"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Continuidad de seminormas en espacios lineales

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Carlos Enrique Márquez Yocupicio

Directora de tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Diciembre de 2023

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dra. Maria Teresa Robles Alcaraz

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Carlos Alberto Robles Corbala

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Luis René San Martín Jiménez

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

A mis padres.

A mi tío Roman Yocupicio Félix que en paz descanse.

Agradecimientos

En primer lugar a mis padres Ramona Yocupicio y Luis Enrique por darme su apoyo moral, emocional y económico. A mi abuela Cuquita y a mis tías Flor y Belem porque siempre creyeron en mi capacidad y tenacidad, esperando siempre lo mejor de mi.

A mis compañeros y amigos, Alexis y Susana por darme alegres y divertidos momentos y siempre darme animos durante la carrera. De igual manera a Jesse, Carlon, Eliot, Ítalo, Rafa, entre otros, por estar presentes y apoyarme en mis últimos semestres para concluir mi carrera. A mis amigos de la infancia Manuel y Fernando por estar siempre presentes en las buenas y en las malas. A mis hermanos Luis Rey y Marian Itzel, por brindarme su apoyo y paciencia en mis últimos años de carrera.

A todos los profesores del Departamento de Matemáticas que me impartieron materias y que tuvieron la disposición, paciencia y apoyo para mejorar mis conocimientos matemáticos. En especial, a mi directora de tesis Dra. Martha Dolores Guzmán Partida, por su paciencia, confianza y su gran apoyo durante la culminación de mi trabajo de tesis. También agradezco a mis sinodales Maria Teresa, Luis René y Carlos Robles por dedicar el tiempo para la revisión de esta tesis.

Introducción

El objetivo de esta tesis es analizar la continuidad y discontinuidad de seminormas con respecto a la topología inducida por una norma en un espacio vectorial en el caso de dimensión finita e infinita. Además, se indaga la noción de equivalencia en dichos espacios.

En el capítulo 1, se presentan los conceptos básicos de espacios normados que serán necesarios en esta tesis. Estos conceptos hablan sobre propiedades importantes de espacios normados de dimensión finita. Además, introducimos la definición de base de Hamel.

En el capitulo 2, se presentan la definición de seminorma y de subnorma, así como ejemplos y propiedades de continuidad en espacios vectoriales de dimensión finita. Adicionalmente, nos centraremos en la equivalencia entre subnormas y la equivalencia por la izquierda entre una seminorma y una subnorma.

En el capítulo 3, se estudia la continuidad de seminormas en espacios vectoriales de dimensión infinita. Se comienza hablando sobre la continuidad y discontinuidad de una seminorma con respecto a la topología inducida por una norma. Presentamos un resultado que nos dice que una seminorma es continua con respecto a una norma, pero discontinua con respecto a otra. Después, analizamos la continuidad de una seminorma con respecto a cualquier norma.

Finalmente, en el capítulo 4 se estudia el concepto de seminorma propia e indagamos si todas las seminormas pueden ser continuas en espacios vectoriales de dimensión infinita. Para ello, se presenta un resultado sobre la discontinuidad de una seminorma propia con respecto a una norma. Luego, se finaliza el capítulo con un ejemplo sobre la relación entre una seminorma continua con respecto a un par de normas.

Índice general

Índice general v

1. Preliminares 1
   1.1. Espacios normados 1
   1.2. Espacios normados de dimensión finita 9
   1.3. Espacios de Banach 15
   1.4. Transformaciones lineales entre espacios normados 29

2. Continuidad de seminormas en espacios de dimensión finita 41
   2.1. Seminormas en espacios vectoriales 41
   2.2. Continuidad 45

3. Continuidad de seminormas en espacios de dimensión infinita 52

4. Seminormas propias 58

Conclusiones 61

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios normados

En este capítulo introducimos conceptos básicos sobre espacios normados. Nuestro campo de escalares será denotado por K, donde K será siempre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio vectorial sobre un campo K. Una norma en X es una función $N : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in K$ se satisface lo siguiente:*

(i) $N(x) \geq 0$.

(ii) Si $N(x) = 0$, *entonces* $x = 0$.

(iii) $N(\alpha x) = |\alpha| \, N(x)$.

(iv) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

A la pareja (X, N) le llamamos espacio normado. La condición (iv) es conocida como la desigualdad del triángulo. Antes de mostrar ejemplos de espacios normados, daremos los siguientes resultados que serán utilizados posteriormente.

Proposición 1.1.1. *Sea (X, N) un espacio normado. Entonces:*
(a) $N(0) = 0$.
(b) $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ *para todo* $x, y \in X$.

Demostración. (a) Supongamos que $N(0) \neq 0$ y sea $\lambda \in K$ tal que $\lambda \neq 0$. Entonces, $N(0) = N(\lambda \cdot 0) = |\lambda|\, N(0)$. Entonces la ecuación anterior implica que $|\lambda| = 1$. Pero esto no es posible, ya que λ fue una elección arbitraria. Por lo tanto, $N(0) = 0$.

(b) Sea $x, y \in X$. Por la desigualdad del triángulo,

$$N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y),$$

entonces

$$N(x) - N(y) \leq N(x - y). \tag{1.1}$$

Análogamente, de la desigualdad

$$N(y) \leq N(x - y) + N(x),$$

obtenemos

$$N(y) - N(x) \leq N(x - y). \tag{1.2}$$

Así, por las ecuaciones (1.1) y (1.2), se concluye

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

∎

A la función $d(x, y) = N(x - y)$ definida en X le llamamos la métrica inducida por la norma. Esto nos dice que todo espacio normado es un espacio métrico. Sin embargo, no todas las métricas son inducidas por una norma.

En particular, una métrica que no es inducida por una norma es la métrica discreta, lo cual podemos mostrar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.1. *Sea X un conjunto arbitrario no vacío con al menos dos elementos. La métrica discreta para $x, y \in X$ la definimos de la siguiente forma*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y. \end{cases}$$

Supongamos que d es inducida por una norma N en X. Tomemos $\lambda = 2$ y sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, entonces

$$d(\lambda x, \lambda y) = N(\lambda x - \lambda y) = |\lambda| \, N(x - y) = |\lambda| \, d(x, y) = |\lambda| \cdot 1.$$

Como $x \neq y$, entonces $d(\lambda x, \lambda y) = 1$, por tanto $|\lambda| = 1$. Esto contradice nuestra elección de λ, lo cual implica que d no es inducida por una norma.

En un espacio vectorial se pueden definir distintas normas, obteniendo así, varios espacios normados de un mismo espacio vectorial X. Para ver esto, sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto

$$K^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in K \quad \text{para} \quad i = 1, ..., n\}.$$

Notemos que K^n es el conjunto de vectores de n-coordenadas y se puede verificar fácilmente que es un espacio vectorial sobre K con las operaciones de suma y multiplicación de vectores por un escalar. A partir de este espacio, podemos presentar algunos ejemplos de espacios normados.

Ejemplo 1.1.2. *Sea $x = (x_1, ..., x_n)$ en K^n y $p \geq 1$. Definamos*

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vamos a demostrar que se verifican las propiedades de la Definición 1.1.1. Claramente, se cumple la propiedad (i). Además,

$$N_p(\lambda x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, N_p(x)$$

para todo $\lambda \in K$ *y* $x \in K^n$*. Ahora, si* $N_p(x) = 0$*, entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 0,$$

así, $x_i = 0$ *para todo* $i = 1, ..., n$*, luego* $x = 0$*. Por lo tanto las propiedades (ii) y (iii) se cumplen. La propiedad (iv) es exactamente la desigualdad de Minkowski. En efecto,*

$$\begin{aligned} N_p(x+y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= N_p(x) + N_p(y) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in K^n$*. Por lo tanto* (K^n, N_p) *es un espacio normado que suele denotarse como* ℓ_n^p*.*

Ejemplo 1.1.3. *Sea* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *en* K^n*. Definamos*

$$N_\infty(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$

Es claro que el inciso i) se cumple. Sea $\lambda \in K$*, entonces*

$$N_\infty(\lambda x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = |\lambda| N_\infty(x)$$

para todo $x \in K^n$*. Ahora supongamos que* $N_\infty(x) = 0$*, entonces*

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0,$$

lo cual implica que $x_i = 0$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$*, entonces* $x = 0$*. Por lo tanto se cumplen los incisos (ii) y (iii). Ahora probaremos la desigualdad del triángulo. Para ello,* *sean* $x, y \in K^n$, *entonces para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *tenemos*

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \,.$$

Luego,

$$N_\infty(x+y) = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| \leq \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| + \sup_{1\leq i\leq n} |y_i| = N_\infty(x) + N_\infty(y).$$

Por lo tanto N_∞ *es una norma en* K^n, *y suele denotarse por* ℓ_n^∞.

El conjunto $K^{\mathbb{N}}$ es el espacio de sucesiones en K. Definimos las siguientes operaciones para $x, y \in K^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in K$: si $x = (x_n)_{n=1}^\infty$, $y = (y_n)_{n=1}^\infty$:

$$x + y = (x_n + y_n)_{n=1}^\infty,$$

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_n)_{n=1}^\infty.$$

Estas operaciones convierten a $K^{\mathbb{N}}$ en un espacio vectorial. A partir de este espacio vectorial podemos obtener los siguientes espacios normados.

Ejemplo 1.1.4. *El conjunto* $\ell^\infty = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in K^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ *es un subespacio vectorial de* $K^{\mathbb{N}}$, *y para* $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ *definimos*

$$N_\infty(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \,.$$

Es claro que (i) se cumple. Sea $\lambda \in K$, *entonces*

$$N_\infty(\lambda x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n| = |\lambda|\, N_\infty(x)$$

para todo $x \in \ell^\infty$. *Supongamos que* $N_\infty(x) = 0$, *entonces*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0,$$

por lo que $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$. Por lo tanto los incisos (ii) y (iii) se cumplen. Ahora sea $x, y \in \ell^\infty$, entonces

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n|,$$

así

$$N_\infty(x + y) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y).$$

Por lo tanto, N_∞ es una norma para ℓ^∞.

Consideremos el conjunto

$$\ell^p = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in K^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$$

tal que $1 \leq p \leq \infty$. Este conjunto es un espacio vectorial sobre K. En efecto, sean $x, y \in \ell^p$ y $\lambda \in K$, entonces

$$\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty,$$

y así $\lambda x \in \ell^p$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
|x_n + y_n|^p &\leq (|x_n| + |y_n|)^p \\
&\leq (2 \cdot \text{máx}\{|x_n|, |y_n|\})^p \\
&= 2^p \cdot (\text{máx}\{|x_n|, |y_n|\})^p \\
&= 2^p \cdot \text{máx}\{|x_n|^p, |y_n|^p\} \\
&\leq 2^p \cdot (|x_n|^p + |y_n|^p),
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right) < \infty,$$

entonces $x + y \in \ell^p$, por lo tanto ℓ^p es un espacio vectorial sobre K. El siguiente ejemplo nos exhibe una norma para ℓ^p.

Ejemplo 1.1.5. *Sea $x \in \ell^p$. Definamos*

$$N_p(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Claramente, el inciso (i) se cumple. Los incisos (ii) y (iii) se demuestran de forma análoga como en el Ejemplo 1.1.2. Aplicando la desigualdad de Minkowski para todo $x, y \in \ell^p$, obtenemos

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq N_p(x) + N_p(y)$$

para todo k natural, entonces

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p \leq (N_p(x) + N_p(y))^p,$$

como es válido para todo k natural, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p \leq (N_p(x) + N_p(y))^p,$$

lo cual implica que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq N_p(x) + N_p(y),$$

es decir,

$$N_p(x + y) \leq N_p(x) + N_p(y).$$

Por lo tanto N_p es una norma para ℓ^p.

Ahora sean

$$c_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : x_n \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty\} \quad \text{y}$$

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : \quad \text{existe} \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad x_n = 0 \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0\}.$$

Notemos que para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ y $\lambda \in K$, dado que

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

$$|\lambda x_n| = |\lambda|\,|x_n|$$

y puesto que $x_n \to 0$ y $y_n \to 0$ entonces $x_n + y_n \to 0$ y $\lambda x_n \to 0$. Claramente, la sucesión de ceros se encuentra en c_0, por tanto c_0 es un espacio vectorial sobre K. Análogamente, c_{00} es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.6. *Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Entonces podemos definir la norma N_∞ en c_0, ya que toda sucesión convergente está acotada, por tanto N_∞ es una norma c_0. Es fácil probar que (c_0, N_∞) es un espacio normado. Análogamente, N_∞ es una norma en c_{00}.*

Se puede verificar fácilmente que también la norma N_∞ está definida en el conjunto c=$\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente$\}$, obteniendo así otro espacio normado.

Sea X un espacio métrico compacto y sea $C(X,\mathbb{R})$=$\{f : X \longrightarrow \mathbb{R}$: f es continua$\}$. Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones canónicas de suma y producto por un escalar. Podemos definir normas para este espacio vectorial como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.7. *Sea $f \in C(X,\mathbb{R})$. Definamos la siguiente norma*

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

y para el caso $X = [a, b]$ definimos

$$N_1(f) = \int_a^b |f(x)|\; dx.$$

Estas normas están bien definidas ya que toda función continua definida en un compacto es acotada e integrable según Riemann. Puede verse fácilmente que N_∞ y N_1 son normas para $C(X, \mathbb{R})$.

También podemos obtener un espacio normado para el producto cartesiano de dos espacios normados (X, N_X) y (Y, N_Y). Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ y $\lambda \in K$ definamos

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Es claro que el vector nulo se encuentra en $X \times Y$ y con las operaciones definidas puede verse que $X \times Y$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.8. *Sea $(x, y) \in (X, Y)$. Las siguientes funciones son ejemplos de normas en $X \times Y$:*

(a) $N_1(x, y) = N_X(x) + N_Y(y)$.

(b) $N_\infty(x, y) = \text{máx}\{N_X(x), N_Y(y)\}$.

(c) Sea $p \geq 1$. $N_p(x, y) = [(N_X(x))^p + (N_Y(y))^p]^{\frac{1}{p}}$.

1.2. Espacios normados de dimensión finita

En esta sección, mostramos algunos resultados de espacios normados de dimensión finita que serán importantes posteriormente en esta tesis.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio vectorial sobre K y sean N_1 y N_2 dos normas en X. Decimos que las normas son equivalentes si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x)$$

para todo $x \in X$.

Dos normas equivalentes N_1 y N_2 en un espacio vectorial X generan la misma familia de abiertos. En efecto, sea A un abierto en (X, N_1), y sea $x \in A$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B_{\epsilon}^{N_1}(x) \subseteq A.$$

Si tomamos cualquier y en la bola abierta $B_{\lambda\epsilon}^{N_2}(x)$, entonces

$$N_2(x-y) < \lambda\epsilon,$$

y dado que N_1 y N_2 son equivalentes, entonces

$$\lambda N_1(x-y) \leq N_2(x-y) < \lambda\epsilon.$$

Ahora, multiplicando por $\frac{1}{\lambda}$, tenemos

$$N_1(x-y) < \epsilon.$$

Esto implica que $y \in B_{\epsilon}^{N_1}(x)$, es decir, $B_{\lambda\epsilon}^{N_2}(x) \subseteq B_{\epsilon}^{N_1}(x) \subseteq A$. Por tanto, A es abierto en el espacio (X, N_2). Análogamente, se prueba que todo abierto de (X, N_2) es abierto de (X, N_1). Por lo tanto, ambas normas generan la misma familia de abiertos.

Esta definición, nos motiva a analizar los espacios vectoriales en donde todas las normas son equivalentes. El siguiente teorema nos da una respuesta.

Teorema 1.2.1. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre K. Entonces cualesquiera dos normas en X son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) = n$ y sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de X. Así, para cada $x \in X$ existe un único $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Sea N una norma en X, y sea la función $N_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$N_2(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

donde $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Notemos que N_2 está bien definida ya que la expresión para x en términos de la base es única. Además, es claro que $N_2(x) \geq 0$. Si $N_2(x) = 0$, entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$ tenemos que $\alpha_i = 0$, lo cual implica que $x = 0$. Ahora, si $\lambda \in K$ entonces

$$N_2(\lambda x) = \left[\sum_{i=1}^{n} |\lambda\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[|\lambda|^2 \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\, N_2(x)$$

para cada $x \in X$.

La desigualdad del triángulo se demuestra fácilmente aplicando la Desigualdad de Minkowski, por tanto N_2 es una norma en X.

Probaremos que N y N_2 son equivalentes. Sea $M = máx\{N(e_1), ..., N(e_n)\}$, entonces

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| N(e_i) \leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Aplicando la Desigualdad de Hölder, obtenemos

$$N(x) \leq M \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} 1^2\right]^{\frac{1}{2}} = M\sqrt{n} \cdot N_2(x),$$

por lo tanto

$$N(x) \leq M\sqrt{n} \cdot N_2(x). \tag{1.3}$$

Ahora, sea $f : K^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como

$$f(\alpha) = N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)$$

para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$. Veamos que f es continua en (K^n, N_2), donde aquí N_2 representa la norma euclidiana en K^n. Sea $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in K^n$, entonces

$$\begin{aligned} |f(\alpha) - f(\beta)| &= \left| N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) - N\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) \right| \\ &\leq N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) \\ &= N\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i\right). \end{aligned}$$

Por la ecuación (1.3), tenemos

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq M\sqrt{n}\left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} = M\sqrt{n} N_2(\alpha - \beta).$$

Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{M\sqrt{n}}$ tal que si $N_2(\alpha - \beta) < \delta$, entonces

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < \epsilon,$$

luego f es continua. Consideremos ahora $S^{n-1} = \{\alpha \in K^n : N_2(\alpha) = 1\}$. Como S^{n-1} es un subconjunto cerrado y acotado de K^n, entonces es compacto. Además, puesto que f es continua, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in S^{n-1}$ tal que

$$f(\alpha_1) = \sup_{\alpha \in S^{n-1}} |f(\alpha)| \quad \text{y} \quad f(\alpha_2) = \inf_{\alpha \in S^{n-1}} |f(\alpha)|.$$

Ahora, puesto que $f(\alpha) > 0$ si $\alpha \neq 0$, entonces

$$f(\alpha_2) > 0$$

ya que $\alpha_2 \in S^{n-1}$. Tomemos $\mu = f(\alpha_2) > 0$, entonces para cada $\alpha \in S^{n-1}$ tenemos

$$f(\alpha) \geq \mu.$$

Por consiguiente, para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n - \{0\}$ y $\beta = \left(\frac{\alpha_1}{N_2(\alpha)}, ..., \frac{\alpha_n}{N_2(\alpha)}\right) \in S^{n-1}$ tenemos que

$$f(\beta) \geq \mu$$

pero

$$\mu \leq f(\beta) = \frac{N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)}{N_2(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{N_2(\alpha)},$$

es decir,

$$f(\alpha) \geq \mu \cdot N_2(\alpha)$$

para cada $\alpha \in K^n$. Ahora para $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, se tiene

$$N(x) = f(\alpha) \geq \mu \cdot N_2(\alpha) = \mu \cdot N_2(x). \tag{1.4}$$

Por las ecuaciones (1.3) y (1.4) y para cada $x \in X$, obtenemos

$$\mu \cdot N_2(x) \leq N(x) \leq M\sqrt{n} \cdot N_2(x),$$

donde $\mu, M\sqrt{n} > 0$. Así, N y N_2 son equivalentes y esto implica que cualquiera dos normas en X son equivalentes. ■

El teorema anterior no es válido en general en espacios de dimensión infinita tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.1. *Consideremos el espacio normado (ℓ^1, N_1). Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, esto implica que $x_n \to 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < 1$ para todo $n \geq n_0$, y por consiguiente si $p > 1$ tendremos que*

$$|x_n|^p \leq |x_n|$$

para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

por lo tanto N_p es una norma en ℓ^1. Ahora supongamos que N_1 y N_p son equivalentes. Consideremos la sucesión $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ en ℓ^1 donde $x^{(n)} = \left(x_m^{(n)}\right)_{m=1}^{\infty}$, y la definimos de la *siguiente manera*

$$x_m^{(n)} = \begin{cases} 1 & si \quad m \leq n \\ 0 & si \quad m > n \end{cases},$$

esto es

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1,0,0,0,...) \\ x^{(2)} &= (1,1,0,0,...) \\ x^{(3)} &= (1,1,1,0,...) \\ &\vdots \end{aligned}.$$

Notemos que $x^{(n)} \in \ell^1$ *ya que*

$$N_1(x^{(n)}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left| x_m^{(n)} \right| = n < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *y además*

$$N_p(x^{(n)}) = n^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora si existieran $\mu, \lambda > 0$ *tal que*

$$\mu N_1(x^{(n)}) \leq N_p(x^{(n)}) \leq \lambda N_1(x^{(n)}),$$

entonces

$$\mu \cdot n \leq n^{\frac{1}{p}} \leq \lambda \cdot n,$$

de la desigualdad de la izquierda, se sigue

$$n^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\mu}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Esto nos dice que la sucesión* $\left(n^{1-\frac{1}{p}}\right)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión acotada, y dado que* $p > 1$ *tenemos que* $1 - \frac{1}{p} > 0$ *lo cual implica que* $n^{1-\frac{1}{p}} \to \infty$ *cuando* $n \to \infty$, *lo cual es imposible. Por tanto en espacios normados de dimensión infinita podemos afirmar que en general las normas no son equivalentes.*

1.3. Espacios de Banach

Definición 1.3.1. *Sea (X, N) un espacio normado. Decimos que X es un espacio de Banach si (X, d) es un espacio métrico completo con la métrica dada por*

$$d(x, y) = N(x - y).$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de espacios de Banach.

Ejemplo 1.3.1. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. (K^n, N_p) es un espacio de Banach.*

Ejemplo 1.3.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. (ℓ^p, N_p) es un espacio de Banach.*

Demostración. Vamos a empezar suponiendo que $1 \leq p < \infty$. Sea $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p, donde $x^{(n)} = \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq k_0$ se tiene

$$N_p\left(x^{(n)} - x^{(m)}\right) < \epsilon,$$

es decir,

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Así, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| \leq N_p\left(x^{(n)} - x^{(m)}\right) < \epsilon$$

para todo $m, n \geq k_0$. Por tanto, $\left(x_i^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en K para cada $i \in \mathbb{N}$, y dado que K es completo, existe $x_i \in K$ tal que

$$x_i^{(n)} \longrightarrow x_i \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}}$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \left| x_i^{(n)} - x_i \right|^p &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right|^p \\
&\leq \overline{\lim_{m\to\infty}} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right|^p \right] \\
&= \overline{\lim_{m\to\infty}} \left[N_p \left(x^{(n)} - x^{(m)} \right) \right]^p \\
&\leq \epsilon^p
\end{aligned}$$

para todo $n \geq k_0$. Por tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(n)} - x_i \right|^p = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \left| x_i^{(n)} - x_i \right|^p \leq \epsilon^p \tag{1.5}$$

para todo $n \geq k_0$. Esta serie converge, por tanto $x^{(n)} - x \in \ell^p$ siempre que $n \geq k_0$. Dado que ℓ^p es un espacio vectorial y $x = x^{(n)} - (x^{(n)} - x)$, entonces $x \in \ell^p$. Ahora vamos a probar que $x^{(n)}$ converge a x en ℓ^p. Por la ecuación (1.5) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(n)} - x_i \right|^p \leq \epsilon^p$$

para todo $n \geq k_0$, y así tenemos

$$N_p \left(x^{(n)} - x \right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(n)} - x_i \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

para todo $n \geq k_0$. Por tanto $x^{(n)}$ converge a x en ℓ^p. El caso $p = \infty$ se demuestra fácilmente y lo omitimos. ∎

Ejemplo 1.3.3. (c_0, N_∞) *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en c_0. Como en el teorema anterior, podemos encontrar una sucesión $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ en $K^{\mathbb{N}}$ tal que $x_i^{(n)} \to x_i$ cuando $n \to \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$|x_i^{(n)} - x_i| = \lim_{m\to\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| \leq \epsilon \tag{1.6}$$

para todo $n \geq k_0$. Ahora fijemos $n \geq k_0$. Como $x^{(n)} \in c_0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|x_i^{(n)}\right| < \epsilon$$

para todo $i \geq M$. Así, para $i \geq M$ tenemos que

$$|x_i| = \left|x_i^{(n)} - \left(x_i^{(n)} - x_i\right)\right| \leq \left|x_i^{(n)}\right| + \left|x_i^{(n)} - x_i\right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

es decir, $x_i \to 0$ cuando $i \to \infty$, y así, $x \in c_0$. Tomando supremo en (1.6), se sigue que

$$N_\infty(x^{(n)} - x) \leq \epsilon$$

para todo $n \geq k_0$. Así, $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ converge a x en c_0, y por tanto (c_0, N_∞) es un espacio de Banach. ∎

Los siguientes ejemplos nos muestran espacios normados que no son de Banach.

Ejemplo 1.3.4. *c_{00} no es un espacio de Banach con la norma N_∞.*

Demostración. Es claro que c_{00} es subespacio vectorial de c_0. Además, (c_{00}, N_∞) es un espacio normado. Definamos la siguiente sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ en c_{00} de esta forma:

$$x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i=1}^\infty$$

donde

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{i} & si \quad i \leq n \\ 0 & si \quad i > n \end{cases},$$

es decir,

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1{,}0, 0, \ldots) \\ x^{(2)} &= (1, \frac{1}{2}, 0, \ldots) \\ x^{(3)} &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned} .$$

Notemos que si $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$, entonces

$$
\begin{aligned}
N_\infty(x^{(n)} - x^{(m)}) &= \sup_{n+1 \leq i \leq m} \left| \frac{1}{i} \right| \\
&= \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

cuando $n \to \infty$, y así la sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

Ahora supongamos que existe $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_{00}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$$

así, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\left| x_i^{(n)} - x_i \right| \leq N_\infty(x^{(n)} - x) \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Por tanto, $x_i^{(n)} \longrightarrow x_i$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo y para todo $n \geq i$ tenemos que

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{i} \longrightarrow x_i$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Por tanto, $x_i = \frac{1}{i}$ lo cual es válido para todo $i \in \mathbb{N}$, pero la sucesión $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} = (\frac{1}{i})_{i=1}^{\infty} \notin c_{00}$, lo cual es una contradicción. Por tanto (c_{00}, N_∞) no es completo. ∎

Lema 1.3.1. *Sea X un espacio vectorial sobre K. Si N_1 y N_2 son dos normas equivalentes en X tal que (X, N_1) es completo, entonces (X, N_2) es completo.*

Demostración. Por hipótesis, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x) \tag{1.7}$$

para todo $x \in X$. Sean $\epsilon > 0$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en (X, N_2), entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ se cumple que

$$N_2(x_n - x_m) < \epsilon.$$

Ahora por la equivalencia tenemos

$$\lambda N_1(x_n - x_m) \leq N_2(x_n - x_m) < \epsilon,$$

entonces

$$N_1(x_n - x_m) < \frac{\epsilon}{\lambda}$$

para todo $n, m \geq n_0$. Por tanto la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (X, N_1), y como (X, N_1) es completo existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ en (X, N_1), y asi existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_1(x_n - x) < \frac{\epsilon}{\mu}$$

para todo $n \geq k_0$. Entonces

$$\mu N_1(x_n - x) < \epsilon,$$

y por (1.7), obtenemos

$$N_2(x_n - x) \leq \mu N_1(x_n - x) < \epsilon$$

para todo $n \geq k_0$. Esto implica que $x_n \to x$ en (X, N_2) ■

En ocasiones, vamos a tener espacios vectoriales que son completos con cualquier norma. El siguiente lema nos muestra uno de ellos.

Lema 1.3.2. *El espacio vectorial K^n es completo con cualquier norma.*

Demostración. Como K^n es de dimensión finita sobre K, entonces cualesquiera dos normas en K^n son equivalentes. Hemos visto en el ejemplo 1.3.1 que (K^n, N_p) es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$, es decir, es completo. Por el Lema 1.3.1 se concluye que K^n es completo con cualquier norma. ■

Teorema 1.3.1. *Un espacio normado (X, N) de dimensión finita sobre K es un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) = n$ y sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de X. Definamos la función $T : X \to K^n$ tal que

$$T(x) = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \tag{1.8}$$

donde $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Notemos que T está bien definida ya que la representación de x con respecto a la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es única. Claramente T es sobre, y además es inyectiva puesto que si $T(x) = 0$ entonces $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0$, esto implica que $x = 0$. Ahora sean $x, y \in X$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{y} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i,$$

así para todo par de escalares $t, s \in K$, obtenemos

$$\begin{aligned} T(tx + sy) &= T\left(t\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + s\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (t\alpha_i e_i + s\beta_i e_i)\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (t\alpha_i + s\beta_i) e_i\right). \end{aligned}$$

De (1.8), tenemos que

$$T(tx + sy) = (t\alpha_1 + s\beta_1, t\alpha_2 + s\beta_2, ..., t\alpha_n + s\beta_n),$$

esto implica

$$T(tx + sy) = t(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + s(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n),$$

entonces

$$T(tx + sy) = tT(x) + sT(y).$$

Por tanto T es lineal. De lo anterior, se sigue que T es un isomorfismo de espacios vectoriales. Ahora definamos $N_* : K^n \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$N_*(\alpha) = N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right),$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in K^n$. Fácilmente se puede demostrar que N_* es una norma en K^n y además si $x \in X$ entonces

$$N(x) = N_*(T(x))$$

donde $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Ahora sea $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ un sucesión de Cauchy en X. Dado $\epsilon > 0$ existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N(x_k - x_l) < \epsilon$$

para todo $l, k \geq l_0$. Entonces

$$N_*(T(x_k) - T(x_l)) = N_*(T(x_k - x_l)) = N(x_k - x_l) < \epsilon$$

para todo $l, k \geq l_0$. Por tanto $(T(x_k))_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en K^n. Por el Lema 1.3.2, existe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in K^n$ tal que $T(x_k)$ converge a α. Así dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_*(T(x_k) - \alpha) < \epsilon$$

para todo $k \geq k_0$. Ahora si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, entonces

$$N(x_k - x) = N_*(T(x_k - x)) = N_*(T(x_k) - T(x)) = N_*(T(x_k) - \alpha) < \epsilon$$

para todo $k \geq k_0$, lo cual implica que (x_k) converge a x. Por lo tanto (X, N) es un espacio de Banach. ∎

Corolario 1.3.1. *Sea (X, N) un espacio normado y F un subespacio de X de dimensión finita, entonces F es cerrado.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.1, se sigue que F es de Banach, es decir, F es completo. Por tanto F es un subespacio cerrado de X. ∎

Definición 1.3.2. *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que T es un isomorfismo topológico si T es un isomorfismo de espacios vectoriales y a su vez, un homeomorfismo de espacios métricos. En tal caso, decimos que X e Y son topológicamente isomorfos.*

Teorema 1.3.2. *Sean X e Y espacios normados sobre K de dimensión finita tales que $dim(X) = dim(Y) = n$. Entonces X e Y son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de X. Como la relacion de ser topológicamente isomorfos es transitiva, basta con demostrar que (X, N_X) es topológicamente isomorfo a

(K^n, N_2). De la misma manera que en el Teorema 1.3.1, sea $T : X \longrightarrow K^n$ tal que

$$T(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

donde $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Consideremos también la función $N_* : K^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$N_*(\alpha) = N_X\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right),$$

entonces N_* es una norma en K^n tal que

$$N_*(T(x)) = N_X(x) \tag{1.9}$$

para todo $x \in X$. Notemos que (1.9) implica que T es continua; ya que dado $\epsilon > 0$ y dado $x_0 \in X$, entonces

$$N_*(T(x) - T(x_0)) = N_*(T(x - x_0)) = N_X(x - x_0) < \epsilon$$

cuando $N_X(x - x_0) < \delta = \epsilon$. Por otro lado, la ecuación (1.9) implica que

$$N_*(\alpha) = N_X(T^{-1}(\alpha))$$

para todo $\alpha \in K^n$, y así podemos probar de manera análoga que

$$T^{-1} : (K^n, N_*) \longrightarrow (X, N_X)$$

es continua. Entonces T es un isomorfismo topológico. Dado que K^n es de dimensión finita, entonces N_* y N_2 son normas equivalentes en K^n, asi existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lambda N_*(\alpha) \leq N_2(\alpha) \leq \mu N_*(\alpha)$$

para todo $\alpha \in K^n$. Por consiguiente, la aplicación identidad

$$I_d : (K^n, N_*) \longrightarrow (K^n, N_2)$$

es un homeomorfismo, la cual también es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces es un isomorfismo topológico. Por tanto,

$$I_d \circ T : (X, N_X) \longrightarrow (K^n, N_2)$$

es un isomorfismo topológico, lo cual demuestra lo deseado. ■

Teorema 1.3.3. *Sea X un espacio normado de dimensión finita y sea A un subconjunto de X, entonces A es compacto si y solo si A es cerrado y acotado.*

Demostración. Es claro que si A es compacto, entonces es cerrado y acotado. Recíprocamente, supongamos que A es cerrado y acotado. Ahora similarmente al teorema anterior, observemos que existe

$$\varphi : (X, N_X) \longrightarrow (K^n, N_2)$$

un isomorfismo topológico, donde $\varphi = I_d \circ T$. Como A es un subconjunto acotado de X, existe $r > 0$ tal que

$$N_X(a) < r$$

para todo $a \in A$. Lo cual implica que

$$N_*(T(a)) = N_X(a) < r$$

para todo $a \in A$. Notemos que existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lambda N_*(\alpha) \leq N_2(\alpha) \leq \mu N_*(\alpha)$$

para todo $\alpha \in K^n$, entonces

$$\frac{1}{\mu} N_2((I_d \circ T)(a)) = \frac{1}{\mu} N_2(T(a)) \leq N_*(T(a)) = N_X(a) < r,$$

lo cual implica que

$$N_2(\varphi(a)) \leq \mu r$$

para todo $a \in A$. Por consiguiente $\varphi(A)$ es un subconjunto acotado de (K^n, N_2). Además, como A es cerrado y φ es un homeomorfismo entonces $\varphi(A)$ es un subconjunto cerrado de

(K^n, N_2). Por el Teorema de Heine-Borel, se sigue que $\varphi(A)$ es un subconjunto compacto de (K^n, N_2), y puesto que

$$A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$$

donde φ^{-1} es continua, se sigue que A es un subconjunto compacto de (X, N_X). ∎

Lema 1.3.3 (Lema de Riesz)**.** *Sean Y y Z subespacios de un espacio normado X de cualquier dimensión. Supóngase que Y es un subespacio cerrado contenido propiamente en Z. Entonces para todo número real θ en el intervalo (0,1) existe $z \in Z$ tal que $N(z) = 1$ y $N(z - y) \geq \theta$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $v \in Z - Y$ y denotemos su distancia a Y de la siguiente manera

$$a = \inf_{y \in Y} N(v - Y) = d(v, Y).$$

Claramente $a > 0$ dado que Y es cerrado. Tomemos cualquier $\theta \in (0, 1)$, y por la definición de ínfimo podemos encontrar $y_0 \in Y$ tal que

$$a \leq N(v - y_0) \leq \frac{a}{\theta}. \tag{1.10}$$

Notemos que $\frac{a}{\theta} > a$ dado que $0 < \theta < 1$. Sea $z = \frac{1}{N(v-y_0)} \cdot (v - y_0) \in Z$, así $N(z) = 1$, y además para todo $y \in Y$, tenemos

$$\begin{aligned} N(z - y) &= N\left(\frac{1}{N(v - y_0)} \cdot (v - y_0) - y\right) \\ &= \frac{1}{N(v - y_0)} N\left(v - y_0 - y \cdot N(v - y_0)\right), \\ &= \frac{1}{N(v - y_0)} \cdot N(v - y_1) \end{aligned}$$

así

$$N(z - y) = \frac{1}{N(v - y_0)} \cdot N(v - y_1) \tag{1.11}$$

donde $y_1 = y_0 + y \cdot N(v - y_0) \in Y$. Ahora, puesto que $N(v - y_1) \geq a$, y por las relaciones (1.10) y (1.11), se tiene que

$$N(z - y) = \frac{1}{N(v - y_0)} \cdot N(v - y_1) \geq \frac{a}{N(v - y_0)} \geq \theta$$

para todo $y \in Y$, por tanto el lema queda demostrado. ■

En cualquier espacio normado de dimensión finita los subconjuntos compactos son precisamente los subconjuntos cerrados y acotados. De este modo, la bola unitaria cerrada es compacta. Por otra parte, el Lema de Riesz nos dice que la recíproca también es cierta lo cual se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.4 (Dimensión finita)**.** *Sea X un espacio normado. Entonces X tiene dimensión finita si y solo si la bola unitaria cerrada $B_1 = \{x \in X : N(x) \leq 1\}$ en X es compacta.*

Demostración. Supóngase que B_1 es compacta, pero la dimensión de X es infinita. Tomemos cualquier x_1 tal que

$$N(x_1) = 1.$$

Del Corolario 1.3.1, se sigue que el subespacio $V_1 =< x_1 >$ es cerrado por ser de dimensión finita igual a 1. Además, V_1 es un subespacio propio de X puesto que X tiene dimensión infinita. Ahora aplicamos el Lema de Riesz a $Y = V_1$ y $Z = X$, así existe $x_2 \in X$ tal que

$$N(x_2) = 1 \quad \text{y} \quad N(x_2 - x) \geq \theta = \frac{1}{2}$$

para todo $x \in V_1$, en particular

$$N(x_2 - x_1) \geq \frac{1}{2}.$$

Análogamente, tomemos el subespacio cerrado $V_2 =< x_1, x_2 >$ que está contenido propiamente en X, así de nuevo aplicando el Lema de Riesz, existe $x_3 \in X$ tal que

$$N(x_3) = 1 \quad , \quad N(x_3 - x_1) \geq \frac{1}{2} \quad , \quad N(x_3 - x_2) \geq \frac{1}{2}.$$

Procediendo inductivamente, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos en B_1 tal que

$$N(x_n - x_m) \geq \frac{1}{2}$$

para todo $n \neq m$. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está en B_1 y no puede tener una subsucesión convergente, lo cual contradice la compacidad de B_1. Por tanto, la suposición de que la dimensión es infinita tiene que ser falsa. Luego, la dimensión de X es finita. ■

Teorema 1.3.5. *Sea X un espacio normado. Entonces X es localmente compacto si y sólo si la dimensión de X es finita.*

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto. Sea $x \in X$, entonces existe V compacto y U abierto tal que $x \in U \subset V$. Así, existe $r > 0$ tal que

$$x \in B_r(x) \subset U \subset V,$$

entonces

$$\overline{B_r(x)} \subset \overline{U} \subset \overline{V} = V,$$

y por lo tanto, $\overline{B_r(x)}$ es compacto. Pero

$$\begin{aligned} \overline{B_r(x)} &= \overline{B_r(0) + x} \\ &= \overline{rB_1(0) + x} \\ &= x + r\overline{B_1(0)} \end{aligned}$$

y como la traslación y la multiplicación por un escalar son homeomorfismos, se sigue que $\overline{B_1(0)}$ es compacto. Luego, X tiene dimensión finita.

Recíprocamente, supongamos que la dimensión de X es finita, entonces $\overline{B_1(0)}$ es compacto. Por tanto, $\overline{B_1(0)} + x$ también es compacto y dado que

$$\overline{B_1(x)} = \overline{B_1(0)} + x,$$

se sigue $\overline{B_1(x)}$ es una vecindad compacta de x, luego, X es localmente compacto.

■

A continuación daremos una caracterización de los espacios de Banach. Para ello, presentamos la siguiente definición

Definición 1.3.3. *Sea (x_n) una sucesión de elementos en el espacio normado (X, N) y sea $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ en X para cada $n \in \mathbb{N}$. A la sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ le llamamos la sucesión de sumas parciales o la serie asociada a la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si la serie converge a su límite lo denotamos por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, es decir,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Convenimos en usar la expresión $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ para denotar la serie generada por la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, así como para designar $\lim_{n\to\infty} s_n$ en caso de que la serie converja.
Diremos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} N(x_n)$ es una serie convergente de números reales.

Teorema 1.3.6. *El espacio normado (X, N) es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Supongamos que (X, N) es un espacio de Banach. Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en X absolutamente convergente y definamos las sumas parciales

$$s_n = x_1 + ... + x_n \quad \text{y} \quad r_n = N(x_1) + N(x_2) + ... + N(x_n).$$

Como la serie converge absolutamente, entonces $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, lo cual implica que es de Cauchy. Veamos que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ también es de Cauchy. Para ello, notemos que si $m > n$, entonces

$$\begin{aligned}
N(s_m - s_n) &= N(x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m) \\
&\leq N(x_{n+1}) + N(x_{n+2}) + ... + N(x_m) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} N(x_k) \\
&= |r_m - r_n| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, y como X es completo, existe $x \in X$ tal que

$$s_n \longrightarrow x$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, y así, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Recíprocamente, sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Vamos a probar que existe un subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$N(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N(x_m - x_n) < \frac{1}{2}$$

para todo $m, n \geq n_1$. Para $\epsilon = \frac{1}{2^2}$, existe $n_2 > n_1$ tal que

$$N(x_m - x_n) < \frac{1}{2^2}$$

para todo $m, n \geq n_2$, y dado que $n_2 > n_1$, entonces

$$N(x_{n_2} - x_{n_1}) < \frac{1}{2},$$

así para $\epsilon = \frac{1}{2^3}$, existe $n_3 > n_2$ tal que

$$N(x_m - x_n) < \frac{1}{2^3}$$

para todo $m, n \geq n_3$, y dado que $n_3 > n_2$, entonces

$$N(x_{n_3} - x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}.$$

Procediendo inductivamente demostramos nuestra afirmación. De lo anterior, se sigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} N(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

y por hipótesis, se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ es convergente. Sea

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) \\
&= \lim_{k\to\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_1}) \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) - x_{n_1},
\end{aligned}$$

así

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x + x_{n_1} = y.$$

Puesto que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces $x_n \longrightarrow y$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Por lo tanto X es de Banach. ■

1.4. Transformaciones lineales entre espacios normados

En esta sección, se presentan resultados básicos sobre transformaciones lineales y una breve discusión sobre bases de Hamel.

Definición 1.4.1. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal. Diremos que T es una transformación lineal acotada si existe $M \geq 0$ tal que*

$$N_Y(T(x)) \leq M \cdot N_X(x)$$

para todo $x \in X$.

El concepto de transformación lineal acotada no es el mismo que el de función acotada. Por ejemplo, la transformación lineal $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = ax$ donde $a \neq 0$, es una transformación lineal acotada dado que

$$|T(x)| = |ax| = |a| \cdot |x|$$

para todo $x \in X$, pero $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y así T no es una función acotada. En general, dada una transformación lineal $T : X \longrightarrow Y$ tal que $T \neq 0$, entonces $T(X)$ no puede ser un subconjunto acotado de Y, ya que $T(X)$ es un subespacio vectorial no cero de Y y un subespacio no cero de un espacio normado no puede ser acotado.

La siguiente proposición muestra algunas equivalencias sobre continuidad de transformaciones lineales.

Proposición 1.4.1. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T es continua.

(b) T es continua en 0.

(c) T es una transformación lineal acotada.

Demostración. Es claro que (a) implica (b). Ahora, probaremos que (b) implica (c). Supongamos que T no es acotada, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X - \{0\}$ tal que

$$N(T(x_n)) > n \cdot N(x_n).$$

Sea

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x_n}{N(x_n)},$$

entonces

$$N(y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

lo cual implica que

$$y_n \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Dado que T es continua en 0, entonces

$$T(y_n) \longrightarrow T(0) = 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

pero

$$N(T(y_n)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{N(T(x_n))}{N(x_n)} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow \infty$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto T es una transformación lineal acotada. Ahora, vamos a probar que (c) implica (a). Sean $x_0 \in X$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Como

$$N(T(x_n) - T(x_0)) = N(T(x_n - x_0)) \leq M \cdot N(x_n - x_0),$$

entonces

$$T(x_n) \longrightarrow T(x_0).$$

Por lo tanto T es continua en x_0. ∎

A continuación mostramos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.4.1 (Operador de diferenciación)**.** *Sea* X*=*$\{\, p \in C([0,1])$*:* p *es un polinomio*$\}$ *con la norma* N_∞*. Definamos* $D : X \longrightarrow X$ *del modo siguiente*

$$D(x(t)) = x'(t).$$

D *es lineal pero no es continuo. Para probar esto, consideremos la sucesión* $x_n(t) = t^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces*

$$N_\infty(x_n) = 1 \quad y \quad D(x_n(t)) = x_n'(t) = nt^{n-1}$$

lo cual implica que

$$N_\infty(D(x_n)) = n$$

y así

$$\frac{N_\infty(D(x_n))}{N_\infty(x_n)} = n \longrightarrow \infty \quad cuando \quad n \longrightarrow \infty$$

Por tanto D *no es acotada, y se sigue que* D *no es continuo.*

Ejemplo 1.4.2 (Integral definida)**.** *Sea $X = C([0,1])$ con la norma N_∞. Definamos el operador integral $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Es claro que I es lineal. Además

$$|I(f)| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq N_\infty(f)(b-a),$$

así

$$|I(f)| \leq M \cdot N_\infty(f)$$

donde $M = b - a$. Por lo tanto I es continuo.

Ejemplo 1.4.3 (Operador de multiplicación por t)**.** *Sea $X = C([0,1])$ con la norma $N_\infty(f)$. Definamos el operador $M : X \longrightarrow X$ tal que*

$$M(f(t)) = t \cdot f(t)$$

claramente M es lineal, y además

$$\begin{aligned} N_\infty(M(f)) &= \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \\ &= M \cdot N_\infty(f) \end{aligned}$$

donde $M = 1$. Por lo tanto M es continuo.

Ejemplo 1.4.4 (Matrices)**.** *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real con m filas y n columnas. Definamos el operador $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de la siguiente forma*

$$y = Ax$$

donde $x = (x_k)_{k=1}^n$ *y* $y = (y_j)_{j=1}^m$ *son vectores columna con* n *y* m *componentes. Las componentes de* y *las podemos denotar de la siguiente forma*

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$$

para $j \in \{1, ..., m\}$. *Claramente* T_A *es una transformación lineal puesto que* T_A *es una multiplicación por una matriz. Además,* T_A *es acotada usando la norma euclidiana en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$. *En efecto*

$$[N(T_A(x))]^2 = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right]^2;$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$[N(T_A(x))]^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^{n} x_l^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = (N(x))^2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2.$$

Ahora sea $c = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}^2$, *entonces*

$$[N(T_A(x))]^2 \leq c^2 (N(x))^2,$$

lo que implica que

$$N(T_A(x)) \leq cN(x).$$

Por lo tanto T_A *es continuo.*

Proposición 1.4.2. *Sean* X *e* Y *espacios normados y* $T : X \longrightarrow Y$ *una transformación lineal. Entonces* T *es continua si y sólo si* T *es uniformemente continua.*

Demostración. Es claro que si T es uniformemente continua implica que T es continua. Recíprocamente, supongamos que T es continua en 0, así dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad N(u) < \delta \quad \text{entonces} \quad N(T(u)) < \epsilon$$

para todo $u \in X$. Luego, dados $x, y \in X$ tales que $N(x-y) < \delta$, entonces

$$N(T(x) - T(y)) = N(T(x-y)) < \epsilon.$$

Por lo tanto, T es uniformemente continua en X. ■

Recordemos que un subconjunto A de un espacio normado (X, N) es acotado si existe $M > 0$ tal que $N(x-y) \leq M$ para todo $x, y \in A$, o equivalentemente, existe $L > 0$ tal que $N(x) \leq L$ para todo $x \in A$.

La siguiente proposición nos muestra que una transformación lineal acotada definida en un subconjunto acotado tiene una imagen acotada.

Proposición 1.4.3. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal. Entonces T es continua si y sólo si para cada subconjunto $A \subseteq X$ tal que A es acotado, entonces $T(A)$ es un subconjunto acotado de Y.*

Demostración. Supongamos que T es continua. Sea $A \subseteq X$ tal que A es acotado. Entonces existe $M > 0$ tal que

$$N_X(x) \leq M$$

para todo $x \in A$. Como T es continua existe $L > 0$ tal que

$$N_Y(T(x)) \leq L \cdot N_X(x),$$

entonces

$$N_Y(T(x)) \leq L \cdot M$$

para todo $x \in A$. Por consiguiente, $T(A)$ es acotado.

Recíprocamente, sea B la bola unitaria cerrada en X, es decir, $B = \{x \in X : N_X(x) \leq 1\}$. Notemos que B es un subconjunto acotado de X, así por hipótesis tenemos que $T(B)$ es un subconjunto acotado de Y, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$N_Y(T(x)) \leq M$$

para todo $x \in B$. Sea $x \in X$ tal que $x \neq 0$, entonces

$$N_Y\left(T\left(\frac{x}{N_X(x)}\right)\right) \leq M \quad \text{donde} \quad \frac{x}{N_X(x)} \in B.$$

Por lo tanto

$$\frac{N_Y(T(x))}{N_X(x)} \leq M,$$

es decir,

$$N_Y(T(x)) \leq M \cdot N_X(x)$$

para todo $x \in X - \{0\}$. Esta desigualdad se verifica también para $x = 0$, ya que $T(0) = 0$, por lo tanto T es continua. ■

Proposición 1.4.4. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal. Entonces T es continua si y sólo si T es acotada en alguna vecindad de 0.*

Demostración. Supongamos que T es continua. Ahora consideremos la bola unitaria $B_1(0)$ que es una vecindad acotada de 0. Como T es continua, se sigue de la Proposición 1.4.3 que $T(B_1(0))$ es un subconjunto acotado de Y, lo cual implica que T es acotada en alguna vecindad de 0. Recíprocamente, sea V una vecindad de 0 en X tal que $T(V)$ es acotado, así existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq V$, entonces $T(B_r(0))$ es un subconjunto acotado de $T(V)$. Luego, existe $M > 0$ tal que

$$N(T(x)) \leq M$$

para todo $x \in B_r(0)$. Así, tomemos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta < r$ y sea $x \in X - \{0\}$. Entonces $\delta \cdot \dfrac{x}{N(x)} \in B_r(0)$, y por consiguiente

$$N\left(T\left(\frac{\delta \cdot x}{N(x)}\right)\right) \leq M,$$

entonces

$$N(T(x)) \leq \frac{M}{\delta} \cdot N(x)$$

para todo $x \neq 0$. Esta desigualdad también se verifica para $x = 0$, por tanto T es continua en X. ■

El siguiente teorema nos asegura la continuidad de las transformaciones lineales en espacios de dimensión finita.

Teorema 1.4.1. *Sean X e Y espacios normados tal que X tiene dimensión finita. Entonces cualquier transformación lineal $T : X \longrightarrow Y$ es continua.*

Demostración. Sea N_X la norma en X. Supongamos que $dim(X) = n$ y sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de X. Entonces para cada $x \in X$ existe un único elemento $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ en K^n tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Definamos $N_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, .$$

Entonces N_1 es una norma en X y puesto que X es de dimensión finita, se sigue que N_1 y N_X son equivalentes. Así existen $\lambda, \mu > 0$ tales que

$$\lambda N_X(x) \leq N_1(x) \leq \mu N_X(x)$$

para todo $x \in X$. Ahora sea $T : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal, y tomemos

$$M = m\acute{a}x\{N_Y(T(e_1)), N_Y(T(e_2)), ..., N_Y(T(e_n))\},$$

entonces

$$\begin{aligned} N_Y(T(x)) &= N_Y\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\, N_Y(T(e_i)) \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \\ &= M \cdot N_1(x) \\ &\leq M\mu N_X(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto, T es continua. ■

Generalmente, el teorema anterior no se verifica en espacios normados de dimensión infinita, pero antes de mostrar un contraejemplo para dicha afirmación, necesitamos introducir el concepto de base en espacios vectoriales de dimensión infinita.

Definición 1.4.2. *Sea X un espacio vectorial sobre K. Sea $B \subset X$ tal que B es no vacío, se dice que B es linealmente independiente si para todo subconjunto $A \subset B$ tal que A es finito y no vacío, se tiene que A es linealmente independiente.*

Definición 1.4.3. *Sea X un espacio vectorial sobre un campo K. Sea $C \subset X$ tal que C es no vacío, se dice que C es maximal linealmente independiente si C es linealmente independiente y además si $C \subset D$ tal que $C \neq D$, se tiene que D no es linealmente independiente.*

Con lo anterior, podemos dar la definición de una base de Hamel.

Definición 1.4.4. *Un subconjunto maximal linealmente independiente en X, se llama una base de Hamel de X.*

Probaremos que todo espacio vectorial distinto de cero tiene una base de Hamel. Para demostrar esta afirmación, usaremos el Lema de Zorn en el cual se involucran algunos conceptos de la teoría de conjuntos ordenados que se definen a continuación.

Definición 1.4.5. *Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto M que está equipado con un orden parcial, es decir, una relación binaria $\leqq$ y satisface las siguientes* *condiciones:*

(i) $a \leqq a$ *para todo* $a \in M$.

(ii) Si $a \leqq b$ *y* $b \leqq a$*, entonces* $a = b$.

(iii) Si $a \leqq b$ *y* $b \leqq c$*, entonces* $a \leqq c$.

Un conjunto parcialmente ordenado M puede tener elementos a y b tales que $a \leqq b$ y $b \leqq a$ no se cumplen simultáneamente. En tal caso, decimos que a y b son elementos incomparables. Por otro lado, si satisfacen que $a \leqq b$, o $b \leqq a$, o ambas, decimos que son elementos comparables. Un conjunto totalmente ordenado o cadena es un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo par de elementos es comparable bajo la relación de orden parcial.

Definición 1.4.6. *Una cota superior de un subconjunto* S *de un conjunto parcialmente ordenado* M *es un elemento* $u \in M$ *tal que* $x \leqq u$ *para todo* $x \in S$.

Definición 1.4.7. *Un elemento maximal de* M *es un elemento* m *tal que si* $m \leqq x$ *entonces* $m = x$ *para todo* $x \in M$.

Con estas definiciones ya estamos en condiciones de enunciar lo siguiente:

Lema 1.4.1 (Lema de Zorn)**.** *Sea* $M \neq \emptyset$ *un conjunto parcialmente ordenado. Supongamos que cada subconjunto totalmente ordenado* $C \subset M$ *tiene una cota superior. Entonces* M *tiene al menos un elemento maximal.*

Usando el Lema de Zorn probaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.4.2. *Todo espacio vectorial* $X \neq \{0\}$ *sobre un campo* K *tiene una base de Hamel.*

Demostración. Como $X \neq \{0\}$ existe $x \in X$ tal que $x \neq 0$. Claramente, $\{x\}$ es un conjunto linealmente independiente. Sea Z={A $|A \subset X$ y A linealmente independiente}. Notemos que Z es no vacío ya que $\{x\}$ está en Z. Ahora, asignemos en Z el orden parcial $\leqq$ dado por la contención "$\subset$". Así, dado $A, B \in Z$, se tiene que $A \subset B$ si A$\leqq$B. Claramente, tenemos que $\leqq$ es un orden parcial en Z.

Ahora probaremos que cada subconjunto totalmente ordenado en Z tiene una cota superior. Sea M un subconjunto totalmente ordenado en Z. Tomemos el siguiente candidato para una cota superior:

$$A = \cup_{M_i \in M} M_i.$$

Es fácil ver que A es un subconjunto de X . Sea B un subconjunto finito de A, así existe M_i en M tal que $B \subset M_i$. Como M_i es linealmente independiente, entonces B también es linealmente independiente. Por la Definición 1.4.2, se sigue que A es linealmente independiente, por lo tanto $A \in Z$, y además $M_i \subset A$ para todo $M_i \in M$. Así A es una cota superior de M. Por el lema de Zorn, se sigue que Z tiene un elemento maximal L. Esto implica que L es maximal linealmente independiente, es decir, que si un subconjunto $D \in Z$ es tal que $L \subset D$ y $L \neq D$, se tiene que D no es linealmente independiente, ya que si fuera linealmente independiente, por la Definición 1.4.7 tendríamos $L = D$ contradiciendo la Definición 1.4.3. Por lo tanto, L es una base de Hamel. ■

El siguiente Corolario nos asegura la existencia de una base de Hamel para un conjunto de generadores y se puede encontrar más información en [7] .

Corolario 1.4.1. *Sea $X \neq \{0\}$ un espacio vectorial. Entonces cada subconjunto $A \subset X$ tal que $span(A) = X$ contiene una base de X.*

Como mencionamos anteriormente, el Teorema 1.4.1 no es válido para espacios de dimensión infinita. Para ver esto consideremos un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $\aleph_0$ (por ejemplo, X podría ser el espacio normado X=$\{f \in C[0,1]$: f es un polinomio$\}$ y $\{1, t, t^2, t^3, ...\}$ una base de Hamel para X). Ahora sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de X y construyamos la base $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X tal que

$$y_n = \frac{x_n}{n \cdot N(x_n)}.$$

Definamos $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(y_n) = 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y luego extendamos linealmente a todo X. Por definición, f es lineal. Ahora, observemos que la sucesión

$$y_n \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

pero $f(y_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que f no es continua.

Capítulo 2

Continuidad de seminormas en espacios de dimensión finita

En el capítulo anterior, vimos que para un espacio normado X de dimensión finita, se tiene que cualesquiera dos normas en X son equivalentes, lo que induce sobre X una topología única. Por consiguiente, las normas sobre X son continuas con respecto a la topología mencionada. A partir de esto, se introduce una nueva función en espacios vectoriales que denominamos seminorma, la cual acompañamos de otra función conocida como subnorma. En este capítulo, nos vamos a enfocar en la continuidad de estas dos funciones.

2.1. Seminormas en espacios vectoriales

Empezamos mostrando que la norma en un espacio vectorial es continua. En efecto, sean $x, y \in X$ y tomemos $\epsilon = \delta$, entonces, si $N(x - y) < \delta$ se tiene que

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) < \epsilon.$$

En el capítulo 1, vimos que una norma debe cumplir las condiciones de la Definición 1.1.1. Enseguida, pediremos menos condiciones en las funciones que se definen a continuación.

Definición 2.1.1 (Subnorma). *Decimos que una función real $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una subnorma en X si para todo $x \in X$ y $\alpha \in K$ se satisface lo siguiente:*

(i) $f(x) > 0$ *para todo* $x \neq 0$.

(ii) $f(\alpha x)=|\alpha| f(x)$.

Definición 2.1.2 (Seminorma). *Decimos que una funcion real $S : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma en X si para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in K$ se satisface lo siguiente:*

(i) $S(x) \geq 0$.

(ii) $S(\alpha x) = |\alpha| S(x)$.

(iii) $S(x + y) \leq S(x) + S(y)$.

En otras palabras, una subnorma f es una norma si y sólo si f es subaditiva. De la misma forma, una seminorma S es una norma en X si y sólo si S es definida positiva. De forma similar que en el caso de normas, se puede demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. *Sea S una seminorma en X. Entonces:*

(a) $S(0) = 0$.

(b) $|S(x) - S(y)| \leq S(x - y)$.

Demostración. Solo haremos (b). Sean $x, y \in X$. Así, aplicando la propiedad (iii) de la Definición 2.1.2 , obtenemos

$$\begin{aligned} S(x) - S(y) &= S(x - y + y) - S(y) \\ &\leq S(x - y) + S(y) - S(y) \\ &= S(x - y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= S(y - x + x) - S(x) \\ &\leq S(y - x) + S(x) - S(x) \\ &= S(y - x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por (2.1) y (2.2) se sigue que

$$|S(x) - S(y)| \leq S(x - y). \tag{2.3}$$

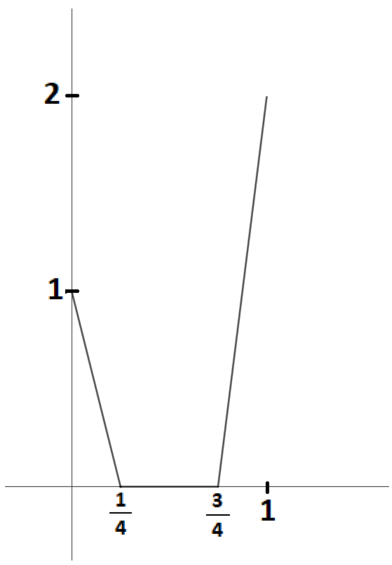
■

En el caso de una seminorma no necesariamente se cumple que: si $S(x) = 0$, entonces $x = 0$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1. *Sean $X = C[0,1]$ y $I = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Para cada $f \in X$ definamos la función*

$$S(f) = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Notemos que S es una seminorma en X, pero no es una norma en X, ya que la función $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica es



resulta ser una función continua en $[0,1]$ tal que $S(g) = 0$ pero $g \neq 0$.

Sin embargo, se puede construir un espacio normado a partir de una seminorma S. Para ello, consideremos el conjunto $Z = \{x \in X : S(x) = 0\}$. Notemos que Z es un subespacio vectorial de X. Ahora consideremos el espacio vectorial cociente X/Z y definamos la función dada por

$$N_s(x + Z) = S(x)$$

para $x + Z \in X/Z$. Observemos que N_s está bien definida, ya que si $x + Z = y + Z$, entonces $x - y \in Z$, así $S(x - y) = 0$. En consecuencia

$$|S(x) - S(y)| \leq S(x - y) = 0,$$

lo cual implica que

$$S(x) = S(y).$$

La función N_s hereda las propiedades de S. Además, si $N_s(x+Z) = 0$, entonces $S(x) = 0$, lo cual implica que $x \in Z$, entonces

$$x + Z = 0 + Z,$$

es decir, $x + Z$ es la clase del cero. Por lo tanto N_s es una norma en X/Z.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de seminormas.

Ejemplo 2.1.2. *Sea* $X = C^\infty(0,1)$ *el espacio de funciones reales infinitamente diferenciables en el intervalo* $(0,1)$. *Definamos en* X *la siguiente familia de funciones*

$$S_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$S_k(f) = \sup_{x \in (0,1)} |f^{(k)}(x)|,$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Claramente, cada S_k *define una seminorma en* X.

Observemos que es imposible encontrar una norma N *en* X *de modo que el operador de diferenciación*

$$\frac{d}{dx} : X \to X$$

sea continuo.

En efecto, si existiese tal norma N, *entonces para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *consideremos la función* $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, $x \in (0,1)$. *Como*

$$\frac{d}{dx} f_\lambda = \lambda f_\lambda$$

tendremos que

$$\frac{N(\frac{d}{dx}f_\lambda)}{N(f_\lambda)} \geq |\lambda|,$$

por lo que la norma del operador $\frac{d}{dx}$*,* $\|\frac{d}{dx}\|$*, satisface*

$$\left\|\frac{d}{dx}\right\| \geq \frac{N(\frac{d}{dx}f_\lambda)}{N(f_\lambda)} \geq |\lambda|$$

y puesto que esto es válido para cada $\lambda \in \mathbb{R}$*, esto nos indica que el operador* $\frac{d}{dx}$ *no puede ser acotado en* (X, N)*.*

Sin embargo, notando que para toda $k \in \mathbb{N}$

$$S_k(f') = S_{k+1}(f),$$

esto nos sugiere que definiendo una topología τ *en* X *mediante la familia de seminormas* $(S_k)_{k=1}^{\infty}$*, sí podríamos conseguir continuidad del operador* $\frac{d}{dx}$ *en* (X, τ)*.*

Ejemplo 2.1.3. *Sea* (X, N) *un espacio normado sobre* K *y sea*

$$X^* = \{f : X \to K |\ f \text{ es lineal y continua}\}.$$

Para cada $f \in X^*$ *podemos definir la función* $S_f : X \to \mathbb{R}$ *como* $S_f(x) = |f(x)|$*. Es claro que* S_f *es una seminorma en* X*. Aunque no lo mostraremos en esta tesis, resulta que es posible definir una topología en el espacio lineal* X *usando la familia de seminormas* $(S_f)_{f \in X^*}$*. Esta topología suele denotarse por* $\sigma(X, X^*)$ *y se llama la topología débil en* X*. Puede demostrarse que esta topología es más débil que la topología de la norma* N *inducida en* X*, y que una sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de puntos de* X *converge al elemento* $x \in X$ *respecto a la topología* $\sigma(X, X^*)$ *si y sólo si* $f(x_n) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$*, para cada* $f \in X^*$*.*

2.2. Continuidad

Una subnorma podría ser no continua en espacios de dimensión finita.

Supongamos que $dim(X) = 1$. Si fijamos un elemento y no nulo en X, entonces podemos escribir $X = \{\alpha y : \alpha \in K\}$. Así cada subnorma f en X tiene que ser de la forma

$$f(x) = f(\alpha y) = |\alpha|\lambda$$

donde $f(y) = \lambda$ es una constante positiva, por lo tanto f es continua en X, ya que si $x = \alpha y$ y $z = \beta y$ con $\alpha, \beta \in K$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| &= ||\alpha|\lambda - |\beta|\lambda| \\ &= ||\alpha| - |\beta||\lambda \\ &\leq |\alpha - \beta|\lambda \\ &= f(x - z). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $dim(X) \geq 2$, las subnormas en X no necesariamente son continuas. Para ilustrar lo afirmado, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. *Sea f una subnorma continua en X donde $dim(X) \geq 2$. Fijemos un elemento $y \neq 0$ en X y sea $W = \{\alpha y : \alpha \in K\}$ el subespacio lineal unidimensional generado por y. Enseguida, tomemos un real k tal que $k > 1$. Definimos la siguiente función*

$$g_k(x) = \begin{cases} kf(x) & si \quad x \in W \\ f(x) & si \quad x \in X - W. \end{cases}$$

Así, g_k es una subnorma en X. Ahora si $x \to y$ pero $x \notin W$, tenemos

$$\lim_{x \to y} g_k(x) = \lim_{x \to y} f(x),$$

por la continuidad de f, obtenemos

$$\lim_{x \to y} g_k(x) = f(y);$$

por otro lado tenemos que $g_k(y) = kf(y)$, ya que $y \in W$. Dado que $k > 1$, entonces

$$\lim_{x \to y} g_k(x) = f(y) \neq kf(y) = g_k(y),$$

lo cual implica que

$$\lim_{x \to y} g_k(x) \neq g_k(y).$$

Por lo tanto, g_k no es continua en y.

Al igual que las normas, todas las subnormas continuas en un espacio vectorial de dimensión finita en X son equivalentes como lo mostramos a continuación.

Proposición 2.2.1. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, y sea W un subespacio vectorial no cero de X. Sean f y g dos subnormas continuas en W, entonces existen escalares $\mu, \lambda \in K$ tal que*

$$\mu g(x) \leq f(x) \leq \lambda g(x)$$

para todo $x \in W$. En otras palabras, f y g son equivalentes en W.

Demostración. Sea N una norma en X. Por hipótesis, W es de dimensión finita. Como f y g son continuas, entonces

$$\frac{f}{g} : B_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una función continua, donde $B_1 = \{x \in W : N(x) = 1\}$ es la esfera unitaria en W. Por el Teorema 1.3.4, se tiene que B_1 es compacto, por lo que el subconjunto $\{\frac{f(x)}{g(x)} : x \in W$ y $N(x) = 1\}$ es compacto. Enseguida, procedemos a definir las siguientes constantes

$$\mu := \acute{m}\acute{\imath}n\{\frac{f(x)}{g(x)} : \quad x \in W \quad \text{y} \quad N(x) = 1\}$$

$$\lambda := m\acute{a}x\{\frac{f(x)}{g(x)} : \quad x \in W \quad \text{y} \quad N(x) = 1\},$$

así, para cualquier $x \neq 0$, $x \in W$, tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\frac{x}{N(x)})}{g(\frac{x}{N(x)})}.$$

Esto implica que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \mu \quad \text{y} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq \lambda.$$

Entonces

$$f(x) \geq \mu g(x) \quad \text{y} \quad f(x) \leq \lambda g(x).$$

Por lo tanto

$$\mu g(x) \leq f(x) \leq \lambda g(x)$$

para todo $x \in W$, lo cual concluye la demostración. ■

A continuación, se presenta un teorema sobre la continuidad de seminormas. Daremos dos pruebas diferentes.

Teorema 2.2.1. *Sea S una seminorma en un espacio vectorial de dimensión finita X sobre un campo K. Entonces S es continua con respecto a la topología única en X.*

Demostración 1. Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base para X, de modo que para todo $x \in X$, podemos expresar de forma única

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

donde $\alpha_i \in K$ para cada i. Si $S = 0$ la conclusión es trivial. Supongamos que $S \neq 0$. Así, tomemos

$$M = máx\{S(e_1), S(e_2), ..., S(e_n)\},$$

lo cual implica que M es una constante positiva. Ahora, definamos la función N_1 como

$$N_1(x) = M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|, \quad x \in X \quad \text{donde} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i. \tag{2.4}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} S(x) &= S(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n) \\ &\leq |\alpha_1| S(e_1) + |\alpha_2| S(e_2) + ... + |\alpha_n| S(e_n) \\ &\leq M[|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n|] \\ &= M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \\ &= N_1(x) \end{aligned}$$

entonces

$$S(x) \leq N_1(x). \tag{2.5}$$

Ahora, sea $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que converge a y. Por la desigualdad (2.5) y el inciso (b) de la Proposición 2.1.1, obtenemos

$$|S(x_j) - S(y)| \leq |S(x_j - y)| \leq N_1(x_j - y)$$

y dado que X es de dimensión finita y N_1 es una norma en X, entonces

$$N_1(x_j - y) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$|S(x_j) - S(y)| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty,$$

lo cual implica que $(S(x_j))_{j=1}^{\infty}$ converge a $S(y)$. Por lo tanto S es continua en X. ■

Demostración 2. Dado que S es una seminorma, podemos considerar el espacio cociente X/Z donde $Z = \{x \in X : S(x) = 0\}$. Recordemos que la función $N_s : X/Z \longrightarrow \mathbb{R}$ definida

$$N_s(x + Z) = S(x)$$

es una norma en dicho espacio. Como X es dimensión finita, entonces X/Z lo es, entonces N_s es continua en X/Z. Ahora sea $\varphi : X \longrightarrow X/Z$ tal que $x \longmapsto x + Z$. Así para cada $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in K$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x + \beta y) &= \alpha x + \beta y + Z \\
&= \alpha x + Z + \beta y + Z \\
&= \alpha(x + Z) + \beta(y + Z) \\
&= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y),
\end{aligned}$$

lo cual implica que φ es lineal, y por el Teorema 1.4.1, se sigue que φ es continua. De este modo, si $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a y en X, entonces $\varphi(x_j)$ converge a $\varphi(y)$, es decir

$$x_j + Z \to y + Z \quad \text{cuando} \quad j \to \infty.$$

Observemos que

$$|S(x_j) - S(y)| = |N_s(x_j + Z) - N_s(y + Z)|$$

y dado que N_s es continua, tenemos

$$|S(x_j) - S(y)| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty,$$

Por tanto S es continua en X. ■

Observemos que, para todo $x \in X$ y $y \in Z$ se tiene que

$$S(x) = S(x - y + y) \leq S(x - y) + S(y) = S(x - y) \leq S(x) + S(y) = S(x)$$

es decir

$$S(x) = S(x - y),$$

así $N_s(x + Z) = S(x - y)$ para todo $x \in X$ y $y \in Z$. Entonces $N_s(x + Z)$ es la distancia medida por S desde x a y.

Un resultado importante que usa la noción de equivalencia por la izquierda para una norma y una seminorma es la siguiente proposición. Igual que antes, daremos dos pruebas.

Proposición 2.2.2. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K, equipado con una seminorma S y una norma N. Entonces S es equivalente por la izquierda a N, es decir, existe una constante $\tau > 0$ tal que*

$$S(x) \leq \tau N(x)$$

para todo $x \in X$.

Demostración 1. Dado que X tiene dimensión finita, tenemos que N_1 en (2.4) es equivalente a N, así existe una constante $\tau > 0$ tal que

$$N_1(x) \leq \tau N(x)$$

para todo $x \in X$. Por la ecuación (2.5), se tiene que

$$S(x) \leq \tau N(x).$$

Así, queda demostrado el resultado deseado. ■

Demostración 2. Supongamos que S no es idénticamente cero. Consideremos el conjunto compacto $B = \{x \in X : N(x) = 1\}$. Por el Teorema 2.2.1, se tiene que S es continua en B, entonces $S(B)$ es compacto. Así definimos

$$\tau = máx\{S(x) : x \in B\}.$$

Como S no es idénticamente cero, entonces τ es una constante positiva, es decir, $\tau > 0$. Ahora sea $x \in X$ tal que $x \neq 0$, entonces

$$\frac{x}{N(x)} \in B.$$

Lo cual implica que

$$S\left(\frac{x}{N(x)}\right) \leq \tau.$$

Entonces

$$S(x) \leq \tau N(x),$$

pero esto también es válido para $x = 0$, entonces

$$S(x) \leq \tau N(x)$$

para todo $x \in X$. Por tanto queda demostrada la proposición. ■

Capítulo 3

Continuidad de seminormas en espacios de dimensión infinita

Hemos visto anteriormente que una seminorma en un espacio de dimensión finita es continua con respecto a la topología única en X. En el caso de dimensión infinita, esto podría ser falso. Incluso podríamos tener dos normas que no son equivalentes entre sí, y en consecuencia, ya no tendríamos una topología única. El objetivo de nuestro estudio en este capítulo será determinar cuando una seminorma es continua o discontinua en un espacio de dimensión infinita.

Iniciamos este capítulo presentando el siguiente lema.

Lema 3.0.1. *Sea X un espacio vectorial de dimensión infinita sobre K, equipado con una norma N y una seminorma S. Entonces:*
(a) La continuidad de S en el origen implica continuidad en todo X con respecto a la topología inducida por N.
(b) La discontinuidad de S en el origen implica discontinuidad en todo X en la topología inducida por N.

Demostración. (a) Sea S continua en $x = 0$ con respecto a la topología inducida por la norma N, es decir, si $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en X, entonces

$$N(x_j) \longrightarrow 0 \quad \text{implica} \quad S(x_j) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty. \tag{3.1}$$

Sea $y \in X$ arbitrario, y sea $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que

$$N(y_j - y) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Por (3.1), se tiene que

$$S(y_j - y) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Ahora, por (b) de la Proposición 2.1.1, obtenemos

$$|S(y_j) - S(y)| \leq S(y_j - y) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty$$

por lo tanto S es continua en X, y así queda demostrada la afirmación.

(b) En este apartado, tenemos que S no es continua en 0. Así, existe una sucesión $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ en X tal que $(N(x_j))_{j=1}^{\infty}$ converge a 0, pero $(S(x_j))_{j=1}^{\infty}$ no converge a 0 cuando $j \to \infty$. Dado que $(S(x_j))_{j=1}^{\infty}$ no tiende a 0 y que S es no negativo, existe una subsucesión $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ y una constante c tal que

$$S(x_{j_k}) \geq c \tag{3.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Para aligerar la notación, supongamos sin pérdida de generalidad que la subsucesión es $(S(x_j))_{j=1}^{\infty}$. Además, dado que $(N(x_j))_{j=1}^{\infty}$ tiende a 0, existe una subsucesión $(N(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty}$ de $(N(x_j))_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$N(x_{j_k}) \leq \frac{1}{k^2} \tag{3.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De nuevo, sin pérdida de generalidad supongamos que la subsucesión es $(N(x_j))_{j=1}^{\infty}$. Consideremos la sucesión $y_j = jx_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por la ecuación (3.2), tenemos que

$$S(y_j) = S(jx_j) = jS(x_j) \geq jc$$

y además, por (3.3) obtenemos

$$N(y_j) = N(jx_j) \leq \frac{1}{j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que

$$N(y_j) \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad S(y_j) \longrightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Así para cada $x \in X$, tomemos la sucesión $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $z_j = x + y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$N(z_j - x) = N(y_j) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Por otro lado

$$S(z_j - x) = S(y_j) \longrightarrow \infty.$$

Esto implica que S es discontinua en todo X, lo cual demuestra el lema. ■

Del Lema anterior podemos deducir directamente el siguiente resultado:

Teorema 3.0.1. *Sean N una norma y S una seminorma en un espacio vectorial X de dimensión infinita sobre K. Entonces:*

(a) S es continua en todo X con respecto a la única topología inducida por N si y solo si S es continua en 0.

(b) S es discontinua en todo X en la topología inducida por N si y solo si S es discontinua en 0.

Ahora continuamos con un resultado muy interesante, que nos dice que dada una seminorma no trivial S en X , existen dos normas diferentes tales que S es continua en todo X con respecto a una de ellas y discontinua en todo X con respecto a la otra.

Teorema 3.0.2. *Sea $S \neq 0$ una seminorma en un espacio vectorial X de dimensión infinita sobre un campo K. Entonces*

(a) Existe una norma con respecto a la cual S es continua en todo X.

(b) Existe una norma con respecto a la cual S es discontinua en todo X.

Demostración. (a) Sea H una base de Hamel para X. Entonces B=$\{\frac{h}{S(h)}$: $h \in H$ y $S(h) > 0\}\cup\{$h$\in H$: $S(h) = 0\}$ es también una base para X. Así, cada x en X tiene una representación única de la forma

$$x = \sum_{b \in B} \alpha_b(x)b \tag{3.4}$$

donde $\alpha_b(x) \in K$ y $\{b \in B : \alpha_b(x) \neq 0\}$ es un conjunto finito. Con esta representación, podemos ver fácilmente que la función real

$$N(x) = \sum_{b \in B} |\alpha_b(x)| \quad , \quad x \in X \tag{3.5}$$

es una norma en X. Además, por la construcción de B, tenemos que $S(b) \in \{0, 1\}$ para todo $b \in B$. En consecuencia, para cada $x \in X$ se tiene

$$S(x) = S\left(\sum_{b \in B} \alpha_b(x)b\right) \leq \sum_{b \in B} |\alpha_b(x)|S(b) \leq \sum_{b \in B} |\alpha_b(x)| = N(x). \tag{3.6}$$

Por la Proposición 2.1.1 y (3.6), obtenemos que

$$|S(x) - S(y)| \leq S(x - y) \leq N(x - y)$$

para todo $x, y \in X$. Tomando $\delta = \epsilon > 0$, tenemos que si $N(x - y) < \delta$, entonces

$$|S(x) - S(y)| \leq N(x - y) < \delta = \epsilon.$$

Por lo tanto S es continua en X.

(b) Considere el conjunto no vacío

$$A = \{x \in X : S(x) > 0\},$$

y probemos que

$$span(A) = X. \tag{3.7}$$

En efecto, supongamos por el contrario que $span(A) \subsetneq X$. Entonces existe $y \in X$ tal que $y \notin span(A)$ y $S(y) = 0$. Ahora, para cada z en A, tenemos

$$S(y + z) = S(y + z) + S(y) \geq S(y + z - y) = S(z) > 0,$$

entonces z y $z + y$ pertenecen en A, y en consecuencia, $y = (y + z) - z \in span(A)$, lo cual contradice nuestra suposición. En vista de (3.7) y por el Corolario 1.4.1, A contiene una base de Hamel H para X. Así $S(h) > 0$ para todo h en H. Ahora fijemos una sucesión $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos distintos en H, y consideremos una nueva base B' para X tal que

$$b_j = \frac{jh_j}{S(h_j)}$$

para $j \in \mathbb{N}$. Además, dejemos los elementos restantes de H sin ningún cambio. Así

$$S(b_j) = S\left(\frac{jh_j}{S(h_j)}\right) = j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Ahora, modificando la representación de la ecuación (3.4) y reemplazando la base original B por B' en la norma N que vimos en (3.5), obtenemos que

$$N(b_j) = 1$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Escribiendo

$$x_j = \frac{b_j}{j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ vemos que

$$N(x_j) = \frac{1}{j} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty,$$

mientras que

$$S(x_j) = 1,$$

lo cual implica la discontinuidad de S en $x = 0$, y por el teorema 3.0.1, se sigue que S es discontinua en todas partes, y finalmente la demostración se ha completado. ■

Corolario 3.0.1. *Sea $S \neq 0$ una seminorma en un espacio vectorial X sobre un campo*

K. Entonces S es continua con respecto a cualquier norma en X si y sólo si X es de dimensión finita.

Demostración. Si X es de dimensión infinita, por el Teorema 3.0.2 (b) existe una norma con respecto a la cual S es discontinua en todo X. Recíprocamente, si X es de dimensión finita, entonces por el Teorema 2.2.1, S es continua con respecto a cualquier norma en X. ■

Capítulo 4

Seminormas propias

Sea X un espacio vectorial sobre un campo K.
Diremos que una seminorma $S : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es propia si S no es idénticamente cero y existe $x \in X - \{0\}$ tal que

$$S(x) = 0.$$

En este capítulo, nos formulamos la siguiente pregunta: ¿Existe un espacio normado X de dimensión infinita de modo que todas las seminormas en dicho espacio sean continuas con respecto a la topología de la norma dada en X? El siguiente teorema nos da una respuesta negativa y lo mostraremos a continuación.

Teorema 4.0.1. *Sea N una norma en un espacio vectorial X de dimensión infinita sobre K. Entonces, existen una norma N' y una seminorma propia S en X las cuales son discontinuas en todo X con respecto a la topología de la norma inducida por N.*

Demostración. Sea B_N:=$\{x \in X$:$N(x) \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada de (X, N). Puesto que $span(B_N) = X$, aplicando el Corolario 1.4.1, podemos asegurar que B_N contiene una base de Hamel H para X. De esta base, podemos extraer una sucesión de elementos distintos $\{h_1, h_2, h_3, ...\}$ en H. Enseguida, tomemos la siguiente sucesión

$$g_j = \frac{h_j}{j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces

$$B := \{g_1, g_2, g_3, ...\} \cup (H - \{h_1, h_2, h_3, ...\})$$

es una base de Hamel de X. Por tanto, cada $x \in X$ se puede expresar de manera única de la forma

$$x = \sum_{b \in B} \alpha_b(x) b \tag{4.1}$$

para $\alpha_b(x) \in K$ y donde $\{b \in B\colon \alpha_b(x) \neq 0\}$ es un conjunto finito. Ahora, definamos las siguientes funciones: $N' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $S : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$N'(x) := \sum_{b \in B} |\alpha_b(x)| \quad \text{y} \quad S(x) := \sum_{b \in B - \{g_1\}} |\alpha_b(x)|.$$

para todo x expresado como en (4.1). Se puede verificar fácilmente que N' es una norma en X y S una seminorma propia en X. Sin embargo, para todo $j \in \mathbb{N}$ tenemos

$$N(g_j) = \frac{1}{j} N(h_j) \leq \frac{1}{j}$$

ya que h_j está en B_N. Por otro lado, notemos que

$$N'(g_j) = 1 \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

y además

$$S(g_j) = 1 \quad \text{para todo} \quad j = 2, 3, 4, ...$$

y por consecuencia, $N(g_j) \longrightarrow 0$ si $j \longrightarrow \infty$, pero ni $N'(g_j)$ ni $S(g_j)$ tienden a cero cuando $j \longrightarrow \infty$, esto es, N' y S son discontinuas en 0 con respecto a N. Por (b) del Teorema 3.0.1, se sigue que N' y S son discontinuas en todo X con respecto a la topología de la norma inducida por N. ∎

Enseguida nos hacemos la siguiente pregunta: dado un espacio vectorial X de dimensión infinita sobre K, supongamos que una seminorma dada en X es continua en todo X con respecto a dos normas en X, ¿Será cierto que ambas normas son equivalentes? La respuesta a esta pregunta es negativa y lo mostramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.0.1. *Sea c_{00} el espacio que vimos en el capítulo 1. Consideremos la seminorma propia, definida como*

$$S(x) := |\xi_1|$$

donde $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_{00}$, y con las siguientes dos normas

$$N_1(x) := \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \quad y \quad N_\infty(x) := \max_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|. \tag{4.2}$$

Es claro que

$$S(x) \leq N_\infty(x) \leq N_1(x) \tag{4.3}$$

para todo $x \in c_{00}$. Ahora, sea $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en c_{00}. Si $N_1(x_j) \longrightarrow 0$ o $N_\infty(x_j) \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow \infty$, entonces, por (4.3) tenemos que $S(x_j) \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow \infty$, y por lo tanto, S es continua en 0 con respecto N_1 y N_∞. Por (a) del Teorema 3.0.1, S es continua en todo X con respecto a las dos normas.

Sin embargo, N_1 y N_∞ no son normas equivalentes. Para ver esto, consideremos los siguientes elementos de c_{00}:

$$x_j := (\underbrace{\frac{1}{j}, \frac{1}{j}, ..., \frac{1}{j}}_{j-veces}, 0, 0, ...)$$

para $j \in \mathbb{N}$. Entonces $N_1(x_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pero $N_\infty(x_j) = \frac{1}{j} \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow \infty$, lo cual implica que dichas normas no son equivalentes.

Conclusiones

En esta tesis, se ha estudiado la continuidad de seminormas en espacios lineales de dimensión finita e infinita. En los espacios lineales de dimensión finita se tiene que todas las normas son equivalentes. Gracias a esto, podemos tener una topología única que nos asegura que todas las seminormas son continuas con respecto a cualquier norma en espacios lineales de dimensión finita.

Sin embargo, en espacios lineales de dimensión infinita podemos garantizar la existencia de una norma con respecto a la cual una seminorma es continua, pero siempre vamos a encontrar una norma con respecto a la cual una seminorma es discontinua. En síntesis, siempre existe un espacio normado de dimensión infinita en el cual una seminorma es discontinua con respecto a la topología inducida por la norma.

Bibliografía

[1] G. Bachman, L. Narici, Functional Analysis, Dover, 2000.

[2] J. Chmieliński, Goldberg, Continuity and discontinuity of seminorms on infinite-dimensional vector spaces, Linear Algebra and its Applications, 578 (2019), pp. 153-158.

[3] J. Chmieliński, M. Goldberg, Continuity and discontinuity of seminorms on infinite-dimensional vector spaces. II, Linear Algebra and its Applications 594 (2020), pp. 249-261.

[4] M. Goldberg, W. Luxemburg, Stable subnorms, Linear Algebra and its Applications 307 (2000), pp. 89-101.

[5] M. Goldberg, Continuity of seminorms on finite-dimensional vector spaces, Linear Algebra and its Applications 515 (2017), pp. 175-179.

[6] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, 1978.

[7] M. Kuczma, An introduction to the theory of functional equations and inequalities, Birkhäuser, 2009.

[8] S. Ramaswamy, Análisis, IV Coloquio Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN, 1984.