UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

SOBRE LA AXIOMATICA DE LOS ESPACIOS DE HILBERT

T E S I S

Que para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P r e s e n t a

OSCAR MARIO RODRIGUEZ SANCHEZ

AL PUEBLO DE SONORA.

A MI MADRE.

A MI PADRE,

HERMANOS,

HERMANAS.

A DOÑA LICHA.

A TODOS LOS QUE TUVIERON FE.

A MI ESPOSA

Y AL TOCAYO.

I N D I C E

	INTRODUCCION.	1
I	DEFINICIONES Y TEOREMAS PRELIMINARES	3
	A) ESPACIO LINEAL NORMADO, ESPACIO DE HILBERT	3
	B) TEOREMA DEL ISOMORFISMO	6
	C) TEOREMA DE RIESZ	13
II	ALGUNAS PROPIEDADES DE ESPACIOS DE PRODUCTOS INTERIORES	19
	A) EQUIVALENCIA ENTRE EL CASO COMPLEJO Y EL REAL	19
	B) PROPIEDADES DE LA NORMA INDUCIDA POR UN PRODUCTO INTERIOR	20
	C) ISOMETRIA ENTRE UN SUBESPACIO TRIDIMENSIONAL Y R^3	22
III	CARACTERIZACIONES DE ESPACIOS DE PRODUCTOS INTERIORES	28
	A) LEY DEL PARALELOGRAMO	28
	B) LEY DEL PARALELOGRAMO EN LA BOLA UNITARIA	33
	C) UNA RELACION FUNCIONAL ENTRE LOS LADOS Y LAS DIAGONALES DEL PARALELOGRAMO	38
	D) RELACION FUNCIONAL ENTRE LAS NORMAS DE LAS DIAGONALES CONSIDERANDO ELEMENTOS DE LA ESFERA UNITARIA	40
IV	ORTOGONALIDAD	53
V	ALGUNAS APLICACIONES	56
	BIBLIOGRAFIA	60

I N T R O D U C C I O N

David Hilbert, al tratar con algunos problemas sobre ecuaciones integrales fué quien empezó a trabajar en estructuras que, posteriormente, llevarían su nombre, los espacios de Hilbert. Varios matemáticos desarrollaron trabajos sobre estos espacios, siendo J. von Neumann quien los axiomatizó pidiendo, entre otras cosas, que fueran separables. Esta condición la conservan algunos autores; pero, en base a ella, puede considerarse que sólo existe un espacio de Hilbert (en vista de que dos cualesquiera son isomorfos) el cual tiene a l_2 (que será definido posteriormente) como su "realización en coordenadas".

Un caso particular de esto: el isomorfismo entre l_2 y L_2 (el espacio de las funciones cuadrado integrables), está relacionado con la teoría de la mecánica cuántica. La mecánica cuántica originalmente consistió de dos teorías superficialmente distintas: La mecánica de matrices de Heisenberg y la mecánica de ondas de Schrödinger, este último mostró posteriormente que las dos teorías son equivalentes . Desde el punto de vista matemático la diferencia entre las dos teorías se reduce al hecho que la teoría de Heisenberg usó el espacio l_2 , mientras que la teoría de Schrödinger usó el espacio L_2 .

La petición de separabilidad parece tener su fundamento en la seguridad de contar con una base ortogonal, en vista de que esa condición garantiza la existencia de dicha base.

Fué también J. von Neumann quien descubrió una de las propiedades más transcendentales de estos espacios, la ley del paralelogramo, que dió la pauta a otros matemáticos para buscar otras propiedades geométricas. De la copiosa producción acerca de espacios de Hilbert, en el presente trabajo se hace una exposición de algunos de ellos que ilustran algunas propiedades geométricas y de ortogonalidad de espacios de productos interiores

Deliberadamente no se habla de dimensión en la definición ya que las propiedades las cumplen un mayor número de espacios.

Se analizan, principalmente, cuatro caracterizaciones que están íntimamente ligadas y que se intuyen a partir de la primera (la ley del paralelogramo). Inicialmente se trató de hacer un estudio sobre el desarrollo de las propiedades que caracterizan los espacios de Hilbert, yendo a las fuentes originales; pero, como se dice antes, la producción en este campo es abrumadora; además de que constantemente hay nuevas aportaciones.

El presente trabajo puede ser un ejemplo de lo que pasa en repetidas ocasiones: El principio puede ser un problema o concepto físico, ingenieril, biológico, socioeconómico, etc. en fin humano (que da una prueba más de que en matemáticas se trabaja para el óptimo aprovechamiento de los recursos) a partir del cual se pueden obtener resultados más o menos sofisticados, sin embargo, los resultados más transcendentales ocurren en los conceptos básicos que son los más susceptibles de cambio.

Quiero manifestar mi agradecimiento al profesor Enrique Valle Flores por su dinámica paciencia y las energías gastadas en el desarrollo de las matemáticas en Sonora.

CAPITULO I

DEFINICIONES Y TEOREMAS PRELIMINARES.

A) ESPACIO LINEAL NORMADO. ESPACIO DE HILBERT.

Un <u>espacio vectorial</u> (o <u>lineal</u>) consiste de un conjunto no vacío L de elementos $f,g,h,\ldots$, un campo F de escalares $a,b,c,\ldots$ y dos operaciones $+$, $\cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:

I. $f + g \in L$ para todo $f,g \in L$ y es tal que:

1) $f + g = g + f$

2) $f + (g + h) = (f + g) + h$

3) existe $0 \in L$ tal que $f + 0 = f$ para todo $f \in L$

4) Para cada $f \in L$ existe $-f \in L$ tal que $f + (-f) = 0$

II. Para cualquier escalar a y cualquier elemento $f \in L$ está definido el elemento $af \in L$ de manera que:

1) $a(bf) = (ab)f$ para todo $a,b \in F$ y todo $f \in L$

2) $1.f = f$ para todo $f \in L$

III. Las operaciones están relacionadas mediante las leyes distributivas

1) $(a + b)f = af + bf$

2) $a(f + g) = af + ag$

Si F es el campo real o complejo, se dice que L es un espacio vectorial real o complejo, respectivamente.

Un <u>espacio métrico</u> consiste de un conjunto L y de una distancia d, es decir, una función univaluada real y no negativa $d(f,g)$ definida para dos elementos cualesquiera $f,g \in L$ que verifica las condiciones siguientes:

1) $d(f,g) \geq 0$ y $d(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$

2) $d(f,g) = d(g,f)$

3) $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$ $\qquad f,g,h \in L.$

Una <u>sucesión</u> en un espacio métrico es una función univaluada $F: TN \longrightarrow L$

mentos del espacio. Se denota con $\{f_n\}$ a la sucesión $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$

Se dice que $f_o \in L$ es Límite de la sucesión $\{f_n\}$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $d(f_n, f_o) < \varepsilon$.

Se dice que una sucesión es convergente si tiene límite.

La sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N$ implica que $d(f_m, f_n) < \varepsilon$.

Si una sucesión en un espacio métrico es convergente, su límite es único.

Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Un espacio métrico se llama completo, cuando toda sucesión de Cauchy en él converge.

Un subconjunto no vacío L' de un espacio lineal L se llama subespacio, cuando es un espacio lineal con las operaciones de adición y multiplicación por escalares definidas en L. O sea, $L' \subset L$ es un subespacio, cuando de $f \in L'$, $g \in L'$ se deduce que $af + bg \in L'$ cualesquiera que sean a y b.

Una norma en un espacio vectorial L es un mapeo $(f \to \|f\|)$ de L en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con las siguientes propiedades:

1) $\|f\| \geq 0$ para todo $f \in L$
2) $\|f\| = 0$ es equivalente a $f = 0$
3) $\|af\| = |a| \|f\|$ para cualquier $f \in L$ y cualquier escalar a
4) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ para cualesquier $f, g \in L$.

Un espacio normado es un espacio vectorial L con una norma dada en él.

$d(f,g) = \|f - g\|$ es una distancia en L, así un espacio lineal normado es siempre considerado como un espacio métrico.

Un espacio de Banach es un espacio lineal normado y completo respecto a la métrica dada por la norma.

complejo $[f,g]$, llamado producto interior (o producto escalar) de f y g, tal que valen las siguientes reglas:

i) $[cf,g] = c[f,g]$ $\quad f,g \in L$ y c un escalar

ii) $[f + g,h] = [f,h] + [g,h]$ $\quad f,g,h \in L$

iii) $[g,f] = \overline{[f,g]}$ ($\bar{c}$ denota el conjugado complejo de c)

iv) $[f,f] \geq 0$ $\quad$ para todo $f \in L$

v) $[f,f] = 0$ $\quad$ sólo si $f = 0$

De i) , iii) se tiene

$$[f,cg] = \bar{c}[f,g] \quad ; \quad [f,g' + g''] = [f,g'] + [f,g'']$$

En el caso de producto interior real, denotado por (,), se obtiene $(g,f) = (f,g)$. La equivalencia entre las dos definiciones, real y compleja, es el tema del siguiente capítulo.

Por iv) podemos definir $\|f\|$, la norma del vector $f \in L$, como la raíz cuadrada no negativa de (f,f)

$$\|f\|^2 = (f,f)$$

Las tres primeras propiedades de una norma son consecuencia inmediata de iv), v), i), iii). La cuarta, la desigualdad del triángulo, se obtiene utilizando la desigualdad de Schwarz $|[f,g]| \leq \|f\| \, \|g\|$ que se demuestra enseguida.

Sean $A = \|f\|^2$, $B = |[f,g]|$, $C = \|g\|^2$;

existe un número complejo a tal que $|a| = 1$ (a será de la forma $\frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ siendo $x + iy = [f,g]$) y $a[g,f] = B$. Para cualquier real r, se tiene

$$0 \leq [f - rag, f - rag] = [f,f] - ra[g,f] - r\bar{a}[f,g] + r^2[g,g]$$

esto es

$$A - 2Br + r^2C \geq 0 \quad ;$$

$B^2 \leq AC$ y de aquí

$$|[f,g]| \leq \|f\| \|g\|$$

Todo espacio de productos interiores es normado. Si además es completo se le llama espacio de Hilbert.

Algunos autores piden además que sea separable. Se verá, después de algunas definiciones, ejemplos y resultados previos, que los espacios de Hilbert separables cualesquiera son isomorfos.

B) TEOREMA DEL ISOMORFISMO

DEFINICION. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico R. Se dice que A es denso en B si $[A] \supset B$ (donde $[A]$ indica la cerradura de A, o sea, el conjunto de todos los puntos de contacto de A). En particular, se dice que A es denso donde quiera (en R) si $[A] = R$.

DEFINICION. Un espacio métrico se dice separable si tiene un subconjunto denso donde quiera numerable.

Los siguientes son algunos ejemplos de conjuntos densos.

1. El conjunto de todos los puntos racionales es denso en la linea real R^1.
2. El conjunto de todos los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con coordenadas racionales es denso en cada uno de los espacios R^n, R_o^n y R_1^n donde:

R^n es el espacio métrico formado de todas las n-adas ordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con distancia

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

R_o^n es el espacio métrico formado por las n-adas ordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como en R^n pero con distancia

R_1^n el mismo conjunto como antes pero ahora la distancia está dada por

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

3. El conjunto de todos los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ con un número finito de coordenadas distintas de cero, cada una un número racional, es denso en el espacio l_2, donde

l_2 es el conjunto de todas las sucesiones infinitas

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$$

de números reales $x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots$ que satisfacen la condición de convergencia

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

donde la distancia entre dos puntos se define por

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$$

y el producto interior por

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

4. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es denso en los espacios $C_{[a,b]}$ y $C^2_{[a,b]}$ donde

$C_{[a,b]}$ es el espacio métrico formado por todas las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$ con distancia

$$d(f,g) = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|$$

$C^2_{[a,b]}$ como el anterior solo que la distancia está definida por la fórmula

$$d(x,y) = \left(\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Los espacios anteriores R^1, R^n, R_o^n, R_1^n, l_2, $C_{[a,b]}$, $C^2_{[a,b]}$, son separables, puesto que los conjuntos en los cuatro ejemplos son numerables.

DEFINICION. Un conjunto de vectores $\{x_\alpha\}$ en R se dice que es un sistema ortogonal si

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \qquad \text{para } \alpha \neq \beta$$

y un sistema ortonormal si

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{para } \alpha = \beta \end{cases}$$

si $\{x_\alpha\}$ es un sistema ortogonal, entonces claramente

$$\left\{ \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|} \right\} \qquad \text{es un sistema ortonormal}$$

DEFINICION. Se dice que los elementos $x, y, \ldots, w$ de un espacio vectorial L son linealmente independientes si y sólo si

$$ax + by + \ldots + cw = 0$$

implica $a = b = \ldots = c = 0$

TEOREMA. Los vectores en un sistema ortogonal $\{x_\alpha\}$ son linealmente independientes. (9).

Un sistema ortogonal $\{x_\alpha\}$ se llama una base ortogonal si es completo, esto es, si el más pequeño subespacio cerrado que contenga a $\{x_\alpha\}$ es el espacio total R. Similarmente, un sistema ortonormal completo se llama una base ortonormal.

TEOREMA. Todo sistema ortogonal $\{x_\alpha\}$ en un espacio de productos interiores separable R es a lo sumo numerable. (9).

La existencia de una base ortogonal en cualquier espacio de productos interiores separable está garantizada por el siguiente teorema y su corolario.

TEOREMA. (DE ORTOGONALIZACION). Sea

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \qquad (8)$$

cualquier conjunto (numerable) de elementos linealmente independientes de

tal que

1) El sistema (&&) es ortonormal;

2) Cada elemento φ_n es una combinación lineal

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \ldots + a_{nn}f_n \qquad (a_{nn} \neq 0)$$

de los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$;

3) Cada elemento f_n es una combinación lineal

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + b_{n2}\varphi_2 + \ldots + b_{nn}\varphi_n \qquad (b_{nn} \neq 0)$$

de los elementos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Además, cada elemento del sistema (&&) está únicamente determinado por estas condiciones, con un factor de ± 1 . (9).

COROLARIO. Todo espacio de productos interiores separable R tiene una base ortonormal numerable. (9).

Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ una base ortonormal en R^n. Entonces cada vector $x \in R^n$ puede escribirse en la forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

donde $$c_k = (x, e_k)$$

veamos como esto generaliza al caso de un espacio de productos interiores infinito-dimensional R. Sea $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ un sistema ortonormal en R y sea f un elemento arbitrario de R. Supóngase que con f asociamos

1) la sucesión de números

$$c_k = (f, \varphi_k) \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

llamados las componentes o coeficientes de Fourier de f con respecto al sistema $\{\varphi_k\}$;

2) la suc

Que la serie anterior converge y que la suma de la serie coincide con f se vé del siguiente

TEOREMA. Dado un sistema ortonormal

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$$

en un espacio de productos interiores R, sea f un elemento arbitrario de R. Entonces, la expresión

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\|$$

alcanza su mínimo para

$$a_k = e_k = (f, \varphi_k) \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

Este mínimo es $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} e_k^2$

Además $\sum_{k=1}^{\infty} e_k^2 \leq \|f\|^2$

Este resultado se conoce como <u>Desigualdad de Bessel</u>.

La demostración de este teorema se realiza desarrollando

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\|^2$$

lo que lleva a

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} e_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - e_k)^2$$

donde $c_k = (f, \varphi_k) \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$

la expresión anterior alcanza su mínimo cuando su último término se anula, a sea, cuando

$$a_k = e_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

y su mínimo es

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

n

De donde la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k^2$$

es convergente, tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k^2 \leq \|f\|^2$$

esto indica que la suma de los cuadrados de las proyecciones de un vector f sobre un conjunto de direcciones mutuamente perpendiculares no puede - exceder el cuadrado de la longitud del vector mismo.

DEFINICION. Supóngase que vale la igualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k^2 = \|f\|^2$$

para todo $f \in R$. Entonces el sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ se dice que es <u>cerrado</u>. (Este es otro sentido de la palabra cerrado). La expresión anterior se conoce como <u>igualdad de Parseval</u>.

TEOREMA. Un sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ en un espacio de productos interiores R es cerrado si y sólo si todo elemento $f \in R$ es la suma de sus Series de Fourier. (9).

TEOREMA. (#). Un sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ en un espacio de productos interiores R es completo si y sólo si es cerrado. (9).

COROLARIO. Todo espacio de productos interiores separable R contiene un sistema ortonormal cerrado $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ (9).

TEOREMA. (RIESZ-FISCHER). Dado un sistema ortonormal $\{\varphi_k\}$ en un espacio de Hilbert R, sean los números $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

converge. Entonces existe un elemento $f \in R$ con $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ como sus coeficientes de Fourier y tal que

donde $c_k = (f, \varphi_k)$ $(k = 1,2,\ldots)$ (9)

DEFINICION. Dos espacios de productos interiores R y R' se dice que son isomorfos si hay una correspondencia uno a uno $x \longleftrightarrow x'$, $y \longleftrightarrow y'$ entre los elementos de R y los de R' $(x,y \in R$, x' , $y' \in R')$ que preserve las operaciones lineales y producto escalar en el sentido que

$$x + y \longleftrightarrow x' + y' \quad , \quad ax \longleftrightarrow ax' \quad , \quad (x,y) = (x',y')$$

TEOREMA. (DEL ISOMORFISMO). Cualesquier dos espacios de Hilbert separables son isomorfos.

Se verá que todo espacio de Hilbert separable H es isomorfo a l_2 . Sea $\{\varphi_k\}$ cualquier sistema ortonormal completo en H (existe por el corolario del teorema de ortogonalización) y con cada elemento $f \in H$ asóciese sus coeficientes de Fourier $\{c_k\}$ con respecto a $\{\varphi_k\}$. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \infty$$

por el teorema (#), la sucesión $(c_1,c_2,\ldots,c_k,\ldots)$ pertenece a l_2 . Inversamente, por el teorema de Riesz-Fischer, a todo elemento $(c_1,c_2,\ldots,$ $,c_k,\ldots)$ en l_2 le corresponde un elemento $f \in H$ con los números c_1, $c_2,\ldots,c_k,\ldots$ como sus coeficientes de Fourier. La correspondencia es uno a uno

si $$f \longleftrightarrow (c_1,c_2,\ldots,c_k,\ldots)$$

$$f' \longleftrightarrow (c_1',c_2',\ldots,c_k',\ldots)$$

$$f + f' \longleftrightarrow (c_1 + c_1',\ldots,c_k + c_k',\ldots)$$

$$af \longleftrightarrow (ac_1,\ldots, ac_k,\ldots)$$

de la igualdad de Parseval

$$\infty$$

$$(f,f) + 2(f,f') + (f',f') = (f + f', f + f') = \sum_{k=1}^{\infty}(c_k + c'_k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k c'_k + \sum_{k=1}^{\infty} c'^2_k$$

y de aquí

$$(f,f') = \sum_{k=1}^{\infty} c_k c'_k$$

y se preserva el producto interior.

C) TEOREMA DE RIESZ.

Una <u>transformación lineal</u> de un espacio vectorial L en un espacio vectorial M es un mapeo $A: L \longrightarrow M$ tal que

$$A(af + bg) = aAf + bAg$$

para todo escalar a,b y todo vector $f,g \in L$.

Si el espacio rango M coincide con el campo escalar F se les llama <u>funcionales lineales</u>.

Supongamos que L es un espacio de productos interiores y que g es algun vector fijo en L, el mapeo

$$L \xrightarrow{A} F \qquad \text{(F campo escalar)}$$

$$f \xrightarrow{A} (f,g)$$

representa una funcional lineal en L.

$$A(af' + bf'') = (af' + bf'', g) = a(f',g) + b(f'',g) = aA(f') + bA(f'')$$

TEOREMA. Una funcional lineal A es uno a uno si y sólo si

$$A(f) = 0 \quad \text{implica} \quad f = 0 \qquad (11).$$

TEOREMA. Sea A una funcional lineal en el espacio lineal normado L. Entonces, si A es continua en $f_o \in L$, debe ser continua en todo punto de

DEFINICION. La funcional lineal A en el espacio lineal normado L se dice acotada si existe una constante real k, tal que, para todo $f \in L$

$$|A(f)| \leq k\|f\|$$

TEOREMA. La funcional lineal A definida en el espacio lineal normado L es acotada si y sólo si es continua.

Supongamos que A es continua pero no acotada. Esto es, para cualquier natural n, por grande que sea, hay algun punto, digamos f_n, tal que

$$|A(f_n)| > n\|f_n\|$$

consideremos los vectores $$g_n = \frac{f_n}{n\|f_n\|}$$

los cuales tienen norma $$\|g_n\| = \frac{1}{n}$$

y la sucesión $$g_n \longrightarrow 0$$

como cualquier funcional lineal mapea el vector cero en el escalar cero y A es continua, se tiene

$$A(g_n) \longrightarrow A(0) = 0$$

como $$A(g_n) = \frac{1}{n\|f_n\|}A(f_n) \qquad y \qquad |A(f_n)| > n\|f_n\|$$

$$|A(g_n)| > 1$$

esto impide que $A(g_n)$ se aproxime a cero. Se tiene un resultado contradictorio y la afirmación que A fuera no acotada debe ser falsa cuando A es continua.

Si A es acotada $|A(f)| \leq k\|f\|$ para todo $f \in L$. Si $f \longrightarrow 0$

hacemos $A(f) = A(f - 0) = A(f) - A(0)$

$$|A(f)| = |A(f) - A(0)| = |A(f - 0)| \leq k\|f - 0\| \longrightarrow 0$$

y $|A(f) - A(0)| \longrightarrow 0$ esto es $A(f) \longrightarrow A(0)$

Supongamos que A, B son funcionales lineales acotadas sobre el espacio lineal normado L. A y B se dice que son iguales, A = B, si y solo si A(f) = B(f) para todo $f \in L$. Se define A + B como la funcional lineal cuyo valor en cualquier punto f, es A(f) + B(f) y para a, un escalar y A como antes, aA será aA(f) en cualquier punto f.

La clase de tales funcionales lineales es un espacio lineal.

DEFINICION. Si A es una funcional lineal acotada en el espacio lineal normado L, definimos

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|A(f)|}{\|f\|}$$

Como A es acotada, debe haber algun k tal que, para todo f

$$|A(f)| \leq k\|f\|$$

de donde para $f \neq 0$

$$\frac{|A(f)|}{\|f\|} \leq k$$

por lo que, el conjunto de números reales

$$\left\{ \frac{|A(f)|}{\|f\|} \mid f \neq 0 \right\}$$

tiene una cota superior y, de aquí, una mínima cota superior (por el axioma de la mínima cota superior).

Si se denota por K el conjunto de todas las k que satisfagan

$$|A(f)| \leq k\|f\|$$

$\|A\| \in K$, puesto que, para todo $f \neq 0$ $\quad \frac{|A(f)|}{\|f\|} \leq \|A\|$

y se tiene, para todo f $\quad |A(f)| \leq \|A\| \|f\|$

El espacio lineal normado que consiste de todas las funcionales lineales acotadas sobre L se llama el <u>espacio conjugado</u> y se denota L^*.

$\|A\|$ es realmente una norma

1) $\|A\| > 0$ para cualquier $f \neq 0$

3) $\|aA\| = |a|\,\|A\|$ para cualquier $A \in L^*$ y cualquier escalar a

4) $\|A + B\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|A(f) + B(f)|}{\|f\|} \leq \sup_{f \neq 0} \frac{|A(f)|}{\|f\|} + \sup_{f \neq 0} \frac{|B(f)|}{\|f\|} = \|A\| + \|B\|$

Otras maneras equivalentes de expresar $\|A\|$ son:

1) $\|A\| = \inf_{k \in K} k$

2) $\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |A(f)|$

3) $\|A\| = \sup_{\|f\| = 1} |A(f)|$

Se enuncian los dos siguientes teoremas, sin incluir la demostración:

TEOREMA. Denotemos con L^* el espacio lineal normado de todas las funcionales lineales acotadas sobre el espacio lineal normado L. Entonces L^* es un espacio de Banach.

TEOREMA. (RIESZ). A es una funcional lineal acotada en el espacio de Hilbert L si y sólo si existe un vector único $g \in L$ tal que

$$A(f) = (f,g)$$

para todo $f \in L$.

Alternativamente, denotando el espacio conjugado de L por L^*, se podría decir que

$$L^* = \left\{ A_g(f) = (f,g) \mid g \in L \right\}$$

Veremos ciertas relaciones elementales entre cada espacio lineal complejo y un espacio lineal real asociado, de manera que, usando teoremas en el caso lineal real se puedan derivar en el caso lineal complejo.

Si L es un espacio lineal complejo, hay asociado a él un espacio lineal real único M cuyos elementos son los de L y cuya adición es la misma que en L.

$(a + i0)f$ en L .

Si $\|f\|$ es una norma en L , entonces la misma norma se usará en M . Si $B \in L^*$, o sea, si B es una función, lineal compleja, con valores complejos en L , definimos RB, la parte real de B, por $A = RB$ si $A(f) = R(B(f))$ para todo f.

A es una función con valores reales, por definición; definida en M, puesto que L y M tienen los mismos elementos y lineal real; Pues para f,g en L y M , a,b reales

$$A(af + bg) = R(B(af + bg)) = R(aB(f) + bB(g)) = R(aB(f)) + R(bB(g))$$

$$= aR(B(f)) + bR(B(g)) = aA(f) + bA(g)$$

$RB \in M^*$, el conjunto de funciones lineales reales, con valores reales en M, si $B \in L^*$.

Si hacemos $B(f) = A(f) - iA(if)$

se obtiene una relación para retornar de A a B :

$$B(f) = A(f) - iA(if) = R(B(f)) - iR(B(if)) = R(B(f)) - iR(iB(f)) =$$

$$= R(B(f)) - iR\left\{i\left[R(B(f)) + iI(B(f))\right]\right\} =$$

$$= R(B(f)) - iR(iR(B(f)) - I(B(f))) =$$

$$= R(B(f)) + iI(B(f))$$

TEOREMA. La función R definida por $RB = A$ si $A(f) = R(B(f))$ es una función uno a uno, lineal real, que preserva norma entre todo M y todo L .

Es uno a uno, osea, $R(B) = R(C)$ implica $B=C$:

Si $R(B) = R(C) \implies A = R(B) = R(C)$ y

$B(f) = A(f) - iA(if) = R(B(f)) - iR(B(if)) = R(C(f)) - iR(C(if))$

pero esto es $R(C(f)) + iI(C(f)) = C(f)$.

Es lineal real: Sean a,b reales: $RB = A$ $RC = A'$

$$= R(rR(B(f)) - riR(B(if)) + sR(C(f)) - siR(C(if))) =$$

$$= R(rR(B(f)) + riI(B(f)) + sR(C(f)) + siI(C(f))) =$$

$$= rR(B(f)) + sR(C(f)) \ .$$

Preserva norma: Si $A = RB$

$$|A(f)| = |R(B(f))| \leq |B(f)| \qquad \text{para todo } f, \text{ asi } \|A\| \leq \|B\|$$

si $B(f) = re^{i\phi}$, entonces $B(fe^{-i\phi}) = e^{-i\phi}re^{i\phi} = r = |B(f)|$

como $B(fe^{-i\phi})$ es real

$$|A(fe^{-i\phi})| = |B(fe^{-i\phi})| = |B(f)|$$

mientras que $\|fe^{-i\phi}\| = \|f\|$. Asi

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|A(fe^{-i\phi})|}{\|fe^{-i\phi}\|} = \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|B(f)|}{\|f\|} = \|B\|$$

CAPITULO II

ALGUNAS PROPIEDADES DE ESPACIOS DE PRODUCTOS INTERIORES.

A) EQUIVALENCIA ENTRE EL CASO COMPLEJO Y EL REAL.

Se verá que, si se tiene un espacio de productos interiores complejo $[\ ,\ ]$ la parte real $(\ ,\ )$ nos define un espacio de productos interiores real y viceversa. Se puede enunciar el siguiente

TEOREMA. Un espacio lineal normado complejo L es un espacio de productos interiores complejo si y solo si el espacio lineal real asociado M es un espacio de productos interiores real. Cuando esto pasa los productos interiores (f,g) en M y $[f,g]$ en L están relacionados por las ecuaciones

$$(f,g) = R([f,g]) = \frac{1}{2}[f,g] + \frac{1}{2}[g,f]$$

$$[f,g] = (f,g) + i(f,ig) = (f,g) - i(if,g)$$

NECESIDAD.

iii') es simétrico $(g,f) = (f,g)$ y real (de iii))

$(f,f) = [f,f]$

iv') (f,f) es real ≥ 0

v') $(f,f) = 0$ si y solo si $f = 0$

ii') $(f + g,h) = (f,h) + (g,h)$ (de ii))

De i) $(cf,g) = \frac{1}{2}c[f,g] + \frac{1}{2}\bar{c}\overline{[f,g]}$, en particular

i_1') $(rf,g) = r(f,g)$ para r real

i_2') $(if,ig) = (f,g)$ (de $[if,ig] = [f,g]$)

De este último $(f,ig) = (if,iig) = -(if,g)$

SUFICIENCIA.

De i_2') y i_1') se obtiene iii) ;

rrolla $[Af,g]$ y $[iBf,g]$ y se tiene i).

$[f,f] = (f,f) + i(f,if)$ y por i_2') y i_1') y la simetría de $(,)$

$(f,ig) = -(g,if)$ por lo que $(f,if) = -(f,if)$ o sea

$(f,if) = 0$ y $[f,f] = (f,f)$

y, de v') y iv') se tiene v) y iv).

Conociendo el producto escalar $(,)$ puede expresarse la distancia

$$d(f,g) = \|f - g\| \quad \text{bajo la forma}$$

$$d(f,g) = \sqrt{(f - g, f - g)}$$

El producto escalar puede expresarse conociendo la distancia

$$\|f \pm g\|^2 = (f \pm g, f \pm g) = (f,f) \pm (g,f) \pm (f,g) + (g,g) =$$
$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 \pm 2(f,g)$$

y se obtienen

$$(1) \qquad (f,g) = \frac{1}{2}\left[\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right]$$

$$(2) \qquad (f,g) = \frac{1}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2 - \|f - g\|^2\right]$$

Se debe poder traducir en términos de distancia las condiciones impuestas a los productos escalares e inversamente.

B) PROPIEDADES DE LA NORMA INDUCIDA POR UN PRODUCTO INTERIOR.

Partiendo de (1) podemos hacer lo siguiente:

$$0 = 2(f + g,h) - 2(f,h) - 2(g,h) =$$
$$= \|f + g + h\|^2 - \|f + g\|^2 - \|h\|^2 - \|f + h\|^2 + \|f\|^2 + \|h\|^2 - \|g + h\|^2 +$$
$$+ \|g\|^2 + \|h\|^2$$

y se tiene

De i) y iii) $[cf, c_1 g] = c\bar{c}_1[\overline{f,g}]$ y de aquí

$$\|cf\|^2 = |c|^2\|f\|^2$$

i") un caso particular es $\|if\| = \|f\|$ ($(if,if) = (f,f)$)

Para s,r reales $(sf,rg) = rs(f,g)$

aplicando (1) en ambos lados se tiene

$$\|sf + rg\|^2 - s^2\|f\|^2 - r^2\|g\|^2 = rs\left\{\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right\}$$

$$\text{i}_1'') \quad \|sf + rg\|^2 = s^2\|f\|^2 + r^2\|g\|^2 + rs\left\{\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right\}$$

De ii_1'') para x,y,z reales

$$\|xf + yg + zh\|^2 = \|xf + yg\|^2 + \|yg + zh\|^2 + \|zh + xf\|^2 - \|xf\|^2 - \|yg\|^2 - \|zh\|^2$$

Por i_1'') se tiene:

ii") $$\|xf + yg + zh\|^2 = x^2\|f\|^2 + y^2\|g\|^2 + z^2\|h\|^2 + yz\left\{\|g + h\|^2 - \|g\|^2 - \|h\|^2\right\} + zx\left\{\|h + f\|^2 - \|h\|^2 - \|f\|^2\right\} + xy\left\{\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right\}$$

De ii") se obtienen ii_1''), i_1'') y i") para e real.

Para iii'), iv') y v') se tienen:

iii") $\|-f\| = \|f\|$ (un caso particular de ii")

iv") $\|f\|$ es real ≥ 0

v") $\|f\| = 0$ si $f = 0$

Así, se han obtenido propiedades para la norma partiendo de las del producto escalar.

Si ahora se supone que a todo elemento f de un espacio lineal se le asocia un elemento $\|f\|$ que verifique las condiciones i"), ii"), iv"),

(1) $$(f,g) = \frac{1}{2}\left\{\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right\}$$

Se verifica iii'); (f,g) es real por iv"); por (1) y haciendo $x = 2$, $y = z = 0$ en ii")

$$(f,f) = \frac{1}{2}\left\{\|2f\|^2 - 2\|f\|^2\right\} = \|f\|^2$$

Así, de esto y de (1), i"), iv"), v") se deducen $i'_2)$, iv'), v'). Haciendo $z = 0$ en ii") se obtiene $i''_1)$; con $r = 1$ se tiene

$$\|sf+g\|^2 = s^2\|f\|^2 + \|g\|^2 + s\left\{\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right\}$$

$$\|sf+g\|^2 - \|sf\|^2 - \|g\|^2 = s\left\{\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right\}$$

$2(sf,g) = 2s(f,g) \implies (sf,g) = s(f,g)$ (s real) esto es $i'_1)$.

c) ISOMETRIA ENTRE UN SUBESPACIO TRIDIMENSIONAL Y R^3.

Se verá que a todo sistema de cuatro puntos distintos f,g,h,k de un espacio lineal normado, se puede hacer corresponder cuatro puntos F,G,H,K de R^3. Y que todo subespacio tridimensional L' del espacio abstracto L es isométrico a R^3; siendo esto una condición necesaria y suficiente para que L sea de productos interiores.

Como todo espacio normado L se puede considerar como un espacio métrico con

$$d(f,g) = \|f-g\| \quad ,$$

por la desigualdad del triángulo

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$$

a tres elementos distintos f,g,h de L les corresponde un triángulo euclidiano FGH, con lados de longitud $d(g,h)$, $d(h,f)$, $d(f,g)$ y ángu-

De ii") tenemos, sustituyendo $\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2$ por $\|f\|^2 + \|g\|^2 - \|f-g\|^2$ y las otras dos correspondientes a g + h, h + f

$$(3) \qquad \|x(f-k) + y(g-k) + z(h-k)\|^2 =$$

$$x^2 d(k,f)^2 + y^2 d(k,g)^2 + z^2 d(k,h)^2$$

$$-yz\left[d(g,h)^2 - d(k,g)^2 - d(k,h)^2\right]$$

$$-zx\left[d(h,f)^2 - d(k,h)^2 - d(k,f)^2\right]$$

$$-xy\left[d(f,g)^2 - d(k,f)^2 - d(k,g)^2\right]$$

De nuevo, a tres elementos distintos g,h,k, le corresponden un triángulo euclidiano GHK, con lados de longitud d(h,k), d(k,g), d(g,h) con ángulo determinado por

$$d(g,h)^2 = d(k,g)^2 + d(k,h)^2 - 2d(k,g)d(k,h)\cos\alpha$$

Del mismo modo, para h,f,k, y f,g,k, se obtienen dos expresiones semejantes, de las cuales podemos despejar y sustituir en la expresión anterior (3) y obtener

$$\|x(f-k) + y(g-k) + z(h-k)\|^2 = x^2 d(k,f)^2 + y^2 d(k,g)^2 + z^2 d(k,h)^2$$
$$+ 2d(k,g)d(k,h)yz\cos\alpha$$
$$+ 2d(k,h)d(k,f)zx\cos\beta$$
$$+ 2d(k,f)d(k,g)xy\cos\gamma$$

como el primer miembro es siempre ≥ 0, si consideramos el segundo miembro como un trinomio en d(k,f)x, debe tener un discriminante ≤ 0

$$(d(k,h)z\cos\beta + d(k,g)y\cos\gamma)^2 - (y^2 d(k,g)^2 + z^2 d(k,h)^2 +$$
$$+ 2d(k,g)d(k,h)yz\cos\alpha) \leq 0$$

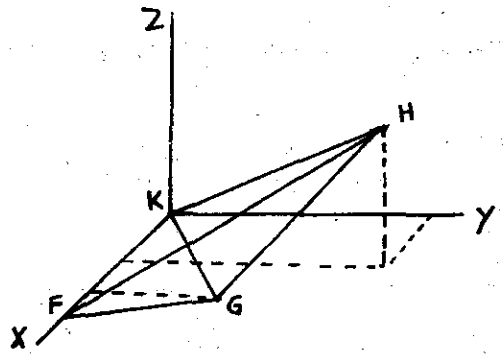
si se desarrolla, asocia y simplifica se llega a

lo cual, si se considera como trinomio en $d(k,g)y$, debe tener un discriminante ≤ 0

$$d(k,h)^2z^2(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2 - d(k,h)^2z^2\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma \leq 0$$

$$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2 - \operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma \leq 0$$

Tomemos un sistema de ejes rectangulares OXYZ. Veremos que se puede hacer coincidir K con O, F sobre el eje OX, G en el plano XOY, con coordenadas 0,0,0 para K, a",0,0 para F, a',b',0 para G y a,b,c para H.



Se verá que se pueden determinar las coordenadas de modo que

$$a'' = d(k,f)\ ; \qquad a'^2 + b'^2 = d(k,g)^2\ ; \qquad a^2 + b^2 + c^2 = d(k,h)^2\ ;$$

$$(a' - a'')^2 + b'^2 = d(f,g)^2\ ; \qquad (a - a'')^2 + b^2 + c^2 = d(f,h)^2\ ;$$

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + c^2 = d(h,g)^2$$

De las tres primeras, las tres últimas pueden reemplazarse por

$$2a'a'' = d(k,g)^2 + d(k,f)^2 - d(f,g)^2$$

$$2aa'' = d(k,h)^2 + d(k,f)^2 - d(f,h)^2$$

$$2aa' + 2bb' = d(k,g)^2 + d(k,h)^2 - d(h,g)^2$$

o también

$$a'a'' = d(k,g)d(k,f)\cos\gamma$$

$$aa'' = d(k,h)d(k,f)\cos\beta$$

$$aa' + bb' = d(k,g)d(k,h)\cos\alpha$$

$\underline{a' = d(k,g)\cos\gamma}$ $\qquad$ $\underline{a = d(k,h)\cos\beta}$

$bb' = d(k,g)d(k,h)(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)$

de las primeras ecuaciones

$b'^2 = d(k,g)^2 - a'^2 = d(k,g)^2 - d(k,g)^2\cos^2\gamma = d(k,g)^2\ \mathrm{sen}^2\gamma$

de donde:

$\underline{b' = d(k,g)\,\mathrm{sen}\,\gamma}$ $\qquad$ y $\qquad$ $\underline{b = \dfrac{d(k,h)(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}{\mathrm{sen}\,\gamma}}$

$$e^2 = d(k,h)^2 - a^2 - b^2 = d(k,h)^2\left[1 - \cos^2\beta - \frac{(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2}{\mathrm{sen}^2\gamma}\right]$$

$$= \frac{d(k,h)^2}{\mathrm{sen}^2\gamma}\left[\mathrm{sen}^2\gamma\ \mathrm{sen}^2\beta - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2\right]$$

que es ≥ 0 y se puede calcular e, teniéndose así todas las coordenadas.

Enseguida consideremos dos puntos, m,n, del espacio abstracto que sean combinación lineal de los cuatro anteriormente tomados f,g,h,k, y se verá que $d(m,n)$ es igual a la longitud entre los correspondientes M,N en R^3.

$$m = k + a_1(f - k) + b_1(g - k) + e_1(h - k)$$

$$n = k + a_2(f - k) + b_2(g - k) + e_2(h - k)$$

$a_1, b_1, e_1, a_2, b_2, e_2$, son reales, restando n de m y haciendo

$a_1 - a_2 = x$, $b_1 - b_2 = y$, $e_1 - e_2 = z$, se tiene

$$m - n = x(f - k) + y(g - k) + z(h - k)$$

los correspondientes en R^3 son:

$$M = K + a_1(F - K) + b_1(G - K) + e_1(H - K)$$

$$N = K + a_2(F - K) + b_2(G - K) + e_2(H - K)$$

De (3) se tiene

$$d(m,n)^2 = x^2 d(k,f)^2 + y^2 d(k,g)^2 + z^2 d(k,h)^2$$
$$- yz\left[d(g,h)^2 - d(k,g)^2 - d(k,h)^2\right]$$
$$- zx\left[d(h,f)^2 - d(k,h)^2 - d(k,f)^2\right]$$
$$- xy\left[d(f,g)^2 - d(k,f)^2 - d(k,g)^2\right]$$

de donde, con d_1 distancia en R^3:

$$d(m,n)^2 = x^2 d_1(K,F)^2 + y^2 d_1(K,G)^2 + z^2 d_1(K,H)^2$$
$$- yz\left[d_1(G,H)^2 - d_1(K,G)^2 - d_1(K,H)^2\right]$$
$$- zx\left[d_1(H,F)^2 - d_1(K,H)^2 - d_1(K,F)^2\right]$$
$$- xy\left[d_1(F,G)^2 - d_1(K,F)^2 - d_1(K,G)^2\right]$$

la expresión de la derecha es la correspondiente del vector en R^3

$$N - M = x(F - K) + y(G - K) + z(H - K)$$

por lo que $d(m,n) = d_1(M,N)$.

Inversamente, si ahora suponemos que el subespacio tridimensional L' de L es isométrico a R^3 se obtiene ii") y de ahí un espacio de productos interiores.

En efecto, sean f,g,h,k, cuatro puntos del subespacio tridimensional L' de L y supongamos que les podemos hacer corresponder cuatro puntos F,G, H,K, en R^3 y a dos puntos

$$m = k + a_1(f - k) + b_1(g - k) + c_1(h - k)$$
$$n = k + a_2(f - k) + b_2(g - k) + c_2(h - k)$$

dos puntos

$$M = K + a_1(F - K) + b_1(G - K) + c_1(H - K)$$

y que $\quad d(m,n) = d_1(M,N)$

se tiene, en R^3:

$$d_1(M,N) = x^2 d_1(K,F)^2 + y^2 d_1(K,G)^2 + z^2 d_1(K,H)^2$$
$$- yz\left[d_1(G,H)^2 - d_1(K,G)^2 - d_1(K,H)^2\right]$$
$$- zx\left[d_1(H,F)^2 - d_1(K,H)^2 - d_1(K,F)^2\right]$$
$$- xy\left[d_1(F,G)^2 - d_1(K,F)^2 - d_1(K,G)^2\right]$$

$$= x^2 d(k,f)^2 + y^2 d(k,g)^2 + z^2 d(k,h)^2$$
$$- yz\left[d(g,h)^2 - d(k,g)^2 - d(k,h)^2\right]$$
$$- zx\left[d(h,f)^2 - d(k,h)^2 - d(k,f)^2\right]$$
$$- xy\left[d(f,g)^2 - d(k,f)^2 - d(k,g)^2\right]$$

$$= \| x(f-k) + y(g-k) + z(h-k) \|^2$$

y se verifica ii"). De ii") salen las propiedades ") de la norma y de ellas las propiedades ') del producto interior real (1) visto al final de B).

CAPITULO III

CARACTERIZACIONES DE ESPACIOS DE PRODUCTOS INTERIORES.

Se analizarán cuatro condiciones que caracterizan a un espacio de productos interiores. De la primera (ley del paralelogramo) pueden intuirse las siguientes: Ley del paralelogramo en la bola unitaria; Relación funcional entre las normas de los lados y las diagonales del paralelogramo; y, considerando puntos de la bola unitaria, Relación funcional entre las normas de las diagonales.

De la primera, se tiene que una condición necesaria y suficiente para que un espacio normado sea de productos interiores es que todo subespacio bidimensional L' de L sea isométrico a R^2; lo que es un debilitamiento de la vista anteriormente: que todo subespacio tridimensional sea isométrico a R^3 y que nos permite, para las siguientes caracterizaciones, trabajar en subespacios bidimensionales. En (A) se vé además un segundo teorema del cual el primero es un caso especial.

A) LEY DEL PARALELOGRAMO .

TEOREMA. (J.v.N.). Una condición necesaria y suficiente para que un espacio lineal normado L sea de productos interiores es que se cumpla

(J.v.N.) $$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \qquad f,g \text{ en } L.$$

NECESIDAD. Supongamos que L es de productos interiores, entonces

$$[f + g, f + g] + [f - g, f - g] = 2([f,f] + [g,g])$$

$$[f + g, f + g] - [f - g, f - g] = 2([f,g] + [g,f])$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$R[f,g] = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2)$$

De $[\alpha f,g] = \alpha[f,g]$ para $\alpha = i$ $\quad [if,g] = i[f,g]$ y

$$R[if,g] = Ri[f,g] = -I[f,g]$$

Así, $\|f\|$ determina $R[f,g]$ y $I[f,g]$ y $[f,g]$ es único.

SUFICIENCIA. Supongamos que (J.v.N.) se cumple, definimos $[f,g]$

$$(1) \qquad \begin{cases} R[f,g] = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) \\ [f,g] = R[f,g] + iI[f,g] = R[f,g] - iR[if,g] \end{cases}$$

esto es exactamente la correspondencia entre el producto real y el producto complejo, por lo que bastaría ver que la parte real cumple las condiciones para un producto interior.

Reemplacemos f,g en (J.v.N.) por $f' \pm g$, f'' y restemos

$$\|f' + g + f''\|^2 + \|f' + g - f''\|^2 - \|f' - g + f''\|^2 - \|f' - g - f''\|^2 =$$

$$= 2\left[\|f' + g\|^2 + \|f''\|^2\right] - 2\left[\|f' - g\|^2 + \|f''\|^2\right] =$$

$$= 2\left[\|f' + g\|^2 - \|f' - g\|^2\right] = 2\left[4R[f',g]\right] = 8R[f',g]$$

reacomodando el primer miembro y considerando (1) se tiene

$$\|f' + f'' + g\|^2 - \|f' + f'' - g\|^2 + \|f' - f'' + g\|^2 - \|f' - f'' - g\|^2 =$$

$$= 4R[f' + f'',g] + 4R[f' - f'',g] = 8R[f',g]$$

y

$$(2) \qquad R[f' + f'',g] + R[f' - f'',g] = 2R[f',g] = R[2f',g]$$

la última igualdad de hacer $f = 0$ en (J.v.N.) $(\|g\|^2 = \|-g\|^2)$

y de aquí, al hacer $f = 0$ en (1) $\quad (R[0,g] = 0)$, se tiene, en la expresión anterior (2) para $f' = f''$

$$R[2f',g] = 2R[f',g]$$

Si ahora reemplazamos f',f'' por $\frac{1}{2}(f' + f'')$, $\frac{1}{2}(f' - f'')$ en (2) obtenemos

$$R[f',g] + R[f'',g] = R[f' + f'',g]$$

ii) $$[f' + f'', g] = [f', g] + [f'', g]$$

Si en la desigualdad del triángulo para espacios normados

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

hacemos $f = f''$, $g = f' - f''$ tenemos:

$$\|f'' + f' - f''\| \leq \|f''\| + \|f' - f''\|$$

$$\|f'\| - \|f''\| \leq \|f' - f''\|$$

si intercambiamos f', f'', o sea, hacemos $f = f'$, $g = f'' - f'$

$$\|f' + f'' - f'\| \leq \|f'\| + \|f'' - f'\|$$

$$\|f''\| - \|f'\| \leq \|f'' - f'\| = \|f' - f''\|$$

de los dos resultados

$$\left|\|f'\| - \|f''\|\right| \leq \|f' - f''\|$$

de aquí

$$\left|\|af \pm g\| - \|bf \pm g\|\right| \leq \|af \pm g - (bf \pm g)\| = \|(a - b)f\|$$

si reemplazamos la condición para un espacio normado

$$\|af\| = |a| \, \|f\|$$

por la condición mas debil

$$\|af\| \to 0 \quad , \quad \text{si} \quad a \to 0$$

vemos que si $a \to b$ entonces $a - b \to 0$ y

$$\|(a - b)f\| \to 0$$

esto implica que

$$\|af \pm g\| \to \|bf \pm g\|$$

o sea, $\|af \pm g\|$ es continua en a y, por (1), $R[af, g]$ y $[af, g]$ son tambien continuas en a.

Consideremos el conjunto S de todas las a para las cuales vale i)

$$[af, g] = a[f, g]$$

$1 \in S$; $a, b \in S \Rightarrow a \pm b \in S$, ya que, por ii), si

$$[af, g] = a[f, g] \qquad y \qquad [bf, g] = b[f, g]$$

y todo $a = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \in S$.

Si $a,b \in S$ y $b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \in S$

$$\left[\frac{a}{b}f,g\right] = a\left[\frac{1}{b}f,g\right] = \frac{a}{b}b\left[\frac{1}{b}f,g\right] = \frac{a}{b}[f,g]$$

y todas las a racionales están en S.

La continuidad de $[af,g]$ en a implica que S es cerrado, así todas las a reales están en S.

De la segunda ecuación de (1) $[if,g] = i[f,g]$, por lo que $i \in S$. Así, si a_1, a_2 son reales,

$$a_1 - ia_2 = a_1 + \frac{a_2}{i} \in S$$

y todos los complejos están en S y se tiene

i) $$[af,g] = a[f,g]$$

De la primera ecuación de (1) se tienen

$$R[if,ig] = R[f,g]$$

$$R[f,g] = R[g,f]$$

combinando se tiene

$$R[if,g] = R[iif,ig] = R[-f,ig] = -R[f,ig] = -R[ig,f]$$

de donde

iii) $$[f,g] = R[f,g] - iR[if,g] = R[f,g] - i(-R[ig,f]) =$$
$$= R[g,f] + iR[ig,f] = \overline{[g,f]}$$

De i) y iii)

$$[f,ag] = \overline{[ag,f]} = \bar{a}\overline{[g,f]} = \bar{a}[f,g]$$

$$[af,af] = a\bar{a}[f,f] = |a|^2[f,f]$$

$$[f,g' + g''] = \overline{[g' + g'',f]} = \overline{[g',f]} + \overline{[g'',f]} = [f,g'] + [f,g'']$$

De la primera ecuación de (1)

$$R[f,f] = \|f\|^2$$

$$R[if,f] = \frac{1}{2}(\|if + f\|^2 - \|if - f\|^2) = \frac{1}{2}(\|$$

$$= \frac{1}{4}(2\|f\|^2 - 2\|f\|^2) = 0$$

iv), v) $[f,f] = \|f\|^2 - 0 = \|f\|^2 > 0$ y se tiene

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$$

Veamos ahora que una condición necesaria y suficiente para que un espacio normado sea de productos interiores es que todo subespacio bidimensional L' de L sea isométrico a R^2.

Si L es de productos interiores tenemos, como en II.A.((1) y (2)),

$$(f,g) = \frac{1}{2}\left[\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right]$$

$$(f,g) = \frac{1}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2 - \|f-g\|^2\right]$$

y, procediendo como en II.B., podemos llegar a i_1'') que es un caso especial de ii") (cuando $z = 0$) y la demostración se reduce a un caso especial de II.C.. Sin embargo puede mencionarse la obviedad de la necesidad dado que se cumple la ley del paralelogramo (como en todo espacio euclidiano) y, para la suficiencia, si f_o, $g_o \in L$, el espacio L' de todo $af_o + bg_o$ (a,b, números complejos arbitrarios) es de dimensión ≤ 2, si suponemos que es isométrico a R^2, la condición (J.v.N.) vale, por lo que vale en particular para $f = f_o$, $g = g_o$ y, como f_o, g_o son arbitrarios, del teorema se tiene la existencia del producto interior.

TEOREMA. Sea L un espacio lineal normado. Definamos

$$C_{f,g} = \frac{1}{2}\,\frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2} \qquad f,g \in L \qquad f,g \neq 0$$

Denotemos el sup de $C_{f,g}$ por b, y su inf por a. Entonces

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \leq b \leq 2 \quad , \quad a = \frac{1}{b}$$

Los espacios de productos interiores representan el caso extremo

$0 \leq a \leq b$; de $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$C_{f,g} = \frac{1}{2}\frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2} \leq \frac{1}{2}\frac{(\|f\| + \|g\|)^2 + (\|f\| + \|g\|)^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2} =$$

$$= \frac{(\|f\| + \|g\|)^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2} = \frac{\|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\,\|g\|}{\|f\|^2 + \|g\|^2}$$

$$\leq \frac{2(\|f\|^2 + \|g\|^2)}{\|f\|^2 + \|g\|^2} = 2$$

ya que $2\|f\|\,\|g\| \leq \|f\|^2 + \|g\|^2$; y $b \leq 2$.

Si en $\|cf\| = |c|\|f\|$ hacemos $c = 2$

$$C_{f+g,f-g} = \frac{1}{2}\frac{\|f+g+f-g\|^2 + \|f+g-f+g\|^2}{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2} = 2\frac{\|f\|^2 + \|g\|^2}{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2} = \frac{1}{C_{f,g}}$$

de donde $a = \frac{1}{b}$ ya que $C_{f+g,f-g} \leq b$, $\frac{1}{C_{f,g}} \leq b$, $\frac{1}{C_{f,g}} \leq \frac{1}{a}$.

Así, $b \leq 2 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$ y $a \leq b \Rightarrow a \leq 1 \leq b$

de ambos $\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \leq b \leq 2$.

Los espacios de productos interiores se caracterizan por $a = b = 1$

$$C_{f,g} = \frac{1}{2}\frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2} = \frac{2(\|f\|^2 + \|g\|^2)}{2(\|f\|^2 + \|g\|^2)} = 1$$

B) LEY DEL PARALELOGRAMO EN LA BOLA UNITARIA .

Por lo anterior se tiene que un espacio normado es de productos interiores si y solo si todo subespacio bidimensional es un espacio de productos interiores, así, consideraremos espacios bidimensionales.

un espacio lineal normado sea de productos interiores, (J.v.N.), vista en (A), basta que se cumpla en la bola unitaria. La demostración se basa en que un espacio bidimensional real es de productos interiores si y solo si el conjunto de puntos de norma uno es una elipse.

LEMA 1 . Un espacio normado bidimensional L es un espacio de productos interiores si y solo si la esfera unitaria en L es una elipse.

NECESIDAD. Sea L un espacio de productos interiores bidimensional y sean e_1, e_2, su base; sea f de la esfera unitaria

$$f = \eta e_1 + \xi e_2 \qquad \|f\| = 1$$

$$(\eta e_1 + \xi e_2, \eta e_1 + \xi e_2) = 1$$

$$\eta^2(e_1,e_1) + 2\eta\xi(e_1,e_2) + \xi^2(e_2,e_2) = 1$$

$$A\eta^2 + 2B\eta\xi + C\xi^2 = 1$$

$$A = (e_1,e_1)\ ,\quad C = (e_2,e_2) \quad \text{positivos}$$

SUFICIENCIA. Sea L un espacio normado bidimensional con e_1, e_2 de base; $f = \eta e_1 + \xi e_2$, $\|f\| = 1$ y supongamos que se cumple

$$A\eta^2 + B\eta\xi + C\xi^2 = 1$$

con $f = \eta e_1 + \xi e_2$, $g = \eta' e_1 + \xi' e_2$, $h = \eta'' e_1 + \xi'' e_2$

hacemos

$$(3) \qquad (f,g) = \eta\eta' A + \eta\xi'(e_1,e_2) + \xi\eta'(e_2,e_1) + \xi\xi' C$$

$$= \eta\eta' A + \tfrac{1}{2} b\eta\xi' + \tfrac{1}{2} b\xi\eta' + \xi\xi' C$$

iii') $(f,g) = (g,f)$ (todo es conmutativo)

i') desarrollando

$$(af,g) = (a[\eta e_1 + \xi e_2], \eta' e_1 + \xi' e_2)$$

$$(f + g,h) = (\eta e_1 + \zeta e_2 + \eta' e_1 + \zeta' e_2,\ \eta'' e_1 + \zeta'' e_2)$$

iv'), v') $\qquad (f,f) = (\|f\| \frac{f}{\|f\|}, \|f\| \frac{f}{\|f\|}) = \|f\|\|f\|(\frac{f}{\|f\|}, \frac{f}{\|f\|}) =$

$$= \|f\|^2(\frac{\eta^2}{\|f\|^2} A + \frac{b\eta\zeta}{\|f\|^2} + \frac{\zeta^2}{\|f\|^2} C) =$$

$$= \|f\|^2(1) = \|f\|^2 > 0$$

LEMA 2. Si C es una curva convexa cerrada simétrica, existe una elipse única de área mínima circunscrita a C.

Sean E_1, E_2, elipses de área mínima circunscritas a C, hagamos una transformación afín reduciendo ambas elipses a los ejes principales, de modo que las ecuaciones para ellas puedan escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad ax^2 + by^2 = 1$$

como son de igual área y el área de una elipse es $\pi a'b'$, donde a', b' son los semiejes, se tiene que el área de la primera es π y de la segunda $\frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$ $(a = \frac{1}{a'^2},\ b = \frac{1}{b'^2})$ y, por ser de igual área

$$\pi = \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \Rightarrow ab = 1$$

La condición de que contienen C muestra que

$$x^2 + y^2 \leq 1 \qquad ax^2 + by^2 \leq 1 \quad \text{para } (x,y) \text{ en } C$$

sumando se tiene que, para puntos de C,

$$\frac{(a + 1)}{2} x^2 + \frac{(b + 1)}{2} y^2 \leq 1$$

y la elipse $\qquad \frac{a + 1}{2} x^2 + \frac{b + 1}{2} y^2 = 1 \qquad$ contiene a C.

El área de esta elipse es

$$\pi\left(\frac{2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{b+1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}}$$

a menos que $a = b = 1$ y la elipse mínima es única.

LEMA 3. La elipse mínima circunscrita a una curva C convexa cerrada simétrica, toca C a lo menos en cuatro puntos.

Si la elipse mínima E se escribe en la forma $x^2 + y^2 = 1$, donde $(1,0)$ es un punto de contacto de C y E, entonces las elipses E_ε con ecuaciones

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)y^2 = 1$$

tambien tienen área mínima y no contienen C.

Para cada $\varepsilon > 0$ sea P_ε un punto de C que no esté en E_ε; entonces hay una sucesión $\varepsilon_n \to 0$ tal que P_{ε_n} converge a algun punto P. Como todas las P_ε están en C, P está en C; además P_ε está a poco menos de ε de E, así P está tambien en E.

Las intersecciones de E y E_ε tienen por segundas coordenadas (y)

$$\pm \frac{1}{(2+\varepsilon)^{1/2}}$$

de aquí, el valor absoluto de la coordenada y de P es al menos $\frac{1}{2^{1/2}}$.

De aquí, P no es ninguno de los puntos $(\pm 1,0)$ y está sobre C y E. Por simetría hay al menos cuatro puntos de contacto de C y E.

TEOREMA 1. Si L es un espacio real lineal bidimensional y C es el conjunto de puntos de norma uno, C es una elipse si y solo si

(D) $$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 4 \qquad \text{si} \quad \|f\| = \|g\| = 1$$

Antes de pasar a la demostración del teorema veámos la definición siguiente: Sea E un conjunto convexo. Entonces

$$P_E(f) = \inf\left\{ r \,\middle|\, \frac{f}{r} \in E, \quad r > 0 \right\}$$

es una funcional convexa finita, llamada <u>funcional de Minkowski</u> del con-

el lema 3, sea C el conjunto de puntos f para los cuales
la elipse de área mínima circunscrita a C.

nueva norma | | en L de modo que E es el conjunto de to-
para las cuales |f| = 1. Esto puede hacerse por la funcional

$|f| = \inf\left\{ r \mid \frac{f}{r} \in E,\ r > 0 \right\}$. Es facil ver que si $f \in E$,

$\|f\| = 1$.

por lema 1, | | puede ser definida de un producto interior,
(D) vale para | | . Como C está dentro de E, $\|f\| \geq |f|$
Sean f y $g \neq \pm f$ dos puntos de contacto de C y E. Entonces

$$4 = |f+g|^2 + |f-g|^2 \leq \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 4$$

$|f+g|$, $\|f-g\| = |f-g|$.

C y E se unen en dos puntos, entonces se unen en dos puntos
damente a medio camino entre los puntos originales. Repitiendo
por inducción, C y E concuerdan en un conjunto denso de pun-
E, y se tiene demostrada la suficiencia. La necesidad es por
el teorema (J.v.N.). De lo anterior se tiene el debilitamiento
ción (J.v.N.)

espacio normado L es un espacio de productos interiores si
satisface la condición

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 4 \qquad \text{si } \|f\| = \|g\| = 1.$$

debilitamiento más en términos de propiedades de ortogonalidad;
pliará en el capítulo IV.

Sea L un espacio de productos interiores y sean $f,g \in L$.
se dice que f es ortogonal a g, denotado $f \perp g$, si $(f,g) = 0$.
de productos interiores y $f,g \in L$ son ortogonales se tiene:

$\|f + g\| = \|f - g\|$ (ortogonalidad isosceles)

$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ (ortogonalidad Pitagórica)

$\|f + tg\| = \|f - tg\|$ (ortogonalidad de Roberts)

TEOREMA. Si la ortogonalidad isosceles implica la ortogonalidad Pitagórica, esto es, si

$\|f + g\| = \|f - g\|$ implica $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

entonces L es un espacio de productos interiores.

Supóngase que $\|f\| = \|g\| = 1$, entonces $f + g$, $f - g$ son ortogonales isosceles, ya que

$\|f + g + f - g\| = \|2f\| = 2\|f\| = 2$

$\|f + g - f + g\| = \|2g\| = 2\|g\| = 2$

de ambas

$$\|(f + g) + (f - g)\| = \|(f + g) - (f - g)\|$$

si esto implica que sean ortogonales pitagóricos, se tiene

$$4 = \|2f\|^2 = \|(f + g) + (f - g)\|^2 = \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2$$

que es la condición (D); así, es de productos interiores.

El inverso tambien es cierto, esto es, si L es de productos interiores entonces la ortogonalidad isósceles implica la ortogonalidad pitagótica.

Si L es de productos interiores, se tiene

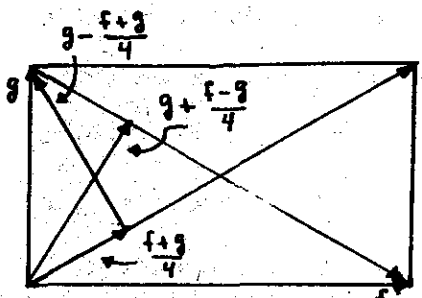
$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 4$ para $\|f\| = \|g\| = 1$

$2\|f + g\|^2 = 4$ (puesto que $\|f + g\| = \|f - g\|$, ort. isosc.)

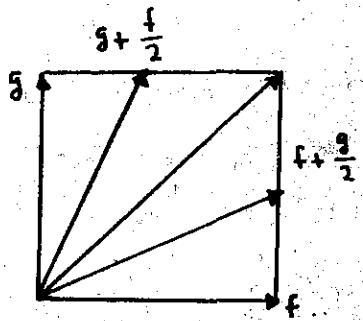
y $\|f + g\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

C) UNA RELACION FUNCIONAL ENTRE LOS LADOS Y LAS DIAGONALES DEL PARALELOGRAMO.

La condición (J.v.N.) puede debilitarse por otras condiciones geométricas que pueden ser resumidas en una relación funcional de las normas de dos elementos del espacio y las diagonales del "paralelogramo" formado por ellos. Dos condiciones geométricas son las siguientes: 1) Un triángulo es isósceles sii y solo si dos de sus medianas son iguales. 2) Si los tres lados de un triángulo son iguales respectivamente a los tres lados de otro, sus medianas correspondientes son iguales. Podemos visualizarlos en las figuras siguientes y la condición respectiva.



1) $\|f+3g\|=\|f-3g\|$ $(\|f+g\|=\|f-g\|)$



2) $\|f+\frac{1}{2}g\|=\|\frac{1}{2}f+g\|$ $(\|f\|=\|g\|)$

Podemos reemplazar la condición (J.v.N.) por la siguiente:

(R.L.) Existe una función no trivial de tres variables reales $F(u,v,w)$ tal que, para todo f,g en L

$$\|f+g\| = F(\|f\|,\|g\|,\|f-g\|)$$

Esto establece que la longitud de la mediana $\frac{\|f+g\|}{2}$ está completamente determinada por las longitudes de los tres lados $\|f\|, \|g\|, \|f-g\|$.

La demostración de la suficiencia de la condición anterior se basa en el teorema que se enunciará enseguida del cual; aunque la necesidad es inmediata, la suficiencia se demuestra con la ayuda de una serie de lemas que llevan a la condición de que la bola unitaria es una elipse. No será analizada aquí.

TEOREMA. Una condición necesaria y suficiente para que un espacio lineal

$\gamma \neq 0, \pm 1$, tal que $f,g \in L$ y

$\|f + g\| = \|f - g\|$ implica $\|f + \gamma g\| = \|f - \gamma g\|$.

Una formulación equivalente se obtiene haciendo

$$f' = f + g \quad , \quad g' = f - g \quad , \quad \gamma' = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}$$

Existe una constante $\gamma' \neq 0,1$ tal que $f',g' \in L$ y

$\|f'\| = \|g'\|$ implica $\|f' + \gamma' g'\| = \|\gamma' f' + g'\|$.

La necesidad de (R.L.) se vé de (J.v.N.).

SUFICIENCIA. Consideremos $f,g \in L$ con $\|f\| = \|g\|$. Hagamos

$f' = f$, $f'' = g$, $g' = g'' = f + g$; entonces $g' - f' = g$, $g'' - f'' = f$.

Así, se tiene $\|f'\| = \|f''\|$, $\|g'\| = \|g''\|$, $\|g' - f'\| = \|g'' - f''\|$.

Si aplicamos (R.L.) tenemos

$\|g' + f'\| = \|g'' + f''\|$ o $\|2f + g\| = \|f + 2g\|$

esto es, $\|f\| = \|g\|$ implica $\|2f + g\| = \|f + 2g\|$

Por la segunda formulación del teorema, el espacio L es de productos interiores.

D) RELACION FUNCIONAL ENTRE LAS NORMAS DE LAS DIAGONALES CONSIDERANDO ELEMENTOS DE LA ESFERA UNITARIA.

De la condición (D) $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 4$, para $\|f\| = \|g\| = 1$, se vé quesi L es un espacio de productos interiores, existe una función que manda $\|f + g\|$ en $\|f - g\|$ y visceversa y que es de la forma $F(x) = (4 - x^2)^{1/2}$. F está definida sobre el intervalo $[0,2]$ en vista

$F(\|f + g\|) = \|f - g\|$ se obtiene sustituyendo $\|f + g\|$ por su igual $(4 - \|f - g\|^2)^{1/2}$.

TEOREMA. Una condición necesaria y suficiente para que un espacio lineal normado L sea de productos interiores es que exista alguna función real F de una variable real, definida sobre el intervalo numérico $[0,2]$ tal que, si P y Q son puntos de la esfera unitaria para L, entonces

$$(S) \qquad F(\|P + Q\|) = \|P - Q\|$$

La NECESIDAD se vé en el párrafo anterior. La SUFICIENCIA se demostrará por inducción, haciendo ver que la esfera unitaria coincide con un círculo de radio 1 y centro en el origen. Se hace la consideración que L es bi-dimensional.

Denotemos por M la esfera unitaria para L y sea P algún punto de M. Consideremos un punto P' de M y hagamos

$$G(t) = \frac{P + t(P' - P)}{\|P + t(P' - P)\|} \quad , \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Es una función contínua de t que describe a M y que va de P a P' sobre la esfera unitaria; así

$$\left\| P - \frac{P + t(P' - P)}{\|P + t(P' - P)\|} \right\| \quad \text{va de } 0 \text{ a } 2.$$

Denotemos por Q a la $G(t)$ tal que $\|P - G(t)\| = 1$. Establescamos un sistema coordenado con P en $(1,0)$ y Q en $(\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3})$. Denotemos por C el círculo con radio 1 y centro el origen.

P y Q son comunes a C y M. Como $|P - Q| = \|P - Q\| = 1$, se tiene que $P - Q$ pertenece a C y M. Por la simetría de M, $Q - P$, $-P$, $-Q$, son tambien comunes a C y M. De aquí

$$\|P - Q\| = \|Q - (Q - P)\| = \|Q - P - (-P)\| = \|-P - (-Q)\| = \|-Q - (P - Q)\| =$$

suma (diferencia) de dos puntos determina la norma de su diferencia (suma); por lo que

$$\|P + Q\| = \|2Q - P\| = \|Q - 2P\| = \|- P - Q\| = \|P - 2Q\| = \|2P - Q\|$$

(siendo P, Q, P − Q, de la esfera unitaria, por la ley del paralelogramo se tiene que la última igualdad es $(3)^{1/2}$). Utilizando la condición, denotemos $\|P + Q\|$ por c . $\frac{2Q - P}{c}$ y $\frac{Q - 2P}{c}$ pertenecen a la esfera unitaria. Veamos la norma de su diferencia y la norma de su suma

$$\left\| \frac{2Q - P}{c} - \frac{Q - 2P}{c} \right\| = \left\| \frac{Q + P}{c} \right\| = 1$$

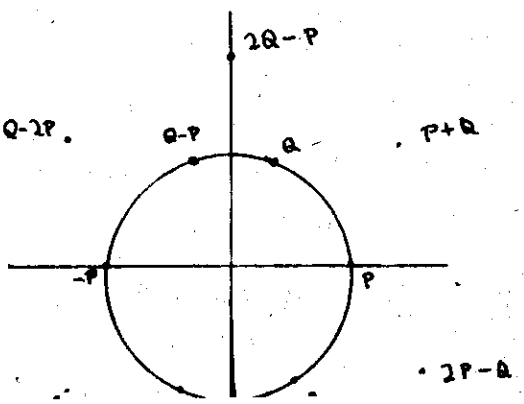
$$\left\| \frac{2Q - P}{c} + \frac{Q - 2P}{c} \right\| = \left\| \frac{3Q - 3P}{c} \right\| = \frac{3}{c}$$

esto implica que $F(1) = \frac{3}{c}$, como $\|P - Q\| = 1$ y $\|P + Q\| = c$,

$F(1) = c$ y $c = (3)^{1/2}$

como $|P + Q| = \left[(1 + \cos\frac{\pi}{3})^2 + (\operatorname{sen}\frac{\pi}{3})^2\right]^{1/2} = \left[1 + 2\cos\frac{\pi}{3} + 1\right]^{1/2} = 3^{1/2}$

se tiene $|P + Q| = \|P + Q\|$, por lo que el punto $\frac{P + Q}{\|P + Q\|}$ pertenece a C y M . Por un argumento similar $\frac{2Q - P}{\|2Q - P\|}$ pertenece a C y M, y así para los demás; por lo que $\exp\left(\frac{2\pi i n}{12}\right)$ pertenece a C y M para n = 1, 2, 3, ... , 12.



El intervalo numérico $[0,2]$ es el dominio y el rango de F. Además $F(0) = 2$, $F(2) = 0$, $F(F(x)) = x$ para cada x en $[0,2]$.

Denotemos por H la transformación del intervalo numérico $[0,\pi]$ al conjunto F tal que

$$H(\theta) = \left(\left\| P - \frac{P\cos\theta + Q\operatorname{sen}\theta}{\|P\cos\theta + Q\operatorname{sen}\theta\|}\right\|, \left\| P + \frac{P\cos\theta + Q\operatorname{sen}\theta}{\|P\cos\theta + Q\operatorname{sen}\theta\|}\right\|\right)$$

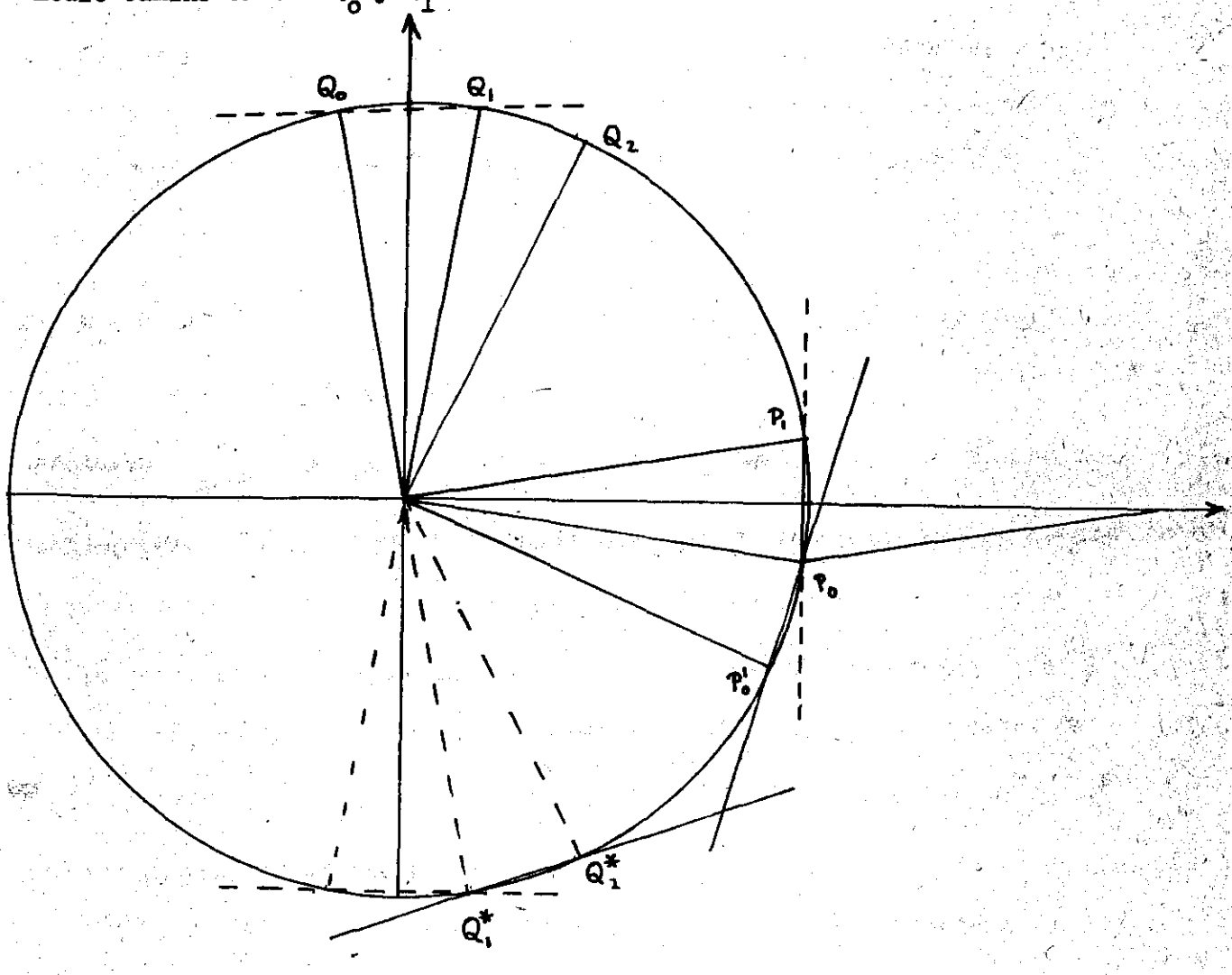
La transformación H es continua, puesto que las transformaciones coordenadas son continuas; ya que se trata de sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas y, además, $\| \ \|$ es continua ; esto se vé de la desigualdad del triángulo $\|x + x_o\| \leq \|x\| + \|x_o\|$ (sustituyendo x por $x - x_o$ y luego x_o por $x_o - x$, se llega a $\left|\|x\| - \|x_o\|\right| \leq \|x - x_o\|$).

El dominio de H, $[0,\pi]$ es cerrado y compacto. El rango de H es F; por lo que F es un conjunto cerrado y compacto. Y se sigue que F es continua; por ser cerrado contiene a todos sus puntos límite, por ser compacto todo subconjunto infinito debe contener al menos un punto límite, así no puede ser discontinua porque toda sucesión (subconjunto infinito de F) tiene un punto límite que es de F. De aquí se sigue que F es decreciente en $[0,2]$; si $0 \leq x < y \leq 2$ y $F(x) \leq F(y)$, la continuidad y $F(2) = 0$ implican que hay una y' tal que $x < y \leq y' \leq 2$ y $F(x) = F(y')$, lo cual es una contradicción puesto que F es su propia inversa.

Supongamos que n es un entero positivo y que la parte común de M y C tiene como un subconjunto algun conjunto de puntos K consistiendo de $6 \cdot 2^n$ puntos uniformemente espaciados sobre C. Se ha mostrado que esta suposición es válida para $n = 1$, se mostrará que vale para $n + 1$, implicando que la parte comun de M y C es densa en C y que M es C.

Consideremos cuatro puntos de K: P . P_1 . Q . Q_1 . colocados como indica

así como P_o y P_1 (el que dos puntos de K son adyacentes uno a otro sobre C indica que para algun arco de C conteniendo los dos puntos, no hay puntos de K entre ellos sobre ese arco). Las coordenadas están rotadas de manera que (1,0) esté a medio camino entre P_o y P_1 y (0,1) a medio camino entre Q_o y Q_1.



Denotemos con P' a $\dfrac{P_o + P_1}{\|P_o + P_1\|}$ y con Q' a $\dfrac{Q_o + Q_1}{\|Q_o + Q_1\|}$

se mostrará primero que $|P'| = |Q'|$. Notemos que

$$\|P_o + P_1\| = \frac{|P_o + P_1|}{|P'|} \qquad \|Q_o + Q_1\| = \frac{|Q_o + Q_1|}{|Q'|}$$

dose una contradicción. El caso $|Q'| > |P'|$, daría una contradición de una manera similar.

Denotemos con P'_o el punto de K adyacente a P_o sobre C y con I el número $\frac{|P_o + P_1|}{2}$. M es la frontera de un conjunto de puntos convexo; los elementos de dicho conjunto son tales que $\|x\| < 1$. Para x, y en el conjunto y $0 \leq t \leq 1$, el segmento que une x con y, $tx + (1 - t)y$, está dentro de M; esto es, $\|tx + (1 - t)y\| < 1$, $0 \leq t \leq 1$

$\|tx + (1 - t)y\| \leq t\|x\| + (1 - t)\|y\| < t + 1 - t = 1$

Si $z \in M \Rightarrow \|z\| = 1$; $I = \frac{|P_o + P_1|}{2} \leq \frac{1}{2}(|P_o| + |P_1|) = 1$, así, $|z| \geq I$ para cada punto z de M.

Denotemos $\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}$ por θ, θ es la mitad del ángulo entre dos miembros cualesquiera adyacentes de K. Denotemos con U la distancia del origen al punto sobre el eje X que pertenece a la linea a traves de P_o y P'_o. Por la convexidad $|z| \leq U$ para cada punto z de M. Denotamos: con A y B a $|P_o - P_1|$ y $|P_o + P_1|$ respectivamente; con Q_2 al miembro de K adyacente a Q_1; con s la pendiente de la linea a traves de Q_1^* y Q_2^* donde "*" indica conjugado complejo.

$I = \cos\theta$; $A = |P_o - P_1| = 2\operatorname{sen}\theta$; $B = |P_o + P_1| = 2\cos\theta$;

$U = I + x$ donde $x = \tan 2\theta \operatorname{sen}\theta$

ya que el ángulo entre $P_o - P_1$ y la recta que pasa por P'_o y P_o es 2θ. Así,

$U = I + x = \cos\theta + \tan 2\theta \operatorname{sen}\theta = \cos\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta} \operatorname{sen}\theta = \ldots = \frac{\cos\theta}{\cos 2\theta} > 1$

$|Q_5 - Q_5^*| = 2\cos(3\theta)$

magnitud $180^{\circ} - 2\theta$ y los ángulos exteriores son de magnitud 2θ. El ángulo exterior que forma la recta que pasa por Q_1^* y Q_2^* (con pendiente s) está formado con la recta horizontal que pasa por Q_o^* y Q_1^* por lo que

$$s = \tan 2\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}$$

P_1 y Q_1 tienen coordenadas $(\frac{B}{2}, \frac{A}{2})$, $(\frac{A}{2}, \frac{B}{2})$ respectivamente. Como coseno es decreciente sobre $[0,\pi]$ y θ, 3θ están en este intervalo, se tiene

$\cos\theta > \cos 3\theta \Rightarrow \cos\theta + \cos 3\theta > 2\cos 3\theta \Rightarrow \frac{\cos\theta + \cos 3\theta}{2} >$

$> \cos 3\theta$ además

$0 < \cos 3\theta = \cos\theta \cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta < \cos\theta \cos 2\theta$ y

$$2\cos 2\theta > \frac{2\cos 3\theta}{\cos\theta}$$

como $Q_o = -Q_1^*$ $\|Q_1 - Q_1^*\| = \|Q_o + Q_1\| = \frac{|Q_o + Q_1|}{|Q'|} = \frac{2\cos\theta}{|Q'|}$. Así

$$\|Q_1 - Q_1^*\| = \frac{2\cos\theta}{|Q'|} > \frac{2\cos\theta}{|P'|} = \|P_o + P_1\| \qquad (|P'| > |Q'|)$$

y lo anterior es

$$\geqslant \frac{2\cos\theta}{U} = \frac{2\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}} = 2\cos 2\theta > \frac{2\cos 3\theta}{\cos\theta}$$

(de la convexidad $|P'| = \frac{|P_o + P_1|}{\|P_o + P_1\|}$ que es algún $|z|$ con $z \in M$ y, como $|z| \leqslant U$). Lo anterior es

$$= \frac{|Q_2 - Q_2^*|}{I} \geqslant \|Q_2 - Q_2^*\| \qquad (I \leqslant 1)$$

($\frac{|Q_2 - Q_2^*|}{\|Q_2 - Q_2^*\|}$ es algun $|z|$ con $z \in M$ como $|z| \geqslant I$ $\Longrightarrow$

$|Q_o - Q_o^*|$

De lo anterior

$$\| Q_1 - Q_1^* \| > \| P_o + P_1 \| > \| Q_2 - Q_2^* \|$$

Esto implica que entre las dos cuerdas verticales $Q_1Q_1^*$ y $Q_2Q_2^*$ de M, hay alguna cuerda vertical R_1R_2 de M, (continuidad de $\| \ \|$) R_1 entre Q_1 y Q_2 sobre M, tal que

$$\| R_1 - R_2 \| = \| P_o + P_1 \|$$

Por la hipótesis $(F(\|R_1 - R_2\|) = \|R_1 + R_2\|)$, $\|R_1 + R_2\| = \|P_o - P_1\|$

y se tiene

$$\frac{F(\|P_o+P_1\|) - F(\|Q_o+Q_1\|)}{\|Q_o+Q_1\| - \|P_o+P_1\|} = \frac{\|P_o-P_1\| - \|Q_o-Q_1\|}{\|Q_o+Q_1\| - \|P_o+P_1\|} = \frac{\frac{A}{|Q'|} - \frac{A}{|P'|}}{\frac{B}{|Q'|} - \frac{B}{|P'|}} = \frac{A}{B}$$

$$= \frac{\|R_1+R_2\| - \|Q_o-Q_1\|}{\|Q_o+Q_1\| - \|R_1-R_2\|} = \frac{\|R_1+R_2\| - \frac{A}{|P'|}}{\frac{B}{|Q'|} - \frac{|R_1-R_2|}{|Q'|}}$$

Denotemos a R_1 y R_2 con (x, r_1) y $(x, -r_2)$ respectivamente y supongamos que $r_1 \geq r_2$ (el caso $r_2 \geq r_1$ es como este). Denotemos $r_1 - r_2$ por d. El punto Q_1^* es $(\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ y la linea a traves de Q_1^* y Q_2^* tiene pendiente s. R_2 no puede estar arriba de esta linea y la diferencia máxima entre r_1 y r_2 dejando x fija ocurre cuando R_1 y R_2 están cada uno tan alto como es posible. Como la linea a traves de Q_o y Q_1 es paralela al eje X y, como R_1 no puede estar arriba de esta linea, $r_1 \leq \frac{B}{2}$. Similarmente, $r_2 \geq \frac{B}{2} - s(x - \frac{A}{2})$ ya que si consideramos el punto $(x, -\frac{B}{2} + h)$ de la linea que pasa por Q_1^* y Q_2^* se tiene que,

como $s = -\frac{h}{\ }$

y, como R_2 no puede estar arriba de esta linea $r_2 \geq \frac{B}{2} - s(x - \frac{A}{2})$

así,

$$d = r_1 - r_2 \leq \frac{B}{2} - (\frac{B}{2} - s(x - \frac{A}{2})) = s(x - \frac{A}{2})$$

Denotemos con r' a $\frac{B}{2} - s(x - \frac{A}{2})$; lo cual dá

$$\frac{A}{B} = \frac{\|R_1+R_2\| - \frac{A}{|P'|}}{\frac{B}{|Q'|} - \frac{|R_1-R_2|}{|Q'|}} = \frac{\|R_1+R_2\| - \frac{A}{|P'|}}{\frac{B}{|Q'|} - \frac{(r_1+r_2)}{|Q'|}} \geq \frac{\|R_1+R_2\| - \frac{A}{|P'|}}{\frac{B}{|Q'|} - \frac{(2r'+d)}{|Q'|}}$$

ya que, como $r' \leq r_2 \Rightarrow 2r' \leq 2r_2 \Rightarrow 2r' + r_1 \leq 2r_2 + r_1$

$\Rightarrow$ $2r' + r_1 - r_2 \leq r_1 + r_2$ o sea $2r' + d \leq r_1 + r_2$.

como $r_1 \leq \frac{B}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = d \leq \frac{B}{2} - r_2$; como $r' \leq r_2$

$\Rightarrow \frac{B}{2} - s(x - \frac{A}{2}) \leq r_2 \Rightarrow \frac{B}{2} - r_2 \leq s(x - \frac{A}{2}) \Rightarrow d \leq s(x - \frac{A}{2})$

Si denotamos por I_1 la linea a traves del origen y el punto $R_1 + R_2$, la pendiente s_1 de esta linea es $\frac{d}{2x}$, y de la desigualdad anterior

$$s_1 \leq \frac{s(x - \frac{A}{2})}{2x} < \frac{s}{2} < s$$

Esto pone de manifiesto que I_1 no está tan empinada como la linea I_2 a traves de P_o y el punto $(|P'|, 0)$ así, I_1 y I_2 tienen en comun algun punto z .

Si I_2 es vertical, entonces $|P'| = I$ y, como $|Q_o + Q_1| = |P_o + P_1|$, $\|Q_o + Q_1\| \leq 2$ se tiene $\frac{|P_o + P_1|}{2} \leq \frac{|Q_o + Q_1|}{\|Q_o + Q_1\|}$, o sea,

Por lo tanto I_2 no es vertical y tiene pendiente positiva s_2 .

Notemos que $\|R_1 + R_2\| \geq \frac{|R_1 + R_2|}{|z|}$ ya que $|z| \geq \frac{|R_1 + R_2|}{\|R_1 + R_2\|}$.

Resolvamos para $z(x_o,y_o)$: $s_1 = \frac{d}{2x}$, entonces

$$y_o = \frac{d}{2x} x_o \qquad \text{(recta } I_1\text{)}$$

$$y_o = s_2(x_o - |P'|) \quad \text{(recta } I_2\text{)}$$

de donde $$x_o = \frac{2xs_2|P'|}{2s_2x - d}$$

sustituyendo se tiene $$z(x_o,y_o) = \left(\frac{2xs_2|P'|}{2xs_2 - d} , \frac{ds_2|P'|}{2xs_2 - d}\right)$$

y $$|z| = \frac{|P'|\, s_2(4x^2 + d^2)^{1/2}}{2s_2x - d} \quad . \quad \text{Así,}$$

$$\|R_1 + R_2\| \geq \frac{|R_1 + R_2|}{|z|} = \frac{(4x^2 + d^2)^{1/2}}{\frac{|P'|\, s_2(4x^2 + d^2)^{1/2}}{2s_2x - d}} = \frac{2s_2x - d}{|P'|\, s_2}$$

de aquí, la desigualdad (*) puede llevarse un paso mas :

$$\frac{A}{B} \geq \frac{\|R_1+R_2\| - \frac{A}{|P'|}}{\frac{B}{|Q'|} - \frac{(2r'+d)}{|Q'|}} \geq \frac{\frac{2s_2x-d}{|P'|\,s_2} - \frac{A}{|P'|}}{\frac{B-2r'-d}{|Q'|}} = \frac{|Q'|\left(2x-A-\frac{d}{s_2}\right)}{\left[B-2\left(\frac{B}{2}-s\left(x-\frac{A}{2}\right)\right)-d\right]|P'|}$$

$$= \frac{|Q'|\left(2x-A-\frac{d}{s_2}\right)}{|P'|(2x-A)s-d|P'|} \geq \frac{|Q'|\left(2x-A-\frac{d}{s_2}\right)}{|P'|\,(2x-A)\,s}$$

donde se ha sustituído $r' = \frac{B}{2} - s\left(x - \frac{A}{2}\right)$

$s_2' \leq s_2$. Puesto que $s_2' = \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$ (ya que el ángulo de la linea es complemento de 2θ) se sigue que

$$\frac{d}{s_2} \leq \frac{(x - \frac{A}{2})s}{s_2'} = \frac{(x - \frac{A}{2})\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}}{\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}} = (x - \frac{A}{2})\frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{\cos^2(2\theta)} < x - \frac{A}{2}$$

(ya que lo más que puede valer θ y que es cuando seno vale más y coseno menos es 15° y entonces $\frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{\cos^2(2\theta)} = \frac{1}{3}$)

La cadena de desigualdades puede ser terminada

$$\frac{A}{B} \geq \frac{|Q'|(2x - A - \frac{d}{s_2})}{|P'|(2x-A)s} = \frac{|Q'|(2x-A) - |Q'|\frac{d}{s_2}}{|P'|(2x-A)s} = \frac{|Q'|}{|P'|s} - \frac{|Q'|\frac{d}{s_2}}{|P'|(2x-A)s}$$

$$\geq \frac{|Q'|}{|P'|s} - \frac{|Q'|\frac{d}{s_2}}{|P'|2\frac{d}{s_2}s} = \frac{|Q'|}{2|P'|s} \geq \frac{I}{2Us}$$

ya que $|Q'| \geq I$ puesto que $\frac{|Q_o + Q_1|}{\|Q_o + Q_1\|} \geq \frac{|P_o + P_1|}{2} = I$ y $|P'| \leq U$

(porque $|P'| = \frac{|P_o + P_1|}{\|P_o + P_1\|}$ es un $|z|$ donde $z \in M$ y $|z| < U$, por la convexidad) de ahí, lo anterior es

$$\frac{I}{2Us} = \frac{\cos\theta}{\frac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}} = \frac{\cos^2(2\theta)}{2\operatorname{sen} 2\theta}$$

puesto que $A = 2\operatorname{sen}\theta$, $B = 2\cos\theta$; de lo anterior se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} > \frac{\cos^2(2\theta)}{2\operatorname{sen} 2\theta}$$

multiplicando ambos lados por el producto de los denominadores y simplificando, obtendremos

DE $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} > \frac{\cos^2 2\theta}{2\operatorname{sen}2\theta}$ se tiene

$$\tan\theta > \frac{\cos(2\theta)\cot(2\theta)}{2} = \frac{\cos(2\theta)}{2\tan(2\theta)}$$

como $\theta = \frac{\pi}{6\cdot 2^n}$, el mayor valor posible para θ es $\frac{\pi}{12}$

y para este valor la desigualdad es máxima, ya que $\tan\theta$ tiene su máximo valor y el cociente $\frac{\cos(2\theta)}{\tan(2\theta)}$ su mínimo valor; para $n > 1$ $\tan\theta$ dismimuye, mientras que $\frac{\cos(2\theta)}{\tan(2\theta)}$ aumenta; para $n=1$ se tiene

$$2(.2679) = .5358 > \frac{\sqrt{3}/2}{1/\sqrt{3}} = \frac{3}{2}.$$

Esto es una contradicción causada por la suposición que $|P'| \neq |Q'|$ y prueba que $|P'| = |Q'|$.

Para cada entero k, hagamos $H(k)$ el punto $\frac{\exp(ik\theta)}{\exp(ik\theta)}$ y denotemos por $A(k)$ a $|H(k)|$. Todos los puntos $H(k)$ pertenecen a M y, si k es impar, $H(k)$ pertenece a K y de aquí a C (en este caso $H(k)$ coincidiría con alguno de los puntos ya considerados, de ángulos: θ, 3θ, 5θ, ...). Usando los resultados obtenidos, se mostrará que C contiene todos los puntos $H(k)$, implicando que existen $6\cdot 2^{n+1}$ puntos de M - uniformemente espaciados sobre C .

Como $\frac{\pi}{2} = 3\cdot 2^n\theta$ los puntos $H(2k)$ y $H(2k + 3\cdot 2^n)$ están relacionados el uno al otro como lo están P' y Q' en lo anterior; así, para todo entero k, $A(2k) = A(2k + 3\cdot 2^n)$. Si k es un entero impar, ambos $H(k)$ y $H(k + 3\cdot 2^n)$ pertenecen a K . Así, $A(k) = A(k + 3\cdot 2^n)$ para todo entero k .

Supongamos que j es un entero . $0 < j < n$, y, para cada entero k

que $j < n$, puede ser mostrado que $A(k) = A(k + 3\cdot 2^{n} - (j + 1))$ para todo entero k. Sean X, Y, U, V, como sigue:

$$X = \| H(k) + H(k + 3\cdot 2^{n-j}) \| = \frac{2A(k)\cos(3\cdot 2^{n-j-1}\theta)}{A(k + 3\cdot 2^{n-j-1})}$$

$$Y = \| H(k) - H(k + 3\cdot 2^{n-j}) \| = \frac{2A(k)\operatorname{sen}(3\cdot 2^{n-j-1}\theta)}{A(k + 3\cdot 2^{n-j-1} + 3\cdot 2^{n})}$$

$$= \frac{2A(k)\operatorname{sen}(3\cdot 2^{n-j-1}\theta)}{A(k + 3\cdot 2^{n-j-1})}$$

$$U = \| H(k + 3\cdot 2^{n-j-1}) + H(k + 3\cdot 2^{n-j-1} + 3\cdot 2^{n-j}) \|$$

$$= \frac{2A(k + 3\cdot 2^{n-j-1})\cos(3\cdot 2^{n-j-1}\theta)}{A(k)}$$

$$V = \| H(k + 3\cdot 2^{n-j-1}) - H(k + 3\cdot 2^{n-j-1} + 3\cdot 2^{n-j}) \|$$

$$= \frac{2A(k + 3\cdot 2^{n-j-1})\operatorname{sen}(3\cdot 2^{n-j-1}\theta)}{A(k)}$$

si se supone que $X \neq U$, entonces

$$\frac{F(X) - F(U)}{X - U} = \frac{Y - V}{X - U} = \frac{\operatorname{sen}(3\cdot 2^{n-j-1}\theta)}{\cos(3\cdot 2^{n-j-1}\theta)} > 0$$

esto es una contradicción al hecho de que F es decreciente. De donde $X = U$, lo que implica que para cada entero k, $A(k) = A(k + 3\cdot 2^{n-(j+1)})$. Por inducción $A(k) = A(k + 3)$ para todo entero k y todos los puntos $H(k)$ están en C. Así, M contiene $6\cdot 2^{n+1}$ puntos uniformemente espaciados alrededor de C. Así la parte comun de M y C es densa en C y M es C.

CAPITULO IV

ORTOGONALIDAD

En la sección B del capítulo III se ha visto una caracterización de espacios de productos interiores, en términos de ortogonalidad, como corolario de la condición (D). En este capítulo se hablará un poco de ortogonalidad.

DEFINICION 1. Sea E un espacio vectorial normado y $x,y \in E$. x es ortogonal a y $(x \perp y)$ si y sólo si $\|x + ky\| \geq \|x\|$ para todo escalar k.

La idea geométrica de esta definición es que el segmento $\overline{PQ}$ es perpendicular al segmento $\overline{PR}$ si y sólo si, la distancia de Q a P es menor que la distancia de Q a cualquier otro punto de la recta que pasa por P y R.

LEMA 1. Si E es un espacio de productos interiores y $x \perp y$, entonces $(x,y) = 0$. Recíprocamente $(x,y) = 0$ implica $x \perp y$.

$\|x + ky\|^2 = \|x\|^2 + 2k(x,y) + k^2\|y\|^2$ así que

$\|x + ky\| \geq \|x\|$ para todo k es equivalente a $(x,y) = 0$

Vemos entonces que en un espacio de productos interiores la ortogonalidad posee las siguientes propiedades:

1) simetría; $x \perp y \implies y \perp x$

2) homogenea: $x \perp y \implies ax \perp by$ para todos $a,b \in R$

3) aditividad: $x \perp y$, $x \perp z \implies x \perp (y + z)$

4) si x,y son dos elementos arbitrarios, existe entonces un real a tal que $x \perp (ax + y)$

Para demostrar 4), basta tomar $a = -\dfrac{(x,y)}{\|x\|^2}$, desarrollar

Por otro lado, para un espacio vectorial normado arbitrario, solo se cumple 2) y pedir que se cumpla 1) nos lleva a :

TEOREMA 2. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión ≥ 3, la ortogonalidad es simétrica, si y sólo si, E es de productos interiores.

La demostración se basa en la siguiente caracterización de Kakutani: E es de productos interiores si y sólo si hay una proyección de norma uno a cualquier subespacio lineal cerrado. Por otro lado E es de productos interiores si y sólo si todo subespacio tri-dimensional es de productos interiores.

Sean x_1, x_2, elementos de un subespacio tridimensional E, y sea H_o el subespacio generado por ellos. Se puede demostrar que existe $y_o \in E_o$ tal que $y_o \perp H_o$ como $\perp$ es simétrica, $H_o \perp y_o$. Si definimos $P : E_o \to H_o$ como $P(z) = z + a_z y_o$ (a_z depende de z para que $p(z) \in H_o$) vemos que $\| P(z)\| \leq \| z\|$ y además $\| P\| = 1$.

TEOREMA 3. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión ≥ 3, entonces E es de productos interiores si y sólo si $\perp$ es aditiva por la izquierda ($x \perp z$, $y \perp z \Rightarrow (x + y) \perp z$).

La demostración corre la misma ruta del teorema 2.

Se podrían dar otras caracterizaciones por medio de propiedades de hiperplanos; pero basta con que estén en la literatura.

DEFINICION 2 . Sean x,y dos elementos arbitrarios de un espacio vectorial normado E . Decimos que x es J-ortogonal a y ($x \perp_J y$) si y sólo si $\| x + y\| = \|x - y\|$ (la J es por James. Esta ortogonalidad tambien se conoce como ortogonalidad isóseles).

LEMA 4. Si E es un espacio de productos interiores y $(x,y) = 0$, entonces x e y son J-ortogonales. Recíprocamente, $x \perp_J y$ implica $(x,y)=0$.

Las dos definiciones de ortogonalidad no son equivalentes como se ve en los siguientes ejemplos:

En $\mathbb{R}^2$, con las operaciones usuales, definimos

$\|(a,b)\| = \max(|a|,|b|)$ para $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Sean $x = (1,0)$, $y = (3,4)$; se tiene $\|x + y\| = 4 = \|x - y\|$, así que $x \perp_J y$. Pero para que $x \perp y$ se debe tener que $\|x + ky\| \geq \|x\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Tomando $k = -\frac{1}{8}$ $\qquad \|x + ky\| = \frac{5}{8} < 1 = \|x\|$.

Tomemos ahora $\mathbb{R}^2$ con la norma

$\|(a,b)\| = |a| + |b|$, $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Para los elementos $x = (1,0)$, $y = (-1,1)$ se tiene

$|x + ky\| = |1 - k| + |k| > 1 = \|x\|$ y esto para todo k;

pero $\|x + y\| = 1 \neq 3 = \|x - y\|$.

TEOREMA 5. 1) E es un espacio de productos interiores si y sólo si

$$x \perp y \Rightarrow x \perp_J y .$$

2) E es un espacio de productos interiores si y sólo si

$$x \perp_J y \Rightarrow x \perp y .$$

La demostración de 2) está en el libro de Day mientras que 1) fué anunciada por Holub sin demostrarla.

CAPITULO V

ALGUNAS APLICACIONES

Se han analizado algunos trabajos concentrándose en lo que parece estar mas relacionado de ellos. Se tratará de resumir algunos resultados que se han visto; otros que solo se han mencionado se pueden encontrar en la bibliografía y se verán implicaciones que algunos de ellos tienen.

Entre los aspectos geométricos pueden mencionarse, que si E es un espacio de productos interiores entonces todo subespacio tridimensional es isométrico al espacio euclidiano R^3 ; puede decirse además de esto que se puede definir un producto interior en cualquier subespacio tridimensional de un espacio vectorial normado T y, de aquí, en T mismo (James). Esto, por Jordan y von Neumann puede reducirse al caso bidimensional.

Si se traducen y reformulan algunas implicaciones en lenguaje geométrico se obtienen teoremas métricos que caracterizan a la geometría euclidiana, algunos son: 1) un triángulo es esósceles si y sólo si dos de sus medianas son iguales. 2) si los tres lados de un triángulo son iguales respectivamente a los tres lados de otro, sus correspondientes medianas son iguales (Lorch).

Si consideramos dos espacios de productos interiores L_1 y L_2 y tomamos su producto cartesiano $L_1 \times L_2$, resulta que este es tambien un espacio de productos interiores. Basta definir el producto interior de dos elementos (f_1,g_1) y (f_2,g_2) de $L_1 \times L_2$ como

definida la suma de parejas

$$(f_1,g_1) + (f_2,g_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2)$$

y el producto por escalar

$$a(f_1,g_1) = (af_1, ag_1)$$

(no se hace distinción en la notación de Producto Interior y de Norma, ya que no parece que pueda haber confusión para cada caso).

De nuevo puede representarse la norma, inducida por el producto interior en $L_1 \times L_2$, como antes

$$\|(f_1,g_1)\|^2 = \langle (f_1,g_1),(f_1,g_1)\rangle$$

por la definición, esto es

$$= \langle f_1,f_1\rangle + \langle g_1,g_1\rangle = \|f_1\|^2 + \|g_1\|^2$$

se vé inmediatamente que las tres primeras condiciones para ser una norma:

$\|(f_1,g_1)\| \geq 0$ para todo $(f_1,g_1) \in L_1 \times L_2$

$\|(f_1,g_1)\| = 0$ es equivalente a $(f_1,g_1) = (0,0)$

$\|a(f_1,g_1)\| = |a|\|(f_1,g_1)\|$ para cualquier $(f_1,g_1) \in L_1 \times L_2$ y cualquier escalar a, se cumplen. La cuarta condición tambien se cumple y, enseguida, se abrevia la demostración

$$\begin{aligned}\|(f_1,g_1) + (f_2,g_2)\|^2 &= \|f_1 + f_2\|^2 + \|g_1 + g_2\|^2 \\ &\leq (\|f_1\| + \|f_2\|)^2 + (\|g_1\| + \|g_2\|)^2 \\ &= \|(f_1,g_1)\|^2 + \|(f_2,g_2)\|^2 + 2\|f_1\|\,\|f_2\| + 2\|g_1\|\|g_2\| \\ &\leq (\|(f_1,g_1)\| + \|(f_2,g_2)\|)^2 .\end{aligned}$$

rarse que L sea bidimensional. Además, si L es de productos interiores, el subespacio unidimensional L' formado por los elementos af también lo es. Así, por el caso de producto cartesiano, por inducción, puede decirse que el espacio n-dimensional es de productos interiores si los espacios factores lo son. En el caso infinito-dimensional, $\left\{L_i\right\}_{i=1}^{\infty}$, solo se puede definir si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|(f, f')_{L_i}\right|^2 < \infty$$

Usando el teorema de Riesz resulta que L^* es un espacio de productos interiores si L lo es

$$L^* = \left\{A_g(f) = (f,g) \mid g \in L\right\}$$

$(A,B)_{L^*} = (g_1,g_2)_L$ si $Af = (f,g_1)$ y $Bf = (f,g_2)$

además, L^* si es espacio de Hilbert aunque L no lo sea.

Mencionaremos dos ejemplos de espacios lineales normados que no son de productos interiores

1) El espacio n-dimensional R_p^n en el que la norma se define por la fórmula

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

Para $p \geq 1$ se cumplen todos los axiomas de la norma; sin embargo R_p^n es de productos interiores solo cuando $p = 2$.

Consideremos dos vectores en R_p^n

$$f = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$g = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$f + g = (2, 0, 0, 0, \ldots, 0)$$

$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p}$; $\|f + g\|_p = \|f - g\|_p = 2$

de donde

$$\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 4 + 4$$

$$2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2) = 2 \cdot 2^{2/p} + 2 \cdot 2^{2/p}$$

y la igualdad se cumple (J°v.N.) solo cuando $p = 2$. Así, podría intuirse que los únicos espacios lineales normados de dimensión finita que son de productos interiores son los que tienen norma euclidiana.

2) $C_{[a,b]}$, el espacio de todas las funciones continuas, definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$ con la norma del sup

$$\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

consideremos $C_{[0,1]}$ y $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$

$$(f + g)(x) = 1 \quad , \quad (f - g)(x) = 2x - 1$$

$\|f + g\| = 1$; $\|f - g\| = 1$; $\|f\| = 1$; $\|g\| = 1$

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2 \neq 4 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) .$$

La prueba de la suficiencia de muchos de los criterios métricos para que un espacio lineal normado sea de productos interiores dependen de (J.v.N.) atraves de que el conjunto de puntos de norma uno en cada plano atraves de O es una elipse. ¿Podría decirse, de esta última condición que, en R^n, la intersección de la bola unitaria con subespacios bidimensionales son elipses?

BIBLIOGRAFIA

1. MAURICE FRECHET, sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, Ann. of Math. (2) 36 (1935), 705-718.

2. P. JORDAN and J. von NEUMANN, on inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. (2) 36 (1935), 719-732.

3. M. M. DAY, some characterizations of inner product spaces, Trans. Amer, Math. Soc. 62 (1947), 320-337.
— — — Normed Linear Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

4. E. R. LORCH, on certain implications which characterize Hilbert spaces, Ann. of Math. (2) 49 (1948), 523-532.

5. D. A. Senechalle, a characterization of inner product spaces, Proceedings of the Amer. Math. Soc, 19 (1968) 1306-1312.

6. G BIRKHOFF, orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J. 1 (1935), 169-172.

7. R, C, JAMES, orthogonality in normed linear spaces, Duke Math. J. 12 (1945), 291-302 MR 6, 273.
— — ——— orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947), 265-292. MR 9, 42.
— — ——— Inner products in normed linear spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 559-566. MR 9, 42.

8. J. R. HOLUB, Rotundity, orthogonality, and characterizations of inner product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (6) (1975), 1087--1089.

9. A. N. KOLMOGOROV y S. V. FOMIN, elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, Mir.

10. KOSAKU YOSIDA, Functional Analysis, Fourth Edition, Springer-Verlag.

11. G. BACHMAN and L. NARICI, Functional Analysis, Academic Press.

12. W. RUDIN, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill.

13. J. DIEUDONNE, Foundations of Modern Analysis, Academic Press.

14. C. GOFFMAN and G. PEDRICK, First course in functional analysis, Prentice-Hall.

BIBLIOTECA CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
QA322.4
.R63

15/T532

UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

SOBRE LA AXIOMATICA DE LOS ESPACIOS DE HILBERT

TESIS PROFESIONAL

OSCAR MARIO RODRIGUEZ SANCHEZ

Hermosillo, Sonora, México 1976

.4