



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Algunos resultados de convergencia en análisis de Fourier

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Azul Valeria Coronado Ramírez

Directora de tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, 24 de junio de 2026

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Universidad de Sonora

M.C. Carlos Alberto Robles Corbala

Universidad de Sonora

Dr. Luis René San Martín Jiménez

Universidad de Sonora

M.C. Itzia Iztlacihuatl Justo Robledo

Universidad de Sonora

A mis padres ...

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco de todo corazón a mis padres por su apoyo incondicional, sus sacrificios y su paciencia a lo largo de todos estos años. Nada de esto sería posible sin ellos.

A Pablo, por haber estado a mi lado durante estos años, apoyarme, escucharme y recordarme mis capacidades cuando más lo necesitaba.

A mis profesores por compartir sus conocimientos y transmitir su pasión por las matemáticas, especialmente a la Dra. Marysol Navarro y a la Dra. Carolina Espinoza.

Asimismo, agradezco profundamente a mi directora de tesis, la Dra. Martha Guzmán, por su guía, su confianza y por su valioso tiempo invertido tanto en este trabajo como en mi formación.

Finalmente, agradezco a mis sinodales M.C. Carlos Alberto Robles Corbala, Dr. Luis René San Martín Jiménez y M.C. Itzia Iztlacihuatl Justo Robledo por su tiempo, dedicación y valiosas observaciones.

Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	III
Índice de símbolos	1
Introducción	3
1. Series de Fourier en el espacio de Hilbert $L^2(T)$	7
1.1. Series de Fourier en espacios de funciones	8
1.2. El sistema trigonométrico	11
1.3. Convergencia en $L^2(T)$	20
2. Coeficientes de Fourier y convolución en $L^1(T)$	23
2.1. Propiedades elementales de los coeficientes de Fourier	24
2.2. Convolución	29
3. Sumabilidad de series de Fourier	34
3.1. Núcleos de Sumabilidad	35
3.2. Núcleo de Dirichlet y núcleo de Fejér	47
3.2.1. Núcleo de Dirichlet	47
3.2.2. Núcleo de Fejér	50
3.3. Representación de funciones a través de sus coeficientes de Fourier	57
3.4. Espacios de Banach homogéneos	60
3.4.1. Ejemplos de espacios de Banach homogéneos	62
3.5. Otros núcleos de sumabilidad	68
3.5.1. El núcleo de la Vallée Poussin	68
3.5.2. El núcleo de Poisson	71
3.6. Convergencia puntual de $\sigma_N f$	75
4. Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier	82
4.1. Estimaciones generales	83
4.2. Estimaciones con condiciones de regularidad	91
5. Convergencia de Series de Fourier	95

5.1. Convergencia en norma	96
5.2. Convergencia puntual	107
Conclusiones	119

Índice de símbolos

B^*	Espacio dual de B .
$C(T)$	Espacio de funciones continua en T .
$C^n(T)$	Espacio de funciones n -veces continuamente diferenciables en T .
D	Disco unitario.
$D_N(t)$	Núcleo de Dirichlet.
$F_N(t)$	Núcleo de Fejér.
$f^{(j)}$	j -ésima derivada de la función f .
$f * g$	Convolución de funciones.
$f \circ g$	Composición de funciones.
$\widehat{f}(n)$	Coefficiente de Fourier de la función f .
$\overline{f}(t)$	Conjugado de la función f .
$\check{f}(t_0)$	Condición de Fejér en $t_0 \in T$.
$L^p(T)$	Espacio de funciones medibles y p -integrables en T .
L_n	Número de Fejér.
$\ell^2(\mathbb{Z})$	Espacio de sucesiones complejas cuadrado sumables.
$\mathcal{L}(B)$	Espacio de operadores lineales y continuos de B

$P_r(t)$	Núcleo de Poisson.
$S(f)$	Serie de Fourier de f .
$S_n(f)$	n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f .
$\sigma_N f$	Media aritmética de los primeros $N+1$ términos de la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de la función f .
T	Círculo unitario.
$V_n(t)$	Núcleo de la Vallée Poussin.
$(X, \ \cdot\ _X)$	Espacio normado.
$\chi_I(t)$	Función característica de I .
$\langle f, g \rangle$	Producto interior en $L^2(T)$.

Introducción

El origen de las series de Fourier se remonta a los trabajos de Joseph Fourier sobre la propagación del calor, presentados en 1807 ante el Institut de France, donde Fourier introduce la idea de expresar funciones mediante una serie trigonométrica y propone fórmulas para los coeficientes de estas series basándose en conceptos de integrales y ortogonalidad.

A pesar de lo revolucionarias que eran las ideas de Fourier, éstas carecían de rigor matemático, lo cual motivó al estudio de las condiciones necesarias para que la serie de Fourier de una función convergiese a la función original. En 1829 Peter Gustav Lejeune Dirichlet demostró que, si una función acotada es continua a trozos y monótona a trozos entonces su serie de Fourier converge en cada punto a la semisuma de los límites laterales de la función, criterio que fue extendido a funciones de variación acotada por Camille Jordan en 1881.

Por su parte, Bernhard Riemann desarrolló la definición de integral de Riemann y demostró dos resultados esenciales: el Lema de Riemann-Lebesgue, el cual establece que los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero, y el Principio de localización, mostrando que la convergencia de la serie de Fourier de una función en un punto depende únicamente del comportamiento local de la función.

Sin embargo, en 1873 Paul du Bois-Reymond presentó un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. Es posible demostrar que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto usando el Principio de acotamiento uniforme.

A principios del siglo XX, Lipót Fejér demostró que la sucesión de medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función continua converge uniformemente a la función, esto dio origen al concepto de sumabilidad de las series de Fourier.

Posteriormente, Lebesgue, después de presentar su teoría de la integración, extendió los resultados clásicos de series de Fourier a funciones integrables, obteniendo así los resultados para una clase más amplia de funciones. Además, presentó un ejemplo de función Lebesgue integrable, pero no Riemann integrable, cuya serie de Fourier es convergente, mostrando así la importancia de su teoría para el problema.

Con la aparición de la teoría de espacios de Hilbert, el espacio $L^2(T)$ adquirió relevancia, pues las series de Fourier se pueden interpretar como desarrollos respecto al sistema trigonométrico en $L^2(T)$. Además, se estableció una identificación entre funciones de $L^2(T)$ y la sucesión de sus coeficientes de Fourier, perteneciente al espacio ℓ^2 , obteniendo así la convergencia de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función en $L^2(T)$ a la función en la norma de $L^2(T)$. Después de las conclusiones obtenidas con $L^2(T)$ se buscó extenderlas a $L^p(T)$, para $1 \leq p \leq \infty$.

En el caso de $L^\infty(T)$ la convergencia en norma es la convergencia uniforme, y si tuviéramos un resultado positivo para la convergencia en $L^\infty(T)$, el límite tendría que ser una función continua, lo cual ya se sabía que no era suficiente. En 1918 Banach y Steinhaus

mostraron que no hay convergencia en $L^1(T)$. Más tarde, en 1923 M. Riesz demostró usando la función conjugada la convergencia en norma para $1 < p < \infty$. En cuanto a la convergencia puntual, en 1926 Kolmogorov presentó una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto, obteniendo que la convergencia puntual no necesariamente se cumple para $p = 1$. Carleson demostró en 1965 que para $p = 2$ hay convergencia casi en todas partes, y dos años después Hunt lo demostró para $p > 1$. Hasta antes del resultado de Carleson se desconocía la solución del problema de la convergencia puntual cuando f es continua, así que en particular, Carleson mostró la convergencia puntual casi en todas partes de la serie de Fourier de f a f cuando f es continua.

En el primer capítulo de esta tesis, estudiaremos las series de Fourier de funciones en $L^2(T)$. Utilizando el sistema trigonométrico de $L^2(T)$ y propiedades fundamentales de los espacios de Hilbert, demostraremos la convergencia en norma de las series de Fourier de funciones en $L^2(T)$.

Continuaremos, en el segundo capítulo, presentando algunas propiedades básicas de los coeficientes de Fourier tales como linealidad, acotamiento y su comportamiento en infinito, e introduciremos la operación de convolución para funciones en $L^1(T)$.

En el tercer capítulo trabajaremos con núcleos de sumabilidad y espacios de Banach homogéneos, con la finalidad de estudiar la convergencia de la sucesión de las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de funciones particulares. Además, seguiremos estudiando los coeficientes de Fourier de funciones en $L^1(T)$ y su relación con la función original.

En el cuarto capítulo comenzamos estudiando el orden de magnitud de los coeficientes

de Fourier de funciones en $L^1(T)$, y posteriormente continuamos estudiando el orden de magnitud de los coeficientes de Fourier de algunas funciones que cumplen ciertas condiciones de regularidad.

En el quinto capítulo presentamos resultados relativos a la convergencia en norma y a la convergencia uniforme en $L^1(T)$. Primero analizamos condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en norma en espacios de Banach homogéneos, para después ver particularmente los casos de $L^1(T)$ y $C(T)$. Después probamos que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto y concluimos presentando algunos criterios de convergencia puntual.

Finalmente, se presentan las conclusiones generales de la tesis.

Capítulo 1

Series de Fourier en el espacio de Hilbert $L^2(T)$

Las series de Fourier tienen un desarrollo muy satisfactorio en los de espacios de Hilbert, pues la estructura de $L^2(T)$ nos permite resolver el problema de la convergencia de estas series. Por ello, este primer capítulo tiene como objetivo presentar la convergencia de series de Fourier en el espacio $L^2(T)$ mediante el uso de la teoría de espacios de Hilbert.

En primera instancia presentaremos algunas definiciones fundamentales, después continuaremos con diversos resultados necesarios para poder aplicar la teoría de espacios de Hilbert al espacio $L^2(T)$ y así obtener una representación de sus elementos en series de Fourier.

1.1. Series de Fourier en espacios de funciones

En esta sección introduciremos algunos espacios de funciones con los que trabajaremos a lo largo de la tesis y definiremos conceptos elementales de las series de Fourier.

Sea $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dada una función $F : T \rightarrow \mathbb{C}$ podemos inducir una función 2π -periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de tal manera que

$$f(t) = F(e^{it}).$$

Recíprocamente, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que f es 2π -periódica, podemos inducir una función $F : T \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$F(e^{it}) = f(t).$$

Por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre funciones 2π -periódicas definidas en $\mathbb{R}$ y funciones definidas en T .

A continuación presentaremos las definiciones de los espacios con los que trabajaremos posteriormente.

Definición 1.1.1. Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos

$$L^p(T) = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right]^{1/p}.$$

También definimos $L^\infty(T)$ como la clase de los elementos de periodo 2π de $L^\infty(\mathbb{R})$ con la norma del supremo esencial

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf_{N \subset T} \sup\{|f(t)| : t \in T \setminus N, N \text{ tiene medida cero}\}.$$

Por último, definimos el espacio de funciones continuas sobre T , $C(T)$, con su norma usual

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|.$$

Se sabe que $(L^p(T), \|\cdot\|_p)$, con $1 \leq p < \infty$, $(L^\infty(T), \|\cdot\|_{L^\infty})$ y $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach. En este capítulo nuestro foco de atención será $L^2(T)$, el cual adicionalmente es un espacio de Hilbert, dotado del producto interior

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Antes, será necesario establecer formalmente qué es una serie de Fourier.

Definición 1.1.2. Sea $f \in L^1(T)$. Definimos los coeficientes de Fourier de f como

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y la serie de Fourier de la función f como la expresión formal

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Las sumas parciales de la serie de Fourier de f las denotamos como

$$S_N f(t) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{ikt}.$$

Notemos que si $f \in L^2(T)$, para $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \langle f, u_n \rangle$$

donde $u_n(t) = e^{int}$.

Definición 1.1.3. Llamamos *polinomio trigonométrico* a una función de la forma

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}$.

Por las relaciones de Euler tenemos que $e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$, por lo cual es posible escribir a todo polinomio trigonométrico de la forma

$$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt},$$

donde $c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$. Además, dado que las funciones seno y coseno son 2π periódicas entonces todo polinomio trigonométrico es 2π -periódico.

1.2. El sistema trigonométrico

Presentaremos a continuación una familia de suma importancia en este capítulo, a saber, el sistema trigonométrico de $L^2(T)$, y probaremos que es un sistema ortonormal completo para $L^2(T)$.

Definición 1.2.1. *El sistema trigonométrico es la familia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde*

$$u_n(t) = e^{int}.$$

Observemos que la familia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión ortonormal en $L^2(T)$, pues para $n, m \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle u_n, u_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(t) \overline{u_m(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Más aún, mostraremos que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $L^2(T)$. Para ello bastará probar que el sistema trigonométrico es denso en $L^2(T)$, esto es, que los polinomios trigonométricos son densos en $L^2(T)$ respecto a la norma $\|\cdot\|_2$. Dado que $L^2(T)$ es un espacio de Hilbert, para probar que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal utilizaremos la teoría de espacios de Hilbert. Concretamente, usaremos el hecho de que si H es un espacio de Hilbert y $\{e_i\}_{i \in I}$ es una familia ortonormal completa de H , entonces $x \in H$ puede

representarse como

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Esto nos permitirá asegurar la convergencia de la serie de Fourier en $L^2(T)$.

Puesto que $C(T)$ es denso en $(L^2(T), \|\cdot\|_2)$, será suficiente demostrar que los polinomios trigonométricos son densos en $C(T)$ con respecto a $\|\cdot\|_2$.

Dado que para toda $g \in C(T)$ tenemos

$$\|g\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt \right]^{1/2} \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|g\|_\infty^2 dt \right]^{1/2} = \|g\|_\infty,$$

nuestro problema se reduce a mostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2. *Sea $f \in C(T)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un polinomio trigonométrico P tal que*

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Equivalentemente, existe una sucesión $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ de polinomios trigonométricos tales que $P_n \rightarrow f$ uniformemente.

Demostración. Si pudiéramos mostrar la existencia de una sucesión $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ de polinomios trigonométricos que verifica las siguientes propiedades:

1. $Q_k(t) \geq 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y para toda $k \in \mathbb{N}$.
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$.
3. Para cada $\delta > 0$ sea $\eta_k(\delta) = \sup_{\delta \leq t \leq \pi} Q_k(t)$. Entonces $\eta_k(\delta) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Es decir, $Q_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ uniformemente en el conjunto $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ para $\delta > 0$.

Entonces nuestro problema se resolvería de la siguiente manera:

Para $k \in \mathbb{N}$ y $f \in C(T)$ definimos

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds,$$

haciendo el cambio de variable $u = t - s$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds &= -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(u)Q_k(t-u)du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)Q_k(t-u)du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)Q_k(t-u)du, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)Q_k(t-u)du. \quad (1.1)$$

Además, como $Q_k(t)$ es un polinomio trigonométrico entonces es de la forma

$$Q_k(t) = \sum_{j=-N_k}^{N_k} c_j^{(k)} e^{ijt},$$

y así, sustituyendo en (1.1) obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 P_k(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\sum_{j=-N_k}^{N_k} c_j^{(k)} e^{ij(t-u)} \right] du \\
 &= \sum_{j=-N_k}^{N_k} c_j^{(k)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-ij u} du \right] e^{ijt} \\
 &= \sum_{j=-N_k}^{N_k} c_j^{(k)} \langle f, e^{ijs} \rangle e^{ijt},
 \end{aligned}$$

esto es, P_k es un polinomio trigonométrico.

Ahora, aproximaremos a f mediante la sucesión $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$. Como $f \in C(T)$ entonces es uniformemente continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$, luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ si $|u - v| < \delta$.

Sea $t \in [-\pi, \pi]$, por las propiedades de la sucesión $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 P_k(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds - f(t) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) Q_k(s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t)] Q_k(s) ds,
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 |P_k(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t)] Q_k(s) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds.
 \end{aligned}$$

Subdividiendo el dominio de integración de la última integral obtenemos

$$\begin{aligned} |P_k(t) - f(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| < \pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

A continuación estimaremos las integrales I_1 e I_2 . Vemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} \varepsilon Q_k(s) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s) ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Con respecto a la integral I_2 tenemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| < \pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| < \pi} 2\|f\|_{\infty} Q_k(s) ds \\ &\leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| < \pi} \eta_k(\delta) ds \\ &\leq 2\|f\|_{\infty} \eta_k(\delta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds \\ &= 2\|f\|_{\infty} \eta_k(\delta) < \varepsilon, \end{aligned}$$

siempre que k sea suficientemente grande, pues $\eta_k(\delta) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

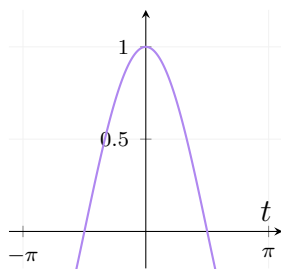
Se sigue de lo anterior que para k suficientemente grande se cumple que $\|P_k - f\|_\infty < \varepsilon$.

Ahora procederemos a construir la sucesión de polinomios trigonométricos $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ con las propiedades antes establecidas. Proponemos la siguiente sucesión de polinomios trigonométricos

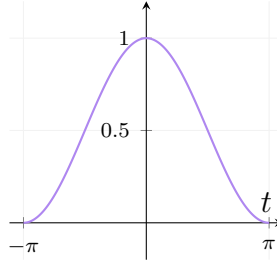
$$Q_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \quad \text{para } k \in \mathbb{N},$$

donde c_k es una constante tal que $c_k = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \right]^{-1}$.

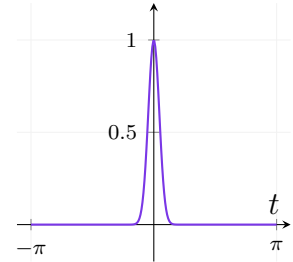
De las siguientes gráficas, vemos que $\frac{1 + \cos t}{2}$ toma valores en el intervalo $[0, 1]$ y por tanto $\left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k$ se vuelve más pequeño al incrementar el valor de k .



— $\cos t$



— $\frac{1 + \cos t}{2}$



— $\left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^{100}$

Afirmamos que las funciones $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ son polinomios trigonométricos. En efecto, verifiquemos los dos primeros casos.

Si $k = 1$ entonces

$$Q_1(t) = c_1 \frac{1 + \cos t}{2},$$

el cual evidentemente es un polinomio trigonométrico.

Si $k = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 Q_2(t) &= c_2 \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{c_2}{4} + \frac{c_2}{2} \cos t + \frac{c_2}{4} \cos^2 t \\
 &= \frac{c_2}{4} + \frac{c_2}{2} \cos t + \frac{c_2}{8} + \frac{c_2}{8} \cos 2t \\
 &= \frac{3c_2}{8} + \frac{c_2}{2} \cos t + \frac{c_2}{8} \cos 2t,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

esto es, $Q_2(t)$ es un polinomio trigonométrico.

Establezcamos nuestra hipótesis de inducción: Supongamos que $Q_k(t)$ es un polinomio trigonométrico con $k = n$.

Examinemos el caso $k = n + 1$,

$$\begin{aligned}
 Q_{n+1}(t) &= c_{n+1} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^{n+1} \\
 &= c_{n+1} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right) \\
 &= c_{n+1} \frac{Q_n(t)}{c_n} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)
 \end{aligned}$$

y por nuestra hipótesis de inducción sabemos que $Q_n(t)$ es un polinomio trigonométrico.

Más aún, como $\frac{Q_n(t)}{c_n}$ es par, debe ser de la forma

$$\frac{Q_n(t)}{c_n} = \sum_{j=0}^n b_j \cos(jt).$$

Reemplazando lo anterior en (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(t) &= c_{n+1} \left(b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \cos(jt) \right) \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right) \\ &= \frac{c_{n+1}}{2} \sum_{j=0}^n b_j \cos(jt) + \frac{c_{n+1}}{2} \sum_{j=0}^n b_j \cos(jt) \cos t. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si mostramos que la segunda suma de (1.3) es un polinomio trigonométrico quedará demostrado que Q_{n+1} es un polinomio trigonométrico. Puesto que $\cos(jt) \cos(t) = \frac{1}{2} [\cos((j+1)t) + \cos((j-1)t)]$ entonces

$$\frac{c_{n+1}}{2} \sum_{j=0}^n b_j \cos(jt) \cos t = \frac{c_{n+1}}{2} \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{2} [\cos((j+1)t) + \cos((j-1)t)]$$

es un polinomio trigonométrico.

Ahora verifiquemos las propiedades deseadas para la sucesión $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$. El inciso 1 se cumple por definición y dado que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt = 1,$$

para toda $k \in \mathbb{N}$ se cumple el inciso 2.

Para el inciso 3 estimaremos c_k . Por el inciso 2 y la paridad de Q_k tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \\ &= \frac{2c_k}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \\ &= \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \end{aligned}$$

y como $\sin t \in [0, 1]$ para $t \in [0, \pi]$ obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_k}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \\ &\geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t dt \\ &= \frac{c_k}{2^k \pi} \int_0^\pi (1 + \cos t)^k \sin t dt. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $u = 1 + \cos t$, $du = -\sin t dt$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{c_k}{2^k \pi} \int_0^\pi (1 + \cos t)^k \sin t dt &= \frac{c_k}{2^k \pi} \int_{u(0)}^{u(\pi)} u^k du \\ &= - \left. \frac{c_k}{2^k \pi} \frac{(1 + \cos t)^{k+1}}{k+1} \right|_0^\pi \\ &= - \left. \frac{c_k (1 + \cos t)^{k+1}}{2^k (k+1) \pi} \right|_0^\pi \\ &= \frac{c_k 2^{k+1}}{2^k (k+1) \pi} \\ &= \frac{2c_k}{(k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Esto es, $0 \leq c_k \leq \frac{(k+1)\pi}{2}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, para $\delta \leq |t| \leq \pi$ por la paridad y simetría de Q_k tendremos que para toda $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Q_k(t) &\leq c_k \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^k \\ &\leq \frac{(k+1)\pi}{2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^k, \end{aligned}$$

donde $0 < \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$ y por tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)\pi}{2} \left(\frac{1+\cos\delta}{2} \right)^k = 0.$$

Así para toda t tal que $\delta \leq |t| \leq \pi$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k(t) = 0$$

uniformemente en t .

■

Un resultado que se presentará más adelante es una versión más precisa del Teorema 1.2.2. Dicho resultado fue probado en 1904 por el matemático Leopold Fejér, en éste establece que las medias aritméticas de las series de Fourier de cualquier función $f \in C(T)$ convergen uniformemente a f .

1.3. Convergencia en $L^2(T)$

Como se mencionó antes, $L^2(T)$ es un espacio de Hilbert y $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2(T)$, entonces sabemos que existe un isomorfismo isométrico

$$\begin{aligned} L^2(T) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto \{\langle f, u_k \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

es decir, $f \mapsto \{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, y como el isomorfismo es isométrico entonces

$$\|f\|_2 = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \right]^{1/2}.$$

La identidad de Parseval establece que dadas $f, g \in L^2(T)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} dt. \quad (1.5)$$

Otra forma en la que suele presentarse la identidad de Parseval es tomando $f = g$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dt.$$

Las afirmaciones de (1.4) y (1.5) pueden resumirse como sigue: la aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es un isomorfismo de $L^2(T)$ en $\ell^2(T)$, que adicionalmente cumple con ser una isometría.

Para finalizar, dada $f \in L^2(T)$ y $S_N(f)$ como antes tenemos que

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, u_n \rangle u_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e^{in\cdot} \rangle e^{in\cdot} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\cdot} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\cdot} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f), \end{aligned}$$

donde el límite se toma con respecto a $\|\cdot\|_2$, es decir, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$. Con esto tenemos que para toda $f \in L^2(T)$ su serie de Fourier converge en $L^2(T)$ y su límite es f .

Capítulo 2

Coeficientes de Fourier y convolución en $L^1(T)$

En el capítulo anterior demostramos que en $L^2(T)$ la serie de Fourier de toda función converge a la propia función, pero para llegar a ese resultado se usa fuertemente que $L^2(T)$ es un espacio de Hilbert. Naturalmente surge la siguiente incógnita, ¿es posible que la serie de Fourier de una función represente a dicha función en algún otro sentido? La respuesta resulta ser positiva, pero el camino para llegar a este resultado no es tan sencillo como en el caso abordado anteriormente.

En este capítulo se presentarán resultados básicos de los coeficientes de Fourier de funciones en $L^1(T)$, tales como linealidad, acotamiento y su comportamiento en infinito. Asimismo, se introducirá la operación de convolución y algunas de sus propiedades. Estos conceptos nos permitirán desarrollar los capítulos posteriores.

2.1. Propiedades elementales de los coeficientes de Fourier

Iniciamos presentando la definición de serie trigonométrica, la cual está estrechamente relacionada con las series de Fourier.

Definición 2.1.1. *Una serie trigonométrica S en T es una expresión formal*

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Recordemos la definición de serie de Fourier presentada en el capítulo anterior: Si $f \in L^1(T)$, entonces la expresión formal

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int},$$

donde $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, se denomina serie de Fourier de la función f . Diremos que una serie trigonométrica S es una serie de Fourier si existe una función $f \in L^1(T)$ tal que S es la serie de Fourier de f .

En el siguiente teorema presentamos algunas propiedades de los coeficientes de Fourier que nos serán útiles más adelante.

Teorema 2.1.2. *Sean $f, g \in L^1(T)$. Entonces*

1. $\widehat{(f+g)}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$, para $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha \hat{f}(n)$, para toda $\alpha \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

3. Si definimos $\bar{f}(t) = \overline{f(t)}$ entonces $\widehat{\bar{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$, para $n \in \mathbb{Z}$.
4. Si para $\tau \in T$ definimos $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ entonces $\widehat{f_\tau}(n) = e^{in\tau} \widehat{f}(n)$, para $n \in \mathbb{Z}$.
5. $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

1. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \widehat{(f+g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f+g)(t) e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \\
 &= \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n).
 \end{aligned}$$

2. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \widehat{\alpha f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha f(t) e^{-int} dt \\
 &= \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\
 &= \alpha \widehat{f}(n).
 \end{aligned}$$

3. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces por definición

$$\begin{aligned}
 \widehat{\bar{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} e^{-int} dt
 \end{aligned}$$

y dado que $\overline{e^{-int}} = e^{int}$ podemos reescribir la integral como

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)e^{int}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt = \widehat{f}(-n).\end{aligned}$$

4. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $\tau \in T$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\tau}(t)e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)e^{-int} dt\end{aligned}$$

y usando el teorema de cambio de variable para integrales de Lebesgue con la transformación $\phi(t) = t - \tau$ obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(s)e^{-in(s+\tau)} ds \\ &= e^{in\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins} ds \\ &= e^{in\tau} \widehat{f}(n).\end{aligned}$$

5. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \|f\|_1.\end{aligned}$$

■

Del Teorema 2.1.2 obtenemos inmediatamente un resultado para sucesiones convergentes en $L^1(T)$. Lo enunciamos a continuación.

Corolario 2.1.3. *Sea $(f_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión en $L^1(T)$. Supongamos que existe $f \in L^1(T)$ tal que $f_j \rightarrow f$ cuando $j \rightarrow \infty$ en $L^1(T)$. Entonces $\widehat{f_j}(n) \rightarrow \widehat{f}(n)$ uniformemente en $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Por el inciso 5 del Teorema 2.1.2 tenemos que $|\widehat{f_j}(n) - \widehat{f}(n)| \leq \|f_j - f\|_1 \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. ■

Teorema 2.1.4. *Sea $f \in L^1(T)$ y supongamos que $\widehat{f}(0) = 0$. Definimos*

$$F(t) = \int_{-\pi}^t f(\tau) d\tau.$$

Entonces, F es una función continua, 2π -periódica y para $n \neq 0$ $\widehat{F}(n) = \frac{1}{in} \widehat{f}(n)$.

Demostración. Primero veamos que F es una función continua por la derecha. Sean $t \in [-\pi, \pi]$ y $(t_n)_{n=1}^\infty \subset [-\pi, \pi]$ una sucesión tal que $t_n \uparrow t$, entonces

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t_n)| &\leq \int_{t_n}^t |f(\tau)| d\tau \\ &= \int_{-\pi}^\pi |f(\tau)| \chi_{[t_n, t]}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Notemos que $|f| \chi_{[t_n, t]} \leq |f|$ donde $|f| \in L^1(T)$, así por el Teorema de Convergencia Dominada tenemos que

$$\int_{-\pi}^\pi |f(\tau)| \chi_{[t_n, t]}(\tau) d\tau \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, de donde se sigue el resultado. Empleando un argumento análogo al anterior obtenemos la continuidad por la izquierda.

Ahora mostraremos que F es una función 2π -periódica,

$$\begin{aligned}
 F(t+2\pi) - F(t) &= \int_{-\pi}^{t+2\pi} f(\tau) d\tau - \int_{-\pi}^t f(\tau) d\tau \\
 &= \int_t^{t+2\pi} f(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{i0t} d\tau = 2\pi \hat{f}(0) = 0,
 \end{aligned}$$

por lo cual $F(t+2\pi) = F(t)$.

Para finalizar, sea $n \in \mathbb{Z}$. Dado que F es absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$ y por tanto diferenciable ahí podemos integrar por partes. Así

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{in} F(t) e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{in} \right) \int_{-\pi}^{\pi} F'(t) e^{-int} dt
 \end{aligned}$$

y como $F(t)$ es la integral indefinida de una función en $f \in L^1(T)$ entonces es diferenciable y $F'(t) = f(t)$ para casi toda t , luego

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(n) &= \frac{1}{in} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right] \\
 &= \frac{1}{in} \hat{f}(n).
 \end{aligned}$$

■

2.2. Convolución

Iniciamos esta sección presentando un teorema que nos permitirá definir la operación de convolución en $L^1(T)$. Además veremos algunas propiedades de la convolución entre dos funciones.

Teorema 2.2.1. *Sean $f, g \in L^1(T)$, entonces para casi toda $t \in T$ la función $F(t, \tau) = f_\tau(t)g(t)$ es integrable respecto a τ y si definimos*

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau)g(\tau) d\tau,$$

tenemos que $h \in L^1(T)$, $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ y $\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Las funciones $f(t - \tau)$ y $g(\tau)$, las cuales dependen de las variables (t, τ) , son medibles y por tanto $F(t, \tau) = f(t - \tau)g(\tau)$ también es medible.

De hecho, al ser $F(t, \tau)$ un múltiplo constante de $f_\tau(t)$ cuando la consideramos como función que depende de la variable t , tenemos que $F(t, \tau)$ es integrable respecto a la variable t para casi toda $\tau \in T$ y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t, \tau)| dt \right) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\tau)| \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t - \tau)| dt \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\tau)| \|f\|_1 d\tau \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Así, por el Teorema de Tonelli, la función $f(t - \tau)g(\tau)$ es integrable sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ respecto a la variable τ para casi toda $t \in T$. Además,

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t, \tau) d\tau \right| dt \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t, \tau)| dt d\tau \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Ahora calculemos el coeficiente de Fourier de h para $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau) g(\tau) e^{-int} d\tau dt, \end{aligned}$$

por el Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau) g(\tau) e^{-int} dt d\tau \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau) e^{-in(t-\tau)} dt \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-in\tau} d\tau \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-in\tau} d\tau \right) \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n). \end{aligned}$$

■

Por el Teorema 2.2.1 la operación que introducimos a continuación está bien definida en $L^1(T)$.

Definición 2.2.2. Sean $f, g \in L^1(T)$. Definimos la operación de convolución como

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

De hecho, la convolución es una operación conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la adición, como establecemos a continuación.

Teorema 2.2.3. La operación de convolución en $L^1(T)$ es conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la adición.

Demostración. Sean $f, g, h \in L^1(T)$, entonces

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

y usando el cambio de variable $v = t - \tau$ y la 2π -periodicidad de f y g obtenemos

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(v)g(t - v)dv \\ &= (g * f)(t). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(t - \tau)h(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau - \eta)g(\eta)h(\tau)d\eta d\tau \end{aligned}$$

y usando el cambio de variable $w = \tau + \eta$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 [(f * g) * h](t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-w)g(w-\tau)h(\tau)dw d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-w) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(w-\tau)h(\tau)dw \right] d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-w) [(g * h)(w)] d\tau \\
 &= [f * (g * h)](t).
 \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
 [f * (g + h)](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) (g + h)(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)g(\tau) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)h(\tau) d\tau \\
 &= (f * g)(t) + (f * h)(t).
 \end{aligned}$$

■

Usando el siguiente lema probaremos que la convolución de una función en $L^1(T)$ y un polinomio trigonométrico es un polinomio trigonométrico.

Lema 2.2.4. *Sea $f \in L^1(T)$ y $\phi(t) = e^{int}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Entonces,*

$$(\phi * f)(t) = \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (\phi * f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t - \tau) f(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\
 &= e^{int} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau \\
 &= \widehat{f}(n) e^{int}.
 \end{aligned}$$

■

Corolario 2.2.5. Si $f \in L^1(T)$ y $k(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$ entonces

$$(k * f)(t) = \sum_{n=-N}^N a_n \widehat{f}(n) e^{int}$$

Demostración. Si definimos la función $\phi_n(t) = e^{int}$ para $n \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$, por el Lema 2.2.4 tenemos que

$$\begin{aligned}
 (k * f)(t) &= \sum_{n=-N}^N a_n (\phi_n * f)(t) \\
 &= \sum_{n=-N}^N a_n \widehat{f}(n) e^{int}.
 \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Sumabilidad de series de Fourier

Hasta ahora hemos presentado las series de Fourier como expresiones formales, con excepción del caso de la serie de Fourier de una función en $L^2(T)$. Por tanto, es natural que nos preguntemos por la utilidad del estudio de series de Fourier y su relación con la función que usamos para construirla.

En el presente capítulo introduciremos los conceptos de núcleo de sumabilidad y espacio de Banach homogéneo, que nos permitirán aproximar ciertas funciones mediante un proceso de sumabilidad relacionado con sus series de Fourier. Asimismo, examinaremos la relación entre una función en $L^1(T)$ y sus coeficientes de Fourier para establecer resultados de unicidad.

3.1. Núcleos de Sumabilidad

En el desarrollo del capítulo serán necesarias algunas propiedades de funciones en $L^1(T)$ relacionadas con la traslación.

Proposición 3.1.1.

1. *Propiedad de invarianza bajo traslación en $L^1(T)$: Si $f \in L^1(T)$ y $\tau \in T$ entonces*

$$f_\tau \in L^1(T) \text{ y } \|f_\tau\|_1 = \|f\|_1.$$

2. *Si $f \in L^1(T)$ es una función fija y definimos la función $\Lambda_f : T \rightarrow L^1(T)$ como*

$$\Lambda_f(\tau) = f_\tau, \text{ entonces } \Lambda_f \text{ es continua en } T.$$

Demostración.

1. Usando el teorema de cambio de variable para integrales de Lebesgue tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_\tau(t)| d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t - \tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| d\tau \\ &= \|f\|_1, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $f_\tau \in L^1(T)$ y $\|f_\tau\|_1 = \|f\|_1$.

2. Primero veremos el caso en el que $f = \phi$ es una función continua en T . Así, como

ϕ es uniformemente continua en T , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\tau - \tau_0| < \delta$

entonces $|\phi(t - \tau) - \phi(t - \tau_0)| < \varepsilon$ para toda $t \in T$.

Usando lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\|\phi_\tau - \phi_{\tau_0}\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t - \tau) - \phi(t - \tau_0)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon dt = \varepsilon,\end{aligned}$$

es decir, $\|\phi_\tau - \phi_{\tau_0}\|_1 \rightarrow 0$ si $\tau \rightarrow \tau_0$.

Ahora, sea $f \in L^1(T)$. Como $C(T)$ es denso en $L^1(T)$ entonces para $\varepsilon > 0$ existe $g \in C(T)$ tal que $\|g - f\|_1 < \varepsilon/2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_1 \\ &= \|(f - g)_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|(g - f)_{\tau_0}\|_1 \\ &= \|f - g\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &< \varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\limsup_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 \leq \varepsilon$ y dado que la elección de ε fue arbitraria

$$\begin{aligned}\limsup_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 &= \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|\Lambda(\tau) - \Lambda(\tau_0)\|_1 = 0.\end{aligned}$$

■

Pasamos ahora a definir los núcleos de sumabilidad, la herramienta principal de esta sección.

Definición 3.1.2. Llamamos núcleo de sumabilidad a una sucesión $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas y 2π -periódicas, que satisfacen

1. $\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) dt = 1$.
2. Existe una constante $C > 0$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)| dt \leq C$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
3. Para toda $0 < \delta \leq \pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} k_n(t) dt = 0$.

En ocasiones consideraremos familias, $\{k_r\}_{r \in I}$ donde el índice r varía en un intervalo I . Éste será el caso del núcleo de Poisson $P_r(t)$ que veremos más adelante.

Con el propósito de establecer los siguientes resultados, definiremos la integral de Riemann vectorial para funciones $F : [a, b] \rightarrow B$, donde B es un espacio de Banach, y veremos algunas de sus propiedades.

Definición 3.1.3. Sea $(B, \|\cdot\|_B)$ un espacio de Banach y $F : [a, b] \rightarrow B$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Se define la integral de Riemann de F en $[a, b]$ como el siguiente límite

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j) F(x_j),$$

donde $P = \{a = x_1, x_2, \dots, x_{N+1} = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y el límite se toma respecto a la norma $\|\cdot\|_B$ cuando la partición se hace cada vez más fina, es decir, $N \rightarrow \infty$ de manera que $\max_{1 \leq j \leq N} (x_{j+1} - x_j) \rightarrow 0$.

Observación 3.1.4. Notemos que la integral introducida en la Definición 3.1.3 existe. Para ello mostraremos que las sumas de Riemann de una función continua F son de Cauchy en B .

Sea $\varepsilon > 0$, como F es uniformemente continua en el intervalo $[a, b]$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\|F(x) - F(y)\|_B < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ si $|x - y| < \delta$.

Consideremos dos particiones $\{x_j\}_{j=1}^{N+1}$ y $\{y_k\}_{k=1}^{M+1}$ del intervalo $[a, b]$ tales que

$$\max_{1 \leq j \leq N} (x_{j+1} - x_j) < \delta \text{ y } \max_{1 \leq k \leq M} (y_{k+1} - y_k) < \delta.$$

Tomando el refinamiento común $\{z_l\} = \{x_j\} \cup \{y_k\}$ y usando la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) F(x_j) - \sum_{k=1}^M (y_{k+1} - y_k) F(y_k) \right\|_B \\ & \leq \left\| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) F(x_j) - \sum_l (z_{l+1} - z_l) F(z_l) \right\|_B \\ & \quad + \left\| \sum_l (z_{l+1} - z_l) F(z_l) - \sum_{k=1}^M (y_{k+1} - y_k) F(y_k) \right\|_B. \end{aligned}$$

Ahora, si renombramos a los x_j repetidos como ξ_l y los y_k repetidos como η_l , podemos reescribir ambas sumas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) F(x_j) - \sum_{k=1}^M (y_{k+1} - y_k) F(y_k) \right\|_B \\ & \leq \left\| \sum_l (z_{l+1} - z_l) (F(\xi_l) - F(z_l)) \right\|_B + \left\| \sum_l (z_{l+1} - z_l) (F(z_l) - F(\eta_l)) \right\|_B \\ & \leq \sum_l (z_{l+1} - z_l) \|F(\xi_l) - F(z_l)\|_B + \sum_l (z_{l+1} - z_l) \|F(z_l) - F(\eta_l)\|_B \\ & < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \\ & = \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.5. *La integral de la Definición 3.1.3 cumple las siguientes propiedades:*

1. Si $F, G \in [a, b] \rightarrow B$ son continuas y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ entonces

$$\int_a^b (c_1 F(x) + c_2 G(x)) dx = c_1 \int_a^b F(x) dx + c_2 \int_a^b G(x) dx.$$

2. Si $a < c < b$ entonces

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx.$$

3. $\|\int_a^b F(x) dx\|_B \leq \int_a^b \|F(x)\|_B dx.$

4. Si $\Lambda \in L(B, \mathbb{C}) = B^*$ entonces

$$\Lambda \left(\int_a^b F(x) dx \right) = \int_a^b \Lambda \circ F(x) dx.$$

Demostración.

1. Si $P = \{x_j\}_{j=1}^{N+1}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ entonces

$$\sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) (c_1 F(x_j) + c_2 G(x_j)) = c_1 \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) F(x_j) + c_2 \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) G(x_j)$$

y tomando límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$ entonces

$$\int_a^b (c_1 F(x) + c_2 G(x)) dx = c_1 \int_a^b F(x) dx + c_2 \int_a^b G(x) dx.$$

2. Sean $\{x_j\}_{j=1}^{N+1}$ una partición del intervalo $[a, c]$ y $\{y_k\}_{k=1}^{M+1}$ una partición del intervalo $[c, b]$, entonces consideremos $\{z_l\} = \{x_j\} \cup \{y_k\}$ la cual es una partición del intervalo $[a, b]$. Así,

$$\sum_l (z_{l+1} - z_l) (F(z_l)) = \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) (F(x_j)) + \sum_{k=1}^M (y_{k+1} - y_k) (F(y_k))$$

y tomando límite cuando $N \rightarrow \infty$ y $M \rightarrow \infty$ tal que $\max_{1 \leq j \leq N} (x_{j+1} - x_j) \rightarrow 0$ y $\max_{1 \leq k \leq M} (y_{k+1} - y_k) \rightarrow 0$ entonces

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx.$$

3. Para $\varepsilon > 0$ arbitraria, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $P = \{x_j\}_{j=1}^{N+1}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) (F(x_j)) - \int_a^b F(x) dx \right\|_B < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.1)$$

y

$$\left| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) \|F(x_j)\|_B - \int_a^b \|F(x)\|_B dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2)$$

Por (3.1) tenemos que

$$\left\| \int_a^b F(x) dx \right\|_B - \left\| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) (F(x_j)) \right\|_B < \frac{\varepsilon}{2},$$

y considerando también (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_a^b F(x) dx \right\|_B &< \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) (F(x_j)) \right\|_B \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) \|F(x_j)\|_B \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \|F(x)\|_B dx \\
 &= \varepsilon + \int_a^b \|F(x)\|_B dx,
 \end{aligned}$$

lo cual es válido para todo $\varepsilon > 0$, obteniendo así la desigualdad requerida.

4. Como $\Lambda \in B^*$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\Lambda(u) - \Lambda(v)| < \varepsilon$ si $\|u - v\| < \delta$. Ahora, existe $\beta > 0$ tal que si $P = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1} = b\}$ es tal que $\|P\| < \beta$ entonces

$$\left\| \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j) (F(x_j)) - \int_a^b F(x) dx \right\|_B < \delta,$$

y por la continuidad uniforme de Λ tenemos que

$$\left| \Lambda \left(\sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) (F(x_j)) \right) - \Lambda \left(\int_a^b F(x) dx \right) \right| < \varepsilon,$$

es decir,

$$\left| \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j) (\Lambda \circ F)(x_j) - \Lambda \left(\int_a^b F(x) dx \right) \right| < \varepsilon,$$

si $\|P\| < \beta$, para alguna $\beta > 0$.

■

Una vez establecida la noción de integrales de Riemann para funciones que toman valores en un espacios de Banach y presentadas sus propiedades, podemos estudiar resultados que involucran núcleos de sumabilidad.

Lema 3.1.6. *Sea B un espacio de Banach, $\varphi : T \rightarrow B$ una función continua y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ un núcleo de sumabilidad. Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(0)$$

Demostración. Por la definición de $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tenemos que para cualquier $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau - \varphi(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau. \end{aligned}$$

Ahora, como φ es continua en el 0, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| < \varepsilon$ si $|\tau| < \delta$. Además, dado que $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad entonces existe una constante C tal que $\|k_n\|_1 \leq C$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \right\|_B &\leq \max_{|\tau| \leq \delta} \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \|k_n\|_1 \\ &< C\varepsilon. \end{aligned}$$

De igual manera, como $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad entonces

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \right\|_B \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \right\|_B \\ &\leq \max_{|\tau| \leq \pi} \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} k_n(\tau) d\tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo anterior tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(0).$$

■

Corolario 3.1.7. Sea $f \in L^1(T)$ y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ un núcleo de sumabilidad. Entonces

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) f_{\tau} d\tau$$

en $L^1(T)$.

Demostración. Por la Proposición 3.1.1 sabemos que la función $\Lambda_f : T \rightarrow L^1(T)$ dada por $\Lambda_f(\tau) = f_{\tau}$ es continua y por el Lema 3.1.6 tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) \Lambda_f(\tau) d\tau = \Lambda_f(0) = f.$$

■

La integral del Corolario 3.1.7 puede evocarnos a la operación de convolución antes vista, aunque en este caso la integral empleada es una integral vectorial, lo cual difiere de la definición de convolución. Como veremos en el siguiente lema, esto resulta ser solo en apariencia.

Lema 3.1.8. *Sea k una función continua definida en T y sea $f \in L^1(T)$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau = k * f.$$

Demostración. Primero supongamos que f es una función continua en T . Tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (\tau_{j+1} - \tau_{j-1}) k(\tau_j) f_{\tau_j},$$

donde el límite se toma respecto a la norma de $L^1(T)$ cuando la subdivisión se hace cada vez más fina, esto es, $N \rightarrow \infty$ y $\max(\tau_{j+1} - \tau_j) \rightarrow 0$.

Además, como k y f son uniformemente continuas en T entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|k(\alpha) - k(\beta)| < \varepsilon$ siempre que $|\alpha - \beta| < \delta$ y $|f(s) - f(r)| < \varepsilon$ siempre que $|s - r| < \delta$. Así, para cualquier $t \in T$, consideramos particiones $\{\tau_j\}$, $\{\eta_j\}$ de $[-\pi, \pi]$ tales que $\max_j(\tau_{j+1} - \tau_j) < \delta$ y $\max_m(\eta_{m+1} - \eta_m) < \delta$. Tomando $\{z_l\} = \{\tau_j\} \cup \{\eta_m\}$ tendremos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f(t - \tau_j) - \sum_m (\eta_{m+1} - \eta_m) k(\eta_m) f(t - \eta_m) \right| \\ & \leq \left| \sum_l (z_{l+1} - z_l) k(\theta_l) f(t - \theta_l) - \sum_l (z_{l+1} - z_l) k(z_l) f(t - z_l) \right| \\ & \quad + \left| \sum_l (z_{l+1} - z_l) k(z_l) f(t - z_l) - \sum_l (z_{l+1} - z_l) k(\gamma_l) f(t - \gamma_l) \right|, \end{aligned}$$

donde los θ_l son τ_j repetidos y los γ_l son η_m repetidos. Así, podremos reescribir la igualdad como

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f(t - \tau_j) - \sum_m (\eta_{m+1} - \eta_m) k(\eta_m) f(t - \eta_m) \right| \\
& \leq \sum_l (z_{l+1} - z_l) |k(\theta_l) f(t - \theta_l) - k(z_l) f(t - z_l)| \\
& \quad + \sum_l (z_{l+1} - z_l) |k(z_l) f(t - z_l) - k(\gamma_l) f(t - \gamma_l)| \\
& \leq \sum_l (z_{l+1} - z_l) [|f(t - \theta_l)| |k(\theta_l) - k(z_l)| + |k(z_l)| |f(t - \theta_l) - f(t - z_l)|] \\
& \quad + \sum_l (z_{l+1} - z_l) [|f(t - \gamma_l)| |k(\gamma_l) - k(z_l)| + |k(z_l)| |f(t - \gamma_l) - f(t - z_l)|] \\
& \leq 2\varepsilon(2\pi) \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)| + 2\varepsilon(2\pi) \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |k(t)|.
\end{aligned}$$

Esto es, las sumas de Riemann son uniformemente de Cauchy y por tanto, para $t \in T$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (\tau_{j+1} - \tau_{j-1}) k(\tau_j) f(t - \tau_j) = (k * f)(t)$$

uniformemente en T .

Así,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j} \rightarrow k * f$$

en $L^1(T)$. Además, $k * f$ es una función continua por ser límite uniforme de funciones continuas.

Como también, $\frac{1}{2\pi} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^N (\tau_{j+1} - \tau_{j-1}) k(\tau_j) f_{\tau_j} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau$ en $L^1(T)$ se sigue que

$$k * f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau,$$

salvo un conjunto de medida cero.

Ahora, si $f \in L^1(T)$ es arbitraria. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe g una función continua en T tal que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. Por el caso previamente demostrado para funciones continuas tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau - k * f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) (f - g)_{\tau} d\tau - k * (f - g),$$

entonces,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau - k * f \right\|_1 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k(\tau)| \cdot \|(f - g)_{\tau}\|_1 d\tau + \|k\|_1 \|f - g\|_1 \\ &\leq 2\|k\|_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

■

El Lema 3.1.8 permite representar la convolución entre una función continua en T y una función en $L^1(T)$ como una integral vectorial. Además, usando este lema se puede enunciar el Corolario 3.1.7 de la siguiente manera: Si $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad y $f \in L^1(T)$ entonces

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n * f$$

en la norma de $L^1(T)$.

3.2. Núcleo de Dirichlet y núcleo de Fejér

Sabemos que dada una función $f \in L^1(T)$, podemos aproximarla mediante la convolución de un núcleo de sumabilidad y la función f . Aunque los núcleos de Dirichlet y Fejér están estrechamente relacionados con las series de Fourier, obtendremos una diferencia notable: únicamente el núcleo de Fejér es un núcleo de sumabilidad. Sin embargo, esto basta para obtener la representación en algún sentido de funciones en $L^1(T)$ mediante sus series de Fourier.

3.2.1. Núcleo de Dirichlet

Definición 3.2.1. *Llamamos núcleo de Dirichlet a la expresión*

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}, \quad t \in T \text{ y } N \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Otra formulación del núcleo de Dirichlet es la que se presenta a continuación.

Proposición 3.2.2. *Para $t \in T$*

$$D_N(t) = \frac{\sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}. \quad (3.3)$$

Demostración. Notemos que para $t \in T$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
 2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) D_N(t) &= \left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right) \sum_{n=-N}^N e^{int} \\
 &= \sum_{n=-N}^N e^{i(n+\frac{1}{2})t} - \sum_{n=-N}^N e^{i(n-\frac{1}{2})t} \\
 &= \sum_{n=-N}^N e^{i(n+\frac{1}{2})t} - \sum_{n=-N-1}^{N-1} e^{i(n+\frac{1}{2})t} \\
 &= e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t} \\
 &= 2i \sin\left(\left[N + \frac{1}{2}\right] t\right),
 \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(\left[N + \frac{1}{2}\right] t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

■

Proposición 3.2.3. *El núcleo de Dirichlet satisface las siguientes propiedades:*

1. $D_N(t)$ es par para toda $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
2. $D_N(0) = 2N + 1$ para $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
3. $D_N(\pi) = \cos(N\pi) = (-1)^N$ para $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
4. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$ para toda $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración.

1. Sea $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in T$

$$D_N(-t) = \frac{\sin\left(-\left[N + \frac{1}{2}\right] t\right)}{\sin\left(-\frac{t}{2}\right)} = \frac{-\sin\left(\left[N + \frac{1}{2}\right] t\right)}{-\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = D_N(t).$$

2. Sea $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$D_N(0) = \sum_{n=-N}^N e^{in(0)} = \sum_{n=-N}^N 1 = 2N + 1.$$

3. Para $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} D_N(\pi) &= \frac{\sin(N\pi + \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{\sin(N\pi) \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(N\pi)}{1} \\ &= \cos(N\pi) = (-1)^N. \end{aligned}$$

4. Para $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1. \end{aligned}$$

■

Si consideramos $S_N(f)$, la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de $f \in L^1(T)$, entonces por el Corolario 2.2.5 del capítulo anterior tendremos que

$$D_N * f = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int} = S_N(f),$$

sin embargo, a pesar de que el núcleo de Dirichlet cumple con algunas propiedades que definen a los núcleos de sumabilidad, resulta no ser un núcleo de sumabilidad. Más adelante veremos que esto se debe a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt \rightarrow \infty \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

3.2.2. Núcleo de Fejér

Definición 3.2.4. *El núcleo de Fejér es la media aritmética de los primeros $N + 1$ términos del núcleo de Dirichlet, esto es,*

$$F_N(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_N(t)}{N + 1}, \quad t \in T, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.4)$$

De igual modo que el núcleo de Dirichlet, tenemos una expresión análoga para el núcleo de Fejér.

Proposición 3.2.5. *Para $t \in T$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$F_N(t) = \frac{1}{N + 1} \left(\frac{\sin \left((N + 1) \frac{t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right)^2.$$

Demostración. Sea $t \in T$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \left(2i \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2 D_N(t) &= \left(2i \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2 \frac{\sin \left((N + \frac{1}{2}) t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \\ &= \left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}} \right) \left(e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t} \right) \\ &= \left(e^{i(N+1)t} - e^{iNt} \right) - \left(e^{-iNt} - e^{-i(N+1)t} \right), \end{aligned}$$

y sumando sobre $k = 0, 1, 2, \dots, N$

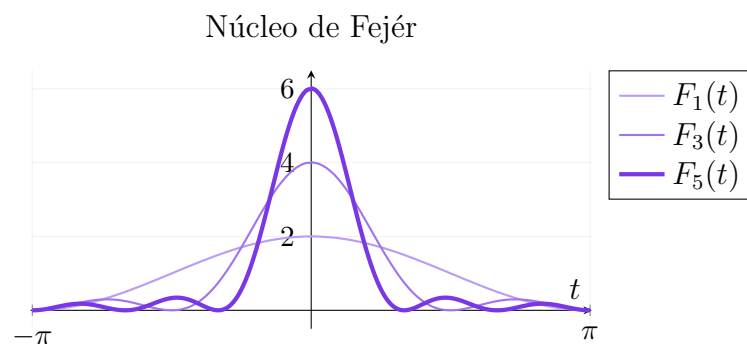
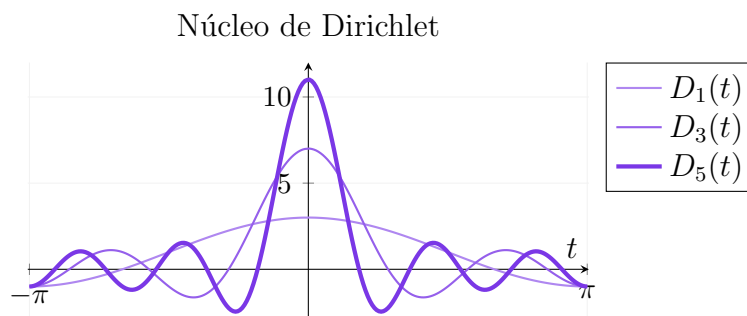
$$\begin{aligned} \left(2i \sin \left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 (N+1)F_N(t) &= -1 - 1 + e^{i(N+1)t} + e^{-i(N+1)t} \\ &= \left(e^{i(N+1)\frac{t}{2}} - e^{-i(N+1)\frac{t}{2}}\right)^2 \\ &= \left(2i \sin \left((N+1)\frac{t}{2}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Despejando $F_N(t)$ de la ecuación anterior obtenemos

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \left((N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin \left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2.$$

■

A manera de comparación, enseguida se presentan las gráficas del núcleo de Dirichlet y el núcleo de Fejér.



A diferencia del núcleo de Dirichlet, el núcleo de Fejér resulta ser un núcleo de suma-
bilidad, lo cual probaremos a continuación en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.6. *El núcleo de Fejér verifica las siguientes propiedades:*

1. $F_N(t)$ es no negativa, par y $F_N(0) = N + 1$.

2. Para $0 < \delta < \pi$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{\delta < |t| < \pi} F_N(t) \right) = 0$.

3. $F_N(t) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1} \right) e^{int}$.

4. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = 1$.

Demostración.

1. Por la Proposición 3.2.5 es evidente que $F_N(t)$ es no negativo. Veamos que es par,
sea $t \in T$

$$\begin{aligned} F_N(-t) &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \left((N+1) \frac{-t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{-t}{2} \right)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \left((N+1) \frac{t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right)^2 \\ &= F_N(t). \end{aligned}$$

Aplicando el inciso 2 de la Proposición 3.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} F_N(0) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(0) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (2n+1) \\ &= \frac{1}{N+1} (N+1)^2 = N+1. \end{aligned}$$

2. En efecto, sea $0 < \delta < \pi$ y $\delta < |t| < \pi$, entonces $\frac{\delta}{2} < \frac{|t|}{2} < \frac{\pi}{2}$ y así

$$0 < \left| \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \right| < \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|,$$

y elevando los términos al cuadrado

$$0 < \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) < \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right).$$

Luego, para $\delta < |t| < \pi$

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \left((N+1) \frac{t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)} \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

cuando $N \rightarrow \infty$. Esto junto al inciso anterior nos da como resultado

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{\delta < |t| < \pi} F_N(t) \right) = 0.$$

Adicionalmente, dado que en la expresión (3.5) la convergencia es uniforme en

$\delta < |t| < \pi$ se sigue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta < |t| < \pi} F_N(t) dt = 0.$$

3. Antes observemos que

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) &= 1 - \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) \\ &= 1 - \cos t - \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos t] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it} - \frac{1}{4}e^{-it}. \quad (3.6)$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} & \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it} - \frac{1}{4}e^{-it}\right) \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{i(n+1)t} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{i(n-1)t}. \end{aligned}$$

Ahora, extraemos los términos constantes de las sumas y los términos de índice

$n = N$ y $n = -N$ de las sumas desplazadas y obtenemos

$$\begin{aligned} & \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - 2 + \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{N}{N+1}\right) (e^{i(N+1)t} + e^{-i(N+1)t}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq -1}}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{i(n+1)t} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=-N+1 \\ n \neq 1}}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{i(n-1)t}. \end{aligned}$$

Reagrupando los término extraídos obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} \\
&= \frac{1}{2(N+1)} \left(1 - \frac{1}{2} (e^{i(N+1)t} + e^{-i(N+1)t})\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=-N+1 \\ n \neq 0}}^N \left(1 - \frac{|n-1|}{N+1}\right) e^{int} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N-1} \left(1 - \frac{|n+1|}{N+1}\right) e^{int} \\
&= \frac{1}{2(N+1)} (1 - \cos((N+1)t)) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{N-1}{N+1}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N}{N+1}\right)\right) e^{-iNt} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{N-2}{N+1}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N-1}{N+1}\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{N}{N+1}\right)\right) e^{-i(N-1)t} \\
&\quad + \cdots + \left(+\frac{1}{2} \left(1 - \frac{N}{N+1}\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{N-1}{N+1}\right)\right) e^{iNt}.
\end{aligned}$$

Después de hacer las cancelaciones correspondientes vemos que

$$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} = \frac{1}{N+1} \sin^2\left((N+1)\frac{t}{2}\right).$$

Así, despejando la sumatoria de la ecuación anterior obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} &= \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\left((N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= F_N(t).
\end{aligned}$$

4. Para $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{0}{N+1}\right) 2\pi \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

■

Si para $f \in L^1(T)$ denotamos por $\sigma_N f = F_N * f$, esto es

$$\begin{aligned}
 \sigma_N f &= \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N D_j * f \\
 &= \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S_j(f),
 \end{aligned}$$

vemos que $\sigma_N f$ representa a las medias aritméticas de $S_N(f)$. Dado que $\{F_N\}$ es un núcleo de sumabilidad concluimos que

$$\sigma_N f \longrightarrow f \text{ en } L^1(T).$$

Observemos que la convergencia de $\sigma_N f$ a f implica que los polinomios trigonométricos son densos en $L^1(T)$, pues $\sigma_N f$ es un polinomio trigonométrico.

3.3. Representación de funciones a través de sus coeficientes de Fourier

En esta sección estudiaremos la relación entre una función y sus coeficientes de Fourier. A continuación veremos un resultado de unicidad que es consecuencia de lo obtenido para el núcleo de Fejér.

Teorema 3.3.1. (*Unicidad*) Sea $f \in L^1(T)$ una función tal que $\hat{f}(n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f = 0$.

Demostración. Por nuestras hipótesis, para $N \in \mathbb{Z}$ y $t \in T$

$$\begin{aligned} \sigma_N f(t) &= F_N * f(t) \\ &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) (e^{in\cdot} * f)(t) \\ &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) e^{int} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo cual $\sigma_N f = 0$ para toda $N \in \mathbb{Z}$. Dado que $\sigma_N f \rightarrow f$ en $L^1(T)$ obtenemos que $f = 0$. ■

Otra forma equivalente de expresar el teorema de unicidad es la siguiente: Si $f, g \in L^1(T)$ son tales que $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = g$.

Teorema 3.3.2. (*Lema de Riemann-Lebesgue*) Sea $f \in L^1(T)$. Entonces

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como los polinomios trigonométricos son densos en $L^1(T)$ entonces existe un polinomio trigonométrico $P(t) = \sum_{j=-s}^s a_j e^{ijt}$ tal que $\|f - P\|_1 < \varepsilon$.

Tomemos $|n| > s$, entonces tenemos que

$$\widehat{P}(n) = \sum_{j=-s}^s a_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{-int} dt = 0,$$

por lo que para toda $|n| > s$

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(n) - \widehat{P}(n)| \\ &= |\widehat{f - P}(n)| \\ &\leq \|f - P\|_1 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Observación 3.3.3. El Lema de Riemann-Lebesgue se verifica uniformemente en compactos de $L^1(T)$. En efecto, si $K \subseteq L^1(T)$ es un conjunto compacto entonces, dado que los polinomios trigonométricos son densos en $L^1(T)$, para $\varepsilon > 0$ la familia $\mathcal{A} = \{B_\varepsilon(P) : P \text{ es un polinomio trigonométrico}\}$ es una cubierta por abiertos para K , de esta manera existen $P_1, P_2, \dots, P_n$ tales que $\mathcal{A}_n = \{B_\varepsilon(P_j) : j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ constituye una cubierta finita para K .

De lo anterior se sigue que para toda $f \in K$ existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\|f - P_j\|_1 < \varepsilon$. Tomando $|n| > \max\{\text{grado}(P_j) : j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ entonces por la demostración del Lema de Riemann-Lebesgue

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f - P_j\|_1 < \varepsilon,$$

válido para toda $f \in K$. Esto es, $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ uniformemente en K cuando $|n| \rightarrow \infty$.

Si tenemos una función cuya serie de Fourier converge en $L^1(T)$, el resultado deseado es que dicho límite sea la función f . Para demostrarlo será necesario un lema que relaciona a las sucesiones convergentes en un espacio de Banach con la sucesión de sus medias aritméticas.

Lema 3.3.4. Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ una sucesión que converge a $x \in X$. Definamos la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ donde $y_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, entonces $y_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $n > N$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} - x \right\|_X &= \left\| \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n - (n - N)x}{n - N} \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{n - N} \sum_{j=N+1}^n \|x_j - x\|_X \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto multiplicando por $\frac{n-N}{n}$ en ambos lados obtenemos

$$\left\| \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n} - \left(\frac{n-N}{n} \right) x \right\|_X \leq \left(\frac{n-N}{n} \right) \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.7)$$

Por otro lado, eligiendo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tenemos que

$$\left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{n} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.8)$$

Por las desigualdades (3.7) y (3.8) se sigue que

$$\left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \left(\frac{n-N}{n} \right) x \right\|_X < \varepsilon,$$

y como $\left(\frac{n-N}{n} \right) x \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$ concluimos que $y_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$. ■

Teorema 3.3.5. *Sea $f \in L^1(T)$ tal que $S(f)$ converge en $L^1(T)$. Entonces el límite necesariamente es f .*

Demostración. Como $L^1(T)$ es un espacio de Banach y $\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)$ es tal que $\sigma_N \rightarrow f$ cuando $N \rightarrow \infty$, entonces, dada la unicidad de límites, $S_N(f) \rightarrow f$ en $L^1(T)$. ■

3.4. Espacios de Banach homogéneos

Definición 3.4.1. *Llamamos espacio de Banach homogéneo a un subespacio lineal B de $L^1(T)$ en el cual hay definida una norma $\|\cdot\|_B$ tal que $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_1$. Además, $(B, \|\cdot\|_B)$*

es un espacio de Banach y se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $f \in B$ y $\tau \in T$ entonces $f_\tau \in B$ y $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$.
2. Para toda $f \in B$, $\tau, \tau_0 \in T$ tenemos que $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

A la condición 1 de la Definición 3.4.1 se le conoce como invariancia por traslación y a la condición 2 como continuidad de la traslación.

De hecho, la continuidad de la traslación puede simplificarse requiriendo continuidad en un punto específico $\tau_0 \in T$, digamos $\tau_0 = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 (f_\tau - f_{\tau_0})(t) &= f(t - \tau) - f(t - \tau_0) \\
 &= f(t - \tau) - f(t - \tau_0 + \tau - \tau) \\
 &= (f - f_{\tau_0 - \tau})(t - \tau) \\
 &= (f - f_{\tau_0 - \tau})_\tau(t),
 \end{aligned}$$

pero por la invariancia por traslación tenemos que

$$\begin{aligned}
 \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B &= \|(f - f_{\tau_0 - \tau})_\tau\|_B \\
 &= \|f - f_{\tau_0 - \tau}\|_B.
 \end{aligned}$$

Como lo exhibe la demostración de la Proposición 3.1.1, si B es un espacio que verifica la invariancia por traslación y queremos mostrar que verifica la continuidad de la traslación, bastará probar la continuidad de la traslación en un subconjunto denso de B .

Lema 3.4.2. *Sea $B \subseteq L^1$ es un espacio de Banach que satisface 1 de la Definición 3.4.1 y sea*

$$B_c = \{f \in B \mid \Lambda_f : T \rightarrow B \text{ dada por } \Lambda_f(\tau) = f_\tau \text{ es continuo.}\}.$$

Entonces B_c es un subespacio cerrado de B .

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset B_c$ tal que $f_n \rightarrow f$ en B , sea $\varepsilon > 0$ y elíjase n suficientemente grande tal que $\|f_n - f\|_B < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para dicha ε existe $\delta > 0$ tal que si $|\tau - \tau_0| < \delta$ entonces $\|(f_n)_\tau - (f_n)_{\tau_0}\|_B < \frac{\varepsilon}{3}$, por consiguiente

$$\begin{aligned} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B &\leq \|f_\tau - (f_n)_\tau\|_B + \|(f_n)_\tau - (f_n)_{\tau_0}\|_B + \|(f_n)_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_B \\ &< \|(f - f_n)_\tau\|_B + \frac{\varepsilon}{3} + \|(f_n - f)_{\tau_0}\|_B \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

si $|\tau - \tau_0| < \delta$. Así, $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} f_\tau = f_{\tau_0}$, esto es $f \in B_c$. ■

3.4.1. Ejemplos de espacios de Banach homogéneos

Procederemos a examinar algunos espacios ya conocidos que resultan ser espacios de Banach homogéneos.

1. El espacio de todas las funciones continuas y 2π -periódicas $C(T)$ con la norma

$\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach.

Claramente $C(T) \subset L^1(T)$ y $\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_1$. Falta mostrar la invariancia por traslación y la continuidad de la traslación.

Sea $f \in C(T)$, entonces

$$\begin{aligned}\|f_\tau\|_\infty &= \sup_{t \in T} |f_\tau(t)| \\ &= \sup_{t \in T} |f(t - \tau)| \\ &= \sup_{t \in T} |f(t)| \\ &= \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Además, como f es uniformemente continua en T , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si para $x, y \in T$ se cumple que $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Por tanto, si $\tau, \tau_0 \in T$ son tales que $|\tau - \tau_0| < \delta$ entonces para toda $t \in T$ tenemos que $|f(t - \tau) - f(t - \tau_0)| < \varepsilon$, lo cual implica que $\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_\infty < \varepsilon$.

2. El espacio de las funciones n -veces continuamente diferenciables y 2π -periódicas

$C^n(T)$, el cual es subespacio de $C(T)$, con la norma $\|f\|_{C^n} = \max_{0 \leq j \leq n} \max_{t \in T} |f^{(j)}(t)|$.

Tenemos que $C^n(T) \subset C(T) \subset L^1(T)$ y $\|\cdot\|_{C^n} \geq \|\cdot\|_1$. Mostraremos que $C^n(T)$ es de Banach con la norma $\|\cdot\|_{C^n}$.

En efecto, sea $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $C^n(T)$. Esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_k\|_{C^n} = \max_{0 \leq j \leq n} \|f_m^{(j)} - f_k^{(j)}\|_\infty < \varepsilon$ si $m, k > N$ y por tanto para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\|f_m^{(j)} - f_k^{(j)}\|_\infty < \varepsilon$ si $m, k > N$. Por consiguiente, la sucesión $\{f_m^{(j)}\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $C(T)$ para toda $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Dado que $C(T)$ es un espacio de Banach entonces existe $g_j \in C(T)$ tal que $f_m^{(j)} \rightarrow g_j$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Como la sucesión $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a la función g_0 y su sucesión de primeras derivadas $\{f'_m\}_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a la función g_1 , podemos aplicar un teorema básico de análisis sobre convergencia uniforme y derivadas. Así la sucesión $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a una función f tal que $f' = g_1$, donde necesariamente $f = g_0$.

Aplicamos de nuevo el teorema mencionado a la sucesión de primeras derivadas $\{f'_m\}_{m=1}^\infty$ la cual converge uniformemente a la función g_1 y su sucesión de segundas derivadas $\{f''_m\}_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a la función g_2 , obteniendo así que la sucesión $\{f'_m\}_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a una función $h = f'$ tal que $f'' = g_2$.

Aplicando reiteradas veces este teorema tenemos que para toda $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ la sucesión $\{f_m^{(j)}\}_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a la función $f^{(j)}$, la cual es continua por ser límite uniforme de funciones continuas y por tanto $f \in C^n(T)$. Así existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m^{(j)} - f^{(j)}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ si $m > M$ para toda $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|f_m - f\|_{C^n} &= \max_{0 \leq j \leq n} \|f_m^{(j)} - f^{(j)}\|_\infty \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

si $m > M$.

Ahora, mostraremos la invariancia por traslación y la continuidad de la traslación.

Sea $f \in C^n(T)$, entonces para $\tau \in T$

$$\begin{aligned}\|f_\tau\|_{C^n} &= \max_{0 \leq j \leq n} \sup_{t \in T} |f_\tau^{(j)}(t)| \\ &= \max_{0 \leq j \leq n} \sup_{t \in T} |f^{(j)}(t - \tau)| \\ &= \max_{0 \leq j \leq n} \sup_{t \in T} |f^{(j)}(t)| \\ &= \|f\|_{C^n}.\end{aligned}$$

Además, como $f^{(j)}$ es uniformemente continua en T para toda $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si para $x, y \in T$ se cumple que $|x - y| < \delta$ entonces $|f^{(j)}(x) - f^{(j)}(y)| < \varepsilon$ para toda $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Por tanto, si $\tau, \tau_0 \in T$ son tales que $|\tau - \tau_0| < \delta$ entonces para toda $t \in T$ tenemos que $|f^{(j)}(t - \tau) - f^{(j)}(t - \tau_0)| < \varepsilon$ para toda $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, lo cual implica que $\|f_\tau^{(j)} - f_{\tau_0}^{(j)}\|_\infty < \varepsilon$ para toda $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, que a su vez implica que $\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{C^n} < \varepsilon$. Por tanto, $C^n(T)$ es un espacio de Banach homogéneo.

3. $L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$ es un espacio de Banach homogéneo con la norma $\|\cdot\|_p$.

Para $f \in L^p$ tenemos por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \cdot 1 dt \\ &\leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right]^{1/p} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt \right]^{1/p'} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right]^{1/p} = \|f\|_p < \infty\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Por tanto, $L^p(T) \subset L^1(T)$ y $\|\cdot\|_p \geq \|\cdot\|_1$.

Es claro que se cumple la invariancia por traslación $\|f_\tau\|_p = \|f\|_p$ con $\tau \in T$. Para mostrar la continuidad de la traslación recordemos que $C(T)$ es denso en $L^p(T)$, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $g \in C(T)$ tal que $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$\begin{aligned} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_p &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_p + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_p + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_p \\ &= \|f - g\|_p + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_p + \|g - f\|_p \\ &< \varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_p. \end{aligned}$$

Como g es continua, para esa misma ε existe $\delta > 0$ tal que $|g_\tau(t) - g_{\tau_0}(t)| < \varepsilon$ si $|\tau - \tau_0| < \delta$. De este modo, si $|\tau - \tau_0| < \delta$

$$\begin{aligned} \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_\tau(t) - g_{\tau_0}(t)|^p dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^p dt \\ &= \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Así, $\limsup_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_p \leq 2\varepsilon$, lo cual implica que $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_p = 0$.

Teorema 3.4.3. *Sea B un espacio de Banach homogéneo en T . Sea $f \in B$ y $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ un núcleo de sumabilidad. Entonces $\|k_n * f - f\|_B \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Como B es un espacio de Banach homogéneo, $\Lambda_f : T \rightarrow B$ tal que $\Lambda_f(\tau) = f_\tau$ es continua. Así la integral $\frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau d\tau$ tiene sentido como integral B -valuada. Además, como $\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 \leq \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B$ entonces esta integral B -valuada coincide con la integral L^1 -valuada.

Por el Lema 3.1.8 tenemos que

$$k_n * f = \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau d\tau$$

y por el Lema 3.1.6 $\|k_n * f - f\|_B \rightarrow 0$. ■

Particularmente, si tenemos un núcleo de sumabilidad entonces tenemos los siguientes resultados en los espacios de Banach homogéneos ya conocidos:

1. Si $f \in L^p(T)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces $k_n * f \rightarrow f$ en $L^p(T)$.
2. Si $f \in C(T)$ entonces $k_n * f \rightarrow f$ uniformemente en T .
3. Si $f \in C^n(T)$ entonces $k_n * f \rightarrow f$ uniformemente en T , junto con todas sus derivadas.

Teorema 3.4.4. *Sea $(B, \|\cdot\|_B)$ un espacio de Banach homogéneo en T . Entonces los polinomios trigonométricos son densos en B .*

Demostración. Dado que $\sigma_N f$ es un polinomio trigonométrico, y ya vimos que $\sigma_N f = F_n * f$, por el Teorema 3.4.3 $\sigma_N f \rightarrow f$ en la norma de B . ■

El Teorema 3.4.4 nos asegura la convergencia uniforme de las medias aritméticas de la serie de Fourier de funciones continuas, lo cual enunciamos a continuación.

Corolario 3.4.5. *(Teorema de aproximación de Weierstrass) Toda función continua y 2π -periódica puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos.*

Demostración. El espacio $C(T)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach homogéneo en T , de donde se sigue la convergencia uniforme. ■

3.5. Otros núcleos de sumabilidad

Complementando el estudio del núcleo de Fejér y su relación con las series de Fourier, en esta sección presentamos el núcleo de la Vallée Poussin y el núcleo de Poisson. El núcleo de la Vallée Poussin surge a través del núcleo de Fejér y mejora la aproximación a funciones en $L^1(T)$, mientras el núcleo de Poisson nos permite vincular el análisis de Fourier y las funciones analíticas.

3.5.1. El núcleo de la Vallée Poussin

Definición 3.5.1. *Definimos el núcleo de la Vallée Poussin como la expresión*

$$V_n(t) = 2F_{2n+1}(t) - F_n(t) \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } t \in T$$

donde $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ es el núcleo de Fejér.

Notemos que el núcleo de la Vallée Poussin es un núcleo de sumabilidad, lo cual es consecuencia de que el núcleo de Fejér sea un núcleo de sumabilidad. Esto queda establecido en la siguiente proposición.

Proposición 3.5.2. *El núcleo de la Vallée Poussin es un núcleo de sumabilidad.*

Demostración. Usando lo demostrado para el núcleo de Fejér vemos que:

- Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_n(t) dt &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{2n+1}(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

- Sabemos que existe una constante C tal que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(t)| dt \leq C$, así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_n(t)| dt &\leq \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_{2n+1}(t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(t)| dt \\ &\leq 3C. \end{aligned}$$

- Para $0 < \delta < \pi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| < \pi} |V_n(t)| dt &= \frac{2}{2\pi} \int_{\delta < |t| < \pi} |F_{2n+1}(t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| < \pi} |F_n(t)| dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

■

Proposición 3.5.3. V_n es un polinomio trigonométrico de grado $2n+1$ tal que $\widehat{V}_n(j) = 1$ si $|j| \leq n+1$.

Demostración. Es evidente que V_n es un polinomio trigonométrico de grado $2n+1$.

Tomemos $|j| \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}
 \widehat{V}_n(j) &= \left(2 \sum_{l=-(2n+1)}^{2n+1} \left(1 - \frac{|l|}{2(n+1)} \right) e^{ilt} \right)^{\wedge} (j) \\
 &\quad - \left(\sum_{l=-n}^n \left(1 - \frac{|l|}{n+1} \right) e^{ilt} \right)^{\wedge} (j) \\
 &= 2 \sum_{l=-(2n+1)}^{2n+1} \left(1 - \frac{|l|}{2(n+1)} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-j)t} dt \\
 &\quad - \sum_{l=-n}^n \left(1 - \frac{|l|}{n+1} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-j)t} dt \\
 &= 2 \left(1 - \frac{|j|}{2(n+1)} \right) - \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) = 1.
 \end{aligned}$$

Si $|j| = n+1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \widehat{V}_n(j) &= \left(2 \sum_{l=-(2n+1)}^{2n+1} \left(1 - \frac{|l|}{2(n+1)} \right) e^{ilt} \right)^{\wedge} (j) \\
 &\quad - \left(\sum_{l=-n}^n \left(1 - \frac{|l|}{n+1} \right) e^{ilt} \right)^{\wedge} (j) \\
 &= 2 \sum_{l=-(2n+1)}^{2n+1} \left(1 - \frac{|l|}{2(n+1)} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-j)t} dt \\
 &\quad - \sum_{l=-n}^n \left(1 - \frac{|l|}{n+1} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-j)t} dt \\
 &= 2 \left(1 - \frac{n+1}{2(n+1)} \right) = 1.
 \end{aligned}$$

■

Como $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad entonces $V_n * f \rightarrow f$ en $L^1(T)$. Además por las proposiciones anteriores sabemos que $V_n * f$ es un polinomio trigonométrico y que $\widehat{V_n * f}(j) = \widehat{f}(j)$ si $|j| \leq n+1$, lo cual indica que este núcleo resulta útil cuando se quiere

aproximar una función por medio de polinomios trigonométricos que tienen los mismos coeficientes de Fourier que f sobre intervalos prescritos.

3.5.2. El núcleo de Poisson

Definición 3.5.4. Para $0 \leq r < 1$ se define el núcleo de Poisson como

$$P_r(t) = P(r, t) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos(jt), \quad t \in T.$$

Notemos que $P_r(t)$ es uniformemente convergente en para $t \in T$.

Proposición 3.5.5. Para cada $t \in T$

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

Demostración. Consideremos la función holomorfa $F(z) = \frac{1+z}{1-z}$ con $|z| < 1$. Vemos que

$$F(z) = (1+z) \sum_{j=0}^{\infty} z^j = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} z^j$$

y reescribiendo $z = re^{it}$ con $0 \leq r < 1$ y $t \in [-\pi, \pi]$ obtenemos que $F(z) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} r^j e^{ijt}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(F(z)) &= 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos(jt) \\ &= P(r, t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 P_r(t) &= \operatorname{Re}(F(z)) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\frac{1 + r \cos t + ir \sin t}{1 - r \cos t - ir \sin t}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\frac{(1 + r \cos t + ir \sin t)(1 - r \cos t + ir \sin t)}{(1 - r \cos t + ir \sin t)(1 - r \cos t - ir \sin t)}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\frac{1 - r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t + i2r \sin t}{(1 - r \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\right) \\
 &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.
 \end{aligned}$$

■

Observación 3.5.6. La ecuación (3.9) nos muestra que $P_r(t)$ es una función armónica en el disco unitario D .

También obsérvese que

$$P_r(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ijt},$$

puesto que

$$\begin{aligned}
 \sum_{|j|=n} r^{|j|} e^{ijt} &= r^n (e^{int} + e^{-int}) \\
 &= 2r^n \cos(nt)
 \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.5.7. *El núcleo de Poisson es un núcleo de sumabilidad.*

Demostración. Es evidente que $P_r(t)$ es 2π -periódica y continua como función de t .

Además, es positiva, pues si tomamos $t \in [-\pi, \pi]$ y $0 \leq r < 1$ obtenemos

$$(1 - r)^2 \leq 1 - 2r \cos t + r^2 \leq (1 + r)^2,$$

y por lo tanto

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} > 0.$$

Por la convergencia uniforme del núcleo de Poisson

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ijt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|j|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para $\delta > 0$ consideremos la función $\varphi(r) = 1 + r^2 - 2r \cos \delta$, entonces $\varphi'(r) = 2r - 2 \cos \delta = 0$ si $r = \cos \delta$, además, $\varphi''(\cos \delta) = 2 > 0$. Es decir, la función φ tiene un mínimo en $r = \cos \delta$. Así, para $\delta > 0$ y $\delta \leq |t| \leq \pi$

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \\ &\leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} \\ &\leq \frac{1 - r^2}{1 - \cos^2 \delta} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $r \rightarrow 1$. Entonces para cualquier $\delta > 0$ $\sup_{\delta < |t| \leq \pi} P_r(t) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 1$ y por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\delta < |t| \leq \pi} P_r(t) = 0.$$

■

Observación 3.5.8. Si nombramos $P_r^{(n)}(t) = \sum_{j=-n}^n r^{|j|} e^{ijt}$ entonces por la convergencia uniforme de $P_r(t)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} (P_r * f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int \sum_{-\infty}^{\infty} r^j e^{ij\tau} f(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \lim_{|n| \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n r^j e^{ij\tau} f(t - \tau) d\tau \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int \sum_{-n}^n r^j e^{ij\tau} f(t - \tau) d\tau \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} (P_r^{(n)} * f)(t) \end{aligned}$$

y puesto que $(P_r^{(n)} * f)(t) = \sum_{j=-n}^n r^{|j|} \hat{f}(j) e^{ijt}$, entonces $(P_r * f)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} \hat{f}(j) e^{ijt}$.

Si tenemos que $f \in L^1(T)$, sabemos que $P_r * f \rightarrow f$ si $r \rightarrow 1$ en $L^1(T)$. Pero a diferencia de otros núcleos de sumabilidad presentados en este capítulo, como el núcleo de Fejér, el núcleo de Poisson no es un polinomio trigonométrico.

Sin embargo, el núcleo de Poisson es esencialmente una variante de la parte real del núcleo de Cauchy $\frac{1}{1-z}$ y por tanto es una función armónica, lo cual nos permite establecer una relación entre las series trigonométricas y las funciones analíticas.

Otra propiedad del núcleo de Poisson es que es una función decreciente en t para $0 \leq t \leq \pi$ debido a que el coseno es decreciente en $[0, \pi]$.

3.6. Convergencia puntual de $\sigma_N f$

Por lo visto en este capítulo sabemos que si $f \in L^1(T)$, entonces $\sigma_n f$ converge a f en la topología de cualquier espacio de Banach homogéneo que contenga a f . De hecho, si $f \in C(T)$ entonces la convergencia es uniforme.

Sin embargo, si f no es continua, usualmente no podremos deducir convergencia puntual de $\sigma_n f$ de su convergencia en norma y, en caso de que exista el límite de $\sigma_n f(t_0)$, tampoco tendremos, necesariamente, una relación entre el límite de $\sigma_n f(t_0)$ y $f(t_0)$. Por lo tanto estudiaremos las integrales que definen a $\sigma_n f$.

Teorema 3.6.1. (Fejér) Sea $f \in L^1(T)$.

1. Supongamos que $\lim_{h \rightarrow 0} (f(t_0 + h) + f(t_0 - h))$ existe para algún $t_0 \in T$. Entonces

$$\sigma_n f(t_0) \rightarrow \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t_0 + h) + f(t_0 - h)).$$

En particular, si t_0 es un punto de continuidad de f entonces $\sigma_n f(t_0) \rightarrow f(t_0)$.

2. Si todo punto en un intervalo cerrado I es un punto de continuidad para f , entonces

$$\sigma_n f(t) \rightarrow f(t) \text{ uniformemente en } I.$$

3. Si para toda $t \in T$ tenemos que existe m tal que $m \leq f(t)$ entonces $m \leq \sigma_n f(t)$

para toda $t \in T$. De igual manera, si para toda $t \in T$ tenemos que existe M tal que

$$f(t) \leq M \text{ entonces } \sigma_n f(t) \leq M \text{ para toda } t \in T.$$

Demostración.

1. Suponiendo que $\check{f}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h)+f(t_0-h)}{2}$ existe y tomando $\delta > 0$ tenemos usando el hecho de que F_n es par y haciendo un cambio de variable que

$$\begin{aligned}
 \sigma_n f(t_0) - \check{f}(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - \check{f}(t_0)) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau| \leq \delta} F_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - \check{f}(t_0)) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |\tau| < \pi} F_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - \check{f}(t_0)) d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger $\delta > 0$ de tal manera que si $|\tau| < \delta$ entonces $\left| \frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| < \varepsilon$, luego eligiendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ se cumpla que

$$\sup_{\delta < |\tau| < \pi} F_n(\tau) < \varepsilon,$$

obtenemos por (3.10) que

$$\begin{aligned}
 |\sigma_n f(t_0) - \check{f}(t_0)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau \\
 &\leq \varepsilon \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} F_n(\tau) d\tau \\
 &\quad + \varepsilon \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau \\
 &\leq \varepsilon + \varepsilon \|f - \check{f}(t_0)\|_1,
 \end{aligned}$$

lo cual prueba lo requerido.

2. Como f es uniformemente continua en I entonces para $\varepsilon > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $|\tau| < \delta$ entonces $\left| \frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| < \varepsilon$ lo cual es válido para toda $t_0 \in I$. Así, el índice n en $\sigma_n f$ depende únicamente de ε .
3. Sea $m \leq f(t)$, usando que $F_n(t) \geq 0$ entonces

$$\sigma_n - m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\tau) (f(t - \tau) - m) d\tau \geq 0,$$

de donde obtenemos que $\sigma_n \geq m$. De manera análoga, si $f(t) \leq M$ entonces $\sigma_n f(t) \leq M$.

■

El teorema de Fejér sigue siendo válido si se reemplaza a $\sigma_n f$ por $k_n * f$, donde $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad positivo que satisface:

1. Para $0 < \delta < \pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta < |t| < \pi} k_n(t) = 0$.
2. $k_n(t) = k_n(-t)$.

Tal es el caso del núcleo de Poisson, que cumple con todos los requisitos.

La condición de Fejér

$$\check{f}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h)}{2}$$

implica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau = 0. \quad (3.11)$$

De hecho, pedir la existencia de un número $\check{f}(t)$ que cumpla (3.11) es mucho menos restrictivo que la condición de Fejér y más natural para funciones integrables. Este resultado se conoce como el teorema de diferenciación de Lebesgue y establece que dada una función $f \in L^1([a, b])$ entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| dt = 0 \quad (3.12)$$

para casi toda $t \in (a, b)$. Los puntos $x \in (a, b)$ que cumplen la condición (3.12) se llaman puntos de Lebesgue de f . La función f no necesariamente debe ser continua en un punto para que éste sea un punto de Lebesgue, e incluso todos los puntos en $[a, b]$ son de Lebesgue salvo un conjunto de medida cero, pero es evidente que si un punto es un punto de continuidad de f entonces es un punto de Lebesgue de f .

Además, si modificamos f en un conjunto de medida cero el resultado no cambia, y aun cuando alguna función f no satisfaga la condición de Fejér para ningún valor t_0 , si tomamos $\check{f}(t_0) = f(t_0)$ entonces se cumple (3.11) para casi todo t_0 .

Teorema 3.6.2. (Lebesgue) Sea $f \in L^1(T)$ y $t_0 \in T$. Si se verifica la condición

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau = 0$$

entonces $\sigma_n f(t_0) \rightarrow \check{f}(t_0)$. En particular $\sigma_n f(t) \rightarrow \check{f}(t)$ casi en todas partes.

Demostración. Como ya hemos visto en la prueba del teorema de Fejér

$$\begin{aligned}\sigma_n f(t_0) - \check{f}(t_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau.\end{aligned}$$

Ahora, para $0 < \tau < \pi$ se tiene que $\sin\left(\frac{\tau}{\pi}\right) > \frac{\tau}{\pi}$ y por tanto

$$\begin{aligned}F_n(\tau) &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{\tau}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} \right)^2 \\ &\leq \min \left\{ F_n(0) = n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2} \right\}\end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}&\left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \min \left\{ n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2} \right\} \left| \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) \right| d\tau.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Notemos que si $(n+1)\delta^2 \rightarrow \infty$ entonces

$$\frac{1}{(n+1)\tau^2} \rightarrow 0$$

uniformemente para $\delta < \tau < \pi$ y puesto que $f \in L^1(T)$, entonces, por el teorema de convergencia dominada la integral (3.13) converge a cero.

Tomemos $\delta = n^{-\frac{1}{4}}$ y definamos

$$\Phi(h) = \int_0^h \left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau \right| \\
& \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau \right| \\
& \quad + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{1}{n}}^\delta F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau \right| \\
& \leq \frac{n+1}{\pi} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^\delta \frac{1}{\tau^2} \left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau
\end{aligned}$$

y notemos que

$$\frac{(n+1)}{\pi} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Además, como Φ es una integral indefinida entonces es una función absolutamente continua. De igual manera τ^{-2} es una función absolutamente continua en el intervalo $[\frac{1}{n}, \delta]$. Por tanto, podemos hacer integración por partes en el término restante:

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^\delta \frac{1}{\tau^2} \left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau \\
& = \frac{\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^\delta \frac{\Phi'(\tau)}{\tau^2} d\tau \\
& = \frac{\pi}{n+1} \frac{\Phi(\tau)}{\tau^2} \Big|_{\frac{1}{n}}^\delta + \frac{2\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^\delta \frac{\Phi(\tau)}{\tau^3} d\tau \\
& \leq \frac{\pi\Phi(\delta)}{(n+1)\delta^2} + \frac{2\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^\delta \frac{\Phi(\tau)}{\tau^3} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por hipótesis, para $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_\varepsilon$, $\Phi(\tau) < \varepsilon\tau$ en $0 < \tau \leq \delta = n^{-\frac{1}{4}}$. Reemplazando esto en (3.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi\Phi(\delta)}{(n+1)\delta^2} + \frac{\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\Phi(\tau)}{\tau^3} d\tau &\leq \frac{\pi\varepsilon}{(n+1)\delta} + \frac{2\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\Phi(\tau)}{\tau^2} d\tau \\ &\leq \frac{\pi\varepsilon}{(n+1)\delta} + \frac{2\pi\varepsilon}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta=n^{-\frac{1}{4}}} \frac{d\tau}{\tau^3} \\ &\leq \frac{\pi\varepsilon n}{n+1} + \frac{2\pi\varepsilon n}{n+1} \\ &= \frac{3\pi\varepsilon n}{n+1} < 3\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Así, $\sigma_n f(t_0) - \check{f}(t_0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

La segunda afirmación es consecuencia del hecho de que toda $f \in L^1(T)$ satisface (3.11) casi en todas partes, con $\check{f}(t_0) = f(t_0)$. ■

Corolario 3.6.3. *Si la serie de Fourier de $f \in L^1(T)$ converge en un conjunto E de medida positiva, su suma coincide con f casi en todas partes sobre E .*

En particular, si una serie de Fourier converge a cero casi en todas partes, todos sus coeficientes de Fourier deben anularse.

Demostración. Si $\{S_n(f)\}_{n=0}^\infty$ converge en un conjunto de medida positiva E , entonces $\sigma_n f$ también lo hace al mismo límite en E , pero como $f \in L^1(T)$ entonces casi todo punto de E es punto de Lebesgue para f , así, $\sigma_n f(t) \rightarrow f(t)$ casi en todas partes en E y por tanto $S_n f(t) \rightarrow f(t)$ casi en todas partes en E . ■

Capítulo 4

Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier

Por el desarrollo visto en el capítulo anterior sabemos que los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^1(T)$ están acotadas por $\|f\|_1$ y que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$. En este capítulo discutiremos tres preguntas:

1. ¿Podemos mejorar el Lema de Riemann-Lebesgue de tal modo que sea posible una tasa de convergencia a cero de $\widehat{f}(n)$ cuando $|n| \rightarrow \infty$? La respuesta a este cuestionamiento es negativa, pues como veremos en el Teorema 4.1.1 los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^1(T)$ pueden converger a cero de modo arbitrariamente lento.
2. Dada la respuesta negativa a la pregunta anterior, ¿resulta ser cierto que cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ que tiende a cero cuando $|n| \rightarrow \infty$ es la sucesión de coeficientes

de Fourier para alguna $f \in L^1(T)$? La respuesta en este caso también es negativa, como veremos en el Teorema 4.1.2.

3. ¿Cómo se reflejan propiedades como el acotamiento, continuidad, regularidad, etc. de una función por medio de sus coeficientes de Fourier? Éste es uno de los principales problemas del análisis armónico y en la sección 4.2 veremos cómo algunas condiciones de regularidad en una función afectan el tamaño de sus coeficientes de Fourier.

4.1. Estimaciones generales

Teorema 4.1.1. *Sea $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión par de números no negativos que tiende a cero en infinito. Supongamos que para $n > 0$*

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0. \quad (4.1)$$

Entonces, existe una función no negativa $f \in L^1(T)$ tal que $\hat{f}(n) = a_n$.

Demostración. Notemos antes que la condición de convexidad (4.1) implica que la sucesión $\{a_n - a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente ya que $a_n - a_{n+1} \leq a_{n-1} - a_n$. Además,

$$\sigma_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1})$$

donde $\sigma_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$.

En efecto, para $n = 1$ la fórmula es válida. Supongamos su validez para n y probémosla para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k(a_k - a_{k+1}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) + (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2}) \\
 &= \frac{1}{n+1} [n(\sigma_n - a_{n+1}) + (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2})] \\
 &= \frac{1}{n+1} \left[n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - (n+1)a_{n+2} \right] \\
 &= \frac{1}{n+1} [a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}] - a_{n+2} \\
 &= \sigma_n - a_{n+2},
 \end{aligned}$$

lo cual prueba lo requerido.

Dado que $a_n \rightarrow 0$ entonces $\sigma_n \rightarrow 0$, de donde se sigue que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y como $\frac{k}{n}(a_n - a_{n+1}) \leq \frac{k}{n}(a_k - a_{k+1})$ para toda $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, sumando sobre todas las $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{(a_n - a_{n+1})}{n} \sum_{k=1}^n k &= \frac{(n+1)}{2}(a_n - a_{n+1}) \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$.

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^n k(a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k) = a_0 - a_n - n(a_n - a_{n+1}) \rightarrow a_0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

En efecto, el resultado es válido para $n = 1$, supongamos su validez para n , entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} k(a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k) &= a_0 - a_n - n(a_n - a_{n+1}) + (n+1)(a_n + a_{n+2} - 2a_{n+1}) \\
 &= a_0 - a_n - na_n + na_{n+1} + na_n + a_n + (n+1)a_{n+2} \\
 &\quad - 2(n+1)a_{n+1} \\
 &= a_0 - a_{n+1} + (n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} \\
 &= a_0 - a_{n+1} - (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2}).
 \end{aligned}$$

Se sigue de lo anterior que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0. \quad (4.2)$$

Ahora definamos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)F_{n-1}(t).$$

Como los términos son no negativos la serie tiene sentido como elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ para $t \in T$, de hecho es una función medible de t y no negativa.

Escribamos $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_{n-1}(t)$ donde $c_n = n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)$.

Aplicando el Teorema de Convergencia Monótona a la sucesión de sumas parciales $\{s_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, con $s_n(t) = \sum_{l=1}^n c_l F_{l-1}(t)$, obtenemos en virtud de (4.2)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{n-1}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_0,$$

así $f \in L^1(T)$.

Observando que para toda $j \in \mathbb{Z}$ $|s_n(t)e^{ijt}| = s_n(t) \leq f(t) \in L^1(T)$ podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para obtener

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(j) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt} dt \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(t) e^{-ijt} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \widehat{F}_{n-1}(j) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \sum_{|l| \leq n-1} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt} e^{-ijt} dt \\
&= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) - \sum_{n=1}^{|j|} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \\
&\quad - |j| \sum_{n=|j|+1}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \\
&= a_0 - [a_0 - a_{|j|} - |j|(a_{|j|} - a_{|j|+1})] - |j| \sum_{n=|j|+1}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \\
&= a_{|j|} + |j|a_{|j|} - |j|a_{|j|+1} \\
&\quad - |j| \left[\sum_{n=|j|+1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) + \sum_{n=|j|+1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \right] \\
&= a_{|j|} + |j|a_{|j|} - |j|a_{|j|+1} - |j|a_{|j|} + |j|a_{|j|+1} = a_{|j|}.
\end{aligned}$$

■

Este teorema responde la primera pregunta que planteamos en este capítulo. Un ejemplo de sucesión que cumple las condiciones del Teorema 4.1.1 es la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal

que $a_n = \frac{1}{n}$ si $n \geq 1$ y $a_0 \geq \frac{3}{2}$ pues si $n \geq 2$ tenemos que

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} \geq 0,$$

y si $n = 1$

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 - 2a_1 &= a_0 + \frac{1}{2} - 2 \\ &= a_0 - \frac{3}{2} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

En virtud de la respuesta negativa a la primera pregunta planteamos la posibilidad de que dada una sucesión convergente a cero, ésta sea la sucesión de coeficientes de Fourier de alguna función en $L^1(T)$. Como ya mencionamos, el cuestionamiento también se responde negativamente, lo cual mostraremos a continuación.

Teorema 4.1.2. *Sea $f \in L^1(T)$ tal que $\widehat{f}(|n|) = -\widehat{f}(-|n|) \geq 0$, $n \neq 0$. Entonces*

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \widehat{f}(n) < \infty$$

Demostración. Iniciemos suponiendo que $\widehat{f}(0) = 0$. Sea $F(t) = \int_{-\pi}^t f(\tau) d\tau$ y recordemos que por el Teorema 2.1.4 sabemos que F es continua y $\widehat{F}(n) = \frac{1}{in} \widehat{f}(n)$ para $n \neq 0$.

Como F es continua podemos aplicar el teorema de Fejér para $t_0 = 0$ y obtenemos

$$\begin{aligned} F(0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N F(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \widehat{F}(n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{\widehat{f}(n)}{in} + \widehat{F}(0) \end{aligned}$$

lo cual implica

$$2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{\widehat{f}(n)}{n} = -i \left(F(0) - \widehat{F}(0)\right).$$

Así,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^N \frac{\widehat{f}(n)}{n} - \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N \widehat{f}(n) \right] = \frac{i}{2} \left(F(0) - \widehat{F}(0)\right)$$

y por el Lema 3.3.4 $\frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N \widehat{f}(n) \rightarrow 0$ si $N \rightarrow \infty$, por lo que la serie $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \widehat{f}(n)$ converge, de hecho, sus términos son no negativos.

Si $\widehat{f}(0) \neq 0$ consideramos la función $g(t) = f(t) - \widehat{f}(0)$ que verifica $\widehat{g}(0) = 0$, $g(t) \in L^1(T)$ y $\widehat{g}(|n|) = \widehat{f}(|n|) = -\widehat{f}(-|n|) = -\widehat{g}(-|n|)$ para $n \neq 0$.

Por el caso anterior tenemos que

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \widehat{g}(n) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \widehat{f}(n) < \infty.$$

■

Por el teorema anterior obtenemos el siguiente corolario que ilustra mejor la respuesta a nuestra pregunta.

Corolario 4.1.3. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de términos positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt)$ no es una serie de Fourier. Por lo tanto, existe una serie trigonométrica cuyos coeficientes tienden a cero que no es una serie de Fourier.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ definamos $a_{-n} = -a_n$ y $a_0 = 0$. Entonces,

$$\sum_{n \neq 0} a_n e^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} - e^{-int}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt).$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt)$ fuese una serie de Fourier existiría $f \in L^1(T)$ tal que $\widehat{f}(|n|) = a_{|n|} = -a_{-|n|} = -\widehat{f}(-|n|) \geq 0$, así por el teorema anterior tendríamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$, lo cual es absurdo por nuestras hipótesis. ■

Ejemplo 4.1.4. La serie trigonométrica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ no es una serie de Fourier.

En efecto, el criterio de Dirichlet establece que dada una sucesión monótona $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que su sucesión de sumas parciales está uniformemente acotada, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente. Usando este criterio mostraremos primero que la serie converge.

Notemos que la sucesión $\{\frac{1}{\log n}\}_{n=2}^{\infty}$ es decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$ si $n \rightarrow \infty$. Ahora, mostremos que para cada $t \in T$, $\sum_{n=1}^N \sin(nt)$ está uniformemente acotada. Si $t = 2\pi k$, con

$k \in \mathbb{Z}$, el resultado es trivial. Supongamos que $t \neq 2\pi k$, entonces

$$\begin{aligned} 2 \sin(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) &= \cos\left(\left[n - \frac{1}{2}\right] t\right) - \cos\left(\left[n + \frac{1}{2}\right] t\right) \\ &= \cos\left(\left[n - 1 + \frac{1}{2}\right] t\right) - \cos\left(\left[n + \frac{1}{2}\right] t\right), \end{aligned}$$

por lo que si sumamos sobre $n = 1, 2, \dots, N$ obtendremos una suma telescópica y así

$$2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{n=1}^N \sin(nt) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \cos\left(\left[N + \frac{1}{2}\right] t\right),$$

y como $t \neq 2\pi k$ entonces $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$, lo que nos permite despejar el término de nuestro interés

$$\sum_{n=1}^N \sin(nt) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \cos\left(\left[N + \frac{1}{2}\right] t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N \sin(nt) \right| &= \left| \frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \cos\left(\left[N + \frac{1}{2}\right] t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \\ &\leq \frac{2}{|2 \sin \frac{t}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{t}{2}|}, \end{aligned}$$

lo cual implica que la sucesión de sumas parciales de la sucesión $\{\sin(nt)\}_{n=2}^{\infty}$ está uniformemente acotada.

Pero la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ no es una serie de Fourier, aún cuando $\log n > 0$ para toda $n \geq 2$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$, pues como

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\log(\log x)]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\log(\log t) - \log(\log 2)] = \infty \end{aligned}$$

tenemos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$.

4.2. Estimaciones con condiciones de regularidad

A continuación estudiaremos algunos resultados sobre el orden de magnitud de los coeficientes de Fourier de funciones que cumplen ciertas condiciones de regularidad.

Teorema 4.2.1. Sea $f \in L^1(T)$ una función absolutamente continua, entonces $\widehat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$ si $|n| \rightarrow \infty$.

Demostración. Como f es absolutamente continua entonces es la integral indefinida de su derivada, así

$$f(t) = \int_{-\pi}^t f'(\tau) d\tau.$$

Supongamos que $\widehat{f}(0) = 0$. Enseguida tenemos que para $n \neq 0$ $\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f'}(n)}{in}$ y dado que $f' \in L^1(T)$ entonces por el Lema de Riemann-Lebesgue $\widehat{f'}(n) \rightarrow 0$ si $|n| \rightarrow \infty$, por lo que $\widehat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$.

Ahora supongamos que $\widehat{f}(0) \neq 0$ y consideremos la función $g(t) = f(t) - \widehat{f}(0)$, la cual es absolutamente continua, $g'(t) = f'(t)$ casi en todas partes, para $n \neq 0$ $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ y $\widehat{g}(0) = 0$, entonces por el caso anterior $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ si $|n| \rightarrow \infty$. ■

Teorema 4.2.2. Sea $f \in L^1(T)$ una función k -veces diferenciable y $f^{(k)} \in L^1(T)$, entonces $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ si $|n| \rightarrow \infty$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\widehat{f}(0) = \widehat{f}'(0) = \dots = \widehat{f^{(k)}}(0) = 0$, pues en caso de no ser así basta con considerar las funciones $g_m(t) = f(t) - \widehat{f^{(m)}}(0)$ para cada $m = 0, 1, 2, \dots, k$.

Haciendo integración por partes obtenemos que para $k = 1$

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= in \widehat{f}(n),\end{aligned}$$

para $k = 2$

$$\begin{aligned}\widehat{f''}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \\ &= in \widehat{f}'(n) \\ &= (in)^2 \widehat{f}(n),\end{aligned}$$

y procediendo de esta manera $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$.

Así, $\widehat{f}(n) = \frac{1}{(in)^k} \widehat{f^{(k)}}(n)$. Además, como $f^{(k)} \in L^1(T)$ entonces por el Lema de Riemann-Lebesgue $\widehat{f^{(k)}}(n) \rightarrow 0$ cuando $|n| \rightarrow \infty$, de donde se sigue que $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ si $|n| \rightarrow \infty$. ■

Corolario 4.2.3. *Si f es k -veces diferenciable y $f^{(k)} \in L^1(T)$, entonces*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \min_{0 \leq j \leq k} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j}.$$

Demostración. Por el Teorema 4.2.2 sabemos que $\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f^{(j)}}(n)}{(in)^j}$, entonces

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &\leq \frac{|n|^{-j}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(j)}(t)| dt \\ &= |n|^{-j} \|f^{(j)}\|_1 \end{aligned}$$

para toda $j = 1, 2, \dots, k$, de donde se sigue que

$$|\widehat{f}(n)| \leq \min_{0 \leq j \leq k} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j}.$$
■

Corolario 4.2.4. *Si f es infinitamente diferenciable entonces*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \min_{0 \leq j} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j}.$$

Demostración. Por un argumento análogo al utilizada en el Teorema 4.2.2 tenemos que

$\widehat{f^{(j)}}(n) = (in)^j \widehat{f}(n)$ para toda $n, j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &\leq \frac{|n|^{-j}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(j)}(t)| dt \\ &= |n|^{-j} \|f^{(j)}\|_1 \end{aligned}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que

$$|\widehat{f}(n)| \leq \min_{0 \leq j} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j}.$$

■

Capítulo 5

Convergencia de Series de Fourier

En el primer capítulo estudiamos la convergencia de las series de Fourier en $L^2(T)$, obteniendo que si $f \in L^2(T)$ entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_2 = 0$, y a lo largo del desarrollo de esta tesis hemos visto que en otro sentido las series de Fourier representan a funciones en espacios de Banach homogéneos, particularmente en el espacio $L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$.

A partir de estos resultados una pregunta que surge es: si $f \in L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$ entonces ¿ $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_p = 0$? La respuesta a pesar de ser afirmativa para $1 < p < \infty$, excede el alcance de esta tesis. El caso restante, $p = 1$, es en el que nos centraremos la primera parte de este capítulo, donde obtendremos que la convergencia en norma no está garantizada en $L^1(T)$.

En la segunda parte del capítulo estudiaremos algunos criterios para la convergencia puntual de las series de Fourier en $L^p(T)$. Resulta que determinar si para $f \in L^p(T)$ se cumple que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$ casi en todas partes, es aún un problema más difícil de resolver que el problema de la convergencia en norma.

En 1926 Kolmogorov dio un ejemplo de una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto, así, la respuesta es negativa para $p = 1$. Por otra parte, Carleson demostró en 1965 que para $p = 2$ hay convergencia casi en todas partes, y dos años después Hunt lo demostró para $p > 1$. Hasta antes del resultado de Carleson se desconocía la solución del problema de la convergencia puntual cuando f es continua, así que en particular, Carleson mostró la convergencia puntual casi en todas partes de la serie de Fourier de f a f cuando f es continua.

5.1. Convergencia en norma

Definición 5.1.1. Sea B un espacio de Banach homogéneo en T . Decimos que B admite convergencia en norma si para toda $f \in B$ se tiene que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_B = 0$.

También, para $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos la familia de operadores lineales

$$\mathbf{S}_N : B \rightarrow B$$

$$f \mapsto S_N f.$$

El operador $\mathbf{S}_N$ está bien definido, pues $S_N f \in B$ por ser un polinomio trigonométrico. Además, denotaremos por $\|\mathbf{S}_N\|^B$ a su norma como operador.

Observación 5.1.2. Notemos que efectivamente $\mathbf{S}_N$ es un operador acotado:

En efecto, sea $f \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
 \|S_N f\|_B &= \left\| \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{in\cdot} \right\|_B \\
 &\leq \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)| \|e^{in\cdot}\|_B \\
 &\leq \left(\sup_{|n| \leq N} |\widehat{f}(n)| \right) \sum_{n=-N}^N \|e^{in\cdot}\|_B \\
 &\leq \|f\|_B \sum_{n=-N}^N \|e^{in\cdot}\|_B,
 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de que en un espacio de Banach homogéneo $B \subset L^1(T)$, y además $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1} \leq \|f\|_B$.

Así, $\|S_N f\|_B \leq M_N \|f\|_B$, donde $M_N = \sum_{n=-N}^N \|e^{in\cdot}\|_B$, lo cual demuestra que $\mathbf{S}_N \in \mathcal{L}(B)$.

Teorema 5.1.3. *Un espacio de Banach homogéneo $(B, \|\cdot\|_B)$ admite convergencia en norma si y solo si el conjunto $\{\|\mathbf{S}_N\|^B : N = 0, 1, 2, \dots\}$ es acotado, es decir, existe una constante K tal que*

$$\|\mathbf{S}_N f\|_B \leq K \|f\|_B \quad (5.1)$$

para toda $f \in B$ y toda $N \geq 0$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $S_n f \rightarrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$ en B para toda $f \in B$.

Así, la familia de operadores $\{\mathbf{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es puntualmente acotada y como B es un espacio de Banach entonces se sigue del Principio de Acotamiento Uniforme que existe una vecindad V del 0 tal que $\|S_n f\|_B \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y toda $f \in V$, con M alguna constante.

También existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subseteq V$, por lo tanto si $f \in B$ es tal que $\|f\|_B = 1$ entonces $\frac{\delta}{2}f \in B_\delta(0) \subseteq V$ de donde se sigue que $\|S_n(\frac{\delta}{2}f)\|_B \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de aquí que $\|S_nf\|_B \leq \frac{2M}{\delta}$ para toda $n \geq 0$.

Así

$$\|S_n\|^B = \sup_{\|f\|_B=1} \|S_nf\|_B \leq \frac{2M}{\delta}$$

para $n \geq 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos (5.1). Sea $f \in B$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $P(t) = \sum_{j=-N}^N a_j e^{ijt}$ un polinomio trigonométrico tal que $\|f - P\|_B < \frac{\varepsilon}{2K}$.

Si $n \geq N$ entonces $\hat{P}(j) = a_j$ para $|j| \leq N$ y $\hat{P}(j) = 0$ cuando $|j| > N$, así

$$\begin{aligned} S_n P(t) &= \sum_{j=-n}^n \hat{P}(j) e^{ijt} \\ &= \sum_{j=-N}^N a_j e^{ijt} = P(t) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|S_nf - f\|_B &= \|S_nf - S_nP + P - f\|_B \\ &\leq \|S_n(f - P)\|_B + \|P - f\|_B \\ &< K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon \frac{K+1}{2K}. \end{aligned}$$

■

Como hemos visto antes $S_n f = D_n * f$, donde D_n es el núcleo de Dirichlet. Debido a esto podemos encontrar una cota simple para $\|S_n\|^B$. De hecho, puesto que

$$\begin{aligned} \|D_n * f\|_B &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau) f_{\tau} d\tau \right\|_B \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\tau)| \|f_{\tau}\|_B d\tau = \|D_n\|_1 \|f\|_B, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\|S_n\|^B \leq \|D_n\|_1. \quad (5.2)$$

Llamamos constante de Lebesgue o número de Lebesgue a $L_n = \|D_n\|_1$. A continuación mostraremos que la sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$.

Lema 5.1.4. Para $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1).$$

Demostración. Como el seno es una función impar tenemos que

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{|\sin(\frac{t}{2})|} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{|\sin(\frac{t}{2})|} dt. \end{aligned}$$

Por otro lado podemos reescribir L_n de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sin \left(\left[n + \frac{1}{2} \right] t \right) \right| \left[\frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right] dt \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt. \\ &= A_n + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt, \end{aligned}$$

donde $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sin \left(\left[n + \frac{1}{2} \right] t \right) \right| \left[\frac{1}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} - \frac{1}{t} \right] dt$.

Primero estimemos A_n . Llamemos $\varphi(t) = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} - \frac{1}{t}$ y notemos que como $\sin u < u$ cuando $0 < u < \pi$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{t - 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)}{2t \sin \left(\frac{t}{2} \right)} > 0. \end{aligned}$$

Además, para cualquier $a > 0$, si $a \leq t \leq \pi$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq \frac{\pi + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right)}{2a \sin \left(\frac{a}{2} \right)} \\ &= \frac{\pi + 2}{2a \sin \left(\frac{a}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos las funciones $\varphi_1(t) = t - 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)$ y $\varphi_2(t) = 2t \sin \left(\frac{t}{2} \right)$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_1''(t)}{\varphi_2''(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \sin \left(\frac{t}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{t}{2} \sin \left(\frac{t}{2} \right)} = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es acotada en algún intervalo de la forma $[0, \beta]$ par alguna $\beta > 0$, de donde se sigue que φ es acotada en $[0, \pi]$. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sin \left(\left[n + \frac{1}{2} \right] t \right) \right| \varphi(t) dt \\ &\leq \frac{2}{\pi} \pi \|\varphi\|_{L^\infty([0, \pi])} \\ &= 2 \|\varphi\|_{L^\infty([0, \pi])}, \end{aligned}$$

es decir, $A_n = O(1)$.

Dado lo anterior,

$$\begin{aligned} L_n &= O(1) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt \\ &= O(1) + \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt \\ &\quad \left. + \int_{\frac{n\pi}{n+\frac{1}{2}}}^\pi \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt \right], \end{aligned}$$

donde la primera integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \equiv M < \infty,$$

con M alguna constante, y la segunda integral

$$\int_{\frac{n\pi}{n+\frac{1}{2}}}^\pi \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt = \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \equiv K < \infty,$$

donde K es alguna constante.

Por tanto,

$$L_n = O(1) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n + \frac{1}{2}]t)|}{t} dt. \quad (5.3)$$

Ahora para $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n+\frac{1}{2}]t)|}{t} dt &\leq \frac{n+\frac{1}{2}}{j\pi} \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \left| \sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]t\right) \right| dt \\
 &= \frac{1}{j\pi} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin u| du \\
 &= \frac{2}{j\pi}
 \end{aligned}$$

y sumando sobre $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tendremos

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n+\frac{1}{2}]t)|}{t} dt &\leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \\
 &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} \\
 &\leq \frac{4}{\pi^2} \left[1 + \int_1^2 \frac{dt}{t} + \dots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \right] \\
 &= \frac{4}{\pi^2} \left[1 + \int_1^n \frac{dt}{t} \right] \\
 &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \log n.
 \end{aligned}$$

Por lo anterior se sigue de (5.3) que

$$L_n \leq O(1) + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \log n. \quad (5.4)$$

Proseguimos con la estimación por debajo, considerando aún cada sumando en (5.3), para $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n+\frac{1}{2}]t)|}{t} dt &\geq \frac{n+\frac{1}{2}}{(j+1)\pi} \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \left| \sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]t\right) \right| dt \\
&= \frac{1}{(j+1)\pi} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin u| du \\
&= \frac{2}{(j+1)\pi},
\end{aligned}$$

luego sumando sobre $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin([n+\frac{1}{2}]t)|}{t} dt &\geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \\
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \\
&\geq \frac{4}{\pi^2} \left[\int_2^3 \frac{dt}{t} + \dots + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \right] \\
&\geq \frac{4}{\pi^2} \int_2^n \frac{dt}{t} \\
&= \frac{4}{\pi^2} [\log n - \log 2].
\end{aligned}$$

De esto y de (5.3) vemos que

$$L_n \geq O(1) + \frac{4}{\pi^2} \log n - \frac{4}{\pi^2} \log 2. \quad (5.5)$$

Juntando las desigualdades (5.4) y (5.5) obtenemos

$$-\frac{4}{\pi^2} \leq -\frac{4}{\pi^2} \log 2 \leq L_n - \frac{4}{\pi^2} \log n - O(1) \leq \frac{4}{\pi^2},$$

y por lo tanto, $L_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1)$. ■

Observación 5.1.5. *En el caso en que $B = L^1(T)$ tenemos que $\|\mathbf{S}_n\|^B = \|D_n\|_1$. En efecto, si F_N es el núcleo de Fejér entonces*

$$\begin{aligned}\|S_n(F_N)\|_1 &\leq \|\mathbf{S}_n\|^{L^1(T)} \|F_N\|_1 \\ &= \|\mathbf{S}_n\|_1^1.\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\|S_n(F_N)\|_1 &= \|D_n * F_N\|_1 \\ &= \|F_N * D_n\|_1 \\ &= \|\sigma_N D_n\|_1\end{aligned}$$

y puesto que $\sigma_N(D_n) \rightarrow D_n$ cuando $N \rightarrow \infty$ en $L^1(T)$, obtenemos

$$\|\mathbf{S}_n\|^{L^1(T)} \geq \|D_n\|_1,$$

y en virtud de (5.2) concluimos la igualdad.

Como consecuencia de esto y el Lema 5.1.4, se sigue que $L^1(T)$ no admite convergencia en norma, esto es, la serie de Fourier de $f \in L^1(T)$ no converge en general a f en $L^1(T)$.

Observación 5.1.6. *Sabemos que si $B = C(T)$, la convergencia en norma es simplemente la convergencia uniforme. Mostraremos que la serie de Fourier de una función continua no necesariamente converge uniformemente.*

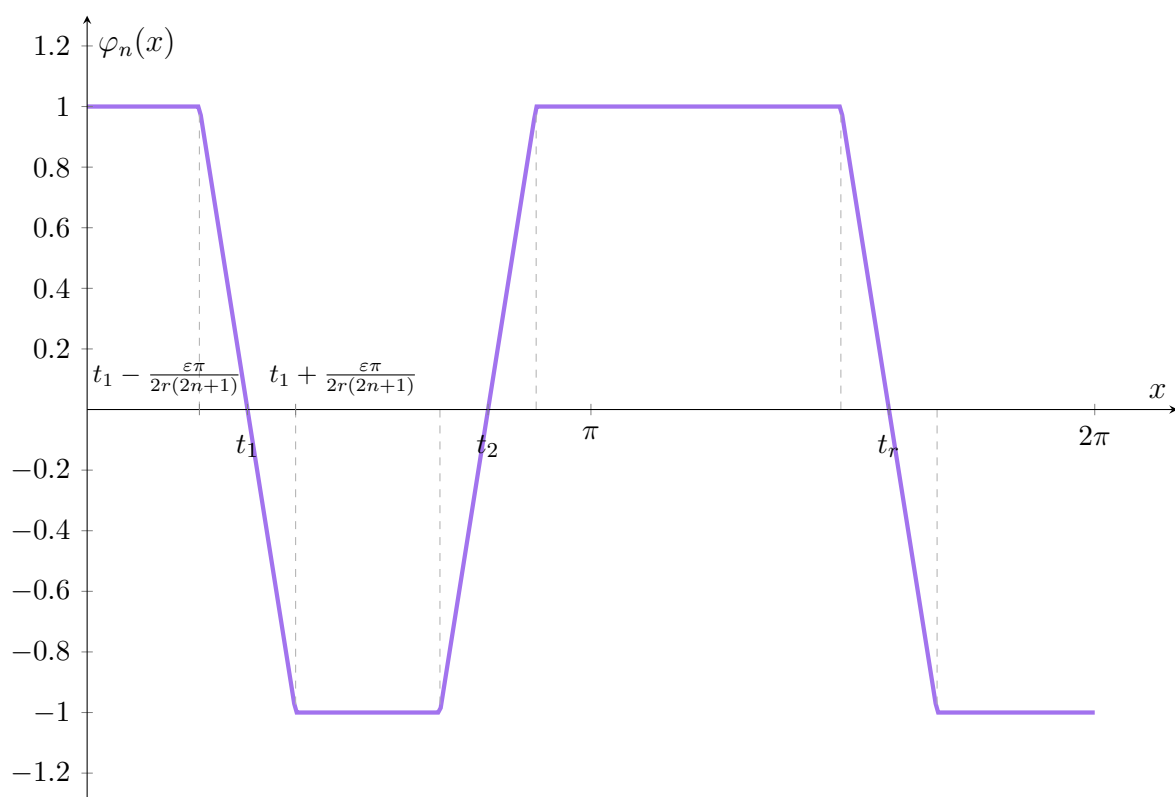
Para ello, probaremos que la sucesión $\{\|\mathbf{S}_n\|^{C(T)}\}_{n=1}^{\infty}$ es no acotada, de hecho veremos que $\|\mathbf{S}_n\|^{C(T)} = L_n$.

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ el núcleo de Dirichlet D_n tiene un número finito de ceros en el intervalo $[0, 2\pi]$, digamos $t_1, t_2, \dots, t_r$, por lo tanto $\text{sgn}(D_n(t))$ tiene r saltos.

Para $\varepsilon > 0$ definamos los intervalos

$$I_n^{(j)} = \left(t_j - \frac{\varepsilon\pi}{2r(2n+1)}, t_j + \frac{\varepsilon\pi}{2r(2n+1)} \right)$$

para cada $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Modificamos $\text{sgn}(D_n(t))$ en los intervalos $I_n^{(j)}$ de tal manera que obtengamos una función continua φ_n mostrada en la siguiente gráfica:



Notemos que $\sum_{j=1}^r \ell(I_n^{(j)}) = \frac{\varepsilon\pi}{2n+1}$ y $\|\varphi_n\|_\infty = 1$. Así,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{S}_n\|^{C(T)} &\geq \|S_n(\varphi_n)\|_\infty \\
&\geq |S_n(\varphi_n)(0)| \\
&= |D_n * \varphi_n(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \varphi_n(t) dt \right| \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{T \cup I_n^{(j)}} D_n(t) \operatorname{sgn}(D_n(t)) dt \right| - \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\cup I_n^{(j)}} D_n(t) \varphi_n(t) dt \right| \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \int_{T \cup I_n^{(j)}} |D_n(t)| dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\cup I_n^{(j)}} |D_n(t)| dt \\
&= L_n - \frac{2}{2\pi} \int_{\cup I_n^{(j)}} |D_n(t)| dt,
\end{aligned}$$

y como $|D_n(t)| \leq 2n+1$ entonces

$$\|\mathbf{S}_n\|^{C(T)} \geq L_n - \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, lo cual junto a la desigualdad (5.2) demuestra la afirmación.

Aunque se encuentra fuera del alcance de esta tesis, empleando el operador de conjugación es posible probar que la serie de Fourier de toda $f \in L^p(T)$, con $1 < p < \infty$, converge a f en la norma de $L^p(T)$.

5.2. Convergencia puntual

En la sección previa vimos que la serie de Fourier de una función continua no necesariamente converge uniformemente. Aquí veremos que la convergencia puntual también puede fallar.

Teorema 5.2.1. *Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.*

Demostración. Los funcionales lineales

$$\begin{aligned} T_n : C(T) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto S_n f(0) \end{aligned}$$

son tales que

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &= |S_n f(0)| \\ &\leq \|S_n f\|_\infty \\ &\leq \|\mathbf{S}_n\|^{C(T)} \|f\|_\infty \end{aligned} \tag{5.6}$$

y por tanto son funciones lineales continuas en $C(T)$. Además, la desigualdad (5.6) junto con la Observación 5.1.6 implica que

$$|T_n(f)| \leq L_n \|f\|_\infty.$$

Como vimos antes es posible encontrar una función continua φ_n tal que $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ y

$$|T_n(\varphi_n)| \geq L_n - \varepsilon \quad (5.7)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Entonces, por las desigualdades (5.6) y (5.7) obtenemos que

$$\|T_n\| = L_n \rightarrow \infty$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Así, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ no son uniformemente acotadas y por el Principio de acotamiento uniforme, existe una función continua f tal que $\{S_n f(0)\} = \{T_n(f)\}$ es no acotada, y por tanto, la serie de Fourier de f diverge no acotadamente en $t = 0$. ■

Definición 5.2.2. Sea $E \subseteq T$, llamamos a E conjunto de divergencia para $C(T)$ si existe $f \in C(T)$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto de E .

Es posible mostrar que todo conjunto de medida cero en T es un conjunto de divergencia para $C(T)$.

Más aún, puede demostrarse que, o bien, T es un conjunto de divergencia para $C(T)$, o bien los conjuntos de divergencia para $C(T)$ son los conjuntos de medida cero. De hecho, este resultado también es válido si B es un espacio de Banach homogéneo tal que $C(T) \subseteq B$ y se verifica que: para $f \in B$ y $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $e^{int}f \in B$ y $\|e^{int}f\|_B = \|f\|_B$.

Así, para espacios B como $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, o $B = C(T)$, o bien existe una función $f \in B$ cuya serie de Fourier diverge en todas partes, o bien, la serie de Fourier de cada

$f \in B$ converge casi en todas partes. En el caso de $B = L^1(T)$, Kolmogorov demostró que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto. Como se ha mencionado antes, el caso $p = 2$ fue mostrado por Carleson y Hunt lo probó para $1 < p < \infty$, obteniendo así que la serie de Fourier de funciones en $L^p(T)$ convergen casi en todas partes.

Finalizaremos presentando algunos criterios para la convergencia puntual de series de Fourier de funciones en $L^1(T)$.

Proposición 5.2.3. *Sea $f \in L^1(T)$ y supóngase que*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt < \infty$$

para algún $\delta > 0$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(0) = 0$.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} S_n f(0) &= (D_n * f)(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left[n + \frac{1}{2} \right] t \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin \frac{t}{2}} \left[\sin(nt) \cos \frac{t}{2} + \cos(nt) \sin \frac{t}{2} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin(nt) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt. \end{aligned}$$

Pero recordemos que $\frac{|t|}{\pi} \leq \left| \sin \frac{t}{2} \right| \leq \frac{|t|}{2}$ para $0 < |t| < \pi$, lo cual implica que

$$2 \frac{|f(t)|}{|t|} \leq \frac{|f(t)|}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|} \leq \pi \frac{|f(t)|}{|t|}$$

y por hipótesis $\frac{f(t)}{t} \in L^1([-\delta, \delta])$ obteniendo así que $\frac{f(t) \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \in L^1(T)$.

Por el Lema de Riemann-Lebesgue sabemos que los coeficientes de Fourier de una función en $L^1(T)$ tienden a cero cuando $|n| \rightarrow \infty$, con lo cual queda probado que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(0) = 0$. ■

El siguiente principio expresa que la convergencia de la serie de Fourier es una propiedad local.

Teorema 5.2.4. (*Principio de localización de Riemann*) Sea $f \in L^1(T)$ y supóngase que f se anula en un intervalo abierto I . Entonces $S_n f(t)$ converge a cero para toda $t \in I$.

Demostración. Sea $t_0 \in I$, entonces es posible hallar $\delta > 0$ tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$.

Así

$$\begin{aligned} S_n f(t_0) &= (D_n * f)(t_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - \tau) D_n(\tau) d\tau \end{aligned}$$

y como $f(t_0 - \tau) = 0$ para $|\tau| < \delta$ entonces

$$\int_{|\tau| < \delta} \frac{f(t_0 - \tau)}{|\tau|} d\tau < \infty.$$

Consideremos la función $g(\tau) = f(t_0 - \tau)$, por la Proposición 5.2.3 sabemos que $S_n g(0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Pero

$$\begin{aligned}
 S_n g(0) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) e^{ik0} = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) \\
 &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(-k) e^{-ikt_0} = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt_0} \\
 &= S_n f(t_0),
 \end{aligned}$$

esto es, $S_n f(t_0) \rightarrow 0$ válido para toda $t_0 \in I$. ■

El principio de localización suele establecerse del modo siguiente: “Si $f, g \in L^1(T)$ y $f(t) = g(t)$ en una vecindad V de un punto t_0 , entonces las series de Fourier de f y g en t_0 , o bien, ambas convergen al mismo límite, o bien, ambas divergen del mismo modo en V ”.

Teorema 5.2.5. (*Prueba de Dini*) Sea $f \in L^1(T)$. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t+t_0) - f(t_0)|}{|t|} dt < \infty$$

entonces $S_n f(t_0) \rightarrow f(t_0)$.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
 S_n f(t_0) - f(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - \tau) D_n(\tau) d\tau - f(t_0) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_0 - \tau) - f(t_0)) D_n(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\tau + t_0) - f(t_0)) D_n(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Sea $h(\tau) = f(\tau + t_0) - f(t_0)$, por hipótesis tenemos que

$$\int_{|\tau| < \delta} \frac{|h(\tau)|}{|\tau|} d\tau < \infty.$$

Entonces, por la Proposición 5.2.3 obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n h(0) = 0.$$

$$\text{Pero } S_n h(0) = \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) e^{ik0} = \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \widehat{h}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau + t_0) - f(t_0)] e^{-ik\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(u) - f(t_0)] e^{-ik(u-t_0)} du \\ &= \frac{e^{ikt_0}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du - \frac{e^{ikt_0}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0) e^{-iku} du. \end{aligned}$$

Por tanto

$$S_n h(0) = \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) e^{ikt_0} - f(t_0) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, $S_n f(t_0) \rightarrow f(t_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

■

Teorema 5.2.6. (*Criterio de Jordan*) Si f es una función 2π -periódica y de variación acotada en una vecindad del punto x , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) .$$

En particular, si f es continua en x , la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración. Dado que toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que f es creciente en una vecindad de x .

Dado que el nucleo de Dirichlet D_N es par, tendremos que

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-t) + f(x+t)] D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Tampoco hay pérdida de generalidad en suponer que $x = 0$, ya que si demostramos que para funciones g crecientes en una vecindad de 0, se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(t) D_N(t) dt = \frac{1}{2} g(0^+) \quad (5.8)$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(-t) D_N(t) dt = \frac{1}{2} g(0^-) \quad (5.9)$$

tendremos lo requerido para $x = 0$ y así, para el caso general podemos considerar la función $f_x(t) = f(x+t)$ la cual es creciente en una vecindad de 0, por lo que aplicando

lo previamente demostrado obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) D_N(t) dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f_x(t) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2} f_x(0^+) \\ &= \frac{1}{2} f(x^+)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x-t) D_N(t) dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f_x(-t) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2} f_x(0^-) \\ &= \frac{1}{2} f(x^-),\end{aligned}$$

es decir, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$.

Probaremos (5.8) y la prueba para (5.9) será similar. Notemos que también podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g(0^+) = 0$, pues al probar (5.8) para este tipo de funciones, en el caso general podemos considerar $G(t) = g(t) - g(0^+)$ la cual es creciente en una vecindad de 0 y $G(0^+) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2} G(0^+) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi G(t) D_N(t) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (g(t) - g(0^+)) D_N(t) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt - g(0^+) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_N(t) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt - \frac{g(0^+)}{2},\end{aligned}$$

ya que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(t) dt = 1;$$

así

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt = \frac{g(0^+)}{2}.$$

Ahora, pasemos a la prueba de (5.8) suponiendo que g es una función creciente en una vecindad de 0 y que $g(0^+) = 0$. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$ entonces $g(t) < \varepsilon$.

Así, escribamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta g(t) D_N(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi g(t) D_N(t) dt \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi g(t) \frac{\sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right)}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi G(t) \sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right) dt, \end{aligned}$$

donde $G(t) = \frac{g(t)}{\sin \frac{t}{2}} \chi_{\{\delta < t < \pi\}}(t) \in L^1(T)$. Haciendo el cambio de variable $s = \frac{t}{2}$, $ds = \frac{dt}{2}$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G(2s) \sin ([2N + 1] s) 2ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) \sin ([2N + 1] s) ds, \end{aligned}$$

donde $F(s) = 2G(2s)\chi_{|s| < \frac{\pi}{2}}(s) \in L^1(T)$.

Por el Lema de Riemann-Lebesgue se sigue que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) \sin ([2N + 1] s) ds \\ &= -Im \left(\widehat{F}(2N + 1) \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $N \rightarrow \infty$.

Para analizar la integral I_1 usaremos el segundo teorema de valor medio para integrales de Riemann, a saber: Si ϕ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y h es una función monótona en $[a, b]$ entonces existe c , con $a < c < b$, tal que

$$\int_a^b h(x)\phi(x)dx = h(b^-) \int_c^b \phi(x)dx + h(a^+) \int_a^c \phi(x)dx.$$

Así, podemos encontrar ν , con $0 < \nu < \delta$ tal que

$$\int_0^\delta g(t)D_N(t)dt = g(\delta^-) \int_\nu^\delta D_N(t)dt.$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\nu}^{\delta} D_N(t) dt \right| &= \left| \int_{\nu}^{\delta} \frac{\sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right)}{\sin \frac{t}{2}} dt \right| \\
 &= \left| 2 \int_{\nu}^{\delta} \frac{\sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| \\
 &\leq \left| 2 \int_{\nu}^{\delta} \sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right) \left[\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] dt \right| \\
 &\quad + \left| 2 \int_{\nu}^{\delta} \frac{\sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right)}{t} dt \right| \\
 &\leq 2 \int_{\nu}^{\delta} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right| dt \\
 &\quad + \left| 2 \int_{\nu}^{\delta} \frac{\sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right)}{t} dt \right| \\
 &\equiv I_{1,1} + I_{1,2}.
 \end{aligned}$$

Por la prueba del Lema 5.1.4 sabemos que la integral $I_{1,1}$ está acotada, digamos por M_1 . Con respecto a $I_{1,2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 I_{1,2} &= 2 \left| \int_{\nu}^{\delta} \frac{\sin \left(\left[N + \frac{1}{2} \right] t \right)}{t} dt \right| \\
 &= 2 \left| \int_{(N+\frac{1}{2})\nu}^{(N+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin t}{t} dt \right| \\
 &\leq 2 \sup_{L>0} \left| \int_0^L \frac{\sin t}{t} dt \right| \\
 &\equiv M_2 < \infty,
 \end{aligned}$$

ya que $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta g(t) D_N(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} |g(\delta^-)| (I_{1,1} + I_{1,2}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |g(\delta^-)| (M_1 + M_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} g(\delta^-) (M_1 + M_2) \\ &< \frac{(M_1 + M_2)}{2\pi} \varepsilon, \end{aligned}$$

concluyendo así la prueba del teorema. ■

Conclusiones

El problema de la convergencia de las series de Fourier, además de darnos una herramienta de representación de funciones, impulsó el desarrollo del análisis matemático, motivando la reformulación de objetos elementales como función, límite e integral, obteniendo así importantes avances en la teoría de la integración.

Asimismo, la interpretación de las series de Fourier de funciones de $L^2(T)$ nos permite ver la importancia de la estructura de un espacio de Hilbert y notar lo esenciales que son conceptos como las bases ortogonales y los operadores lineales, obteniendo así una aplicación fundamental de la teoría de espacios de Hilbert.

Por otro lado, al intentar extender los resultados obtenidos en $L^2(T)$ a $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, nos topamos con un problema más difícil de manejar: una función en $L^1(T)$ no garantiza la convergencia bajo norma. Sin embargo, a través de núcleos de sumabilidad como el núcleo de Fejér, el núcleo de la Vallée Poussin y el núcleo de Poisson es posible representar a funciones en $L^1(T)$, donde destaca el núcleo de Fejér por la convergencia en $L^1(T)$ de las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(T)$ a f , y dicha convergencia en norma se mantiene en espacios de Banach

homogéneos como $L^p(T)$, $1 < p < \infty$, $C(T)$ y $C^n(T)$. De hecho, cuando f es una función continua está garantizada la convergencia uniforme de $\sigma f(t)$ a f .

En cuanto a la convergencia puntual, tampoco está garantizada para funciones en $L^1(T)$ e incluso es posible probar que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. Por tanto, es necesario plantear condiciones adicionales para obtener criterios de convergencia, entre ellos, la prueba de Dini y el criterio de Jordan.

Bibliografía

- [1] Javier Duoandikoetxea. 200 años de convergencia de las series de fourier. *La Gaceta de la RSME*, 4(1):77–107, 2001.
- [2] Javier Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*. American Mathematical Society, 2001.
- [3] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, 1999.
- [4] Frank Jones. *Lebesgue Integration on Euclidean Spaces*. Jones & Bartlett Learning, 2001.
- [5] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Fourier Analysis*. Dover Publications, 2004.
- [6] Thomas William Körner. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- [7] María Cristina Pereyra and Lesley A. Ward. *Harmonic Analysis: From Fourier to Wavelets*. American Mathematical Society, 2012.
- [8] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [9] Antoni Zygmund. *Trigonometric Series*, volume 1 & 2. Cambridge University Press, 2002.