UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

TESIS

Que para obtener el Título de:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presenta:

Roberto Gaona Avila

Hermosillo, Sonora. Diciembre de 1996.

AGRADEZCO AL M.C. JORGE SANDOVAL CHAVEZ QUE DURANTE EL CURSO DE OPTICA MATEMATICA ME HIZO VER EL POTENCIAL INEXPLORADO, AL MENOS EN SONORA, DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER TEMA CENTRAL DE ESTE TRABAJO.

A MIS PADRES POR EL APOYO BRINDADO

INDICE

CAPITULO 1 LA SERIE DE FOURIER

CAPITULO 2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

CAPITULO 3 APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES

CAPITULO 1
LA SERIE DE FOURIER

El propósito de este capítulo es mostrar que toda función periódica continua con periodo 2π puede ser representada como serie convergente en las funciones periódicas elementeles sen(kx), cos(kx) con k natural. A dicha serie se le llama la Serie de Fourier de la función correspondiente. Se introduce también la representación compleja de la Serie de Fourier

1. FUNDAMENTOS DE LAS SERIES DE FOURIER.

1.1. ELEMENTOS DE ALGEBRA LINEAL.

DEFINICION 1. Sea V el espacio vectorial de las funciones integrables periódicas de período 2τ en $\mathbb{R}$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica con período 2τ si $f(x + 2\tau) = f(x)$).

Ahora se define sobre VxV la siguiente aplicación:

$$F: V\times V \to \mathbb{R} \text{ con } \qquad F = \langle f, g\rangle = \int_{-\tau}^{\tau} fg \, dx$$

TEOREMA 1. $\langle f, g\rangle$ es producto interior.

a) Sean f y g $\in$ V, entonces fg= gf y por lo tanto:

$$\int_{-\tau}^{\tau} fg \, dx = \int_{-\tau}^{\tau} gf \, dx$$

por lo que:

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$$

b) Sean f, g, h $\in$ V, entonces:

$$f(g + h) = fg + fh, \text{ y por lo tanto}$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(g + h)dx = \int_{-\tau}^{\tau} fg\, dx + \int_{-\tau}^{\tau} fh\, dx$$

por lo que:

$$\langle f, (g + h)\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$$

c) Sean c $\in \mathbb{R}$ y f, g $\in$ V, entonces:

$$cf \in V$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} cfg\, dx = c\int_{-\tau}^{\tau} fg\, dx$$

por lo que:

$$\langle cf, g\rangle = c\langle f, g\rangle$$

Por lo tanto el operador es bilineal.

d) Como

$$\langle f,f\rangle=\int_{-\tau}^{\tau} f\circ f\, dx \geq 0$$

se tiene que

$$\langle f,f\rangle\geq 0 \text{ y } \langle f,f\rangle=0 \iff f=0 \text{ si f es continua}$$

por lo tanto, el operador es definido positivo.

Esto permite afirmar que V es un espacio vectorial, el cuál resulta espacio de Hilbert ($\mathcal{H}$), con el producto interior < >.

Tomando en cuenta que si f es de período 2τ, entonces $h(x) = f(\frac{\tau}{2\pi}x)$ es una función de período 2π, fijaremos el periodo de las funciones a considerar como igual a 2π

TEOREMA 2. El conjunto $\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ sen } mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx\right\}$ para $m \in \mathbb{N}$, es un conjunto ortonormal con respecto al producto interno anterior. La demostración se encuentra en el apéndice C.

DEFINICION 2. La norma de un elemento f de $\mathcal{H}$, se define como

$$||f|| = \langle f, f\rangle^{1/2}$$

1.2. LA SERIE DE FOURIER.

DEFINICION 3. Si $f \in \mathcal{H}$ entonces se define la **Serie de Fourier de f** como la serie

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \\[2ex] \displaystyle a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ ; \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) \\[2ex] \displaystyle b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Cada uno de los a_n y b_n se llaman *Coeficientes de Fourier* de la función f y nos mide la "proyección" de f a lo largo de la dirección correspondiente.

En esta sección se mostrará la convergencia de la serie de Fourier para toda función continua con periodo 2π .

Primeramente se tratará el caso de funciones periodicas con segunda derivada acotada y probaremos lo siguiente:

TEOREMA 3. Si $f(x)$ es una función la cual tiene primera y segunda derivada continuas excepto para un número finito de esquinas en un periodo, y si a_k y b_k son los coefieientes de su serie de Fourier, entonces existe un número C independiente de k tal que

$$|a_k| \leq \frac{2C}{k^2}, \qquad |b_k| \leq \frac{2C}{k^2}$$

La convergencia de la serie es un corolario inmediato. La importancia especial de la hipótesis es que se aplica en particular a una función cuya gráfica sobre algún periodo es hecha de un número finito de segmentos de lineas rectas por pedazos unidas de extremo a extremo, o como podría describirse por brevedad, una función cuya gráfica es una linea quebrada.

DEMOSTRACION: Siendo la primer derivada de la funcion continua, aplicando integración por partes, obtenemos para cada a_k

$$\pi a_k = \left[\frac{1}{k} f(t) \operatorname{sen} kt \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} kt \, dt =$$

$$- \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} kt \, dt$$

Como la segunda derivada es continua, salvo en un conjunto finito de puntos tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} kt \, dt = \left[-\frac{1}{k} f'(t) \cos kt \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos kt \, dt$$

$$= \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos kt \, dt$$

Sea M el máximo de $|f''(t)|$, entonces $|f''(t)\cos kt| \leq M$, $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos ktdt\right| \leq 2M\pi$, y

$|a_k| \leq \dfrac{2M}{k^2}$. Similarmente $|b_k| \leq \dfrac{2M}{k^2}$. Se sigue que

$|a_k\cos kx + b_k \operatorname{sen} k| \leq \dfrac{4M}{k^2}$ y como $\dfrac{1}{k^2}$ es el término general de una serie convergente bien conocida (1) es también ciertamente convergente.

Las condiciones del teorema anterior son necesarias pero no suficientes ya que el matemático du Bois-Reymond en el año 1873 dió un ejemplo de una función continua, en el intervalo $[0,2\pi]$, cuya transformada de Fourier no converge en un número no numerable de puntos.

2. CONVERGENCIA A CERO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER.

(Teorema de Riemann).

Sea f(x) ahora una función de periodo 2π la cual (con la generalidad suficiente para los propósitos de esta tésis), es continua excepto para un número finito de puntos en un periodo.

Sean a_k y b_k los coeficientes de Fourier (1) y sea $S_n(x)$ la enesima suma parcial de la serie (1)

$$\left.\begin{aligned} S_n(x) = a_o/2 &+ a_1\cos x + \ldots + a_n\cos nx \\ &+ b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + b_n \operatorname{sen} nx \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

usando las relaciónes de ortogonalidad se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos kt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\operatorname{sen} kt dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt dt,\ k\le n$$

A partir de estas relaciones, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_n(t)\ dt = \pi\left[\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right] = \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(t)]^2\ dt$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]^2\ dt = \int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\ dt - 2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)S_n(t)\ dt$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(t)]^2\ dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\ dt - \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(t)]^2\ dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\ dt - \pi\left[\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right] \ge 0$$

Como el primer miembro no puede ser negativo, se tiene que

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\ dt$$

El hecho de que esto es verdadero para todo valor de n, implica que la serie infinita

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

es convergente. Y tomando en cuenta que la sucesión de términos de una sucesión convergente converge a cero, tenemos

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k \to \infty} b_k = 0$$

Entonces hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 4. (Riemann) Si $\phi(t)$ es cualquier función de periodo 2π la cual es continua excepto para un número finito de saltos en un periodo, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos nt \, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \operatorname{sen} nt \, dt = 0$$

Una simple consecuencia de este teorema será mencionado después como un lema. Está claro que la hipótesis de periodicidad no es escencial, ya que las integrales a que se refiere el teorema no involucran valores de la función fuera del intervalo $(-\pi, \pi)$. Si cualquier función es dada sobre el intervalo, una función periódica puede construirse por sustituciónes repetidas de los valores en intervalos sucesivos de longitud 2π.

Si la función original como se definió de $-\pi$ a π presenta diferentes limites en los dos extremos de este intervalo la correspondencia de la función periódica tendría saltos finitos seguramente, pasando de un intervalo a otro, pero tal discontinuidad es admisible bajo la hipótesis. Si $\phi(x)$ es una función continua desde $-\pi$ a π excepto para un número finito de saltos lo mismo pasará para las funciones $\phi(x)$ $\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$, y el teorema puede aplicarse a estas funciones, prescindiendo de el hecho de que $\cos(\frac{x}{2})$ y $\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$ no tienen el mismo periodo 2π cuando se ha considerado por restricción de valores de x. Con un cambio de notación para la variable independiente, aplicando el teorema a la combinación

$$\phi(u)\operatorname{sen}\,(n+\tfrac{1}{2})u = [\phi(u)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}u]\cos nu + [\phi(u)\cos\tfrac{1}{2}u]\operatorname{sen} nu$$

da el

Corolario: Si $\phi(u)$ es cualquier función continua desde $-\pi$ a π excepto para un número finito de saltos, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(u)\operatorname{sen}\,(n+\tfrac{1}{2})u\,du = 0$$

3. FORMULA INTEGRAL PARA LA SUMA PARCIAL DE LAS SERIES.

Ahora se estudiará la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v[\tfrac{1}{2} + \cos v + \cos 2v + \ldots + \cos nv] = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v + \sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\cos kv$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\,(k+\tfrac{1}{2})v - \operatorname{sen}\,(k-\tfrac{1}{2})v\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\,(n+\tfrac{1}{2})v$$

se tiene que

$$\frac{1}{2} + \cos v + \ldots + \cos nv = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}v} \qquad (3)$$

Si los valores de a_k y b_k dadas en (1) son sustituidos explicitamente en (2), la expresión resultante para S_n es:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\cos kx + \operatorname{sen} kt\operatorname{sen} kx\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt$$

es decir,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt \qquad (4)$$

con la sustitución $t - x = u$ esto convierte

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\,du$$

El integrando tiene periodo 2π cuando se considera una función de u. Ahora, dado que la integral de una función periódica sobre cualquier intervalo cuya longitud es un periodo es la misma y constante, obtenemos:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\,du \qquad (5)$$

Por la integración de (3) se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\,du = 1 \qquad (6)$$

(Esto es un hecho que se observa valuando S para $f \equiv 1$, ya que la serie de Fourier para cualquier constante se reduce a la misma constante). Si (6) se multiplica por f(x) para cualquier valor particular de x, el factor f(x), siendo independiente de la variable de integración, puede ser puesto bajo el signo de la integral, y asi obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\,du$$

Entonces

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\,du \qquad (7)$$

El problema de convergencia de las series se reduce al problema de demostrar que la última integral aproxima a cero. Lo cual queda demostrado en la siguiente sección.

4. CONVERGENCIA EN EL PUNTO DE CONTINUIDAD.

La atención será restringida a la cuestión de convergencia en un punto donde f(x) es continua.

Supongamos que f(x) es continua excepto para un número finito de saltos en un periodo y que en el punto particular donde se quiere probar la convergencia de la serie de Fourier, ésta es continua y tiene derivada finita en extremo derecho y una derivada finita en el extremo izquierdo, las cuales pueden ser o no iguales. Esto quiere decir que su gráfica es continua en el punto en cuestión y podría ser lisa o podría tener una esquina ahí, consaltos finitos en ambos lados para su derivada.

Analíticamente la hipótesis implica que el cociente diferencial

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{u}$$

tiene limite definido cuando u tiende a cero con valores positivos, y también cuando u tiende a cero con valores negativos. Considerada como una función de u, el cociente tiene a lo más un salto finito para u = 0. Lo mismo pasa con la función $\phi(u)$ definida por la fórmula

$$\phi(u) = \frac{f(x+u)-f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u} = \frac{f(x+u)-f(x)}{u} \cdot \frac{\frac{1}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u},$$

ya que $(\frac{1}{2} u)/(\operatorname{sen} \frac{1}{2} u)$ tiene limite 1. Para cualquier otro valor de u entre $-\pi$ y π esta función $\phi(u)$, considerada como una función de u para un valor fijo de x, es continua de $-\pi$ hasta π excepto para un número finito de puntos.

Para el valor de x en cuestión, por (7)

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(u)\,\text{sen}\,(n+\tfrac{1}{2})u\,du$$

Entonces por el corolario del teorema 4, $S_n(x) - f(x)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Esto prueba

TEOREMA 5. Si f(x) es continua excepto en un número finito de saltos finitos en un periodo, su serie de Fourier converge al valor f(x), si f es continua en x y además, tiene una derivada en el extremo derecho y una derivada en el extremo izquierdo.

5. CONVERGENCIA UNIFORME.

El teorema 5 se aplica en particular para cualquier función que tiene primer derivada continua y segunda derivada continua excepto en un número finito de saltos ya que en este caso se tiene la estimación

$$|f(t)-S_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\,\text{sen}\,kx)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2C}{k^2}$$

para un cierto valor de C constante. Además, como se tiene que

$$\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^{k}\frac{du}{k^2} < \int_{k-1}^{k}\frac{du}{u^2}$$

entonces, podemos escribir

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{du}{u^2} = \int_{n}^{\infty}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{n}$$

y así,

$$|f(t) - S_n(t)| \leq \frac{2C}{n} ,$$

para todos los valores de x. El hecho de que el resto no exceda a cierta cantidad es independiente de x y tiende a cero cuando n tiende a infinito lo cual muestra que bajo las hipotesis del teorema la serie de Fourier converge uniformemente a la función en cuestión. Esto lo resumimos en el siguiente teorema.

TEOREMA IV. Si f(x) es una función la cual tiene segunda derivada continua excepto para un número finito de esquinas en un periodo su serie de Fourier converge uniformemente al valor de f(x) para todo valor de x.

Mientras funciones continuas teniendo series de Fourier divergentes son de estructura complicada, y no probablemente van a ser encontradas excepto cuando expresamente se mencione por propósitos de el ilustración, el hecho de que tales funciones existan dá significado al torema general de Weierstrass, lo cual se sostiene para toda función continua sin excepción.

6. TEOREMA DE WEIERSTRASS POR UNA APROXIMACION TRIGONOMETRICA.

El precedente, como el teorema I, se tiene en particular para una función o una función lineal por trozos. Su aplicación para tal función no es interesante en particular, pero puede ser usada para probar un importante teorema general, conocido como el teorema de Weierstrass, el cual dice que cualquier función continua de periodo 2π puede ser aproximadamente representada con cualquier grado de asignación de ocurrencia de una suma trigonométrica. Por una suma trigonométrica queremos decir una expresión de la forma

$$\alpha_0/2 + \alpha_1\cos x + \alpha_2\cos 2x + \ldots + \alpha_n\cos nx$$
$$+ \beta_1\text{sen } x + \beta_2\text{sen } 2x + \ldots + \beta_n\text{sen } nx,$$

con algunos coeficientes constantes α_k, β_k.

Sea f(x) cualquier función de periodo 2π y es continua para todo valor de x. Es claro que puede ser aproximada por una función lineal por trozos g tan cerradamente como se quiera. Para la función g su serie de Fourier converge uniformemente y por lo tanto podemos encontrar una sucesión de sumas trigonometricas que converga uniformemente a f.

Sea ε cualquier número positivo arbitrariamente pequeño y sea $g(x)$ una función escalonada construida de tal modo que la diferencia $|f(x)-g(x)|$ no sea meramente menor que ε, pero menor que $\varepsilon/2$, para todo valor de x. Sea $Tn(x)$ la suma parcial de la serie de Fourier para la función $g(x)$, entre los términos involucrados $cos\ nx$ y $sen\ nx$. Ya que la serie converge uniformemente al valor de $g(x)$, va a ser posible escoger n tan grande para que $|g(x)-Tn(x)| < \varepsilon/2$ para todo valor de x; si Co es la constante dada por el teorema I, y registrada dentro del teorema IV, como se aplicó para $g(x)$, esto es suficiente tomando $n>4Co/\varepsilon$, tal que $2Co/n<\varepsilon/2$. Entonces

$$|f(x)-Tn(x)|<\varepsilon$$

para todo valor de x, y esta es la esencia de la conclusión a ser probada. Esto puede ser esrito como

TEOREMA V. *(Teorema de Weierstrass).* Si $f(x)$ es cualquier función continua de periodo 2π y si ε es cualquier número positivo arbitrariamente pequeño, es posible construir una suma trigonométrica $Tn(x)$ tal que

$$|f(x)-Tn(x)|<\varepsilon$$

para todo valor de x.

7. COMPLETEZ DE LAS SERIES.

Una importante consecuencia para la teoría de la serie de Fourier, es la siguiente

TEOREMA VI. Si $f(x)$ es una función continua de periodo 2π cuyos coeficientes de Fourier son todos cero, entonces $f(x) = 0$ idénticamente.

La hipótesis quiere decir que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\, dx = 0$$

para todo valor entero de k. Se sigue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ T_n(x)\ dx = 0, \text{ si } T_n(x) \text{ es cualquier suma trigonométrica.}$$

Sea M el máximo de $|f(x)|$ en $[-\pi,\pi]$ y sea ε cualquier cantidad positiva, una suma trigonométrica $T_n(x)$ construida de acuerdo al teorema de Weierstrass tal que

$$|f(x) - T_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2\pi(M + 1)}$$

para todo valor de x. Entonces

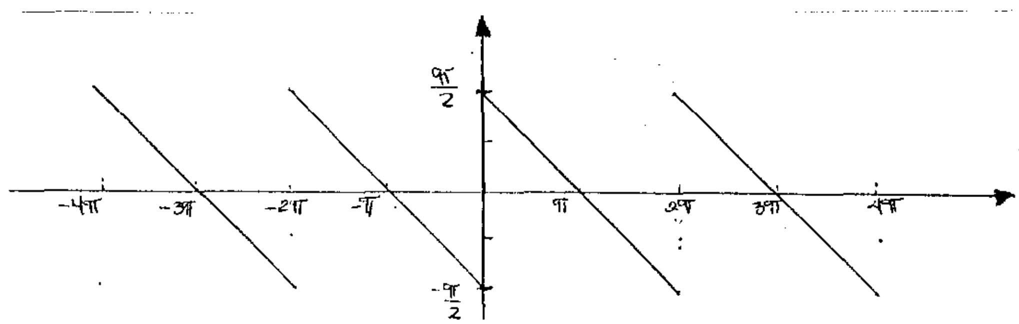
$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)[f(x) - T_n(x)]dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} M \frac{\varepsilon}{2\pi(M + 1)} \, dx = \frac{M \varepsilon}{M + 1} < \varepsilon$$

lo que implica $f \equiv 0$.

8. CONVERGENCIA A UN PUNTO DE DISCONTINUIDAD.

Desde el principio de la discusión de convergencia se ha supuesto que la función es continua al menos en el punto donde se ha probado convergencia, si bien el teorema III puede tener discontinuidades dondequiera. A manera de introducción a un tratamiento de convergencia en un punto de discontinuidad sea $F_0(x)$ la función particular obtenida por la construcción siguiente: se define por la fórmula $(\pi - x)/2$ para $0 < x < 2\pi$, se hace periódica por la repetición de estos valores en intervalos sucesivos de longitud 2π, y en los puntos de discontinuidad $x = 2k\pi$, $k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ se da expresamente dado el valor cero.



Su gráfica, excepto para un punto aislado, es así hecha por una sucesión infinita de segmentos de linea recta, con pendiente $-\frac{1}{2}$, el extremo derecho de cada segmento empieza π unidades abajo del extremo izquierdo del próximo, mientras que los valores de las x correspondientes a los quiebres en la gráfica los valores de la función no es el final perteneciente a uno o a otro de los segmentos mencionados, pero está a la mitad de ellos. Sean a_k y b_k los coeficientes de Fourier de esta función $F_0(x)$. Ya que la función satisface la identidad $F_0(-x) = -F_0(x)$, la integral $F_0(t)\cos kt$ desde $-\pi$ a 0 cancela la integral desde 0 hasta π, y $a_k=$ 0. Se encuentra fácilmente por cálculo explícito que $b_k= 1/k$.

Así $F_0(x)$ tiene la serie de Fourier

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \ldots. \qquad (10)$$

Se sabe del teorema III, sin investigación futura, que la serie convergería a $F_0(x)$ para todo punto donde $F_0(x)$ es continua.

Y cuando $x = 0$ o cualquier múltiplo entero de 2π la convergencia de la serie para los valores prescritos es inmediatamente visibles, ya que cada término se reduce a cero separadamente. Así, $F_0(x)$ está representada por la serie de todos los valores de x. El valor asignado a la función en los puntos de discontinuidad por supuesto no tienen influencia en la determinación de los coeficientes; la observación escencial es que la serie (10) converge a estos puntos, y el valor en el cual converge es uno designado.

A continuación se verá otra manera de representar la serie de Fourier que será de utilidad en el momento de introducir la transformada de Fourier.

9. FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER.

Haciendo uso de las identidades trigonométricas

$$\cos nx = 1/2(e^{inx} + e^{-inx})$$

$$\operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}i \ (e^{inx} + e^{-inx})$$

tenemos que la Serie de Fourier

$$f(x) = 1/2\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{11}$$

se convierte en

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{inx} \tag{12}$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{2}\ a_0 \qquad c_n = \frac{1}{2}\ (a_n - ib_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}\ (a_n + ib_n)$$

a la forma (12) se le conoce como **Serie Compleja de Fourier de f(x).**

La Serie de Fourier constituye una poderosa herramienta en el análisis frecuencial de funciones periódicas. Pero para muchos problemas prácticos las funciones son no-periódicas, y es conveniente hacer un análisis del mismo tipo (frecuencial) para tal tipo de funciones; por lo tanto, formalmente el periodo **T** se puede hacer tender a infinito en la serie de Fourier.

Por conveniencia, se tomará la representación compleja de la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{in\omega_0 t}$$

10. PASO DE LA SERIE A LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Consideremos la Serie de Fourier de la función

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\omega_0 t} \tag{13}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} \, dt \tag{14}$$

siendo T el período de f.

Tomando en cuenta que $\omega_0 = 2\pi/T$ y sustituyendo (13) en (14), se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} \, dx \right] e^{in\omega_0 t} \tag{15}$$

Aquí, la variable comodín x de la integral se utiliza para evitar confusión con t. Puesto que $1/T = \omega_0/2\pi$, la ecuación (1-16) se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\pi \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} \, dx \right] \omega_0 e^{in\omega_0 t} \tag{16}$$

Ahora se hace que $T \to \infty$, ya que $\omega_0 = 2\pi/T$, ω_0 tiende a cero. Sea $\omega_0 = \Delta\omega$; entonces, la frecuencia de cualquier "armónico" $n\omega_0$ debe corresponder a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo. En otras palabras, $n \to \infty$ a medida que $\Delta\omega \to 0$, tal que el producto es finito; esto es,

$$n\omega_0 = n\Delta\omega \to \omega.$$

de este modo, (16) se convierte en:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\pi \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{in\Delta\omega x} \, dx \right] e^{in\Delta\omega x} \, \Delta\omega$$

En el límite, $T\to\infty$, $\Delta\omega\to d\omega$, y la sumatoria se convierte en la integral sobre ω; es decir, la función no periódica f(t) se convierte en:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right]e^{i\omega t}\,d\omega$$

donde se observa que en el límite cuando $t\to\infty$, $\alpha\to d\alpha$.

Si definimos

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\; e^{-iWt}\,dt \qquad (17)$$

(16) se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\; e^{iWt}\,d\alpha \qquad (18)$$

A la forma (17) se le conoce con el nombre de **Transformada de Fourier de una función f(x),** y a la forma (18) como **Transformada Inversa de Fourier.**

A semejanza de los coeficientes de la serie de Fourier e interpretaremos el valor de la transformada de Fourier de f(x) en t como el modo normal de f(t).

CAPITULO 2

LA TRANSFORMADA DE FOURIER

1. PROPIEDADES ANALITICAS.

DEFINICION 1: Sea $C^{\infty} = \{ f(t) \mid \exists\, f^{(i)} \ \forall\, i \in N \}$

TEOREMA 1: C^{∞} con la operación + es un grupo al cual llamaremos $(C^{\infty},+)$.

DEMOSTRACION:

1) CERRADURA. Si f y $g \in C^{\infty}$

$$\therefore \exists \quad \frac{d^i f}{dx^i} \quad y \quad \frac{d^i g}{dx^i}$$

además

$$\frac{d^i}{dx^i}(f+g) = \frac{d^i f}{dx^i} + \frac{d^i g}{dx^i}$$

2) ASOCIATIVIDAD

$$f+(g+h)=(f+g)+h$$

3) EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO

$$0 \in C^{\infty} \text{ ya que } \frac{d^i 0}{dx^i} = 0 \quad \forall\, i \in N$$

4) EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO

$$\text{Si } f \in C^{\infty} \ \therefore \exists \ \frac{d^i}{dx^i} f$$

y además

$$\frac{d^i}{dx^i}(-f) = -\frac{d^i f}{dx^i} \Rightarrow -f \in C^{\infty}$$

DEFINICION 2: Sea $f(t) \in C^{\infty}$, definimos la Transformada de Fourier de $f(t)$ como el operador:

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-i\omega t}\ dt = F(\omega)$$

Ejemplo 1) Sea $f(x) = e^{-\gamma|x|}$, $\gamma>0$. Busquemos la transfomada de Fourier de esta función. Tenemos:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-iWx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} (\cos wx - i\,\text{sen}\ wx) dx$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-\gamma x} \cos wx\ dx$$

Integrando dos veces por partes, encontramos:

$$F(w) = \frac{2}{w^2 + \gamma^2}$$

Ejemplo 2) Consideremos $f(x) = e^{-ax^2}$. Tenemos

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-iWx}\ dx$$

El integrando representa aquí una función analítica que no tiene singularidades en ninguna parte finita del plano. Por lo tanto, en virtud del Teorema de Cauchy, la integral anterior no cambiará de valor, si, en lugar de tomarla respecto al eje real, se toma respecto a cualquier recta $z = x + iy$ (y = const) paralela a este eje. Es decir,

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2}\ e^{-iW(x+iy)} dx = e^{ay^2+Wy} \int e^{-ax^2-2aixy-iWx} dx$$

$$= e^{ay^2+Wy} \int e^{-ax^2-ix(2ay+W)} dx$$

Escojamos ahora la constante y de manera que se anule la parte imaginaria en el exponente del integrando, esto es, tomemos $y = \frac{-W}{2a}$

Entonces

$$g(w)= e^{a\frac{w^2}{4a^2}-\frac{w^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = e^{-\frac{w^2}{4a}} \sqrt{\pi/a},$$

ya que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$.

En particular, tenemos para a = 1/2

$$f(x)= e^{-\frac{x^2}{2}},\ F(w)= \sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{w^2}{2}}$$

es decir, la función $e^{-\frac{x^2}{2}}$ es eigenfunción del operador T.F. con eigenvalor $\sqrt{2\pi}$.

TEOREMA 2: El operador F[f(t)] es operador lineal $T:C^{\infty} \to C^{\infty}$ con respecto a $\mathbb{C}$.

DEMOSTRACION

Sean f(t), g(t) $\in \mathfrak{L}_1$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ $\therefore$ $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{L}_1$ y

$$F[\alpha f + \beta g]= \int_{-\infty}^{\infty}(\alpha f + \beta g)\ e^{-i\omega t}\ dt$$

$$= \alpha\int_{-\infty}^{\infty} fe^{-i\omega t}\ dt + \beta\int_{-\infty}^{\infty} ge^{-i\omega t}dt = \alpha\ F[f] + \beta\ F[g]$$

Formalmente la transformada de Fourier de una función periódica f(t)=f(t+T), donde T es el periodo, no existe, porque con la condición $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\omega)<\infty$. Sin embargo, en otras áreas, como la ingeniería, física, sistemas, etc., se obtienen transformadas de Fourier de estas funciones utilizando otras herramientas operacionales que quedan fuera del contexto de este trabajo.

PROPIEDAD 1*:* Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathfrak{L}_1(-\infty,\ \infty)$, converge en la métrica del espacio $\mathfrak{L}_1(-\infty,\ \infty)$, la sucesión de las transformadas de Fourier $g_n = \mathbb{F}[f_n]$ converge uniformemente en toda la recta.

DEMOSTRACION:

Esto se puede ver inmediatamente considerando

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ e^{-i\omega x}dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\ e^{-i\omega x}dx|$$

$$= |\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(x) - f_m(x)]e^{-i\omega x}dx| \le \int_{-\infty}^{\infty}|[f_n(x) - f_m(x)]e^{-i\omega x}dx|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x) - f_m(x)|\ |e^{-i\omega x}|\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x) - f_m(x)|\ dx$$

y este último término por hipótesis tiende a cero. ∎

PROPIEDAD 2: La transformada de Fourier g de una función absolutamente integrable f es una función continua acotada, además $g(\omega)$ tiende a cero para $|\omega|\to\infty$.

DEMOSTRACION:

Como sabemos

$$|g(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\ dx$$

de aquí se ve que $g(\omega)$ es acotada. Ahora si f es la función característica del intervalo (a,b), tenemos para ello

$$g(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega x}dx = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

Como podemos ver inmediatamente cuando $\omega\to\infty$, $g(\omega)\to 0$; es decir, tenemos que $g(\omega)$ es una función continua y que converge a cero cuando $\omega\to\infty$. Debido a la linealidad de la transformada de Fourier, se ve que la transformada de cualquier función escalonada es continua y tiende a cero para $|\omega|\to\pm\infty$. Ahora bien como cualquier función en $\mathcal{L}_1(-\infty,\infty)$ es límite de alguna sucesión de funciones escalonadas se tiene que su transformada de Fourier tiene la propiedad arriba mencionada.■

PROPIEDAD 3: Si f es absolutamente continua en todo intervalo finito y $f' \in \mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, se cumple que

$$\mathbb{F}[w] = i\omega \, \mathbb{F}[w]$$

Como f es absolutamente continua se cumple

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \, dt$$

Por las hipótesis del teorema, el límite del miembro derecho debe ser cero, para garantizar la integrabilidad de la función f, e integrando tenemos:

$$\mathbb{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \, e^{-1\omega x} dx = f(x) \, e^{-1\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-1\omega x} dx$$

$$= 0 + i\omega \, \mathbb{F}[f(x)]$$

Corolario: Si $f \in \mathcal{L}_1$ es absolutamente continua, tenemos que:

$$\mathbb{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n \, \mathbb{F}[f(x)]$$

DEMOSTRACION:

Para n = 1 la igualdad anterior se cumple como se vió. Supongamos que el corolario es válido para k = n -1, entonces:

$$\mathbb{F}[f^{(n)}(x)] = \mathbb{F}[f^{(n-1)}(x)] = i\omega \, \mathbb{F}[f^{(n-1)}(x)]$$

$$= i\omega \, (i\omega)^{n-1} \mathbb{F}[f(x)]$$

$$= (i\omega)^n \, \mathbb{F}[f(x)]$$ ■

PROPIEDAD 4: Si f es absolutamente continua en todo intervalo finito y $\int_{-\infty}^{t} f dx \in \mathcal{L}_1(-\infty,\infty)$, se cumple

$$\mathbb{F}\left[\int f dx\right] = \frac{1}{i\omega} \, \mathbb{F}[f]$$

DEMOSTRACION: Sea $g = \int f dx$, entonces $g' = f$ y por lo tanto

$$\mathbb{F}[g'] = i\omega \, \mathbb{F}[g]$$

$$= i\omega \, \mathbb{F}\left[\int f dx\right]$$

de aquí

$$\mathbb{F}\left[\int f dx\right]= \frac{1}{i\omega}\,\mathbb{F}[g']= \frac{1}{i\omega}\,\mathbb{F}[f]. \qquad \blacksquare$$

PROPIEDAD 5: Si $f\in\mathfrak{L}_1$ tiene n derivadas, entonces

$$|\mathbb{F}[f]| = \frac{|\mathbb{F}[f^{(k)}|}{|w|^k} \longrightarrow 0,$$

DEMOSTRACION:

Dividiendo la igualdad

$$F[f^{(n)}] = (iw)^k\, F[f]$$

por $(i\lambda)^k$ y recordando que la transformación de Fourier es siempre una función que tiende a cero en el infinito (dada la propiedad de que la transformación de Fourier y de una función absolutamente integrable f es una función continua acotada; además, g(w) tiende a cero para $|w|\to\infty$), obtenemos que si $f^{(k)}$ es absolutamente integrable, se tiene:

$$|F[f]| = \frac{|F[f^{(k)}]|}{|w|^k} \longrightarrow 0$$

es decir, bajo estas condiciones, F[f] decrece en el infinito más rápido que $\frac{1}{|w|^k}$. Luego, cuanto más derivadas tenga f en $\mathfrak{L}$, tanto más rápido decrece en el infinito su transformación de Fourier. ■

PROPIEDAD 6: Si f" existe y pertenece a $\mathfrak{L}_1(-\infty, \infty)$, es absolutamente integrable F[f].

DEMOSTRACION:

En efecto, en estas condiciones, F[f] es acotada y decrece en el infinito más rápido que $\frac{1}{w^2}$. De aquí se desprende la integrabilidad. ■

Como se ha demostrado anteriormente, cuanto más derivadas tenga una función f, tanto más rápido decrece en el infinito su transfomación de Fourier.

Es válida tambien la afirmación dual, es decir, cuanto más rápido decrece f, tanto mayor grado de diferenciabilidad tiene su transformación de Fourier.

PROPIEDAD 7: Supongamos que tanto la función f(x) como xf(x) son absolutamente integrables. Entonces, la función g= F[f] es diferenciable y

$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)]$$

DEMOSTRACION:

En efecto, derivando respecto a λ la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i\lambda x}dx$$

que define g, obtenemos la integral

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ e^{-i\lambda x}dx$$

que debido a la integrabilidad de la función xf(x) converge uniformemente respecto a λ. Luego, la derivada de la función g existe y tiene lugar.

$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)] \qquad \blacksquare$$

Cuando f es tal que son absolutamente integrables las funciones f(x), xf(x),..., $x^{pt}f(x)$, se puede demostrar con razonamientos análogos que la función g tiene derivadas hasta de orden p inclusive y, además,

$$g^{(k)}(\lambda) = F[(-ix)^k f(x)],\ k= 0,\ 1,\ \ldots,\ p$$

2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

TEOREMA 3. La TF es un isomorfismo de $X\text{-}C^{\infty}$ a $W\text{-}C^{\infty}$.

DEMOSTRACION: Sean $f(x)$ y $g(x) \in X\text{-}C^{\infty}$

$\therefore$ $\text{TF}[f+g] = \text{TF}[f]+\text{TF}[g]$

Sea $\text{H}(w) \exists\ W\text{-}C^{\infty}$

$\text{TF}^{-1}[\text{H}(w)]$ deberá estar en $X\text{-}C^{\infty}$

Por definición

$$\text{TF}^{-1}[\text{H}(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{H}(w)\, e^{i\omega t}\, d\omega = h(w)$$

Demostraremos ahora que $h(\text{t}) \in X\text{-}C^{\infty}$

$$\frac{\text{d}}{\text{dt}}\ \text{TF}^{-1}[\text{H}(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{d}}{\text{dx}}\ \text{H}(w)\ e^{\ i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2i\pi\text{w}} \int_{-} \text{H}(w)\, e^{\ i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{i\text{w}}\ h(\text{t})$$

y continuzndo este proceso un número infinito de veces, se deduce que $h(\text{t}) \in X\text{-}C^{\infty}$.

Como $\mathbb{F}$ es lineal, basta demostrar que $\text{T}\mathbb{F}^{-1}[0] = 0$.

Pero

$$\text{T}\mathbb{F}^{-1}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 0 e^{i\omega t}\, d\omega = 0$$

por lo tanto la transformada de Fourier $\text{T}\mathbb{F}$, es un isomorfismo.

TEOREMA 4. (TEOREMA DE CORRIMIENTO)

Sea $f(\text{t}) \in \text{L}_1$, entonces $\text{TF}(\text{f}(\text{t-to})) = e^{-iwto}\text{TF}(\text{f}(\text{t}))$

Demostración:

$$\text{TF}(\text{f}(\text{t-to})) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{f}(\text{t-to})\, e^{-iwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{f}(\tau)\, e^{-iw(\tau+\tau_o)} d\tau$$

$$= \quad e^{iwto} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-iwt} d\tau$$

$$= e^{-iwto} \quad TF(ft))$$

TEOREMA 5. (TEOREMA DEL CORRIMIENTO EN FRECUENCIAS)
Sea $f(t) \in L_1$, y $w_o \in R$, entonces $TF^{-1}(F(w-w_o)) = f(t) e^{iwot}$.

Demostración:
$TF(f(t)e^{iwot}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; e^{iwot} \; e^{-iwt} \; dt = F(w-w_o)$

entonces aplicando la transformada inversa de Fourier, tenemos $TF^{-1}(F(w-wo)) = f(t) e^{iwot}$.

3. DEFINICION DE CONVOLUCION.

El problema matemático de invertir la transformada la cuál es producto de transformadas ocurren muy frecuentemente (especialmente cuando se usa la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales). Estudiaremos el problema de manera general.
Supongamos que f(t) y g(t) son las transformadas de Fourier de F(x) y G(x) respectivamente

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-iWt} dw \qquad\qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{-iWt} dw$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iWt} dt \qquad\qquad G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iWt} dt$$

Determinaremos la función h(t) cuya transformada da Fourier H(w) es igual al producto de las dos transformadas:

$$H(w) = F(w) G(w)$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) e^{-itx} dt$$

$$H(w) = \int^{\infty} h(t) e^{-iWt} dt$$

$\int_{-\infty}$

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{-it\tau}d\tau\right]e^{-itx}dt$$

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-it(x-\tau)}dt\right]d\tau$$

pero la integral interior es $f(x-\tau)$, entonces

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)f(x-\tau)d\tau$$

Esta última integral es llamada la **Convolución** de $f(x)$ y $g(x)$ y la denotaremos por $g*f$. La transformada inversa del producto de dos trasformadas de Fourier es $1/2\pi$ veces la convolución de las dos funciones.

Un caso especial importante es aquel en el cual $f(x)=0$ para $x<0$ y $g(t)=0$ para $x<0$. Entonces:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\ f_2(x-\tau)\ d\tau$$

se convierte en

$$f(x)=f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\ f_2(x-\tau)\ d\tau$$

TEOREMA 6: La convolución cumple la ley conmutativa; esto es:

$$f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x)$$

DEMOSTRACION:

Por

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\ f_2(x-\tau)\ d\tau,$$

se tiene

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\ f_2(t-\tau)\ d\tau$$

cambiando la variable $t-x=y$,

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-y)\ f_2(y)\ dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(y)\ f_1(x-y)\ dy$$

$$= f_2(x) * f_1(x). \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 7: La convolución cumple la ley Asociativa; esto es:

$$[f_1(x) * f_2(x)] * f_3(x) = f_1(x) * [f_2(x) * f_3(x)]$$

DEMOSTRACION:

Si se hace $f_1(x) * f_2(x) = g(x)$, y $f_2(x) * f_3(x) = h(x)$, entonces

$$[f_1(x) * f_2(x)] * f_3(x) = f_1(x) * [f_2(x) * f_3(x)]$$

se puede expresar como

$$g(x) * f_3(x) = f_1(x) * h(x)$$

puesto que

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\ f_2(x-y)\ dy$$

se tiene

$$g(x) * f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\ f_3(x-\tau)\ d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\ f_2(\tau-y)\ dy\right] f_3(x-\tau)\, d\tau$$

sustituyendo $z= \tau-y$ e intercambiando el orden de integración, se obtiene

$$g(x) * f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)\ f_2(x-y-z)\ dz\right]\ dy$$

dado que

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)\ f_3(x-z)\ dz$$

se tiene

$$h(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)\ f_2(x-y-z)\ dz$$

Por consiguiente la integral se identifica dentro del paréntesis angular en el segundo miembro de

$$g(x) * f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)\ f_2(x-y-z)\ dz\right]\ dy$$

como h(x-y), de donde

$$g(x) * f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\ h(x-y)\ dy = f_1(x) * h(x);$$

esto es,

$$[f_1(x) * f_2(x)] * f_3(x) = f_1(x) * [f_2(x) * f_3(x)] \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 8 (DE CONVOLUCION): Si $\mathbb{F}[f_1(x)] = F_1(\omega)$, y $\mathbb{F}[f_2(x)] = F_2(\omega)$, entonces

$$\mathbb{F}[f_1(x) * f_2(x)] = F_1(\omega)\ F_2(\omega)$$

DEMOSTRACION:

La transformada de Fourier de $f_1(x) * f_2(x)$ es

$$\mathbb{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f_2(t-x)\ dx\right] e^{-i\omega t}\ dt$$

Cambiando el orden de integración, se tien e

$$\mathbb{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)\ e^{-i\omega t}\ dt\right] dx$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)\ e^{-i\omega t}\ dx = F_2(\omega) e^{-i\omega x}$$

Sustituyendo el resultado anterior en

$$\mathbb{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)\ e^{-i\omega t}\ dt\right] dx$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ F_2(\omega) e^{-i\omega x}\ dx &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega x} dx\right] F_2(\omega) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega t} dt\right] F_2(\omega) \\ &= F_1(\omega)\ F_2(\omega) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 9 (DE CONVOLUCION INVERSA): Si $\mathbb{F}^{-1}[F_1(\omega)] = f_1(x)$ y $\mathbb{F}^{-1}[F_2(\omega)] = f_2(x)$, entonces

$$\mathbb{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi\ f_1(x)\ f_2(x),\ ó$$

$$\mathbb{F}[f_1(x)\ f_2(x)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\ F_2(\omega-y)\,dy$$

DEMOSTRACION:

Por $f(x) = \mathbb{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$, se tiene

$$\mathbb{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \mathbb{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\ F_2(\omega-y)\ dy\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\ F_2(\omega-y)\ dy\right] e^{i\omega t}\,d\omega$$

Sustituyendo $\omega-y$ por x e intercambiando el orden de la integración, se obtiene

$$\mathbb{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{j(x+y)t}dx\right]dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)e^{jyt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{jxt}dx\right]dy$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega\right]$$

$$= 2\pi\ [f_1(x)\ f_2(x)]$$

en donde las variables comodines de la integración se han cambiado.

La última ecuación se puede expresar también como

$$\mathbb{F}[f_1(x)\ f_2(x)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\ F_2(\omega-y)\,dy \quad \blacksquare$$

4. TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

El concepto de la transformada de Fourier, considerado anteriormente para funciones de una variable, puede ser extendido fácilmente al caso de funciones de varias variables.

Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función integrable en todo el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Su transformada de Fourier es la función

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-i(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \ldots + x_n\lambda_n)} \, dx_1 \ldots dx_n$$

Esta integral n-ple, existente de antemano ya que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es integrable, puede ser representada, de acuerdo con el **Teorema de Fubini**, mediante la siguiente integral reiterada:

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-ix_1\lambda_1} \, dx_1 \right\} e^{-ix_2\lambda_2} \, dx_2 \ldots \right\} e^{-ix_n\lambda_n} \, dx_n .$$

En otras palabras, el paso de una función de n variables a su transformada de Fourier puede ser realizado aplicando sucesivamente esta transformación a cada variable (en un orden cualquiera). Invirtiendo cada una de las n operaciones sucesivas que figuran en el miembro derecho de la última igualdad anterior, obtenemos la fórmula

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) e^{ix_n\lambda_n} \, d\lambda_n \right\} e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}} \, d\lambda_{n-1} \ldots \right\} e^{ix_1\lambda_1} \, d\lambda_1$$

que puede ser representada mediante una integral n-ple

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) e^{i(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \ldots + x_n\lambda_n)} \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n ;$$

sin embargo, puesto que la función $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ puede no ser, en general, sumable en todo el $\mathbb{R}^n$, es preciso indicar en que sentido debe comprenderse esta integral y las condicones que deben imponerse a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para que sea posible representar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mediante la última integral.

Una de las respuestas posibles a estos problemas la da el teorema siguiente.

TEOREMA 10: Supongamos que la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es integrable en todo el espacio $\mathbb{R}^n$ y satisface las condiciones siguientes:

$$|f(x_1+t_1,x_2,\dots,x_n) - f(x_1,x_2,\dots,x_n)| \le C|t_1|^{\alpha}$$

$$|f(x_1,x_2+t_2,\dots,x_n) - f(x_1,x_2,\dots,x_n)| \le C(x_1)|t_2|^{\alpha}$$

$$|f(x_1,x_2,\dots,x_n+t_n) - f(x_1,x_2,\dots,x_n)| \le C(x_1,\dots,x_{n-1})|t_n|^{\alpha}$$

donde $0\le\alpha\le1, \int_{-\infty}^{\infty}C(x_1)dx_1<\infty,\dots,\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}C(x_1,\dots,x_{n-1})dx_1\dots dx_{n-1}<\infty$

Entonces, la fórmula de inversión [] es válida, si la integral en ella se entiende como

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{N_1\to\infty}\int_{-N_1}^{N_1}\left\{\dots\lim_{N_{n-1}\to\infty}\int_{-N_{n-1}}^{N_{n-1}}\{\lim_{N_n\to\infty}\int_{-N_n}^{N_n}g(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\times e^{ix_n\lambda_n}\,d\lambda_n\}\right.$$

$$\left. e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}\,d\lambda_{n-1}\right\}e^{ix_1\lambda_1}\,d\lambda_1 .$$

DEMOSTRACION:

En efecto, como $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ es sumable en $\mathbb{R}^n$, es sumable también, de acuerdo con el teorema de Fubini, respecto a x_1 para casi todos los $x_2,\dots, x_n$. Luego, existe la función

$$f(\lambda_1,x_2,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\dots,x_n)\ e^{-ix_1\lambda_1}\,dx_1,$$

De las condiciones del teorema se desprende que $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ como función de x_1, por lo tanto $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ puede ser expresada a través de f_1 mediante la fórmula de inversión

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_1}^{N_1}f_1(\lambda_1,x_2,\dots,x_n)e^{ix_1\lambda_1}\,dx_1$$

Ahora bien, si tomamos

$$f_2(\lambda_1,\lambda_2,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda_1,x_2,\dots,x_n)e^{-ix_2\lambda_2}\,dx_2,$$

de las condiciones del teorema se deducirá que para f_1 es válida la fórmula de inversión

$$f(\lambda_1,x_2,\dots,x_n)=\lim_{N_2\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_2}^{N_2}f(\lambda_1,\lambda_2,\dots,x_n)e^{ix_2\lambda_2}\,dx_2$$

es decir,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_1}^{N_1}\left\{\lim_{N_2\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_2}^{N_2} f(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,x_n)\times e^{ix_2\lambda_2}\,d\lambda_2\right\}$$

$$e^{ix_1\lambda_1}\,d\lambda_1.$$

5. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

5.1 BASES MATEMATICAS

Matemáticamente la teoría de la DIFRACCION está fundamentada en el teorema de Green, el cual se expresa como

$$\int\int [\, V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \,]\, d\Sigma = \int\int\int [\, V \nabla^2 U - V \nabla^2 U]\, dv$$

donde las funciones U y V representan fisicamente campos escalares, $\frac{d}{dn}$ indica la derivada en la dirección normal a la superficie Σ, $d\Sigma$ representa un elemento de superficie, dv denota un elemento de volumen que encierra Σ (ver figura 1).

5.2 LA INTEGRAL DE KIRCHHOFF

La función que nos da distribución de intensidad luminosa en algún lugar del espacio debido a una fuente luminosa es la llamada integral de Kirchhoff, la cual se deduce a partir del teorema de Green, es decir, si la fuente puntual es colocada en el punto S mostrado en la figura 2, el campo E_o en P, (aún tomando en cuenta que entre la trayectoria de S a P se coloque algún obstáculo tal como una pantalla u objeto) es de la forma

$$E_o(P) = -\frac{ikA}{4\pi} \int_S \frac{1}{r1\ r2} [\, \cos(n,r2) - \cos(n,r1) \,]\, e^{ik(r1+r2)} dS$$

donde los parámetros r1, r2 están definidos en la figura 2 y n es un vector unitario normal a la superficie S, **A** es la amplitud de la fuente, (**n**,r1) y (n,r2) son los ángulos que subtienen los vectores **n** y r1 y **r2**, respectivamente.

5.3 APLICACION DE LA INTEGRAL DE KIRCHHOFF A LA DIFRACCION DE FRAUNHOFER

El sistema de coordenadad que se usa para el estudio de difracción es el mostrado en la figura 2, donde S es el punto donde está colocada la fuente, Σ es una pantalla donde está colocada una abertura Q y P es el punto de observación; las ottras coordenadas están definidas en la figura 2.

La difracción de Fraunhofer considera frentes de onda que vienen de una fuente luminosa colocada " ainfinito" incidiendo sobre un objeto o pantalla con una abertura. El punto de observación en este caso (Fraunhofer) está también colocado "en infinito".

Para fines prácticos, la lejanía entre el objeto y el punto de observación se simulan mediante el uso de lentes.

Podemos hace las aproximaciones $\cos(n,r_1) = \cos(n,R_o)$, $\cos(n,r_1) = \cos(n,R_o)$, $1/R_{1o}R_{2o} \cong 1/r_1r_2$. De la figura 2 se puede ver que r_1+r_2 se puede aproximar por

$$r_1+r_2 = R_{1o} + R_{1o} - (x\,\mathrm{sen}\theta_1 + y\,\mathrm{sen}\varphi_2) - (x\,\mathrm{sen}\theta_2 + y\,\mathrm{sen}\varphi_2)$$

Si el ángulo de incidencia κ es como el definido en la figura 2,

$$\cos(n,R_{2o}) - \cos(n,R_{1o}) \cong 2\cos\kappa$$

introduciendo una función $T(x,y)$definida como uno sobre toda $\sum$en los puntos (x,y)que están sobre la abertura, y cero en otro lado, la amplitud del campo eléctrico en P, de la P, de la ecuación 4.1, está dada por

$$E_o(P) = -\frac{ikA}{4\pi R_{1o}R_{2o}} \, 2\cos\kappa \, e^{ik(R_{1o}R_{2o})} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,y)\, e^{z}\, dxdy$$

donde $z = -ik[x(\text{sen}\Theta_1+\text{sen}\Theta_2)+y(\text{sen}\varphi_1+\text{sen}\varphi_2)]$

Como los detractores registran valores cuadráticos del campo E_o, lo que se hace es escribir el campo por su complejo conjugado; es decir, $E_oE_o^*$ el cual definimos (ya normalizado) como I_o

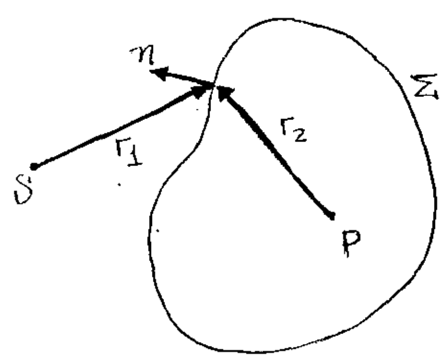
$$I_o = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,y)\; e^{-ik[x(\text{sen}\Theta_1+\text{sen}\Theta_2)+y(\text{sen}\varphi_1+\text{sen}\varphi_2)]}\; dxdy$$

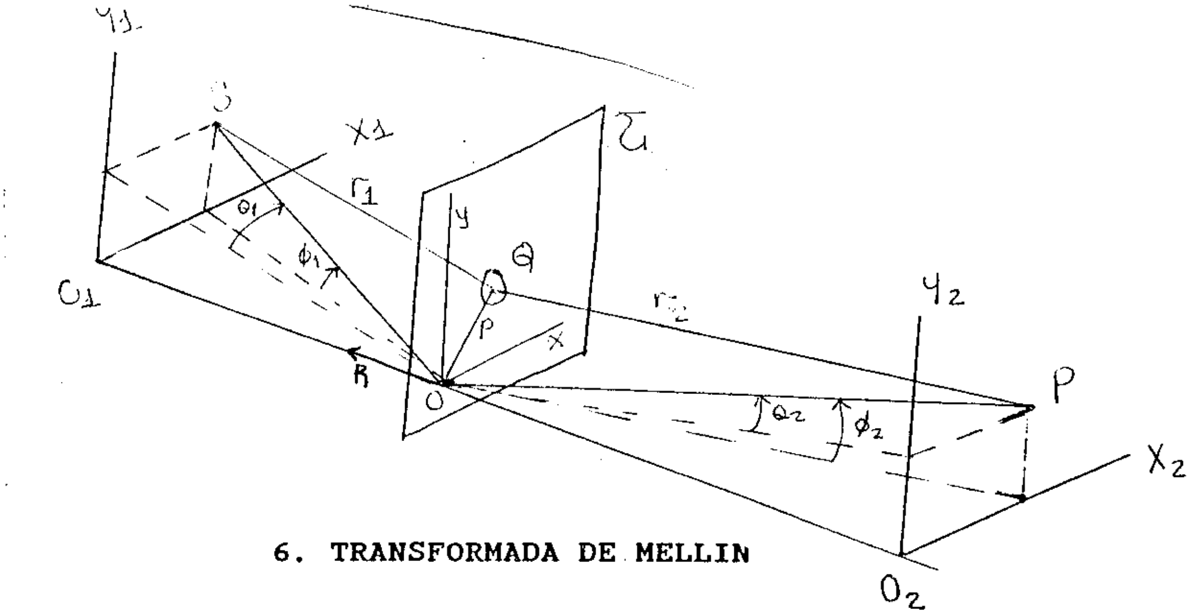
se puede identificar mediante un cambio de parámetros, la expresión anterior como la Transformada de Fourier de $T(x,y)$. Por ejemplo, para una **abertura circular** de diámetro D en la que la luz incidente llegue normalmente a ella, $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2=0$ y $\phi_2=0$, el resultado es

$$G = 4\left[\frac{J_1(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\right]$$

donde J_1 es la función de Bessel de orden 1, y $\alpha = \frac{kD}{2\pi}\text{sen}\Theta_2$ es el cambio de parámetro para esta geometría.

Para fines prácticos la fuente y la pantalla de observación colocados a "infinito" se simulan mediante la colocación de lentes positivas.





6. TRANSFORMADA DE MELLIN

La transformada de Mellin es especialmente útil por ser invariante a la escala (Bracewell 1978). Esta surge en la restauración de imágenes espacialmente variantes (Sawchuk 1974) y en el análisis de redes que varian con el tiempo (Gerardi 1959), entre otras. La transformada de Mellin en dos dimensiones de una función f(x,y) a lo largo del eje imaginario, se define por (Casasent y Psaltis 1976a)

$$M(iu,iv)=\iint_0^\infty f(x,y)\,x^{-iu-1}y^{-iv-1}dxdy \qquad (1)$$

por simplicidad sólo consideraremos el caso unidimensional

$$M(iw)=\int_0^\infty f(x)\,x^{-iw-1}\,dx \qquad (2)$$

y por comodidad, de aqui en adelante $M(iw)$ será escrita como $M(w)$. Ahora bien, puesto que la operación básica realizada por una lente transformadora es la transformada de Fourier, debemos lograr involucrar la operación de transformada de Mellin ópticamente via la transformada de Fourier. Afortunadamente es posible hacerlo, debido a que cualquier transformada integral que cumpla con la condición de linealidad, puede expresarse en términos generales como (Arfken, 1981)

$$g(\alpha)=\int_{x1}^{x2} f(x)\ K(\alpha,x)\,dx$$

donde $g(\alpha)$ es la integral del producto de una función $f(x)$ con el kernel o núcleo $K(\alpha,x)$. Lo único que diferencia a una transformada integral de otra, es el núcleo $K(\alpha,x)$. Así, por ejemplo: para la transformada de Fourier tenemos

$$g(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \exp(-\alpha x)\,dx$$

donde $\exp(-\alpha x)$ es el núcleo de la transformación.

Para la transformada de Mellin tendremos

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ x^{\alpha-1}dx$$

donde $x^{\alpha-1}$ es el núcleo de la transformación. Otras transformadas integrales: LaPlace, Hankel, Hillbert, etc., tienen diferentes núcleos (Arfken, 1981). Podemos entonces,pasar de la transformada integral de Mellin a la transformada de Fourier, haciendo un cambio de variable de la forma $x=\exp(q)$ en la ecuación (2), obtenemos

$$M(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\exp(q)\exp(-jwq)\ dq \qquad (3)$$

La transformada de Mellin de la función $f(x)$ queda escrita ahora como la transformada de Fourier de la función $f[\exp(q)]$. De esta forma, tenemos la capacidad de realizar la operación de transformada de

Mellin ópticamente.

Considerando a $M_1(w)$ y $M_2(w)$ como las transformadas de Mellin de las funciones de entrada $f_1(x)=f(x)$ y $f_2(x)=f(ax)$ respectivamente, donde a es un factor de escala constante, y haciendo $x=\exp(q)$ y $x'=ax$, que al sustituirlo en la ecuación (2) obtenemos

$$\begin{aligned} M_2(w) &= \int_0^\infty f(ax)\, x^{-iw-1} dx \\ &= \int_0^\infty f(x)\,(x/a)^{-iw-1} \frac{dx}{a} \\ &= a^{iw} \int_0^\infty f(x)\; x^{-iw-1} dx \\ &= a^{iw} M_1(w) \end{aligned} \tag{4}$$

y al tomar los módulos de la ecuación (4), tenemos

$$|M_2(w)| = |M_1(w)|$$

Es decir, los módulos de las transformadas de Mellin de dos funciones que difieren en tamaño, son iguales. Esta invariancia en la escala no se presenta en la transformada de Fourier. Tenemos entonces dos situaciones:

	INVARIANTE	NO INVARIANTE
$\|M\|$	escala	corrimiento
$\|F\|$	corrimiento	escala

expresada en otra forma (Casasent y Psaltis, 1976 b)

$\|M[f(x)]\| = \|M[f(ax)]\|$	Invariante a escala
$\|M[f(x)]\| \neq \|M[f(x-x_0)]\|$	No invariante a corrimiento
$\|F[f(x)]\| = \|F[f(x-x_0)]\|$	Invariante a corrimiento
$\|F[f(ax)]\| \neq (1/\|a\|)F(w/a)$	No invariante a escala

El siguiente paso es combinar ambas transformaciones, la de Mellin y la de Fourier, para efectuar la correlación óptica invariante a cambios en la escala y corrimiento de la función de entrada. Una manera de hacerlo es formar primeramente la transformada de Mellin de la función, y después realizar la transformada de Fourier de esta. Lo anterior equivale a decir que la invariancia simultánea a escala y corrimiento puede expresarse como

F(M[f(x)])

Invariancia a escala

Invariancia a corrimiento

CAPITULO 3

APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES

1. METODO DE SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1º Solución de ecuaciones diferenciales.

Pasos del método:

1) Se supone una $Y(\omega)$ que sea Transformada de Fourier de $y(t)$.
2) Se transforma la ecuación diferencial siguiendo las reglas anteriormente establecidas.
3) Se resuelve la ecuación algebraica resultante para $Y(\omega)$.
4) Se calcula la transformada inversa de $Y(\omega)$ utilizando la tabla correspondiente.

2º Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales.

a) Se supone que Y_1, $Y_2, \ldots,$ Y_N son la transformada de Fourier de y_1, $y_2, \ldots,$ y_N.
b) Se transforman las ecuaciones del sistema bajo la transformada de fourier resultándonos un sistema de N ecuaciones lineales.
c) Se resuelve ese sistema para las incógnitas Y_1, $Y_2, \ldots,$ Y_N.
d) Se aplica el transformador inverso de Fourier a Y_1, $Y_2, \ldots,$ Y_N y se obtiene la solución al sistema original.

1.1. APLICACIONES

1º $y'' + 16y = e^{3x}$

Solución:

$$-\omega^2 Y + 16Y = \frac{1}{i\omega - 3}$$

$$Y\,[16 - \omega^2] = \frac{1}{i\omega - 3}$$

$$Y = \frac{1}{i\omega - 3}\,\frac{1}{16 - \omega^2}$$

$$Y = \frac{1}{(i\omega - 3)(4 - \omega)(4 + \omega)}$$

$$= \frac{A}{i\omega - 3} + \frac{B}{4 - \omega} + \frac{C}{4 + \omega}$$

$$= \frac{A(16 - \omega^2) + B(4i\omega - 3\omega + i\omega^2 - 12) + C(4i\omega - i\omega^2 + 3\omega - 12)}{(i\omega - 3)(4 - \omega)(4 + \omega)}$$

$$= \frac{\omega^2(-A + iB - iC) + \omega(4iB - 3B + 4iC + 3C) + (16A - 12B - 12C)}{(i\omega - 3)(4 - \omega)(4 + \omega)}$$

$$-A + iB - iC = 0$$

$$4iB - 3B + 4iC + 3c = 0$$

$$16A - 12B - 12C = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & i & -i \\ 0 & -3+4i & 3+4i \\ 16 & -12 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -[-12(-3+4i) + 12(3+4i)] + 16[i(3+4i) + i(-3+4i)]$$

$$= -(36 - 48i + 36 + 48i) + 16i(8i)$$

$$= -72 + (-128) = -200$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & -3+4i & 3+4i \\ 1 & -12 & -12 \end{vmatrix} = i(3+4i) + i(-3+4i) = -4\ -4 = -8$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 3+4i \\ 16 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 3 + 4i$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & -3+4i & 0 \\ 16 & -12 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4i$$

$$Y = \frac{1}{25}\,\frac{1}{i\omega - 3} - \frac{3 + 4i}{200}\,\frac{1}{4 - \omega} - \frac{3 - 4i}{200}\,\frac{1}{4 + \omega}$$

$$= -\frac{1}{25}\,\frac{1}{i\omega - 3} - \frac{3}{200}\left(\frac{1}{4 - \omega} + \frac{1}{4 + \omega}\right) - \frac{4i}{200}\left(\frac{1}{4 - \omega} - \frac{1}{4 + \omega}\right)$$

$$= -\frac{1}{25}\,\frac{1}{i\omega - 3} - \frac{3}{200}\left(\frac{8}{16 - \omega^2}\right) - \frac{4i}{200}\left(\frac{2\omega}{16 - \omega^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{25}\,\frac{1}{i\omega - 3} - \frac{3}{25}\left(\frac{1}{16 - \omega^2}\right) - \frac{i}{25}\left(\frac{\omega}{16 - \omega^2}\right)$$

$$Y_1 = \frac{3}{25}\,\frac{1}{16-\omega^2} = \frac{3}{100}\,\frac{4}{4^2-\omega^2}$$

$$y_1 = \frac{3}{100}\,\text{sen } 4t, \qquad t>0$$

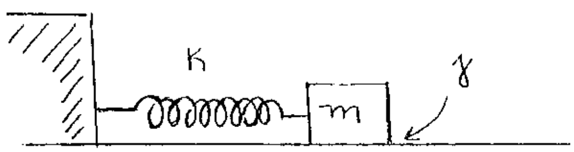
$$Y_2 = \frac{i}{25}\,\frac{\omega}{16-\omega^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{25}\,\cos 4t, \qquad t>0$$

$$\boxed{y = \frac{1}{25}\,e^{3t} + \frac{3}{100}\,\text{sen } 4t + \frac{1}{25}\,\cos 4t}$$

2º Aplicaciones a la Ley de Kirchoff.

Sea el circuito siguiente:



R = Resistencia

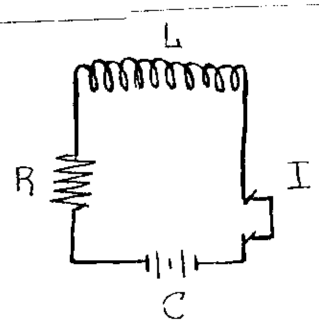
L = Inductancia

C = Capacitancia

v(t) = Fuente de voltaje

$$v(t) = IR + L\,\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}\int_0^t I\,dt$$

3º Aplicaciones a la ley de Newton.



K = Constante de Hooke

m = Masa

γ = Constante de amortiguamiento

f = Fuerza externa

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\,\frac{dx}{dt} + K\,x = f(t)$$

4º Ecuación de Calor.

Es de mayor importancia la aplicación de la transformada de Fourier a ecuaciones en derivadas parciales, donde permite, en ciertas condiciones, reducir la solución de una ecuación de este tipo a la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Ilustremos ésto resolviendo el problema de Cauchy para la ecuación de conducción del calor. Busquemos para $-\infty < x < \infty$ y $t\geq 0$ la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

que se convierte para $t= 0$ en una función prefijada $u_0(x)$. El contenido físico de este problema consiste en determinar la temperatura de una varilla termoconductiva infinita para cualquier momento $t>0$, si en el momento inicial $t= 0$ su temperatura en cada punto es $u_0(x)$, $u_0'(x)$, $u_0''(x)$ pertenecen a $\mathfrak{L}_1(-\infty, \infty)$, buscaremos la solución del problema planteado en la clase de funciones $u(x,t)$, que satisfacen las condiciones siguientes:

1) Las funciones $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ y $u_{xx}(x,t)$ son absolutamente integrables en todo el eje x para cualquier $t\geq 0$ fijado.

2) La función $u_t(x,t)$ tiene en todo intervalo finito $0\leq t\leq T$ una mayormente integrable $f(x)$ (que no depende de t):

$$|u_t(x,t)| \leq f(x), \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Realicemos en la ecuación

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

la transformada de Fourier respecto a x. Entonces, en el miembro derecho tendremos

$$\mathbb{F}[u_{xx}(x,t)] = -\lambda\ v(\lambda,t),\ \text{donde}\ v(\lambda,t) = \mathbb{F}[u(x,t)],$$

mientras que en el miembro izquierdo, en virtud de 2), tendremos

$$\mathbb{F}[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-i\lambda x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx = v_t(\lambda,t)$$

De esta forma, la transformada de Fourier convierte la ecuación

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

en una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dv}{dt}(\lambda,t) = -\lambda^2 v(\lambda,t)$$

y debemos ahora buscar la solución de esta ecuación que para t=0 da

$$v_0(\lambda) = \mathbb{F}[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-i\lambda x}dx$$

Esta solución es, evidentemente,

$$v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t}v_0(\lambda)$$

Ahora, para obtener la solución del problema inicial, resta encontrar aquella función u(x,t) cuya transformación de Fourier es la función encontrada v(λ,t).

Recordando que para $f(x)= e^{-ax^2}$, tenemos

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\sqrt{\pi/a}.$$

$$e^{-\lambda^2 t} = \mathbb{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]$$

Por lo tanto,

$$v(\lambda,t) = \mathbb{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\mathbb{F}[u_0(x)] = \mathbb{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right],$$

es decir,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, u_0(x-\xi)\, d\xi$$

Hemos obtenido la llamada **fórmula de Poisson** para la solución de la ecuación de conducción del calor.

5º Determinar el desplazamiento de una cuerda infinita con velocidad inicial cero. El desplazamiento inicial está dado por $f(x)$, pero $-\infty<x<\infty$.

Solución:

$\mu(x,t)$ satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

Las condiciones iniciales se pueden expresar como

$$\mu(x,0)=f(x) \qquad -\infty<x<\infty \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

NOTACIÓN: $U(w,t)=F\{M(x,t)\}$

$$\mu_{xx}(x,t)= \frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial x^2} \qquad \mu_x(x,t)= \frac{\partial\mu(x,t)}{\partial x}$$

$$\mu_{tt}(x,t)= \frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial t^2} \qquad \mu_t(x,t)= \frac{\partial\mu(x,t)}{\partial t}$$

Obteniendo la transformada de Fourier de (1), tenemos

$$-w^2\, U(w,t)= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, U(w,t)$$

o sea

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(w,t)+w^2U(w,t)=0 \tag{4}$$

y resolviendo (4) por los métodos convencionales tenemos

$$U(w,t)=A(w)e^{iwt}+B(w)e^{-iwt} \tag{5}$$

Aplicando la Transformada de Fourier a las condiciones iniciales (2) y (3) tenemos

$$F\{\mu(x,0)\}=U(w,0)=F\{f(x)\}=F(w) \tag{6}$$

$$F\left\{\mu(x,t)\big|_{t=0}\right\}=\frac{\partial}{}F\{\mu(x,t)\}\big|_{t=0}=\frac{\partial}{}U(w,0)=0 \tag{7}$$

calculando $U(w,t)$ en t=0 de (5) y usando (6) tenemos

$$U(w,t)=A(w)+B(w)=F(w) \tag{8}$$

Derivando (5) con respecto a t y calculando en t=0, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}U(w,t)\Big|_{t=0}=\Big[\,iwcA(w)e^{iwct}-iwcB(w)e^{-iwct}\,\Big]_{t=0}$$

$$=iwcA(w)-iwcB(w)$$

y usando (7) se tiene

$$iwcA(w)-iwcB(w)=0 \tag{9}$$

resolviendo el sistema (8) y (9) nos da

$$A(w)=B(w)=\frac{1}{2}F(w) \tag{10}$$

Por lo tanto, sustituyendo (10) en (5) obtenemos

$$U(w,t)= \frac{1}{2}\ F(w)e^{iwct} + \frac{1}{2}\ F(w)e^{-iwct} \tag{11}$$

Encontrando la transformada inversa de (11), obtenemos

$$\mu(x,t)= \frac{1}{2}\ F^{-1}\left[\ F(w)e^{iwct}\right]+\left[\ F(w)e^{-iwct}\right]$$

y por las tablas (propiedad de translación) se tiene finalmente

$$\mu(x,t)= \frac{1}{2}\ f(x+ct)+ \frac{1}{2}\ f(x-ct) \tag{12}$$

Por lo tanto, la solución es una interpretación de dos ondas de igual perfil, pero viajando en direcciones opuestas. En particular, si *f(x,t)* es una onda armónica entonces se tendrá un patrón de ondas estacionarias.

APENDICE A

ANTECEDENTES MATEMATICOS

Definición de grupo: A un conjunto no vacío **G** con una operación $\ominus$ satisfaciendo las siguientes propiedades se le da el nombre de grupo $(\mathbf{G},\ominus)$:

1) Si a y b $\in$ **G**, entonces $a\ominus b \in \mathbf{G}$

2) Si a, b y c $\in$ **G**, entonces $(a \ominus b) \ominus c = a \ominus (b \ominus c)$.

3) Existe **e** $\in$ **G** tal que para toda a $\in$ **G** $a \ominus \mathbf{e} = \mathbf{e} \ominus a = a$.

4) Para cada $a\in\mathbf{G}$ existe una a^{-1} tal que $a \ominus (a^{-1}) = (a^{-1}) \ominus a = \mathbf{e}$

Si $a\ominus b = b\ominus a$ para toda a y b $\in$ **G** el grupo recibe el nombre de *abeliano.*

Definición de anillo: A un conjunto con dos operaciones $(+ , \ominus)$ con las siguientes propiedades se le da el nombre de anillo (**A**).

1) $(\mathbf{A} , +)$ es grupo abeliano.

2) Si a y b $\in$ **A** entonces $a\ominus b \in \mathbf{A}$.

3) Para todo a, b, c $\in$ **A** tenemos $(a\ominus b)\ominus c = a\ominus(b\ominus c)$.

4) Si a, b y c $\in$ **A** entonces $a\ominus(b + c) = a\ominus b + a\ominus c$.

5) Si para todo $a \in$ **A** existe un $1 \in$ **A** tal que $a \ominus 1 = 1 \ominus a = a$. Entonces **A** recibe el nombre de anillo *unitario.*

Si además se tiene 6) Si $a \ominus b = b \ominus a$ para todo $a, b \in$ **A**, el conjunto recibe el nombre de *anillo conmutativo.*

Nota: En el caso de que halla inverso multiplicativo el conjunto recibe el nombre se le llama *campo*.

Definición de Espacio Vectorial: Un espacio vectorial **V** sobre un anillo **F** es un conjunto dotado de dos operaciones $(+,\circ)$, llamadas suma vectorial y producto por un escalar, que satisfacen los axiomas siguientes para todo vector u, v, w en **V** y todos los escalares k y l.

1) Si u y $v \in$ a **V**, entonces $u + v \in$ **V**

2) $u + v = v + u$.

3) $u + (v + w) = (u + v) + w$.

4) Existe $0 \in$ **V** tal que $0 + u = u + 0 = u \quad \forall u \in$ **V**.5) Para cada $u \in$ **V**, existe un vector $-u \in$ **V**, conocido como negativo de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

6) Si k es cualquier elemento $\in$ **F** y u es cualquier vector en **V**,

entonces $k \circ u \in V$.

7) $k \circ (u + v) = k \circ u + k \circ v$.

8) $(k + q) \circ u = k \circ u + q \circ u$.

9) $k \circ (lu) = (kl) \circ u$.

10) $1 \circ u = u$.

Definición de Homomorfismo: Sean $(G,\ominus)$ y $(G',\otimes)$ dos grupos, entonces una aplicación $\theta: G \longrightarrow G'$ en un Homomorfismo si $\theta_{(a \ominus b)} = \theta_{(a)} \otimes \theta_{(b)}$ $\forall$ a, b $\in$ G.

Un homomorfismo se dice que es un *isomorfismo* si $a \neq b$ implica $\theta(a) \neq \theta(b)$ y si $a' \in G'$ existe $a \in G$ tal que $\theta(a) = a'$.

Definición de Integral de Riemann: Una función simple f se le llama integrable con respecto a la medida de Riemann si $\sum y_n \, \mu(A_n)$ es finita, donde f toma el valor y_n en cada punto x perteneciente a A_n. A la sumatoria $\sum y_n \, \mu(A_n)$ se le denota como $\int_A f(x) \, d\mu$.

Definición de Espacio de Hilbert: Un espacio euclideano separable y completo **H** se le llama espacio de Hilbert, si se satisfacen las siguientes condiciones:1) H es un espacio Euclideano.

2) El espacio H es completo en el sentido de la métrica $s_H(f,g) = \|f - g\|$, f y g en H.

APENDICE B

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Las funciones son periódicas con período T, $a>0$; b, t_0 y $\omega_0=2\pi/T$, son constantes reales, con n= 1, 2,...

$f(t)$	$F(\omega)$
$a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$	$a_1F(\omega) + a_2F_2(\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(-t)$	$F(-\omega)$
$f(t - t_0)$	$F(\omega)\ e^{-i\omega t_0}$
$f(t)e^{i\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t)\cos\ \omega_0 t$	$\frac{1}{2} F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega+\omega_0)$
$f(t)\mathrm{sen}\ \omega_0 t$	$\frac{1}{2i} F(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2i} F(\omega+\omega_0)$
$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$	$R(\omega)$
$f_0(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$	$i\times(\omega)$
$f(t) = f_e(t) + f_0(t)$	$F(\omega) = R(\omega) + i\times(\omega)$
$F(t)$	$2\pi\ f(-\omega)$
$f'(t)$	$i\omega\ F(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\ F(\omega)$
$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f_2(t-x)\ dx$	$F_1(\omega)\ F_2(\omega)$

$f_1(t)\ f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y)F_2(\omega-y)\,dy$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{i\omega + a}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\pi/a}\ e^{-\omega^2/(4a)}$
$\rho_a(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } \|t\|<a/2 \\ 0 \text{ para } \|t\|>a/2 \end{cases}$	$a\,\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\left(\frac{\omega a}{2}\right)}$
$\frac{\mathrm{sen}\ at}{\pi t}$	$\rho_{2a}(\omega)$
$te^{-at}\ u(t)$	$\frac{1}{(i\omega+a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ e^{-at}\ u(t)$	$\frac{1}{(i\omega+a)^n}$
$e^{-at}\ \mathrm{sen}\ bt\ u(t)$	$\frac{b}{(i\omega+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\ \cos bt\ u(t)$	$\frac{i\omega+a}{(i\omega+a)^2+b^2}$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a}\ e^{-a\|\omega\|}$
$\frac{\cos bt}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{2a}\left[e^{-a\|\omega-b\|}+e^{-a\|\omega+b\|}\right]$
$\frac{\mathrm{sen}\ bt}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{2aj}\left[e^{-a\|\omega-b\|}+e^{-a\|\omega+b\|}\right]$
$\frac{1}{t}$	$\pi i - 2\pi i\ u(\omega)$
$\frac{1}{t^n}$	$\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\pi i - 2\pi i\ u(\omega)\right]$

Otras propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\ f_2(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) * F_2(\omega)\ d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\ d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ G(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\ g(x)\ dx.$$

APENDICE C

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2 DEL CAPITULO 1

TEOREMA: El conjunto $\{1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ sen } mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx\}$ para $m \in \mathbb{N}$, es un conjunto ortonormal con respecto al producto interno anterior.

Demostración:

$$1)\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ sen } mx \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 0 = 0$$

$$2)\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 0 = 0$$

$$3)\quad \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx)(\cos nx) \, dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ si } n = m \end{cases}$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica

$$(\cos A)(\cos B) = 1/2[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

si $m \neq n$ se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx)(\cos nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \ dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \quad x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{m+n} \operatorname{sen}(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{1}{m-n} \operatorname{sen}(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi + \operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi + \operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n} \right\}$$

Si m=n usamos la identidad trigonométrica $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$, de donde $\cos^2 u = (\cos 2u+1)/2$, lo cual nos da:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx)(\cos nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mx\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2mx}{2m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Para demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\ dx = 0$ para cualquier valor de m y n se hace uso de la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A \cos B = 1/2\ [\operatorname{sen}(A+B)\ \operatorname{sen}(A-B)]$$

y así, para $m \neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} mx)(\cos nx)\ dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\ (m+n)x\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\ (m+n)x\ dx \right]$$

$$= \left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Si se hace $m=n\neq 0$, se puede utilizar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, de donde se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2mx \, dx$$

$$= \frac{1}{4m} \cos 2mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4m} [\cos 2m\pi - \cos(-2m\pi)] = 0$$

La demostración de que

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 \text{ si } m\neq n \\ \pi \text{ si } m=n \end{cases}$$

se puede efectuar de una manera similar a la llevada a cabo para las dos anteriores, haciendo uso de la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = 1/2 \, [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

con esto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (m-n)x \, dx - \frac{1}{2} \cos(m+n)x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n-m} [\operatorname{sen}(m-n)\pi - \operatorname{sen}(m-n)(-\pi)] - \frac{1}{n+m} [\operatorname{sen}(m+n) + \operatorname{sen}(m+n)\pi] \right\}$$

para $m=n$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx) \, dx = \pi$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

B I B L I O G R A F I A

1. **ELEMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES Y DEL ANALISIS FUNCIONAL.**
   A. N. KOLMOGOROV
   S. V. FOMIN
   EDITORIAL MIR, MOSCU.
   IMPRESO EN LA URSS 1975
   TRADUCCION AL ESPAÑOL 1975.

2. **ANALISIS DE FOURIER.**
   HOWEI P. HSU
   FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO
   EDICION REVISADA 1970
   PUBLICACION 1973
   IMPRESO EN COLOMBIA.

3. **TESIS DE MAESTRIA**
   ANGEL CORONADO
   ENSENADA, B.C., 1988

4. **RADIATION AND OPTICS**
   JOHN M. STONE
   MC GRAW-HILL, INC. 1963

5. **THE CONVERGENCE OF FOURIER SERIES**
   DUNHAM JACKSON
   UNIVERSIDAD DE MINESOTA
   REGIST[illegible] O LIBR[illegible]