"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

**Estrategias de resolución de problemas matemáticos.
Un estudio exploratorio**

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Arcelia Cecilia Moreno Verdugo

Directora de Tesis: Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora, México, Febrero de 2014

SINODALES

M.C. Eduardo Tellechea Armenta
Universidad de Sonora

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora

Dr. José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora

Dr. Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a la Dra. Silvia Ibarra por su apoyo, comprensión y amistad, ya que gracias a ello logramos concluir este trabajo.

A mis sinodales, el M.C. Eduardo Tellechea, el Dr. José Luis Soto y el Dr. Agustín Grijalva por sus revisiones y correcciones; así como al Coordinador de la Licenciatura en Matemáticas, el Dr. Martín García, por su apoyo al atender las peticiones de mi directora de tesis.

A Ricardo y amigos.

Gracias.

Arcelia Cecilia Moreno Verdugo

Hermosillo, Sonora

Febrero de 2014

Índice general

Presentación **1**

1. Algunos antecedentes y la problemática en estudio **3**

1.1. PISA y los resultados de México en matemáticas 6

1.2. Preguntas que guían este estudio 12

2. Referencias teóricas **17**

2.1. George Polya 17

2.2. Lev Moiseevich Fridman 26

2.2.1. La esencia y la estructura de la resolución de los problemas de matemáticas 30

2.3. Alan H. Schoenfeld 36

2.3.1. Recursos 39

2.3.2. Heurísticas 45

2.3.3. Control 49

2.3.4. Sistemas de creencias 56

2.4. Luz Manuel Santos Trigo 59

3. Referencias metodológicas **87**

3.1. Características del estudio 87

3.2. Descripción de los problemas 89

4. Análisis de la información **119**

Conclusiones **187**

Bibliografía **193**

Presentación

Esta tesis es un trabajo de investigación acerca de las estrategias que siguen los estudiantes para resolver problemas matemáticos. Para llevar a cabo dicha investigación consideramos la aplicación de problemas no rutinarios, los cuales podemos encontrar en contextos intra y extra matemáticos.

El documento que se está presentando consta de cuatro capítulos y un apartado en donde se consignan las conclusiones derivadas del estudio realizado.

En el Capítulo 1, realizamos una recopilación de elementos que justifiquen y den pie a ubicar la problemática en cuestión. Principalmente consideramos los planes y programas de estudio de los diferentes niveles educativos en México, en los que la resolución de problemas es considerada como una competencia a desarrollar. Es por esto, que decidimos tomar en cuenta los resultados de la prueba PISA, en particular los de la competencia matemática, ya que en ésta se analiza ampliamente el proceso de resolución de problemas, mostrando además que dichos resultados contrastan con lo pretendido en el currículum.

Para concluir este capítulo, se presentan algunas reflexiones y cuestionamientos personales que fueron la motivación inicial por la elección de esta temática, así como las perspectivas que tienen diferentes expertos sobre el tema.

En el segundo capítulo se presenta el resultado de la revisión de algunas de las principales obras de cuatro investigadores representativos en el tema de la resolución de problemas. Dichos investigadores son: George Polya, Lev Moiseevich Fridman, Alan H. Schoenfeld y Luz Manuel Santos Trigo.

En el Capítulo 3 se encuentran dos apartados. En el primero se presenta la caracterización del tipo de estudio que se realizó, siendo éste de carácter exploratorio; además de la categorización sobre los estudiantes con los que decidimos trabajar y el porqué de esta elección.

Aparecen las características del instrumento que se utilizó para recopilar la información y llevar a cabo la selección de los resultados; además de la forma en que se realizó el registro de la información obtenida. En el segundo apartado, se realiza un análisis a priori de los problemas seleccionados, con apoyo del instrumento elegido.

El Capítulo 4 está conformado por el análisis de los resultados, el cual fue realizado con el mismo instrumento con el que se hizo la descripción en el Capítulo 3. Se incorporan las hojas de trabajo seleccionadas para dicho estudio.

Por último, presentamos las conclusiones respectivas a cada uno de los capítulos de este trabajo, así como conclusiones personales sobre el desarrollo y terminación de éste.

Capítulo 1

Algunos antecedentes y la problemática en estudio

Es incuestionable que la actividad de resolución de problemas está en el corazón de las matemáticas, pues existen abundantes referencias históricas que indican que desde tiempos remotos se han presentado problemáticas de distintos tipos que han necesitado estudiarse y resolverse. El proceso para encontrar esas soluciones ha permitido desarrollar y con el paso del tiempo consolidar diferentes áreas y ramas de las Matemáticas, por lo que la resolución de problemas es uno de los principales motores para el desarrollo de las matemáticas.

En el ámbito de la formación escolar de individuos uno de los objetivos generales de la educación siempre ha sido que al egresar de la escuela éstos estén en condiciones de resolver problemas en su vida cotidiana y/o profesional. En esta dirección también es cierto que a la formación matemática escolar se le ha asignado cierto papel, al menos en el discurso, sobre la influencia que tiene en el desarrollo del pensamiento lógico–formal de los escolares y en la preparación para el abordaje de los problemas.

Si revisamos el programa de estudios de educación básica de nuestro país (SEP, 2011), encontramos que está formulado con base en el enfoque por competencias, y que se declaran como las competencias matemáticas a desarrollar las siguientes:

a) Resolver problemas de manera autónoma

b) Comunicar información matemática

c) Validar procedimientos y resultados

d) Manejar técnicas eficientemente

En el caso del bachillerato mexicano, de acuerdo con la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) (SEMS, 2008), se declara lo siguiente:

> Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases.

En cuanto a las competencias matemáticas, se espera que al concluir el bachillerato, el estudiante pueda:

1. Construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formular y resolver problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explicar e interpretar los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y contrastarlos con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

5. Analizar las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

6. Cuantificar, representar y contrastar experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

7. Elegir un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumentar su pertinencia.
8. Interpretar tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

En el caso del nivel superior también encontramos en los planes de estudio declaraciones que están ligadas a la preparación de los estudiantes para la solución de problemas matemáticos.

Un caso evidente lo encontramos, por ejemplo en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora (Departamento de Matemáticas, s.f.), donde aparece el siguiente perfil de egreso:

> El egresado de la Licenciatura en Matemáticas:
>
> - Será un profesional de pensamiento crítico con conocimientos matemáticos básicos y sólidos, que le permitan comprender las diferentes áreas de las matemáticas.
> - Tendrá capacidad para aprender nuevas técnicas, métodos, herramientas y teorías matemáticas que le permitan incursionar con éxito en posgrados afines a esta disciplina, así como incorporarse en diversas áreas del sector productivo y social.
> - Contará con habilidades para
>   - Transmitir sus ideas y conocimientos en forma oral y escrita de una manera clara, que le permitan desempeñarse en el sector educativo en los niveles medio superior y superior.
>   - Utilizar recursos tecnológicos en el análisis y solución de problemas, así como para la comunicación de sus resultados.
>   - Plantear y resolver problemas abstractos con razonamientos claros y precisos.
>   - Participar en grupos multidisciplinarios en la solución de problemas regionales y nacionales.

Sin embargo, el papel conferido en muchos casos a la resolución de problemas matemáticos en el salón de clases, no se corresponde ni con el papel que los problemas han jugado en el desarrollo histórico de la matemática, ni con las referencias que aparecen en los planes y programas de estudio.

Es frecuente encontrar en los salones de clase al profesor resolviendo algún problema, con una determinada fórmula o herramienta matemática, para que después el alumno resuelva alguna variante de éste; lo cual en los hechos equivale a plantear un ejercicio cuya repetición mecánica conducirá al estudiante, en el mejor de los casos, a resolver problemas semejantes posteriormente.

El supuesto en esta manera tradicional de enseñar matemáticas es que los alumnos al terminar un nivel educativo podrán resolver una gran diversidad de problemas, debido a que han resuelto muchos ejercicios en los cursos de matemáticas; pero ésta es una idea que ha resultado errónea. Los ejercicios dejados por el maestro mejoran la utilización de técnicas matemáticas, pero cuando es necesario llevarlas a la práctica, los estudiantes no saben cómo ni cuándo emplearlas. Los resultados obtenidos por nuestros estudiantes en diferentes evaluaciones del aprendizaje en matemáticas, son ilustrativos a este respecto.

1.1. PISA y los resultados de México en matemáticas

Actualmente se realizan diferentes pruebas estandarizadas a nivel nacional e internacional, de las que en nuestro país destaca la prueba PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes), elaborada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), para evaluar las competencias necesarias de los estudiantes para "defenderse" en la vida cotidiana.

La OCDE analiza información que muestra la calidad del sistema educativo, entre otros, por medio del rendimiento de los escolares en una serie de disciplinas básicas, que comprenden los dominios de comprensión de lectura, competencia matemática y científica; esto se conoce como alfabetización de los escolares.

PISA se aplica cada tres años, a partir 1997; México se incorporó en el año 2000. Esta evaluación se aplica a estudiantes de 15 años en más de 60 países del mundo, evaluándose en ella competencias en el área de matemáticas, ciencias, y lectura.

En cada aplicación la prueba enfatiza una de estas áreas, sobre las otras dos. En el año 2000 se centró en lectura, en 2003 en matemáticas, en 2006 en ciencias, en 2009 en lectura y en 2012 en matemáticas.

Las competencias o procesos generales seleccionados por el proyecto PISA (OCDE, 2004, p.40) son:

- Pensar y razonar
- Argumentar
- Comunicar
- Modelizar
- Plantear y resolver problemas
- Representar
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

En el caso que nos interesa, la (OCDE, 2003) define competencia matemática como:

> La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

Involucrar a las matemáticas en la vida cotidiana, significa comunicarse, relacionarse con ellas, valorarlas, disfrutarlas; no sólo utilizarlas para resolver problemas matemáticos. PISA evalúa la competencia matemática, la cual se refiere a la capacidad para analizar, razonar, plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos, así como identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas y poder aplicarlas a la vida diaria. Este concepto tiene tres dimensiones: El contenido, los procesos y la situación o contexto.

Los contenidos de la evaluación de competencia matemática abarcan problemas de cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, y probabilidad.

Los procesos que el estudiante debe realizar están divididos en tres grados de complejidad:

- **Reproducción:** proceso que implica trabajar con operaciones comunes, cálculos simples y problemas propios del entorno inmediato y la rutina cotidiana.
- **Conexión:** proceso que involucra ideas y procedimientos matemáticos para la resolución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios, pero que aún incluyen escenarios familiares. Además, involucra la elaboración de modelos para la solución de problemas.
- **Reflexión:** proceso que implica la solución de problemas complejos y el desarrollo de una aproximación matemática original. Para ello los estudiantes deben matematizar o conceptualizar las situaciones.

Los problemas matemáticos que se plantean están situados en cuatro diferentes **contextos o situaciones**:

- **Situación personal,** relacionada con el contexto inmediato de los alumnos y sus actividades diarias.
- **Situación educativa o laboral,** relacionada con la escuela o el entorno de trabajo.
- **Situación pública,** relacionada con la comunidad.
- **Situación científica,** implicada en el análisis de procesos tecnológicos o situaciones específicamente matemáticas.

En el marco teórico de PISA el proceso de hacer matemáticas (matematización) implica, expresar los problemas reales matemáticamente. Esta primera fase se conoce como *matematización horizontal*.

La matematización horizontal se basa en:

1. Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.

2. Representar el problema de modo diferente.
3. Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
4. Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
5. Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
6. Traducir el problema a un modelo matemático.

Una vez traducido el problema a una expresión matemática, el estudiante puede plantear preguntas en las que utilice conceptos y destrezas matemáticas. A esta fase del proceso se le denomina *matematización vertical*.

La matematización vertical incluye:

1. Utilizar diferentes representaciones.
2. Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
3. Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos.
4. Argumentar y Generalizar.

La última fase en la resolución de problemas es reflexionar sobre todo el proceso de matematización y los resultados obtenidos, utilizar el pensamiento crítico para explicar los resultados, y validar el proceso completo.

Algunos aspectos de esta fase son:

1. Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
2. Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
3. Comunicar el proceso y la solución.
4. Criticar el modelo y sus límites.

A fines de 2013 se dieron a conocer los resultados que obtuvo México en la evaluación aplicada en 2012. En la tabla que sigue se muestran estos resultados.

Tabla 1.1: Tareas en los niveles de desempeño en la escala global de Matemáticas, PISA 2012 (Vázquez & Gutiérrez, 2013, p.35-36)

Nivel / puntaje	Porcentaje	Tareas
6 **Más de 669.30**	**OCDE:** 3.3 **AL:** 0.1 **México:** 0.0	• Los estudiantes en este nivel pueden conceptualizar, generalizar y usar información basada en investigaciones, modelar situaciones de problemas complejos y aplicar sus conocimientos en contextos relativamente no habituales. • Son capaces de relacionar diferentes fuentes de información y representaciones, y manejarlas de una manera flexible. • Poseen una avanzada capacidad de pensamiento y razonamiento matemáticos. • Pueden aplicar su conocimiento y comprensión, además de dominar operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias y abordar situaciones novedosas. • Son hábiles para formular y comunicar con claridad sus acciones y reflexiones relativas a sus hallazgos, argumentos, y pueden explicar por qué son aplicables a una situación nueva.
5 **De 606.99** **a menos de 669.30**	**OCDE:** 9.3 **AL:** 0.7 **México:** 0.6	• Los estudiantes pueden desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando restricciones y especificando los supuestos. • Tienen habilidad para seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos. • Son capaces de trabajar de manera estratégica al usar ampliamente habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas; además de relacionar apropiadamente representaciones, caracterizaciones simbólicas y formales con la comprensión clara de las situaciones. • Empiezan a reflexionar sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

Continúa en la siguiente página

Tabla 1.1 – *Continuación de la página anterior*

Nivel / puntaje	Porcentaje	Tareas
4 **De 544.68** **a menos de 606.99**	**OCDE:** 18.2 **AL:** 3.3 **México:** 3.7	• Los estudiantes trabajan con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden involucrar restricciones o demandar la formulación de supuestos. • Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, relacionándolas directamente con situaciones del mundo real. • Usan una limitada gama de habilidades y pueden razonar con una idea en contextos sencillos. • Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, evidencias y acciones.
3 **De 482.38** **a menos de 544.68**	**OCDE:** 23.7 **AL:** 10.5 **México:** 13.1	• Los estudiantes son capaces de realizar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Sus interpretaciones son suficientemente sólidas para construir un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias sencillas de solución de problemas. • Pueden interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, y razonar directamente a partir de ellas. • Muestran cierta habilidad para el manejo de porcentajes, fracciones, números decimales y proporciones. • Las soluciones a las que llegan reflejan un nivel básico de interpretación y razonamiento.
2 **De 420.07** **a menos de 482.38**	**OCDE:** 22.5 **AL:** 22.4 **México:** 27.8	• Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. • Pueden extraer información relevante de una sola fuente de información y usar un modelo sencillo de representación. • Usan algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales para resolver problemas que involucren números enteros.

Continúa en la siguiente página

Tabla 1.1 – *Continuación de la página anterior*

Nivel / puntaje	Porcentaje	Tareas
		• Son capaces de lograr interpretaciones literales de los resultados.
1 **De 357.77** **a menos de 420.07**	**OCDE:** 15.0 **AL:** 30.9 **México:** 31.9	• Pueden responder preguntas relacionadas con los contextos familiares en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas. • Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. • Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Como podemos ver, el 59.7 % de los estudiantes mexicanos se encuentran ubicados entre los niveles 1 y 2, los más bajos de la categorización de PISA, hecho que consideramos preocupante, tanto desde el punto de vista de la educación en general, como de la educación matemática en particular.

1.2. Preguntas que guían este estudio

Se han expuesto hasta este momento diferentes consideraciones, desde distintos campos, sobre la importancia de la resolución de problemas en matemáticas, y sobre todo, de la necesidad de incrementar los niveles de desarrollo de esta competencia en los individuos. En este sentido, y como parte de una comunidad cuyo centro de estudio está ubicado en esta ciencia, nos ha interesado profundizar más en ese terreno. Se agrega a lo anterior la experiencia e inquietudes personales al resolver problemas matemáticos, al ser egresada de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora, y como participante en el proceso de preparación de niños de primaria para la competencia Concurso de Primavera de Matemáticas, conocida coloquialmente como “Cotorra”.

Derivadas de esta labor, fueron surgiendo algunas interrogantes relacionadas con las dificultades encontradas al plantear y resolver problemas en el salón de clases. Por ejemplo, al contestar dudas o revisar lo que hicieron los estudiantes, respecto a un problema, se percibía que algunos lo resolvían con métodos y herramientas que en un momento dado podían ser diametralmente opuestos.

En ese interés de lograr éxito con los niños, nos formulamos una serie de interrogantes, algunas de las cuales son las siguientes:

- ¿Por qué algunas personas son exitosas en la resolución de problemas matemáticos?
- ¿Cuáles son las características que tienen esas personas?
- ¿Cómo proceden los individuos para resolver problemas de matemáticas? ¿Qué estrategias abordan?
- ¿Se puede enseñar a resolver problemas de matemáticas?
- ¿Se puede aprender matemáticas resolviendo problemas?
- ¿Qué es lo importante cuando se están resolviendo problemas? ¿Las estrategias o las soluciones de los problemas?

El interés por encontrar respuestas a esos planteamientos nos llevó a la revisión de alguna literatura, llegando a la conclusión de la importancia de la resolución de problemas en matemáticas como un área de estudio.

Se decidió entonces involucrarnos en el abordaje de esta temática mediante un estudio exploratorio cuyo objetivo principal es conocer y analizar las estrategias que siguen los “expertos” en la resolución de problemas matemáticos. Considerando como expertos a estudiantes de diferentes semestres de la Licenciatura en Física y de la Licenciatura en Matemáticas. La justificación para considerar este tipo de estudiantes tiene que ver evidentemente con el hecho de que su práctica cotidiana está muy relacionada con plantear y resolver problemas de matemáticas, y han tomado el estudio de la ciencia como un propósito de su vida.

Pretendemos, como producto de este estudio, tener algunos elementos que nos lleven a realizar propuestas propias para incorporar a la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Terminaremos esta sección presentando las reflexiones de algunos expertos, que en su momento contribuyeron a interesarnos y a fortalecer nuestro interés en el tema.

De acuerdo con Freudenthal (1980), uno de los *Diez Problemas Mayores de la Educación Matemática* es "*¿Cómo aprende la gente?, en particular matemáticas*", ya que aprender matemáticas está completamente relacionado al proceso de resolución de problemas; como afirma Santos Trigo (2007, p.19), "en el estudio de las matemáticas, la actividad de resolver y formular problemas desempeña un papel muy importante cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones".

Además, la interrogante "*¿Cómo aprende la gente?, en particular matemáticas*" (Freudenthal, 1980), está relacionada con cuestiones de carácter cognitivo, es decir, con conocer cómo es que las personas acceden al conocimiento.

> Aún dentro de una misma cultura o en un mismo sistema de educación, los desarrolladores del currículum, los profesores, los investigadores en la enseñanza–aprendizaje de las Matemáticas y los matemáticos no necesariamente comparten los mismos puntos de vista sobre lo que es un problema y lo que se enseña en términos de la resolución de problemas (Arcavi & Friedlander, 2007, p.356).

Polya y Schoenfeld señalan que la resolución de problemas va más allá de encontrar una solución o saber aplicar a la perfección determinados métodos:

> Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemáticas, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel (Polya, 1954, citado por Vilanova, Rocerau, Valdez, Oliver, Vecino, Medina, Astiz, & Alvarez, 2008, p.3).

Schoenfeld, en *Mathematical Problem Solving* (1985, p.xii), una obra ya clásica sobre el tema, expresó que en la resolución de problemas:

> "Aprender a pensar matemáticamente –involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas "tácitas de juego"."

Por otra parte, Thompson y Lampert nos muestran la visión que se tiene generalmente sobre la resolución de problemas.

> Thompson (1992), citado por Vilanova et al. (2008, p.1), señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido.

Lampert (1992) indica:

> Comúnmente, la matemática es asociada con la certeza; saber matemática y ser capaz de obtener la respuesta correcta rápidamente van juntas. Estos presupuestos culturales, son modelados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa seguir las reglas propuestas por el docente; saber matemática significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el docente hace una pregunta o propone una tarea; y la "verdad" matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente. Las creencias sobre cómo hacer matemática y sobre lo que significa saber matemática en la escuela son adquiridas a través de años de mirar, escuchar y practicar (citado por Vilanova et al., 2008, p.6).

Y por último, Schoenfeld (1992, p.345) expresa la necesidad de que en los salones de clases se le dé la importancia y el tiempo debido a la resolución de problemas:

> . . . Para desarrollar los hábitos matemáticos apropiados y disposiciones de interpretación y encontrar sentido [a las ideas matemáticas] también como los modos apropiados de pensamiento matemático– las comunidades de práctica en la cual ellos [los estudiantes] aprenden Matemáticas deben reflejar y promover esas formas de pensamiento. Es decir, los salones de clase deben ser comunidades en los cuales el sentido matemático, del tipo que esperamos desarrollen los estudiantes, se practique.

Capítulo 2

Referencias teóricas

Descripción. En este capítulo se presenta el resumen de algunas de las aportaciones teóricas más importantes de cuatro matemáticos que estudiaron con diferentes enfoques a la resolución de problemas matemáticos.

Cada una de las secciones está basada en la revisión de alguna de sus obras representativas. La relación de los mismos es:

a) George Polya.- *"Cómo plantear y resolver problemas".*

b) Lev Moiseevich Fridman.- *"Metodología para resolver problemas de matemáticas".*

c) Alan H.Schoenfeld.- *"Mathematical problem–solving".*

d) Luz Manuel Santos Trigo.- *"La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos".*

Se aclara que no se está presentando un resumen del texto referido en cada caso, sino solamente un extracto de las ideas principales producto de la revisión de dicho material.

2.1. George Polya

George Polya fue un matemático nacido el 13 de diciembre de 1887 en Budapest, Hungría, falleció el 7 de septiembre de 1985. Trabajó en una gran variedad de temas matemáticos como series, geometría, álgebra, entre otras. En sus últimos años, invirtió un esfuerzo considerable en intentar caracterizar los métodos generales que utilizan las personas para resolver problemas, y para describir cómo debería enseñarse y aprender la manera de resolver problemas.

Escribió tres libros sobre el tema: *Cómo plantear y resolver problemas*, *Matemáticas y razonamiento plausible*, *Volumen I: Inducción y analogía en matemáticas y Matemáticas y razonamiento plausible*, *Volumen II: Patrones de inferencia plausible.*

En *Cómo plantear y resolver problemas*, Polya agrupó y clasificó las preguntas y sugerencias que se presentan entre maestro y alumno a la hora de resolver problemas, en la lista *"Para resolver un problema se necesita"*(Polya, 1965, p.17,19), la cual se caracteriza por su generalidad, que benefician tanto a los alumnos como a las personas que trabajen en la resolución de problemas. Dicha lista menciona *las operaciones intelectuales particularmente útiles para la solución de problemas.*

A continuación presentamos una versión resumida de la lista *"Para resolver un problema se necesita"*, que formamos con las preguntas y sugerencias más importantes e indispensables de cada una de las etapas que constituyen el muy conocido "Método de los cuatro pasos de Polya".

Para resolver un problema se necesita:

1. ***Comprender el problema***

   - ¿Cuál es la incógnita?
   - ¿Cuáles son los datos?
   - ¿Cuál es la condición?
   - ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Es redundante?, ¿Es contradictoria?

2. ***Concebir un plan***

   - Determinar la relación entre los datos y la incógnita.
   - De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares.
   - Obtener finalmente un plan de solución.
     - ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
     - ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

- ◇ ¿Conoce un problema relacionado?
- ◇ ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
- ◇ ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
- ◇ ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

3. *Ejecución del plan*

- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
- ¿Puede demostrarlo?

4. *Examinar la solución obtenida*

- ¿Puede verificar el resultado?
- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

En la vida cotidiana nos encontraremos con problemas que no siempre sabremos solucionar, dependerá de las herramientas con las que contemos y que nos puedan ayudar a hacerlo, así como nuestras experiencias y el conocimiento que tengamos sobre dicho problema, y lo mismo sucede en las matemáticas. Al planteársenos un problema de cualquier tipo, siempre buscaremos la manera de resolverlo y aún siendo un experto en el tema o al haber resuelto demasiados problemas, es normal que nos hagamos preguntas. Lo mismo pasa cuando utilizamos un método de resolución de problemas, donde nos hacemos preguntas como: ¿por dónde debo empezar?, ¿qué puedo hacer?, ¿qué gano haciendo esto?, entre otras.

Producto de una gran cantidad de observaciones y entrevistas que realizó con expertos resolutores de problemas matemáticos, Polya sintetizó sus resultados enunciando su "Método de los cuatro pasos", ya mencionado.

En cada una de estas etapas, al resolver problemas, es necesario acudir a la lista *"Para resolver un problema se necesita"* y hacernos y/o escribir las preguntas y sugerencias que se muestran en cada etapa, eso nos será de gran ayuda.

Hay que tener en cuenta que siempre que tengamos un problema por resolver lo primero que debemos hacer antes de utilizar cualquier método de resolución es familiarizarnos con el problema, para esto Polya nos sugiere verlo como un todo sin detenernos a pensar en los detalles, de esta manera estaremos comprendiendo el problema y así familiarizándonos con él. Luego, ya familiarizados con el problema podemos proceder a emplear su método.

El primer paso es comprender el problema. En este paso es importante comprender claramente el enunciado, esto nos facilitará la comprensión del problema y la separación de las partes principales del problema. En los problemas por demostrar las partes principales son la hipótesis y la conclusión; mientras que en los problemas por resolver son la incógnita, los datos y las condiciones. Hay que reflexionar sobre cada una de las partes principales, relacionando una con otra, reflexionando sobre los detalles. Esto nos ayuda a comprender claramente el problema y así continuar con las siguientes etapas sin estarnos regresando al enunciado.

En la segunda etapa, *"Concebir un plan"*; es indispensable tomar en cuenta las partes principales del problema, para esto ya se comprendió el problema en la etapa anterior, gracias a eso tendrá una idea clara sobre ellas y estarán en su mente sin necesidad de regresar a las etapas anteriores. Es momento de encontrar puntos de contacto con nuestros conocimientos y habilidades que nos sean útiles para resolver el problema.

Entonces, podemos empezar a resolver el problema, tenemos que ejecutar el plan; en esta etapa deben realizarse todas las operaciones algebraicas, procedimientos geométricos, o cualquier ejecución pertinente. Es necesario razonar o distinguir una cosa de otra y en cada paso estar convencidos de su exactitud y corrección, para eso se revisa a detalle cada paso. En problemas complejos podemos empezar por los pasos grandes y continuar con los pequeños, ya que cada paso grande está compuesto de pasos pequeños; de esta manera estaremos mostrando claramente la solución sin duda alguna.

Ya estamos en la última etapa, debemos revisar la solución así como el proceso de resolución. Muchos de los estudiantes que resuelven problemas al terminar esto no se toman el tiempo de revisar lo que hicieron, no sólo para confirmar que esté correctamente hecho, si no para ver las diferentes maneras en las que se pudo haber realizado; esto nos ayuda a encontrar algún método o manera diferente que nos facilite la resolución del problema, pueden observarse aspectos que no vimos al estar resolviendo el problema, obtener nuevos conocimientos y lo más importante desarrollar la habilidad para resolver problemas.

Para ilustrar lo mencionado anteriormente resolveremos el siguiente problema describiendo las 4 etapas de Polya.

Problema. *El perímetro de un triángulo rectángulo es de 60 cm, la altura perpendicular a la hipotenusa mide 12 cm. Determinar los lados.* (Polya, 1965, p.203)

Etapa I. ***Comprender el problema***

En esta parte separaremos las partes principales del problema con ayuda de la lista. Además, podemos apoyarnos de la siguiente ilustración.

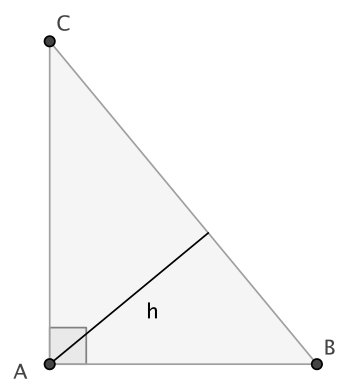


Figura 2.1

Lo primero que debemos preguntarnos es:

¿Cuál es la incógnita? En el caso que nos ocupa la incógnita es *la longitud de cada uno de los lados del triángulo.*

Después de esto, identifiquemos los datos.

Llamemos a, b y c a las medidas de los lados del triángulo, P al perímetro, y h a la altura sobre la hipotenusa.

- $a = ?$
- $b = ?$

- $c = ?$
- $P = 60\ cm$
- $h = 12\ cm$

Como condición tenemos *el perímetro de un triángulo rectángulo con altura perpendicular a la hipotenusa*; la cual podemos separar en las siguientes partes:

1. El triángulo rectángulo
2. El perímetro
3. La altura del triángulo sobre la hipotenusa

Etapa II. *Concebir un plan*

Ahora, lo primero que debemos tener en mente antes de concebir un plan es lo que estamos buscando, que en este caso son las medidas de a, b y c. Basándonos en las condiciones debemos buscar entre nuestros conocimientos una forma algebraica para expresarlas, donde utilicemos los datos dados.

Así, podemos expresar las partes de la condición como:

1. $a^2 + b^2 = c^2$	(*Teorema de Pitágoras.*- En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos)
2. $a + b + c = 60$	(*Perímetro de un polígono*)
3. $ab = 12c$	(*Teorema de la altura.*- El producto de los dos catetos, de un triángulo rectángulo, coincide con el producto de la hipotenusa por la altura sobre ella)

Las tres expresiones anteriores nos indican que tenemos información suficiente para poder combinarla y encontrar lo que estamos buscando. Es decir, aplicando propiedades de las operaciones de números reales (al ser medidas de los lados de un triángulo, deben ser reales positivos), vemos posibilidades de poder establecer alguna igualdad que resulte de utilidad.

Etapa III. ***Ejecución del plan***

De la segunda parte de la condición tenemos que:

$$a + b = 60 - c \tag{1}$$

elevando al cuadrado tenemos

$$(a + b)2 = (60 - c)^2,$$

y como bien sabemos

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \tag{2}$$

entonces

$$(60 - c)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{3}$$

Así, sustituyendo (1) y (2) en (3), obtenemos

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c \tag{4}$$

Ahora sólo tenemos que realizar las operaciones necesarias para despejar c en (4).

$$(60 - c)^2 = 3600 - 120c + c^2$$

$$3600 - 120c + c^2 = c^2 + 24c$$

$$3600 + c^2 - c^2 = 24c + 120c$$

$$3600 = 144c$$

$$\frac{3600}{144} = c \quad \Rightarrow \quad c = 25$$

Habiendo encontrado c, nos falta encontrar a y b.

Sustituyendo c en la primera y segunda ecuación tenemos

$$a^2 + b^2 = 25^2 = 625 \tag{5}$$

$$a + b = 60 - 25 = 35 \tag{6}$$

Despejamos a en (6) y la sustituimos en (5)

$$a = 35 - b \tag{7}$$

$$(35 - b)^2 + b^2 = 625$$

$$1225 - 70b + 2b^2 = 625$$

$$600 - 70b + 2b^2 = 0$$

Dividamos entre 2 para facilitar las próximas operaciones

$$b^2 - 35b + 300 = 0$$

Ahora tenemos una ecuación de segundo grado para la cual utilizaremos la fórmula general para encontrar el valor de b.

$$b = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4(1)(300)}}{2}$$

$$b = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{2}$$

$$b = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$b = \frac{35 \pm 5}{2}$$

Entonces,

$$b_1 = \frac{35 + 5}{2} = \frac{40}{2} = 20 \qquad \text{y} \qquad b_2 = \frac{35 - 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Sustituyendo b_1 y b_2 en (7):

$$a_1 = 35 - 20 = 15 \qquad \text{y} \qquad a_2 = 35 - 15 = 20$$

De esta manera hemos concluido esta etapa, y podemos ver que $a = 20$ y $b = 15$; o bien, $a = 15$ y $b = 20$.

Etapa IV. ***Visión retrospectiva***, es decir, examinar la solución encontrada.

Para terminar con las 4 etapas de Polya, sólo nos queda revisar la solución y obtener lo más que podamos de ella.

Al revisar el procedimiento seguido para encontrar la solución mostrada, pensamos que es posible encontrar variantes al problema. Por ejemplo, una posibilidad sería eliminar la condición sobre la hipotenusa y así obtendríamos un nuevo problema, cuyo texto sería: *El perímetro de un triángulo rectángulo es de 60 cm. Determinar los lados.* De esta manera nos damos cuenta de que podemos obtener variantes del problema eliminando o agregando condiciones, cambiando datos y/o requerimientos.

Otro aspecto importante que podemos percibir al examinar la solución, es que al concebir el plan no estábamos conscientes de las herramientas matemáticas que necesitaríamos al ir avanzando en la resolución, por ejemplo, la fórmula general que se utilizó para obtener los valores de b, lo que podría convertirse en un problema dado el caso en que los estudiantes no conozcan esta fórmula y se "estanquen" y no logren obtener la solución; o darse el caso en el que planteemos un nuevo problema donde se pida obtener los valores de las incógnitas a partir de alguna ecuación, lo que nos indica que podemos dividir el problema en subproblemas. Esto promovería la obtención de nuevos conocimientos, o analizar la manera en que intentan resolver el problema los expertos sin tener un conocimiento previo.

Esta etapa varía dependiendo de cada problema, habrá problemas de los que saquemos más provecho que otros, pero la solución de cualquier problema siempre nos dejará algo que nos servirá en la resolución de otros problemas; tal y como dijo Polya alguna vez:

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema."

2.2. Lev Moiseevich Fridman

Lev Moiseevich Fridman (1915 - 2005) fue Doctor en Educación, Profesor de Psicología, destacado investigador del Instituto de Psicología de la Academia de la Educación de Rusia. Su actividad científica se concentró en el área de la psicología de la educación y fundamentos psicológicos de la enseñanza de las matemáticas. Autor de más de 250 publicaciones, incluyendo libros reconocidos como *Fundamentos psicológicos y educativos de la enseñanza de las matemáticas en la escuela, El análisis lógico y psicológico de las tareas escolares, Aprender a resolver problemas, Aprender a aprender matemáticas, Metodología para resolver problemas de matemáticas, Sico–educación general, Fundamentos teóricos de la enseñanza de las matemáticas métodos* (URSS, 2005) y muchos otros.

En su obra *Metodología para resolver problemas de matemáticas*, Lev M. Fridman presenta determinados pasos y estrategias que son indispensables al momento de resolver problemas, los cuáles iremos abordando y ejemplificando a lo largo de esta Sección.

De acuerdo con Fridman, una pregunta central si queremos empezar a hablar de resolución de problemas es *¿Qué es un problema?*

> "Un problema consiste en alguna exigencia, requerimiento o pregunta para la cual se necesita encontrar la respuesta, apoyándose en y tomando en cuenta las condiciones señaladas en el problema". (Fridman, 1996, p.13)

Tomando en cuenta esta definición, al empezar a resolver un problema debemos realizar el *análisis del problema*, el cual nos permite identificar sus requerimientos y sus condiciones.

A continuación mostraremos un ejemplo de lo que son las condiciones y requerimientos de un problema.

Ejemplo 1. *Dibujar la suma de los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$, *si* $A(-1,2)$, $B(2,3)$, $C(1,1)$, $D(3,5)$. (Fridman, 1996, p.15)

Podemos ver que tenemos como condiciones a las coordenadas de los puntos A, B, C y D; las cuales podemos desglosar de la siguiente manera:

1. El punto A tiene por coordenadas $(-1, 2)$.
2. El punto B tiene por coordenadas $(2, 3)$.
3. El punto C tiene por coordenadas $(1, 1)$.
4. El punto D tiene por coordenadas $(3, 5)$.
5. El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.
6. El vector $\overrightarrow{CD}$ tiene su origen en el punto C y su extremo en el punto D.

Como requerimiento se nos pide construir un vector igual a la suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

Iniciando de esta manera el análisis del problema, podemos tener una idea más clara de con qué contamos y lo que buscamos para resolverlo. Teniendo en cuenta esto, siempre que realicemos el análisis de un problema debemos orientarlo a la búsqueda de sus requerimientos. De esta manera facilitaremos la resolución de cualquier problema.

En algunas ocasiones nos encontraremos problemas muy complejos, donde tendremos que desglosar de manera más fina la información que se nos presenta, por lo que debemos familiarizarnos con la estructura de las condiciones, con la intención de encontrar una forma clara de desglosar sus partes.

Las condiciones están conformadas por objetos y características. Podemos concentrar esta información mediante la tabla siguiente:

Tabla 2.2

Condiciones	**Objetos**	**Características**

Para ilustrar lo anterior tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. *Los lados menores de dos polígonos semejantes son iguales a 35 cm y 21 cm, respectivamente, y la diferencia de sus perímetros es de 40 cm. Encontrar el perímetro de cada polígono.* (Fridman, 1996, p.20)

Como requerimiento del problema, podemos ver claramente que es encontrar el perímetro de cada uno de los polígonos. Las condiciones las desglosaremos usando el cuadro anterior.

Así obtenemos la siguiente tabla:

Tabla 2.3

Condiciones	**Objetos**	**Características**
Dos polígonos semejantes	Dos polígonos	Son semejantes
El lado menor del primer polígono es 35 *cm*	El lado del polígono	Su longitud es de 35 *cm*
El lado menor del primer polígono es 21 *cm*	El lado del polígono	Su longitud es de 21 *cm*
La diferencia de los perímetros de los polígonos es de 40 *cm*	Los perímetros de los polígonos	Su diferencia es de 40 *cm*

Fridman sostiene que un desglose de este estilo permite profundizar en el análisis del problema; pero en algunos de ellos, eso dependerá tanto del tipo de problema como de su dificultad, así como del conocimiento que se tenga sobre los métodos de resolución, para decidir la profundidad del análisis requerido, y así hacer más viable la resolución del mismo.

En la resolución de problemas de matemáticas es evidente que nos encontramos con una infinidad de ellos, de diferente naturaleza ya sean geométricos o donde utilicemos ecuaciones, entre otros. Pero siempre nos toparemos con la dificultad inicial de desglosar el análisis e ilustrarlo de la mejor manera posible; por lo que siempre que sea necesario podemos apoyarnos en esquemas, cuadros, dibujos, etc., para mostrar claramente la formulación del problema y facilitar su análisis. A esta manera de ilustrar el problema se le conoce como *escritura* *esquemática del problema.*

A continuación, ilustraremos el siguiente problema realizando la escritura esquemática del problema.

Ejemplo 3. *Un caminante partió de A con rumbo a B. Después de 1 h 24 min, un ciclista partió de la misma dirección y al cabo de 1 h estaba a 1 km de alcanzarlo. Después de otra hora, al ciclista le faltaba recorrer para llegar a B, una distancia dos veces menor que la que le quedaba al caminante. Encontrar las velocidades del caminante y del ciclista si se sabe que la distancia de A a B es igual a 27 km.* (Fridman, 1996, p.23)

En la Figura 2.2, nos referimos al caminante y al ciclista como C_1 y C_2 respectivamente.

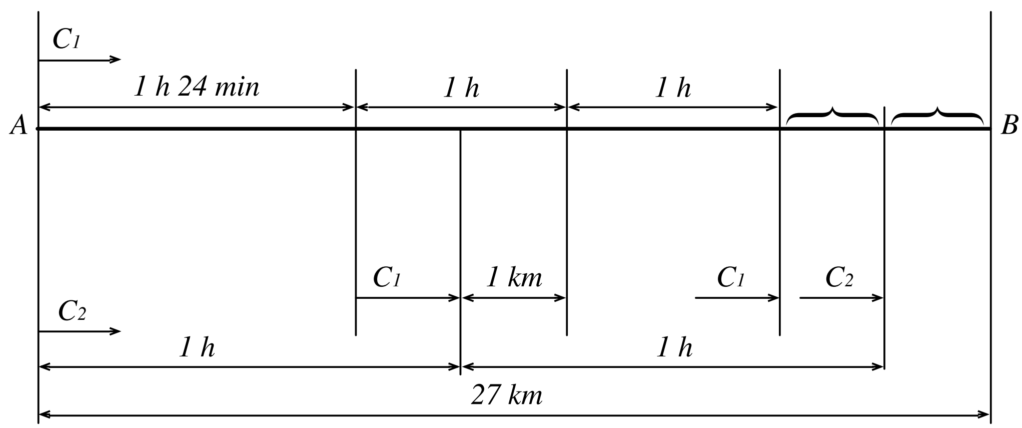


Figura 2.2

De esta manera, con ayuda del esquema anterior podemos ver de una manera diferente y más clara la formulación del problema, pretendiendo con eso facilitar la resolución del mismo. A continuación tenemos el ejemplo de un problema geométrico, para el cual construiremos la escritura esquemática del problema, y en base a esto formularemos el problema.

Ejemplo 4. *En un triángulo la suma de dos lados es igual a 14 cm, mientras que el tercer lado está dividido por la bisectriz del ángulo opuesto en segmentos de 3 y 4 cm. Encontrar las longitudes de los lados del triángulo.* (Fridman, 1996, p.27)

Consideremos el Triángulo ABC de la Figura 2.3.

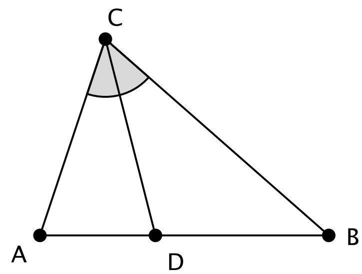


Figura 2.3

Datos:

1. $AC + BC = 14\ cm$
2. $\angle ACD = \angle BCD$
3. $AD = 3\ cm$
4. $BD = 4\ cm$

Encontrar: AC, BC, AB

Tomando esto en cuenta podemos formular el problema de la siguiente manera:

Sobre el lado AB del triángulo ABC se marca un punto D, a 3 cm del vértice A y a 4 cm del vértice B. A través del punto D se traza un segmento CD, los ángulos resultantes son iguales. Encontrar los segmentos AC, BC y AB, si la suma de los lados AC y BC es 14 cm.

Hasta aquí ya tenemos algunos elementos generales que podrían ayudarnos a la resolución de cualquier problema. Procederemos ahora a hablar sobre la resolución de problemas.

2.2.1. La esencia y la estructura de la resolución de los problemas de matemáticas

Para resolver problemas de matemáticas, ante todo, es necesario que nos hagamos la pregunta ¿Qué significa resolver un problema de matemáticas?, de esta manera avanzamos hacia concientizarnos sobre lo que debemos hacer. Por ejemplo, algunos estudiantes podrían pensar que resolver un problema es únicamente encontrar la respuesta al requerimiento, lo cual no es cierto, ya que detrás de cada respuesta hay un proceso, el proceso de resolución de problemas. Éste, según Fridman, está constituido de una serie de pasos, en los que utilizamos principios matemáticos para aplicarlos a las condiciones del problema o a las consecuencias obtenidas a partir de dichas condiciones.

A continuación tenemos una tabla donde podemos presentar la resolución de un problema atendiendo a los aspectos mencionados:

Tabla 2.4

Número del paso	**Regla general de la matemática**	**Condiciones del problema o de sus consecuencias**	**Resultado**

En esta tabla tenemos un recurso que nos ayuda a organizar el proceso de resolución de problemas, con la expectativa de poder realizarlo con más facilidad. Ejemplificaremos lo anterior con el siguiente caso.

Ejemplo 5. *Resolver la ecuación* $\cos^2 x - 2\,\text{sen}\, x = -\frac{1}{4}$. (Fridman, 1996, p.34)

Tabla 2.5

Paso	**Regla general de la matemática**	**Condiciones del problema o de sus consecuencias**	**Resultado**
1	Identidad: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	La ecuación dada	$\left(1 - \text{sen}^2 x\right) - 2\,\text{sen}\, x = -\frac{1}{4}$ (1)
2	Fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática	La ecuación (1)	$\text{sen}\, x = 0.5$ $\text{sen}\, x = -2.5$

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.5 – *Continuación de la página anterior*

Paso	Regla general de la matemática	Condiciones del problema o de sus consecuencias	Resultado
3 a 4	Fórmula para las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = a$	$\operatorname{sen} x = 0.5$ $\operatorname{sen} x = -2.5$	$x = (-1)^k \left(\frac{\pi}{6}\right) + k\pi$ No tiene solución

A partir de lo anterior, ¿podemos dar una respuesta a qué significa resolver un problema de matemáticas?

> Resolver un problema de matemáticas significa encontrar una sucesión de principios generales de la matemática (definiciones, axiomas, teoremas, reglas, leyes, fórmulas), cuya aplicación a las condiciones del problema o a las consecuencias derivadas de éstas nos conduce a obtener lo que se requiere en el problema, es decir, la respuesta. (Fridman, 1996, p.34)

Ahora, ya que sabemos qué significa resolver, desde el punto de vista de Fridman, un problema de matemáticas, es decir, ya que entendemos el proceso de resolución de problemas, podemos hablar de su estructura, la cual consta de las siguientes etapas, las cuales se describen brevemente:

1ª ***Análisis del problema.*** Entender de qué se trata, conocer condiciones, requerimientos, etc.

2ª ***Escritura esquemática del problema.*** Consiste en consignar de alguna manera el análisis de la etapa anterior, escribirlo mediante los esquemas que sean necesarios

3ª ***Búsqueda del método de resolución del problema.*** Como el nombre lo indica, en esta etapa hay que encontrar un método de solución.

4ª ***Aplicación del método de resolución.*** La estrategia encontrada en la fase anterior debe ser ejecutada.

5ª ***Prueba de la solución del problema.*** Tiene la intención de convencerse de la solución encontrada es correcta, de que satisface todos los requerimientos y condiciones establecidos.

6ª ***Análisis de la solución del problema,*** para determinar en qué condiciones el problema tiene solución y cuántas son las soluciones en cada caso posible, bajo qué condiciones el problema no tiene solución, etc.

7ª ***Formulación de la respuesta al problema,*** teniendo en consideración la etapa anterior, se expresa de manera precisa la respuesta.

8ª ***Análisis de la solución de la solución obtenida,*** para determinar si no existe otra forma más económica de resolverlo, si es posible generalizarlo, cuáles son las conclusiones que se pueden desprender de la solución, etc.

Cabe resaltar que sólo cinco de estas etapas son indispensables para la resolución de un problema: el análisis del problema, la búsqueda del método de resolución de problema, la ejecución del método de resolución, la prueba de la solución y la formulación de la respuesta. De acuerdo al tipo de problema y a los conocimientos y habilidades obtenidos a lo largo de la resolución de problemas de matemáticas, dependerá la estructura del proceso de resolución de dicho problema.

Este proceso podría extenderse o simplificarse, lo que nos da ciertas ventajas, ya que podemos adquirir nuevos conocimientos, así como comprender los métodos que podrían utilizarse. Muchos de los estudiantes suelen resolver problemas mecánicamente, porque encontraron la respuesta en un manual de soluciones o porque vieron un problema parecido donde las condiciones y el requerimiento eran los mismos y sólo cambiaban sus características, por lo que no logran ver más allá de la respuesta o comprender lo que se les pide.

En los cursos de matemáticas se establecen reglas a una diversidad de tipos de problemas que determinan la serie de pasos necesarios para su solución. A estos problemas se les conoce como *problemas característicos* o típicos.

Algunas de estas reglas son:

1. **Regla verbal.** Ejemplo: "La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias".

2. **Regla–fórmula.** Ejemplo: La fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática.

3. **Regla–identidad.** Ejemplo: La identidad para encontrar el cubo de un binomio.

4. **Regla–teorema.** Ejemplo: El teorema de Pitágoras.

5. **Regla–definición.** Ejemplo: El conjunto solución de un sistema de desigualdades es la intersección de los conjuntos de soluciones de cada una de las desigualdades que lo forman.

De acuerdo con esto, para facilitar la resolución de los problemas típicos es indispensable:

a) Recordar a conciencia las reglas (fórmulas e identidades) y principios generales (definiciones y teoremas) que se han estudiado en un curso cualquiera de matemáticas.

b) Saber aplicar todas las reglas y principios generales de las matemáticas para deducir los algoritmos para la resolución. De no lograr memorizar todas las fórmulas, teoremas, etc., podemos apoyarnos en algún manual, ya sea un formulario o de algún otro tipo.

Existen otro tipo de problemas para los cuáles no se establecen en los cursos reglas o principios matemáticos que determinen un algoritmo para su resolución. A estos problemas se les denomina *problemas no característicos* o no típicos.

La resolución de los problemas no característicos se basa en ejecutar consecutivamente una o ambas de las siguientes operaciones fundamentales (Fridman, 1996, p.55):

1. Reducir el problema no característico, mediante alguna transformación a otro problema equivalente a él, pero característico.

2. Dividir el problema no característico en varios subproblemas característicos.

Ahora apliquemos lo anterior en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6. *Construir un triángulo dadas la base, la mediana y la altura trazadas con respecto a dicha base.* (Fridman, 1996, p.56)

Dividimos el problema en los siguientes subproblemas característicos de construcción.

1. Trazar una recta paralela a la recta dada y a una distancia determinada de ella.

2. Trazar el punto medio de un segmento dado.

3. Trazar una circunferencia de radio dado con centro en el punto dado.

4. Encontrar los puntos de intersección de la recta y la circunferencia.

5. Construir un triángulo dadas su base (de magnitud y ubicación dadas) y el vértice opuesto a ella.

Al resolver estos problemas estamos resolviendo el problema no característico.

Una recomendación que hace Fridman es respecto a la necesidad de reconocer el tipo de problema al cual se está enfrentando. En este sentido propone una clasificación de los problemas dependiendo de los requerimientos del mismo. Esta clasificación es:

a) **Clase 1.** *Problemas de encontrar un objeto matemático.* Aquí, según sus palabras "el requerimiento consiste en encontrar, buscar, reconocer algún objeto matemático: una magnitud, una relación, una figura, etc."

   Como ejemplos de este tipo de problemas menciona los problemas de cálculos geométricos, de encontrar diferentes expresiones, de valores de funciones, etc.

b) **Clase 2.** *Problemas de demostración o de explicación.* Pertenecen a esta clase los problemas en los cuales el requerimiento consiste en convencerse de la validez de cierta proposición, o en someter a prueba la veracidad o falsedad de la proposición.

c) **Clase 3.** *Problemas de transformación o de construcción.* Se consideran aquí los problemas en los cuales se exige transformar una cierta expresión, construir algo que satisface ciertas condiciones, que bien puede ser una expresión algebraica o una figura geométrica.

Como podemos darnos cuenta, el trabajo que el autor presenta en este libro se centra fundamentalmente en proponer una metodología para resolver problemas matemáticos. Finalizamos esta sección con la siguiente cita:

> No es posible dar una respuesta completamente definida y única a la pregunta *"Cómo buscar un plan para resolver un problema"*, por cuanto la búsqueda del plan para la solución es un proceso muy complejo que no se presta a un análisis preciso. . . . , le recordamos insistentemente que no es posible enseñar a ejecutar la búsqueda del plan para la solución de un problema, sino que es necesario enseñarse, aprender a hacerlo uno mismo. (Fridman, 1996)

2.3. Alan H. Schoenfeld

Alan H. Schoenfeld es actualmente profesor de la cátedra de Educación Elizabeth y Edward Conner en la escuela de posgrado de la Universidad de California en Berkeley, en los Estados Unidos de América; es un profesor adscrito al Departamento de Matemáticas. En 1968 se graduó como Licenciado en Matemáticas por el Queens College de Nueva York, obtuvo los grados de Maestría y Doctorado en Matemáticas en 1969 y 1973 respectivamente por la Universidad de Stanford; sus investigaciones se centran en el pensamiento, la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con su página personal, ha escrito, editado o coeditado a la fecha veintidós libros y unos doscientos artículos sobre el pensamiento y el aprendizaje. Algunos de sus trabajos son: *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography*; *Mathematical problem solving*; *Cognitive science and mathematics education*; *Mathematical thinking and problem solving.*

En *Mathematical problem solving*, Schoenfeld caracteriza lo que significa pensar matemáticamente y describe un curso de pregrado basado en la investigación de la resolución de problemas matemáticos, proponiendo cuatro categorías del conocimiento y comportamiento esenciales para el rendimiento en la resolución de problemas, de las que se destaca la categoría de las *heurísticas*, la cual en su momento fue la base de estudio para Polya.

Como es bien sabido, el trabajo de Polya sobre la resolución de problemas, plasmado en el libro *Cómo plantear y resolver problemas*, fue lo que abrió paso a los trabajos de investigación y utilización de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos a expertos matemáticos y educadores matemáticos. Se considera que dicho texto también influyó en el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en Inglés), que publicó una Agenda para la Acción: Recomendaciones para las Matemáticas Escolares de la década de los 80, dónde la primera recomendación de dicho programa fue que la resolución de problemas debe ser el enfoque de las matemáticas escolares en los 80, la cual dice que:

> "El desarrollo de la habilidad de resolución de problemas debe orientar los esfuerzos de los educadores matemáticos a través de la próxima década. El rendimiento en la resolución de problemas medirá la eficacia de nuestro poder personal y nacional de la competencia matemática."(Schoenfeld, 1985, p.69)

A partir del publicación de la Agenda para la Acción, en 1980, el NCTM tituló y dedicó su anuario a la resolución de problemas de matemáticas en la escuela, el cual se concentra completamente sobre el trabajo de las cuatro etapas de la resolución de problemas de Polya. (citado por Schoenfeld, 1985, p.69)

Retornando al texto *Mathematical problem solving*, en el primer capítulo del libro, Schoenfeld presenta una estructura para examinar lo que la gente sabe y hace al momento de trabajar con problemas con gran contenido matemático, con el objetivo de dar una explicación y poder hacerle frente a todo lo que implica intentar resolver un problema, por ejemplo, ¿qué conocimiento matemático es accesible para quien soluciona problemas?, ¿cómo se elige?, ¿cómo se utiliza?, ¿de qué manera las aproximaciones elegidas para resolver el problema reflejan la comprensión del individuo de esta área de las matemáticas?, ¿cómo se explica el éxito o el fracaso del intento de resolución de problemas?

Schoenfeld afirma que entendemos cómo pensar matemáticamente cuando somos ingeniosos, flexibles y eficientes con nuestras habilidades para poder abordar satisfactoriamente nuevos problemas de matemáticas. En la siguiente tabla, tomada del texto (Schoenfeld, 1985, p.15), "Knowledge and Behavior Necessary for an Adequate Characterization of Mathematical

Problem–Solving Performance", se muestran desglosadas las cuatro categorías mencionadas anteriormente.

Tabla 2.6: Conocimientos y Comportamientos Necesarios para una Caracterización Adecuada del Rendimiento en la Resolución de Problemas Matemáticos

Recursos: Son los conocimientos matemáticos que poseen los individuos y que pueden ser puestos en acción sobre el problema en cuestión. Pueden consistir en:

Intuiciones y conocimientos informales respecto a la esfera de conocimiento donde esté inmerso el problema, como podrían ser:

- Datos.
- Procedimientos algorítmicos.
- Procedimientos de "rutina" no algorítmicos.
- Comprensiones (conocimiento proposicional) sobre las reglas elegidas para trabajar en el ámbito de que se trate.

Heurísticas: Estrategias y técnicas para avanzar al resolver problemas desconocidos o no comunes; reglas básicas para una eficaz resolución de problemas, incluyendo:

- Dibujar figuras; introducir notación adecuada.
- Explotar problemas relacionados.
- Reformular problemas; trabajar hacia atrás.
- Verificar y comprobar los procedimientos.

Control: Decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias:

- Planificación.
- Supervisión y evaluación.
- Toma de decisiones.
- Actos conscientes metacognitivos.

Sistemas de creencias: La "visión personal del mundo matemático", el conjunto de (no necesariamente consciente) determinantes del comportamiento de un individuo acerca de:

- Si mismo.
- Su entorno.
- El tema.
- Las matemáticas.

2.3.1. Recursos

El desempeño en la resolución de problemas se construye gracias a los conocimientos básicos matemáticos con los que cuenta quien resuelve problemas; estos conocimientos son denominados *recursos.*

> "Los recursos son los pilares sobre los cuales está integrado el rendimiento de la resolución de problemas. Una descripción de estos pilares —un inventario de lo que saben las personas que resuelven problemas y la forma en que acceden a ese conocimiento— es esencial si queremos comprender lo que sucede en la resolución de problemas."(Schoenfeld, 1985, p.46)

Schoenfeld analiza algunos temas que nos permiten dar respuesta a las siguientes preguntas, ¿cuál es la naturaleza del conocimiento que las personas tienen a su disposición? y ¿cómo se organiza y se accede a dicho conocimiento para su uso?, que son un factor importante en la investigación de algunos campos de la psicología, por ejemplo, la psicología del procesamiento de información (psicología IP, por sus siglas en Inglés).

La mayoría de las personas realizamos actividades de manera automática porque ya las hemos realizado demasiadas veces y no representan una situación problemática para nosotros, y aunque no necesitamos recurrir a métodos de solución que ya tenemos previamente concebidos, estas habilidades que nos permiten realizar dichas actividades son parte importante en la resolución de problemas.

Un ejemplo claro de lo que realizan los expertos es la *percepción de un problema*, en otras palabras, como su nombre lo dice, se refiere a la manera en que las personas comprenden un problema debido a su experiencia en situaciones problemáticas previas, que les sirven de información para poder identificar el tipo de situación que se les presenta y a la vez poder determinar las técnicas adecuadas para modelar la solución de dicho problema; a esto le llama tener un *esquema del tipo del problema.*

Es muy fácil identificar el tipo de problema con el que nos encontramos gracias a sus características, por lo que hay que tenerlas claramente comprendidas para evitar complicaciones al momento de relacionarlas con las características de algún determinado tipo de problemas.

De acuerdo a lo anterior, Schoenfeld nos muestra una ampliación de las cuatro afirmaciones del rendimiento matemático basado en esquemas, tomadas del trabajo *From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems* de Hinsley, Hayes, y Simon. Estas ampliaciones son:

1. Las personas clasifican su experiencia en tipos.

2. Las personas suelen clasificar sus nuevas experiencias de manera coherente con sus clasificaciones previas, con frecuencia antes de que las nuevas experiencias sean analizadas detalladamente. Si las "características esenciales" de la nueva experiencia corresponden con las de una categoría ya definida, dicha categoría se obtiene antes de que la formulación de la nueva experiencia se complete, y ayuda a darle forma.

3. Las personas tienen "cuerpos" de información sobre las categorías de experiencia que son potencialmente útiles al tratar con nuevas experiencias que entran en esas categorías. Es decir, las personas elaboran sus expectativas de las circunstancias a la luz de su experiencia previa; herramientas y técnicas que han sido útiles en el pasado "vienen a nuestra mente" en la situación presente.

4. Las personas usan su "conocimiento categórico" para interpretar y abordar nuevas situaciones. De hecho, su opinión sobre estas situaciones está definida —a veces de forma imprecisa— por sus categorizaciones previas.

Por otro lado, las descripciones de algunos tipos de conocimientos importantes para el rendimiento de la resolución de problemas son:

1. *Conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio.*

   Este conocimiento, como su nombre lo dice, es informal e intuitivo, lo que quiere decir que dicho conocimiento, en efecto, no depende de definiciones o formalidad. Cada uno de nosotros, como personas, tenemos una concepción respecto a un determinado objeto, debido a la experiencia que hemos tenido con ese objeto en nuestra vida cotidiana, como es el caso de los niños que al círculo le llaman rueda, o cuando decimos "vete derecho" para referirnos a ir en una línea recta; es entonces cuando entra la intuición, para poder decir que una línea recta no es sólo una línea derechita sino una línea formada por una sucesión de puntos en una misma dirección, la cual nos permite crear un enlace con el conocimiento formal.

2. *Hechos, definiciones, y análogos.*

   Siempre que los profesores, en clase de matemáticas, nos plantean un problema para resolverlo es sobre el tema que se acaba de enseñar, es decir, tenemos un problema que involucre límites cuando vemos el tema de límites, pero eso no significa que no los volveremos a utilizar; la mayoría de los recursos que tenemos los utilizamos después en nuevos problemas, por eso debemos tener claras las definiciones de nuestros recursos, para poder resolver los problemas que se nos presenten en un futuro.

   Lo mismo sucede con los hechos, que con frecuencia nos provocan confusión; por ejemplo, si en un problema dice "encuentra el punto medio de la línea que une dos puntos", la mayoría de las veces entendemos que es una línea recta por el contexto, y esto no es correcto porque puede ser una línea curva, y estos hechos falsos provocan que los estudiantes no logren resolver el problema.

3. *Procedimientos algorítmicos.*

   Muchas veces tenemos un problema y sabemos cómo resolverlo pero puede darse el caso en que no se tenga claro el procedimiento, desde confundir los pasos hasta introducir pasos que no proceden u omitir pasos importantes; y en otros se cometen errores en alguno de los pasos, como es común al resolver ecuaciones; por ejemplo, cuando tenemos $\frac{x}{-2} = 8$, al despejar x muchos estudiantes lo hacen de la siguiente manera, $x = (8)(2)$, entonces $x = 16$. Si no tenemos bien definido un procedimiento hay que buscarlo en un libro o preguntar, porque al pasar desapercibidos estos errores se seguirán presentando.

4. *Procedimientos de rutina.*

   > Los procedimientos de rutina son justo lo que su nombre sugiere, técnicas bien codificadas pero no algorítmicas para resolver determinadas clases de problemas (por ejemplo, el procedimiento general para resolver problemas

> de máximos y mínimos en el cálculo). Es evidente que para ser competente en matemáticas se debe tener la capacidad de aplicar los procedimientos de rutina cuando resulten apropiados y realizarlos de manera correcta. Los procedimientos de rutina pueden ser bastante complejos y estar lejos de ser algorítmicos. Consideremos los problemas de máximos y mínimos, por ejemplo. Elegir un problema útil que represente a toda una clase de problemas, hacer una elección correcta de la variable independiente, obtener una fórmula para la variable dependiente, etcétera, son habilidades absolutamente no triviales. El punto es, sin embargo, que todas estas habilidades son *tácticas* en este contexto. (Schoenfeld, 1985, p.58-59)

Por lo anterior, debemos tener bien definidos nuestros recursos, porque es lo que generalmente se toma en cuenta en este tipo de procedimientos, para que no se presenten complicaciones en la resolución de problemas.

5. *Competencias pertinentes.*

   De unos años está el enfoque de competencias en los diferentes planes de estudio aquí en México y en otros países, donde se encuentra la competencia matemática, donde la resolución de problemas juega un papel importante.

   Quienes resuelven problemas de matemáticas deben tomar decisiones, tener un pensamiento crítico para poder decidir, por ejemplo en los diferentes tipos de conocimientos que se presentan aquí; cuáles son los procedimientos adecuados y cuáles no, cuáles de nuestros conocimientos emplearemos para resolver un determinado problema, cómo y cuándo accederemos a ellos.

   Muchas veces nos resulta difícil tener un buen control de la situación, tomar decisiones correctas, pero para eso existen estrategias de resolución de problemas que nos servirán de apoyo en la toma de decisiones.

6. *Conocimiento acerca de las reglas del discurso en el dominio.*

   Este conocimiento depende de cómo percibamos las reglas del juego, de relacionar problemas con otros problemas, ya que a veces no podemos solucionar un problema porque

> no lo relacionamos con otro, aún estando en la misma situación problemática, porque en el nuevo problema se modificó alguna condición ya no sabemos qué hacer.
>
> Esto se debe a que muchas veces realizamos ejercicios y no resolvemos problemas, y cuando tenemos un problema no nos tomamos la molestia de pensar encontrar una relación con otro, como es el caso de la geometría, un estudiante puede determinar los lados del triángulo y sus ángulos, pero cuando se trata de un trapezoide, se bloquea y ya no sabe qué hacer, cuando lo más sencillo podría ser relacionarlo con triángulos, dividir el trapezoide y ya proceder a resolver el problema.

Hay que estar conscientes que debido a los recursos se pueden presentar patrones constantes de errores en los estudiantes. Los errores más comunes se presentan en aritmética, que muchas veces podrían ser considerados como "errores de dedo", debido a que no logramos dominar el procedimiento, como suele suceder en el caso de la suma y la resta elemental. En la escuela nos enseñan a sumar y posteriormente, ya que llevamos a cabo y tal cual el procedimiento de la suma, nos enseñan a restar; es por eso que se presentan diversos tipos de errores, debido a que relacionamos nuestros conocimientos previos con los nuevos.

Podemos ejemplificar lo anterior con la suma y la resta de tres dígitos, donde el estudiante combina la operación suma con la resta.

$$\begin{array}{rl} 123 & + \\ \underline{241} & \downarrow\uparrow \\ 364 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 342 & - \\ \underline{289} & \uparrow \\ 147 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 342 & - \\ \underline{289} & \downarrow \\ 053 & \end{array}$$

En la suma, vemos que se obtiene el mismo resultado al sumar de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba, es decir, sumar $3 + 1 = 4$ y $1 + 3 = 4$, por lo que es común que los estudiantes transfieran este procedimiento a la resta, pensándose que es lo mismo realizar la operación $2 - 9$ que $9 - 2$, dejando de lado las propiedades de la resta, y la manera en que debe realizarse.

En la experiencia ya comentada con niños de primaria, aparecieron bastantes dificultades para restar decimales, se cometían muchos errores al llevar a cabo el procedimiento, a pesar de saber el concepto de restar y estar conscientes de que estaban trabajando con decimales. El problema era que al aplicar dicho procedimiento lo hacían de manera incorrecta o incompleta, se les olvidaba poner el punto o no lo tomaban en cuenta porque al realizar la operación estaban pensando en la resta de números enteros, que en sí era una resta pero no en el mismo ámbito de conocimiento.

Otros de los errores más comunes que se presentan son los errores en álgebra, que de igual manera se deben a los conocimientos previos, a los recursos. Algunos ejemplos claros de los errores que cometen en álgebra los estudiantes son:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6} \qquad \text{o} \qquad 3^6 + 3^8 = 3^{14}$$

A estos errores se les conoce como errores de extrapolación, los cuales consisten en aplicar, tal cual, un criterio conocido a otros casos similares para extraer conclusiones o hipótesis. En otras palabras, el origen de estos errores se debe a que aplicamos nuestros recursos en nuevas situaciones, pero sin hacer modificaciones para adaptarlos a la situación; como en el ejemplo anterior, al sumar fracciones de igual numerador los estudiantes cometen el error de sumar como lo hacen con los números enteros.

Estos son algunos de los patrones de los errores que se cometen como consecuencia del uso incorrecto de nuestros recursos, pero hay una gran diversidad, como lo es el confundir palabras en enunciados y de ahí resolver de manera incorrecta el problema, por mencionar algún otro.

Por esto es preciso tener en mente que los recursos son una parte esencial en el rendimiento de la resolución de problemas, y hay que identificar en qué situaciones utilizarlos, no solamente intentar erradicarlos enseñando la forma correcta de aplicar los procedimientos adecuados, sino buscando el origen de los errores y diferenciando los mismos conceptos en los diferentes dominios, porque así como pueden llevarnos al éxito de la misma manera nos llevarán al fracaso.

2.3.2. Heurísticas

> "Para ser ingeniosos, los estudiantes necesitan estar familiarizados con un amplia gama de estrategias de resolución de problemas generales conocidas como heurísticas."(Schoenfeld, 1985, p.12)

> Heurística o heurética, o "ars inveniendi", era el nombre de una determinada rama de estudio, bastante mal definida, que se relacionaba a la lógica, a la filosofía o a la psicología, se describían con frecuencia las líneas generales, pero rara vez sus detalles, y era tan buena como olvidada. El objetivo de la heurística es el estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento y de la invención ... Heurística, como adjetivo, significa "que sirve para descubrir".(Polya 1965, citado por Schoenfeld, 1985, p.22)

Cómo mencionamos anteriormente al hablar del trabajo de Fridman, es importante tener una idea clara de lo que significa un problema antes de comenzar a resolverlo, pero es difícil tener un concepto bien definido. Según Schoenfeld esto se debe a que la resolución de problemas es relativa, y es cierto, ya que debido a nuestros antecedentes en la resolución de problemas, pensamos que cuando tenemos un problema se trata solamente de encontrar su solución, quizá realizando operaciones matemáticas que hemos hecho muchas veces. Esto nos puede llevar a confundir problemas con ejercicios, lo que no es lo mismo; un problema va más allá de la matemática misma, es encontrarnos con una situación que nos es difícil solucionar para la que tenemos que pensar, y por el contrario, un ejercicio es realizar varias veces un proceso para perfeccionarlo y que nos lleva a la mecanización.

Es aquí donde entran las estrategias heurísticas, las que Schoenfeld define como "una sugerencia general o técnica que ayuda a quienes resuelven problemas a entender o a resolver un problema". Utilizar estrategias heurísticas no garantiza que los estudiantes mejorarán en la resolución de problemas, debido a que muchos piensan que dichas estrategias pueden ayudarlos a resolver problemas por parecer simples pero de no tener los conocimientos y las habilidades necesarias pueden volverse complicadas y su desempeño no será el esperado.

Schoenfeld analiza dos estrategias heurísticas generales, que más que ser generales son una colección de subestrategias que están relacionadas entre sí. Dichas estrategias son: *examinar casos particulares*, que según Schoenfeld es la estrategia más utilizada al comenzar la resolución de problemas y *explotar subobjetivos.*

A continuación explicaremos en qué consisten.

I. Examinar casos particulares

Estrategia S: Para entender mejor un problema desconocido, puede ejemplificar el problema considerando varios casos particulares. Esto puede sugerir la dirección de, o quizá la verificación de, una solución.

El siguiente problema es un ejemplo del tipo de problemas en los que podemos aplicar la Estrategia S y obtener resultados satisfactorios.

Problema 1. *Encuentre la fórmula de forma cerrada de la serie*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^{k+1}}$$

Solución:

Empleando la Estrategia S, consideraremos casos particulares calculando las primeras 4 sumas parciales.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k-1}{2^{k+1}} = 0$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{8}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{11}{32}$$

De lo anterior, podemos ver que el primer término de la sucesión de sumas parciales de la serie es 0 y, como la serie comienza en $k = 1$, la suma parcial S_k debería ser igual a $\frac{1}{2} - \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, para que en efecto, el primer término sea 0. Pero, para $k = 2$ tenemos $S_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \neq \frac{1}{8}$; por lo que debemos modificar nuestra S_k.

Ahora, si tenemos $S_k = \frac{1}{2} - \frac{k}{2^{k+1}}$, para $k = 1$ tendríamos que $S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$, lo cual no nos sirve y debemos seguir modificando S_k.

Si $S_k = \frac{1}{2} - \frac{k+1}{2^{k+1}}$, entonces

para $k = 1$, $S_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$;
para $k = 2$, $S_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$;
para $k = 3$, $S_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$;
para $k = 4$, $S_4 = \frac{1}{2} - \frac{5}{32} = \frac{11}{32}$;

por lo que podemos ver, la S_k que elegimos se cumple para $k = 1, 2, 3, 4$.

Entonces, podemos suponer que:

$$\begin{aligned} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^{k+1}} &= 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{11}{32} + ... + \frac{n-2}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

la cual es fácilmente demostrable por inducción matemática. Por lo tanto, la fórmula de forma cerrada de la serie es

$$\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Hay que estar conscientes de que esta estrategia puede tener un alto grado de dificultad para quienes no tienen experiencia en la resolución de problemas por ser una estrategia muy generalizada, lo que puede llevar a una mala interpretación de la misma.

II. Establecer subobjetivos

Estrategia H: Si no puede resolver el problema dado, establezca subobjetivos (el cumplimiento parcial de las condiciones deseadas). Habiéndolos alcanzado, utilizarlos como base para resolver el problema original.

A continuación, se muestra un problema donde se utiliza la Estrategia H para resolverlo.

Problema 2. *Coloca los números del 1 al 9 en los nueve círculos de la Figura 2.4, para que la suma de los tres números de cada recta sea 15. Deben usarse todos los números y no deben repetirse en los nueve círculos.*

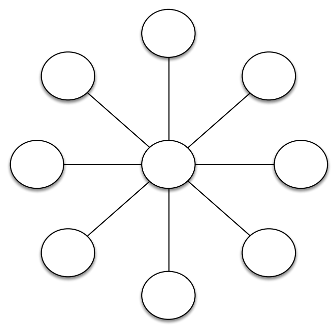


Figura 2.4

En este problema, debemos reducir el campo de búsqueda de soluciones, ya que podemos acomodar de diversas maneras los 9 números; por eso es necesario plantearnos subobjetivos. Nuestro primer subobjetivo será el número que irá en el centro de la figura, por estar implicado en la suma de todas las rectas, y porque de dicho número depende que la suma de cada recta sea 15.

Al implementar en sus cursos dichas estrategias y promover la adquisición de herramientas que permitieran incrementar el ingenio y la eficiencia de los alumnos al utilizar sus habilidades en la resolución de problemas, Schoenfeld confirma que sus estudiantes tienen poco o no tienen conocimiento sobre las estrategias heurísticas.

Como es bien sabido éste es uno de los principales conflictos que presentan quienes resuelven problemas, nos referimos a la falta de conciencia sobre dichas estrategias, algunos las han utilizado en cambio otros no las conocen. Por ejemplo, una de las etapas que muchos no realizamos al resolver problemas es verificar la solución, y no es que no estemos conscientes, simplemente encontrando la solución pensamos que ya terminamos, es aquí donde entra el *control*.

2.3.3. Control

> Las habilidades para resolver problemas . . . atribuidas al ejecutor (quien resuelve el problema) en muchas teorías de la inteligencia humana y artificial: la predicción, el control, la supervisión, prueba de la realidad, además de la coordinación y control de los intentos deliberados para resolver problemas . . . son las características básicas del pensamiento eficiente en una amplia gama de situaciones de aprendizaje . . . El uso de una parte apropiada de conocimiento o de rutina en el momento adecuado y en el lugar adecuado es la esencia de la inteligencia. (Ann Brown, 1978, citado por Schoenfeld, 1985, p.97)

El éxito o fracaso de la resolución de problemas depende de la importancia que le demos a las estrategias de control en dicho proceso y de la habilidad que tengamos sobre las estrategias heurísticas.

Antes hablamos de las estrategias heurísticas, que son utilizadas para poder continuar con nuestro trabajo en situaciones que nos representan un problema y que van de la mano con los recursos, se basan en ellos. Si la persona que resuelve el problema no tiene buenos recursos, no podrá avanzar, se encontrará en una situación difícil en la que no sabrá que hacer después de haber utilizado dichas estrategias.

Es aquí donde entra el *control*, que según Schoenfeld se refiere a la forma en que las personas explotan la información que tienen a su disposición, a la planificación, a las decisiones que se toman de qué hacer o no hacer al intentar resolver problemas; es decir, que dependiendo del control que tenga quien resuelve el problema, éste será o no resuelto. Puede suceder que se utilicen todos los recursos que se tienen y se resuelva cualquier problema con eficiencia, o que por el contrario, se desperdicien todas las habilidades y no se pueda resolver siquiera un problema sencillo.

A continuación se presenta la tabla “Frequently Used Heuristics” (Schoenfeld, 1985, p.109).

Tabla 2.7: Heurísticas utilizadas frecuentemente

Análisis

1. Dibujar un diagrama cuando sea posible.
2. Examinar casos especiales:
   a) Elegir valores especiales para ejemplificar el problema y obtener una idea de ello.
   b) Analizar limitando casos para explorar el rango de posibilidades.
   c) Establecer cualesquiera parámetros enteros iguales a 1, 2, 3, . . . , en sucesión, y buscar un modelo inductivo.
3. Intentar simplificar el problema por
   a) Explotación de la simetría, o
   b) Usando argumentos "sin pérdida de la generalidad".

Exploración

1. Considere problemas esencialmente equivalentes:
   a) Reemplace las condiciones por otras equivalentes.
   b) Recombine los elementos del problema en diferentes maneras.
   c) Introduzca elementos auxiliares.
   d) Reformule el problema
      i. cambie la perspectiva o la notación,
      ii. tome en cuenta el argumento por contradicción o contrapositiva,
      iii. suponga que tiene una solución y determine sus propiedades.
2. Considere problemas ligeramente modificados:
   a) Elija subobjetivos.
   b) Expandir una condición e intentar imponerla de nuevo.
   c) Descomponga el dominio del problema y trabaje en él caso por caso.
3. Considere problemas ampliamente modificados.
   a) Construya un problema análogo con menos variables.
   b) Mantenga fijas todas las variables a excepción de una para determinar las consecuencias de dicha variable.

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.7 – *Continuación de la página anterior*

c) Intente explotar los problemas relacionados que tienen semejante

   i. forma,

   ii. "datos",

   iii. conclusiones.

   Recuerde: cuando se trata de problemas relacionados, y más fáciles, usted debe tratar de explotar tanto el resultado como el método de solución en el problema dado.

Verifique su solución

1. ¿Sus soluciones pasan estas pruebas específicas?
   a) ¿Se utilizan todos los datos dados?
   b) ¿Es conforme a las estimaciones o predicciones razonables?
   c) ¿Soporta las pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?
2. ¿Pasa las pruebas generales?
   a) ¿Puede obtenerla de otra manera?
   b) ¿Puede ser justificada por casos especiales?
   c) ¿Pueden reducirse a resultados conocidos?
   d) ¿Puede utilizarse para generar algo que usted ya conoce?

En la Figura 2.5 se ilustran cinco etapas de la resolución de problemas que son imprescindibles según Schoenfeld.

Siempre que tenemos un problema por resolver lo primero que hacemos es un análisis del problema, que es la primera etapa de la resolución de problemas y es donde leemos detenidamente el problema y determinamos lo que se da y lo que se pide (objetivos), buscamos si existen heurísticas que, dependiendo del problema y de quién lo resuelve, nos sean útiles para realizar el análisis.

Del análisis se desprende la planificación, que nos permite tener un "control maestro" del proceso de resolución de problemas. Al planear la solución del problema esto debe de hacerse de manera indirecta, para que se vaya puliendo mientras se realiza el proceso; es decir, siempre debemos planear lo que haremos para resolver un problema, pero es recomendable hacer planes a corto plazo, ya que muchas veces al llevar a cabo un plan no sale como esperamos, en el camino podemos encontrarnos con dificultades o nuevas ideas para resolver el problema y que nos faciliten su solución.

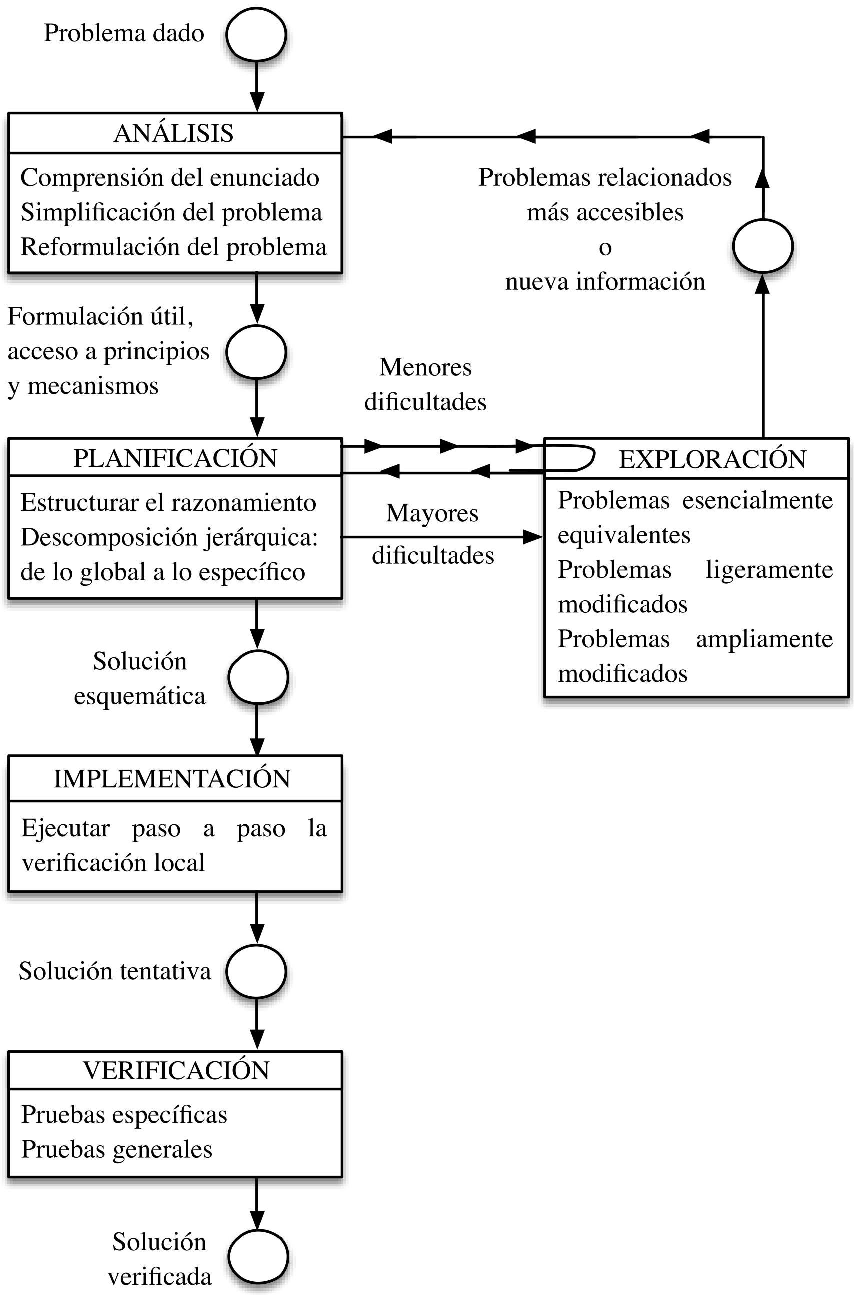


Figura 2.5: Estructura esquemática de la estrategia de resolución de problemas. (Schoenfeld, 1985, p.110)

Por estas razones, Schoenfeld (1985, p.109) nos recomienda que se realice el proceso "sin involucrarse en los cálculos detallados u operaciones complejas hasta que: (1) haya pensado en otras alternativas; (2) exista una justificación clara para ellas; (3) otras etapas de la solución del problema hayan avanzado hasta el punto en que los resultados de los cálculos o son necesarios, o son sin duda útiles".

La exploración es la esencia de la estrategia heurística, ya que en esta etapa entran en juego la mayoría de las estrategias heurísticas de la resolución de problemas. Como vimos en la tabla anterior, se divide en tres etapas que nos permiten explorar ampliamente el problema, y de haber comprendido claramente el problema será más fácil explorarlo.

Luego, tenemos la *implementación*, que Schoenfeld dice que debería ser la última etapa de la resolución del problemas. Considera, sin embargo, útil la *verificación* o comprobación, la cual no debe ser olvidada pero que la mayoría olvidamos, quizá porque no se le da la importancia que merece o que confiamos plenamente en lo que hicimos y otras veces por el tiempo. Es necesario realizarla ya que por cualquier motivo podemos cometer errores que afecten a la solución del problema y verificando podemos corregirlos, o encontrar otras soluciones que nos faciliten la solución así como relacionar el tipo de problema con otras áreas de la matemática.

De esta manera, ya terminada la resolución del problema, podemos estar seguros de que la solución es correcta, sin embargo debemos tomar en cuenta que no siempre todo sale como esperamos, por lo que Schoenfeld nos muestra los efectos de los diferentes tipos de decisiones de control en el éxito de la resolución de problemas: Un espectro de impacto (Schoenfeld, 1985, p.116), los cuales son:

- **Tipo A.** Malas decisiones garantizan fracaso: Búsquedas sin esperanzas desperdician los recursos, y se ignoran las direcciones potencialmente útiles.

- **Tipo B.** Comportamiento directivo es neutral: Búsquedas sin esperanzas se reducen antes de causar desastres, pero los recursos no están siendo explotados como podrían serlo.

- **Tipo C.** Las decisiones de control son una fuerza positiva en la solución: Los recursos son cuidadosamente elegidos y explotados o abandonados adecuadamente como resultado de un cuidadoso monitoreo.

- **Tipo D.** No hay necesidad de un comportamiento de control: Los hechos y procedimientos apropiados para la solución de problemas son accedidos en la memoria a largo plazo (LTM, por sus siglas en inglés).

El control también es utilizado en otras áreas para la planificación, es decir, para determinar el orden en el que se realicen ciertas tareas de la mejor manera, de ser posible, realizar primero las tareas a las que tengamos que dedicarles más tiempo o de las que necesitemos más apoyo de no tener los recursos suficientes como, por ejemplo, recurrir a libros; un ejemplo claro de esto es "Pintar la escalera y pintar el techo"(Sacerdoti, 1977, aparece en Schoenfeld, 1985, p.133), o el modelo de planificación "oportunista" Hayes–Roth:

> La planificación de actividades de las personas es en gran medida oportunista. Es decir, en cada punto del proceso, las decisiones y observaciones actuales del planificador sugieren diversas oportunidades para el desarrollo del plan. Las decisiones del planificador posteriores al seguimiento de las oportunidades seleccionadas. A veces, estos procesos de decisión siguen un camino ordenado y produce una expansión ordenada de arriba a abajo. Sin embargo, algunas de las decisiones y observaciones podrían sugerir oportunidades menos ordenadas para el desarrollo del plan. Por ejemplo, una decisión acerca de cómo llevar a cabo las actividades previstas inicialmente podría iluminar en ciertas limitaciones en la planificación de las actividades posteriores y hacer que el planificador centre su atención en esa fase del plan. Del mismo modo, ciertas modificaciones de bajo nivel de un plan anterior, un plan abstracto podría sugerir un plan alternativo para sustituir al original. (citado por Schoenfeld, 1985, p.134)

Respecto a la resolución de problemas matemáticos y al modelo Hayes–Roth hay un paralelismo según Schoenfeld (1985, p.134),

> en la realización de algunos cálculos pequeños, por ejemplo, un individuo puede observar la simetría en las ecuaciones que manipula. Esto puede sugerir que

> la simetría juega un papel importante en el problema original y puede requerir una revisión de todo el enfoque. O el individuo puede decidir hacer algunos cálculos detallados en las primeras etapas del proceso de planificación para que no haya complicaciones o desorden más adelante. Por lo tanto, gran parte del comportamiento matemático competente es oportunista en el sentido discutido por Hayes–Roth. La clave en ambos casos radica en la supervisión del estado de una solución a medida que evoluciona y adoptar las medidas adecuadas al obtener nueva información.

Otra parte importante de esta categoría es la *metacognición*, que es considerada en la mayor parte de lo que menciona Schoenfeld (1985) sobre el control, la cual es asociada a Flavell (1976), citado por Schoenfeld (1985, p.137), quien la define como:

> Metacognición se refiere al conocimiento que uno tiene sobre sus propios procesos y productos cognitivos o todo lo relacionado con ellos, por ejemplo, las propiedades de la información o los datos relevantes para el aprendizaje. Por ejemplo, estoy implicado en la metacognición ... si me doy cuenta de que estoy teniendo más dificultad en aprender A que B; si se me ocurre que debo comprobar por segunda vez C antes de aceptarlo como un hecho; si se me ocurre que habría que examinar mejor todas y cada una de las alternativas en una elección múltiple antes de decidir cuál es la mejor ... La metacognición se refiere, entre otras cosas, al control y regulación y organización consecuente de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los que se actúan, por lo general al servicio de alguna meta u objetivo de la resolución de problemas concretos.

Ahora, podemos hablar de la metacognición en la educación matemática que tiene la misma importancia que la metacognición; Lesh (1982, 1983a, b), citado por Schoenfeld (1985, p.139), argumenta que la clave para el comportamiento de un individuo en la resolución de problemas es el modelo conceptual que se tenga a la mano de la situación (problema). El comportamiento experto, en el que se accede normalmente a los recursos adecuados, es el resultado de que los expertos posean modelos conceptuales estables. Por otra parte, las dificultades de muchos estudiantes se deben al hecho de que sus modelos conceptuales son inestables.

Por otra parte, las estrategias de control son desarrolladas con la interacción social ya que desde que somos pequeños interactuamos con nuestros padres y con objetos en diferentes situaciones.

> Cada función en el desarrollo cultural de los niños aparece dos veces: primero, a nivel social, y posteriormente, a nivel individual; primero, *entre* personas (*inter-psicológico*), y luego en el *interior* del niño (*intrapsicológico*). Esto se aplica por igual para la atención voluntaria, para la memoria lógica, y para la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos humanos. (Vygotsky, 1978, citado por Schoenfeld, 1985, p.141)

2.3.4. Sistemas de creencias

Por último, Schoenfeld presenta los *sistemas de creencias* que como lo dice su nombre, están constituidos por lo que creemos sobre las matemáticas y que esto es lo que nos lleva a decidir cómo abordar un problema, que herramientas y habilidades se implementarán en la resolución del problema, y así establecer el contexto con el que funcionan los recursos, las heurísticas y el control.

Las cuestiones sobre las creencias son muy importantes, ya que ocupan un lugar poco estable entre los determinantes cognitivos y afectivos del comportamiento matemático. Podríamos pensar que las cuestiones afectivas no son importantes o no tanto como las cuestiones cognitivas; por ejemplo, la mayoría de las personas no muestran un interés hacia las matemáticas y no tanto porque no les gusten si no porque tienen miedo de resolver situaciones problemáticas en matemáticas por pensar que no pueden resolverlas. Esta actitud es conocida como *matefobia*, y esto viene sucediendo desde que somos pequeños porque siempre escuchamos o pensamos que las matemáticas son muy difíciles y nosotros mismos nos bloqueamos, y esto puede afectar nuestro comportamiento ante problemas matemáticos, desde identificar las ideas principales hasta nuestros recursos.

Schoenfeld nos muestra un contraste entre los problemas de construcción y el empirismo, lo que nos permite observar el comportamiento de los estudiantes. En el primero los alumnos construyen la solución de un problema, lo que permite poner en juego sus recursos y el control, para decidir cuándo y como utilizarlos; en cambio, el segundo, induce al estudiante a que se comporte de determinada manera.

El siguiente ejemplo es un problema de construcción.

Problema. *En un triángulo rectángulo, construya la mediatriz de la hipotenusa.* (Rich, 1991, p.306)

La hipotenusa del triángulo rectángulo ABC de la Figura 2.6 es el segmento BC.

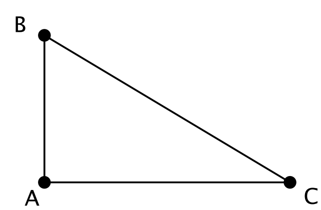


Figura 2.6

Trazamos dos circunferencias, la primera con centro en B y radio en C, y la segunda con centro en C y radio en B; marcamos los puntos D y E de la intersección de las circunferencias.

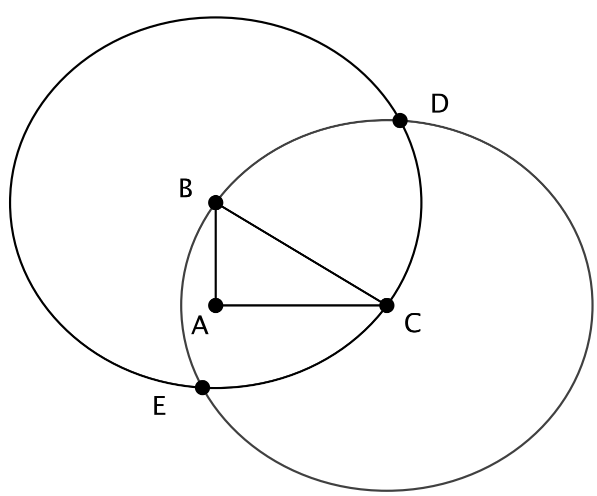


Figura 2.7

Trazamos la recta que pasa por D y E, que es la mediatriz de la hipotenusa.

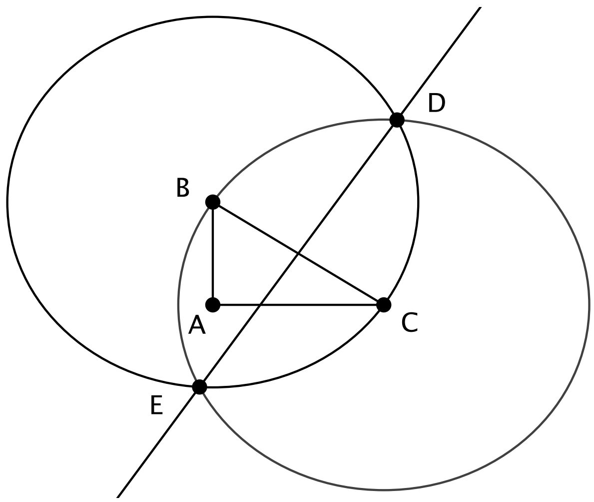


Figura 2.8

En el ejemplo anterior, los estudiantes construyen la mediatriz mediante sus conocimientos previos, los cuales les permiten aplicarlos y ellos deciden cómo y cuáles usar, a diferencia del modelo empírico.

A continuación se presentan los axiomas empíricos, tomados del texto (Schoenfeld, 1985, p.161), que provienen de la estructura de creencias, que es el origen del modelo de predicción del rendimiento de los estudiantes en problemas de construcción. Con esta parte cerraremos lo correspondiente al trabajo de Schoenfeld.

> **Axioma 1.** La percepción y la intuición provienen de los dibujos. Entre más preciso sea el dibujo, es más probable descubrir información útil en él.

> **Axioma 2.** Hay dos factores que sobresalen en la generación y la clasificación de la hipótesis de solución. Los cuales son (1) la "comprensibilidad intuitiva" de una solución y (2) la percepción relevante de ciertas características físicas del problema. Es decir, (1) si puede "ver el camino" de la construcción de una posible solución con más claridad que la solución de otro, el primero tendrá mejor posición y se probará primero. Esto es así a menos que (2) de alguna característica del problema domine perceptualmente como un ingrediente esencial de una solución. Si este es el caso, las soluciones posibles incluyendo la percepción de la característica dominante son las más destacadas (excepto los que están en orden de comprensibilidad).

Axioma 3. Las hipótesis posibles se prueban en orden serial: Primero la Hipótesis 1 hasta que es aceptada o rechazada, luego la Hipótesis 2, y así sucesivamente.

Axioma 4. La verificación de la hipótesis es puramente empírica. Las construcciones son probadas mediante su implementación. Una construcción es correcta si y sólo si al llevarla a cabo se obtiene el resultado deseado (dentro de la tolerancia establecida por el individuo).

Axioma 5. Una prueba matemática es irrelevante tanto para el descubrimiento y el proceso de verificación (personal, más que formal). Si es absolutamente necesario —es decir, si el maestro lo exige— probablemente se puede verificar el resultado usando técnicas de prueba. Pero esto es sencillamente seguir las reglas del juego, verificar bajo presión aquellas cosas que uno ya sabe que son correctas.

2.4. Luz Manuel Santos Trigo

Los datos siguientes, tomados de la página oficial del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, indican que Luz Manuel Santos Trigo es Físico y Matemático, originario de San Luis Acatlán, Guerrero, México. Es maestro de Matemática Educativa en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav). Egresó de la Lic. en Física y Matemáticas en 1980, del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Obtuvo el grado de Maestro en Enseñanza Superior por la Universidad Autónoma de México en 1984, el grado de Maestro en Ciencias por el Instituto Politécnico Nacional en 1985, y el grado de Doctor en Educación Matemática en la Universidad de British Columbia, Canadá en 1990; realizando el postdoctorado en la Universidad de California y Berkeley, E.U.A., de 1994 a 1995.

El tema de investigación al que dedica su trabajo es la *Resolución de Problemas Matemáticos*, considerando como "un principio fundamental la concepción de las matemáticas como un conjunto de dilemas, preguntas o problemas que se abordan y resuelven a partir de una forma de pensar que involucra recursos, estrategias y hábitos consistentes con la práctica o desarrollo del conocimiento matemático" (Santos Trigo).

En sus trabajos muestra especial interés en cuestiones de carácter cognitivo como: ¿qué significa aprender o construir el conocimiento en términos de la resolución de problemas?, ¿cómo construyen los estudiantes formas de pensar compatibles con el desarrollo del conocimiento en la disciplina?, ¿cómo se construye una comunidad de aprendizaje donde se valore la formulación de preguntas, la búsqueda de relaciones, el empleo de distintas representaciones, la presentación de distintos tipos de argumentos, la búsqueda de conexiones, y la comunicación de resultados?, entre otras; en las que se expresa la importancia sobre el aprendizaje de las matemáticas por medio de la resolución de problemas.

Entre sus trabajos se destacan, *La función cuadrática: Enfoque de resolución de problemas; La Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos; El Papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza; Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas; Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. Emerging high school students problem solving trajectories based on the use of dynamic software; High School Teachers' Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge.*

En su trabajo, *La Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, Santos Trigo menciona la relación que hay entre la resolución de problemas con el uso y desarrollo de habilidades que permiten a las personas acceder a sus recursos, los cuales permiten establecer una relación entre la resolución de problemas y las estrategias, como lo son las estrategias heurísticas de Polya, para poder emplearlos de manera eficiente en cualquier situación problemática; así como diferentes elementos que dan pie a reflexionar sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Muchas de las investigaciones en Matemáticas tratan sobre el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos. Como se ha mencionado previamente, resolver problemas es diferente a realizar ejercicios, son actividades con propósitos distintos, aunque en el medio muchas veces se toman como sinónimos; se tiene la idea de que un problema matemático es un ejercicio debido al concepto erróneo que se tiene de las matemáticas. Un ejercicio promueve el aprendizaje de alguna técnica, fórmula o procedimiento que lleva a la mecanización; por ejemplo, con frecuencia tiende a confundirse el hecho de que algunas personas tengan facilidad para realizar operaciones con gran rapidez con la creencia de que poseen un gran conocimiento matemático, lo cual no necesariamente es cierto.

Por otra parte, al abordar un problema no sólo se pretende encontrar su solución, sino buscar entre nuestros conocimientos conceptos y habilidades matemáticas adecuadas, así como emplear alguna estrategia de resolución de problemas; todo lo cual esperamos que nos conduzca a establecer e idear relaciones o resultados matemáticos, y por consecuencia a obtener nuevos conocimientos, lo cual constituye un aprendizaje matemático.

Cada individuo tiene características específicas que lo hacen enfrentar de manera diferente el proceso de resolución de problemas; la experiencia nos indica que existen personas que parecieran tener habilidades naturales que los hacen ser exitosos en este tipo de actividad.

Sin embargo también existen personas que, después de un periodo de entrenamiento, abordan de manera exitosa casi cualquier tipo de problema.

Cuando alguien les pregunta sobre cómo podría resolver un problema, rápidamente dan una pista, algún recurso que es indispensable en la resolución del problema, y quien preguntó se queda pensando: "¿cómo es que no se me ocurrió antes?"; esto sucede por la falta de habilidad de acceder a nuestros recursos, a nuestros conocimientos previos, que algunos expertos ya ha desarrollado debido a los diversos procesos de resolución de diferentes tipos de problemas que ha realizado.

Para lograr que los estudiantes desarrollen dichas habilidades, es necesario plantear situaciones problemáticas acordes a la definición de problema, para no caer en una situación rutinaria, la cual no representa un problema para los estudiantes, así como tomar en cuenta cómo llevan a cabo los estudiantes la resolución de problemas, como sugiere Santos Trigo, para elaborar actividades que promuevan un aprendizaje matemático de los estudiantes, que esté de acuerdo al quehacer de los expertos.

Lo anterior podría dar respuesta a la cuestión, que seguramente muchos nos hemos planteado alguna vez, *"¿qué significa que un estudiante aprenda matemáticas?"*. No podemos estar seguros de qué tan cierta es nuestra respuesta a esta pregunta, pero estando conscientes del verdadero significado de las matemáticas; cuando pensamos en matemáticas pensamos en resolver problemas matemáticos, aprendemos matemáticas resolviendo problemas, por lo que la resolución de problemas es la esencia de las matemáticas.

> "Hacer o desarrollar matemáticas incluye resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas ... Aprender matemáticas es un proceso que incluye encontrar sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir y discutir sus conexiones con otras ideas." (Santos Trigo, 2007, p.17)

De acuerdo a la respuesta anterior de Santos Trigo, y a lo que se venía hablando respecto a su trabajo; aprender matemáticas está completamente relacionado al proceso resolución de problemas, por lo que Santos Trigo (2007, p.19) afirma: "que en el estudio de las matemáticas, la actividad de resolver y formular problemas desempeña un papel muy importante cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones".

Las estrategias, discusiones, pensamientos y razonamientos que un estudiante lleva a cabo para resolver problemas dependen mucho de lo que ha aprendido a lo largo de su vida escolar, de la manera en que sus maestros de matemáticas promovían la resolución de problemas. Entre la comunidad matemática existen diversas ideas sobre lo que son realmente las matemáticas, destacando dos puntos de vista; el *empirista* y el *constructivista*. En el primero, se tiene la idea de que hay cosas que existen desde hace determinado tiempo, "lo que hay es lo que hay", están para ser descubiertas y utilizadas, no para ser inventadas. Por otro lado, en el constructivista, que como su nombre lo dice, se piensa que se aprende matemáticas construyéndolas.

Las teorías sobre el aprendizaje en general, han sido modificadas como efecto de los estudios sobre la cognición, que ha influido en la concepción que se tenía respecto al estudio de las matemáticas, permitiendo emplear las estrategias de resolución de problemas que también se utilizan en otras disciplinas, incluso en nuestra vida cotidiana.

Santos Trigo (2007) considera que un factor esencial que permite el aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas matemáticos es la *transferencia*: ¿Hasta qué punto se puede transferir la experiencia de resolver problemas en ciertos contextos a otros problemas establecidos en contextos diferentes?

Esto se debe, a que se tiene la idea de que un problema matemático es diferente de un problema biológico, económico, social, etc., aunque estemos hablando de lo mismo, de un problema, pero en un contexto distinto, y aunque seamos muy buenos en una determinada área no somos capaces de transferir lo que hacemos en una a otra; por ejemplo, en problemas de tipo geométrico podemos realizar un dibujo, pero es probable que en otro contexto no sea posible.

Un ejemplo de estrategia transferible, y utilizada comúnmente entre los solucionadores de problemas en general, es la de dar contraejemplos, quizá por ser más accesible y no necesitar hacerse de manera reflexiva, aunque no es considerada importante en la resolución de problemas como lo son otros métodos, suele dar resultados exitosos.

Uno de los métodos generales importantes en la resolución de problemas son los problemas no rutinarios o no familiares. Siempre que tenemos un problema desconocido accedemos a nuestros recursos, conocimientos previos que tenemos bien definidos y con los que estamos familiarizados, o utilizamos estrategias que nos resultan naturales para resolverlo, en lugar de buscar nuevas formas para hacerlo; pero por otro lado, un experto utiliza heurísticas generales en las actividades para resolver ese tipo de problemas, como las siguientes (Santos Trigo, 2007, p.35):

1. Búsqueda de analogías con sistemas que entiende mejor.
2. Exploración de la existencia de analogías falsas dentro de la analogía.
3. Hacer referencia a los modelos intuitivos mentales para tratar de entender cómo se comportaría el sistema.
4. Investigación de los sistemas que se quiere alcanzar con casos extremos (tender a cero o a infinito).
5. Construcción de problemas más simples con la misma estructura, con la idea de importar la solución al problema original.

Un experto en la resolución de problemas matemáticos generalmente tiene pocas complicaciones en acceder y utilizar las heurísticas, pero para un estudiante esto puede representar otro problema. Los estudiantes pueden entender lo que son las estrategias de resolución de problemas, pero no por eso estarán conscientes de cómo y cuándo emplearlas, a pesar de que el problema planteado cuente con determinadas características que permitan emplear éstas, por lo que en lugar de qué el estudiante aprenda a utilizarlas en la resolución de problemas, solamente aprenderá la mecanización.

> Las habilidades cognitivas generales no funcionan tomando el lugar del conocimiento del dominio específico, ni operando de la misma forma de un dominio a otro dominio. Funcionan como herramientas generales de la misma manera que funciona una mano humana. Es decir, las manos solas no son suficientes: se necesitan objetos que sujetar. [...] se necesita aprender a sujetar apropiadamente diversos objetos. Es decir, no se sujeta de la misma forma a un bebé y a una silla. (Perkins y Salomón, 1989, citado por Santos Trigo, 2007, p.37)

Es decir, para motivar el aprendizaje de los estudiantes es necesario que se les planteen problemas o actividades que les resulten interesantes, que los conquisten; que se presten a que los estudiantes se cuestionen sobre ellos, a realizar e identificar las características de diagramas, etc.; tomando en cuenta las siguientes preguntas: ¿qué es relevante observar en una situación para que la descripción o el análisis incluya un razonamiento matemático por parte del alumno?, ¿cuál es el papel del lenguaje y las diferentes representaciones en el establecimiento de relaciones matemáticas?, ¿qué tipos de tareas o actividades de instrucción ayudan a los estudiantes a desarrollar estrategias que les permitan observar relaciones matemáticas?

Por ejemplo, en la Figura 2.9, pudiera de primera intención pensarse que no aparecen elementos destacados que puedan ser utilizados para permitir reflexiones matemáticas inmediatas. Sin embargo, cuando las personas tienen algún tipo de entrenamiento o formación para establecer relaciones entre sus recursos matemáticos con la información proporcionada, los resultados son diferentes. Esto lo verificamos cuando el dibujo anterior fue mostrado a cuatro estudiantes avanzados de la licenciatura en matemáticas, solicitándoles que respondieran a las siguientes dos preguntas.

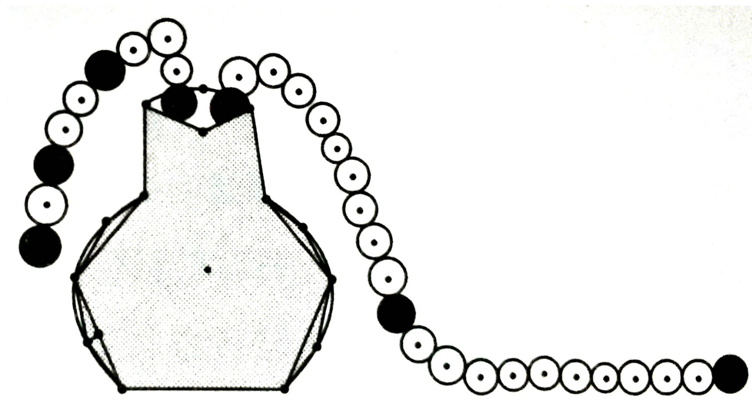


Figura 2.9: Un jarrón con bolitas. (Santos Trigo, 2007, p.41)

1. Analice cuidadosamente el dibujo que se muestra en la hoja anexa. A partir de dicho análisis, escriba las preguntas que desde su punto de vista puedan formularse matemáticamente a partir de la figura.

2. ¿Cuántas bolitas tiene el collar?

En la Tabla 2.8 mostramos las respuestas que cada uno de los estudiantes dieron a los dos cuestionamientos anteriores. Se han identificado las correspondientes respuestas con E_1, E_2, E_3 y E_4.

Tabla 2.8: Tabla de resultados

Estudiante	**Preguntas**	**¿Cuántas bolitas tiene el collar?**
1	1. ¿Qué figuras observas? 2. ¿Qué secuencia tienen las bolitas blancas? 3. ¿Qué cantidad de bolitas están adentro del jarrón? 4. ¿Cuántas bolitas blancas hay? 5. ¿Hay rectas paralelas? 6. ¿Hay ángulos iguales? 7. ¿Cuántos triángulos hay?	66 Blancas: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$ Negras: $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 11$

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.8 –*Continuación de la página anterior*

Estudiante	Preguntas	¿Cuántas bolitas tiene el collar?
	8. ¿Hay triángulos congruentes o semejantes? 9. ¿Qué puntos están a la misma distancia del punto P?	
2	1. ¿Existe un patrón entre las bolitas blancas y las negras? 2. ¿Cuál es la forma del jarrón? 3. ¿Cuál es la capacidad (volumen) del jarrón? 4. ¿Tienen las bolitas blancas el mismo tamaño? 5. ¿Cuál es el tamaño del orificio por dónde entran las bolitas?	66 1 bolita negra — 1 bolita blanca 1 bolita negra — 2 bolitas blancas 1 bolita negra — 3 bolitas blancas 1 bolita negra — 4 bolitas blancas 1 bolita negra — 5 bolitas blancas 1 bolita negra — 6 bolitas blancas 1 bolita negra — 7 bolitas blancas 1 bolita negra — 8 bolitas blancas 1 bolita negra — 9 bolitas blancas 1 bolita negra — 10 bolitas blancas 1 bolita negra
3	1. ¿Qué sucesión siguen las bolitas blancas? 2. ¿Cuántas bolitas blancas tiene el collar? 3. ¿Cuántas bolitas negras tiene el collar? 4. ¿Cuál es la forma que se muestra en la parte más ancha del jarrón?	66 Bolitas blancas: $1+2+3+\ldots+9+10 = \frac{(n+1)n}{2} = 55$ Bolitas negras: 11 $55 + 11 = 66$
4	1. ¿Cuántas bolas blancas hay dentro del jarrón? 2. ¿Cuántas bolas negras hay dentro del jarrón?	

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.8 –*Continuación de la página anterior*

Estudiante	**Preguntas**	**¿Cuántas bolitas tiene el collar?**
	3. ¿Cuál es el perímetro de una cara del jarrón? 4. ¿Cuál es el área de una cara del jarrón? 5. ¿Cuál es el área superficial del jarrón? 6. ¿Cuál es el volumen del jarrón? 7. ¿Cuántos radios distintos se ven en las bolitas? 8. ¿Cuál es el perímetro del arco izquierdo y del arco derecho?, ¿son iguales?, ¿cuál es mayor? 9. ¿Cuál es la recta que pasa por A y B? 10. ¿Cuál es la distancia AB? 11. ¿Cuál es la recta que pasa por A y O? 12. ¿Cuál es la distancia AO? 13. ¿Cuál es la recta que pasa por B y O? 14. ¿Cuál es la distancia BO? 15. ¿Es la misma la recta AB y AO? 16. ¿Es la misma la recta AB y BO? 17. ¿Cuántos ángulos hay en la cara del jarrón? 18. ¿Cuántos ángulos obtusos hay? 19. ¿Cuántos ángulos agudos hay?	$\begin{array}{cc} \text{Negras:} & \text{Blancas:} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 10 \\ 1 & \end{array}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{n(n+1)}{2}$, para $n = 10$ $\frac{10(10+1)}{2} = \frac{10(11)}{2} = \frac{110}{2} = 55$ $11 + 55 = 66$

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.8 –*Continuación de la página anterior*

Estudiante	**Preguntas**	**¿Cuántas bolitas tiene el collar?**
	20. Sin salirte del perímetro, ¿cuál es la distancia más corta del punto A al punto B? 21. ¿Cuál es la distancia por arriba? 22. ¿Cuál es la distancia por abajo? 23. Tomando el radio mayor para todas las bolitas, ¿cuál es el volumen total? 24. ¿Todas las bolas caben dentro del jarrón? 25. Si sobra espacio ¿cuántas bolas mas cabrían? 26. ¿Cuál es el volumen total que sobra por el espacio entre bola y bola?	

La actividad duró aproximadamente una hora para E_1, E_2 y E_3; y 40 minutos para E_4. E_2 y E_3 tuvieron dificultad para entender lo que debían hacer en la primer cuestión, repetidamente presentaban dudas sobre si podían utilizar datos o no, y de que no podían realizar preguntas relacionadas con las matemáticas sobre la figura. Con E_1 sucedió todo lo contrario, desde que se le entregaron las hojas no mostró dificultad en entender, las cuestiones que realizaba eran sobre si la manera en que expresaba sus preguntas eran correctas, si se entendía lo que estaba queriendo decir.

Las mismas dudas tenía E_4, quién fue el que más preguntas planteó; desde que comenzó a realizar el primer cuestionamiento de la actividad se mostraba su interés y encontraba demasiadas relaciones en la figura, y así terminó diciendo: —veo muchas cosas, se me ocurren muchas preguntas, pero creo que no terminaría de escribirlas—.

Cómo se puede observar en la Tabla 2.8, se confirma lo que se mencionó anteriormente sobre las dificultades que tuvieron los estudiantes; en la columna **Preguntas**, se pueden observar las diferentes preguntas que expresaron matemáticamente los estudiantes. De acuerdo a la Tabla de resultados, E_3 no logró establecer una relación de la figura con las matemáticas, más allá de lo que se podía percibir a primera vista; las preguntas de E_2 expresaban las matemáticas, pero no fueron suficientes como sucedió con E_3, que sus preguntas son superficiales.

Por otro lado, E_1 mostró un pensamiento matemático de buen nivel, todas las preguntas que planteaba iban más allá de lo elemental en la figura, se adentró en ésta, y aunque al final ya no se le ocurría que preguntar, logró completar 9 preguntas que sus otros compañeros no.

El estudiante E_4, logró hacer 26 preguntas, y aunque aquí no es importante la cantidad, expresa sus cuestionamientos matemáticamente, lo que nos dice que E_4 tiene un pensamiento matemático muy desarrollado, y que cualquier situación en contexto no matemático puede relacionarla con diferentes conceptos matemáticos.

En la segunda cuestión, los cuatro estudiantes lograron encontrar el patrón que seguían las bolitas, y usándolo para dar una respuesta a la cuestión, sin dificultad. En la columna **¿Cuántas bolitas tiene el collar?**, de la Tabla 2.8, se presentan las operaciones y resultados dados por los estudiante; E_1 sumó todas las bolitas blancas y todas las bolitas negras; E_2 estableció una relación entre las bolitas blancas y las bolitas negras, por cada bolita blanca había tantas bolitas negras dependientes del patrón que seguían las bolitas blancas, y proceder a sumarlas; E_3 fue más allá de una suma aritmética, recurrió a la suma de los números naturales sin especificar un n en particular, pero al analizar su resultado se puede ver que si estaba consciente de lo que estaba haciendo; E_4 inmediatamente consideró, para las bolitas blancas, la suma de números naturales con una determinada n, utilizó la fórmula de forma cerrada y al resultado le sumó las bolitas negras.

Podemos concluir que los estudiantes están en un nivel de desarrollo del pensamiento matemático muy distinto, algunos pueden establecer conexiones de una figura con las matemáticas pero no acceden a sus recursos para aligerar el proceso, cómo fue el caso de E_1 y E_2 que sumaron una por una las bolitas; y por el contrario, como E_3 que no tuvo una amplia visión sobre la figura pero si utilizó sus recursos. Por último, E_1 muestra un mayor pensamiento matemático sobre los demás, ya que fue el único que percibió demasiado de la figura y a su vez emplea sus recursos.

Pensar matemáticamente es una habilidad que se desarrolla gracias al enfrentamiento de diversos problemas y actividades como el ejemplo anterior. En las propuestas curriculares de los diferentes niveles educativos, no sólo de México sino de varios países del mundo, se promueve el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes mediante las experiencias que éstos tengan a lo largo de su aprendizaje matemático, que está ampliamente ligado a las estrategias que utilizan en la resolución de problemas; por lo que se tiene la idea de que al terminar cada nivel educativo los estudiantes habrán mejorado dicha habilidad.

Los resultados obtenidos, al implementar los planes y programas de estudio, no son los esperados, ya que los estudiantes de un determinado nivel educativo no logran obtener el nivel de pensamiento matemático con el que deberían de contar para egresar de éste, por lo que en al ingresar al siguiente nivel educativo su rendimiento es muy bajo. Este un problema que se presenta en todos los niveles educativos, y por ende los estudiantes no logran desarrollar completamente la habilidad, incluso al terminar la universidad.

Podría pensarse que dicho problema no afectará al aprendizaje de los estudiantes, cómo muchas personas piensan: "¿para qué me va a servir aprender matemáticas si yo jamás las voy a utilizar?". Un claro ejemplo se puede ver en el nivel medio superior, en el que se separa a los estudiantes de acuerdo al Área de Formación Especializante que eligieron, en donde las matemáticas juegan un papel muy distinto, unos estudiantes aprenden un tipo de matemáticas y otros aprenden otro tipo, como si unas no les fueran a servir en sus estudios posteriores.

Pero, ¿qué sucede cuándo un estudiante que quería estudiar Lic. en Administración y de último momento decide estudiar Ing. en Mecatrónica?, él no tendrá un buen rendimiento o tendrá dificultades al comenzar el ciclo, para aprender conceptos matemáticos que debió haber aprendido previamente.

Así, los estudiantes deben aprender matemáticas por igual, no quiere decir que todos deben aprender los mismos temas aún estando en áreas diferentes; sino que los estudiantes en cualquier ámbito que se desarrollen sean capaces de dar ejemplos, y contraejemplos, de conjeturar, de plantear nuevos problemas, etc.; las cuáles son actividades propias del quehacer matemático.

Es difícil llevar a cabo dichas actividades, debido a que los estudiantes sólo hacen y utilizan lo que el maestro dice, ya que cuando realizan algo distinto, pero no incorrecto, a todo lo que hizo está mal; sin estar conscientes de que quién aprenderá será el estudiante, sin dar paso a la creatividad o al pensamiento crítico del mismo, y resultando como consecuencia el bloqueo de su aprendizaje.

El National Research Council (Consejo Nacional de Investigación, NRC, 1989), citado por Santos Trigo (2007, p.48), declara que los estudiantes deben *analizar, simbolizar, modificar, solucionar, aplicar, demostrar y comunicar;* usar estas habilidades permite a los estudiantes establecer y apropiarse de los conceptos matemáticos. Viendo la matemática de manera dinámica, permite lograr un ámbito de aprendizaje dirigido:

- Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.
- Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la única autoridad para dar las respuestas correctas.
- Hacia el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.
- Hacia la resolución de problemas y no sólo dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.
- Hacia la conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos. (NCTM, 1990, ver en Santos Trigo, 2007, p.48)

Antes hablamos de la concepción que se tiene sobre lo qué es un problema, pero dentro de esta misma concepción se pueden identificar dos tipos de problema, según la caracterización de Simon (1973, citado por Santos Trigo, 2007, p.49) *los problemas que están bien estructurados y los problemas mal estructurados.*

Comúnmente, los problemas que presentan una estructura bien definida son problemas que se encuentran en los libros de texto matemáticos, al terminar un determinado tema; por lo que se da por entendido que los métodos que se utilizarán para resolverlos son los que se determinaron a lo largo del tema y que están explícitamente en el planteamiento del problema. Los problemas que no están bien estructurados, se pueden ubicar como problemas de la vida cotidiana, que a diferencia del otro tipo, no se sabe que métodos se emplearán y constan de una serie de pasos que permiten, a quien resuelve el problema, tomar decisiones sobre que estrategias se utilizarán, así como replantear el problema para llegar a una solución.

Por otra parte, Fredericksen (1984), citado por Santos Trigo (2007, p.50), considera tres tipos de problemas, en los que se encuentran las clasificaciones de Simon y *los problemas estructurados que requieren un "pensamiento productivo"*. Este tipo de problemas coinciden con *los problemas bien estructurados*, con la diferencia de que en éste tipo el solucionador del problema tiene el papel de esquematizar, gran parte o completamente, el proceso de resolución.

Polya (1980, citado por Santos Trigo, 2007, p.50), clasifica los problemas en dos categorías: los problemas que tienen como requerimiento encontrar algo dada una o más condiciones, por ejemplo el siguiente problema, "*Para enumerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2,989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?*"; y los problemas de demostración.

Por otra parte, Polya (1962, aparece en Santos Trigo, 2007, p.50) afirma que un problema no sólo se cataloga en tipos de problemas, sino que también pueden clasificarse elementos o acciones que formen parte de él; de esta manera clasifica tres elementos que constituyen un problema:

1. Estar consciente de una dificultad.

2. Tener deseos de resolverla.

3. La no existencia de un camino inmediato para resolverlo.

Además, Kilpatrick (1985, citado por Santos Trigo, 2007, p.50) considera que el enunciado de un problema contribuye a la concepción que se tiene sobre él.

Los matemáticos, psicólogos y educadores matemáticos, tienen distintas ideas de un problema y la función que juega en el aprendizaje de las matemáticas, que deben tomarse en cuenta ya que, "la resolución de problemas enfrenta a una tarea de enorme proporción, la búsqueda de una síntesis de las mejores habilidades y conocimientos a partir de una serie de disciplinas muy dispares" Schoenfeld(1983), citado por Santos Trigo (2007, p.51).

Un problema, hablando de manera general, es una tarea o situación compuesta por los siguientes elementos:

- La existencia de un interés; es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.
- La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.
- La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo. (Santos Trigo, 2007, p.51)

Las concepciones que se tienen de un problema son primordiales para que los estudiantes trabajen con numerosas situaciones que necesiten ser analizadas y permitan la evaluación de diversas estrategias en las diferentes etapas de resolución.

Como en cualquier trabajo que trate sobre la resolución de problemas, Santos Trigo menciona a Polya y a Schoenfeld, de quienes hablamos anteriormente. Del último podemos agregar tres categorías donde se exhibe la metacognición (aparece en Santos Trigo, 2007, p.60):

1. El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar.
2. El control y la autorregulación. qué tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y qué tan bien se ajusta uno al proceso (ejecución

de acciones) tomando en cuenta las observaciones que se hagan durante la evolución de éste.

3. Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y la forma como éstas se relacionan o se identifican con la forma de resolver problemas.

Además, Schoenfeld (1992) identifica los siguientes tipos de creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas:

1. Si se pide un punto de vista acerca de un problema o cuestión matemática, es suficiente dar tu opinión al respecto. Es decir, las pruebas formales o justificaciones matemáticas no son necesarias a menos que explícitamente se requieran.

2. Todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos en 10 minutos o menos, si uno entiende el contenido. Es decir, el estudiante abandona el problema si no lo resuelve en ese periodo.

3. Sólo los genios son capaces de descubrir, crear y entender matemáticas. Es decir, los estudiantes toman las matemáticas pasivamente y memorizan relaciones sin esperanza de algún entendimiento.

4. Las matemáticas formales y las demostraciones no tienen nada que ver con el desarrollo o el descubrimiento de las ideas matemáticas. Como consecuencia, los resultados de las matemáticas formales se ignoran cuando se les pide a los estudiantes trabajar en problemas de construcción o de descubrimiento.

Schoenfeld atribuye el origen y aumento de éstas a la experiencia dentro del salón de clases, debido a que es ahí donde el estudiante pasa más tiempo y se presentan diferentes formas de interacción instruidas por el profesor; las cuáles tienen consecuencias directas en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

De aquí, Santos Trigo sugiere el desarrollo de un marco conceptual que promueva la utilización de herramientas tecnológicas, en lugar del lápiz y papel como se pretende en los marcos conceptuales actuales. Por esto, considera primordial elaborar o modificar éstos, tomando en cuenta características relacionadas con (Santos Trigo, 2007, p.67):

1. Una visión global de las matemáticas (¿qué es lo que caracteriza a la disciplina y al quehacer matemático?).

2. Una caracterización de los procesos asociados con el aprendizaje de los estudiantes (¿cómo se explican los procesos de aprendizaje de los estudiantes?, ¿cómo un estudiante aprende nuevos contenidos?).

3. Una presentación del tipo de problemas que son relevantes en el aprendizaje de los estudiantes (¿qué es un problema?, ¿qué significa problematizar un contenido?).

4. Los procesos de instrucción que promueven el aprendizaje de los estudiantes (¿qué escenarios de instrucción favorecen el aprendizaje de los estudiantes?).

5. Las formas de evaluación de los estudiantes (¿cómo se evalúan las competencias de los estudiantes?).

En el siguiente tabla, se explica la importancia de dichas características mediante la comparación de tres marcos teóricos de investigación de la educación matemática:

Tabla 2.9: Principales marcos teóricos de la investigación en la educación matemática (Santos Trigo, 2007, p.67 - 68)

Perspectiva	**Resolución de problemas**
Visión matemática	Las matemáticas como una ciencia de los patrones. Una relación directa entre la práctica de desarrollar la disciplina y el aprendizaje de los estudiantes. Pensar matemáticamente incluye la formulación de preguntas, conjeturas y el empleo de distintos argumentos.
Tipo de problemas	Problemas no rutinarios con diferentes tipos de dificultad: desde aquellos que se resuelven en un tiempo límite hasta aquellos que se trabajan durante largos periodos. Transformación de un problema de rutina en un problema no rutinario a través de un proceso que involucra el planteamiento de preguntas.

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.9 – *Continuación de la página anterior*

Perspectiva	**Resolución de problemas**
Procesos de aprendizaje	Dimensiones relacionadas con competencias de resolución de problemas: recursos básicos, estrategias cognitivas (heurísticas), estrategias metacognitivas (monitoreo y autocontrol) y sistemas de creencias y afectivos.
Ambientes de instrucción	El salón de clases visto como un microcosmo matemático. Creación de comunidades matemáticas de aprendizaje. Los estudiantes participan en pequeños grupos de discusión y discusiones plenarias, y el profesor actúa como monitor y guía.
Formas de evaluar	Procesos de solución de problemas no rutinarios. Las competencias matemáticas incluyen procesos relacionados con el uso de representaciones, la formulación de preguntas y conjeturas, el uso de distintos argumentos, procesos de monitoreo y la comunicación de resultados.
Perspectiva	**Representaciones**
Visión matemática	Los objetos matemáticos son distintos de sus representaciones. El pensamiento matemático se expresa a través de sistemas semióticos de representación.
Tipo de problemas	Problemas que involucran el empleo de distintas representaciones.
Procesos de aprendizaje	Coordinación de distintas representaciones. Tránsito desde una representación a otras. Operaciones dentro de un mismo sistema de representación; conversión de registros.
Ambientes de instrucción	Ambientes de resolución de problemas que promuevan la construcción de distintas representaciones del problema por parte de los estudiantes.
Formas de evaluar	Evidencia de que los estudiantes muestran distintas conexiones entre varios registros de representación. Reconocimiento del mismo objeto matemático a través de distintas representaciones.
Perspectiva	**Procesos de modelación**
Visión matemática	Las matemáticas son un sistema de relaciones útiles para entender y encontrar sentido a distintos tipos de fenómenos. Resolver un problema lleva a la construcción de herramientas para pensar. Las matemáticas son vistas como un sistema con elementos, operaciones, reglas y relaciones.

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.9 – *Continuación de la página anterior*

Perspectiva	**Procesos de modelación**
Tipo de problemas	Problemas que involucren distintos contextos y cuyas soluciones muestren explicaciones, descripciones, interpretaciones, representaciones, operaciones, algoritmos, argumentos, extensiones, revisiones, ajustes, etcétera.
Procesos de aprendizaje	El aprendizaje se desarrolla a partir de la construcción de modelos o sistemas conceptuales. El aprendizaje se manifiesta a través de ciclos que van desde modelos incompletos o inestables hasta modelos robustos y estables.
Ambientes de instrucción	Los ambientes de aprendizaje se desarrollan alrededor de la discusión y solución de problemas o actividades reveladoras del pensamiento de los estudiantes. Los estudiantes trabajan en parejas o grupos de tres, y el profesor funciona como monitor durante el desarrollo de las sesiones.
Formas de evaluar	Desarrollo de herramientas conceptuales para resolver familia de problemas. Autoevaluación, el alumno representa un cliente, quien revisa y evalúa sus propios resultados y el de los demás.

Anteriormente se mencionaron los diferentes tipos de problemas, entre los que se encuentran *los problemas bien estructurados*, que prácticamente sugieren un método para solucionarlos, pero no por eso es el único. Siempre tendremos una determinada estrategia, técnica o método para resolver problemas; generalmente así sucede, pero hay una gran diversidad de éstos que permiten darles solución aunque para algunos sea incorrecto. Tal es el caso del principio del desvío o problemas de demostración, de los cuáles pueden surgir diferentes direcciones, como es común la inclinación a considerar casos particulares, para después representarlos de manera general.

Finalizaremos esta sección, retomando la presentación de Santos Trigo (2007), donde muestra algunos métodos y estrategias utilizados frecuentemente en la resolución de problemas matemáticos, los cuáles se presentan a continuación.

1. **El método de los dos caminos.**

   El objetivo de este método es expresar el problema dado por medio de dos expresiones algebraicas e igualarlas.

En el siguiente problema aplicaremos esta estrategia.

Problema. *Dado el cuadrado $ABCD$, de lado a, se inscribe en él el triángulo isósceles ΔBCE, donde E es el punto medio de AD. Pruebe que la suma de las áreas de los triángulos ΔABE y ΔCDE es el área total del triángulo ΔBCE.*

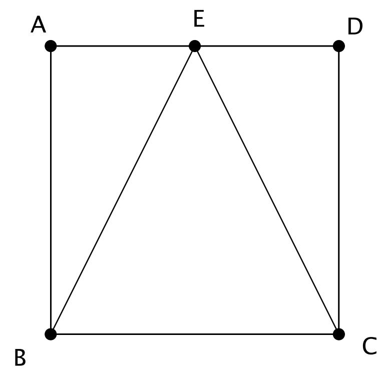


Figura 2.10

Podemos expresar el área del cuadrado y de los triángulos ΔABE y ΔCDE de la siguiente manera:

Área de $ABCD = a^2$, Área de $\Delta ABE = \frac{a^2}{4}$ y Área de $\Delta CDE = \frac{a^2}{4}$.

El área de ΔBCE es: $ABCD$ $-$ Área de ΔABE $-$ Área de ΔCDE

Expresemos el área de ΔBCE como $\frac{ah}{2}$ e igualemos las expresiones anteriores del área:

$$\frac{ah}{2} = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{ah}{2} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

Así, queda demostrado el requerimiento del problema.

2. El método de cancelación.

Este método consiste en reordenar los términos de un problema dado de forma que algunos se eliminen.

Un ejemplo claro de esto se puede encontrar en las sumas telescópicas, como la que se muestra a continuación:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. El método de casos especiales.

En este método se consideran casos que sean más fáciles de determinar.

Ejemplo. *Resolver la siguiente desigualdad:*

$$|5x - 8| \geq 6$$

Como la desigualdad de la que se trata es de un valor absoluto, es necesario considerar dos casos y resolverlos uno por uno para encontrar la solución.

Caso 1:	*Caso 2:*
$5x - 8 \leq -6$	$6 \leq 5x - 8$
$\Rightarrow 5x \leq -6 + 8$	$\Rightarrow 6 + 8 \leq 5x$
$\Rightarrow x \leq \frac{2}{5}$	$\Rightarrow \frac{14}{5} \leq x$
$\Rightarrow x \in \left(\infty, \frac{2}{5}\right]$	$\Rightarrow x \in \left[\frac{14}{5}, \infty\right)$

Así, la solución de la desigualdad es:

$$x \in \left(\infty, \frac{2}{5}\right] \bigcup \left[\frac{14}{5}, \infty\right)$$

4. Reducción de un problema a casos más simples.

La idea de esta estrategia es considerar casos más simples que se deriven del problema original. Estos casos ayudan a atacar el problema por partes, para considerar las soluciones parciales como un todo, y así obtener la solución del problema.

Para encontrar la fórmula de forma cerrada de la serie

$$\sum \frac{k^4}{2^k}$$

contemplamos casos más simples, como:

a) $\sum k^2$

b) $\sum \frac{1}{2^k}$

los cuales resultan fáciles de resolver por inducción matemática y ya son conocidos, entonces

$$\sum k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \text{y} \qquad \sum \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Por último, para llegar a la solución total multiplicamos de la siguiente manera:

$$\left(\sum k^2\right)^2 \sum \frac{1}{k^2} = \left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right)^2 \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\right] \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2^{-n}\left(-n^4 - 8n^3 - 36n^2 - 104n + 150\left(2^n - 1\right)\right)$$

5. Sumar cero.

Cuando un problema se debe expresar en cierta forma, es conveniente sumar y restar el mismo número (sumar cero), así como multiplicar y dividir por la misma expresión (multiplicar por uno).

Para ejemplificar la aplicación de la estrategia o “truco” de sumar cero probaremos que la sucesión $a_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ no converge.

Prueba:

Para $n = 1, 2, \ldots, 6$ los términos de la sucesión son $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0, \ldots$

Supongamos que $\lim a_n = L$ para algún número L. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un N tal que si $n > N$, $\Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$. Tomemos $\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}$, entonces existe un N_1 tal que si $n > N_1$, $\Rightarrow |a_n - L| < \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Luego, para cualesquiera $n, m > N_1$,

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(por la desigualdad del triángulo). Puede observarse que en este paso se sumo un cero, $-L + L$, el cual fue indispensable, por ser la única manera de llegar a $|a_n - a_m| =< \frac{\sqrt{3}}{2}$; de no haberse sumado un cero no sería posible la demostración por este camino.

Ahora, elegimos k para que $n_1 = 6k + 1 > N_1$ y $n_2 = 6k + 4$, entonces $a_{n_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $a_{n_2} = -\frac{-\sqrt{3}}{2}$, así $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \sqrt{3}$. Esto es una contradicción, entonces (a_n) no converge.

6. **Dibujar una figura o diagrama cuando sea posible.**

Una representación gráfica puede ser útil en la identificación de componentes importantes del problema. En la etapa de comprensión del problema, pensar en una figura o un diagrama muchas veces no solamente ayuda a identificar los elementos importantes del problema, sino que también puede sugerir algunas estrategias para resolverlo.

Representemos el problema que se muestra a continuación mediante una figura o diagrama.

Problema. *Juan quiere construir una escalera en su casa, pero sólo le alcanzó para comprar* 25 *ladrillos. ¿Cuántos pisos de la escalera podrá construir con los ladrillos que tiene?*

De primera instancia esbozamos una figura de un ladrillo, que a la vez es el primer piso de la escalera, como base para observar cuántos ladrillos se necesitarán; se dibujan los ladrillos para ilustrar el segundo y tercer piso, como se muestra en la Figura 2.11.

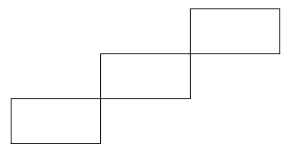


Figura 2.11

Podemos observar que el segundo y tercer piso no tienen una base de donde sostenerse, por lo que son necesarios tres ladrillos más para construir el segundo y tercer piso, como en la Figura 2.12.

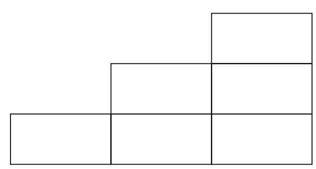


Figura 2.12

De esta manera se va completando la escalera y se determina cuántos pisos se construirán.

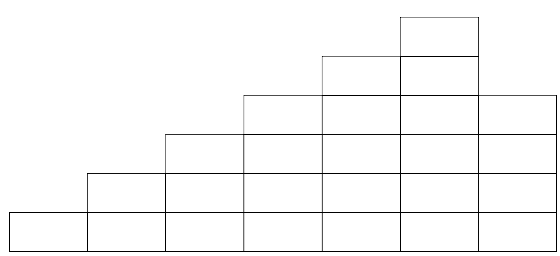


Figura 2.13

De la Figura 2.13, tenemos como solución que Juan solamente podrá construir 6 pisos de la escalera. Realizar los diagramas anteriores facilita la comprensión y solución del problema, ya que de tan sólo haberlo imaginado hubieran quedado espacios vacíos, el problema habría sido concebido de una manera diferente y no llegar a la solución.

7. El método se sustitución.

La transformación de la expresión de un problema a una forma más fácil de operar es una estrategia importante en la resolución de problemas.

Consideremos el siguiente ejemplo:

¿Para qué valores de x se satisface la siguiente ecuación?

$$9x^4 + 12x^3 + 4x^2 = 0 \tag{1}$$

Observemos que:

$$x^4 = (x^2)^2, \quad x^3 = (x^2)(x) \quad \text{y} \quad x^2 = (x)(x)$$

Sustituyendo $a = x^2$ y $b = x$, obtenemos una transformación de (1), la cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = 0$$

Factorizando la expresión anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} 9a^2 + 12ab + 4b^2 &= (3a + 2b)^2 \\ \Rightarrow (3a + 2b)^2 &= 0 \\ \Rightarrow (3x^2 + 2x)^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x(3x + 2))^2 &= 0 \end{aligned}$$

Así, las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{-2}{3}$ y $x_4 = \frac{-2}{3}$.

8. Correspondencia de condiciones iniciales.

Es común encontrar problemas en donde el análisis de los datos puede sugerir un camino eficiente para resolver el problema, en especial, el análisis de la información inicial puede ayudar a evitar caminos largos y tediosos.

Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente:

Ejemplo. *María tiene una granja y quiere saber cuántos gansos y cuántos cerditos tiene; contó* 48 *patas y* 22 *cabezas. ¿Cuántos gansos y cerdos tiene?*

Si alguien intenta resolver el problema, lo primero que hace es dibujar cabezas con patitas, como en la Figura 2.14, que representen a los animales en cuestión.

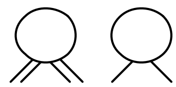


Figura 2.14

Generalmente los niños o quienes no conocen estrategias de resolución de problemas que faciliten el trabajo utilizan este tipo de estrategia intuitiva, la cual llevaría mucho tiempo si se tratara de una cantidad considerable de patas y cabezas. Para encontrar el número de gansos y cerdos que María tiene es necesario dibujar tantos cerditos y tantos gansos; podemos comenzar dibujando 48 patas o 22 cabezas e ir "jugando" con ellos de tal manera que se tenga el número de patas y de cabezas, lo que daría por resultado la Figura 2.15.

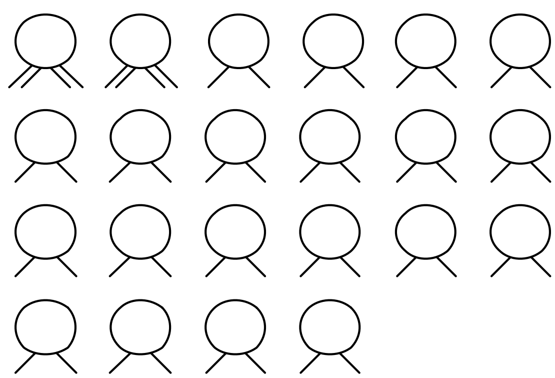


Figura 2.15

De la figura anterior vemos que el total de gansos es 20 y que hay 2 cerditos en la granja. Esta solución se puede encontrar de una forma más práctica, es decir, expresando algebraicamente las condiciones del problema como mostraremos posteriormente.

De acuerdo a esta estrategia, **correspondencia de condiciones iniciales**, tomemos en cuenta que la información del problema se puede expresar como: $2x + 4y = 48$ y $x + y = 22$, donde x es el total de gansos y y el total de cerditos.

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
2x + 4y &= 48 \\
x + y &= 22
\end{aligned}
$$

tenemos que $x = 20$ y $y = 2$, es decir, María tiene 20 gansos y 2 cerditos.

Esto demuestra que llegamos a la misma solución pero con un método que nos permite ver el problema de manera diferente y resolverlo rápidamente.

Capítulo 3

Referencias metodológicas

Este capítulo está formado por dos secciones: en la primera de ellas se describen las características del estudio que se reporta; en la segunda, se describe con detalle el instrumento que se aplicó para generar la información necesaria.

3.1. Características del estudio

Ya se mencionó en la presentación que el interés de este trabajo está en conocer y analizar las estrategias que siguen estudiantes para resolver problemas de matemáticas. Una vez que se clarifica qué es lo que se busca, la siguiente pregunta a plantearse y responder es cómo se logrará lo que se busca.

En el caso que nos ocupa definimos primero el tipo de estudio: se trata, tal y como lo indica el título, de un estudio de carácter exploratorio:

> Los estudios exploratorios sirven para familiarizarnos con fenómenos relativamente desconocidos, obtener información sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa sobre un contexto particular de la vida real, investigar problemas del comportamiento humano que consideren cruciales los profesionales de determinada área, identificar conceptos o variables promisorias, establecer prioridades para investigaciones posteriores o sugerir afirmaciones verificables. (Dankhe, 1986, citado por Hernández, Fernández, & Baptista, 1991, p.59)

Otro aspecto importante por señalar es que:

> Los estudios exploratorios en pocas ocasiones constituyen un fin en sí mismos,

> "por lo general determinan tendencias, identifican relaciones potenciales entre variables y establecen el tono de investigaciones posteriores más rigurosas" (Dankhe, 1986, p.412). Se caracterizan por ser más flexibles en su metodología en comparación con los estudios descriptivos o explicativos, y son más amplios y dispersos que estos otros dos tipos. Asimismo, implican un mayor "riesgo" y requieren gran paciencia, serenidad y receptividad por parte del investigador. (Hernández et al., 1991, p.59)

Para nuestra exploración, una parte importante fue seleccionar a los sujetos de estudio. Inicialmente se había pensado en tener una muestra integrando a estudiantes que estuvieran cursando el bachillerato en ciencias físico–matemáticas. Sin embargo en un primer pilotaje notamos que los participantes no propusieron procedimientos matemáticos, solamente argumentaban verbalmente, con respuestas aparentemente producto de su intuición.

Por este motivo, nos restringimos a trabajar con estudiantes de matemáticas y física. Esta decisión estuvo fundamentada en el hecho de que en el mencionado pilotaje los individuos participantes ya involucraban en sus respuestas argumentos matemáticos, tanto simbólica como verbalmente, de tal manera que nos proporcionaban una información de mayor calidad para los fines perseguidos.

Además, son una comunidad a la cual se podía tener acceso con facilidad, que en teoría sus miembros tienen disposición y cierta práctica en la resolución de problemas, además de no tener una actitud de rechazo hacia la matemática.

El instrumento que se utilizó para recabar la información necesaria fue una batería de seis problemas, los cuales fueron seleccionados de tal manera que cumplieran con:

a) Ser problemas no rutinarios.

b) Que tuvieran al menos dos estrategias de solución.

c) Que en su solución pudieran integrarse elementos de distintas áreas de la matemática.

Una vez seleccionados los problemas se aplicaron a un conjunto de individuos, no necesariamente los mismos problemas a los mismos individuos. Del universo de respuesta se seleccionaron aquellas que:

a) Mostraban originalidad, fuesen o no correctas las respuestas.

b) Proporcionaban información sobre sus razonamientos lo más explícitamente posible, con lo cual se podía interpretar la estrategia utilizada.

El registro de la actividad de los individuos fue de forma escrita, en lo que llamamos hojas de trabajo. En total se reportan y analizan 23 de ellas.

En la sección siguiente se presenta la descripción de cada uno de los problemas que constituyen el instrumento aplicado, siguiendo las categorías establecidas en la Tabla 2.6, cuyo encabezado es "Conocimientos y Comportamientos Necesarios para una Caracterización Adecuada del Rendimiento en la Resolución de Problemas Matemáticos", tomada de Schoenfeld (1985, p.15).

Estas mismas categorías: *Recursos*, *Heurísticas*, *Control* y *Sistemas de Creencias*, son las que se utilizaron también para hacer el análisis de las respuestas mostradas en el Capítulo 4.

3.2. Descripción de los problemas

Problema 1. ***Hay que saber pedir***

Este problema fue diseñado por la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos, directora de este trabajo de tesis.

El planteamiento es el siguiente:

> En los pueblos de Sonora se corren muchas anécdotas a cuan más de interesantes y divertidas. Una de ellas, nos cuenta la historia de dos mineros muy desesperados porque en sus últimas salidas buscando oro, solamente habían encontrado vasijas viejas de metal.
>
> Dicen que era tanta su desesperación, que uno de ellos, en plena faena sacó una estampita muy viejita y arrugada del santo de su devoción, lo puso en una piedra y empezó a rogarle compungidamente:

Santito, Santito, compadécete de mí, si me das el doble del dinero que traigo en el bolsillo, te prometo que regalaré doscientos pesos a mi compadre Juan, aquí presente, que ya lo estoy viendo que le ha ido peor que a mí.

El santo, conmovido por la pasión que el minero ponía en sus palabras, le cumplió sus deseos; éste, emocionado, entregó sin dudar los doscientos pesos a su compadre. Tan contento y emocionado se puso Juan por el milagro y por el regalo, que pidió al compadre repitiera su súplica al santo.

Ni tardo ni perezoso el compadre pediche[1] se pone en cuclillas y vuelve a repetir su petición: –Santito, Santito, si me das el doble del dinero que traigo en el bolsillo, te prometo darle otros doscientos pesos a mi compadre Juan.–

De nueva cuenta el santo se conmueve y vuelve a conceder la petición, para la alegría y emoción de Juan, que inmediatamente recibe otros doscientos pesitos. Pero más tarda en recibirlos, que en pedirle a su compadre que otra vez repita la solicitud.

Éste no se hace del rogar, impactado al darse cuenta de los buenos resultados que estaba obteniendo con el santo, repitiendo su petición: –"Santito, Santito, mira cómo está mi compadrito Juan, por última vez, si me vuelves a dar el doble del dinero que traigo en la bolsa, le vuelvo a regalar otros doscientos pesos a mi compadrito del alma".–

Pacientemente el santo concede el milagro, Juan recibe gustoso otros doscientos pesos, mismos que guarda celosamente en su bolsa, volteando a ver al compadre para preguntarle ansioso: "¿Pues cuánto consiguió usted compadre? Se va a poner rete contenta la comadre".

El interpelado mete la mano a su bolsillo para encontrarse, ¡oh sorpresa!, con que no traía ni un centavo en ella.

a) Descartando el hecho de que el santo le hubiese hecho trampa, o que él se

[1] La palabra "pediche" es un regionalismo mexicano, también conocida como "pedinche"; proviene del término "pedigüeño" del Diccionario de la Real Academia Española, el cual significa "Que pide con frecuencia e importunidad".

hubiese equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿Cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero?

b) Construye otra versión de esta anécdota, de tal manera que asegures que el compadre pediche se queda con algo de dinero en su bolsa. Explica detalladamente tus argumentos.

Descripción.

Esta es una situación que aparece en un contexto extra matemático, que tiene elementos lúdicos.

Con el apoyo de la propuesta de Schoenfeld (1985, p.15), encontramos:

Recursos.

- *Datos.* El dinero que trae en el bolsillo, el doble de ese dinero y los doscientos pesos que en ocasiones sucesivas va entregando al compadre.

- *Comprensión.* Se identifican las incógnitas, que en este caso es la cantidad de dinero que tenía el compadre pediche, así como las conexiones entre los datos.

- Las ecuaciones lineales y la regla de tres también forman parte de esta categoría.

Heurísticas.

- Este problema puede ser resuelto de las siguientes maneras:

  1. Puede resolverse de manera directa, aunque sería un proceso más largo.

     a) Descartando el hecho de que el santo le hubiese hecho trampa, o que él se hubiese equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿Cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero?

     Respuesta.
     Llamemos x a la cantidad que el compadre pediche traía en la bolsa antes de pedirle al santito. Entonces

     $$2x+(2x-200)+[2\,(2x-200)-200]+[2\,(2\,(2x-200)-200)-200]-600=0$$

$$\Rightarrow 2x + (2x - 200) + (4x - 600) + (8x - 1400) - 600 = 0$$

$$\Rightarrow 16x - 2800 = 0 \qquad \Rightarrow 16x = 2800 \qquad \Rightarrow x = \frac{2800}{16} = 175$$

El minero le daba a su compadre más de lo que traía, es por esto que cada vez que le daba dinero tenía que darle de su dinero para acompletar los \$200.

b) Construye otra versión de esta anécdota, de tal manera que asegures que el compadre pediche se queda con algo de dinero en su bolsa. Explica detalladamente tus argumentos.

Respuesta.

Para que se quede con dinero tiene que tener al principio más de 175, o cambiar la cantidad de dinero que le dé a su compadre, o la cantidad que le pide al santito.
Por ejemplo: El minero le pedía el doble de dinero que tenía en su bolsa al santito y le daba \$200 a su compadre. Al revisar su bolsillo descubrió que se quedó con doscientos pesos, por lo que al comenzar tenía \$200.

2. Puede solucionarse hacia atrás relacionando los datos y escribiendo cada paso de manera adecuada.

a) Descartando el hecho de que el santo le hubiese hecho trampa, o que él se hubiese equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿Cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero?

Respuesta.

$$\begin{array}{rlcr} 0 & \longrightarrow 600 & & \\ 2x_2 & \longrightarrow 200 & & x_2 = 100 \\ 2x_1 & \longrightarrow 200 & \text{donde} & x_1 = 150 \\ 2x & \longrightarrow 200 & & x = 175 \\ & x & & \end{array}$$

El minero tenía 175 y le daba 200 a Juan, que era más de lo que traía al inicio, desde ahí el minero se iba a quedar con menos dinero que su compadre, en este caso sin nada.

- *Reformular problemas.* Alterando los datos y la historia que se plantea en el problema se pueden obtener una amplia gama de variantes de éste; cambiando las cantidades de dinero, etc.

Control.

Para empezar se decide cuál será la heurística que se empleará, para continuar con la planificación de solución, que por ser un escrito bastante amplio podrían perderse los datos; donde ir tomando notas sería de gran ayuda (ejemplo: escribir cada uno de los doscientos pesos que le da el santo y los que le da a su compadre).

Sistemas de creencias.

En esta categoría entrarían características del problema que posiblemente lleven al solucionador a tomar en cuenta una ecuación, debido a que se presta a pensar en un razonamiento hacia atrás de manera inmediata. Por otro lado, aunque se trata de un texto largo, el contexto permite "enganchar" al solucionador, gracias a las frases "santito, santito" o "el compadre pediche".

Problema 2. *La herencia del minero*

Este problema fue tomado del *Módulo de Aprendizaje de Álgebra* (CECyTES, 2009, p.39), que es utilizado por los estudiantes del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Sonora.

El enunciado es el siguiente:

> Una anécdota que se cuenta por los pueblos de Sonora, trata de la herencia que un viejo minero, al sentirse ya muy enfermo, quiso repartir entre sus cuatro hijos, varones todos.
>
> Dicen que los reunió a todos junto a su lecho de enfermo, y así les habló:

-“Hijos míos, ya pronto tendré que rendir mi tributo a la madre Tierra. No pasarán muchos días para que abandone este mundo. Pero quiero marchar con la certeza de que los asuntos terrenales han quedo arreglados a mi entera satisfacción, pues no quiero dejar pendientes a mis familiares. Así es que, en vista de que su madre ya murió, y yo no tengo más por quién preocuparme que no sea por ustedes, mañana les repartiré la única herencia que les voy a dejar. En el cuarto de al lado, en la cómoda que era de su abuela, tengo un costal de pepitas de oro que nunca vendí, guardándolas siempre con la idea de entregárselas antes de mi muerte. Vengan por favor mañana, a esta misma hora, para hacer la repartición justa y equitativa.”

Los hijos, atribulados, se despiden del padre, prometiendo que al otro día regresarían. Sin embargo, el hijo mayor se retira del lugar pensado que no es justo que a todos se les entregue lo mismo, él es el hijo mayor y le tocó acompañar a su padre muchos años, mientras sus hermanos menores quedaban en casa. Así es que pasada la medianoche regresa a la casa del padre, entra sigilosamente, cuenta las pepitas, y se lleva la cuarta parte de ellas.

El segundo de los hijos razona de manera semejante, preguntándose por qué les debe de tocar lo mismo, si él siempre se ocupó de ayudar a su madre a cuidar a los hermanos menores mientras el mayor andaba con el padre en las minas. Así es que decide regresar a la casa del papá, busca la bolsa de pepitas, las cuenta y se lleva la cuarta parte sin que nadie se de cuenta de su acción.

No es de extrañar que el tercero de los hijos tampoco piense que sea justo recibir la misma cantidad que los hermanos, puesto que a él le tocaba ir siempre por todos los mandados y de cuando en cuando cuidar al hermano menor. Convencido de su argumento, regresa a casa de su padre entrada la madrugada, encuentra la bolsa de pepitas, las cuenta y se lleva a su casa la cuarta parte de las pepitas de oro que encontró.

Finalmente, el hermano menor, llega a la conclusión de que él, precisamente por el hecho de ser el menor, debe de quedar mejor protegido que sus hermanos mayores, que ya tienen sus entradas de dinero seguras. Vuelve entonces a casa de su padre, y sin que nadie lo vea, toma la bolsa de pepitas, las cuenta, y se lleva la cuarta parte a su casa.

Al otro día, a la otra estipulada, llegan los cuatro hijos al cuarto del padre, quien trabajosamente se dirige al cuarto vecino, trae la bolsa de pepitas, la abre, cuenta las pepitas y hace cuatro montoncitos de 81 pepitas de reluciente oro, entregando la parte correspondiente a cada uno de sus hijos, los cuales las reciben con lágrimas en los ojos.

a) ¿Cuántas pepitas había originalmente en la bolsa del viejo minero?

b) ¿Cuántas pepitas les tocaron en realidad a cada uno de los hijos?

Descripción.

Se trata de una situación problemática que está planteada en un contexto extra matemático. Es una adaptación de un problema muy conocido que aparece en el libro “El hombre que calculaba” de Malba Tahan.

Analizando la situación desde los planteamientos de Schoenfeld, tenemos:

Recursos.

- *Datos.* Por ejemplo: el número de hijos, el número de pepitas que se reparten en cada una de las etapas del problema, la fracción de pepitas que cada uno de los hijos se lleva.
- *Comprensión.* Identificación de las incógnitas y de las relaciones que se dan entre los datos (reglas que se siguen en la repartición).
- Ecuaciones lineales, la regla de tres.

Heurísticas.

1. Abordar el problema de manera directa. Identificando cuál es la cantidad desconocida, representándola mediante una literal determinada y estableciendo las relaciones entre ella y los datos que van siendo proporcionados en las sucesivas etapas del proceso de distribución de la herencia.

Solución 1.

Esto lo podemos esquematizar mediante la tabla siguiente:

Tabla 3.1

	Cantidad tomada	**Cantidad sobrante**
Primer hijo	$\frac{1}{4}x$ pepitas	$x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$ pepitas
Segundo hijo	$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}x\right)$ pepitas	$\frac{9}{16}x$ pepitas
Tercer hijo	$\frac{1}{4}\left(\frac{9}{16}x\right)$ pepitas	$\frac{27}{64}x$ pepitas
Cuarto hijo	$\frac{1}{4}\left(\frac{27}{64}x\right)$ pepitas	$\frac{81}{256}x$ pepitas
Padre	$\frac{1}{4}\left(\frac{81}{256}x\right)$ pepitas	Entregó 81 pepitas a cada uno de los hijos

Como puede observarse, la idea sería llegar a la construcción de una ecuación lineal con una incógnita.

a) ¿Cuántas pepitas había originalmente en la bolsa del viejo minero?

$$\frac{81}{256}x = 324 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 324\left(\frac{256}{81}\right) = 1024$$

b) ¿Cuántas pepitas les tocaron en realidad a cada uno de los hijos?

Primer hijo: $\frac{1}{4}x + 81 = \frac{1}{4}(1024) + 81 = 337$

Segundo hijo: $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}x\right) + 81 = \left(\frac{3}{16}\right)x + 81 = \frac{3}{16}(1024) + 81 = 273$

Tercer hijo: $\frac{1}{4}\left(\frac{9}{16}x\right) + 81 = \left(\frac{9}{64}\right)x + 81 = \frac{9}{64}(1024) + 81 = 225$

Cuarto hijo: $\frac{1}{4}\left(\frac{27}{64}x\right) + 81 = \left(\frac{27}{256}\right)x + 81 = \frac{27}{256}(1024) + 81 = 189$

2. Con un razonamiento hacia atrás. Este problema es un ejemplo típico de aquéllos que pueden ser resueltos mediante esta estrategia. Es decir, tomar el último de los datos proporcionados, 81, y eslabonar una serie de razonamientos que van en reversa, hasta llegar a la solución pedida. Este tipo de estrategias usualmente no se enseña en la escuela, a pesar de que es un procedimiento económico, en cuanto a tiempo y esfuerzo, en comparación con la alternativa que nos da abordar el problema de manera directa.

Solución 2.1 **a)**

a) ¿Cuántas pepitas había originalmente en la bolsa del viejo minero?

Llamemos x_n a la cantidad que dejó cada uno de los hijos, con $n = 1, \ldots, 4$; donde n representa el número de hijos y el orden en que tomaron las pepitas.

$$81\,(4) = 324 = x_4 = \frac{3}{4}x_3 = .75x_3$$

Para encontrar x_3, x_2, y x_1, empleamos la regla de tres de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} .75 & \text{——} & 1 \\ 324 & \text{——} & x_3 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{324\,(1)}{.75} = 432$$

$$\begin{array}{ccc} .75 & \text{——} & 1 \\ 432 & \text{——} & x_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{432\,(1)}{.75} = 576$$

$$\begin{array}{ccc} .75 & \text{——} & 1 \\ 576 & \text{——} & x_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{576\,(1)}{.75} = 768$$

$$\begin{array}{ccc} .75 & \text{——} & 1 \\ 768 & \text{——} & x \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{768\,(1)}{.75} = 1024$$

En total había 1024 pepitas.

b) ¿Cuántas pepitas les tocaron en realidad a cada uno de los hijos?

Primer hijo: $\frac{1}{4}(1024) + 81 = 337$

Segundo hijo: $\frac{1}{4}(768) + 81 = 273$

Tercer hijo: $\frac{1}{4}(576) + 81 = 225$

Cuarto hijo: $\frac{1}{4}(432) + 81 = 189$

Solución 2.1 **b)**

Esta solución es similar a la *Solución 2.1* a), pero con la diferencia de que se realiza de manera discursiva sin utilizar simbología matemática.

a) ¿Cuántas pepitas había originalmente en la bolsa del viejo minero?

   El minero repartió 81 pepitas entre sus cuatro hijos, por lo que había 324 pepitas en la bolsa, las cuales eran la tercera parte de la cantidad que dejó el tercer hijo, quien dejó 432 pepitas. Éstas son la tercera parte de lo que dejó el segundo hijo, por lo que dejó 576 pepitas. Análogamente, el primer hijo dejó 768 pepitas, que son la tercera parte del total de pepitas. Por lo tanto el minero tenía 1024 pepitas.

b) ¿Cuántas pepitas les tocaron en realidad a cada uno de los hijos?

   De lo que tomó cada uno de los hijos más lo que les dio el padre, al primer hijo le tocaron 337 pepitas, al segundo 273; al tercer y cuarto hijo, 225 y 189 pepitas, respectivamente.

Solución 2.2

a) ¿Cuántas pepitas había originalmente en la bolsa del viejo minero?

   Sea x_n, con $n = 1, \ldots, 4$, donde n representa el orden en que los hijos tomaron el dinero. A partir de la cantidad final podemos escribir la siguiente ecuación:

   $81\,(4) = 324 = \frac{1}{4}\,(x - x_4 - x_3 - x_2 - x_1)$, donde

   $$x_1 = \frac{1}{4}x, \qquad x_2 = \frac{1}{4}\,(x - x_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{3}{16}x$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(x - x_2 - x_1) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{3}{16}x - \frac{1}{4}x\right) = \frac{9}{64}x$$

$$x_4 = \frac{1}{4}(x - x_3 - x_2 - x_1) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{9}{64}x - \frac{3}{16}x - \frac{1}{4}x\right) = \frac{27}{256}x$$

Así, $$324 = \frac{27}{256}x + \frac{9}{64}x + \frac{3}{16}x + \frac{1}{4}x = \frac{81}{256}x$$

$$\Longrightarrow 324 = \frac{81}{256}x \qquad \Longrightarrow x = 324\left(\frac{256}{81}\right) = 1024$$

b) ¿Cuántas pepitas les tocaron en realidad a cada uno de los hijos?

Del inciso a) podemos concluir que:

Primer hijo: $\frac{1}{4}x + 81 = \frac{1}{4}(1024) + 81 = 337$

Segundo hijo: $\frac{3}{6}x + 81 = \frac{3}{16}(1024) + 81 = 273$

Tercer hijo: $\frac{9}{64}x + 81 = \frac{9}{64}(1024) + 81 = 225$

Cuarto hijo: $\frac{27}{256}(1024) + 81 = 189$

Como podemos darnos cuenta, a diferencia de las soluciones ***2.1* a)** y ***2.1* b)**, ésta no resulta económica; al contrario, incluso es más laboriosa que resolver directamente el problema.

- *Verificar y comprobar los procedimientos.* Independientemente de la estrategia usada (directa o indirecta), es posible verificar y comprobar los procedimientos realizados, donde una opción sería partir del total y empezar a quitar los que los hijos tomaron, etc.

- *Reformular problemas.* Otra característica de este problema es que se pueden generar variantes del mismo, por ejemplo es posible cambiar el número de repartos que se realiza y las cantidades de pepitas.

Control.

Una muestra de la presencia del control, en el proceso de solución, provendría de la decisión que se tome para elegir la estrategia de solución; es decir, puede que el solucionador opte por la realización de una tabla que se tome como apoyo para ilustrar la situación, así como al mismo tiempo que se encuentra lo que dejó cada uno de los hijos, ir determinando lo que éste y el siguiente tomaron. Por otro lado, al resolver el problema, nos dimos cuenta que es más fácil expresar verbalmente el resultado a comparación de las otras soluciones, por lo que poder escribir la solución mediante términos matemáticos, es un claro ejemplo de control.

Sistemas de creencias.

En este rubro podrían considerarse aspectos como si el problema resulta suficientemente atractivo, si se ubica o no como un problema de matemáticas, si el resolutor le concede un grado de dificultad o comprensión alto, etc. Además, es frecuente que alguien con formación matemática tienda a plantearlo por medio de ecuaciones, como fue el caso de la autora en la Tabla 3.1. Pero, podría suceder que, otra persona, sin tener necesariamente una formación matemática lo resuelva simplemente con un procedimiento hacia atrás; viéndolo estrictamente como un problema aritmético, enunciando la solución de manera discursiva y sin incluir simbología matemática.

Problema 3. ***Demostrar que la ecuación*** $x^3 - 3x + c = 0$ ***no puede tener dos raíces distintas en*** $(0, 1)$

Descripción.

A diferencia de los problemas anteriores, podemos observar que éste está en un contexto intra matemático. Tomando en cuenta los conocimientos y comportamientos que señala Schoenfeld (1985, p.15), podemos decir que en él se distingue:

Recursos.

- *Datos.* Se tiene una ecuación de tercer grado y el intervalo $(0, 1)$.
- *Comprensión.* Se considera que el problema estará comprendido si se identifican claramente los datos (la ecuación cúbica, el intervalo) y el requerimiento del problema, es

decir la realización de una demostración, además de la necesidad de conocer lo que es una raíz. Es importante no olvidarnos de c, que por ser una constante no tiene un valor fijo y la solución del problema depende de ella.

- El teorema de Rolle, características de los polinomios (derivables, etc.), representaciones gráficas de funciones, la regla de los signos de Descartes, la resolución de ecuaciones por factorización, entre otros.

Heurísticas.

- Encontramos tres posibilidades de solución a este problema:

1. Lo primero que podemos observar es que se trata de una ecuación cúbica, lo que nos lleva a pensar en un problema algebraico. Por ejemplo, factorizando la ecuación.

   Demostración.

   Sean r, s y t raíces de la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + c &= (x-r)(x-s)(x-t) \\ &= (x^2 - rx - sx + rs)(x-t) \\ &= x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+rt+st)x - rst \\ \Longrightarrow x^3 - 3x + c &= x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+rt+st)x - rst \end{aligned}$$

   Igualando los coeficientes correspondientes en las dos expresiones polinomiales, obtenemos

$$r + s + t = 0 \tag{1}$$

y

$$rs + rt + st = -3 \tag{2}$$

   Elevando (1) al cuadrado y, considerando (2), se tiene que $r^2 + s^2 + t^2 = 6$. Supongamos que $r, s \in (0,1)$, entonces $\left(r^2 + s^2\right) \in (0,2)$ y $t^2 > 4 \Longrightarrow |t| > 2$.

   Luego,

   si $t > 2$, (2) no se cumple, ya que r, s, y t son positivos;

si $t < -2$, (1) tampoco se cumple, por que la suma de r, s, y t es negativa.

Esto es una contradicción, por lo tanto $x^3 - 3x + c = 0$ no tiene dos raíces distintas en $(0, 1)$.

2. La expresión algebraica podría ser considerada como una ecuación funcional, que permite utilizar herramientas del cálculo.

   Demostración.

   Sea $f(x) = x^3 - 3x + c$ y supongamos que r y s son soluciones en el intervalo $(0, 1)$, y por ser un polinomio, $f(x)$ es continua en $[r, s]$ y derivable en (r, s), donde $f(r) = f(s)$. Aplicando el teorema de Rolle, existe un $t \in (r, s)$ tal que $f'(t) = 0$, es decir, $3t^2 - 3 = 0$, que se cumple para $t = \pm 1$; lo cual no puede ser, ya que $r, s \in (0, 1)$. Por lo tanto $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raíces distintas en $(0, 1)$.

3. Podemos resolver el problema integrando recursos de cálculo y álgebra, como se muestra a continuación.

   Demostración.

   Llamemos a la ecuación $g(x) = x^3 - 3x + c$, y consideremos los siguientes casos:

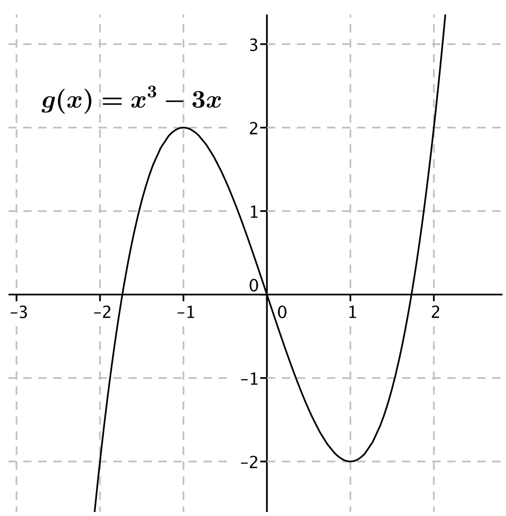


Figura 3.1

- *si* $c = 0$: $g(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$, donde las raíces son 0, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ y ninguna de ellas pertenece al intervalo $(0, 1)$. Véase Figura 3.1.
- *si* $c < 0$: $g(x) = x^3 - 3x - c$. Aplicando la regla de los signos de Descartes, vemos que sólo hay un cambio de signo del primer al segundo término de la ecuación, por lo tanto la función tiene solamente una raíz positiva.

  De esta manera la ecuación no tiene dos raíces en $(0, 1)$, lo cual podemos ilustrar mediante las siguientes gráficas donde a c se le han dado diferentes valores negativos.

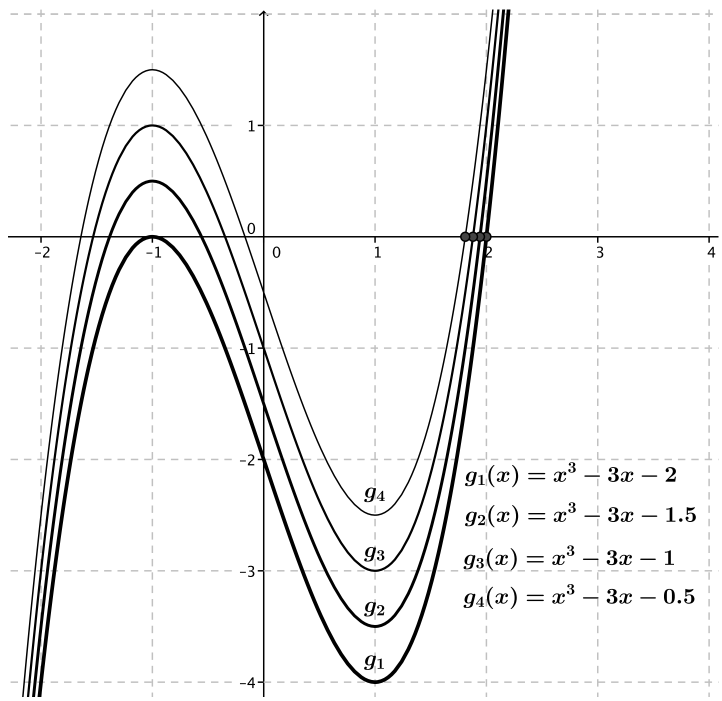


Figura 3.2

- *si* $c > 0$: $g(x) = x^3 - 3x + c$. Utilizando nuevamente la regla de los signos de Descartes, la función tiene dos cambios de signo y por lo tanto el polinomio tendrá dos ó cero raíces reales positivas. Si la opción es cero, no hay problema, se cumple lo que está pidiendo demostrar. Pero si fuese la otra opción, entonces necesitamos determinar si las raíces se encuentran en el intervalo $(0, 1)$.

Ahora, veamos dónde están las raíces. Como $c > 0$, sabemos que la gráfica de la función se desplaza verticalmente hacia arriba; de esta manera es suficiente apoyarnos en la Figura 3.1, y a partir de ella representar gráficamente a $g(x)$, dándole a c diferentes valores positivos.

Podemos analizar la función en la Figura 3.1 y ver que tiene un mínimo local en $(1,-2)$. Si movemos la gráfica dos unidades hacia arriba, ésta no tendrá solución en el intervalo $(0,1)$, ya que el punto de intersección con el eje x será en $x=1$; así, para $c>2$ no habrá soluciones en el intervalo dado. Por lo tanto, las soluciones posibles son para $0<c<2$; además podemos observar que, para el dominio $x\in(0,1)$, la función solamente toma un valor real positivo y que, al variar c, $g(x)$ tendrá solamente una raíz, tal y como se muestra en la Figura 3.3; quedando demostrado lo requerido.

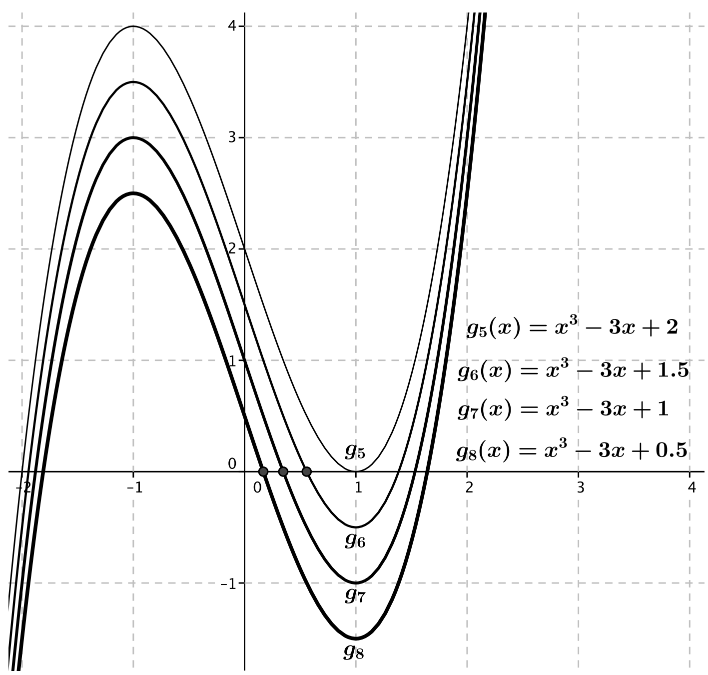


Figura 3.3

- *Dibujar figuras.* Dado que la condición del problema es una ecuación y un intervalo, se puede emplear una gráfica, como se hizo previamente en las heurísticas.

- *Reformular problemas.* Por la índole del problema, se pueden plantear diversos problemas modificando las condiciones del original, por ejemplo, la ecuación (el grado y la eliminación de c), el intervalo y así el requerimiento del problema (que no pueda tener de $1, 2, \ldots, n$ o más raíces distintas, dependiendo del grado de la ecuación).

- *Explotar problemas relacionados.* En matemáticas se ven diferentes tipos de ecuaciones, por lo que podríamos relacionar este problema con algunos otros con los que hayamos trabajado.

- *Verificar y comprobar los procedimientos.* En las tres heurísticas que identificamos se puede llevar a cabo este paso. Por ejemplo, en la primera, es una generalización, en la cuál se presta a considerar casos que permitan verificar que las afirmaciones son correctas.

Control.

Tomar una decisión sobre cuál será el procedimiento o camino más viable para su resolución, así como desertar el proceso de resolución, podría resultar una tarea fácil, ya que generalmente este tipo de problemas son resueltos con métodos conocidos, y cuando no se pueden resolver por alguno de ellos es común que no se busqué algún otro método. Sin embargo, es posible que se dé el caso en que alguien que intenta resolver el problema busqué entre sus conocimientos alguna herramienta que le sea útil. Tal sería el caso en que se utilicen gráficas, las cuales permiten analizar el problema de diferentes maneras.

Sistemas de creencias.

Debemos tener en cuenta que se trata de una ecuación y que en matemáticas se trabaja con diversos tipos de ecuaciones, por lo que los métodos de resolución comunes podrían causar ruido en quien resuelve el problema.

Además, no hay que olvidar que se trata de una demostración, y no todos los estudiantes están familiarizados con las demostraciones, por lo que desde ahí probablemente tendrían bloqueado cualquier camino de solución; igual sucedería con el intervalo $(0, 1)$, por no no mencionar textualmente que se trata de un intervalo, el cual podría ser considerado como un punto.

Problema 4. ***Resolver la desigualdad***

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$$

Descripción.

Este problema está en un contexto intra matemático. Considerando la Tabla 2.6, distinguimos:

Recursos.

- *Datos.* Como único dato tenemos la desigualdad.
- *Comprensión.* Para comprender el problema se requiere conocer qué es lo que significa resolver una desigualdad, qué es lo que se está buscando cuando se plantea un problema de esta naturaleza. De igual manera, pueden entrar en juego elementos del siguiente estilo: considerar que como aparece una raíz cuadrada, entonces no se podrán tener valores negativos; de la misma manera, el hecho de que aparezca una x como denominador nos indica que ya no es posible que aparezca el cero en el conjunto solución. Bajo estas consideraciones, esto nos indica que la solución de la igualdad estará en los reales positivos.

  Otra consideración preliminar que puede hacerse, es el darse cuenta de que cuando $x = 1$, entonces se cumple la igualdad, y por lo tanto ese número también debe ser eliminado del conjunto solución.
- Saber resolver desigualdades, por ejemplo, considerando casos posibles para resolverlas; representación gráfica de una función.

Heurísticas.

- Hay al menos tres estrategias de solución al problema:
  1. Trabajar con la desigualdad algebraicamente, que es la estrategia que nos enseñan en la escuela y por lo tanto en la que pensamos de manera inmediata.

Solución:

Consideremos $2\sqrt{x}$, que se cumple para $x > 0$.

Luego,

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(2\sqrt{x}\right)^2 > \left(3 - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4x > 9 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2(4x) > \left(9 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2$$

$$\Rightarrow 4x^3 > 9x^2 - 6x + 1$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 > 0 \quad \Rightarrow (x-1)^2\,(4x-1) > 0$$

Como $(x-1)^2$ es positivo por estar al cuadrado, y para que se cumpla la desigualdad anterior la única solución es que $(4x-1)$ sea mayor que cero, entonces

$$\begin{array}{lcl} (x-1)^2 > 0 & & (4x-1) > 0 \\ \quad \Rightarrow x - 1 > 0 & \text{y} & \quad \Rightarrow 4x - 1 > 0 \\ \quad \Rightarrow x > 1 & & \quad \Rightarrow 4x > 0 \\ & & \quad \Rightarrow x > \dfrac{1}{4} \end{array}$$

$$\Longrightarrow x \in (0,\infty)\bigcup(1,\infty)\bigcup\left(\frac{1}{4},\infty\right)$$

Así, la solución es $x \in (0,1)\bigcup(1,\infty)$.

Representando el resultado anterior en la recta real tenemos:

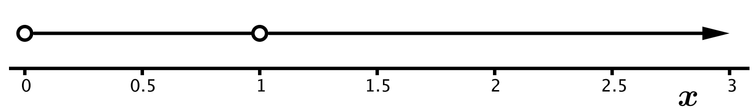


Figura 3.4

2. Ver la desigualdad como una comparación de dos funciones, $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$, que se pueden expresar gráficamente y, a partir de eso, llegar a una conclusión para encontrar la solución.

   Solución:

   Graficamos $f(x)$ y $g(x)$, y localizamos el punto donde se intersecan entre sí.

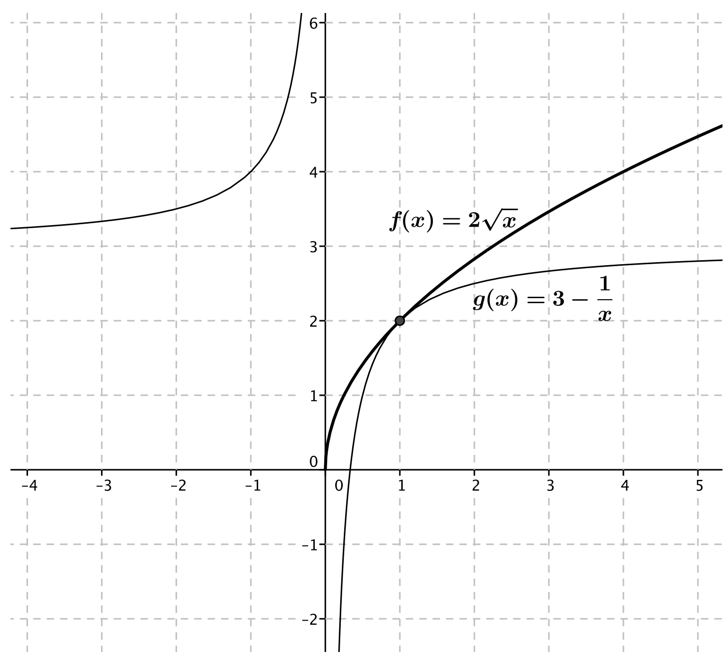


Figura 3.5

Como se puede observar en la Figura 3.5, las funciones se intersecan en el punto $(2, 1)$, donde para $x = 1$ las dos son iguales y, para comenzar, la desigualdad se cumple para $x \neq 1$. Además, en la gráfica se ve claramente que $f(x) > g(x)$ cuando $x > 0$ y $x > 1$.

Entonces, las soluciones de la desigualdad son $0 < x < 1$ y $x > 1$, como se visualiza en la Figura 3.6.

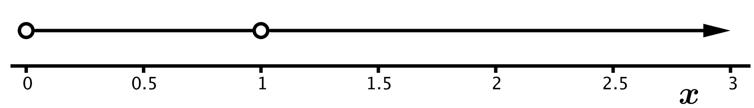


Figura 3.6

3. Otra heurística pudiera ser el hecho de que alguien comience haciendo una exploración, dando valores específicos y buscando alguna regularidad en el comportamiento.

   Solución:

   Si damos a x diferentes valores, tenemos que para:

$$x = 1 \Rightarrow 2 > 2 \qquad\qquad x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2} > 1$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 > 3 - \frac{1}{0} \qquad\qquad x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$$

$$x = 2 \Rightarrow 2\sqrt{2} > \frac{5}{2}$$

   En $x = 1$ la desigualdad no se cumple, y para $x = 0$ la desigualdad no está definida. Luego, para los valores positivos observamos que la desigualdad es cierta.

   Entonces, el conjunto solución es $(0, 1) \bigcup (1, \infty)$

- *Reformular problemas.* Pueden obtenerse diferentes problemas, variando el exponente y la constante de la incógnita x, el signo de la desigualdad o los valores numéricos.

- *Verificar y comprobar los procedimientos.* En cualquiera de las estrategias podemos verificar la solución. En la primera heurística sustituyendo los valores que toma x, y los que no, en la desigualdad para comprobar que se cumple. Además, la comparación de los comportamientos de las gráficas de las funciones permite visualizar claramente cuál es el conjunto de puntos que resuelven la desigualdad.

Control.

Deben supervisarse los pasos realizados para valorar si es el más adecuado a la situación y, a partir de eso, decidir continuar con el método utilizado hasta ahora o no. Resolviendo el problema algebraicamente podría resultar tedioso y no encontrarse una forma de desglosar la desigualdad para analizarla de manera más digerible, y es donde podría considerarse otra estrategia o el abandono de la situación.

Sistemas de creencias.

Estamos conscientes de que la estrategia de analizar una desigualdad geométricamente podría no ser utilizada por algún resolutor, por no ser común en la resolución de este tipo de problemas, así, los métodos usados frecuentemente van a sobresalir respecto a los otros.

Problema 5. *El problema del collar*

Este problema se aplicó de la siguiente manera:

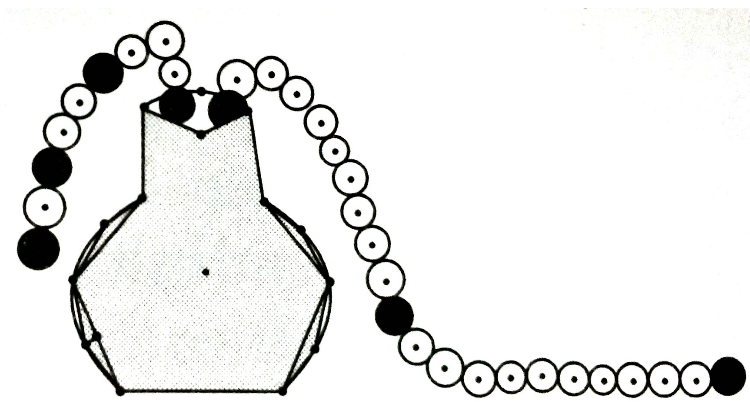


Figura 3.7

1. Analice cuidadosamente el dibujo mostrado. A partir de dicho análisis, escriba las preguntas matemáticas que desde su punto de vista puedan formularse a partir de la figura.
2. ¿Cuántas bolitas tiene el collar?

Descripción.

Este problema fue desarrollado a partir de un ejemplo que se presenta en "La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos" (2007). Es importante hacer notar que en este problema la información está presentada por medio de una imagen, en donde se pueden ubicar aspectos de carácter geométrico, como las formas de los objetos que ahí aparecen, sus colores, así como aspectos numéricos, entre ellos el número de bolitas de color negro, de color blanco.

Análogamente a los problemas anteriores, hacemos uso de la Tabla 2.6 de Schoenfeld, para llevar a cabo el análisis, en el que concluimos que:

Recursos.

- *Datos.* La imagen es el dato general. En ella observamos el jarrón y su forma, la cantidad de bolitas del collar y los colores que hay.

- *Comprensión.* Para poder expresar matemáticamente las preguntas, así como responder al segundo cuestionamiento, es necesario analizar cuidadosamente la imagen y considerarla tal como está.

- Conocimientos de diferentes áreas de las matemáticas, como conceptos, propiedades. Por ejemplo, *volumen*, *radio*, entre otros; así como la suma de números naturales.

Heurísticas.

- Respecto a la primer cuestión, según Santos Trigo (2007, p.41), algunas preguntas que pueden examinarse matemáticamente al observar la Figura 3.7 incluyen:

    1. ¿Cuántas figuras geométricas aparecen en la figura?
    2. ¿De qué material está hecho el recipiente?
    3. ¿Cuántos colores aparecen en la figura?
    4. ¿Cuáles son las dimensiones del recipiente?
    5. ¿Cuál es el radio de las cuentas?
    6. ¿Cuál es el volumen del recipiente?
    7. ¿Cuál es la relación entre el número de cuentas blancas y negras?
    8. ¿Cuántas cuentas se encuentran en el interior del recipiente?
    9. ¿Cuántas cuentas blancas tiene el collar?
    10. ¿Cuánto mide el collar?
    11. ¿Cuánto material se necesita para construir el recipiente?

Para el segundo requerimiento, *¿Cuántas bolitas tiene el collar?*, tenemos:

$1+1+1+1+\ldots+1+1 = 11$ bolitas negras y

$1+2+3+\ldots+9+10$ bolitas blancas, que es lo mismo que $\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{n(n+1)}{2}$ para $n = 10$. Sustituimos $n = 10$ en la suma y tenemos $\frac{10(10+1)}{2} = \frac{10(11)}{2} = \frac{110}{2} = 55$ bolitas blancas.

Así, hay $11 + 55 = 66$ bolitas en el collar.

- *Reformular problemas.* Al llevarse a cabo el primer requerimiento, se están planteando diversos tipos de problemas, que a su vez pueden plantearse de diferente manera. Por ejemplo, ¿cuántas bolitas hay dentro del jarrón? podemos replantearla de la siguiente manera: ¿cuál es el volumen del jarrón?, que podría dar respuesta a la pregunta anterior y a la vez formulándola matemáticamente.

Control.

Se eligen los cuestionamientos que se harán, ya sea integrando conocimientos de diferentes áreas de las matemáticas o tomando en cuenta sólo una de ellas. El resolutor podría marcar, o quizá no, la figura (con puntos, líneas, etc.), para facilitar el análisis de ésta y el enunciado de las preguntas.

Sistemas de creencias.

Quien resuelve el problema podría ser incapaz de ver más allá de lo que está superficialmente en la imagen, debido al nivel de pensamiento matemático que éste tenga. Muchas veces relacionamos cuestiones de la vida cotidiana con las matemáticas, pero dentro de la matemática es difícil relacionar un rama con otra; por eso en este problema tener una figura geométrica podría llevar a realizar cuestionamientos puramente geométricos, dejando de lado el cálculo, álgebra, entre otros.

Esto nos dice que la mayoría resolvemos problemas de acuerdo a la área en la que ubicamos el problema; sin prestar atención a soluciones que resultarían más económicas, pero que no estamos acostumbrados a emplear, o que ni siquiera estamos conscientes de ello.

Problema 6. ***¿Qué tendedero es mejor?***

Hemos tomado este problema del libro "Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje", de Chevallard, Bosch, & Gascón (1997, p.65-66). A continuación se presenta el planteamiento:

> La cuestión inicial.
>
> En la Figura 3.8, las figuras 1 y 2 presentan dos modelos de tendedero de ropa para apartamento. Los dos valen lo mismo, son igual de resistentes, ocupan el mismo espacio y sólo difieren por la disposición de los hilos de tendido.
>
> La parte superior de los tendederos es, en ambos casos, un cuadrado de 1 metro de lado. El tendedero A tiene el hilo dispuesto en 9 tiras paralelas y equidistantes (Fig. 1), mientras que el tendedero B (Fig. 2) tiene el hilo dispuesto en 4 cuadrados concéntricos a igual distancia entre ellos que los hilos paralelos del tendedero A.

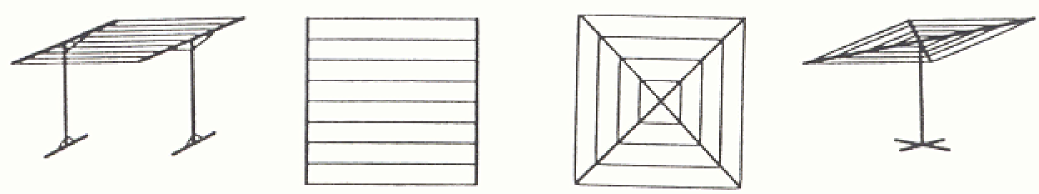


Fig. 1. Tendedero A *Fig. 2. Tendedero B*

Figura 3.8

> Lo que nos interesa saber es cuál de los dos modelos es más eficaz o útil, en el sentido de que tiene más longitud de hilo de tendido y, por lo tanto, permite tender más ropa.
>
> En la tienda también venden tendederos de otros tamaños: los más grandes son cuadrados de $1,25$ metros de lado (con 11 tiras los del tipo A y 5 cuadrados los del tipo B) y los más pequeños de 75 cm de lado (con 7 tiras o 3 cuadrados). El hecho que el tendedero A sea más o menos útil que el B, ¿depende del tamaño del tendedero?

Problema 1

Sabiendo que los dos tendederos tienen 1 metro de lado, ¿qué longitud es mayor: la suma de la longitud de los 9 segmentos paralelos del tendedero A o la de los perímetros de los 4 cuadrados concéntricos del tendedero B? ¿Qué ocurre si los cuadrados exteriores de los tendederos miden $1,25$ m? ¿Y si miden $0,75$ m?

Problema 2

Supongamos que los tendederos son cuadrados de lado a, que en el tendedero A hay n segmentos paralelos equidistantes y que en el tendedero B hay $\frac{n}{2}$ cuadrados concéntricos si n es par y $\frac{n-1}{2}$ cuadrados si n es impar. ¿Qué es mayor: la suma de la longitud de los segmentos paralelos del tendedero A o la de los perímetros de los cuadrados concéntricos del tendedero B?

Descripción.

Este problema, a su vez, fue tomado del artículo de J. Kilpatrick: "Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From?" in Alan H. Schoenfeld (1987), Cognitive Science and Mathematics Education, Erlbaum, London. Originalmente, en dicho problema se requería determinar la longitud (la cual dependía de la decisión que se tome sobre hacer la construcción) del hilo necesario para la construcción de los tendederos, por lo que el problema, desde un inicio, está ubicado en un contexto extra matemático.

De acuerdo a la Tabla 2.6 de Schoenfeld, encontramos que:

Recursos.

- *Datos.* El tamaño y forma de la parte superior de los tendederos, la manera en que el hilo está dispuesto en los tendederos A (nueve tiras paralelas y equidistantes) y B (cuatro cuadrados concéntricos a igual distancia entre ellos que los hilos paralelos del tendedero A). También puede considerarse como datos los dibujos auxiliares presentados.

- *Comprensión.* Este problema se encuentra dividido en tres etapas:

  1. Este es un problema de comparación entre dos tendederos de diferente forma, en él

se pide encontrar el mejor tendedero, el que cuenta con mayor longitud para tender la ropa.

2. En esta etapa se trata de tomar una decisión sobre si el tamaño de los tendederos es decisiva para poder determinar cuál es el más conveniente. Se consideran diferentes medidas de los tendederos (cuadrados de $1,25$ metros y 75 cm de lado), donde al mismo tiempo las disposiciones de los hilos cambian (11 tiras los del tipo A y 5 cuadrados los del tipo B; 7 tiras o 3 cuadrados, respectivamente).

3. Podemos considerar una tercera etapa, la cual es una generalización de las anteriores.

Dichas etapas se ven reflejadas en el ***Problema 1*** y en el ***Problema 2***. Esto confirma que, en efecto, éstas son parte esencial del problema.

- El perímetro de un cuadrado y el trabajar con sumas constituyen este rubro.

Heurísticas.

- Como consecuencia de las etapas mencionadas previamente, encontramos tres estrategias útiles de resolución:

1. En la primera etapa se calcula la longitud del hilo.

   Solución.

   $L(T_A) = 9(1m) = 9m$

   $L(T_B) = 4(0.25m + 0.5m + 0.75m + 1m) = 4(2.5m) = 10m$

   Como podemos ver, el tendedero de mayor longitud es el B, que en este caso es el mejor. Pero no es suficiente para decir que siempre será el mejor.

2. En esta etapa se calcula la longitud de los tendederos, de medidas 1.25 m y 75 cm.

   Solución.

   Para los tendederos con 1.25 m de lado, tenemos que:

   $L(T_A) = 11(1.25m) = 13.75m$

$L(T_B) = 4(0.25m + 0.5m + 0.75m + 1m + 1.25m) = 4(3.75m) = 15m$

En los tendederos de 75 cm de lado:

$L(T_A) = 7(.75m) = 5.25m$

$L(T_B) = 4(0.25m + 0.5m + 0.75m) = 4(1.5m) = 6m$

Comparando los resultados, afirmamos que el tendedero B es más útil; y que esto no depende del tamaño del tendedero, sino de la distribución del hilo.

3. El problema puede ser resuelto de manera general a partir de los casos particulares que se muestran (el tamaño del cuadrado del tendedero), sin antes dar solución a cada caso, y de esta manera se estaría verificando la solución del problema.

Solución.

Una solución general sería la siguiente.

Como los tendederos del tipo A están conformados por segmentos paralelos equidistantes y tienen lado n, podemos decir que:

$$L(T_A) = an$$

En los tendederos de tipo B, tenemos:

- n par, con $\frac{n}{2}$ cuadrados.

  Podemos afirmar que el cuadrado con mayor perímetro es de lado a, que llamaremos $P_1 = 4a$, y el perímetro del cuadrado de menor lado, en este caso $\frac{a}{n-1}$, es $P_n = \frac{4a}{n-1}$, así P_1 es $(n-1)$veces P_n. Gracias a este resultado y a que todos los cuadrados están separados por la misma distancia, encontramos una relación entre los perímetros; los perímetros son $3, 5, 7, \ldots, (n-1)$ veces P_n.

  Entonces,

$$L(T_B) = 4\left(\frac{a}{n-1}\right) + 4\left(\frac{3a}{n-1}\right) + 4\left(\frac{5a}{n-1}\right) + \ldots, +4\left(\frac{(n-1)a}{n-1}\right)$$

$$= \frac{4a}{n-1}\left[1+3+5+\ldots+(n-1)\right]$$

$$= \frac{4a}{n-1}\left[1+3+5+\ldots+\left(2\left(\frac{n}{2}\right)-1\right)\right]$$

$$= \frac{4a}{n-1}\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{an^2}{n-1}$$

Por lo tanto,

$$L(T_B) = \frac{an^2}{n-1} = an\left(\frac{n}{n-1}\right) > an = L(T_A), \text{ pues } \frac{n}{n-1} > 1.$$

Así pues, $L(T_B) < L(T_A)$.

- n impar, con $\frac{n-1}{2}$ cuadrados.

$$L(T_B) = 4\left(\frac{2a}{n-1}\right) + 4\left(\frac{2(2a)}{n-1}\right) + 4\left(\frac{3(2a)}{n-1}\right) + \ldots, +4\left(\frac{(n-1)a}{n-1}\right)$$

$$= \frac{8a}{n-1}\left(1+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{8a}{n-1}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2}$$

$$= \frac{4a}{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) = a(n+1)$$

Entonces, $L(T_A) = (n+1)a > na = L(T_A)$

- *Reformular problemas.* De este problema pueden derivarse otros, ya sea cambiando la forma de la parte superior del tendedero (de un cuadrado a un rectángulo, triángulo, etc.), la disposición del hilo en cada uno de los tendederos, así como cambiar el requerimiento del problema.

Control.

La posibilidad de, al inicio, visualizar y estructurar una versión general del problema y abordarlo de esta manera, como mencionamos previamente; de esta manera se estaría verificando la solución, ya que para comprobar si el resultado es correcto se consideran casos particulares que permiten solucionar las etapas anteriores.

Quien resuelve el problema debe decidir qué herramientas servirán y cuáles no en el proceso, como considerar los perímetros por si solos o buscar una relación entre ellos para facilitar la generalización; pero, de igual manera al estar realizando los procedimientos podrían surgir otras ideas y/o estrategias de solución.

Sistemas de creencias.

Un elemento a considerar puede ser la familiaridad con el contexto presentado, de quien resuelve el problema. Por ejemplo, podría causar conflicto la existencia de un tendedero como el B, por no ser tan común como el A y a partir de eso decir que el segundo es más útil.

La forma del tendedero B puede ocasionar complicaciones, no solamente por ser poco frecuente en el entorno, sino por las varillas diagonales, que pueden prestarse a confusión al ser ubicadas también como espacio disponible para tender la ropa.

Además, hacer una generalización del problema es una tarea complicada, ya que la suma que establecimos para resolver el problema, así como el perímetro, podrían no ocurrírseles a quienes intenten resolver el problema, o podrían ser inequívocos por la falta de experiencia con generalizaciones.

Capítulo 4

Análisis de la información

En este capítulo se presentan los análisis de las respuestas que los estudiantes seleccionados dieron a cada uno de los problemas planteado.

La presentación se realiza en el mismo orden en el que aparecen en la Sección 3.2, Descripción de los problemas, del Capítulo 3.

Problema 1. ***Hay que saber pedir***

Estudiante 1. Lic. en Matemáticas. Quinto semestre. Figura 4.1.

Recursos.

La cantidad que le pide el compadre pediche al santito, los doscientos pesos que le da a Juan y la utilización de ecuaciones lineales.

Heurísticas.

La estrategia empleada es directa y de carácter algebraico, en la que el individuo comienza considerando a $2x$ como el doble de la cantidad inicial que tenía el compadre pediche, y restándole \$200 que éste le dio a su compadre Juan. Luego, esa cantidad la multiplicó por dos, ya que le pidió el doble de lo que tenía al santito, y nuevamente le restó \$200; hizo el mismo procedimiento otra vez, llegando a una igualdad en donde pudo despejar x, y así encontrar la cantidad que tenía inicialmente el compadre pediche.

Al argumentar sobre qué es lo que sucedió para que se quedara sin dinero, el individuo lo hace de manera discursiva y comenzando por el resultado, incluyendo las cantidades que obtuvo y con las que se quedó, al pedirle al santito y darle a su compadre Juan respectivamente. De alguna manera esta verbalización le sirvió como verificación de que su resultado era correcto.

El segundo de los incisos no fue respondido.

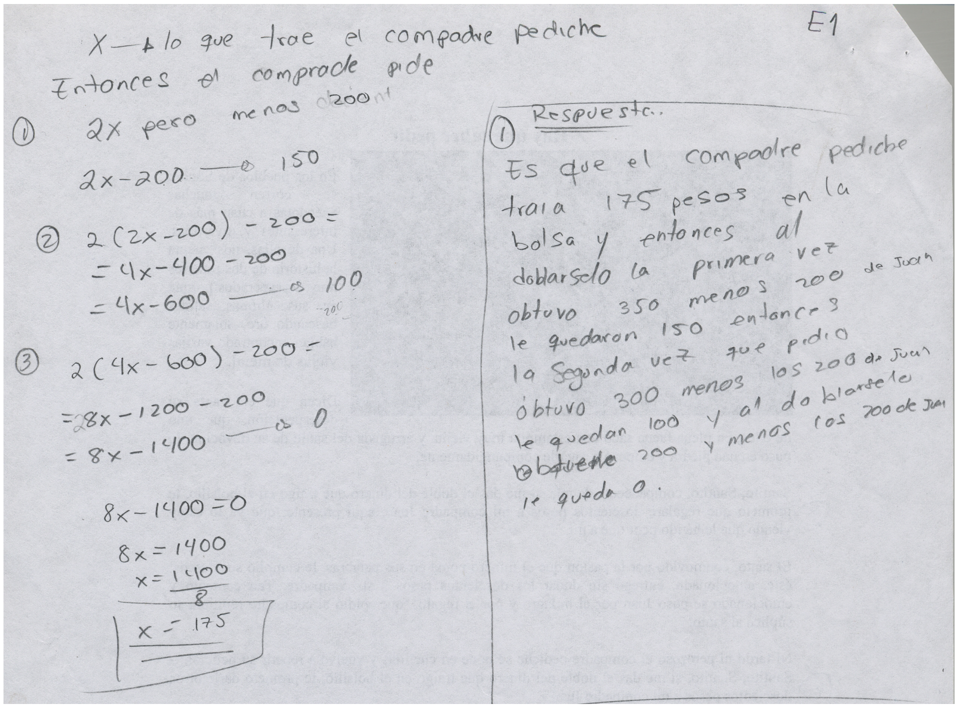


Figura 4.1

Control.

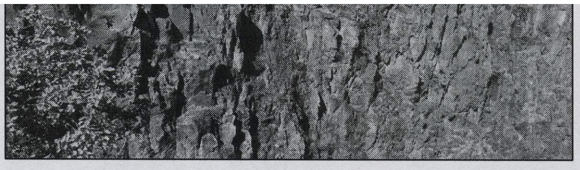
El individuo marcó el texto para poder determinar cuántas veces sucedió el mismo suceso y tener un control sobre la situación, en la que estuviera considerando los datos exactos. Además, realizó las operaciones necesarias y de manera correcta y utilizando una sola heurística, demostrando seguridad de haberla elegido; y determinando las cantidades que tenía el pediche en cada suceso para poder dar una argumentación firme.

Como ya dijimos, al argumentar su respuesta verifica que su solución es la adecuada.

Sistemas de creencias.

El estudiante utiliza herramientas algebraicas para interpretar y resolver el problema, dando una vez más elementos que muestran generalmente que este tipo de problemas en contexto extra matemáticos se abordan inicialmente de esa manera.

Estudiante 2. Lic. en Matemáticas. Quinto semestre.



en sus últimas salidas buscando oro, solamente habían encontrado vasijas viejas de metal.

$B = 175$

Dicen que era tanta su desesperación, que uno de ellos, en plena faena sacó una estampita muy viejita y arrugada del santo de su devoción, lo puso en una piedra y empezó a rogarle compungidamente:

Santito, Santito, compadécete de mí, si me das el doble del dinero que traigo en el bolsillo, te prometo que regalaré doscientos pesos a mi compadre Juan, aquí presente, que ya lo estoy viendo que le ha ido peor que a mí. $2B-200$

$2(175)-200$

$2(150)-200$

$2(100)-200=0$

El santo, conmovido por la pasión que el minero ponía en sus palabras, le cumplió sus deseos; éste, emocionado, entregó sin dudar los doscientos pesos a su compadre. Tan contento y emocionado se puso Juan por el milagro y por el regalo, que pidió al compadre repitiera su súplica al santo. $2B-200$

Ni tardo ni perezoso el compadre pediche se pone en cuclillas y vuelve a repetir su petición: -Santito, Santito, si me das el doble del dinero que traigo en el bolsillo, te prometo darle otros doscientos pesos a mi compadre Juan.-

De nueva cuenta el santo se conmueve y vuelve a conceder la petición, para alegría y emoción de Juan, que inmediatamente recibe otros doscientos pesitos. Pero más tarda en recibirlos, que en pedirle a su compadre que otra vez repita la solicitud. $2(2B-200)-200$

tenía 175 inicialmente cada vez que pedía y daba los 200 a su compadre, el se quedaba con ~~125~~ ~~75~~ 150 100 el problema fue que en vez de crecer lo que traía en la bolsa decreció. Jejeje. hasta que se quedó sin nada

Éste no se hace del rogar, impactado al darse cuenta de los buenos resultados que estaba obteniendo con el santo, repitiendo su petición: -"Santito, Santito, mira cómo está mi compadrito Juan, por última vez, si me vuelves a dar el doble del dinero que traigo en la bolsa, le vuelvo a regalar otros doscientos pesos a mi compadrito del alma"- $2(2(2B-200)-200)-200$

$2(2(4B-200)-200)-200$

Pacientemente el santo concede el milagro, Juan recibe gustoso otros doscientos pesos, mismos que guarda celosamente en su bolsa, volteando a ver al compadre para preguntarle ansioso: "¿Pues cuánto consiguió usted compadre? Se va a poner rete contenta la comadre".

El interpelado mete la mano a su bolsillo para encontrarse, ¡oh sorpresa!, con que no traía ni un centavo en ella.

a) Descartando el hecho de que el santo le hubiese hecho trampa, o que él se hubiese equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿Cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero? $2(2(2B-200)-200)-200=0$

$2(4B-400-200)-200 = 8B-1200-200 = 8B-1400=0$ $B = \frac{1400}{8} = 175$

b) Construye otra versión de esta anécdota, de tal manera que asegures que el compadre pediche se queda con algo de dinero en su bolsa. Explica detalladamente tus argumentos.

$8B-1400=200$

$B=200$

si comienza con 200 en el bolsillo se quedaría con 200 jejeje

si comienza con 176 en el bolsillo se queda con 8 pesos

si $175 < B$ el pediche se queda con algo

90

Figura 4.2

Recursos.

El doble de dinero que le daba el santito y los doscientos pesos que el pediche otorgaba a su compadre; así como las ecuaciones lineales que aparecen en la hoja de trabajo (Figura 4.2).

Heurísticas.

El estudiante utilizó una estrategia directa empleando recursos algebraicos, partiendo de la cantidad que le dio el santito y quitándole los doscientos pesos, haciendo esto dos veces más. Así, logra establecer una ecuación lineal en la que reunió términos para poder encontrar la cantidad inicial que tenía el pediche.

La descripción del suceso fue concreta, en donde asegura que la explicación es que la cantidad que tenía el minero decrecía en lugar de crecer hasta quedarse sin nada.

Nuevamente mediante una ecuación lineal, el individuo encontró la cantidad que debe tener el pediche antes de pedirle dinero al santito, la cual tiene que ser mayor a $175 para poder quedarse con algo de dinero al final.

Control.

La comprensión y control sobre la situación planteada queda evidenciada al analizar el manejo que hizo el estudiante de los datos y sus relaciones en cada una de las fases del problema.

Sistemas de creencias.

De nueva cuenta, las creencias matemáticas siguen evidenciándose en la manera de resolver los problemas; nos referimos a la utilización de expresiones algebraicas como recurso inicial.

Estudiante 3. Licenciatura en Física. Primer semestre. Figura 4.3.

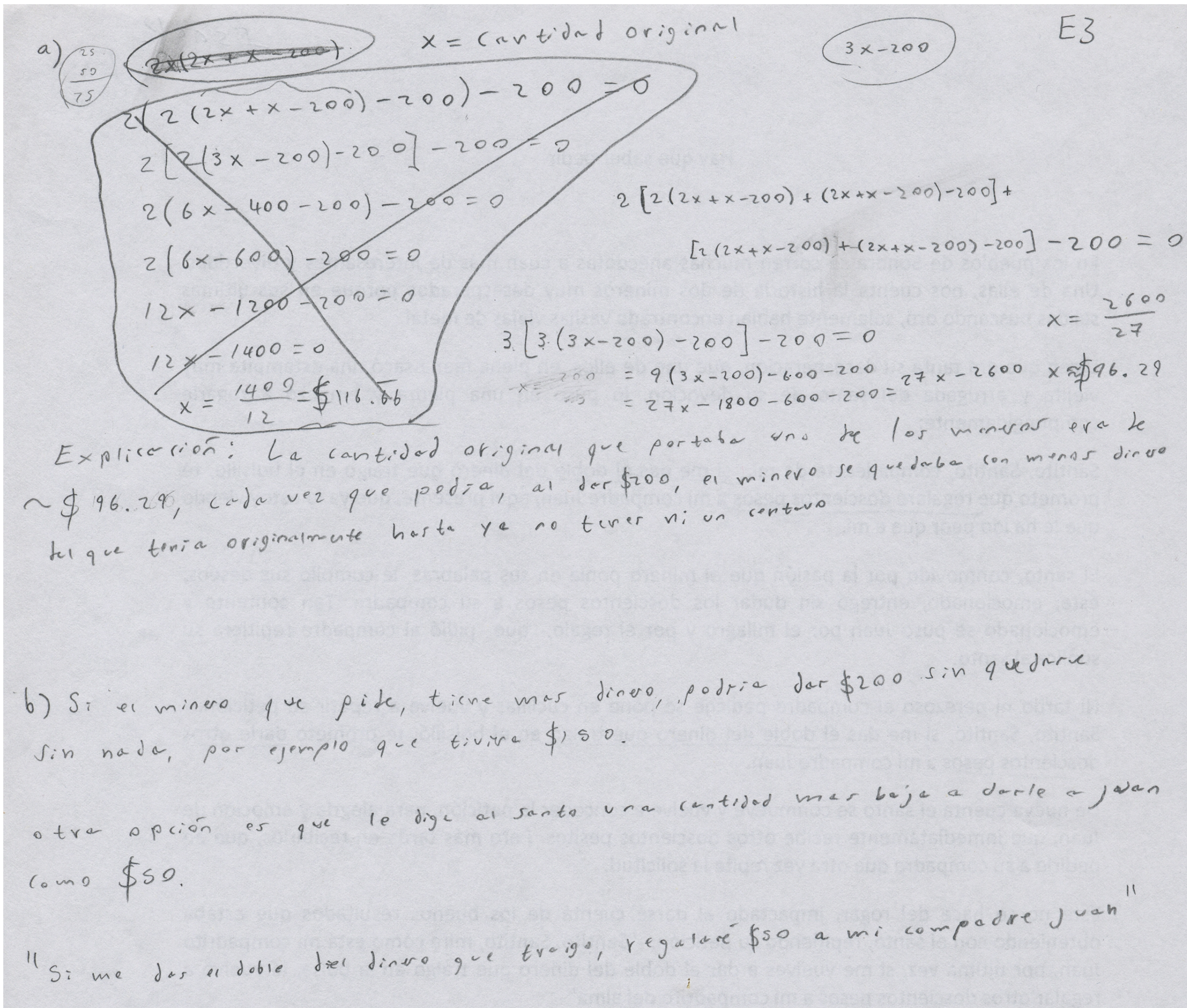
Recursos.

El estudiante tomó en cuenta los doscientos pesos y la cantidad que le daba el santito al pediche. Por otra parte, las ecuaciones establecidas por el individuo también son parte de los recursos.

Heurísticas.

El individuo aborda el problema de manera directa, haciendo dos intentos, en los que usa ecuaciones de primer grado para representar la cantidad que le quedó al pediche con ayuda de términos que simbolicen las cantidades que tenía y que le quedaban en cada suceso.

Después de hacer un despeje de x y teniendo la solución, el estudiante rechazó el primer intento, considerando como la solución a la segunda opción. Sin embargo, en ninguna de las dos opciones llegó a la solución correcta.



E3

a) $\frac{25}{\frac{50}{75}}$ $\cancel{2x(2x+x-200)}$ x = cantidad original $3x-200$

$2(2(2x+x-200)-200)-200=0$

$2[2(3x-200)-200]-200=0$

$2(6x-400-200)-200=0$

$2(6x-600)-200=0$

$12x-1200-200=0$

$12x-1400=0$

$x=\frac{1400}{12}=\$116.66$

$2[2(2x+x-200)+(2x+x-200)-200]+$

$[2(2x+x-200)+(2x+x-200)-200]-200=0$

$x=\frac{2600}{27}$

$3[3(3x-200)-200]-200=0$

$=9(3x-200)-600-200$ $27x-2600$ $x\approx\$96.29$

$=27x-1800-600-200=$

Explicación: La cantidad original que portaba uno de los mineros era de ~\$96.29, cada vez que podía, al dar \$200, el minero se quedaba con menos dinero del que tenía originalmente hasta ya no tener ni un centavo

b) Si el minero que pide, tiene más dinero, podría dar \$200 sin quedarse sin nada, por ejemplo que tuviera \$150.

otra opción es que le diga al santo una cantidad más baja a darle a Juan como \$50.

"Si me das el doble del dinero que traigo, regalaré \$50 a mi compadre Juan"

Figura 4.3

Para terminar, explicó verbalmente, que cada vez que el minero le daba \$200 a su compadre, se quedaba con una cantidad menor a la que tenía antes de darle, y así se le fue acabando el dinero.

Proponiendo, como solución a la segunda pregunta, para que el pediche se quede con dinero, que le diga al Santito que le dará menos dinero a Juan.

Control.

No sabemos a ciencia cierta qué es lo que llevó al estudiante a rechazar la primera ecuación que estableció, ya que no dio alguna explicación. Analizando esta ecuación la consideramos más viable, representativa y comprensible que la segunda, aunque algo lo llevó a considerar $2x + x - 200$, en donde el segundo término no permitió dar una solución correcta. Esto podría considerarse como una falta de control, sin embargo la toma de decisiones que se reflejan en la hoja de trabajo, son muestra de que existe un control por parte del estudiante, pero sin fundamentos claramente visibles.

Sistemas de creencias.

De manera similar a los casos de los estudiantes anteriores, vemos que el individuo buscó estructurar ecuaciones. Esto nos confirma que este tipo de problemas nos da información para representarlos mediante una ecuación, y que ésta es heurística que generalmente se emplea. Por otro lado, la argumentación se acerca más a un contexto de la vida diaria que a las matemáticas, haciendo alarde de que las creencias matemáticas no se imponen ante las creencias de lo cotidiano.

Problema 2. ***La herencia del minero***

Estudiante 1. Lic. en Física. Primer semestre. Figura 4.4.

Recursos.

El individuo consideró como datos que el viejo minero entregó 81 pepitas a cada uno de sus hijos y, con una clara comprensión de que las cantidades sobrantes cada vez que los hijos tomaban las pepitas son la tercera parte de lo que había previamente.

Como recursos igualmente se exhiben la adición, sustracción y la regla de tres.

Heurísticas.

La estrategia empleada por el estudiante es un procedimiento hacia atrás, partiendo de las $81 \times 4 = 324$ pepitas que repartió el padre, en cuya aplicación solamente utiliza operaciones aritméticas, auxiliándose también de un razonamiento proporcional. Para encontrar la cantidad de pepitas que había originalmente en la bolsa del viejo minero, empleó la regla de tres de manera recursiva para cada ocasión en la que los hermanos tomaron el dinero. Llegando a la conclusión de que dicha cantidad era de 1024 pepitas.

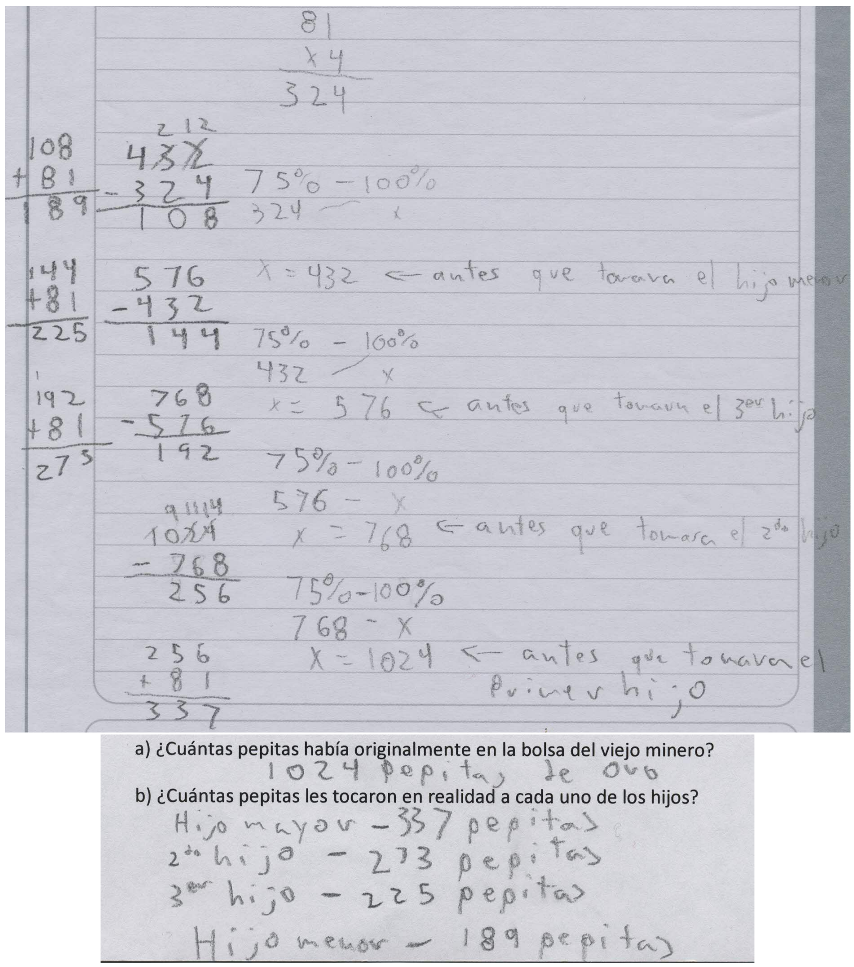


Figura 4.4

Para determinar cuántas pepitas le tocaron al hijo menor, el estudiante consideró la diferencia entre la cantidad de pepitas que había antes de que el hijo menor tomara una cuarta parte de ésta, 432 pepitas, y las tres cuartas partes que dejó, en este caso las 324 pepitas que repartió el padre; terminando por sumar, a la cantidad encontrada, las 81 pepitas que le dio su padre.

Llevando a cabo el mismo procedimiento tres veces más para encontrar la cantidad que le tocó a cada uno de los hijos.

Control.

Encontramos diferentes aspectos que nos permiten asegurar que el nivel de control mostrado por el individuo al resolver este problema es alto. Entre ellos destacan: la utilización de una sola heurística para resolver el problema, sin intentos previos; cuando el estudiante, al emplear la regla de tres, considera a los cuatro hijos, declarando hasta cuándo es suficiente repetir el proceso. Agregamos también la facilidad para establecer las relaciones numéricas necesarias.

Otro aspecto que debemos destacar, es la reflexión que hace el estudiante a partir de la información que aparece explícitamente en el problema, la cual nos dice que los hijos dejan las tres cuartas partes de la cantidad que había antes de que tomaran las pepitas. Al utilizar apropiadamente la regla de tres, estos resultados preliminares resultan correctos; si a esto se agrega la utilización de las diferencias entre las cantidades, se tiene como resultado la cuarta parte que tomó cada uno de ellos.

Sistemas de creencias.

Volvemos a destacar aquí la facilidad del alumno para establecer las relaciones numéricas apropiadas entre los datos originales y los que van apareciendo en las diferentes etapas del problema.

Estudiante 2. Licenciatura en Física. Segundo semestre. Figura 4.5.

Recursos.

El individuo tomó como datos la cuarta parte que tomaba cada hijo y a las 81 pepitas que el padre les dio a cada uno de sus hijos. Así mismo, las ecuaciones realizadas son recursos del estudiante.

Heurísticas.

La estrategia con la que se aborda el problema, a diferencia de lo que hizo el Estudiante 1, es hacia adelante. En la hoja de trabajo aparece, en primera instancia, una expresión algebraica que representa a la cantidad total de pepitas sin llegar a una igualdad. Sin embargo, no utiliza esta expresión, abordando en su lugar una estrategia básicamente de carácter aritmético.

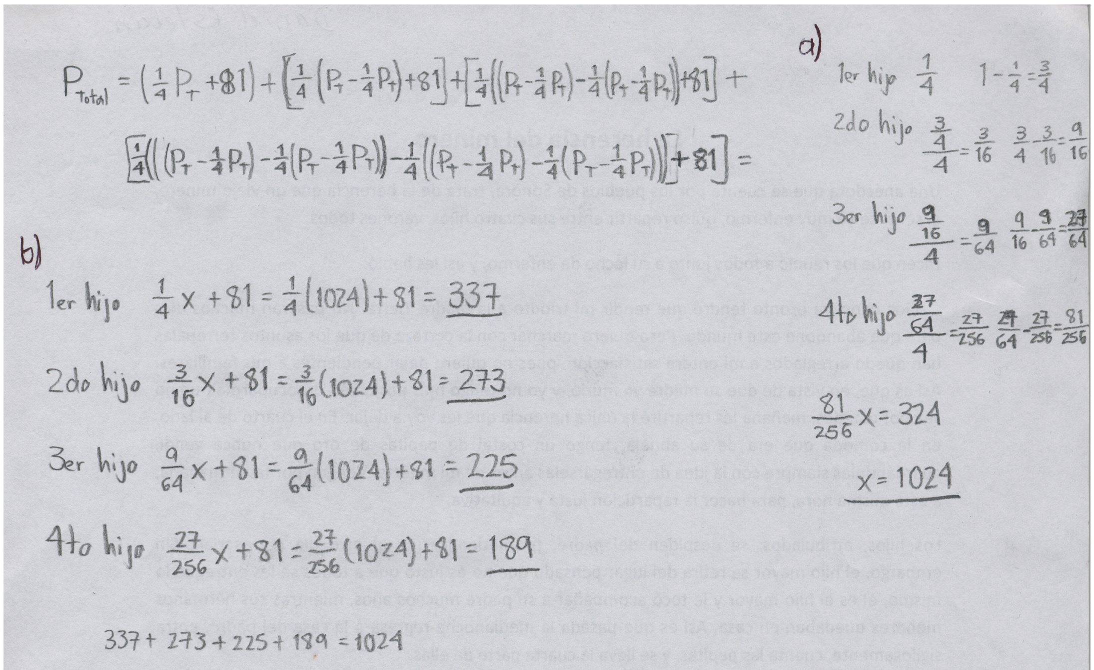


Figura 4.5

Luego, para determinar la cantidad total de pepitas, primeramente el individuo estableció la fracción de la cantidad total de pepitas que dejó el primer hijo, partiendo del total de pepitas que había y de la cuarta parte que este hijo tomó; realizando el mismo procedimiento para el resto de los hijos.

Al encontrar la fracción de la cantidad total de pepitas que dejó el cuarto hijo, designó con la literal a esta última (la cantidad total de pepitas), igualando dicha expresión con las $81 \times 4 = 324$ pepitas que el padre repartió entre los hijos. En este momento ya tiene una ecuación lineal con una incógnita y por último despejó x para encontrar las pepitas que había originalmente en la bolsa.

Para encontrar la cantidad de pepitas que le tocaron a cada hijo, el estudiante expresó en términos de la cantidad que tomó el primer hijo, sustituyéndola por las 1024 pepitas, y agregándole las 81 pepitas que le tocaron en la repartición que hizo el padre. Llevó a cabo el mismo proceso para cada uno de los hijos, y verificó que la solución es correcta, al sumar las cantidades que le tocaron en realidad a cada uno de los hijos.

Control.

No podemos afirmar que la expresión algebraica que aparece en primera instancia sea un intento fallido de solución, más bien nos da la impresión de un recurso que el individuo rechazó por lo complicado de la expresión. En su lugar otro camino que lo lleva exitosamente al resultado. Esto indica un buen nivel de control, pues propone caminos, los analiza y los cambia por otros más inmediatos.

Además nos damos cuenta de que realiza los pasos de manera correcta, mostrando seguridad en cada uno de ellos; además la comprobación que hace, le permite confirmar que el procedimiento y los resultados son correctos, y así terminar el proceso de solución.

Sistemas de creencias.

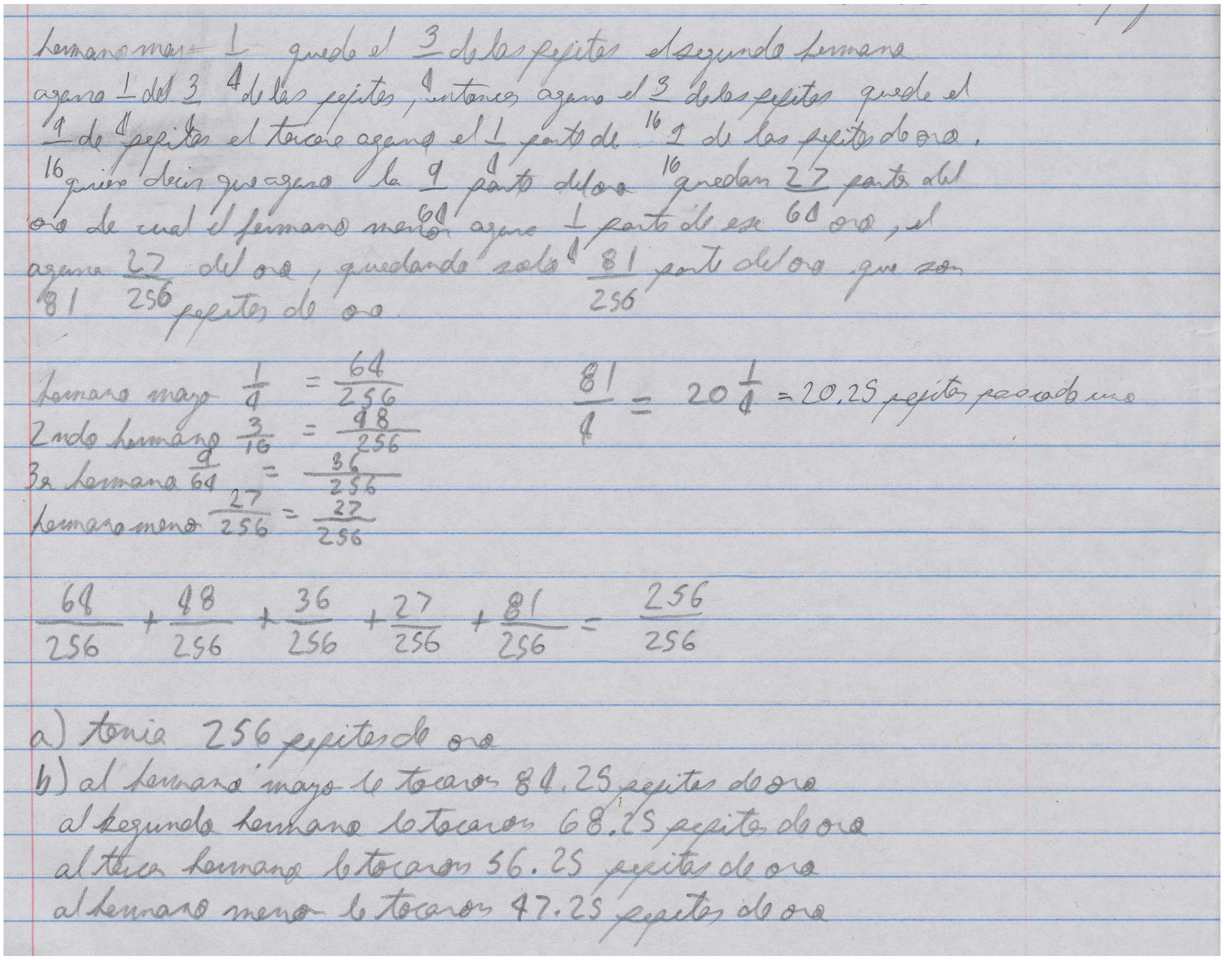
Que el individuo relacione la información dada en el problema con una ecuación lineal, es el resultado de lo que se enseña en la escuela, en donde generalmente se inicia la búsqueda de la expresión algebraica que modele la situación estudiada. Sin embargo, su control le permite darse cuenta de otras opciones de solución con las que encuentra la solución con facilidad. Por estas razones, asumimos que su esquema sobre lo que significa resolver un problema matemático es más amplio.

Estudiante 3. Estudiante de física. Primer Semestre. Figura 4.6.

En este caso, se hará la transcripción literal del discurso central que contiene el razonamiento central del estudiante, por lo ilegible que pudiera resultar el texto. Se han intercalado algunos signos de puntuación para ayudar a la comprensión del escrito.

Él señala:

"hermano mayor tomo $\frac{1}{4}$, quedo $\frac{3}{4}$ de las pepitas. el segundo hermano agarro $\frac{1}{4}$ del $\frac{3}{4}$ de las pepitas, entonces agarro el $\frac{3}{16}$ de las pepitas. quedo el $\frac{9}{16}$ de pepitas, el tercero agarro el $\frac{1}{4}$ parte de $\frac{9}{16}$ de las pepitas de oro, quiere decir que agarro la $\frac{9}{64}$ parte del otro. quedan $\frac{27}{64}$ partes del oro, del cual el hermano menor agarro $\frac{1}{4}$ parte ese oro, el agarro $\frac{27}{256}$ del oro; quedando solo $\frac{81}{256}$ parte del oro, que son 81 pepitas de oro."



hermano mayor $\frac{1}{4}$ queda el $\frac{3}{4}$ de las pepitas el segundo hermano agarra $\frac{1}{4}$ del $\frac{3}{4}$ de las pepitas, entonces agarra el $\frac{3}{16}$ de las pepitas queda el $\frac{9}{16}$ de pepitas el tercero agarra el $\frac{1}{4}$ parte de $\frac{9}{16}$ de las pepitas de oro. quiere decir que agarra la $\frac{9}{64}$ parte del oro quedan $\frac{27}{64}$ partes del oro de cual el hermano menor agarra $\frac{1}{4}$ parte de ese 64 oro, el agarra $\frac{27}{256}$ del oro, quedando solo $\frac{81}{256}$ parte del oro que son 81 pepitas de oro.

hermano mayor $\frac{1}{4} = \frac{64}{256}$ $\qquad \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$ = 20.25 pepitas para cada uno

2ndo hermano $\frac{3}{16} = \frac{48}{256}$

3r hermano $\frac{9}{64} = \frac{36}{256}$

hermano menor $\frac{27}{256} = \frac{27}{256}$

$$\frac{64}{256}+\frac{48}{256}+\frac{36}{256}+\frac{27}{256}+\frac{81}{256}=\frac{256}{256}$$

a) tenia 256 pepitas de oro

b) al hermano mayor le tocaron 84.25 pepitas de oro

al segundo hermano le tocaron 68.25 pepitas de oro

al tercer hermano le tocaron 56.25 pepitas de oro

al hermano menor le tocaron 47.25 pepitas de oro

Figura 4.6

Recursos.

La cantidad de $\frac{1}{4}$ que tomó cada uno de los hijos, y las 81 pepitas que les dio el padre a los hijos, considerándolas como el total de pepitas que repartió el padre, lo que nos indica que no hubo una clara compresión del enunciado del problema; y por último la suma de fracciones.

Heurísticas.

El individuo abordó el problema de manera directa, en donde comenzó tomando la cuarta parte que tomó el primer hijo y determinando las tres cuartas partes que quedaron, realizando esto mediante un discurso recursivo para cada uno de los hijos, y aparentemente utilizando operaciones aritméticas para encontrar que el cuarto hijo dejó "$\frac{81}{256}$ parte del oro".

Aquí es donde ignora la expresión “parte del oro”, asumiendo que el total de pepitas es 256 y que por lo tanto el hijo último dejó 81 pepitas, las cuales fueron luego repartidas por el padre; de ahí su afirmación de que a cada hijo le tocaron 20.25 pepitas.

Después, expresó las fracciones de oro que previamente había determinado que tomó cada hijo ($\frac{1}{4}$; $\frac{3}{16}$ y $\frac{27}{256}$) con un común denominador, el cual es precisamente 256, lo que él había asumido como total de pepitas. Esto lo hace para poder sumarlas junto con las $\frac{81}{256}$ pepitas que quedaron, obteniendo como resultado $\frac{256}{256}$ pepitas. Aparentemente este resultado le convenció de que había realizado un procedimiento correcto.

Para encontrar la cantidad que le tocó a cada uno de los hijos, el estudiante, como ya se dijo, dividió 81 entre cuatro, y así agregó ese resultado al numerador de la fracción que le representaba la cantidad de pepitas que tomó cada hijo.

Control.

La heurística que siguió el estudiante contiene algunos elementos apropiados, sin embargo, al encontrar las $\frac{81}{256}$ “parte del oro” que dejó el cuarto hijo, cometió un error al asegurar que la cantidad total de pepitas dejadas al final para la repartición por parte del padre era 81, el numerador de la fracción previamente encontrada. Declara también que las pepitas que había inicialmente en la bolsa eran 256 (el denominador de la fracción). Esto nos dice que el estudiante no tuvo un completo control de la situación, interpretando de manera inadecuada la fracción que obtiene al final de su razonamiento, sin considerar que las $\frac{81}{256}$ pepitas eran una fracción del total.

El estudiante tuvo buen control al realizar las operaciones, incluso hizo una verificación en donde suma las cantidades que tomaron los hijos con la cantidad sobrante que dejó el cuarto hijo. Aunque, como fruto del error, el resultado fue incorrecto.

Sistemas de creencias.

Un aspecto que destaca en la hoja de trabajo, es el intento del estudiante por establecer las relaciones adecuadas entre las partes y el todo, las cuales desafortunadamente no logra articular de manera correcta, en el contexto de la situación que le fue planteada.

Estudiante 4. Lic. en Matemáticas. Sexto semestre.

La herencia del minero

a)
¿Cuántas pepitas había originalmente en la bolsa del Viejo minero?

Si 324 es el 75% de pepitas que dejó el hijo ④ más chico entonces x es el 25% que tomó.

$$\frac{324}{x} = \frac{75\%}{25\%} \qquad x = \frac{324\,(.25)}{.75} = \underline{108}$$

$324 + 108 = 432$ que es el 75% de pepitas que dejó el hijo ③ entonces x es el 25% que tomó

$$\frac{432}{x} = \frac{75\%}{25\%} \qquad x = \frac{432\,(25\%)}{75\%} = \underline{144}$$

$432 + 144 = 576$ que es el 75% de pepitas que el hijo ② dejó entonces x es el 25% que tomó

$$\frac{576}{x} = \frac{75\%}{25\%} \qquad x = \frac{576\,(.25)}{.75} = \underline{192}$$

$576 + 192 = 768$ que es el 75% de pepitas que dejó el hijo ① el más grande entonces x es el 25% que tomó

$$\frac{768}{x} = \frac{75\%}{25\%} \qquad x = \frac{768\,(.25)}{.75} = \underline{256}$$

$768 + 256 = 1024$ es el total de las pepitas que había originalmente en la bolsa del minero.

b) ¿Cuántas pepitas les tocaron en realidad a cada uno de los hijos?

Los hijos dejaron 324 pepitas el cual le tocaban 81 a cada hijo

hijo ① $256 + 81 = \underline{337}$ hijo ③ $144 + 81 = \underline{225}$

hijo ② $192 + 81 = \underline{273}$ hijo ④ $108 + 81 = \underline{189}$

Figura 4.7

Problema de la herencia (Generalizado). Hoja 2 E4

H_i: representa el número de hijos $i=1,\dots,n$.

T: es el total que tenemos en el saco inicialmente

P: es lo que toma cada hermano de lo que hay en ese momento en el saco.

$q=1-p$ donde q: es el complemento de P.

Nota: Este modelo sólo funciona si cada hermano toma "p" del total que quedó, e.d. sigue la misma secuencia del problema de la herencia para n hermanos.

Analizando el caso particular donde $P=\frac{1}{4}$ tenemos.

	Tomó	**Dejó**
H_1:	$1/4\,T$	$3/4\,T$
H_2:	$\frac{1}{4}[3/4]T$	$3/4T - 1/4[3/4]T = 3/4\,T[1-1/4] = T[3/4]^2$
H_3:	$\frac{1}{4}[T][3/4]^2$	$T[3/4]^3$
H_4:	$\frac{1}{4}[T][3/4]^3$	$T[3/4]^4 = 4(81)$

Donde $T[3/4]^4 = 4(81) = 324$ son las pepitas que quedaron en el saco después que los 4 hijos tomaron lo que ellos creían que les correspondía.

Si sumamos lo que cada hermano tomó, más lo que quedó en el saco.

$\sum_{i=1}^{4} 1/4[3/4]^{i-1}T + T[3/4]^4$ tenemos que esto es igual a lo que había inicialmente en el saco, e.d. T.

Figura 4.8

Hoja 3 E4

$T\sum_{i=1}^{4} pq^{i-1} + Tq^{4} = T$, notemos que hay un factor común en ambos lados, entonces dividiendo por T en ambos lados tenemos.

$\sum_{i=1}^{4} pq^{i-1} + q^{4} = 1$ entonces nosotros podemos darle cualquier valor a $T>0$.

La pregunta es ¿este modelo funciona para n hermanos y cualquier $p>1$? e.d.

$Z_n = \sum_{i=1}^{n} pq^{i-1} + q^{n} = 1$ $\quad$ $p<1$ ya que sólo p es una fracción del total T que es tomado por cada hermano.

Probaremos que Z_n es válida para toda $n \geq 1$.

Z_n es una suma parcial

$Z_n = pS_n + q^n$, donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$ que es la serie geométrica.

Tomando el límite de Z_n cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} pS_n + \lim_{n\to\infty} q^n$$

$$= p\lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} q^n$$

$$= \frac{p}{1-q} + 0.$$

El límite existe, por lo tanto el generalizar para n hermanos es válido.

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ya que $0<q<1$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = 1+q+q^2+\dots+q^n$

$S_n(1-q) = 1-q^{n+1}$

$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\quad$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

$S_n - qS_n = 1+q+q^2+\dots+q^n - q - q^2 - q^3 - \dots - q^{n+1}$

Figura 4.9

Recursos.

El dato principal son las $81 \times 4 = 324$ que dejó el hijo menor. Como elementos de esta categoría, podemos agregar la regla de tres, ecuaciones lineales de una incógnita, sumas, sumas parciales, límites, sucesiones, entre otros.

Heurísticas.

El individuo utilizó un procedimiento hacia atrás, partiendo de que 324 es igual al 75 % de pepitas que dejó el hijo menor, para así poder encontrar el valor del 25 % que tomó. Para lograr esto, utiliza una regla de tres simple, en donde al despejar x encontró la cantidad de pepitas que tomó este hijo; y sumó dicha cantidad con las 324 pepitas, dándole como resultado 432 pepitas, que es la cantidad que había antes de que el cuarto hijo tomara una cuarta parte.

Llevó a cabo este mismo proceso con el resto de los hijos, y así encontrando la cantidad total de pepitas que había originalmente en la bolsa. Como ya tenía las cantidades que tomaron los hijos, simplemente agregó a cada una de ellas las 81 pepitas que el padre le dio a cada uno para determinar la cantidad total que finalmente les tocó.

Lo que llama la atención es que, una vez resuelto el problema asume la posibilidad de generalización de mismo. Es decir, construye una nueva versión en la cual generaliza el número de hijos (Hi), la cantidad total de pepitas que había inicialmente en la bolsa (T) y la cantidad que tomó cada uno de los hermanos (p, donde q es su complemento); haciendo notar que la fracción que los hijos toman es la misma para todos.

Comienza analizando un caso particular, que es el problema original, expresando algebraicamente las cantidades que cada uno de los hijos tomaron y la cantidad que dejaron, logrando establecer una suma, en la que considera las cantidades anteriores, la cual es el total de pepitas que tenía originalmente el padre en la bolsa. Sustituye las fracciones, que representan las cantidades mencionadas anteriormente por las literales p y q, además de eliminar el factor común T, llegando así a una igualdad con elementos conocidos (p y q) y asegurando poder darle a T cualquier valor positivo.

Para verificar que la expresión se cumple para n y para cualquier valor de $p < 1$, expresa la suma en términos de n, generalizando el caso particular antes mencionado, y confirmando que $p < 1$ debido a que es una fracción. Para esto, prueba que la suma se vale para toda

$n \geq 1$, considerando a la suma como una suma parcial en la que se encuentra como término a la serie geométrica, con apoyo de ésta para economizar el trabajo de encontrar el límite de la suma z_n.

Control.

Las operaciones realizadas reflejan un buen control de parte del estudiante, quien no realizó prueba alguna de comprobación, que indican la seguridad que tenía éste de la estrategia y el desarrollo de ésta. No obstante, decidió hacer una generalización del problema, en la que pudo realizar verificaciones y evaluaciones del modelo propuesto.

Sistemas de creencias.

La manera en cómo este alumno procede al enfrentar este problema, nos da elementos para afirmar que en su visión de lo que significa resolver un problema está la necesidad de plantear un resultado preciso y un procedimiento que resulte válido de manera general.

Ya vimos que aunque el individuo llegó a un resultado inicial, tuvo la inquietud e iniciativa de llevar el problema a un caso general que le permitiera resolver cualquier reformulación del problema. Esto son indicios de que en la formación del estudiante se han promovido como característica esencial de la matemática los procesos de generalización, que luego permiten que estos resultados den fruto para ser utilizados posteriormente.

Problema 3. ***Demostrar que la ecuación*** $x^3 - 3x + c = 0$ ***no puede tener dos raíces distintas en*** $(0, 1)$

Estudiante 1. Licenciatura en Física. Primer semestre. Figura 4.10.

Recursos.

La ecuación dada, que a su vez es valorada como un polinomio. La consideración de que $(0, 1)$ representa las coordenadas de un punto.

Heurísticas.

El individuo aborda el problema con herramientas algebraicas. De inicio tomó la ecuación cúbica como un polinomio, el cual igualó a cero. Luego, evaluó el polinomio en $x = 0$, tomando el resultado como un factor; procede enseguida a utilizar la división sintética. No encuentra resultados interesantes, así es que termina descartando este procedimiento.

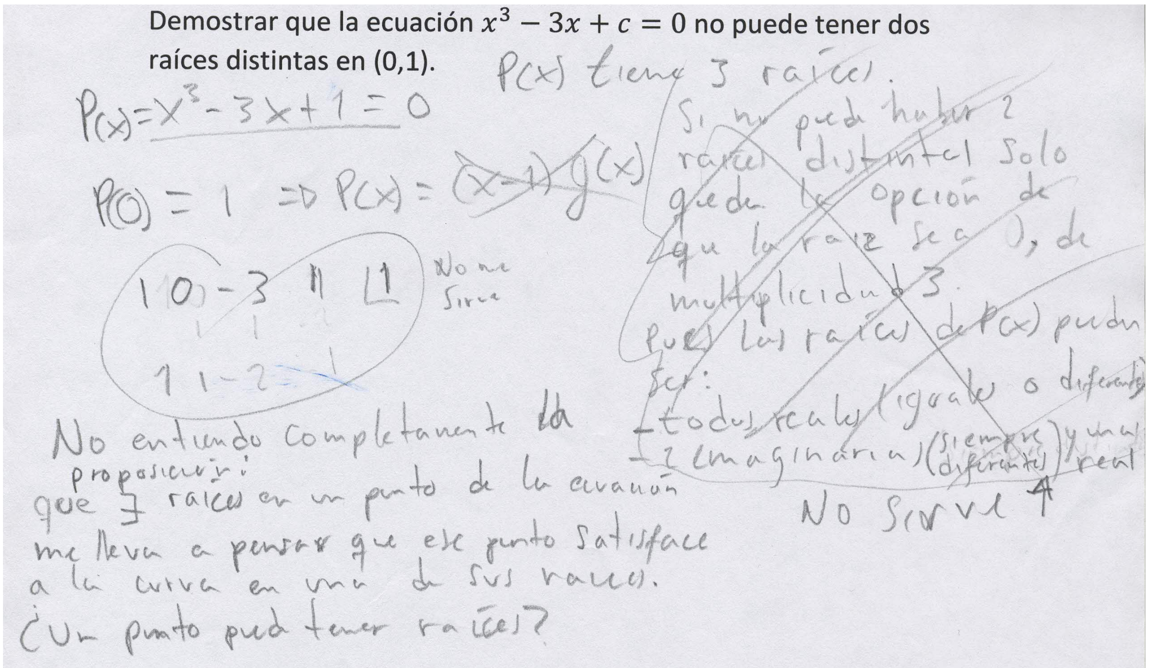


Figura 4.10

Después de esto, el estudiante asegura que el polinomio tiene tres raíces, argumentando a continuación que como consecuencia de que no hay dos raíces distintas, entonces la raíz tiene que ser cero y de multiplicidad 3. Agrega a lo anterior que las raíces del polinomio tienen dos opciones: a) ser todas reales (iguales o diferentes); b) dos imaginarias (siempre diferentes) y una real.

Nótese que en este razonamiento está asumiendo como verdadero parte de lo que quiere demostrar. No obstante, termina por desechar esta cadena de razonamientos, argumentando que no le sirve.

Finalmente termina por darse por vencido, declarando que no entiende completamente la proposición. Textualmente indica “que existan raíces en un punto de la ecuación, me lleva a pensar que ese punto satisface a la curva en una de sus raíces. ¿Un punto puede tener raíces?”

Este discurso, algo oscuro, lleva a la conclusión de que el alumno, al confundir el intervalo

$(0, 1)$ con las coordenadas de un punto, no alcanzó el nivel de comprensión necesario para poder abordar el problema.

Control.

El estudiante consideró al intervalo $(0, 1)$ como un punto, lo que provocó un gran desconcierto. A pesar de que muestra contar con herramientas útiles, fue definitivo en su proceso ese hecho.

Sistemas de creencias.

Lo primero que llama la atención en el trabajo desarrollado por el estudiante es la asociación que realiza entre la expresión que aparece en la primera parte de la igualdad y la interpretación como una función, pues introduce no solamente una nueva notación, sino también nuevas variables: $P(x)$, $g(x)$. Sin embargo, no logra ir más allá, pues no incorpora en su discusión aspectos que podrían haberle sido útiles como por ejemplo el comportamiento funcional de $P(x)$.

Otro aspecto que queda suelto es la concepción del alumno de lo que significa demostrar, pues como se mostró antes, utiliza en una de las argumentaciones que rechazó la afirmación que quería demostrar.

El significado que le asocia a $(0, 1)$ es limitado, al asociar esta notación únicamente con un punto. Es posible que si en el enunciado del problema se hubiera hecho una referencia explícita de que $(0, 1)$ es un intervalo, hubiera procedido de otra manera. De cualquier manera, el hecho de que se hablara de una ecuación, fue definitivo en su proceder, pues con frecuencia en la escuela los problemas similares tratan sobre cómo resolver ecuaciones o verificar si un punto es solución, no de hacer alguna demostración en donde se involucren más términos.

Estudiante 2. Lic. en Matemáticas. Quinto semestre. Figuras 4.11, 4.12, 4.13.

Recursos.

La ecuación, el intervalo $(0, 1)$, la factorización de un polinomio, el Teorema del factor, representaciones gráficas, conceptos de máximos y mínimos, y la noción de demostración.

Problema 1: Demostrar que la ecuación $x^3-3x+c=0$ no puede tener dos raíces distintas en $(0,1)$

Primero me pregunté ¿Qué quiero mostrar? La respuesta fue el enunciado del problema.

Y pense que la información que tenía, era la necesaria para resolver el problema.

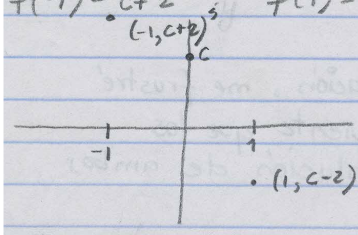
Decidí ver el problema desde una perspectiva gráfica y pensé en utilizar el criterio de la derivada para máximos y mínimos para ayudarme a visualizar la gráfica de $f(x)=x^3-3x+c$, entonces obtuve lo siguiente:

$f(x)=x^3-3x+c$

$f'(x)=3x^2-3$ Los ceros de $f'(x)$ están en ± 1

$f''(x)=6x$

$f(-1)=c+2$; $f(1)=c-2$; $f(0)=c$



*pensé solo en el caso $c>0$ y para darme una idea de la gráfica ubique el punto $(0,c)$ en el plano, pero esto particularizaba mi problema a un valor de c específico.

Que la gráfica pasara por c en 0 y $c-2$ en 1 si $c-2<0$ ($c-2\neq 1$) me daba la idea de que f solo podía tener una raíz en $(0,1)$, pero despues de eso no pude concretar el problema siguiendo esta línea, hasta el día siguiente, cuando trabajé con

Pensé en resolver el problema de otra forma, traté de ver que condiciones debían cumplir las raíces de el polinomio

$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=0$

$[x^2-x(r_1+r_2)+r_1r_2](x-r_3)=0$

$x^3-x^2r_3-x^2(r_1+r_2)+r_3x(r_1+r_2)+xr_1r_2-r_1r_2r_3=0$

$x^3-x^2(r_1+r_2+r_3)+x(r_3r_1+r_3r_2+r_1r_2)-r_1r_2r_3=0$

$\Rightarrow r_1+r_2+r_3=0 \quad r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=-3 \quad r_1r_2r_3=-c$

$r_1r_2+r_3r_1-\frac{c}{r_1}=-3 \qquad r_2r_3=-c/r_1$

$r_2+r_3-\frac{c}{r_1^2}=\frac{-3}{r_1} \Rightarrow r_3+r_2=\frac{1}{r_1}\left(\frac{c}{r_1}-3\right)$

pero tampoco logré concretar una idea.

Figura 4.11

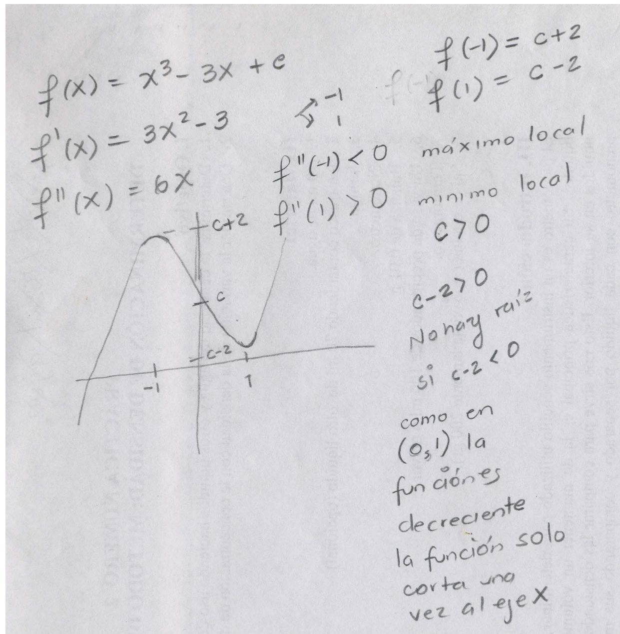


Figura 4.12

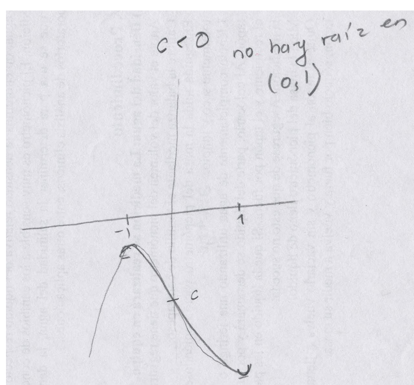


Figura 4.13

Heurísticas.

El individuo va planteando su estrategia discursiva y matemáticamente, describiendo las decisiones que tomó, y los resultados obtenidos gracias a ellas. En este intento de solución primeramente, utilizó herramientas del cálculo cambiando la visión ecuación a la visión función.

Deriva a la función dos veces para determinar dónde están las raíces de la derivada, y evalúa luego $f(x)$ en 0 y -1 y 1. Consideró a c como un solo caso, cuando es positiva, localizando en el plano cartesiano el punto $(0, c)$ para analizar la función correspondiente.

Al hacer dicho análisis, el estudiante observó que la función tenía solamente un cero en el intervalo, sin lograr demostrar lo requerido.

No obstante, el estudiante afirma haber llegado a una solución cuando trabajó con uno de sus compañeros. En este proceso los estudiantes, como en la heurística anterior, tomaron la ecuación como una función empleando herramientas del cálculo, de la que determinaron la primera y segunda derivada, evaluando esta última en ± 1 para encontrar el máximo y mínimo local, además de evaluar la función en ± 1.

Cuando c es positiva se consideran dos casos, apoyándose de una gráfica para llegar a una conclusión, en la que no hay ninguna raíz positiva y solamente una raíz negativa. Después, cuando c es negativa, de nuevo con apoyo de una representación gráfica, los individuos aseguran que no hay raíz en el intervalo.

En la exploración realizada inicialmente, en segunda instancia el estudiante reflexiona sobre una estrategia de carácter algebraico, considerando la ecuación como un polinomio para el que aplica el Teorema del factor pretendiendo estudiar los ceros de éste. Ya que el polinomio ha sido factorizado, se realizan operaciones algebraicas en las que se multiplican los factores y se reúnen los términos semejantes, llegando a una igualdad que permite sustraer tres expresiones de las que intenta encontrar el valor de las raíces, sin obtener éxito. Cabe mencionar que en ningún momento considera al intervalo $(0, 1)$.

Control.

La descripción que el alumno va haciendo de sus procedimientos evidencia la claridad de los razonamientos que va realizando y articulando. La toma de decisiones es un aspecto que destaca en la hoja de trabajo, la cual podemos analizar con ayuda del discurso hecho por el estudiante, y en el que destaca la decisión que éste tomó de trabajar con un compañero, así como el abordar otra heurística para llegar a un resultado.

En el segundo intento realizado individualmente, observamos una falta de control, al no considerar el intervalo, dejando dicha omisión secuelas en la conclusión del problema.

Luego, en el trabajo en equipo, se aparecen faltas al representar gráficamente la función para los casos en que $c < 0$ y $c > 0$, por lo que las afirmaciones no son precisas, haciendo insuficiente la justificación.

Sistemas de creencias.

Las creencias acerca de las matemáticas del individuo son consistentes, las cuales le posibilitan pensar en diferentes estrategias de solución. Aunque el enunciado del problema hace pensar en un problema algebraico, la primera opción que se toma incluye argumentos propios del Cálculo, pues decide "ver el problema desde una perspectiva gráfica, y pensé en utilizar el criterio de la derivada para máximos y mínimos para ayudarme a visualizar la gráfica…". Es curioso cómo, a pesar de que declara que verá el problema desde una perspectiva gráfica, no hace en el primer intento ningún bosquejo de la gráfica, solamente localiza algunos puntos de ella en el plano cartesiano que dibuja.

La introducción de estos razonamientos y de una nueva notación, muestra una re conceptualización de la situación; en lugar de hablar de ecuaciones se habla de funciones y del comportamiento de dichas funciones. Por otro lado en el desarrollo de la estrategia van apareciendo argumentos basados en teoremas conocidos del Cálculo Diferencial. De igual manera está presente la interpretación gráfica de la raíz de una función.

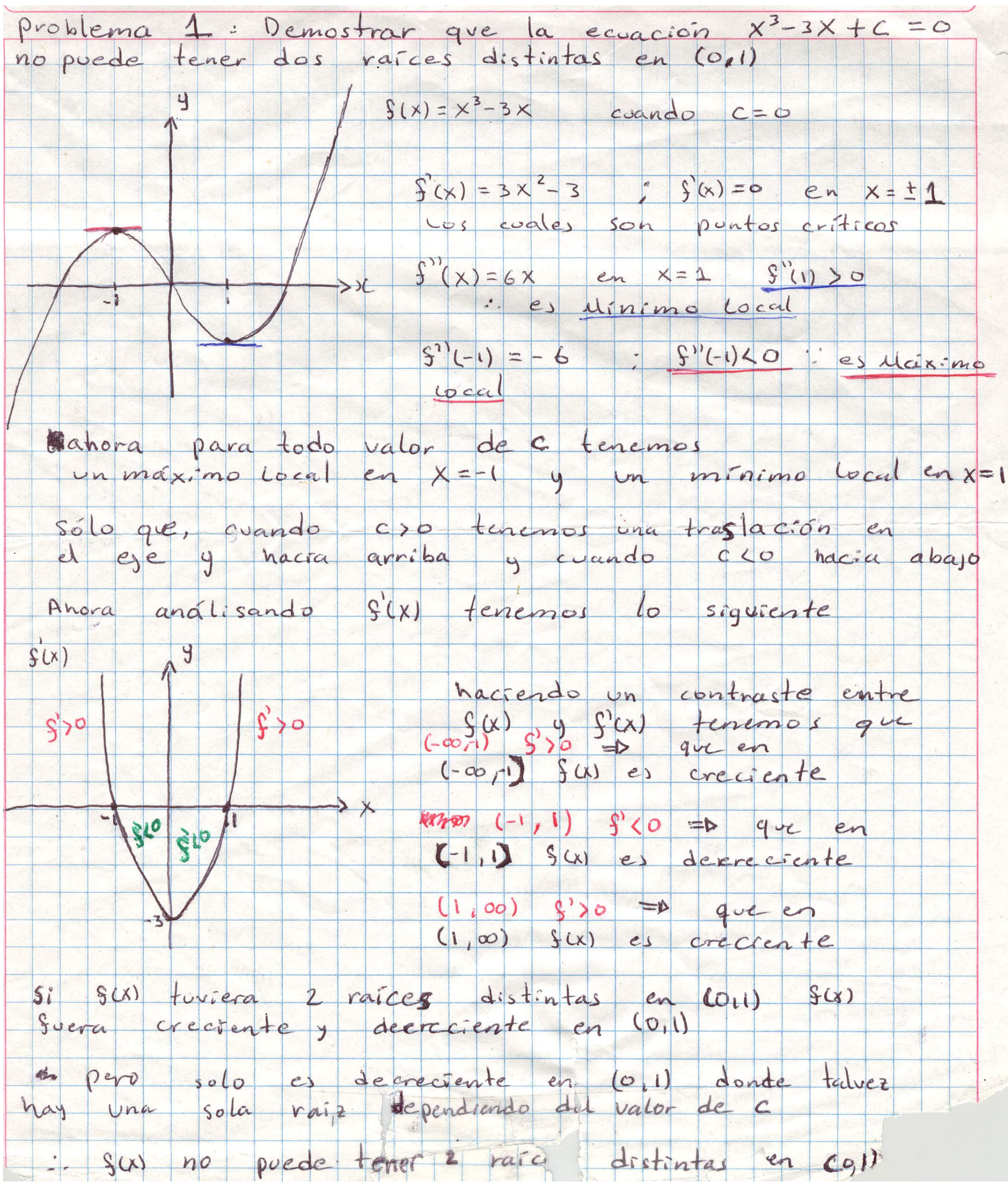
Cuando finaliza la primera parte de su discusión (ver Figura 4.11), declarando que no pudo concretar la solución, intenta otro camino, volviendo a una estrategia algebraica. Resultan evidentes la gran cantidad de interpretaciones y relaciones que tiene y usa como recursos buscando resolver el problema. Se nota la creatividad presente en su búsqueda, aunque finalmente se da por vencido temporalmente.

Cuando reinicia su trabajo, que según su escrito es realizado en equipo, retoma la estrategia funcional, con la diferencia de que ahora integra de mejor manera representaciones gráficas, analíticas, numéricas y verbales, además de resultados teóricos del cálculo, todo lo cual resulta fundamental para que arribe finalmente a la demostración solicitada.

Estudiante 3. Lic. en Matemáticas. Sexto semestre. Figura 4.14.

Recursos.

La ecuación, el intervalo, el concepto de máximos y mínimos, representaciones gráficas, además de las nociones de demostración, de función creciente y decreciente.



problema 1: Demostrar que la ecuación $x^3-3x+c=0$ no puede tener dos raíces distintas en $(0,1)$

$f(x)=x^3-3x$ cuando $c=0$

$f'(x)=3x^2-3$; $f'(x)=0$ en $x=\pm 1$ los cuales son puntos críticos

$f''(x)=6x$ en $x=1$ $f''(1)>0$ $\therefore$ es mínimo local

$f''(-1)=-6$; $f''(-1)<0$ $\therefore$ es Máximo local

ahora para todo valor de c tenemos un máximo local en $x=-1$ y un mínimo local en $x=1$

sólo que, cuando $c>0$ tenemos una traslación en el eje y hacia arriba y cuando $c<0$ hacia abajo

Ahora análisando $f'(x)$ tenemos lo siguiente

haciendo un contraste entre $f(x)$ y $f'(x)$ tenemos que

$(-\infty,-1)$ $f'>0$ $\Rightarrow$ que en $(-\infty,-1)$ $f(x)$ es creciente

$(-1,1)$ $f'<0$ $\Rightarrow$ que en $(-1,1)$ $f(x)$ es decreciente

$(1,\infty)$ $f'>0$ $\Rightarrow$ que en $(1,\infty)$ $f(x)$ es creciente

Si $f(x)$ tuviera 2 raíces distintas en $(0,1)$ $f(x)$ fuera creciente y decreciente en $(0,1)$

pero solo es decreciente en $(0,1)$ donde talvez hay una sola raiz dependiendo del valor de c

$\therefore$ $f(x)$ no puede tener 2 raíces distintas en $(0,1)$

Figura 4.14

Heurísticas.

En este caso, la estrategia seguida muestra que se reinterpreta el problema desde el punto de vista del cálculo. De entrada se asumen casos, a partir de los posibles valores de c, iniciando con $c = 0$, de donde $f(x) = x^3 - 3x$. El cálculo de la derivada de $f(x)$ permite, al igualarla a cero, encontrar los puntos críticos para x; mediante el criterio de la segunda derivada se ubica la naturaleza de esos puntos críticos, enriqueciendo esta discusión con el apoyo de la gráfica de $f(x)$, cuando $c = 0$.

Este razonamiento se apoya con la gráfica correspondiente.

Se asegura entonces que existen un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$, independientemente de que c sea mayor o menor que cero; aunque cuando ésta tiene un cambio de signo es trasladada en el eje y hacia arriba (para $c > 0$) ó hacia abajo ($c < 0$).

El estudiante procede a hacer un estudio de la derivada de la función, "contrastando" ésta con la función original, en donde el signo de $f'(x)$ indica si $f(x)$ es creciente o decreciente. Su razonamiento lo apoya con un bosquejo de la gráfica de $f''(x)$.

En su argumentación final asegura que, si existieran dos raíces en el intervalo $(0, 1)$, la función sería creciente y decreciente en él; y como no sucede tal hecho, es posible que exista solamente una raíz en el intervalo, lo cual dependerá del valor de c. Quedando demostrado que no pueden haber dos raíces en $(0, 1)$.

Control.

Se presenta un solo camino para proporcionar la solución del problema.. Además aparecen aclaraciones discursivas que hace el estudiante, justificando las afirmaciones hechas; así como la decisión que él toma al analizar la derivada gráficamente, lo que le permitió dar una argumentación sin entrar en alguna complicación.

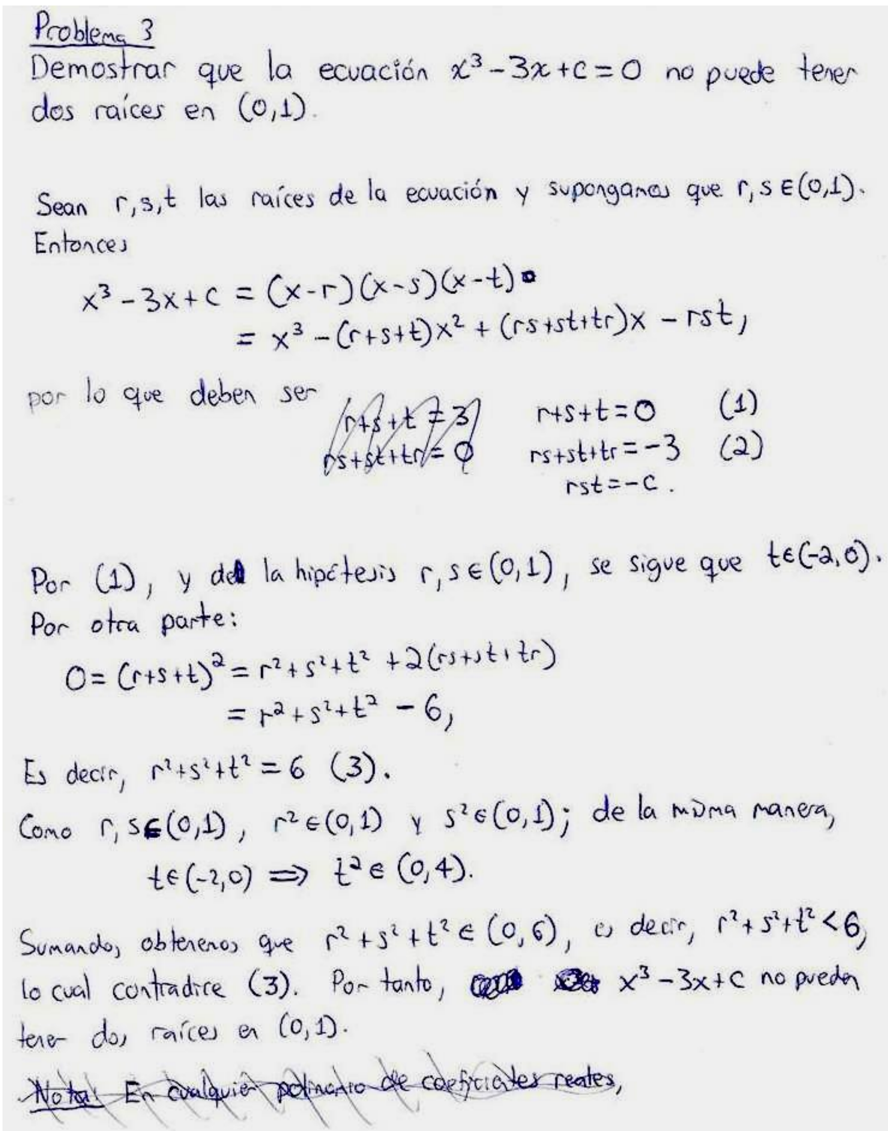
Sistemas de creencias.

Al igual que en el caso del Estudiante 2, el problema es re contextualizado, pues de ser un problema cuyo enunciado evoca contenidos algebraicos pasa a ser abordado como un problema de cálculo. Esto lo justificamos a partir de la serie de argumentos, gráficos y resultados teóricos que son utilizados en el desarrollo de la estrategia de solución.

Hay algunas afirmaciones y procedimientos que no se justifican, por ejemplo el hecho de que la función sea derivable, lo asegura y utiliza, pero no lo argumenta.

Se nota también que la tarea "demostrar", no tiene dificultades de comprensión.

Estudiante 4. Lic. en Matemáticas. Egresado. Figura 4.15.



Problema 3

Demostrar que la ecuación $x^3-3x+c=0$ no puede tener dos raíces en $(0,1)$.

Sean r,s,t las raíces de la ecuación y supongamos que $r,s\in(0,1)$. Entonces

$$x^3-3x+c=(x-r)(x-s)(x-t)$$
$$=x^3-(r+s+t)x^2+(rs+st+tr)x-rst,$$

por lo que deben ser ~~$r+s+t=3$~~ ~~$rs+st+tr=0$~~

$$r+s+t=0 \quad (1)$$
$$rs+st+tr=-3 \quad (2)$$
$$rst=-c.$$

Por (1), y de la hipótesis $r,s\in(0,1)$, se sigue que $t\in(-2,0)$.

Por otra parte:

$$0=(r+s+t)^2=r^2+s^2+t^2+2(rs+st+tr)$$
$$=r^2+s^2+t^2-6,$$

Es decir, $r^2+s^2+t^2=6$ (3).

Como $r,s\in(0,1)$, $r^2\in(0,1)$ y $s^2\in(0,1)$; de la misma manera,

$$t\in(-2,0) \Rightarrow t^2\in(0,4).$$

Sumando, obtenemos que $r^2+s^2+t^2\in(0,6)$, es decir, $r^2+s^2+t^2<6$, lo cual contradice (3). Por tanto, x^3-3x+c no pueden tener dos raíces en $(0,1)$.

~~Nota: En cualquier polinomio de coeficientes reales,~~

Figura 4.15

Recursos.

La ecuación, el intervalo, la factorización y la noción de demostración.

Heurísticas.

La estrategia empleada por el estudiante consiste en la realización de una demostración por contradicción, abordando el problema con herramientas de carácter algebraico.

Para ello, asume la existencia de las tres raíces de la ecuación y comienza suponiendo que dos de ellas están en el intervalo dado. Luego descompone la expresión en factores lineales, con base en las raíces y de ahí establecer una igualdad de la cual rescata tres ecuaciones. Parte de dos de ellas y de las raíces que pertenecen a $(0,1)$ para encontrar el intervalo en que se encuentra la tercera raíz y así llegar a una contradicción. Demostrando con ello que la ecuación no tiene dos raíces en el intervalo $(0,1)$.

Control.

Es evidente el control que tiene el estudiante sobre la situación, realizando una demostración clara, pero en la que obvia las justificaciones a las manipulaciones que realiza. Su planeación es también precisa, articulando los razonamientos y pasos que va realizando hasta concluir con lo solicitado.

Sistemas de creencias.

La manera en cómo está redactado el problema hace que el individuo evoque herramientas del álgebra, las cuales utiliza bastante bien. Es respetuoso del rigor, lo cual se advierte en el manejo del lenguaje tanto matemático como natural que utiliza.

Problema 4. ***Resolver la desigualdad***

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$$

Estudiante 1. Lic. en Física. Primer semestre. Figura 4.16.

Recursos.

Antes de empezar cualquier procedimiento, se nota que el alumno hizo un análisis previo de las expresiones que forman a la desigualdad, escribiendo como dato importante que $x > 0$, el cual además conforma el significado de raíz cuadrada.

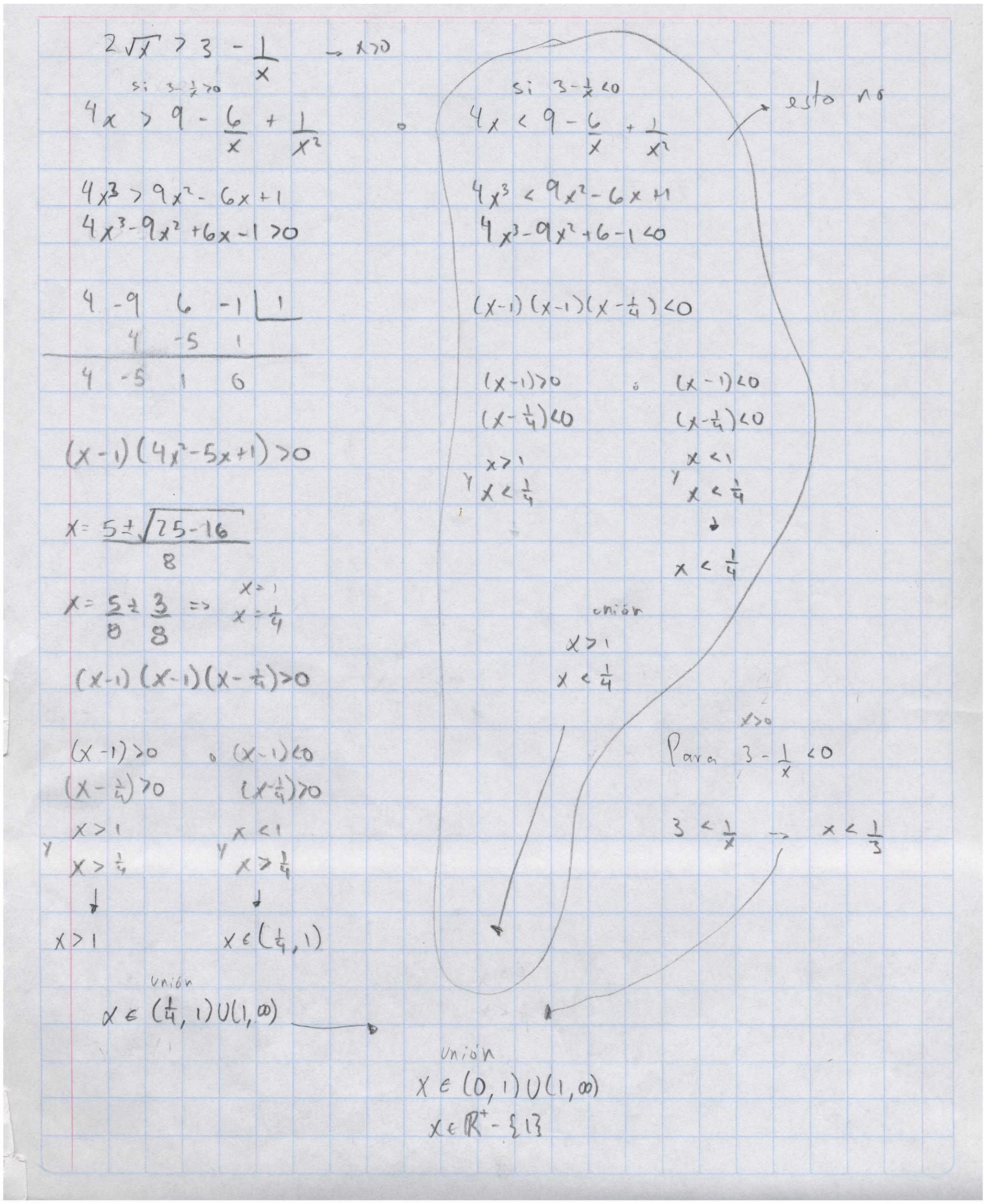


Figura 4.16

Observamos otros recursos como: el Teorema del factor, el Teorema de la Raíz, la fórmula general, la resolución de desigualdades por casos.

Heurísticas.

El problema es abordado mediante una estrategia que emplea solamente recursos de carácter algebraico. De entrada lo que aparece es un análisis global de la desigualdad, lo que lleva al estudiante a asegurar que $x > 0$, seguramente al darse cuenta que en el lado izquierdo aparece una raíz cuadrada. A partir de esto, se abordan los casos en los que la expresión $3 - \frac{1}{x} > 0$ y $3 - \frac{1}{x} < 0$.

Cuando toma la primera posibilidad, es decir cuando considera $3 - \frac{1}{x} > 0$, aparecen las operaciones que realiza el individuo para transformar la expresión original en una desigualdad, en donde el término de la izquierda es un polinomio de grado tres cuyas raíces se encuentran mediante la división sintética, el Teorema de la Raíz y la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado.

Con el uso del Teorema del Factor se factoriza el polinomio cúbico como un producto de factores lineales. Esto permite que el estudiante considere diferentes casos (posibles valores, positivos o negativos, de los factores) para continuar su búsqueda del conjunto de valores que es solución de la desigualdad.

Es a partir del análisis de esta casuística que se logra encontrar una propuesta de solución para el caso que se está considerando: $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \bigcup (1, \infty)$.

Al abordar la otra opción, $3 - \frac{1}{x} < 0$, empleando los mismos recursos que en el caso que se acaba de explicar, llega a un resultado que le parece contradictorio y entonces abandona esta opción, cambiándola por simplemente trabajar la expresión $3 - \frac{1}{x} < 0$, lo que lo lleva a que $x < \frac{1}{3}$.

Uniendo los dos conjuntos que le resultan, construye entonces el conjunto solución de la desigualdad; esto es: $x \in (0, 1) \bigcup (1, \infty)$, que luego transforma a la expresión $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Control.

Uno de los elementos que nos permiten afirmar que el estudiante muestra un buen nivel de control en sus procedimientos, es la información inicial que desprende de analizar la expresión

$2\sqrt{x}$. Otro elemento importante aquí es que consideró los dos casos que se mencionaron en la parte inicial de la descripción de su heurística, es decir cuando $3 - \frac{1}{x} > 0$ y $3 - \frac{1}{x} < 0$.

En la hoja de trabajo podemos percibir la seguridad con la que el estudiante lleva a cabo el procedimiento. Otro aspecto por destacar, es que al analizar el caso en el que $3 - \frac{1}{x} < 0$ el estudiante lo descartó, lo que nos lleva a pensar que en algún momento de su razonamiento, el individuo percibió algo que lo hizo abandonar este camino para optar por un camino más rápido y directo. De cualquier manera es notorio el dominio que tiene sobre sus procedimientos, razonamientos y estrategias.

Sistemas de creencias.

El análisis de la hoja de trabajo del estudiante nos da evidencia de la seguridad con la que se aborda el problema, desechando la opción que considera que no le sirve. Podríamos suponer que existe familiaridad entre el estudiante y este tipo de problemas, y algo que posiblemente está detrás de su estrategia, es su concepción del tipo de problema que se le está planteando y la manera en cómo ese tipo de problemas deben abordarse. Quizá él no usó otro método debido a que el elegido resultó exitoso, pero podría caber la posibilidad de que estuviera consciente de que el problema podría resolverse con otras estrategias.

Estudiante 2. Lic. en Matemáticas. Sexto semestre. Figuras 4.17 y 4.18.

El estudiante trabaja en dos etapas la solución del problema.

En la primera etapa, ubicamos las siguientes componentes:

Recursos.

No aparece información de que se haya hecho algún análisis preliminar respecto a las restricciones de x, pero se auxilia de representaciones gráficas para clarificar el problema. De igual manera, utiliza el Teorema de la Raíz, el método de casos para resolver desigualdades, la fórmula general y la división sintética.

Heurísticas.

En un costado de su hoja de trabajo, el alumno hizo un bosquejo de las gráficas de las funciones involucradas, $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$, como un elemento que le ayudara a clarificar la situación a la que se estaba enfrentando. Después, empieza a efectuar una serie de operaciones algebraicas que lo llevan a transformar el problema original en el estudio de la desigualdad $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 > 0$.

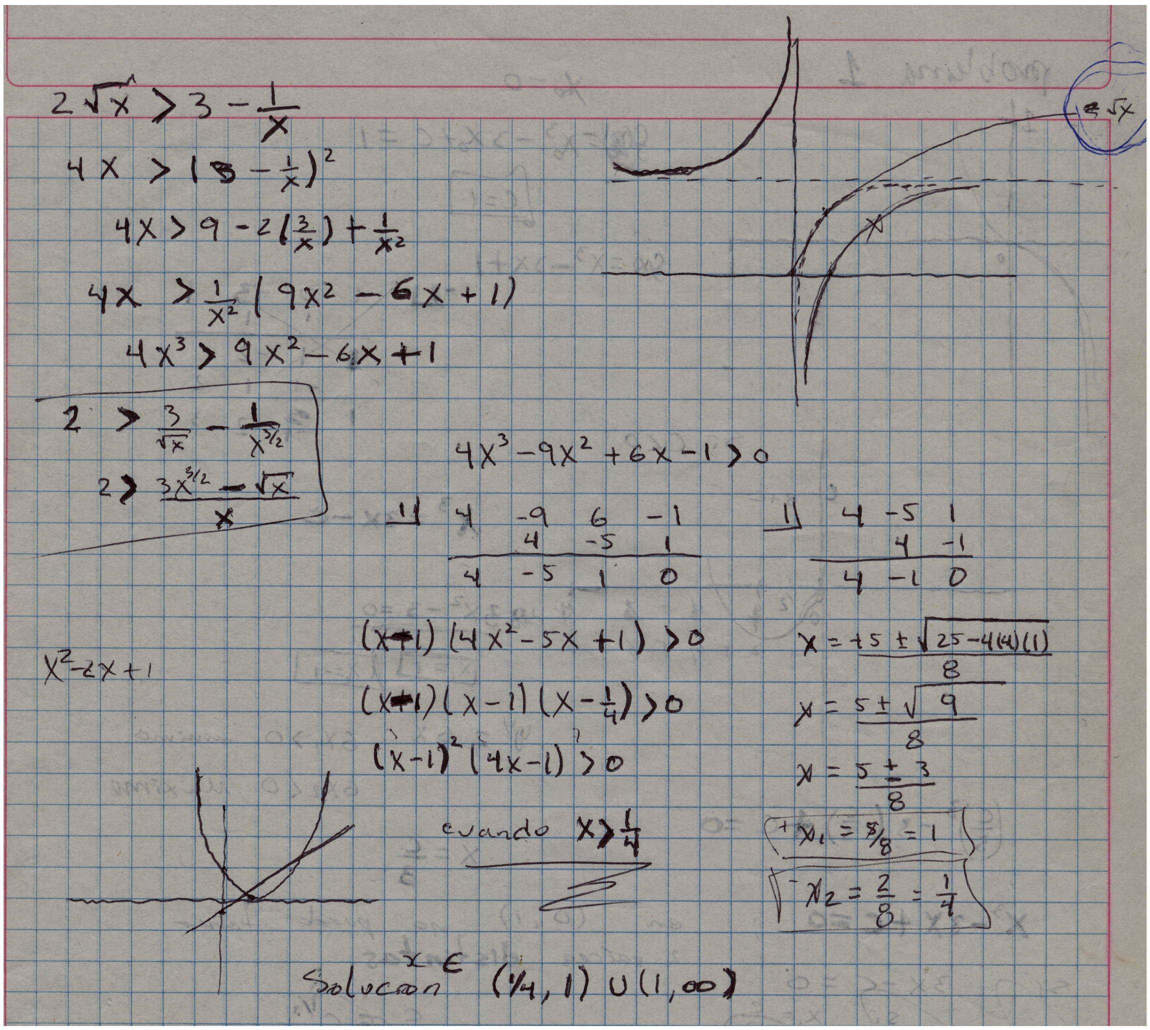
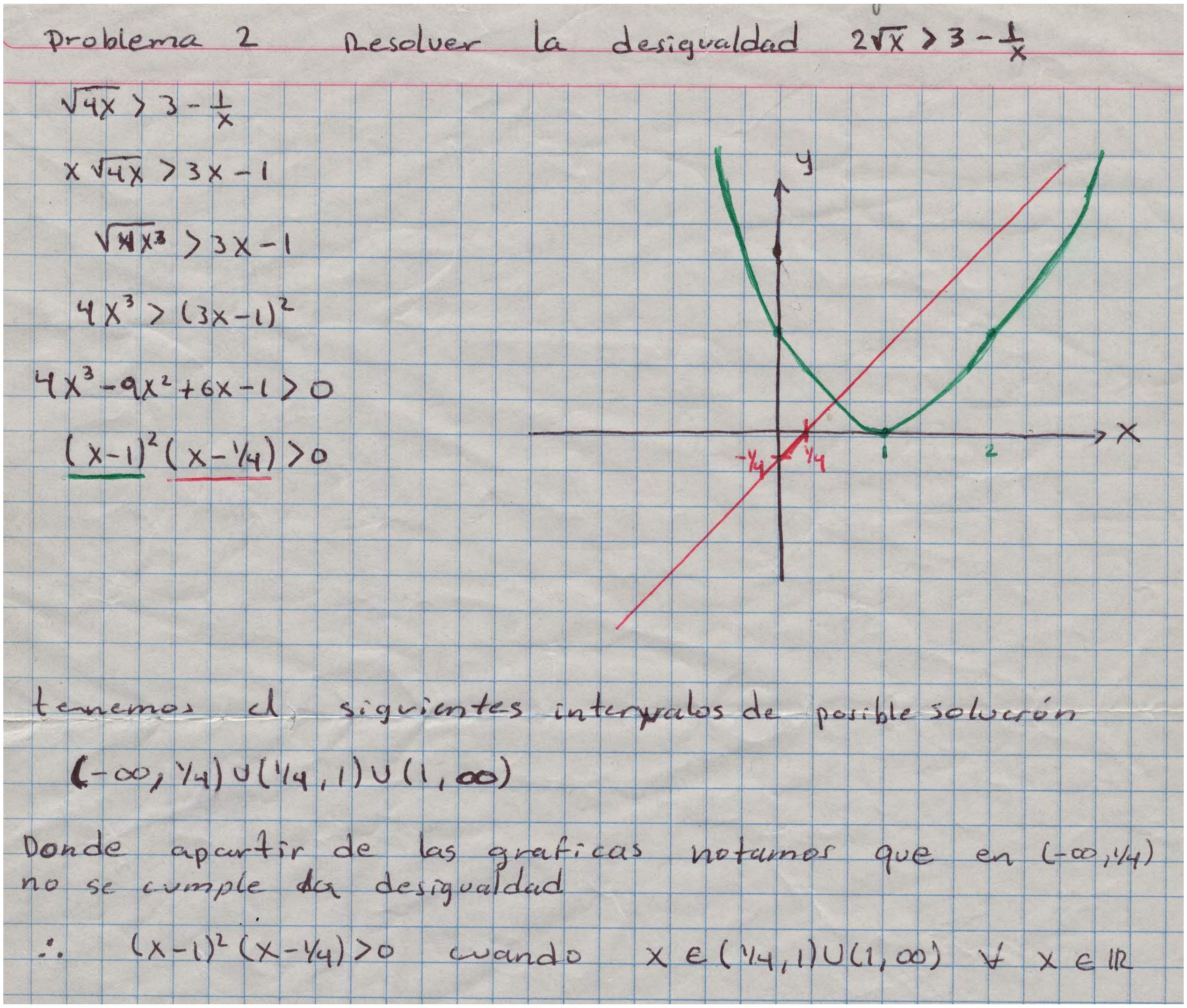


Figura 4.17

Este nuevo problema lo aborda resolviendo la ecuación $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$, para lo cual utiliza el procedimiento de división sintética, el Teorema de la Raíz y la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado. Habiendo encontrado las raíces, el estudiante hace una factorización del polinomio, $(x-1)^2(4x-1) > 0$.

En estos momentos, vuelve al recurso gráfico, bosquejando las gráficas de las funciones

$h(x) = (x-1)^2$ y $t(x) = 4x - 1$. Esta visualización lo lleva a concluir que $x > \frac{1}{4}$. A pesar de estos esfuerzos, la solución es incompleta.



Problema 2 Resolver la desigualdad $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$

$\sqrt{4x} > 3 - \frac{1}{x}$

$x\sqrt{4x} > 3x - 1$

$\sqrt{4x^3} > 3x - 1$

$4x^3 > (3x-1)^2$

$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 > 0$

$(x-1)^2(x-1/4) > 0$

tenemos el siguientes intervalos de posible solución

$(-\infty, 1/4) \cup (1/4, 1) \cup (1, \infty)$

Donde apartir de las graficas notamos que en $(-\infty, 1/4)$ no se cumple la desigualdad

$\therefore$ $(x-1)^2(x-1/4) > 0$ cuando $x \in (1/4, 1) \cup (1, \infty)$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$

Figura 4.18

En lo que podríamos considerar como una segunda etapa, pareciera que el estudiante regresa sobre su procedimiento y trata de depurarlo y complementarlo. Para ello, inicia con una serie de transformaciones algebraicas diferentes a las que había hecho en su primera etapa, pero que lo conducen a la misma expresión polinomial que ya había empleado. Incorpora las gráficas de $h(x) = (x-1)^2$ y $t(x) = 4x - 1$, pero ahora haciéndolas con mayor cuidado.

Así, plantea como posible solución el conjunto resultante de la unión de tres intervalos, pero al analizar nuevamente la gráfica, verificó que los valores que toma x no pueden estar en uno de los intervalos; planteando la solución que ya había expuesto.

Control.

El estudiante mostró un buen control en el procedimiento. Un ejemplo de ello lo encontramos cuando desecha elementos con los que intenta encontrar una forma de reunir los términos semejantes, sin éxito. La integración de recursos gráficos y algebraicos también muestra su habilidad para reinterpretar el problema origina, aunque justamente en esa reintepretación es donde pierde información que luego le llevará a proporcional una solución incompleta.

Sistemas de creencias.

En los dos etapas mostradas el individuo buscó el resultado de la misma manera, utilizando sus recursos algebraicos y apoyándose en la elaboración de gráficas. Pero, aunque el individuo realizó gráficas, y que simplemente con analizarlas pudo decir para qué valores de x se satisface la desigualdad y para cuáles no; para él no sólo no fue suficiente este camino, sino que tampoco consideró datos relevantes, como $x > 0$, el cual le permitiría completar la solución. Lo que nos muestra que, a pesar de manejar e integrar recursos de diferente naturaleza, para él el método que determina la solución exacta es el algebraico.

Estudiante 3. Lic. en Física. Primer semestre. Figura 4.19.

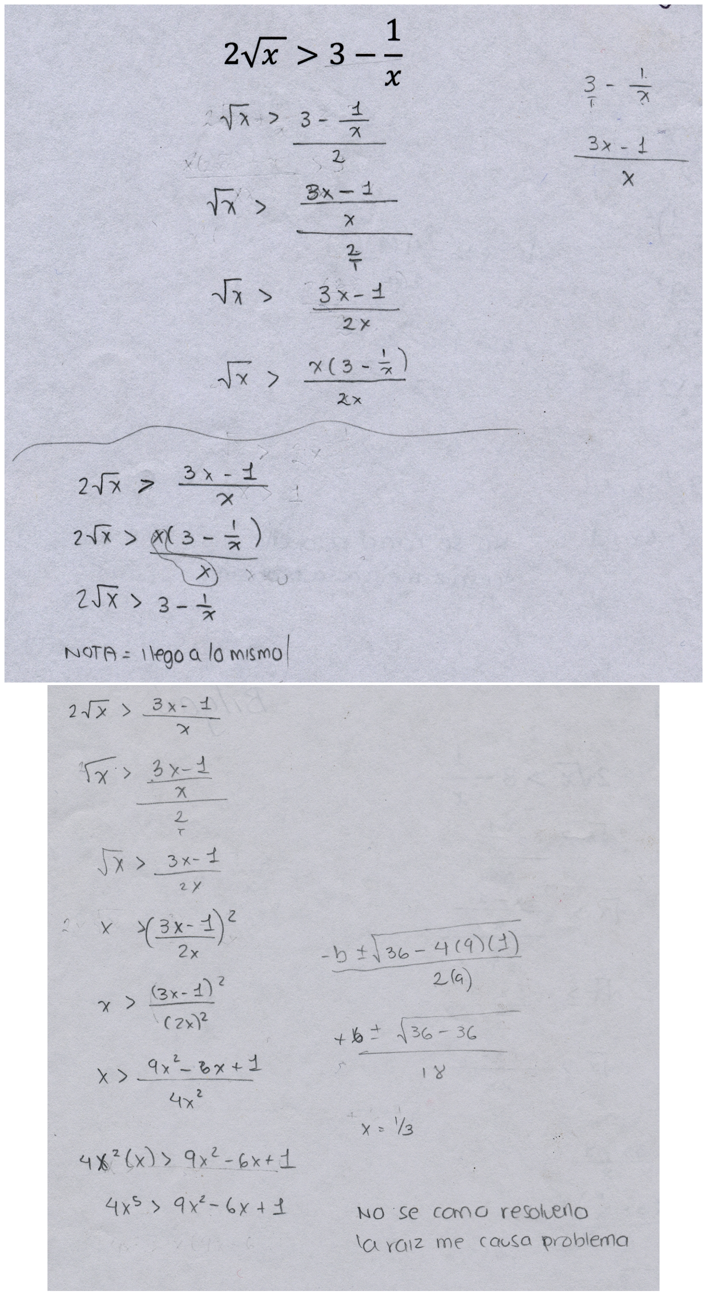
Recursos.

La desigualdad propuesta, los recursos de manipulación algebraica de los cuales dispone y la fórmula general.

Heurísticas.

El estudiante hizo tres intentos de solución, en los que se utilizan estrategias algebraicas. En dos de ellos no logra hacer una transformación de la desigualdad que le parezca accesible; en el tercer intento logra expresar a la desigualdad original mediante una desigualdad entre polinomios, esto es: $4x^2(x) > 9x^2 - 6x + 1$.

Encuentra las raíces de $9x^2 - 6x + 1 = 0$, empleando la fórmula general, pero no consigue ir más allá.



$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$$

$$\sqrt{x} > \frac{3 - \frac{1}{x}}{2}$$

$$\frac{3}{1} - \frac{1}{x} \qquad \frac{3x-1}{x}$$

$$\sqrt{x} > \frac{\frac{3x-1}{x}}{\frac{2}{1}}$$

$$\sqrt{x} > \frac{3x-1}{2x}$$

$$\sqrt{x} > \frac{x(3-\frac{1}{x})}{2x}$$

$$2\sqrt{x} > \frac{3x-1}{x}$$

$$2\sqrt{x} > \frac{\cancel{x}(3-\frac{1}{x})}{x}$$

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$$

NOTA = llego a lo mismo

$$2\sqrt{x} > \frac{3x-1}{x}$$

$$\sqrt{x} > \frac{\frac{3x-1}{x}}{\frac{2}{1}}$$

$$\sqrt{x} > \frac{3x-1}{2x}$$

$$x > \left(\frac{3x-1}{2x}\right)^2$$

$$x > \frac{(3x-1)^2}{(2x)^2}$$

$$x > \frac{9x^2-6x+1}{4x^2}$$

$$4x^2(x) > 9x^2-6x+1$$

$$4x^5 > 9x^2-6x+1$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{36-4(9)(1)}}{2(9)}$$

$$\frac{+6 \pm \sqrt{36-36}}{18}$$

$$x = 1/3$$

No se como resolverlo
la raiz me causa problema

Figura 4.19

Control.

Al no poder resolver el problema, el individuo busca diferentes maneras de despejar x, dejando atrás procedimientos que no le resultaban favorables, al llegar al mismo resultado en ambos. Al no tener un buen control al realizar los procedimientos y por no verificarlos, el estudiante cometió un error al multiplicar x^2 por x, en el cuál ya no supo cómo seguir, afirmando que la raíz cuadrada le causa problema.

Sistemas de creencias.

La persistencia en utilizar una estrategia algebraica, a pesar de que no es exitosa, nos indica que la práctica de esta estudiante al abordar desigualdades está centrada en ese tipo de procedimientos.

Estudiante 4. Lic. en Física. Primer semestre.

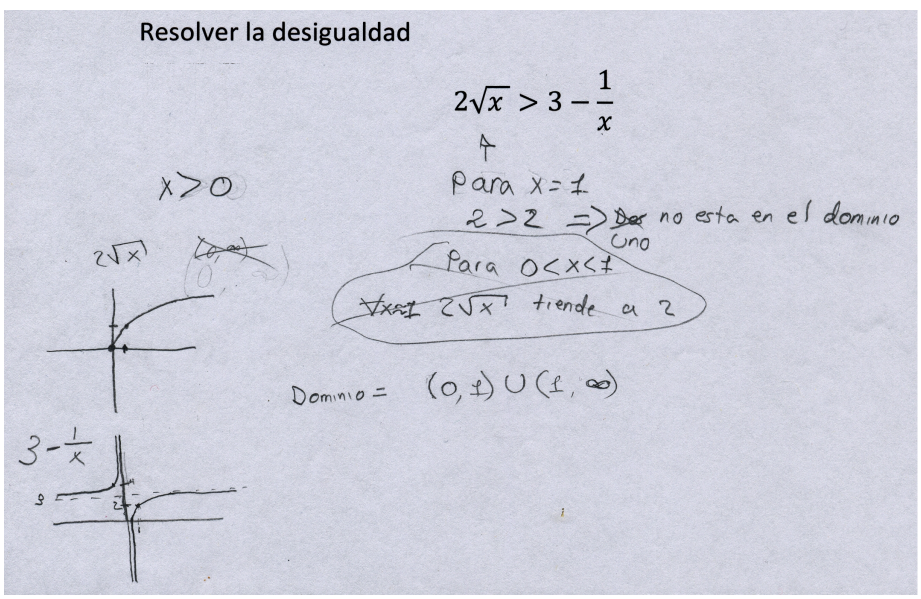


Figura 4.20

Recursos.

Su información de inicio es obviamente la desigualdad, pero es notorio que antes de intentar cualquier procedimiento, analiza las expresiones involucradas, lo cual le permite ir haciendo aseveraciones que restringen los posibles valores que son solución.

Así mismo, en este rubro encontramos representaciones gráficas y el concepto de raíz cuadrada.

Heurísticas.

Podemos observar que las heurísticas utilizadas fueron, por un lado, la exploración de la situación, dándole a x únicamente el valor de uno, para determinar que ese punto no es solución de la desigualdad. Por otro lado, el individuo representó gráficamente a los términos de los dos lados de la desigualdad, sin compararlas entre sí, analizando en cada una su comportamiento y rescatando así el hecho de que las soluciones son estrictamente mayores que cero. La solución es correcta y completa.

No intenta en ningún momento hacer manipulaciones algebraicas. La información que obtiene de las gráficas le resulta suficiente para proponer su solución.

Control.

Una muestra de control la vemos reflejada en el procedimiento empleado. El estudiante mostró seguridad respecto a las estrategias que usó, sin embargo, descarta el análisis del término $2\sqrt{x}$, lo cual podría complicar o hacer más largo el proceso de resolución; su procedimiento le resulta suficiente para determinar el dominio de la desigualdad.

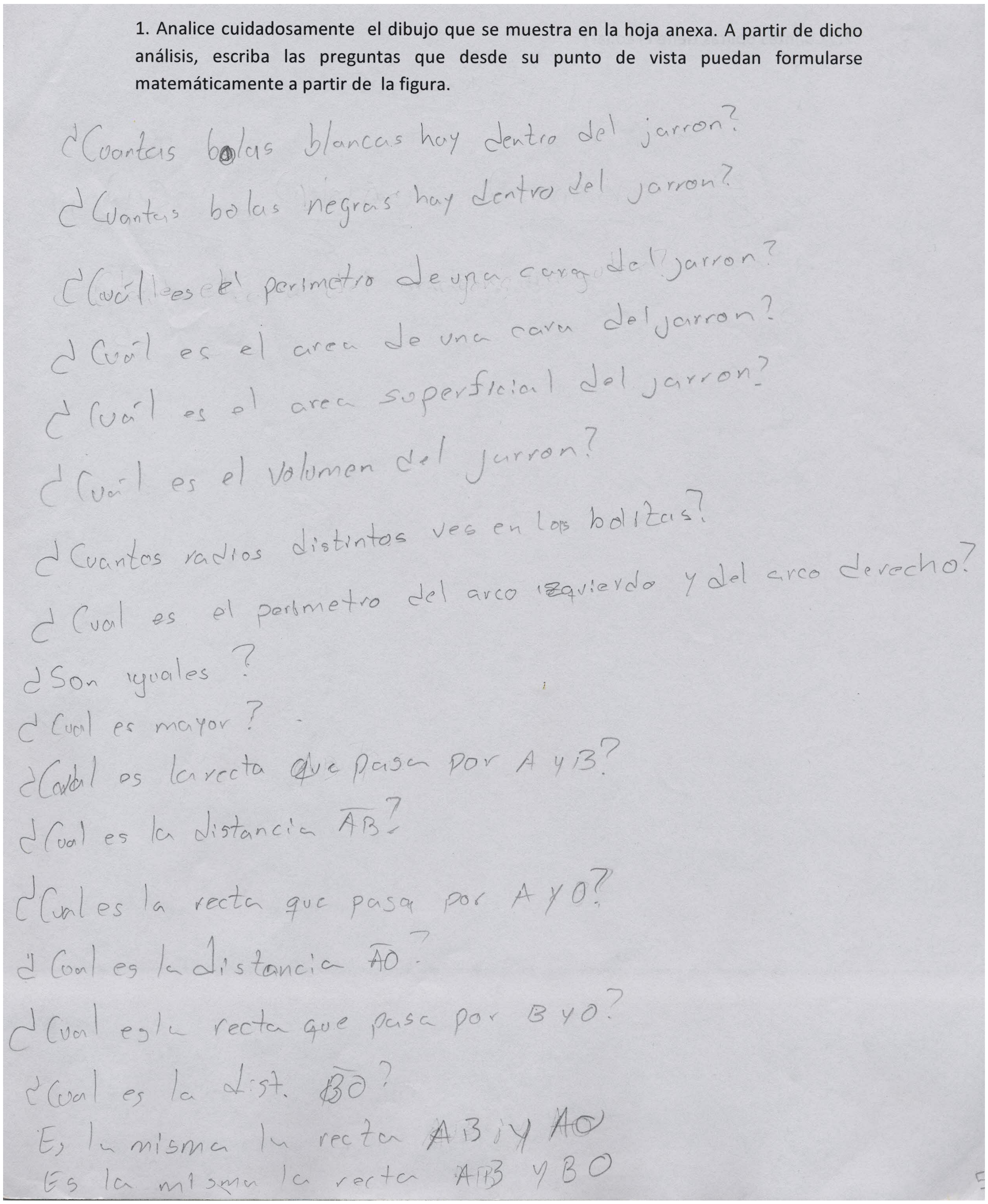
Sistemas de creencias.

El papel que este estudiante asigna a las representaciones de las funciones es alto, pues le convence y le resulta suficiente para expresar su solución a partir del análisis de esos elementos. No tiene mayor preocupación por el rigor, que fue más evidente en el caso del Estudiante 1.

Problema 5. *El problema del collar*

Nota. En esta actividad tuvimos la oportunidad de platicar con los estudiantes al momento en que ésta se llevaba a cabo, por lo que hay elementos que mencionamos y que no aparecen en las hojas de trabajo.

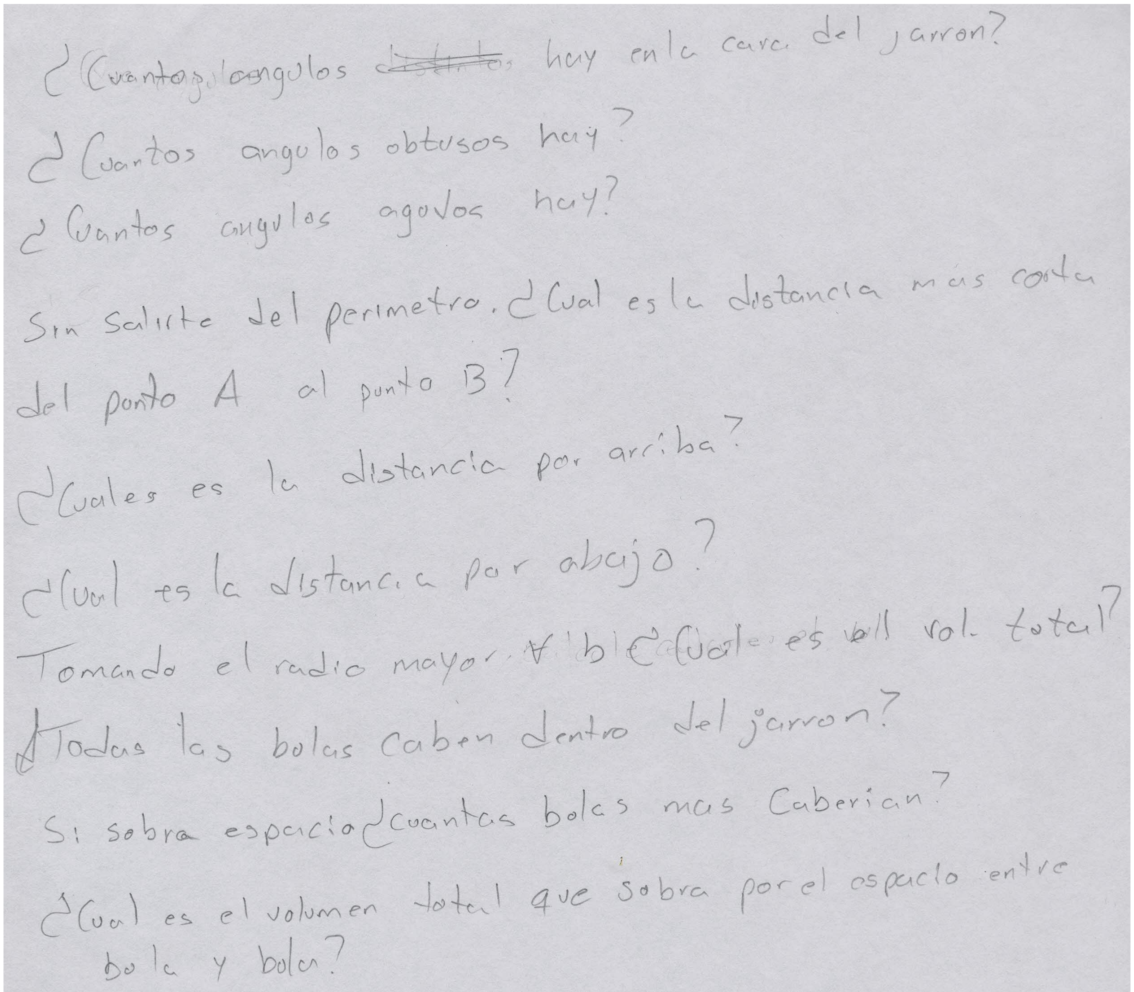
Estudiante 1. Licenciatura en Matemáticas. Sexto semestre.



1. Analice cuidadosamente el dibujo que se muestra en la hoja anexa. A partir de dicho análisis, escriba las preguntas que desde su punto de vista puedan formularse matemáticamente a partir de la figura.

¿Cuantas bolas blancas hay dentro del jarron?
¿Cuantas bolas negras hay dentro del jarron?
¿Cuál es el perimetro de una cara del jarron?
¿Cuál es el area de una cara del jarron?
¿Cuál es el area superficial del jarron?
¿Cuál es el volumen del jarron?
¿Cuantos radios distintos ves en las bolitas?
¿Cual es el perimetro del arco izquierdo y del arco derecho?
¿Son iguales?
¿Cual es mayor?
¿Cual es la recta que pasa por A y B?
¿Cual es la distancia $\overline{AB}$?
¿Cual es la recta que pasa por A y O?
¿Cual es la distancia $\overline{AO}$?
¿Cual es la recta que pasa por B y O?
¿Cual es la dist. $\overline{BO}$?
Es la misma la recta AB y AO
Es la misma la recta AB y BO

Figura 4.21



¿Cuantos ángulos ~~distintos~~ hay en la cara del jarron?

¿Cuantos angulos obtusos hay?

¿Cuantos angulos agudos hay?

Sin salirte del perimetro. ¿Cual es la distancia más corta del punto A al punto B?

¿Cuales es la distancia por arriba?

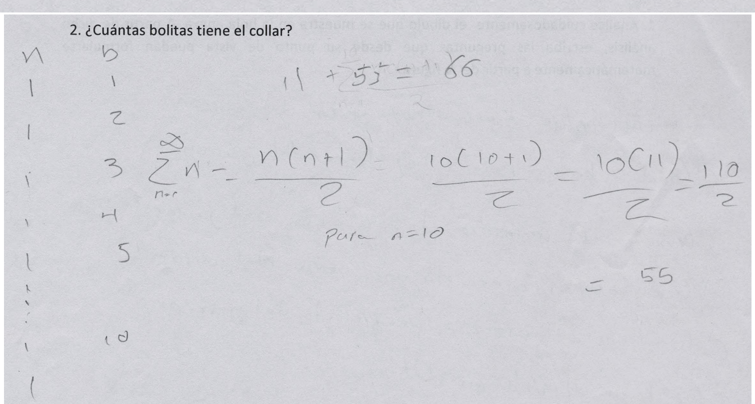
¿Cual es la distancia por abajo?

Tomando el radio mayor ∀ bl ¿Cual es ~~el~~ vol. total?

¿Todas las bolas caben dentro del jarron?

Si sobra espacio ¿cuantas bolas mas Caberian?

¿Cual es el volumen total que sobra por el espacio entre bola y bola?



2. ¿Cuántas bolitas tiene el collar?

n	b
1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
⋮	
1	10
1	

$11 + 55 = 66$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \frac{10(10+1)}{2} = \frac{10(11)}{2} = \frac{110}{2}$$

para $n=10$

$= 55$

Figura 4.22

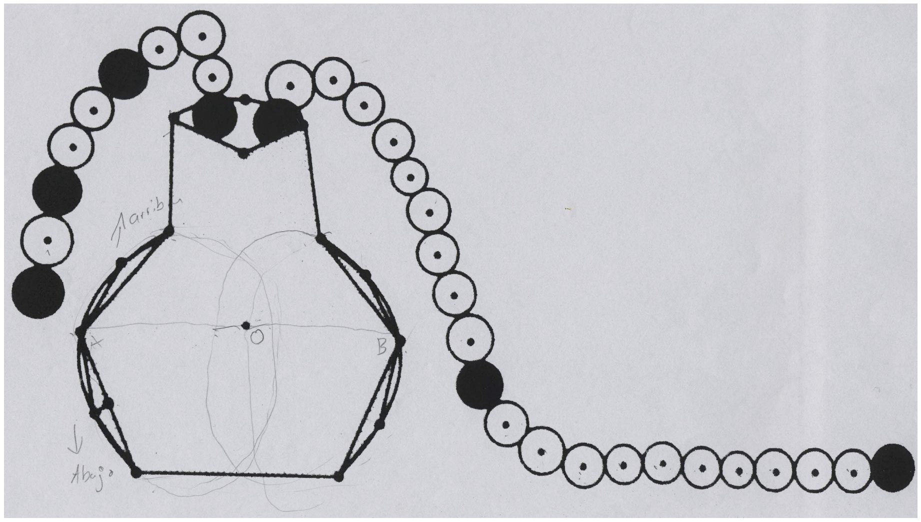


Figura 4.23

Recursos.

La figura que representa al jarrón, los círculos que representan a las cuentas del collar y los diferentes colores de ésas; además de conocimientos de geometría y la suma de números naturales.

Heurísticas.

En el punto uno el individuo planteó dos que son de conteo y 26 preguntas de carácter geométrico. Desde que el individuo comenzó a realizar el primer punto del problema mostraba su interés y encontraba demasiadas relaciones al percibir la figura, siendo el estudiante que planteó más preguntas, por lo que terminó diciendo: "... veo muchas cosas, se me ocurren muchas preguntas, pero creo que no terminaría de escribirlas", además de preguntar si se comprendía la manera en que expresaba sus ideas. Por otra parte, el estudiante se acercó al dibujo, por ejemplo dando nombres a puntos que aparecen en la figura del jarrón, que permitieran comprender y justificar los cuestionamientos que hacía.

Para encontrar las bolitas que tiene el collar, el estudiante trató de establecer la relación entre cuentas o bolitas blancas y las negras. Es decir, se preguntó cuántas bolitas blancas había por cada bolita negra, organizando esta información mediante una tabla.

Después, para conocer este resultado, empleó el resultado general que establece el valor de la suma de los n primeros números naturales, en este caso para una determinada n (10), sumando al resultado el número de bolitas negras, dando como resultado el total de bolitas del collar.

Control.

Los procedimientos y análisis que realiza el estudiante son muestra del control que tuvo sobre la planeación y toma de decisiones necesarias para abordar y responder apropiadamente las preguntas.

Sistemas de creencias.

El estudiante realizó una buena cantidad de cuestionamientos geométricos, siendo el producto de la observación a fondo de la imagen proporcionada. Si bien es cierto que la figura está presentada de tal manera que se evoquen aspectos geométricos, lo cual sucedió, alcanza un buen nivel de profundización en la observación pues considera en ellas tanto al todo como a las partes.

En el caso de la segunda pregunta, lo aborda como un problema de patrones, y lo resuelve haciendo uso de un resultado general, que aplica apropiadamente; esto es, sabe reconocer en un caso particular la pertinencia de usar un resultado general, característica importante del pensamiento matemático de un individuo.

Estudiante 2. Licenciatura en Matemáticas. Quinto semestre.

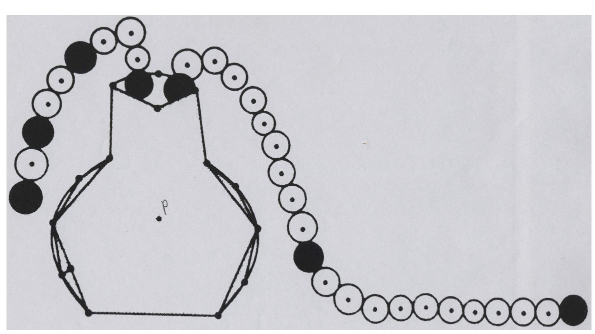
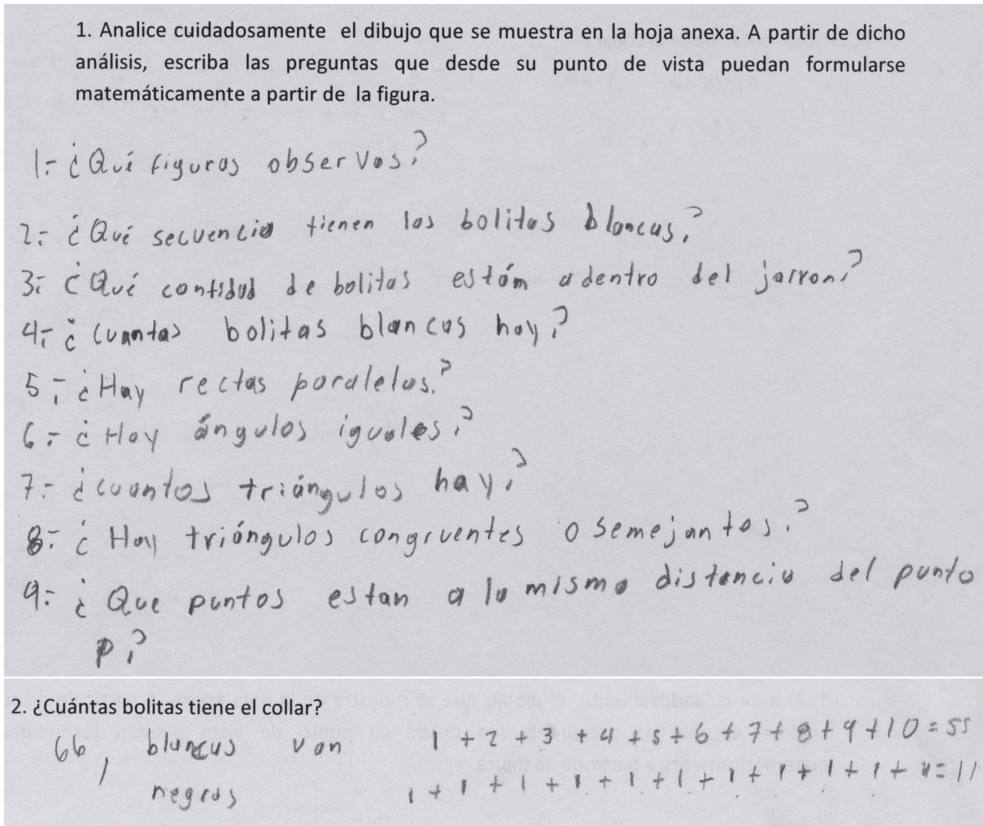


Figura 4.24



1. Analice cuidadosamente el dibujo que se muestra en la hoja anexa. A partir de dicho análisis, escriba las preguntas que desde su punto de vista puedan formularse matemáticamente a partir de la figura.

1.- ¿Qué figuras observas?

2.- ¿Qué secuencia tienen las bolitas blancas?

3.- ¿Qué cantidad de bolitas están adentro del jarrón?

4.- ¿Cuántas bolitas blancas hay?

5.- ¿Hay rectas paralelas?

6.- ¿Hay ángulos iguales?

7.- ¿Cuántos triángulos hay?

8.- ¿Hay triángulos congruentes o semejantes?

9.- ¿Que puntos estan a la misma distancia del punto P?

2. ¿Cuántas bolitas tiene el collar?

66, blancas van 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55

negras 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11

Figura 4.25

Recursos.

La figura que representa al jarrón, los círculos que representan a las cuentas del collar y sus diferentes colores, también conocimientos de geometría.

Heurísticas.

El individuo realizó nueve planteamientos, principalmente basándose en cuestiones geométricas. Para saber cuántas bolitas tiene el collar sumó una por una las bolitas blancas y negras, basándose en el patrón que siguen las bolitas.

Control.

El estudiante mostró control en el proceso y decidiendo retirarse al no tener más percepciones que le permitieran hacer un cuestionamiento.

Sistemas de creencias.

Las preguntas que planteaba el individuo iban más allá de lo que aparece superficialmente en la figura, y aunque fueran generalmente cuestionamientos del mismo tipo, nos hace notar que sus creencias son firmes a lo ya establecido. Tal como sucede con la forma en que encuentra las bolitas del collar, alertándonos de que logra establecer conexiones de una figura con sus recursos matemáticos.

Estudiante 3. Licenciatura en Física. Primer semestre. Figura 4.26.

Recursos.

La figura que representa al jarrón, los círculos que representan a las cuentas del collar y los diferentes colores de ésas.

Heurísticas.

El estudiante comenzó por argumentar sobre la sucesión que tienen las bolas negras (bn) y las bolas blancas (bb), estableciendo la secuencia que siguen entre sí. Luego, hizo dos preguntas, donde la primera era del tipo de verificación para analizar si se cumplía la secuencia y la segunda del tipo geométrico. La primera fue la única que respondió el individuo, para la cual la respuesta dada es de manera discursiva, con apoyo de argumentos geométricos, para llegar a la conclusión de que a lo más puede haber 11 bolitas pegadas a los lados de la figura.

Para encontrar la cantidad de bolitas que tiene el collar, lo hizo mediante la secuencia de las bolitas negras, agregándole las bolitas blancas. Esto es, pudo encontrar el patrón presente, y además va calculando las sumas parciales dependiendo de la bolita negra de la cual se trate.

Control.

En la hoja de la trabajo, especialmente en la imagen del jarrón, percibimos el control que tuvo el estudiante al tener contacto con ella, dándole nombres a los segmentos de la figura así como marcándola, estableciendo ángulos, etc., que justifiquen a las preguntas.

Sin embargo, una falta de control se ve reflejada en la respuesta a la primer pregunta, en la que el individuo llega a una deducción pero no a la que se requería en la cuestión que planteó o al menos sin completarla, sin hacer notar alguna dificultad. Además, en este mismo momento, dejó de lado la figura para suponer que todos los lados eran iguales y que los diámetros de las bolitas también lo son, todo ello con la intención de poder establecer el resultado que deseaba, lo cual finalmente no logró.

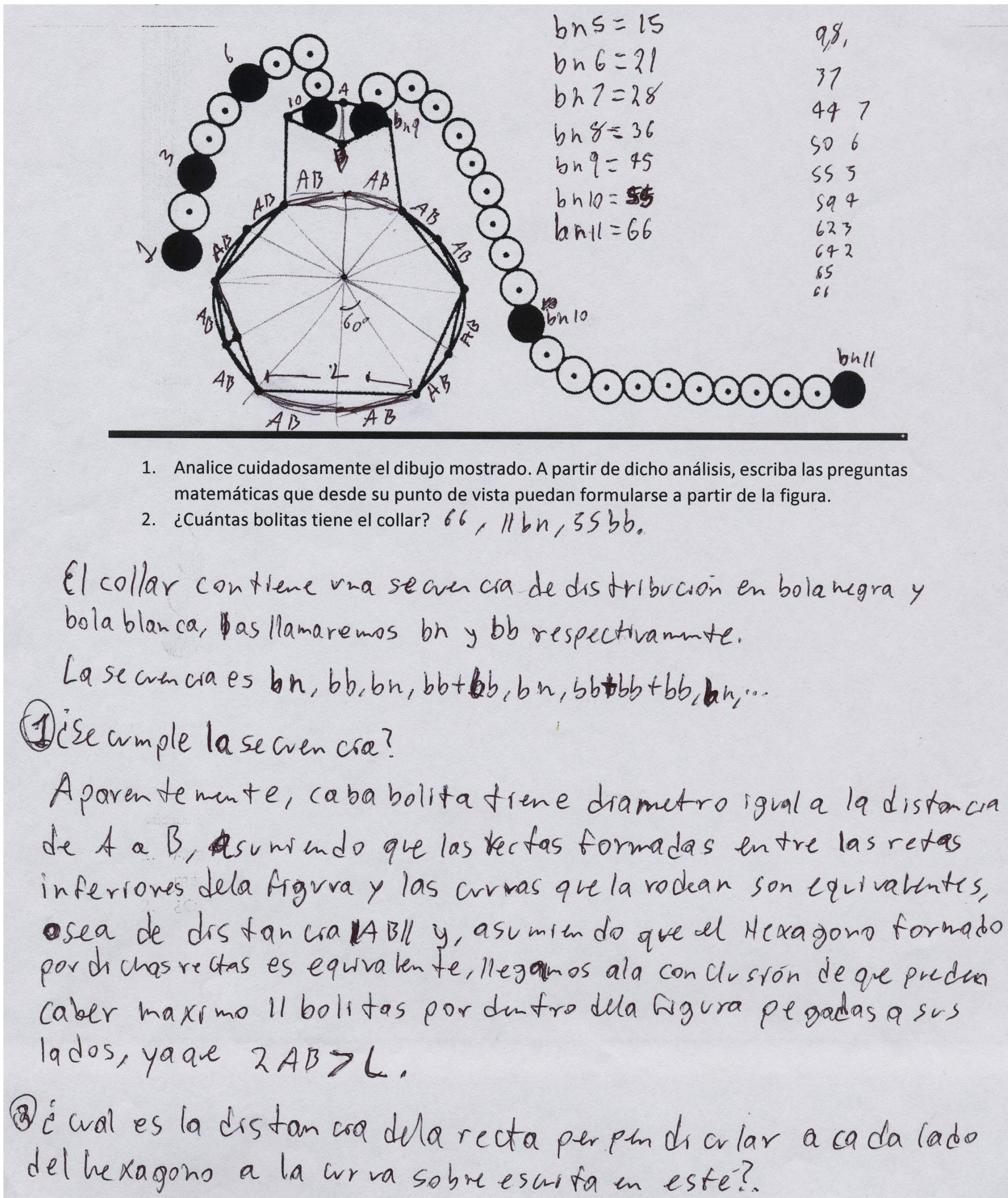


Figura 4.26

Sistemas de creencias.

El estudiante pensó en interrogantes de carácter geométrico, las cuales intenta responder sin tener éxito, aunque hace una serie de razonamientos que son interesantes. El patrón seguido por las cuentas del collar pudo ser encontrado sin mayores dificultades.

La imagen del jarrón influye fuertemente en la elección de los planteamientos y de cómo se resolverán.

Estudiante 4. Licenciatura en física. Primer semestre. Figura 4.27.

Recursos.

La ilustración que aparece en la hoja de actividad. El individuo representa una duda al no comprender e interpretar de manera precisa la figura del jarrón, confundiéndola con un dije que forma parte del collar.

Heurísticas.

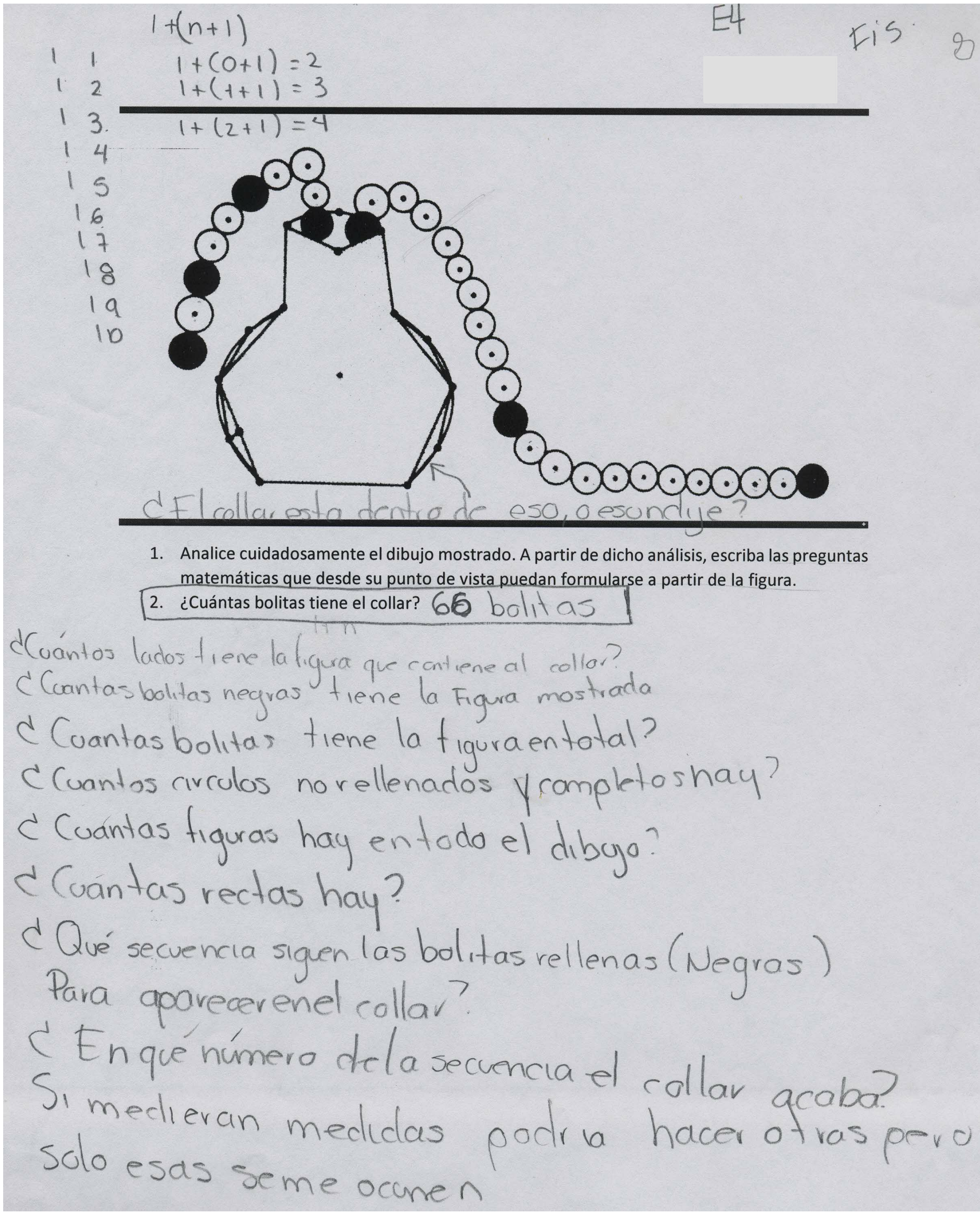
El estudiante desarrolló ocho preguntas, que fueron hechas a partir de examinar superficialmente la figura. Cuando se le pide encontrar cuántas bolitas tiene el collar, intenta establecer una relación de correspondencia entre las bolitas blancas y las bolitas negras encontrando la solución. Después de eso hace un intento por generalizar la relación de correspondencia, pero sin completarlo.

Control.

El individuo muestra un control consistente con la falta de comprensión de la figura y la ausencia de datos numéricos, decidiendo así los cuestionamientos que hará sin profundizar en los elementos que no logró interpretar.

Sistemas de creencias.

En matemáticas aparecen diversas expresiones, generalmente datos numéricos, los cuáles sirven como herramientas para quien resuelve el problema. Esto fue lo que provocó que el estudiante no pudiera plantear más cuestionamientos, ya que como afirmó que de tener medidas podría seguir realizando preguntas, lo cual resultó un impedimento para él debido a sus creencias matemáticas. También podría suponerse que quizá su práctica escolar sobre geometría estuvo muy dirigida hacia cálculos de áreas, perímetros, volúmenes, etc, para los cuales se requiere conocer ciertas medidas. Al carecer de ellas, renuncia a hacer otros cuestionamientos.



$1+(n+1)$ E4 Fis 8

1 1 $1+(0+1)=2$

1 2 $1+(1+1)=3$

1 3. $1+(2+1)=4$

1 4

1 5

1 6

1 7

1 8

1 9

1 10

¿El collar esta dentro de eso, o esconde?

1. Analice cuidadosamente el dibujo mostrado. A partir de dicho análisis, escriba las preguntas matemáticas que desde su punto de vista puedan formularse a partir de la figura.
2. ¿Cuántas bolitas tiene el collar? 66 bolitas

¿Cuántos lados tiene la figura que contiene al collar?

¿Cuantas bolitas negras tiene la Figura mostrada

¿Cuantas bolitas tiene la figura en total?

¿Cuantos circulos no rellenados y completos hay?

¿Cuántas figuras hay en todo el dibujo?

¿Cuántas rectas hay?

¿Qué secuencia siguen las bolitas rellenas (Negras) Para aparecer en el collar?

¿En qué número de la secuencia el collar acaba?

Si me dieran medidas podría hacer otras pero solo esas se me ocurren

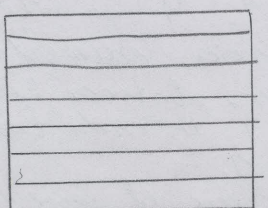
Figura 4.27

Problema 6. ***¿Qué tendedero es mejor?***

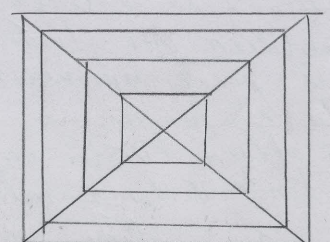
Estudiante 1. Licenciatura en Física. Segundo semestre.

Las sigs. figuras representan dos modelos de tendederos de ropa. Ambos cuestan igual, sus características físicas son iguales y la única diferencia es la disposición de sus hilos. 1er Sem

La parte superior de los tendederos es, en ambos casos, un cuadrado de 1m de lado. El tendedero A está dispuesto en 9 hilos paralelos y equidistantes, mientras q el tendedero B tiene el hilo dispuesto en 4 cuadrados concéntricos a igual distancia entre ellos.



Tendedero A



Tendedero B (Supongamos q sí son cuadrados)

Se sabe, además, q la longitud de ellos es la misma para otros modelos, de tal manera que la cuestión es saber cuál de ellos es más eficaz en el sentido de q tiene más longitud de hilo. Los tendederos más grandes son cuadrados de 1.25m de lado, 11 tiras ~~verticales~~ tipo A y 5 cuadrados para el tipo B, y los más pequeños de 75cm de lado, 7 tiras verticales para el tipo A y 3 cuadrados para B. El hecho q el tendedero A sea más o menos útil q B, ¿depende del tamaño del tendedero? Se responde a esta pregunta al final.

* Problema 1.

~~Sabiendo~~ la información anterior, ¿cuál es el tendedero en cada caso, el A o el B?

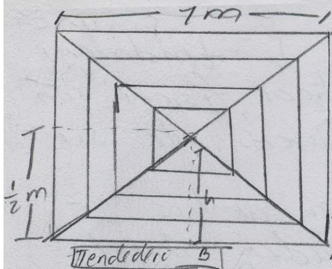
Caso 1, donde la longitud del cuadrado mayor es de 1m y hay 9 tiras paralelas en A y 4 cuadrados concéntricos.

Sea L, la longitud del hilo disponible para colgar en A, a la longitud del tendedero, n el número de hilos:

$L_1 = an = (1m)(9) = 9m$

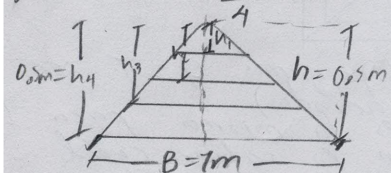
Para calcular la longitud de todos los hilos disponibles en B se razona de la siguiente manera (sigo página)

Figura 4.28



Las diagonales no forman parte de los hilos. Podemos centrar nuestra atención en el triángulo inferior. Sabemos que es un triángulo isósceles, donde la longitud de sus dos lados iguales es la mitad de la longitud de la diagonal, pero eso no es importante para efectos del problema. Si prestamos atención, notamos que dentro del triángulo mayor existen en su interior otros tres triángulos. Todos los triángulos son semejantes entre sí. Para demostrarlo, se puede echar mano del primer teorema de Tales de trigonometría:

"Si por un triángulo se trazan n rectas paralelas a uno de sus lados, se obtienen n+1 triángulos semejantes". Y no sólo eso, también se puede aprovechar q la distancia entre los segmentos de recta es la misma entre cada una. Entonces podemos conocer la altura (vista como en la figura) de cada triángulo como $i\frac{h}{4}$ donde i toma valores de 1, 2, 3 y 4.



Como son semejantes, entonces el cociente de sus respectivas alturas y bases son iguales a una constante. Llamémosle b_1 a la base del triángulo de área más pequeña. Con base a lo anterior:

$\frac{h}{B} = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2} = \frac{h_1}{b_1}$; Considerando $h_1 = (1)\left(\frac{h}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}m$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{8b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{4}$. Se hace lo mismo para el resto:

$b_2 = \frac{2}{4}$; $b_3 = \frac{3}{4}$; $b_4 = \frac{4}{4}$. La suma de las bases nos da sólo un cuarto de la longitud de todo el hilo, multiplicamos por cuatro esta suma, esto es:

L_2: longitud total de hilo para colgar en el tendedero B.

$L_2 = 4\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right) = 4\left(\frac{10}{4}\right) = 10m$ & $L_1 = 9m$

Por lo tanto, en este caso conviene más utilizar el tendedero B q el A.

Con los siguientes el método es el mismo y los resultados parecidos.

Figura 4.29

Caso 2: longitud del lado del cuadrado es 1.25 m, 11 tiras, 5 cuadrados. Calculamos la longitud del hilo del tendedero B.

En este caso, es h la altura del triángulo isósceles es 0.625m y B, el largo del cuadrado, 1.25m. Partimos la altura del triángulo en 5 secciones iguales, pues está éste cortado por 4 segmentos de recta paralelos a la base B. Entonces las alturas de los triángulos semejantes contenidos está dada por la expresión ih_i, donde i toma valores de 1, 2, 3, 4, 5. Sea b_1 la base del triángulo isósceles más pequeño, h_1 su altura: $h_1 = \frac{0.625m}{5} = 0.125m$

$$\frac{h}{B} = \frac{0.625m}{1.25m} = \frac{1}{2} = \frac{h_1}{b_1} = \frac{0.125m}{b_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{4}m$$

Si hacemos lo mismo para las bases de los otros triángulos, vemos q son de la sig. forma:

$$b_1 = \frac{1}{4}, \quad b_2 = \frac{2}{4}, \quad b_3 = \frac{3}{4}, \quad b_4 = \frac{4}{4}, \quad b_5 = \frac{5}{4}.$$

La suma de b_i nos dará sólo $\frac{1}{4}$ de la longitud L del hilo.

$$\frac{L}{4} = \sum_{i=1}^{5} (i)\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{5}{4}\right) = \frac{15m}{4} \Rightarrow L = 15m$$

La longitud del hilo disponible para el tendedero A, llamémosle l, B la longitud de cada hilo y n el número de hilos:

$$l = Bn = (1.25m)(11) = 13.75m$$

Por lo tanto en este caso también conviene el tendedero B.

Finalmente, en el caso 3, la longitud B del cuadrado es de 0.75m, luego la altura del triángulo isósceles q hemos trabajado es 0.375m. En este caso hay 7 tiras de hilo y 3 cuadrados. Calculamos para el tendedero A la longitud L_A, tomamos la longitud de cada hilo denotada por B y la cantidad de tiras n.

$$L_A = Bn = (0.75m)(7) = 5.25m$$

En la página siguiente calculamos la longitud disponible en el tendedero B, denotada por L_B.

Figura 4.30

Con base a lo anterior y bajo las mismas condiciones, tenemos que la altura del triángulo isósceles más pequeño es $\frac{h}{3}$. Establecemos una razón de proporcionalidad con el cociente de la base del triángulo más grande, esto es B la longitud del cuadrado más grande, y la altura h del triángulo más grande. b_1 es la base del más pequeño

$$\frac{h}{B} = \frac{0.375\,m}{0.75\,m} = \frac{1}{2} = \frac{h}{3b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{4}\,m$$

y lo mismo para el resto de las bases:

$b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{2}{4}$, $b_3 = \frac{3}{4}$. Como en los otros casos:

$$\frac{L_B}{4} = \sum_{i=1}^{3} i\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{4} \Rightarrow L_B = 6\,m$$

y la longitud del tendedero A denotada por L_A es $L_A = Bn = (0.75\,m)(7) = 5.25\,m$. Luego conviene más el segundo tendedero.

Problema 2.

Supongamos que dos tendederos son cuadrados de lado a, que en el tendedero A hay n segmentos paralelos equidistantes y que en el tendedero B hay $\frac{n}{2}$ cuadrados concéntricos si n es par y $\frac{n-1}{2}$ si n es impar. ¿Qué es mayor: la suma de la longitud de los segmentos paralelos del tendedero A o la de los perímetros de los cuadrados concéntricos del tendedero B?

L_A: longitud del hilo disponible para colgar en el tendedero A.

L_B: " " tendedero B.

h: Altura del triángulo isósceles utilizado anteriormente.

b_i: longitud asociada a la base del i-ésimo triángulo inscrito

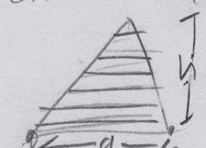
h_i: Altura asociada al i-ésimo triángulo.

Entonces

$L_A = na$

Figura 4.31

Para L_B podemos determinar una expresión con base a la semejanza de triángulos descrita, la cual descansa sobre el primer teorema de Tales. Hay q considerar además q la distancia entre cada segmento es la misma.



Tendedero B.

Consideremos el caso en que n es par.

$h=\frac{a}{2}$; $h_i = \frac{h}{\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{n}{2}} = \frac{a}{n} = h_i$, (Divido la altura por el número de cuadrados)

Establecemos la razón de proporcionalidad

$$\frac{h}{a} = \frac{\cancel{a}}{2\cancel{a}} = \frac{1}{2} = \frac{h_i}{b_i} \Rightarrow b_i = 2h_i$$

Como $h_i=\frac{a}{n}$, entonces $b_i=\frac{2a}{n}$. Como cada segmento está separado una misma distancia uno de otro, la longitud del más pequeño al q le sigue es una vez más grande que la longitud de la base del triángulo más pequeño, o en otras palabras, las i-ésimas bases tienen la forma

$ib_i = i\frac{2a}{n}$, donde i toma valores de $1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$

De tal manera que:

$$\frac{L_B}{4} = \sum_{i=1}^{n/2} i\frac{2a}{n} \Rightarrow L_B = \frac{8a}{n}\sum_{i=1}^{\left(\frac{n}{2}\right)} i$$

Existe una expresión para la suma de números naturales:

$\boxed{1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$ Demostrable por inducción

Entonces

$$L_B = \left(\frac{8a}{n}\right)\left(\frac{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}\right) = \left(\frac{\cancel{8}a}{\cancel{n}}\right)\left(\frac{n^{\cancel{2}}+2\cancel{n}}{\cancel{8}}\right) = a(n+2)$$

$L_B = an+2a$

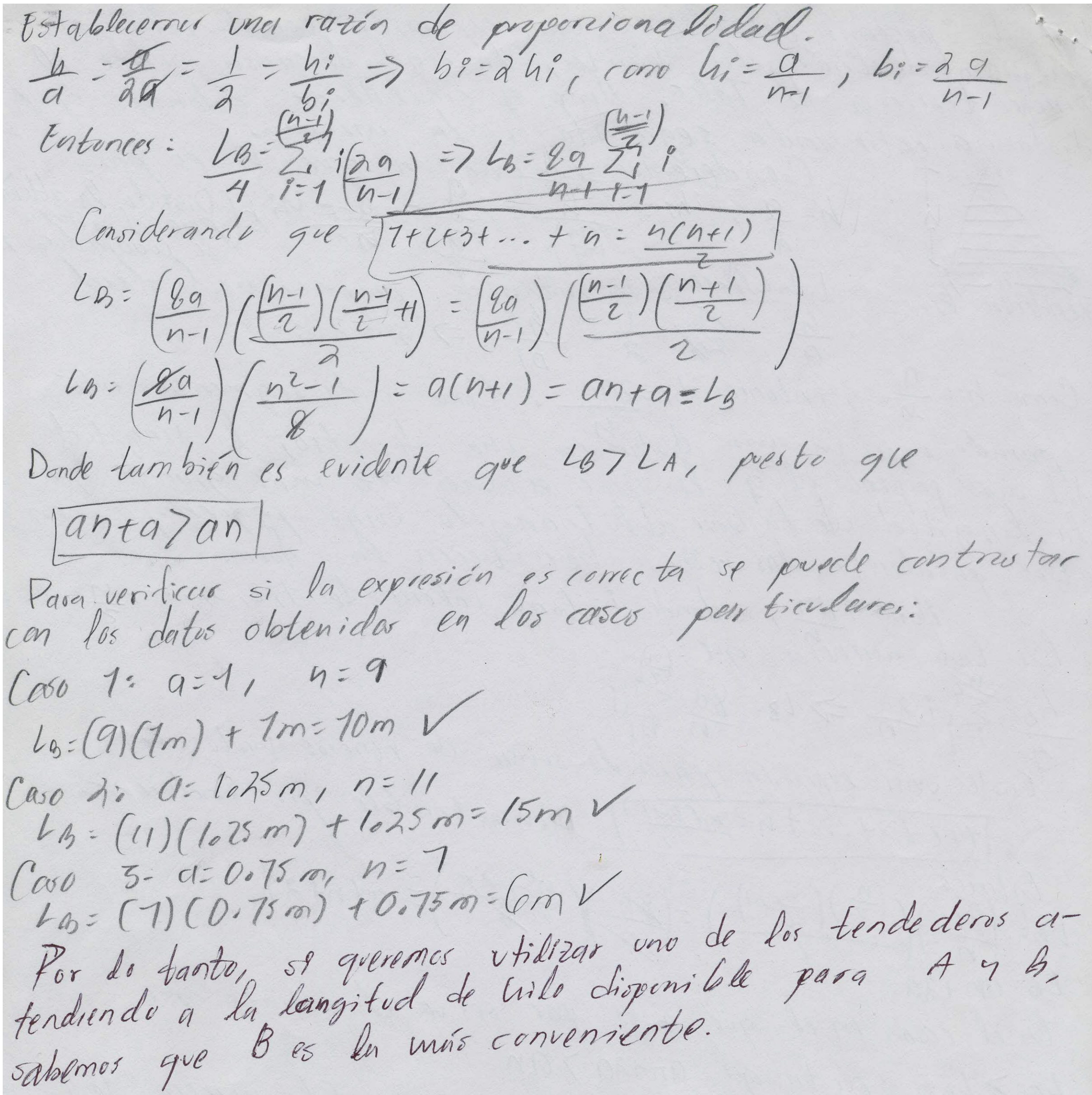
En el caso en el que n es par se ve claramente que

$L_B > L_A$, puesto que $an+2a > an$

Analicemos el caso en que n es impar. El número de cuadrados es $\frac{n-1}{2}$. De manera similar al caso anterior y por las mismas razones:

$h=\frac{a}{2}$; $h_i = \frac{h}{\frac{(n-1)}{2}} = \frac{\frac{a}{\cancel{2}}}{\frac{n-1}{\cancel{2}}} = \frac{a}{n-1}$; divido la altura máxima sobre el número de cuadrados.

Figura 4.32



Establecemos una razón de proporcionalidad.

$\frac{h}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = \frac{h_i}{b_i} \Rightarrow b_i = 2h_i$, como $h_i = \frac{a}{n-1}$, $b_i = \frac{2a}{n-1}$

Entonces: $\frac{L_B}{4} = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i\left(\frac{2a}{n-1}\right) \Rightarrow L_B = \frac{8a}{n-1}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i$

Considerando que $\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$

$$L_B = \left(\frac{8a}{n-1}\right)\left(\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2}\right) = \left(\frac{8a}{n-1}\right)\left(\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}\right)$$

$$L_B = \left(\frac{8a}{n-1}\right)\left(\frac{n^2-1}{8}\right) = a(n+1) = an+a = L_B$$

Donde también es evidente que $L_B > L_A$, puesto que

$\boxed{an+a > an}$

Para verificar si la expresión es correcta se puede contrastar con los datos obtenidos en los casos particulares:

Caso 1: $a=1$, $n=9$

$L_B = (9)(1m) + 1m = 10m$ ✓

Caso 2: $a = 1.25m$, $n=11$

$L_B = (11)(1.25m) + 1.25m = 15m$ ✓

Caso 3- $a = 0.75m$, $n = 7$

$L_B = (7)(0.75m) + 0.75m = 6m$ ✓

Por lo tanto, si queremos utilizar uno de los tendederos atendiendo a la longitud de hilo disponible para A y B, sabemos que B es la más conveniente.

Figura 4.33

Recursos.

El estudiante consideró los datos numéricos y la información descriptiva proporcionados en el problema, así como las figuras que aparecen de los tendederos.

El teorema de Tales, sumas, suma de números naturales, semejanza de triángulos, entre otros, pertenecen a esta categoría.

Heurísticas.

Como solución al ***Problema 1***, para el caso en que los tendederos tienen un metro de lado calcula la longitud del tendedero A con una operación aritmética, multiplicando las 9 tiras paralelas por un metro. Para encontrar la longitud del tendedero B hace un razonamiento geométrico que va describiendo paso a paso, apoyándose de la figura del tendedero B que aparece en la Figura 3.8, dibujada por él mismo. Realiza un análisis sobre ésta, considerando el triángulo inferior del tendedero B, en el cual afirma que hay tres triángulos en su interior; hace uso del teorema de Tales de trigonometría y de argumentos geométricos para demostrar que éstos son semejantes.

Concluyendo que la suma de las bases es un cuarto de la longitud total del hilo, por lo que al multiplicarla por cuatro es la longitud del tendedero B; terminando por afirmar que este tendedero es más útil que el A. Hace el mismo procedimiento para los otros cuestionamientos, cambiando los datos por los correspondientes además de utilizar una sumatoria para representar la cuarta parte de la longitud total del hilo, resultándole más útil el tendedero B. Cabe mencionar que los resultados fueron correctos.

Para el ***Problema 2***, el cual es una generalización, el individuo determinó la longitud del hilo disponible para colgar en cada uno de los tendederos (L_A y L_B), la altura del triángulo inferior del ***Problema 1*** (h), la longitud asociada a la base del i–ésimo triángulo inscrito (b_i) y la altura asociada al i-ésimo triángulo (ih_i). Estableció que L_A=an, la cual puede hacerse de manera directa, y para la longitud del tendedero B consideró las herramientas utilizadas en el ***Problema 1***, como lo son el Teorema de Tales, la semejanza de triángulos, la ilustración del triángulo inferior del tendedero B y una sumatoria.

Para esta última, cuando n es par, estableció una relación entre la suma obtenida y la suma de los números naturales, encontrando así la longitud del tendedero B de forma general; no obstante esta no es correcta. Desarrolla el mismo proceso para el caso en que n es impar, siendo ésta correcta, llegando a la conclusión de que la longitud del tendedero B es mayor que la del A.

Realizó una comprobación para saber si se cumplía el caso en que n es impar, sin embargo las expresiones que encontró no son correctas.

Control.

El estudiante muestra un alto nivel de control el cual se ve reflejado en la descripción que hace de cada elección, declarando los elementos importantes que tomará en cuenta (las razones de proporción, teorema de Tales, etc.), así como las decisiones de seguir el mismo procedimiento para los casos restantes. También, el considerar partes del triángulo le permitieron controlar la situación y dar elementos de justificación.

Por otro lado, el individuo no percibe que la distancia entre los cuadrados del tendedero B cambiará cuando n es par, ya que los lados del cuadrado más pequeño son iguales a la distancia entre cada cuadrado, siendo ésta igual a $\frac{a}{n-1}$. Esto es consecuencia de haberlo considerado como se muestra en la figura del tendedero B, el cual representa a n impar, y en la cual podemos observar que el lado del cuadrado más pequeño es dos veces la distancia entre los cuadrados.

Además, aunque llevar a cabo una verificación es una prueba del control, en esta ocasión observamos que le falló, ya que al confirmar la solución general del caso n impar, el individuo cometió un error al tomar en cuenta los resultados particulares del tendedero A en lugar de los del B, invalidando la comprobación.

Sistemas de creencias.

El estudiante asume el problema con herramientas de carácter geométrico en las cuales se nota que tiene dominio, pues inmediatamente descarta aquellos datos que considera que no intervienen en el cálculo que tiene que hacer; por ejemplo, descartó los lados verticales del tendedero A y las diagonales del tendedero B como espacio disponible para tender.

Por otro lado pudo realizar, para el caso en que los tendederos miden un metro de lado, una generalización, no obstante repitió el mismo proceso para los casos consecuentes, en lo que parecería un derroche de tiempo y recursos pero que por otro lado lo ubica siguiendo con precisión las instrucciones.

Expresa con detalle sus argumentos, y en cada uno de los casos particulares los va desglosando; a pesar de declarar que “Con los siguientes el método es el mismo y los resultados parecidos”, vuelve a hacer nuevamente el mismo proceso. Algo similar sucede cuando trata el caso general.

En aquellos aspectos en los cuales necesita incorporar argumentos, resultados, diagramas, que no son geométricos, también lo hace sin titubeos.

Estudiante 2. Lic. en Matemáticas. Quinto Semestre. Figuras 4.34, 4.35, 4.36, 4.37.

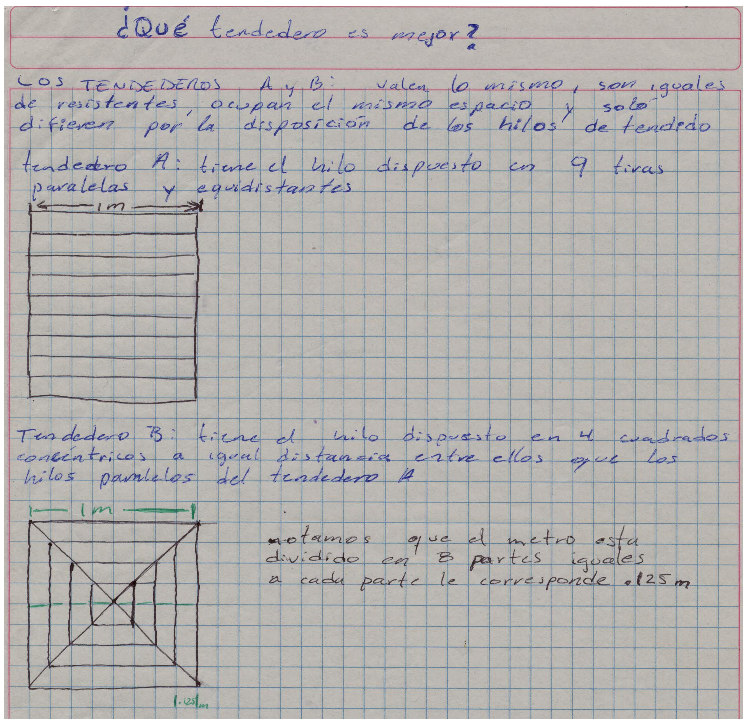


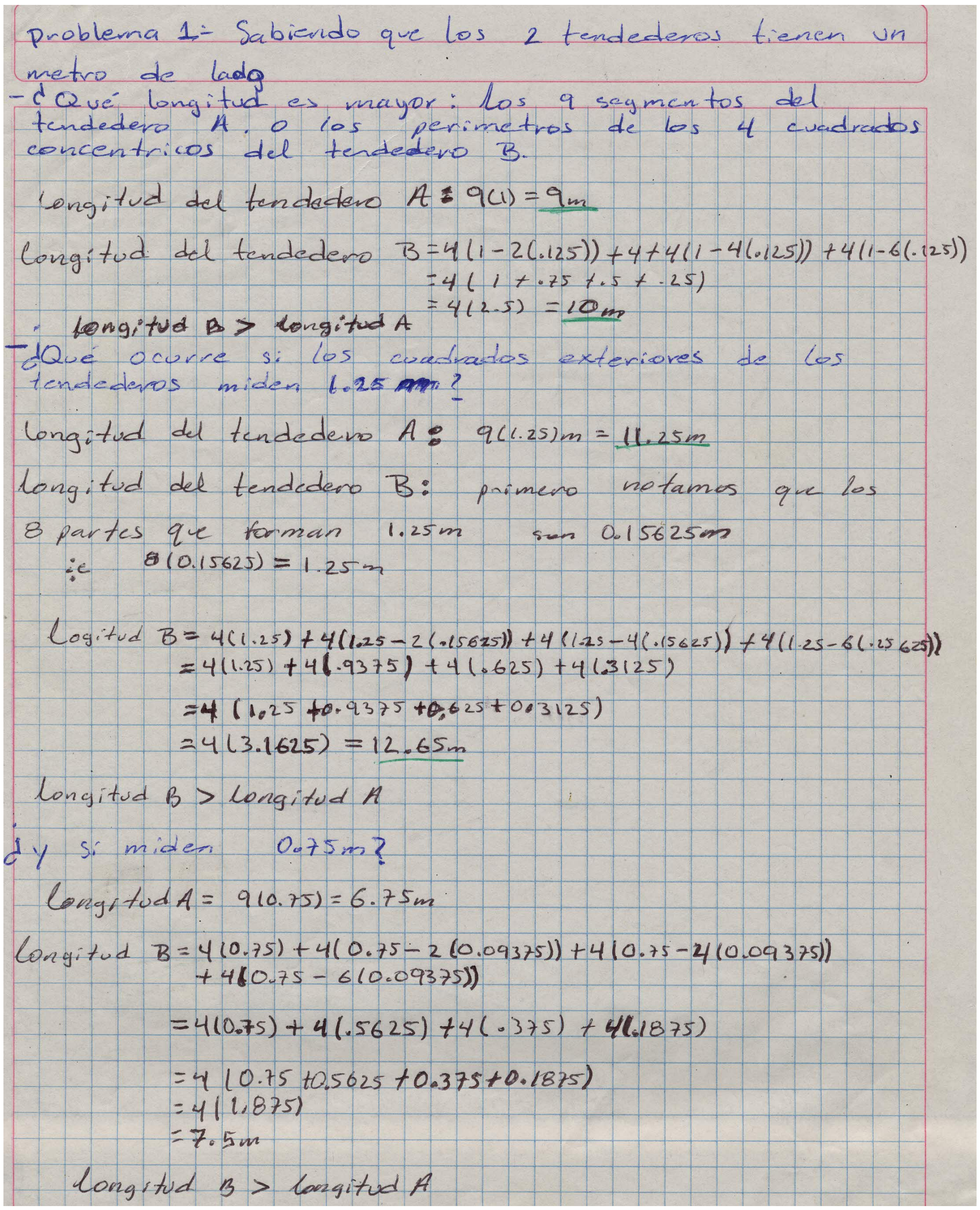
Figura 4.34

Recursos.

El estudiante utilizó los datos numéricos y descripción proporcionada en el problema, así como las figuras que aparecen de los tendederos. También aparecen recursos como el perímetro de un cuadrado y la operación de suma.

Heurísticas.

Primeramente, el individuo hace notar que el metro está dividido en ocho partes iguales, indicando la fracción que le corresponde a cada una. En el ***Problema 1***, para calcular la longitud del tendedero A de un metro de lado, multiplica los 9 segmentos por un metro; y para el tendedero B, suma los perímetros de los cuadrados, de manera que a la medida del lado le quita las partes de él que corresponden a los cuadrados, multiplicándolas por la fracción del total, que le corresponde a cada parte.



problema 1:- Sabiendo que los 2 tendederos tienen un metro de lado

-¿Qué longitud es mayor: los 9 segmentos del tendedero A, o los perimetros de los 4 cuadrados concentricos del tendedero B.

Longitud del tendedero A: 9(1) = 9m

Longitud del tendedero B = 4(1 - 2(.125)) + 4 + 4(1 - 4(.125)) + 4(1-6(.125))
= 4(1 + .75 + .5 + .25)
= 4(2.5) = 10m

. Longitud B > Longitud A

-¿Qué ocurre si los cuadrados exteriores de los tendederos miden 1.25 m?

Longitud del tendedero A: 9(1.25)m = 11.25m

Longitud del tendedero B: primero notamos que los 8 partes que forman 1.25m son 0.15625m
ie 8(0.15625) = 1.25m

Longitud B = 4(1.25) + 4(1.25 - 2(.15625)) + 4(1.25 - 4(.15625)) + 4(1.25-6(.15625))
= 4(1.25) + 4(.9375) + 4(.625) + 4(.3125)
= 4 (1.25 + 0.9375 + 0.625 + 0.3125)
= 4(3.1625) = 12.65m

Longitud B > Longitud A

¿y si miden 0.75m?

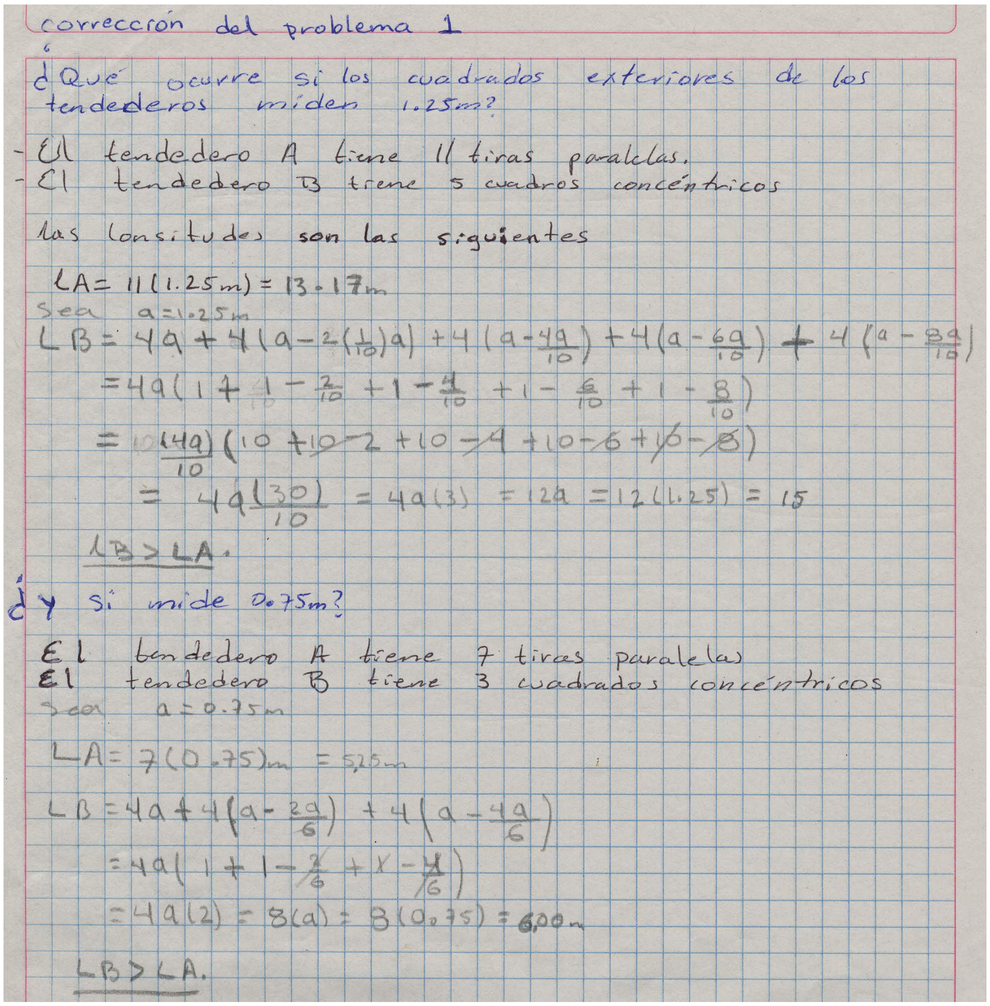
Longitud A = 9(0.75) = 6.75m

Longitud B = 4(0.75) + 4(0.75 - 2(0.09375)) + 4(0.75 - 4(0.09375))
+ 4(0.75 - 6(0.09375))
= 4(0.75) + 4(.5625) + 4(.375) + 4(.1875)
= 4 (0.75 + 0.5625 + 0.375 + 0.1875)
= 4(1.875)
= 7.5m

Longitud B > Longitud A

Figura 4.35

Llegando a la conclusión de que la longitud del tendedero B es mayor que la del A. De manera semejante procede para los tendederos de lados 1.25 m y .75 m, llegando a la misma conclusión. Pero, solamente para el primer caso, en el que los lados miden un metro el resultado es correcto, en los demás casos éste es incorrecto.


correccrón del problema 1

¿Qué ocurre si los cuadrados exteriores de los tendederos miden 1.25m?

- El tendedero A tiene 11 tiras paralelas.
- El tendedero B tiene 5 cuadros concéntricos

las longitudes son las siguientes

$LA = 11(1.25m) = 13.17m$

Sea $a = 1.25m$

$LB = 4a + 4(a - 2(\frac{1}{10})a) + 4(a - \frac{4a}{10}) + 4(a - \frac{6a}{10}) + 4(a - \frac{8a}{10})$

$= 4a(1 + 1 - \frac{2}{10} + 1 - \frac{4}{10} + 1 - \frac{6}{10} + 1 - \frac{8}{10})$

$= \frac{(4a)}{10}(10 + 10 - 2 + 10 - 4 + 10 - 6 + 10 - 8)$

$= 4a\frac{(30)}{10} = 4a(3) = 12a = 12(1.25) = 15$

$LB > LA.$

¿Y si mide 0.75m?

El tendedero A tiene 7 tiras paralelas

El tendedero B tiene 3 cuadrados concéntricos

Sea $a = 0.75m$

$LA = 7(0.75)m = 5.25m$

$LB = 4a + 4(a - \frac{2a}{6}) + 4(a - \frac{4a}{6})$

$= 4a(1 + 1 - \frac{2}{6} + 1 - \frac{4}{6})$

$= 4a(2) = 8(a) = 8(0.75) = 6.00m$

$LB > LA.$

Figura 4.36

Luego, en el ***Problema 2*** el individuo consideró la longitud de los tendederos A y B, encontrando la primera multiplicando la medida de los lados por el número de segmentos, terminando por una comprobación cuando $n = 9$, el cual es un caso particular que fue resuelto en el ***Problema 1***. Para el tendedero B tomó en cuenta la suma de los perímetros, donde los lados son la multiplicación del lado a por el valor que toman los lados de los cuadrados del tendedero B en el primer caso (cuadrados de un metro de lado). En los casos en que n es par e impar, establece la longitud de los lados para ambos, sin determinar un valor exacto ni decir cuál de los dos tendederos tiene mayor longitud; asimismo la generalización no es correcta.

Sin embargo, en las Figuras 4.36 y 4.37 vemos que este estudiante muestra una versión que llama "corrección del problema 1". En esta sección, salvo un error al calcular el producto 11×1.25, observamos que su procedimiento es mucho más sintetizado, claro y correcto. Eso pasa en los casos particulares, pero al generalizar, nuevamente comete un error, pues propone como resultado para el caso general $10a$, el cual falla, por ejemplo cuando lo probamos para 1.25 m.

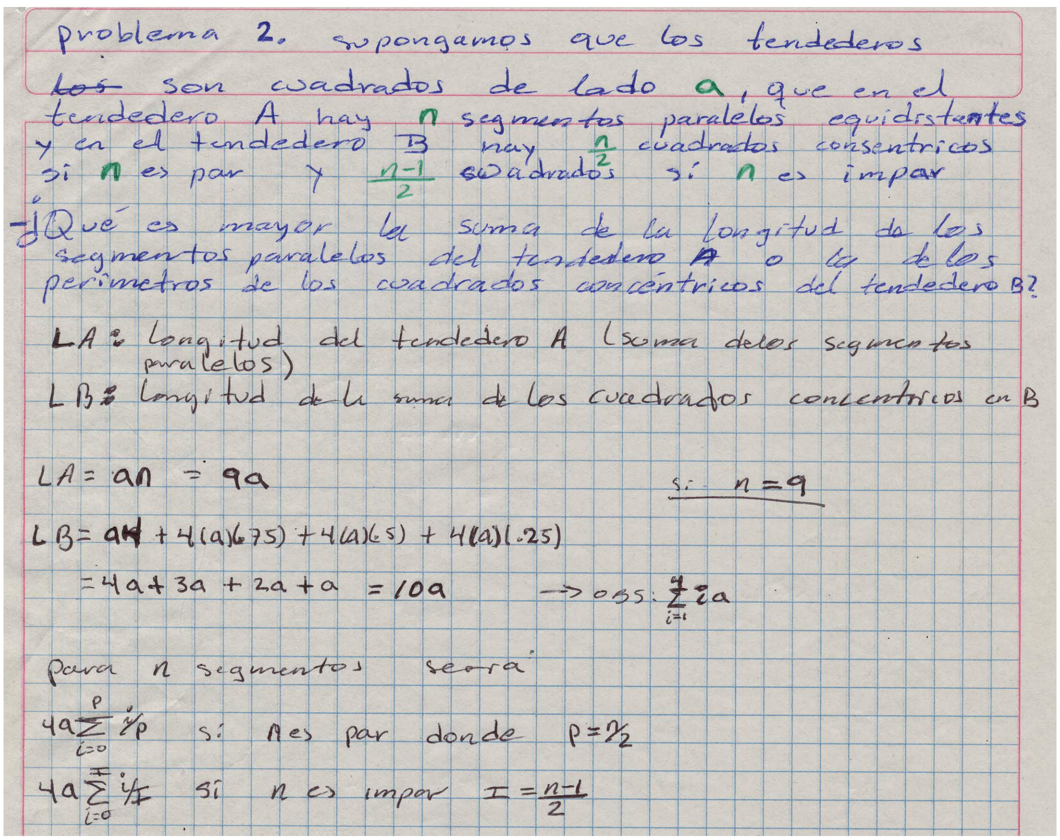


Figura 4.37

Control.

El estudiante muestra un control sobre el ***Problema 1*** al realizar los procedimientos, mostrando seguridad en cada uno de ellos. Sin embargo, al hacer una generalización perdió el control, ya que para la longitud de tendederos del tipo B tomó como base la medida de un metro de lado, el cual es un caso particular y desde ahí bloquea el paso a la generalización correcta.

Sistemas de creencias.

La generalización hecha en el ***Problema 2*** nos advierte que el estudiante ha trabajado con este tipo de estrategias, donde el hecho de que considere los elementos de un caso particular nos muestra que sus creencias matemáticas son firmes, ya que para generalizar una idea se puede partir de casos especiales. Pero, la manera en que lleva esta particularidad para establecer la suma, es una señal de que no ha logrado esclarecer el concepto de generalización, mezclando elementos de ésta.

Estudiante 3. Lic. en Física. Segundo semestre. Figuras 4.38, 4.39, 4.40 y 4.41.

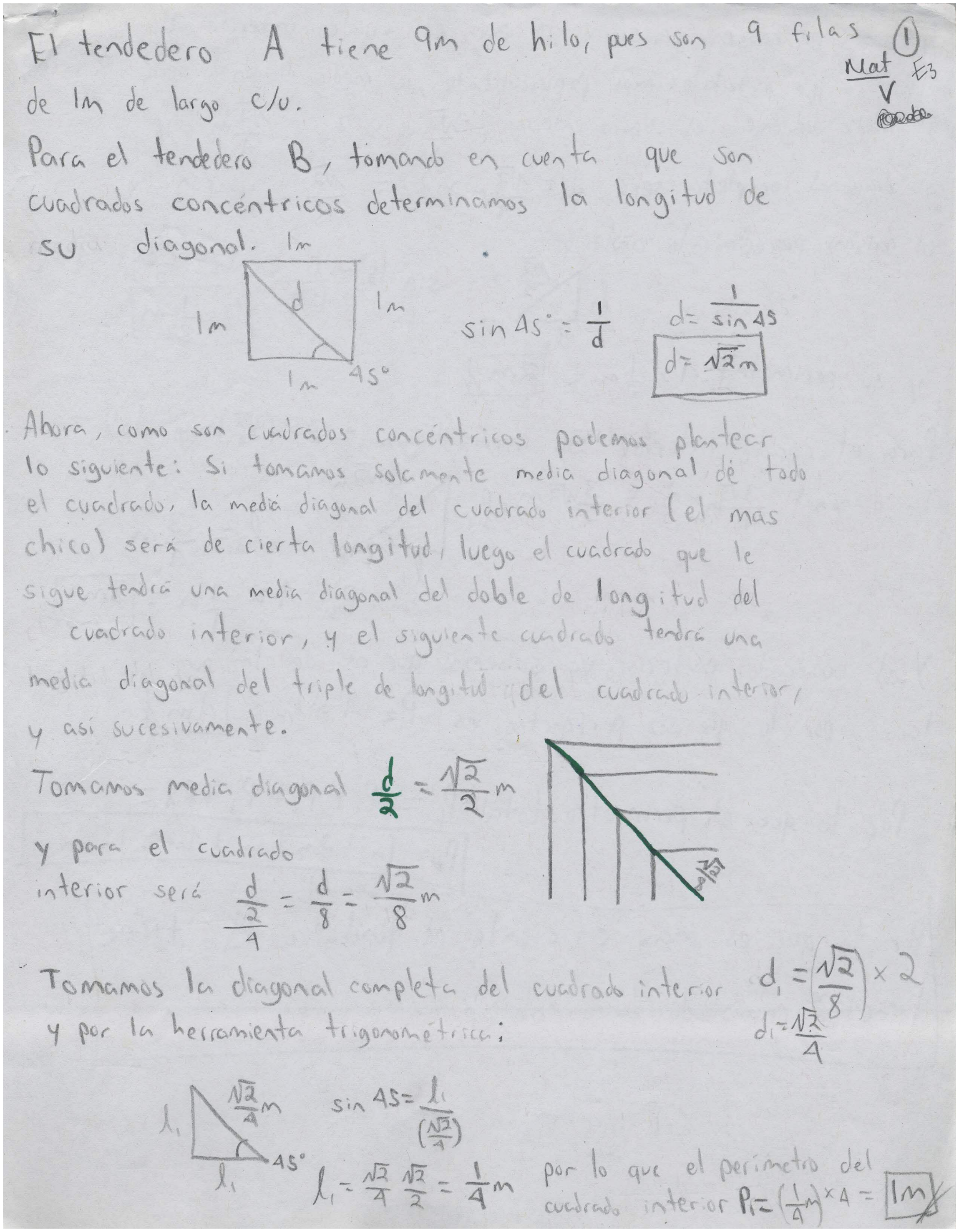
Recursos.

Las medidas de los lados del tendedero, la diagonal del tendedero B, las figuras proporcionadas por el problema.

En las hojas de trabajo, encontramos razones trigonométricas y conocimientos geométricos.

Heurísticas.

El individuo expresa con claridad los pasos con los que resolvió el problema, primeramente argumentando el por qué que el tendedero A tiene nueve metros de hilo disponibles para tender. Para el tendedero B de un metro de lado, utiliza una estrategia de carácter trigonométrico, dibujando el cuadrado, la diagonal y el ángulo correspondiente a ésta. Comienza por considerar su diagonal, dando argumentos geométricos para establecer una relación entre las medias diagonales de los cuadrados concéntricos con la media diagonal del tendedero, haciendo una ilustración de la media diagonal. Continúa haciendo razonamientos de trigonometría, auxiliándose de una figura para encontrar el perímetro del cuadrado interior; ejecutando este procedimiento para el resto de los cuadrados.



1

Mat V E3

El tendedero A tiene 9m de hilo, pues son 9 filas de 1m de largo c/u.

Para el tendedero B, tomando en cuenta que son cuadrados concéntricos determinamos la longitud de su diagonal.

1m 1m 1m 1m d 45°

$\sin 45^\circ = \frac{1}{d}$ $\quad d = \frac{1}{\sin 45}$ $\quad \boxed{d = \sqrt{2}\,m}$

Ahora, como son cuadrados concéntricos podemos plantear lo siguiente: Si tomamos solamente media diagonal de todo el cuadrado, la media diagonal del cuadrado interior (el mas chico) será de cierta longitud, luego el cuadrado que le sigue tendrá una media diagonal del doble de longitud del cuadrado interior, y el siguiente cuadrado tendrá una media diagonal del triple de longitud del cuadrado interior, y así sucesivamente.

Tomamos media diagonal $\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}m$

y para el cuadrado interior será $\frac{\frac{d}{2}}{4} = \frac{d}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}m$

Tomamos la diagonal completa del cuadrado interior y por la herramienta trigonométrica: $d_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right) \times 2$ $\quad d_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

l_1 $\frac{\sqrt{2}}{4}m$ 45° l_1 $\quad \sin 45 = \frac{l_1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

$l_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}m$ por lo que el perímetro del cuadrado interior $P_1 = \left(\frac{1}{4}m\right) \times 4 = \boxed{1m}$

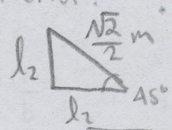
Figura 4.38

hacemos el mismo procedimiento para el cuadro interior 2 ③

Por lo que establecimos previamente, su media diagonal será 2 veces la media diagonal del cuadro interior: $\frac{\sqrt{2}}{8}m \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{4}m$ y

su diagonal completa será $d_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}m \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y con

el mismo procedimiento anterior:

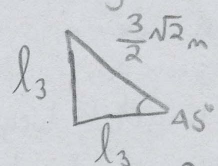


$\sin 45° = \frac{l_2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $l_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)\sin 45$ $\boxed{l_2 = \frac{1}{2}m}$

y su perimetro $P_2 = 4 \times \frac{1}{2}m = \boxed{2m}$

Para el cuadro interior 3: media diagonal $= 3 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)m$ y toda

la diagonal $\frac{3\sqrt{2}}{4}m \times 2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,m$



$l_3 = \frac{3}{4}m$

$P_3 = 4 \times \frac{3}{4}m = \boxed{3m}$

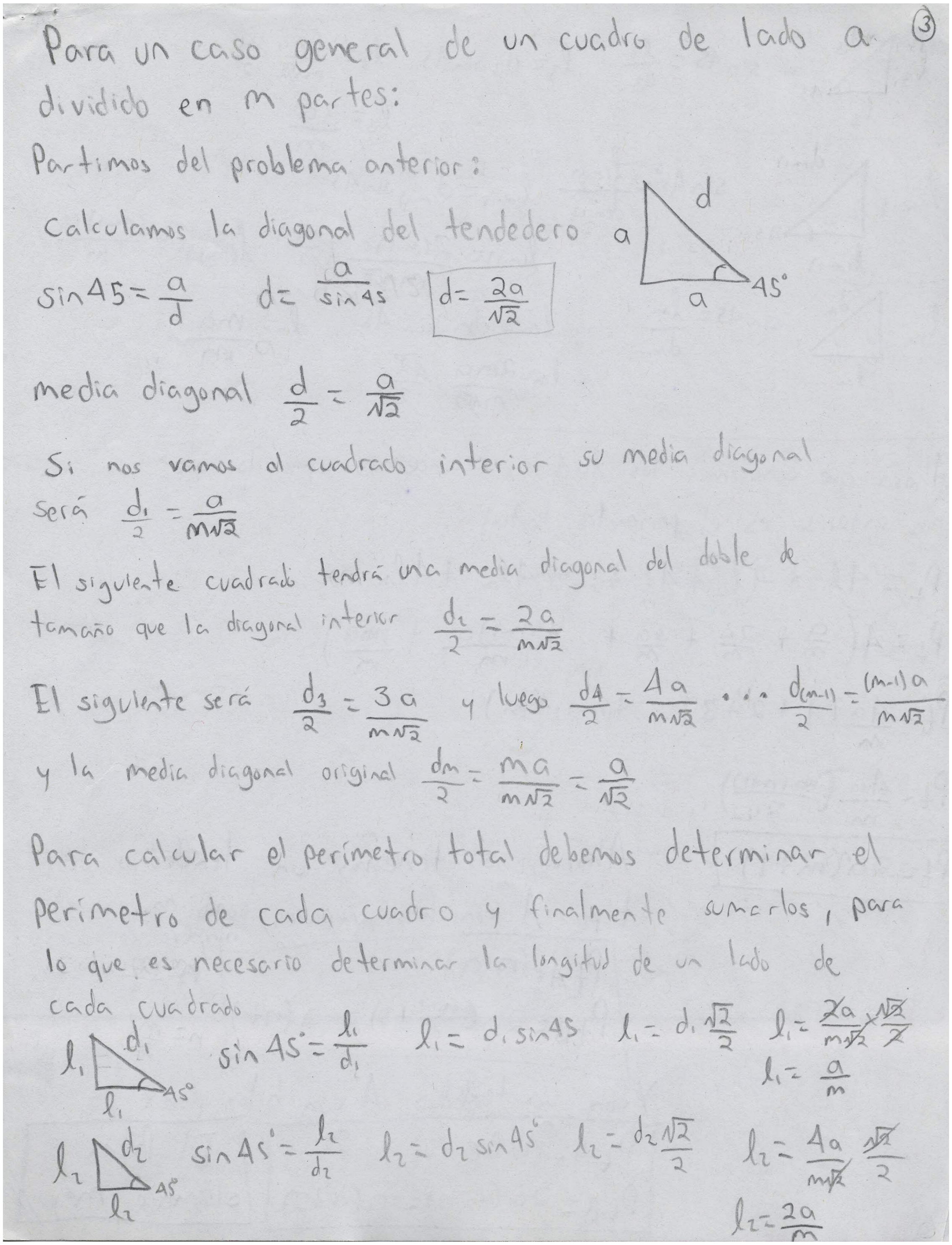
Y el cuadrado exterior ya sabemos que es de 1m por lado, por lo que su perimetro es $P_4 = 4 \times 1m = \boxed{4m}$

Por lo que el perimetro total $P_t = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 =$

$\boxed{P_t = 1m + 2m + 3m + 4m = 10m}$

$\boxed{\text{Por lo que es mas eficiente el tendedero B: tiene 1 metro mas de donde colgar}}$

Figura 4.39



Para un caso general de un cuadro de lado a dividido en m partes: 3

Partimos del problema anterior:

Calculamos la diagonal del tendedero

$\sin 45 = \frac{a}{d}$ $\quad d = \frac{a}{\sin 45}$ $\quad \boxed{d = \frac{2a}{\sqrt{2}}}$

media diagonal $\frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Si nos vamos al cuadrado interior su media diagonal será $\frac{d_1}{2} = \frac{a}{m\sqrt{2}}$

El siguiente cuadrado tendrá una media diagonal del doble de tamaño que la diagonal interior $\frac{d_2}{2} = \frac{2a}{m\sqrt{2}}$

El siguiente será $\frac{d_3}{2} = \frac{3a}{m\sqrt{2}}$ y luego $\frac{d_4}{2} = \frac{4a}{m\sqrt{2}}$ $\cdots$ $\frac{d_{(m-1)}}{2} = \frac{(m-1)a}{m\sqrt{2}}$

y la media diagonal original $\frac{d_m}{2} = \frac{ma}{m\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Para calcular el perímetro total debemos determinar el perímetro de cada cuadro y finalmente sumarlos, para lo que es necesario determinar la longitud de un lado de cada cuadrado

$\sin 45° = \frac{l_1}{d_1}$ $\quad l_1 = d_1 \sin 45$ $\quad l_1 = d_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad l_1 = \frac{\cancel{2}a}{m\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}$

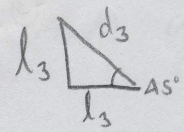
$l_1 = \frac{a}{m}$

$\sin 45° = \frac{l_2}{d_2}$ $\quad l_2 = d_2 \sin 45°$ $\quad l_2 = d_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad l_2 = \frac{4a}{m\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}$

$l_2 = \frac{2a}{m}$

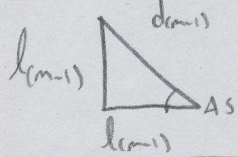
Figura 4.40

4



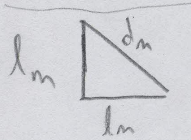
$\sin 45^\circ = \frac{l_3}{d_3}$ $\quad l_3 = d_3 \sin 45$ $\quad l_3 = \frac{6a}{m\cancel{\sqrt{2}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}$

$l_3 = \frac{3a}{m}$



$\sin 45^\circ = \frac{l_{(m-1)}}{d_{(m-1)}}$ $\quad l_{(m-1)} = d_{(m-1)} \sin 45$

$l_{(m-1)} = \frac{\cancel{2}(m-1)a}{m\cancel{\sqrt{2}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\right)$ $\quad l_{(m-1)} = \frac{(m-1)a}{m}$



$\sin 45 = \frac{l_m}{d_m}$ $\quad l_m = d_m \sin 45$ $\quad l_m = \frac{ma}{m}$

$l_m = \frac{\cancel{2}ma}{m\cancel{\sqrt{2}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}$

Ahora que conocemos los lados, recordemos que lo que nos interesa es el perímetro total

$P_t = 4l_1 + 4l_2 + 4l_3 + \ldots + 4l_{m-1} + 4l_m$

$P_t = 4\left(\frac{a}{m} + \frac{2a}{m} + \frac{3a}{m} + \ldots + \frac{(m-1)a}{m} + \frac{ma}{m}\right)$

$P_t = \frac{4a}{m}(1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) + m)$

$P_t = \frac{4a}{\cancel{m}}\left(\frac{\cancel{m}(m+1)}{2}\right)$

$\boxed{P_t = 2a(m+1)}$

Ahora, si tenemos un tendedero del tipo A con hilos impares, como m es el número de cuadros

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{tA} = (n)(a) \\ P_{tB} = 2a\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = a(n+1) \end{array}}$$

$m = \frac{n-1}{2}+1$ si es impar

$n = \frac{m}{2}$ si es par

Y con un tendedero A con hilos pares

$$\boxed{\begin{array}{l} P_t A = (n)(a) \\ P_t B = 2a\left(\frac{n}{2}+1\right) = a(n+2) \end{array}}$$

El B es siempre mejor

Figura 4.41

De esta manera logra encontrar el perímetro total del tendedero, asegurando que este tendedero es más útil, ya que tiene un metro más para colgar que el tendedero A.

Luego, parte del caso anterior hacia un caso general con tendederos de lado a, considerando el mismo procedimiento con el que obtuvo los resultados previamente, y así logra establecer la suma total de los perímetros, la cual es la solución correcta. No obstante, a continuación valora los casos en que n es par e impar, determinando fórmulas para encontrar los valores correspondientes, de las cuales la fórmula para n impar es incorrecta, aunque al terminar asiente que el tendedero B siempre es mejor.

Control.

El estudiante da evidencias de contar con un buen nivel de control en el proceso de solución, empleando sus recursos como la visualización, y probablemente planificación, al establecer una forma generalizada apoyándose de del proceso realizado con los tendederos de un metro de lado. Sin embargo, a pesar de hacer una generalización correcta y que se cumple para cualquier número de cuadrados concéntricos, el estudiante decide incorporar los datos del problema dejando de lado su conclusión previa, pareciendo ser insuficiente para determinar las longitudes de los cuadrados para los casos en que la cantidad de cuadrados es par o impar.

El motivo por el que el estudiante no encontró la solución incorrecta al ***Problema 2*** fue el mismo que en el caso del Estudiante 1, efecto de utilizar la figura del tendedero B para ambos casos, en que n es par e impar.

Pareciera que se dejó llevar por el aparente éxito obtenido, olvidando comprobar las expresiones obtenidas para los casos particulares, lo que quizá le hubiese ayudado a darse cuenta de sus errores. Esto es falta de control.

Sistemas de creencias.

En matemáticas es común trabajar con generalizaciones, pero no siempre lo hacemos de la manera correcta o al menos no le sacamos el mayor provecho, como es el caso del Estudiante 1, quien hizo tres veces el mismo proceso sin concretar una idea hasta que se le requería. En este rubro, el estudiante manifiesta que sus creencias matemáticas son sólidas al dejar fluir sus conocimientos e ideas para concebir un proceso de generalización que le fuera útil posteriormente, por lo que percibimos una gran familiaridad con estas herramientas y concepciones. Sin embargo, por la creencia de que las matemáticas son una ciencia exacta, es común dejarnos influenciar por los datos o indicaciones que se proporcionan en un problema, siendo en esta ocasión lo que incitó al individuo a considerar los casos en que hay $\frac{n}{2}$ y $\frac{n-1}{2}$ cuadrados concéntricos.

Estudiante 4. Lic. en Matemáticas. Egresado. Figuras 4.42 y 4.43.

Recursos.

Las figuras de los tendederos A y B, las diferentes medidas de los tendederos, y la cantidad de segmentos y cuadrados concéntricos correspondientes a cada medida de los tendederos. Además, el teorema de Tales y la suma de números naturales.

Heurísticas.

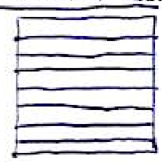
En el ***Problema 1*** el estudiante dibujó el tendedero A marcando un metro de lado, asegurando que los hilos miden nueve metros. Para el tendedero B, utilizó la misma estrategia, dibujó dicho tendedero y dentro de éste determinó la fracción que le corresponde a cada lado de los cuadrados interiores, dando una argumentación geométrica sobre tal afirmación. Luego, aritméticamente encontró el resultado, siendo más útil el tendedero B. Basándose en el mismo procedimiento y argumentación para dar solución cuando los lados de ambos tendederos miden 1.25 y .75 metros, y asegurando que el tendedero B es mejor.

En el ***Problema 2***, cuando la cantidad de cuadrados interiores es par e impar, el individuo implementó la misma estrategia que en los casos anteriores, así como la interpretación de los datos dados, estableciendo la forma general para encontrar la longitud del tendedero B y deduciendo la del tendedero A, aunque la solución sólo es correcta para el caso en que n es impar. Concluyendo que el tendedero B es más eficiente en ambos casos, y que "es menor la suma de la longitud de los segmentos paralelos en el tendedero A que la de los perímetros de los cuadrados del tendedero B".

Control.

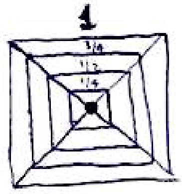
El control del estudiante es de alto nivel, como podemos ver en el ***Problema 1***, donde

Problema 1:



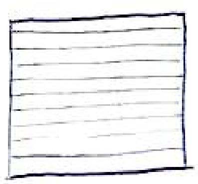
1m

Los hilos miden en total 9m



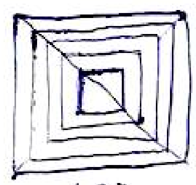
Por teorema de tales,
los segmentos marcados
tienen las longitudes indicadas.

Los hilos miden en total $4\left(1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=4(2.5)=10$ m,
por lo que esta construcción es más eficiente.



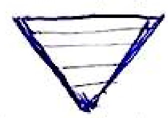
1.25

$11\times 1.25 = 12.5 + 1.25 = 13.75$



1.25

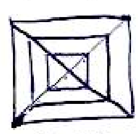
En este caso, el triángulo



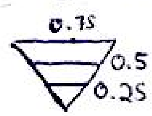
Está dividido por 5 líneas paralelas (contando la base) y equiespaciadas; como la base mide 1.25, las restantes miden $1.25\left(\frac{4}{5}\right)$, $1.25\left(\frac{3}{5}\right)$, $1.25\left(\frac{2}{5}\right)$, $1.25\left(\frac{1}{5}\right)$.

Por tanto, los hilos miden en total $4(1.25)\left(1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)=5(3)=15$.

0.75



0.75



$4(0.75+0.25+0.5)=6$

$7\times 0.75 = 8\times 0.75 - 0.75$

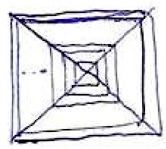
$= 6 - 0.75 = 5.25$.

En los 3 casos, el de los cuadrados es más eficiente.

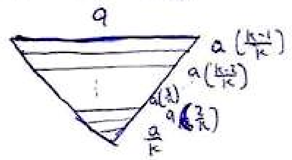
Figura 4.42

Problema 2:

Caso n par: Escribamos $n=2k$. Entonces hay k cuadrados concéntricos:



Como la longitud del lado es a, en un triángulo tenemos las siguientes longitudes:



Así, el tendedero mide:

$$4a\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\dots+\frac{k-1}{k}+\frac{k}{k}\right)=\frac{4a}{k}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)=2a(k+1)$$

El de segmentos paralelos mide $a\cdot n = 2ak$.

Por tanto, es más eficiente el de cuadrados.

Caso n impar: Escribiendo $n=2k+1$, también habrá k cuadros concéntricos $\left(\frac{n-1}{2}=\frac{2k}{2}=k\right)$, así que el tendedero de cuadrados mide $2a(k+1)$.

El de segmentos paralelos mide

$$a\cdot n = a(2k+1) = 2ak+a < 2ak+2a = 2a(k+1),$$

probando que el de cuadrados es más eficiente que el de segmentos paralelos.

Por tanto, es menor la suma de la longitud de los segmentos paralelos en A que la de los perímetros de los cuadrados del tendedero B.

Figura 4.43

resuelve cada uno de los casos que se indican de manera fluida. Se nota una planeación detallada, que incorpora con seguridad los argumentos, los resultados teóricos apropiados, auxiliándose también de ilustraciones ad hoc para apoyar sus razonamientos.

Para el ***Problema 2***, al igual que lo hicieron los otros estudiantes, ubica los dos casos posibles, pero rápidamente aclara que, para el segundo caso, el número de cuadrados concéntricos es el mismo, independientemente de que n sea par o impar.

Observamos que cometió la misma falta de control que el Estudiante 1 y el Estudiante 3, al considerar que el cuadrado de menor perímetro tiene lado igual al doble de la distancia entre los cuadrados.

Sus respuestas son elegantes y concisas.

Sistemas de creencias.

Los razonamientos matemáticos de este individuo son claros y precisos, propios de un matemático profesional. Integra el lenguaje materno con el lenguaje matemático apropiadamente y hasta se percibe cierta elegancia en su proceder.

La generalización es una habilidad matemática que los expertos consideran de alto nivel y en este caso se evidencia que no tiene mayores complicaciones para construir el caso general, lo cual nos lleva a suponer que su formación matemática es sólida y que posiblemente tenga experiencia como resolutor de problemas.

Conclusiones

Esta sección de la tesis está estructurada en tres apartados:

1. En el primero de ellos se hace una breve síntesis de la temática estudiada y de las referencias teóricas que lo guiaron.
2. En el segundo apartado exponemos lo que son nuestros principales resultados sobre las estrategias empleadas por los sujetos en estudio al resolver problemas matemáticos.
3. Finalizamos con un tercer apartado, en el cual se plantean algunas reflexiones sobre las experiencias vividas durante la realización de esta obra.

1. El tema y las referencias teóricas

El tema que hemos abordado en este trabajo es la resolución de problemas matemáticos, siendo nuestro propósito conocer y analizar estrategias que utilizan estudiantes para resolver problemas matemáticos no rutinarios, buscando además explorar qué otros aspectos influyen a la hora de realizar dicha tarea.

Para lograr el propósito de esta tesis diseñamos un estudio de carácter exploratorio, en donde los estudiantes participantes pertenecen fundamentalmente a dos comunidades: son alumnos de las licenciaturas de física ó matemáticas en una universidad pública. De inicio notamos que las formas de concebir e interactuar con la matemática no necesariamente coinciden, a pesar de lo que pudiera pensarse, lo cual creemos que enriqueció los resultados.

Como vimos en el Capítulo 2, la temática seleccionada no es nueva y se puede abordar desde distintas perspectivas, de las cuales mostramos dos:

a) La primera, centrada en la prescripción de estrategias generales de resolución de problemas matemáticos, donde los trabajos de George Polya y Lev M. Fridman son representativos. Del análisis del material de estos autores destacamos que su aportación consiste en la proposición de rutas estructuradas para resolver un problema de matemáticas; en este sentido pareciera que su interés está dirigido hacia lograr que los estudiantes aprendan a solucionar problemas matemáticos.

Particularmente interesante nos pareció la llamada "visión retrospectiva" que propuso Polya, pues en términos de la enseñanza de la matemática ofrece a los profesores una veta para la generación de nuevos problemas, aunque habría que reconocer que puede resultar difícil asumirla de manera sistemática.

b) La segunda, aquella que está interesada en conocer cómo es que se dan los procesos cognitivos cuando un individuo se enfrenta a la tarea de resolver un problema. Para conocer acerca de esta variante revisamos los trabajos de Alan H. Schoenfeld y de Luz Manuel Santos Trigo. De estas lecturas notamos que su preocupación está dirigida hacia la investigación de cómo es que sucede y qué elementos intervienen a la hora en que se resuelven problemas matemáticos.

   Precisamente porque esta variante fue la que nos pareció más interesante, se decidió realizar el análisis de la información de que se disponía empleando los conocimientos y comportamientos necesarios para una caracterización adecuada del rendimiento en la resolución de problemas matemáticos: recursos, heurísticas, control y sistemas de creencias, los cuales como ya se dijo, fueron establecidos por Schoenfeld.

2. Los resultados

A continuación presentaremos, tomando como base esos mismos elementos, una síntesis de lo que encontramos en los procesos de solución de los estudiantes participantes en el estudio.

a) ***Recursos.*** En este aspecto se considera que la gama de recursos que utilizaron los estudiantes son suficientes para los requerimientos de cada uno de los problemas; es decir, identificaron los datos proporcionados, mostraron la mayoría de ellos un manejo adecuado de procedimientos algorítmicos y no algorítmicos, además de contar con los conocimientos previos que la tarea requería. Sin embargo, en este punto pensamos que lo que impidió que a pesar de contar con lo ya mencionado no se pudiera llegar la solución esperada fue la falta de comprensión del problema en cuestión.

Conjeturamos que esto puede deberse la falta de familiaridad con el tipo de problema mostrado, dado que no son problemas característicos (en el sentido de Fridman), o en algunos casos a la propia redacción del problema.

b) ***Heurísticas.*** En este rubro la mayoría de los individuos empleó las estrategias esperadas, fuesen exitosas o no, acordes a una especie de identificación o clasificación preliminar a partir del nivel de comprensión que hubiesen alcanzado en el problema.

Solamente encontramos un caso de un estudiante de matemáticas, quien propuso una versión general del problema originalmente planteado (el Estudiante 4 cuando resuelve el problema de "*La herencia del minero*"), lo cual le obliga a usar una estrategia cualitativamente diferente a la mostrada cuando trabajó la versión original.

Encontramos que hay heurísticas poco usadas, como por ejemplo la que emplea el "razonamiento hacia atrás". En los problemas "*La herencia del minero*" y "*Hay que saber pedir*", las soluciones podrían encontrarse de manera más económica por este medio; a pesar de ello los alumnos prefirieron utilizar un camino directo, o "hacia adelante", agregando en algunos casos dificultades a su estrategia.

c) ***Control.*** También en este aspecto, encontramos que en la mayoría de los casos, las decisiones globales respecto a la selección y operación de recursos y estrategias están presentes, sobre todo en lo que tiene que ver con la planificación, supervisión y toma de decisiones.

Algunos estudiantes, por ejemplo el Estudiante 2, al resolver el problema cuyo enunciado es "*Demostrar que la ecuación* $x^3 - 3x + c = 0$ *no puede tener dos raíces distintas en* $(0, 1)$" muestra la presencia de auto supervisión y auto evaluación de cada uno de los pasos que va realizando, lo cual le permite decidir si va o no por un camino apropiado.

b) ***Los sistemas de creencias.*** Es el aspecto, al menos en esta experiencia, más difícil de indagar cuando lo que se tiene son solamente las hojas de trabajo de los estudiantes. Algunos investigadores señalan que este aspecto todavía no está resuelto en el área de la resolución de problemas de matemáticas. Estamos de acuerdo con que: "... este campo ha re-emergido como foco de investigación y necesita dedicársele más atención. Está poco conceptualizado y necesita simultáneamente nuevas metodologías y nuevos marcos explicativos" (Schoenfeld, 1992).

En nuestro caso, las experiencias vividas durante la realización de este trabajo nos llevan a coincidir en cuanto a que "...conscientes o no, las creencias modelan el comportamiento matemático. Las creencias son abstraídas de las experiencias personales y de la cultura a la que uno pertenece" (Schoenfeld, 1992).

Como se mencionó en los análisis correspondientes, los estudiantes de matemáticas, pertenecientes todos ellos a semestres avanzados, mostraron una actitud más rigurosa para enfrentar los problemas, utilizando en ocasiones recursos que en un momento dado podrían considerarse como excesivos. La rigurosidad con la que los alumnos de matemáticas abordan los problemas, así como la construcción de versiones generales son hechos que se viven en la comunidad matemática a la cual estos estudiantes pertenecen, es decir son prácticas que se impulsan en sus aulas. Estos aspectos los encontramos de manera aislada en los estudiantes de física.

En estos últimos nos damos cuenta, como se acaba de señalar, que se enfrentan con una actitud menos rigurosa, incorporan con mayor facilidad recursos de diferente naturaleza y tienen un discurso más libre en el momento en que argumentan.

De esta manera, concluimos que los sistemas de creencias van marcando el rumbo del proceso, pudiendo en un momento dado, convertirse en un obstáculo bloqueando inclusive la elaboración de una estrategia exitosa.

3. Algunas reflexiones derivadas del estudio

Al desarrollar cada capítulo de esta tesis, la idea que teníamos sobre las matemáticas y sobre la resolución de problemas se fue modificando. Para empezar, previo a este trabajo, se pensaba que un problema era lo mismo que un ejercicio. Se intentaba que los procedimientos usados a la hora de resolver problemas fuesen más rigurosos, pero definitivamente no lográbamos concebir una integración de conocimientos para resolver diferentes tipos de problemas.

Consideramos en pocas palabras que se contaba con una concepción parcial de lo que en realidad son las matemáticas y lo que quiere decir resolver problemas.

A lo largo de esta investigación y después de la revisión bibliográfica sobre el tema, el interés aumentaba respecto al tema elegido, y un aspecto en el que se centró nuestra atención fue el análisis de los resultados. El percibir diversas estrategias de solución a un mismo problema (en algunos casos), los obstáculos y aptitudes que presentan los estudiantes en el proceso de resolución, así como poder determinar cuáles son los factores que influyen en dicho proceso, entre otros, fue muy satisfactorio.

Definitivamente que un factor que fue determinante en poder abordar esta temática es la formación que recibí durante mi paso por la Licenciatura en Matemáticas. El nivel de profundidad con el que estudiamos las matemáticas nos pone en condiciones, en primera instancia, de seleccionar y resolver los problemas utilizados, y después para comprender y analizar las diferentes respuestas obtenidas.

En las escuelas se piensa con frecuencia que resolver problemas matemáticos significa enfrentarse a una gran cantidad de ejercicios similares a los que el profesor resuelve en el salón de clases, y que eso nos hace hábiles para abordar cualquier otra situación. No se niega el valor de la ejercitación, ya que los ejercicios afianzan las herramientas adquiridas para resolver problemas, pero esto no quiere decir que sepamos cómo y cuándo utilizarlas.

Se cierra este trabajo planteando una posible continuación y complementación de esta tesis, la cual consistiría en un estudio acerca de las estrategias que utilizan los profesores para resolver problemas matemáticos y observar la manera en que éstos impactan en su práctica docente.

Bibliografía

Arcavi, A., & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of israeli elementary school projects. *Springer*, (39), pp.355–364.

CECyTES (2009). Módulo de Aprendizaje de Álgebra. Consultado el 10 de Febrero de 2013 en: `http://www.cecytes.edu.mx/cecytesnet/uploads/wizard/documentos/us-FOVL830914/ModuloaprendizajeAlgebra.pdf`.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Departamento de Matemáticas (s.f.). Licenciatura en Matemáticas. Consultado el 10 de Junio de 2013 en: `http://lic.mat.uson.mx/nuevoplan.htm`.

Freudenthal, H. (1980). Problemas mayores de la educación matemáticas. Conferencia dada en la Sesión Plenaria del ICME4 en Berkeley 10 de agosto de 1980.

Fridman, L. (1996). *Metodología para la resolución de problemas de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (1991). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, OCDE.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris, OECD.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rich, B. (1991). *Geometría*. México: McGraw-Hill.

Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos Trigo, L. M. (2013). Departamento de Matemática Educativa. Quiénes Somos. Consultado el 27 de Octubre de 2013 en: `http://www.matedu.cinvestav.mx/msantos/presentacion.php`.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. *En D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning*, (pp. 334–370).

SEMS (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior en México: La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. México.

SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México.

SEP (s.f.). PISA. Secretaría de Educación Pública. Consultado el 29 de Septiembre de 2012 en: `http://www.pisa.sep.gob.mx`.

University of California, Berkeley (s.f.). Alan H. Schoenfeld. UC Berkeley. Graduate School of Education. Consultado el 09 de Junio de 2013 en: `http://gse.berkeley.edu/people/alan-h-schoenfeld`.

Vázquez, G. F., & Gutiérrez, M. A. D. (2013). *México en PISA 2012*. INEE.

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M., & Alvarez, E. (2008). La educación matemática. el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI Revista Iberoamericana de Educación*.