo (11) en (12) se tiene:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\left(\frac{-\beta_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sqrt{(\alpha_n)^2 + (\beta_n)^2}$$

utilizando la desigualdad de Cauchy que nos dice:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n q_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} p_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2 \right)$$

obtenemos

$$(S_N)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n)^2 + (\beta_n)^2 \right) \quad (N = 1,2,..)$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} (\beta_n)^2 \right).$$

Es claro que las series $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n)^2$ y $\sum_{n=1}^{N} (\beta_n)^2$ están acotadas.

Por otro lado, haciendo tender N a infinito tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

y por la desigualdad de Bessel que nos dice

$$\pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 + (b_n)^2 \right) \leq \| f \|^2 \quad \forall f \in L_2$$

(esta desigualdad será demostrada en el capítulo III) se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n)^2 \leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 \, dx < \infty$$

y además son No decrecientes, lo que implica que $(S_N)^2$ converge, por lo tanto S_N converge, es decir la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

converge. ■

TEOREMA 2.1: Supongamos que f es continua en el intervalo $[-\pi,\pi]$, donde $f(-\pi) = f(\pi)$, y que su derivada es continua por partes sobre $(-\pi,\pi)$. Entonces la serie de Fourier de f(x)

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sen} nx) \qquad (13)$$

converge absoluta y uniformemente a f(x) en $[-\pi,\pi]$.

Demostración: Sea f periódica con período 2π, lo cual no altera la hipótesis del teorema, entonces por el Teorema 1.4, la serie (13) converge a f(x), en todo el intervalo $[-\pi,\pi]$.

Observemos entonces que $|\ a_n\ |$ y $|\ b_n\ |$, son menores o iguales que $\sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$,

$$|\ a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sen} nx\ | \leq |a_n \operatorname{Cos} nx\ | + |\ b_n \operatorname{Sen} nx\ | \leq$$

$$\leq |\ a_n\ | + |\ b_n\ |$$

$$\leq 2\sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

por el criterio M de Weierstrass [6] pág. 34 y el Lema 2.1, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sen} nx)$$

converge absoluta y uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

Por lo tanto la serie (13) converge absoluta y uniformente. ■

2.2 CONVERGENCIA DE LAS SUMAS DE FEJER.

DEFINICION 2.1: Sea $S_0(x)$, $S_1(x)$, ..., $S_{n-1}(x)$ las sumas parciales de la serie de Fourier de f. Llamaremos a

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} \qquad (14)$$

sumas de Féjer de la función f.

Otra forma de representar $\sigma_n(x)$ se obtiene de la siguiente manera:

Sustituyendo iv) del Teorema 1.1 y (3) en (14) tenemos:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Sen}(k + 1/2)(t-x)}{\operatorname{Sen}\ (1/2)(t - x)} \right\} f(t)\ dt. \qquad (15)$$

Como

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Sen}(2k + 1)\ u = \frac{\operatorname{Sen}^2 nu}{\operatorname{Sen}\ u} \qquad (16)$$

sustituyendo (16) en (15), obtenemos

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}^2 n\left(\frac{t - x}{2}\right)}{\operatorname{Sen}^2\left(\frac{t - x}{2}\right)} f(t)\ dt. \qquad (17)$$

En la expresión

$$H_n(\ t - x\ ) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\operatorname{Sen}^2 n\left(\frac{t - x}{2}\right)}{\operatorname{Sen}^2\left(\frac{t - x}{2}\right)} \qquad (18)$$

hagamos $z = t - x$, entonces, podemos escribir (17) en la forma :

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\ x + z\ )\ H_n(z)\ dz.$$

DEFINICION 2.2: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{R}$, definimos la función

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\text{Sen } n\left(\frac{z}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{z}{2}\right)} \right)^2$$

al cual llamaremos **Núcleo de Féjer.**

Esta función cumple con las siguientes propiedades:

1).- $H_n(z) \geq 0$

2).- $\int_{-\pi}^{\pi} H_n(z)\, dz = 1$

3).- Para todo $\delta \in (0,\pi)$ fijo , y $n \longrightarrow \infty$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{-\delta} H_n(z)\, dz = \int_{\delta}^{\pi} H_n(z)\, dz = \eta_n(\delta) \longrightarrow 0.$$

La primera de estas propiedades es obvia.

Para verificar la segunda propiedad, procederemos de la siguiente manera.

Pueto que

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\, x + z\,)\, H_n(z)\, dz,$$

y tomando $f(x) = 1$, se tiene,

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} H_n(z)\, dz.$$

Calculando los coeficientes de Fourier de $f(x) = 1$, obtenemos que $a_o = 2$, $a_n = b_n = 0$, sustituyendo estos coeficientes en (14), tenemos que $\sigma_n(x) = 1$.

Por lo tanto $\int_{-\pi}^{\pi} H_n(z)\, dz = 1$.

Para demostrar la tercera propiedad seguimos el siguiente procedimiento

Sea $\sigma > 0$ tal que $\left| \text{Sen } \frac{z}{2} \right| \geq \frac{2\sigma}{\pi}$, para $\delta < |z| < \pi$ entonces,

$$\left(\frac{\text{Sen } n\left(\frac{z}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{z}{2}\right)} \right)^2 \leq \frac{\left(\text{Sen } n \frac{z}{2} \right)^2}{\left(\frac{2\sigma}{\pi} \right)^2} \leq \frac{1}{\left(\frac{2\sigma}{\pi} \right)^2} \leq \left(\frac{\pi}{2\sigma} \right)^2$$

por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{-\delta} H_n(z)\, dz = \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\text{Sen } n\left(\frac{z}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{z}{2}\right)} \right)^2 dz \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\pi}{2\sigma} \right)^2 dz$$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{\pi}{8n\sigma^2}\, dz = \frac{\pi}{8n\sigma^2} \int_{-\pi}^{-\delta} dz$$

$$= \frac{\pi}{8n\sigma^2} [\, -\delta + \pi \,].$$

Por lo tanto $\eta_n(\delta) \longrightarrow 0$.

Análogamente se puede ver que la integral

$$\int_{\delta}^{\pi} H_n(z)\, dz \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

■

TEOREMA 2.2: Si f es una función continua con período 2π, la sucesión $\{ \sigma_n \}$ de sumas de Féjer converge a f uniformemente en toda la recta númerica ($\mathbb{R}$).

Demostración: Como f es continua y periódica, entonces, f es acotada y uniformemente continua, es decir; existe M tal que

$$| f(x) | \leq M \qquad \forall\, x$$

y además, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$| f(x_2) - f(x_1) | \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad | x_2 - x_1 | < \delta.$$

Para demostrar el teorema hay que ver que σ_n converge a f.

$$f(x) - \sigma_n(x) = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x + z) \, H_n(z) \, dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + z)] \, H_n(z) \, dz \qquad (19)$$

Descomponiendo la integral en la ecuación (19) queda:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Big[f(x) - f(x + z) \Big] \, H_n(z) \, dz + \int_{-\delta}^{\delta} \Big[f(x) - f(x + z) \Big] \, H_n(z) \, dz$$

$$+ \int_{\delta}^{\pi} \Big[f(x) - f(x + z) \Big] \, H_n(z) \, dz$$

y utilizando la propiedad 3, podemos observar que

$$\left| \int_{-\pi}^{-\delta} \Big[f(x) - f(x + z) \Big] \, H_n(z) \, dz \right| \leq$$

Ms-381

$$\leq \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x) - f(x+z)|\,|Hn(z)|\,dz \leq$$

$$\leq 2M \int_{-\pi}^{-\delta} |Hn(z)|\,dz \leq 2M\,\eta_n(\delta),$$

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
...R DE MIS HIJOS ... MI GRANDEZA

similarmente podemos observar que

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} \left[f(x) - f(x+z) \right] Hn(z)\,dz \right| \leq 2M\,\eta_n(\delta).$$

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \left[f(x) - f(x+z) \right] Hn(z)\,dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x+z)|\,Hn(z)\,dz \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Hn(z)\,dz < \frac{\varepsilon}{2}$$

esto último por las propiedades (1) y (2) del Núcleo de Féjer.

Con esto tenemos, entonces, que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+z)|\,Hn(z)\,dz < 4M\,\eta_n(\delta) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si tomamos n_o tal que $n \geq n_o$ y δ dado se cumple que

$$4M\,\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+z)|\,Hn(z)\,dz < \varepsilon$$

por lo tanto

$$|\,f(x) - \sigma_n(x)\,| < \varepsilon$$

lo que implica que σ_n converge a f cuando n tiende a infinito. ∎

C A P I T U L O T R E S .

CONVERGENCIA EN L2.

En eeste capítulo demostraremos algunos resultados importantes acerca de la convergencia de la serie de Fourier en el caso general de un espacio euclideano cualquiera V y estos mismos los retomare-- mos para el caso particular del espacio L2([a,b]) (De aquí en adelante denotaremos L2([a,b]) como L2).

3.1 ANALISIS DE FOURIER EN LOS ESPACIOS L_2.

En el Apéndice 7 se definen algunos conceptos de los espacios euclideanos .

DEFINICION 3.1: Sea V un espacio euclideano, ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n,... una base ortonormal en V y sea f $\in$ V. A los números $C_k = \langle f, \phi_k \rangle$, k = 1,2,3,..., se les llama los COEFICIENTES DE FOURIER de f respecto al sistema { ϕ_k } y a la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k, \tag{20}$$

se le llama la SERIE DE FOURIER de f respecto a { ϕ_k }.

OBSERVACION 3.1: Entendemos por $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k$ como el elemento en V que es límite (en la norma de V) de las sumas parciales:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k. \tag{21}$$

El primer resultado que analizaremos es:

3.1.1 DESIGUALDAD DE BESSEL.

TEOREMA 3.1: Sea (V, < , >) un espacio euclideano, { ϕ_k } con k $\in$ $\mathbb{N}$ un sistema ortonormal, y f $\in$ V , entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \| f \|^2$$

a la cual se le llama DESIGUALDAD DE BESSEL.

Demostración:

Para n fijo escogeremos los coeficientes α_k arbitrarios (k = 1,2,...,n) y consideremos la distancia entre f y la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k . \qquad (22)$$

Entonces

$$\| f - S_n \|^2 = < f - S_n,\ f - S_n > = < f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k\ ,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k >$$

$$= < f,\ f > - 2< f,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k > + < \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k >$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < f,\ \phi_k > + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 < \phi_k,\ \phi_k >$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - C_k)^2 .$$

Esta expresión alcanza su mínimo cuando el último sumando es igual a cero, es decir, $\alpha_k = C_k$ para k = 1,2,...,n.

En este caso:

$$\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \qquad (23)$$

y S_n representa la suma parcial de la serie de Fourier de f.

Por lo tanto, entre todas las funciones de la forma (22) para n fijo, la de menor distancia de f es la suma parcial de la serie de Fourier de f.

Puesto que: $\| f - S_n \|^2 \geq 0$, entonces,

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 = \| f - S_n \|^2 \geq 0, \text{ de aquí que } \| f \|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

haciendo n tender a infinito, como el lado izquierdo no depende de n, tenemos que:

$$\| f \|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \tag{24}$$

■

Como segundo resultado, tenemos:

3.1.2 IDENTIDAD DE PARSEVAL.

DEFINICION 3.2: Sea $\{ \phi_k \}_{k \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormal, decimos que $\{ \phi_k \}$ es completo en V espacio euclideano, si V es el mínimo subespacio cerrado que contiene a $\{ \phi_k \}$, es decir, toda función en V puede aproximarse con combinaciones lineales finitas de elementos en $\{ \phi_k \}$.

DEFINICION 3.3: Un sistema ortonormal $\{ \phi_k \}$ se llama cerrado cuando para cualquier $f \in V$ se cumple la igualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \| f \|^2 \tag{25}$$

llamada IGUALDAD DE PARSEVAL.

Recordemos que un espacio métrico X se dice separable si contiene un subconjunto denso numerable Y, es decir, $\overline{Y} = X$.

TEOREMA 3.2: Sea $(V, < , >)$ un espacio euclideano separable. El sistema ortonormal $\{ \phi_k \}$ donde $k \in \mathbb{N}$, es completo, si y solo si, es cerrado.

Demostración: ($\Leftarrow$) Si $\{ \phi_k \}$ es cerrado, entonces, por la igualdad (23), para toda $f \in V$ las sumas parciales de la serie de Fourier $\sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k$ converge a f, es decir, cualquier $f \in V$ se puede aproximar mediante combinaciones lineales de $\{ \phi_k \}$ lo cual implica que $\{ \phi_k \}$ es un sistema completo (definición 3.2).

($\Rightarrow$) Sea $\{ \phi_k \}$ completo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\{ \alpha_k \}$, $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k || < \sqrt{\varepsilon} .$$

Por la igualdad (23) tenemos que

$$|| f ||^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 = || f - \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k ||^2 \leq || f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k ||^2 < \varepsilon.$$

Tomando límite cuando n tiende al infinito se tiene que

$|| f ||^2 - \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = 0$, es decir, $|| f ||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$ por lo tanto $\{ \phi_k \}$ es cerrado. ■

PROPOSICION 3.1: En un espacio euclideano separable V, todo sistema ortogonal es a lo mas numerable.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\{ \phi_k \}$ es ortonormal (de otra forma se sustituye por $\left\{ \frac{\phi_k}{|| \phi_k ||} \right\}$),

es decir, $|| \phi_k ||^2 = < \phi_\alpha, \phi_\beta > = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases}$.

Tomemos:

$$|| \phi_\alpha - \phi_\beta ||^2 = < \phi_\alpha - \phi_\beta, \phi_\alpha - \phi_\beta >$$

$$= \langle \phi_\alpha, \phi_\alpha \rangle - 2\langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle + \langle \phi_\beta, \phi_\beta \rangle$$

$$= \| \phi_\alpha \|^2 - 2\langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle + \| \phi_\beta \|^2$$

$$= 1 - 2(0) + 1$$

$$= 2.$$

$\| \phi_\alpha - \phi_\beta \| = \sqrt{2}$ si $\alpha \neq \beta$.

Consideremos el conjunto de bolas $B(\phi_\alpha, 1/2)$. Estas bolas no se intersectan, dado que las distancias entre dos elementos del sistema es igual a $\sqrt{2}$.

Como el espacio V es separable, contiene un conjunto $\{ X_n \}$ denso numerable en V.

En cada $B(\phi_\alpha , 1/2)$, hay al menos un X_n, por lo tanto el conjunto $B(\phi_\alpha , 1/2)$ es numerable, es decir, el sistema $\{ \phi_\alpha \}$ es a lo más numerable. ■

De la desigualdad de Bessel, se deduce que para que los números $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, representen los coeficientes de Fourier de $f \in V$, respecto a un sistema ortonormal $\{ \phi_n \}$, una condición necesaria es que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty.$$

Veremos en el siguiente teorema que esta condición también es suficiente.

3.1.3 TEOREMA DE RIESZ-FISCHER.

TEOREMA 3.3 (*RIESZ - FISCHER*): Sea $\{ \phi_n \}$ un sistema ortonormal arbitrario en un espacio euclideano completo V y sean los números $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 < \infty$, entonces existe $f \in V$ tal que:

$$C_k = \langle f, \phi_k \rangle$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \| f \|^2.$$

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Demostración: Sea $f_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k$, entonces:

$$\| f_{n+r} - f_n \|^2 = \| \sum_{k=1}^{n+r} C_k \phi_k - \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k \|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{n+r} C_k \phi_k \|^2$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+r} \| C_k \phi_k \|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+r} C_k^2 \| \phi_k \|^2$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+r} C_k^2 \qquad \text{puesto que } \| \phi_n \| = 1.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty$ se tiene que $\{ f_n \}$ es de Cauchy en V.

Por lo tanto converge a un f en V.

Además podemos representar $\langle f, \phi_i \rangle = \langle f_n, \phi_i \rangle + \langle f - f_n, \phi_i \rangle$ para toda $n \in \mathbb{N}$, como

$$\langle f_n, \phi_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k , \phi_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} C_k \langle \phi_k, \phi_i \rangle = C_i$$

entonces $\langle f, \phi_i \rangle = C_i + \langle f - f_n, \phi_i \rangle$.

Por la desigualdad de Cauchy-Buniakowsky tenemos que:

$$| < f - f_n, \phi_i > | \leq || f - f_n || \, || \phi_i || = || f - f_n ||$$

como $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f \implies || f - f_n || \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

por lo tanto $< f, \phi_i > = C_i$.

Por otro lado

$$|| f - f_n ||^2 = < f - \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k, \; f - \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k >$$

$$= < f, f > - 2 < f, \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k > + < \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k, \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k >$$

$$= || f ||^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} C_k < f, \phi_k > + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 < \phi_k, \phi_k >$$

$$= || f ||^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} C_k^2 + \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

$$= || f ||^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

como

$$|| f - f_n ||^2 = || f ||^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

entonces

$$|| f ||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \; . \; \blacksquare$$

PROPOSICION 3.2: El espacio $L_2[a,b]$ es separable.

Demostración: Para demostrar que L_2 es separable debemos encontrar un subconjunto de L_2 numerable denso.

Sea $D = Q[x]$, el conjunto de los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes en los racionales, entonces D es denso y numerable.

La densidad es consecuencia del Teorema de Weierstrass y la densidad de las funciones continuas en $L_2[a,b]$ [4] pág. 318 además del hecho de que es posible apróximar uniformemente un polinomio en los $R[x]$ por elementos de D. ■

$$D \longrightarrow R[x] \xrightarrow{\text{T. Weierstrass}} C_{[a,b]} \xrightarrow{\text{Densas}} L_2[a,b]$$

Por último analizaremos la convergencia de las sumas parciales de un elemento de V a él mismo, el cuál lo enunciamos de la siguiente forma:

3.1.4 TEOREMA DE CONVERGENCIA.

TEOREMA 3.4: Si $(V, < , >)$ es un espacio separable, y $\{ \varphi_k \}$ con $k \in \mathbb{N}$ es un sistema ortonormal completo, entonces, para toda $f \in V$ las sumas parciales:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k$$

convergen a f , es decir, $\| f - S_n \| \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0$.

Demostración:

$$\| f - S_n \|^2 = < f - \sum_{k=1}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k \ , \ f - \sum_{k=1}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k >$$

$$= \langle f, f \rangle - 2 \langle f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \rangle +$$

$$+ \langle \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \, , \, \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \rangle$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \, .$$

Por la igualdad de Parseval, tomando $\lim_{n\to\infty}$ en ambos lados se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n \|^2 = \lim_{n\to\infty} \left[\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \right]$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle^2$$

$$= 0. \blacksquare$$

3.1.5 TRANSFORMACION DE LOS RESULTADOS ANTERIORES AL CASO PARTICULAR DE L_2.

Si en los resultados enunciados anteriormente tomamos el espacio (V, < , >), como el espacio $L_2([0,2\pi])$ de funciones de cuadrado integrable con la norma establecida en este espacio, estos resultados quedan enunciados de la siguiente forma:

1).- DESIGUALDAD DE BESSEL.

Para toda $f \in L_2([0,2\pi])$ se tiene:

$$\| f \|^2 \geq \pi \left(\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right)$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

donde:

$$a_o = \frac{< f, 1 >}{\| 1 \|_2}$$

$$a_n = \frac{< f, \text{Cos } nx >}{\| \text{Cos } nx \|_2} \quad , \qquad b_n = \frac{< f, \text{Cos } nx >}{\| \text{Sen } nx \|_2} \; .$$

2).- IDENTIDAD DE PARSEVAL.

Para toda $f \in L_2([0,2\pi])$ se cumple:

$$\| f \|^2 = \pi \left(\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right).$$

3).- TEOREMA DE RIESZ-FISCHER.($L_2([0,2\pi])$ es un espacio normado completo [8] Cap 6).

Para toda $f \in L_2([0,2\pi])$ se cumple :

$$\| f \|^2 = \pi \left(\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right).$$

4).- TEOREMA 3.4.

Para toda $f \in L_2([0,2\pi])$ las sumas parciales

$$S_k = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{k} a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sen } nx$$

convergen a f, es decir:

$$\| f - S_k \| \xrightarrow[k \longrightarrow \infty]{} 0.$$

El sistema trigonométrico básico es un sistema ortonormal completo.

La ortonormalidad se sigue del Apéndice 2. Para ver que el sistema es completo, primero podemos observar por el Teorema de Féjer (Teorema 2.3) que toda función continua , puede aproximarse uniformemente (y en L_2) con polinomios trigonométricos, y por la densidad del conjunto de las funciones continuas en L_2, tenemos que toda función en L_2 se puede aproximar con funciones continuas, por lo tanto toda función en L_2 se puede aproximar con polinomios trigonométricos, lo cual hace que el sistema sea completo.

C A P I T U L O C U A T R O .

FUNCIONES CONTINUAS CON SERIE DE FOURIER DIVERGENTE.

En este capítulo demostraremos que existe un conjunto de funciones continuas cuya serie de Fourier es divergente. Asimismo probaremos que dicho conjunto tiene por lo menos la cardinalidad de los números reales.

4.1 EXISTENCIA DE FUNCIONES CONTINUAS CUYA SERIE DE FOURIER DIVERGE.

DEFINICION 4.1: Si $f: X \longrightarrow Y$ es una función que mapea al espacio lineal X en el espacio lineal Y, entonces, se dice que F es una transformación lineal si:

1).- $f(x + y) = f(x) + f(y)\ \forall\ x,y \in X.$

2).- $f(\alpha x) = \alpha\, f(x)\ \forall\ x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}.$

Sea F el espacio de las transformaciones lineales acotadas, $f: X \longrightarrow Y$ donde X y Y son espacios lineales normados.

DEFINICION 4.2: f es una transformación lineal acotada si

$$\sup_{x \in X} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} < \infty .$$

DEFINICION 4.3: Sea $f \in F$ la NORMA de f es:

$$\| f \| = \sup \left\{ \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} : x \in X \text{ y } x \neq 0 \right\} . \qquad (26)$$

donde

$\| f(x) \|$ es una norma definida en Y.

$\| x \|$ es una norma definida en X.

Verifiquemos que $\| \ \|$ es una norma, es decir, veremos que cumple con las siguientes condiciones:

i).- $\| f \| \geq 0$ y $\| f \| = 0$ si y solo si $f = 0$.

ii).- $\| f_1 + f_2 \| \leq \| f_1 \| + \| f_2 \|$ para toda $f_1, f_2 \in F$.

iii).- $\| \alpha f \| = | \alpha | \, \| f \|$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se puede observar que la condición i) es obvia por la definición de $\| f \|$.

$$\text{ii).-} \quad \| f_1 + f_2 \| = \text{Sup} \left\{ \frac{\| (f_1 + f_2)(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

$$= \text{Sup} \left\{ \frac{\| f_1(x) + f_2(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

$$\leq \text{Sup} \left\{ \frac{\| f_1(x) \| + \| f_2(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

$$\leq \text{Sup} \left\{ \frac{\| f_1(x) \|}{\| x \|} \right\} + \text{Sup} \left\{ \frac{\| f_2(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

$$= \| f_1 \| + \| f_2 \|.$$

Por lo tanto $\| f_1 + f_2 \| \leq \| f_1 \| + \| f_2 \|$.

$$\text{iii).-} \quad \| \alpha f \| = \text{Sup} \left\{ \frac{\| \alpha f(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

$$= \text{Sup} \left\{ \frac{|\alpha| \| f(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

$$= |\alpha| \ \text{Sup} \left\{ \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

$$= |\alpha| \, \| f \| .$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
... MIS HIJOS
... NDEZA

Por lo tanto $\| \ \|$ es una norma. ■

OBSERVACIONES:

4.1: $\| f \| = \text{Sup} \{ \| f(x) \| \text{ para } x \in X \text{ y } \| x \| = 1 \}$ y además $\| f(\alpha x) \| = \| \alpha f(x) \| = |\alpha| \| f(x) \|$.

Nótese que (26) y la observación 4.1 son equivalentes, ya que

$$\frac{\| f(x) \|}{\| x \|} = \left\| f\left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right\| .$$

4.2: Por definición, $\| f \|$ es el número más peque$o que satisface:

$\| f(x) \| \leq \| f \| \| x \|$ para toda $x \in X$.

4.3: Toda $f \in F$ mapea una bola unitaria cerrada en X en una bola cerrada en Y, con centro en 0 y radio $\| f \|$, es decir,

$$\left\{ x \in X : \| x \| \leq 1 \right\} \xrightarrow{\quad f \quad} \left\{ f(x) \in Y : \| f(x) \| \leq \| f \| \right\}$$

puesto que:

$$\| f(x) \| \leq \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} \leq \| f \| \text{ porque } \| x \| \leq 1.$$

4.4: Se le llama Funcional a una transformación $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$.

A continuación se demostrarán algunos resultados en los cuales nos apoyaremos para demostrar la existencia de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge.

TEOREMA 4.1: Para una transformación lineal f de un espacio lineal normado X en un espacio lineal normado Y, cada una de las siguientes tres condiciones implican las otras dos.

1).- f es acotada.

2).- f es continua.

3).- f es continua en un punto.

Demostración: Se demostrará siguiendo el procedimiento:

$$1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1).$$

a).- $1) \Longrightarrow 2)$, es decir, $\| f \| < \infty \longrightarrow f$ es continua.

Por demostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\| x_1 - x_2 \| < \delta$ implica que $\| f(x_1) - f(x_2) \| < \varepsilon$.

$\| f(x_1) - f(x_2) \| = \| f(x_1 - x_2) \|$ porque f es una transformación lineal.

$\leq \| f \| \| x_1 - x_2 \|$ por obs. 4.2).

$< \| f \| \delta$

$< M\delta$ donde $\| f \| < M$.

$< \varepsilon$ si $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

Por lo tanto f es continua.

b).- $2) \Longrightarrow 3)$ obvia.

c).- $3) \Longrightarrow 1)$, es decir, f continua en un punto de $X \longrightarrow f$ acotada.

Sea f continua en $x_0 \in X$, entonces, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ tal que:

$$\| x - x_0 \| < \delta \longrightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon.$$

$$\| f(x) - f(x_0) \| = \| f(x - x_0) \|$$

$$= \frac{2}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta}{2} \frac{(x - x_0)}{\| x - x_0 \|} \right) \right\|$$

$$< \frac{2\varepsilon}{\delta} \text{ puesto que}$$

$$\left\| \left(\frac{\delta}{2} \frac{(x-x_0)}{\| x-x_0 \|} \right) \right\| < \delta$$

Por lo tanto $\| f \| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$, es decir, $\| f \|$ es acotada.

■

DEFINICION 4.4: Un conjunto A en un espacio métrico se llama Abierto si todos sus puntos son interiores, es decir, para cada $x \in A$, existe una vecindad B(x) totalmente contenida en A.

TEOREMA 4.2 (TEOREMA DE BAIRE): Si X es un espacio métrico completo, la intersección de cada colección numerable de subconjuntos abiertos densos en X es densa en X.

En particular, la intersección es no vacía (excepto si $X = \varnothing$)

Demostración:

Supongamos que $V_1, V_2, \ldots,$ son densos y abiertos en X.

Sea W cualquier abierto en X, probaremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ es densa en X, es decir, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ tiene al menos un punto que pertenece a W, si $W \neq \varnothing$.

Para $a \in X$ y $r > 0$, sea $B(a,r) = \left\{ b \in X : d(a,b) < r \right\}$ con d la métrica de X y $\overline{B}(a,r)$ su cerradura.

Procederemos inductivamente. Como V_1 es denso y abierto y W es un abierto, entonces, $W \cap V_1$ es un conjunto abierto y no vacío, es decir, todos sus puntos son interiores, esto significa que podemos encontrar, $a_1 \in W \cap V_1$ y r_1 talque :

$$\overline{B}_1(a_1, r_1) \subset W \cap V_1 \text{ y } 0 < r_1 < 1.$$

Tomemos $V_2 \cap B_1$, podemos encontrar $a_2 \in V_2 \cap B_1$ y r_2 talque:

$$\overline{B}_2(a_2, r_2) \subset V_2 \cap B_1 \text{ y } 0 < r_2 < \frac{1}{2} .$$

Si $n > 2$, sean $a_n \in V_n \cap B_{n-1}$ y r_n escogidos tales que:

$$\overline{B}_n(a_n, r_n) \subset V_n \cap B_{n-1} \text{ y } 0 < r_n < \frac{1}{n}$$

lo cuál es posible por la densidad de los V_n.

Probaremos que $\{a_n\}$ es de Cauchy, es decir: Para $\varepsilon > 0$, $\exists$ N tal que $d(a_i,a_j) < \varepsilon$ si $i > N$ y $j > N$.

Si $i > n$ y $j > n$, por construcción a_i y a_j caen en $B_n(a_n,r_n)$, así que $d(a_i,a_j) < 2\,r_n < \frac{2}{n}$, por lo tanto:

$$d(a_i,a_j) < \varepsilon \quad \text{si } n > N \text{ donde } N = \frac{2}{\varepsilon}\ .$$

Por lo tanto $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Esto nos permite afirmar que existe un $x \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Como a_i cae en $\bar{B}_n(a_n,r_n)$, si $i > n$, entonces, x cae $\bar{B}_n(a_n,r_n)$ por lo que $x \in B_1$ y además $x \in V_n \cap B_{n-1}$, $x \in V_n$ para toda n, entonces, $x \in V_1$, es decir, $x \in W \cap V_1$.

Por lo tanto $x \in W$, esto significa que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ es densa en X. ■

COROLARIO 4.1: En un espacio métrico completo, la intersección de cualquier colección numerable de G_δ's (ver Apéndice (4)) densos es otra vez un G_δ denso.

Demostración: Sea $G_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k^n$ denso, donde O_k^n es abierto para toda k,n con n = 1,2,3,...

Por demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso y G_δ. Como cada G_n es denso, esto implica que O_k^n es denso para toda k,n, entonces, por el Teorema de Baire se tiene que:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es densa en X y como :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k^n \quad \text{, entonces, es un } G_\delta. \quad ■$$

TEOREMA 4.3 (DE BANACH-STEINHAUS): Sea X un espacio de Banach y Y un espacio lineal normado y $\{ f_\alpha \}_{\alpha\in A}$ una colección de transformaciones lineales acotadas de X en Y. Entonces, existe un $M < \infty$ tal que :

$$\| f_\alpha \| \le M \quad \text{para toda } \alpha \in A \qquad \text{ó}$$

$$\text{Sup } \| f_\alpha(x) \| = \infty \quad \text{para toda x en algún conjunto denso } G_\delta \text{ en X.}$$

Demostración: Sea $H(x) = \sup_{\alpha\in A} \| f\alpha(x) \|$, por el teorema 4.1 2) se tiene que cada $f\alpha$ es continua, y la función NORMA es continua (ver Apéndice (5)), el mapeo $x \longrightarrow \| f\alpha(x) \|$ es continuo, por lo tanto los conjuntos de la forma:

$V_n = \left\{ x \in X : H(x) > n \right\}$ con n=1,2,3,... son abiertos, ya que:

$$V_n = \left\{ x \in X : \sup_{\alpha\in A} \| f\alpha(x) \| > n \right\} = \cup_{\alpha\in A} \left\{ x \in X : \| f\alpha(x) \| > n \right\}.$$

Consideremos los siguientes dos casos:

i).- Si los V_n son todos densos en X, entonces, por el Teorema de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ es densa en X, y además es un conjunto G_δ en X y por construcción de los V_n se sigue que $H(x) = \infty$, para cada $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

ii).- Si uno de los conjuntos V_n no es denso en X, supongamos que V_N es éste conjunto, entonces, existe un x_o en X y $r > 0$ tal que $\| x \| < r$ implica que $x_o+x \notin V_N$, es decir $H(x_o) \leq N$ y $H(x_o+x) \leq N$, ó escrito de otra manera:
$\| f\alpha(x_o) \| \leq N$ y $\| f\alpha(x_o+x) \| \leq N$ para toda $\alpha \in A$ y para toda x con norma menor o igual que r.

Como $x = (x_o+x) - x_o$, entonces:

$$\begin{aligned} \| f\alpha(x) \| &= \| f\alpha[(x_o+x) - x_o] \| \\ &= \| f\alpha(x_o+x) - f\alpha(x_o) \| \\ &\leq \| f\alpha(x_o+x) \| + \| f\alpha(x_o) \| \\ &\leq N + N \\ &= 2N. \end{aligned}$$

$\| f\alpha(x) \| \leq 2N$ para toda x, talque $\| x \| < r$

$$\text{Como } \frac{\| f\alpha(x) \|}{\| x \|} = \frac{2}{r} \left\| f\alpha \left(\frac{x}{\| x \|} \frac{r}{2} \right) \right\| \leq \frac{4N}{r}.$$

Dado que $\left\| \frac{x}{\| x \|} \frac{r}{2} \right\| < r.$

Por lo tanto $\| f\alpha \| \leq \frac{4N}{r}$, es decir, $\| f\alpha \| \leq M$, para toda $\alpha \in A$ y $M = \frac{4N}{r}$. ■

4.2 SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES CONTINUAS.

Tomemos el conjunto de las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ ($C[-\pi,\pi]$), con la norma del supremo, es decir,

$$\| g \| = \text{Sup} \left\{ \| g(x) \| : x \in [-\pi,\pi] \right\}.$$

Denotemos a $S_n(x)$ como $S_n(g,x)$, la n-ésima suma parcial de $g(x)$, por el Teorema 1.2 se tiene que:

$$S_n(g,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t+x)\, D_n(t)\, dt.$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Si $x = 0$ se tiene:

$$S_n(g,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, D_n(t)\, dt.$$

Definamos $f_n(g) = S_n(g,0)$, entonces,

$$\frac{| f_n(g) |}{\| g \|} = \frac{\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, D_n(t)\, dt \right|}{\| g \|}$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\| g(t) \|\, | D_n(t) |}{\| g \|}\, dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | D_n(t) |\, dt.$$

Por lo tanto $\| f_n \| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | D_n(t) |\, dt = \| D_n \|_1.$ (27)

Se probarán dos cosas:

1) $\| D_n \|_1 \longrightarrow \infty$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

2) En (27) se cumple la igualdad.

Demostración: Para demostrar 1) se utilizará iv) del Teorema 1.1 y la desigualdad $| \operatorname{Sen} t | \leq | t |$.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | D_n(t) | \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{| \operatorname{Sen} (n + \frac{1}{2})t |}{2 | \operatorname{Sen} (\frac{1}{2} t) |} \, dt$$

$$> \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{| \operatorname{Sen} (n + \frac{1}{2})t |}{| t |} \, dt$$

$$> \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{| \operatorname{Sen} (n + \frac{1}{2})t |}{t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{| \operatorname{Sen} t |}{t} \, dt$$

$$> \frac{1}{\pi} \int_{0}^{n\pi} \frac{| \operatorname{Sen} t |}{t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{| \operatorname{Sen} t |}{t} \, dt$$

$$> \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{| \operatorname{Sen} t |}{k\pi} \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\ \text{Sen } t\ |\ dt$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Por lo tanto $|| D_n ||_1 \longrightarrow \infty$.

Para demostrar 2), definimos $g(t)$ en $[-\pi,\pi]$ como:

$$g(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } D_n(t) \geq 0 \\ -1 \text{ si } D_n(t) < 0 \end{cases} \text{ para n fijo.}$$

Existe una sucesión $\{ R_j \}$ en $C[-\pi,\pi]$, tal que $-1 \leq R_j \leq 1$ y $R_j(t) \xrightarrow[j \to \infty]{} g(t)$ para cada t.

Utilizando el Teorema de Convergencia Dominada [8] pág.88.

$$\lim_{j\to\infty} f_n(R_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_j(t)\ D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{j\to\infty} R_j(t)\ D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ D_n(t)dt$$

$$= || D_n ||_1$$

puesto que $g(t)\ D_n(t) = |\ D_n(t)\ |$, por lo tanto:

$$\lim_{j\to\infty} f_n(R_j) = || D_n ||_1.$$

Es decir,

$$| f_n(R_j) - \| D_n \|_1 | \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$$

$| \| D_n \|_1 | - | f_n(R_j) | \leq | f_n(R_j) - \| D_n \|_1 | < \varepsilon$, es

decir,

$$\| D_n \|_1 \leq | f_n(R_j) | + \varepsilon, \text{ con } j = 1,2,\ldots .$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Como $\| R_j \| = 1$ entonces:

$$\| D_n \|_1 \leq \sup_{\| h \| = 1} | f_n(h) | + \varepsilon$$

$$\| D_n \|_1 \leq \| f_n \| + \varepsilon$$

$$\| D_n \|_1 \leq \| f_n \|. \qquad (27)$$

Por (27) y (28) se tiene que:

$$\| f_n \| = \| D_n \|_1 \quad \blacksquare$$

1) y 2) implica $\| f_n \| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

Utilizando el Teorema de Banach- Steinhaus se tiene que:

$$\sup_n | S_n(g,0) | = \infty$$

para toda $g \in G_\delta$ denso en $C[-\pi,\pi]$, es decir, la serie de Fourier de toda función en el conjunto G_δ diverge en el punto $x = 0$.

El punto $x = 0$ se tomó por conveniencia, pero el mismo resultado se tiene para cualquier punto x, es decir:

Para cada $x \in [-\pi,\pi]$, $\exists$ un conjunto $Ex \subset C[-\pi,\pi]$, tal que:

$$\sup_n | S_n(g,x) | = \infty \text{ para toda } g \in Ex. \qquad (29)$$

Por lo anterior se puede observar que existe una " gran cantidad " de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en un punto.

Este resultado se puede extender de la siguiente manera:

Sea $\left\{ x_i \right\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales y sea E_i los correspondientes conjuntos densos G_{δ}'s en $C[-\pi,\pi]$.

Sea $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces, por el corolario del Teorema de Baire, E es un conjunto denso y G_{δ} en $C[-\pi,\pi]$, por (30), se tiene:

$$\sup_n \left| S_n(g,x_i) \right| = \infty, \text{ para toda } g \in E, \ i = 1,2,\ldots$$

es decir, la serie de Fourier de toda función en E diverge en los puntos $\{ x_i \}$.

Nota: Los puntos x_i's pueden ser un conjunto denso en $\mathbb{R}$, por ejemplo los racionales.

Una pregunta que surge al observar este resultado, es el saber, " ¿cuántas funciones existen en el conjunto E?. "

El siguiente teorema nos permite dar respuesta a esta pregunta.

TEOREMA 4.4: En un espacio métrico completo X, sin puntos aislados ningún conjunto denso numerables es G_{δ}.

Demostración: Sea $E = \{ x_1, x_2, \ldots \}$ un conjunto denso y numerable en X, supongamos que E es G_{δ}, entonces, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ donde cada V_n es denso y abierto.

Sea $W_n = V_n - \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\}$, entonces, cada W_n es denso y abierto, por lo tanto:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(V_n - \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\} \right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n - E$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \varnothing$$

por el Teorema de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ tendría que ser denso, es decir, $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \neq \varnothing$, esto nos lleva a una contradicción, por lo tanto, E no puede ser G_{δ}. ∎

Por lo tanto la cardinalidad del conjunto de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge es cuando menos el continuo, ya que entre la cardinalidad de los conjuntos numerables ($\aleph_0$) y el conjunto $\mathbb{R}$ (C), no existe otra .

APENDICE 1.

DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES

Encontraremos los coeficientes de Fourier de algunas funciones.

EJEMPLO 1.1: Sea f periódica con período 2π, definida en $(-\pi,\pi]$ por $f(x) = x$. Calcular sus coeficientes de Fourier.

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS HARA MI GRANDEZA

$$= \frac{1}{\pi}\left[0\right]$$

$$= 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{Cos}\,nx\,dx = 0$$

puesto que f(x) es impar y Cos nx es par, su producto es una función impar por tanto su integral es igual a cero.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{Sen}\,nx\,dx$$

e integrando por partes obtenemos que:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\,\text{Cos}\,nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\,\text{Cos}\,nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\,\text{Cos}\,nx + \frac{1}{n^2}\,\text{Sen}\,nx\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\,\text{Cos}\,n\pi + \frac{1}{n^2}\,\text{Sen}\,n\pi - \frac{\pi}{n}\,\text{Cos}\,(-n\pi)\right.$$

$$- \frac{1}{n^2} \text{Sen } (-n\pi) \Big]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \frac{2\pi}{n} \text{Cos } n\pi + \frac{2}{n^2} \text{Sen } n\pi \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \frac{2\pi}{n} \text{Cos } n\pi \right]$$

$$= - \frac{2}{n} \cos n\pi$$

$$= - \frac{2}{n} (-1)^n .$$

Por lo tanto la serie de Fourier de la función f es:

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{Sen } nx.$$

EJEMPLO 1.2: Sea f de período 2π definida en $(-\pi,\pi]$ por $f(x) = x^2$. Calcular su serie de Fourier.

Encontraremos primero sus coeficientes de Fourier.

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \text{ Cos } nx \, dx$, e integrando por partes obtenemos:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{n} \text{Sen } nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \text{ Sen } nx \, dx \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{n} \text{Sen } nx - \frac{2}{n} \left(- \frac{x}{n} \text{Cos } nx + \frac{1}{n^2} \text{Sen } nx \right) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(\pi)^2}{n} \text{Sen } n\pi + \frac{2\pi}{n^2} \text{Cos } n\pi - \frac{2}{n^3} \text{Sen } n\pi \right.$$

$$\left. - \frac{(-\pi)^2}{n} \text{Sen } (-n\pi) + \frac{2\pi}{n^2} \text{Cos } (-n\pi) + \frac{2}{n^3} \text{Sen } (-n\pi) \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{4\pi}{n^2}\operatorname{Cos} n\pi\right]$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}\operatorname{Cos} n\pi.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{Sen} nx\, dx, \text{ integrando por partes:}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\operatorname{Cos} nx + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{Cos} nx\, dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\operatorname{Cos} nx + \frac{2}{n}\left(\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx + \frac{1}{n^2}\operatorname{Cos} nx\right)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-\pi)^2}{n}\operatorname{Cos}(n\pi) + \frac{2\pi}{n^2}\operatorname{Sen} n\pi + \frac{2}{n^3}\operatorname{Cos} n\pi\right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{n}\operatorname{Cos}(-n\pi) + \frac{2\pi}{n^2}\operatorname{Sen}(-n\pi) - \frac{2}{n^3}\operatorname{Cos}(-n\pi)\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n}(0)$$

$$b_n = 0.$$

Por lo tanto la serie de Fourier de la función f es:

$$f(x) \approx \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{Cos}(n\pi)\operatorname{Cos} nx$$

$$f(x) \approx \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\operatorname{Cos} nx\ .$$

APENDICE 2.

ORTONORMALIDAD DEL SISTEMA TRIGONOMETRICO BASICO.

TEOREMA : (ORTOGONALIDAD DEL SISTEMA TRIGONOMETRICO BASICO.)

La integral sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ del producto de cualquier pareja de funciones distintas del sistema trigonométrico básico:

$$\{ 1, \text{Cos } x, \text{Sen } x, \text{Cos } 2x, \text{Sen } 2x, \ldots \}$$

es cero, es decir:

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

i).- $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen } nx \text{ Cos } mx \, dx = 0 \qquad \begin{matrix} n = 1,2,3,\ldots \\ m = 0,1,2,\ldots \end{matrix}$

ii).- $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen } nx \text{ Sen } mx \, dx = \begin{cases} \pi \text{ si } n = m = 1,2,3,\ldots \\ 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$

iii).- $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \text{ Cos } mx \, dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \pi \text{ si } n = m = 1,2,3,\ldots \\ 2\pi \text{ si } n = m = 0 \end{cases}$

Demostración:

i).- Como el producto de Sen nx Cos mx resulta ser una función impar su integral es igual a cero.

ii).- Sea m = n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen } nx \text{ Sen } mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen}^2 nx \, dx$$

como $\text{Sen}^2 nx = \frac{1}{2} (1 - \text{Cos } 2nx)$, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen}^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \text{Cos } 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } 2nx \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\,\text{Sen}\ 2nx \right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2n}\,\text{Sen}\ 4n\pi + \pi + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2n}\,\text{Sen}\ 2n\pi \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

ii).- Si $n \neq m$, de la fórmula

$$\text{Sen } x\ \text{Sen } y = \frac{1}{2}\left[\text{Cos } (x-y) - \text{Cos } (x+y)\right] \quad \text{se tiene que}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen } nx\ \text{Sen } mx\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\text{Cos}(n - m)x - \text{Cos}(n + m)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}(n - m)x\ dx - \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}(n + m)x\ dx = \right.$$

$$= \frac{1}{2(n - m)}\,\text{Sen } (n - m)x - \frac{1}{2(n + m)}\,\text{Sen } (n + m)x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2(n - m)}\,\text{Sen } (n - m)\pi - \frac{1}{2(n + m)}\,\text{Sen } (n + m)\pi + 0.$$

$$= \frac{1}{2(n - m)}\,\text{Sen } (n - m)\pi - \frac{1}{2(n + m)}\,\text{Sen } (n + m)\pi.$$

Como n y m son enteros $(n - m)$ y $(n + m)$ también lo son y además como la función $\text{Sen } k\pi = 0\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$, obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sen } nx\ \text{Sen } mx\ dx = 0.$$

iii).- Si $n \neq m$, de la fórmula

$$\text{Cos } x \text{ Cos } y = \frac{1}{2}\left[\text{Cos } (x + y) + \text{Cos } (x - y)\right]$$

se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \text{ Cos } mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi}\left[\text{Cos } (n + m)x + \text{Cos } (n - m)x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } (n + m)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } (n - m)x \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n + m} \text{Sen } (n + m)x + \frac{1}{n - m} \text{Sen } (n - m)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n + m} \text{Sen } (n + m)\pi + \frac{1}{n - m} \text{Sen } (n - m)\pi + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n + m} \text{Sen } (n + m)\pi + \frac{1}{n - m} \text{Sen } (n - m)\pi \right) = 0$$

porque $\text{Sen } k\pi = 0 \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$.

Sea $n = m = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \text{ Cos } mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Si $n = m = 1,2,3,\ldots$, aplicando la fórmula

$$\text{Cos}^2 x = \frac{1}{2} \left(1 + \text{Cos } 2x \right)$$

obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \text{ Cos } mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \text{Cos } 2nx \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } 2nx \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \text{Sen } 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{2n} \text{ Sen } 2n\pi + \pi + \frac{1}{2n} \text{ Sen } 2n\pi \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2} = \pi. \quad \blacksquare$$

APENDICE 3.

EJEMPLOS DE ALGUNAS FUNCIONES QUE SATISFACEN LOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA

EJEMPLO 1.3: Sea $f(x) = x \qquad x \in [-\pi.\pi]$ y $f(x+2\pi) = f(x)$, entonces, su serie de Fourier es:

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ Cos } n\pi \text{ Sen } nx.$$

Ahora como $f(x)$ es de variación acotada, ya que f es monótona, entonces, satisface el criterio de Jordan. Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ Cos } k\pi \text{ Sen } kx = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + f(x) \right) = \frac{1}{2}\left(x + x \right)$$

$$= \frac{1}{2}\,(2x) = x.$$

es decir, la serie converge a la función, en otras palabras:

$$x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ Cos } n\pi \text{ Sen } nx.$$

EJEMPLO 1.4: Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$ $\qquad f(x+2\pi) = f(x)$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Calculemos su serie de Fourier:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{o} dx + \int_{0}^{\pi} 0\,dx\right) = \frac{1}{\pi}(x)\Big|_{-\pi}^{0} = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Cos } nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o} \text{Cos } nx\,dx = \frac{\text{Sen } nx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{0} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Sen } nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o} \text{Sen } nx\,dx = \frac{\text{Cos } nx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{-\text{Cos}(0)}{n\pi} + \frac{\text{Cos}(-n\pi)}{n\pi} = \frac{-1}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}\right)\text{Sen } nx.$$

Para n par, los términos de la serie son iguales a cero, y si n es impar, entonces, los términos de la serie son iguales a -2 Sen nx, por lo tanto, podemos reescribir:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sen(2n-1)x}{2n-1}.$$

Como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \ -\pi < x < 0 \\ \\ 0 & si \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

es de variación acotada, puesto que, para cualquier t_k partición de $[-\pi,\pi]$, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| = \begin{cases} 0 & si \ \ f(t_k) = f(t_{k-1}) \\ 1 & si \ \ f(t_k) \neq f(t_{k-1}) \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{N} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| \leq 1.$$

Es decir, cumple con el criterio de Jordan, entonces, la serie converge a:

$$\frac{1}{2} \left(f(x+) + f(x-) \right)$$

igual a $\frac{1}{2}$ si $x = 0$ y $f(x)$ si $x \neq 0$.

ya que

$$f(x+) = \begin{cases} 1 & si \ x \in [-\pi,0) \\ \\ 0 & si \ x \in (0,\pi] \end{cases}$$

$$f(x-) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\pi,0] \\ 0 & \text{si } x \in (0,\pi] \end{cases}$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

$$f(x+) + f(x-) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in (-\pi,0) \\ 0 & \text{si } x \in (0,\pi) \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

APENDICE 4.

CONJUNTOS G_{δ}'s.

DEFINICION: Un conjunto es G_δ si es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos, es decir, $A \in G_\delta$ si $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$ con O_k conjuntos abiertos.

APENDICE 5.

CONTINUIDAD DE LA FUNCION NORMA.

TEOREMA: La función $\| \, \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

SONORA
SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

Demostración: por demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque:

$$\| x_1 - x_2 \| < \delta \text{ implica } \big| \, \| x_1 \| - \| x_2 \| \, \big| < \varepsilon.$$

$$\big| \, \| x_1 \| - \| x_2 \| \, \big| \leq \big| \, \| x_1 - x_2 \| \, \big| < \varepsilon, \text{ si hacemos } \varepsilon = \delta.$$

■

APENDICE 6.

DESIGUALDAD DE CAUCHY-BUNIAKOVSKI.

TEOREMA: Para todo $x,y \in V$, se cumple:

$$|< x,y >| \leq || x || \, || y ||.$$

Si $y = 0$, ambos lados de la desigualdad son cero y no hay nada que probar.

Si $y \neq 0$, entonces la desigualdad equivale a probar:

$$\left| \left(x, \frac{y}{|| y ||} \right) \right| \leq || x ||$$

o bien

$|< x,y >| \leq || x ||$ si $|| y || = 1$ para toda x en V.

Ahora bien si

$$\begin{aligned} 0 \leq || x - < x,y > y ||^2 &= < x - < x,y > y, x - < x,y > y > \\ &= < x,x > - 2 < x, < x,y > y > + \\ &\quad + < < x,y > y, < x,y > y > \\ &= < x,x > - 2 < x,y > < x,y > + \\ &\quad + < x,y >^2 < y,y > \\ &= || x ||^2 - 2 \, | < x,y > |^2 + \\ &\quad + | < x,y > |^2 || y || \\ &= || x ||^2 - | < x,y > |^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$| < x,y > |^2 \leq || x ||^2$$

entonces

$$| < x,y > | \leq || x || \text{ si } || y || = 1.$$

■

APENDICE 7.

ESPACIOS EUCLIDEANOS.

DEFINICION 1: Un espacio EUCLIDEANO es un espacio lineal V, con producto escalar, es decir, una función real $< , >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1).- $< x, x > \geq 0, < x, x > = 0 \iff x = 0.$

2).- $< x, y > = < y, x >.$

3).- $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}.$

4).- $< x, y + z > = < x, y > + < x, z >.$

DEFINICION 2: En un espacio euclideano definimos la norma como:

$$|| x || = \sqrt{< x, x >} \qquad \forall x \in V. \qquad (A)$$

Para determinar si una función $P : V \longrightarrow R$ es una Norma de un espacio V debe de cumplir las siguientes características:

1).- $P(x) \geq 0, P(x) = 0 \iff x = 0.$

2).- $P(x + y) \leq P(x) + P(y) \quad x,y \in V.$

3).- $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$ para cualquier α .

Comprobaremos que la función $|| \ ||$ definida por (A) es una norma, es decir, cumple las siguientes propiedades:

1).- $|| x || \geq 0$ ya que $< x, x > \geq 0$ y
$|| x || = 0 \iff x = 0$ dado que $< x, x > = 0 \iff x = 0.$

2).- por demostrar que: $|| x + y || \leq || x || + || y ||$

$$\begin{aligned} || x + y ||^2 &= < x + y, x + y > \\ &= < x + y, x > + < x + y, y > \\ &= < x, x > + < y, x > + < x, y > + < y, y > \\ &= || x ||^2 + 2< x, y > + || y ||^2 \end{aligned}$$

$$\leq \| x \|^2 + 2 |< x, y >| + \| y \|^2$$
$$\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2$$

dado que $|< x, y >| \leq \| x \| \| y \|$ (ver Apéndice 6), por lo tanto

$$\| x + y \|^2 \leq (\| x \| + \| y \|)^2$$

extrayendo raíz cuadrada obtenemos:

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

3) Por demostrar que: $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$

$$\| \alpha x \| = \sqrt{< \alpha x, \alpha x >}$$

$$\| \alpha x \| = \sqrt{\alpha < x, \alpha x >}$$

$$\| \alpha x \| = \sqrt{\alpha^2 < x, x >}$$

$$\| \alpha x \| = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{< x, x >}$$

$$\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|.$$

Por lo tanto la función (A) es una NORMA en el espacio V. ■

Ahora bien, si $x,y \in \mathbb{R}^2$, $y < x, y > = 0$, entonces, $\theta = \pi/2$ y se dice que x y y son ortogonales. Generalizando, podemos enunciar lo siguiente:

DEFINICION 3: Un sistema $\{ X_\alpha \}_{\alpha \in I} \subset V$ con X_α's distintos de cero se llama ORTOGONALES si $< X_\alpha, X_\beta > = 0$ para $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in I$.

DEFINICION 4: Diremos que un sistema $\{ X_\alpha \} \subset V$ es ortonormal si es un sistema ortogonal y la norma de cada elemento de $\{ X_\alpha \}$ es igual a uno ($\| X_\alpha \| = 1$ para toda α).

Está claro que siendo $\{ X_\alpha \}$ un sistema ortogonal, el sistema

$\left\{ \dfrac{X_\alpha}{\| X_\alpha \|} \right\}$ resulta ser ortonormal.

Es decir, un sistema $\{ X_\alpha \}$ tal que :

$$< X_\alpha, X_\beta > = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$$

se le llama sistema ortonormal.

Uno de los espacios normados es el de funciones medibles de potencias integrables, en especial el espacio L_2 de funciones de cuadrado integrable. Estudiaremos algunas de sus propiedades y analizaremos algunos resultados en este espacio.

DEFINICION 5: El espacio $L_2([a,b])$ es el conjunto de todas las funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_a^b [f(x)]^2 \, dx < \infty.$$

Veremos si el conjunto $L_2([a,b])$ está bien definido como espacio lineal. Para esto veamos que cumpla con:

PROPOSICION 1: Sean f,g y $h \in L_2([a,b])$.Entonces $L_2([a,b])$ es un espacio lineal, es decir, satisface las siguientes propiedades:

1).- $f + g = g + f$

2).- $f + (g + h) = (f + g) + h$

3).- $\forall f \in L_2([a,b])$, $\exists j \in L_2([a,b])$ tal que, $f + j = f$

4).- $\forall f \in L_2([a,b])$, $\exists -f \in L_2([a,b])$ tal que, $f + (-f) = j$

5).- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in L_2([a,b])$, $\alpha f \in L_2([a,b])$; $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$

6).- $\forall f \in L_2([a,b])$, $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $(f)(1) = f$

7).- $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$

8).- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Demostración: Estas propiedades se desprenden de las propiedades de los números reales y de comprobar que:

1).- El producto de dos funciones f y g $\in L_2[a,b]$ es integrable

$$(f - g)^2 = f^2 - 2fg + g^2$$

$$(f - g)^2 + 2fg = f^2 + g^2$$

$$2fg \leq f^2 + g^2$$

$$fg \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

$$\int fg \leq \frac{1}{2}\left[\int f^2 + \int g^2\right]$$

como $\int f^2 < \infty$ y $\int g^2 < \infty$, entonces, $\int fg < \infty$.

2).- Toda función $f \in L_2([a,b])$ de cuadrado integrable es integrable, es decir, si $f \in L_2 \Longrightarrow \int f < \infty$.

Esto es obvio si hacemos $g(x) \equiv 1$ en el resultado anterior.

3).- $f,g \in L_2([a,b]) \Longrightarrow f + g \in L_2([a,b])$

$$(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$$

Como cada una de las funciones del miembro derecho son integrables, entonces, $(f + g)^2$ es integrable, por lo tanto $f + g$ pertenece a $L_2([a,b])$.

4).- Si $f \in L_2([a,b])$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha f \in L_2([a,b])$.

Si $\int f^2 < \infty$, por demostrar que, $\int [\alpha f]^2 < \infty$.

Dado que:

$$\int [\alpha f]^2 = \int \alpha^2 f^2 = \alpha^2 \int f^2 < \infty \Longrightarrow \alpha f \in L_2([a,b]).\blacksquare$$

DEFINICION 6: Sea f y g $\in$ L2([a,b]) el producto escalar es:

$$< f, g > = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Nos resta, demostrar que este producto escalar está bien definido, es decir, que cumple con las siguientes condiciones:

1).- $< f, g > = < g, f >$.

2).- $< f_1 + f_2, g > = < f_1, g > + < f_2, g >$.

3).- $< \alpha f, g > = \alpha < f, g >$.

4).- $< f, f > \geq 0$ y $< f, f > = 0$ si y sólo si $f = 0$ casi dondequiera.

Estas claramente se cumplen aplicando las propiedades de la integral.

Definiremos la norma en L2([a,b]).

DEFINICION 7: Sea f $\in$ L2([a,b]) entonces la norma de f es:

$$|| f || = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int f^2(x)\, d\mu}$$

B I B L I O G R A F I A .

[1] T. M. APOSTOL, Mathematical Analysis, Addison-Wesley 1957.

[2] G. D. BARRA, Introduction to Measure Theory, Van Nostrand 1974.

[3] R. V. CHURCHILL, J. W. BROWN, Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill, 1987.

[4] R. R. GOLDENBERG, Methods of Real Analysis, Blaisdell 1964.

[5] G. H. HARDY , W. W. ROGONSINSKY, Fourier Series, Macmillan 1944.

[6] O. HERNANDEZ LERMA Métodos de Fourier en la física y la ingeniería, E. Trillas 1973.

[7] A. N. KOLMOGOROV, Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, E. Mir. Moscú 1978.

[8] H. L. ROYDEN, Real Analysis second edition, Macmillan 1968.

[9] E. C. TITCHMARSH, The theory of functions, Oxford University Press 1939.

[10] E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press 1940.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA