"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciado en Matemáticas

Funciones Propias en la Geometría Diferencial y la Teoría de Sistemas Dinámicos

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Eduardo Velasco Barreras

Director de Tesis: Dr. Yuri M. Vorobiev

Hermosillo, Sonora, México, Junio, 2012

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora

Dr. Yuri M. Vorobiev
Universidad de Sonora

Dr. Rafael Ramos Figueroa
Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora

Índice general

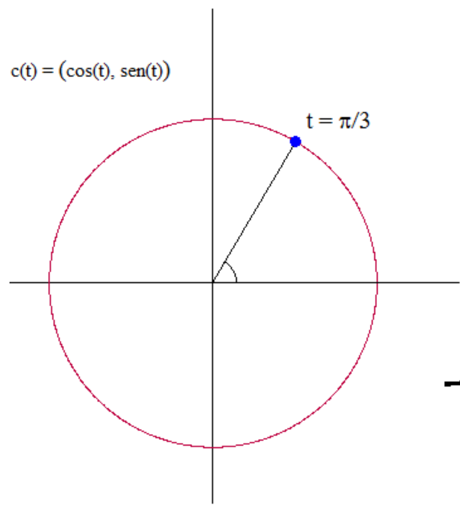
Capítulo 1

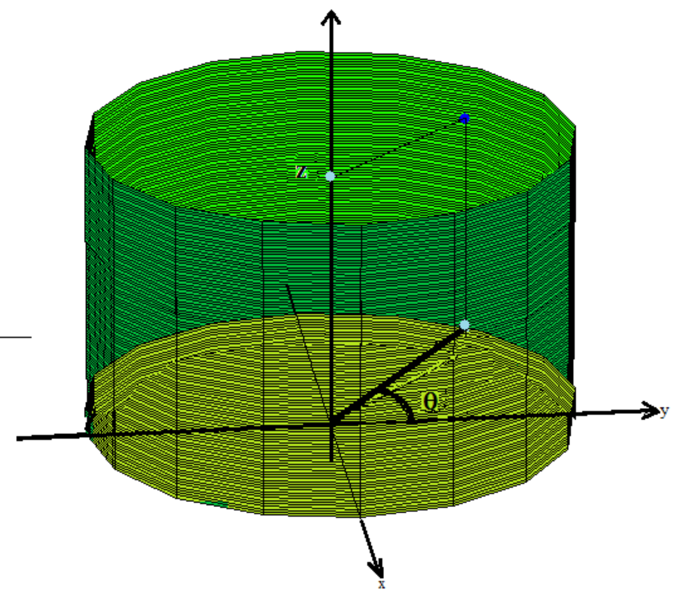
Preliminares

En este capítulo realizaremos una exposición detallada de los conceptos fundamentales que necesitaremos para construir nuestros resultados. En la primera sección presentaremos los conceptos topológicos básicos para construir las **variedades topológicas**. En la tercera sección desarrollaremos el concepto de **variedad diferencial** a partir de las variedades topológicas: es a estos espacios donde extenderemos las nociones el cálculo diferencial, generalizando por ejemplo, el cálculo en curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$. En nuestra segunda sección estudiaremos el concepto de **función propia**, el cual, a pesar de ser un concepto estrictamente topológico, tiene gran importancia en geometría diferencial y sistemas dinámicos; de hecho, el objetivo de este trabajo es establecer algunos resultados importantes en estas dos áreas de las matemáticas basados en funciones propias. Finalmente, en nuestra cuarta sección extenderemos el concepto de **campo vectorial** a las variedades diferenciales, y veremos que en estos espacios también podemos estudiar ecuaciones diferenciales de manera muy similar a lo que se hace en los espacios euclídeos.

1.1. Variedades Topológicas

Una variedad topológica es una generalización del concepto de curva o de superficie, a dimensiones superiores. Una curva es una variedad topológica de dimensión 1, y una superficie es una variedad topológica de dimensión 2. La dimensión tiene que ver con el número de parámetros que necesitamos especificar para determinar de manera única un punto. Por ejemplo, una circunferencia, la cual es una curva, necesita sólo un parámetro para identificar de manera única sus puntos: basta con que especifiquemos el ángulo, y con eso determinamos de manera única un punto en la circunferencia. En un cilindro, el cual es una superficie, necesitamos dos parámetros: la altura a la que estará el punto, y el ángulo que forma respecto a la circunferencia.





Una **variedad topológica** M de dimensión n, o bien, una n**-variedad** es un espacio topológico que satisface las siguientes propiedades:

1. M es de Hausdorff,

2. M es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (con la topología usual),

3. M satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Si M es una n-variedad, la segunda condición nos dice que existe una familia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ de homeomorfismos, llamados **cartas locales** $\varphi_i : U_i \subset M \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M = \bigcup_{i\in I} U_i$. Otra manera de expresar esta condición es que para cada $p \in M$ existe una vecindad abierta U de p y un homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. En este caso decimos que (U, φ) es una **vecindad coordenada** de p, ya que la biyección φ nos permite determinar cada punto de U por medio de las coordenadas de su imagen.

La segunda condición es meramente local, es decir, nos dice que localmente una variedad topológica es como un espacio euclidiano, pero no nos da por sí sola condiciones globales de dicho espacio. Las otras dos condiciones son suficientes para poder garantizar propiedades deseables en las variedades topológicas, que le harán compartir más características con los espacios euclidianos. Antes de desarrollar dichas propiedades, daremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.1.1. *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto entonces U es una n-variedad con la topología relativa. En efecto, la propiedad de Hausdorff y ser segundo numerable son propiedades hereditarias, las cuales son satisfechas por $\mathbb{R}^n$. Además $Id_U : U \to U$ es homeomorfismo.*

Ejemplo 1.1.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, si $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ entonces $\mathbb{S}^n$ es n-variedad con la topología relativa como subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Primero recordemos que las propiedades 1 y 3 las hereda de $\mathbb{R}^{n+1}$, por lo que sólo debemos demostrar que $\mathbb{S}^n$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sean $N = (0, \ldots, 0, 1), S = (0, \ldots, 0, -1)$ y sean $f : \mathbb{S}^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{S}^n \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^n$ definidas por*

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}},$$
$$g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{(-x_1, \ldots, x_n)}{1 + x_{n+1}}.$$

Sus inversas vienen dadas respectivamente por

$$f^{-1}(x_1 \ldots, x_n) = \frac{(2x_1, \ldots, 2x_n, ||x||^2 - 1)}{||x||^2 + 1},$$
$$g^{-1}(x_1 \ldots, x_n) = \frac{(-2x_1, \ldots, 2x_n, 1 - ||x||^2)}{||x||^2 + 1},$$

las cuales están bien definidas y son continuas, es decir, f, g son homeomorfismos entre $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}, \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Como $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}, \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$ son abiertos que cubren a $\mathbb{S}$, tenemos que dicho espacio es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. En general, se puede hacer una proyección estereográfica desde cualquier punto p al plano perpendicular al radio por p que pasa por el centro de la esfera, y de igual manera, esto define un homeomorfismo local.

Ejemplo 1.1.3 (Toro)**.** *Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y sea $\Phi : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la acción de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por*

$$\Phi((m, n), (x, y)) = (m + x, n + y).$$

*El espacio $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es llamado **2-Toro**. Dicho conjunto posee estructura de grupo heredada de $\mathbb{R}^2$ dada por*

$$[(a, b)] + [(x, y)] = [(a + x, b + y)].$$

Para probar que dicha operación está bien definida, hay que demostrar que si $(x, y) \sim (z, w)$ entonces $(a + x, b + y) \sim (a + z, b + w)$. Pero esto es claro ya que

$$\begin{aligned}(x, y) \sim (z, w) &\Rightarrow (x, y) = (z + m, w + n)\\ &\Rightarrow (a + x, b + y) = (a + z + m, b + w + n)\\ &\Rightarrow (a + x, b + y) \sim (a + z, b + w)\end{aligned}$$

*De manera análoga, el **n-Toro** se define por $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, donde la acción se define de manera similar componente a componente. En particular, $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$.*

Otra manera de construir $\mathbb{T}^2$ es la siguiente: sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$. Definimos $\sim$ en X por $(a, b) \sim (x, y)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes:

1. $(a, b) = (x, y)$;
2. $a = x, b = 0, y = 1$;
3. $a = x, b = 1, y = 0$;
4. $b = y, a = 0, x = 1$;
5. $b = y, a = 1, x = 0$.

*La razón de que $\mathbb{T}^2 = X/\sim$ es debido a que $[0, 1] \times [0, 1]$ es una **región fundamental** de la acción, es decir, su interior contiene a lo más un representante de cada clase en la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ y también a que si restringimos la acción al conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ obtenemos la misma relación de equivalencia que está descrita en los cinco puntos anteriores.*

Hay una tercer manera de construir el n-Toro, y es $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 1.1.4 (Botella de Klein)**.** *La **Botella de Klein** $\mathbb{K}^2$ se puede construir de dos formas distintas: Consideremos primero el grupo $\Gamma = \langle g, h \mid ghg^{-1}h = e\rangle$. Ahora, sea $\Phi : \Gamma \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\begin{aligned}\Phi^g(x, y) &= (x + 1, -y),\\ \Phi^h(x, y) &= (x, y + 1).\end{aligned}$$

Para probar que es una acción, basta demostrar que $\Phi^g \circ \Phi^h \circ \Phi^{g^{-1}} \circ \Phi^h = id_{\mathbb{R}^2}$ (recordemos que, implícitamente, se imponen las relaciones $gg^{-1} = e$,

$hh^{-1} = e$ y por ello $\Phi^{g^{-1}} = (\Phi^g)^{-1}$):

$$\begin{aligned}\Phi^g \circ \Phi^h \circ \Phi^{g^{-1}} \circ \Phi^h(x,y) &= \Phi^g \circ \Phi^h \circ \Phi^{g^{-1}}(x, y+1) = \Phi^g \circ \Phi^h(x-1, -y-1) \\ &= \Phi^g(x-1,-y) = (x,y).\end{aligned}$$

Esto significa que Φ sí define una acción en $\mathbb{R}^2$. Ahora, definimos la botella de Klein por $\mathbb{K}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$.

Otra manera de construirla es a partir de $X = [0,1] \times [0,1]$ con la siguiente relación de equivalencia: $(a,b) \sim (x,y)$ si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se satisface:

1. $(a,b) = (x,y)$;
2. $a + x = 1, b = 0, y = 1$;
3. $a + x = 1, b = 1, y = 0$;
4. $b = y, a = 0, x = 1$;
5. $b = y, a = 1, x = 0$.

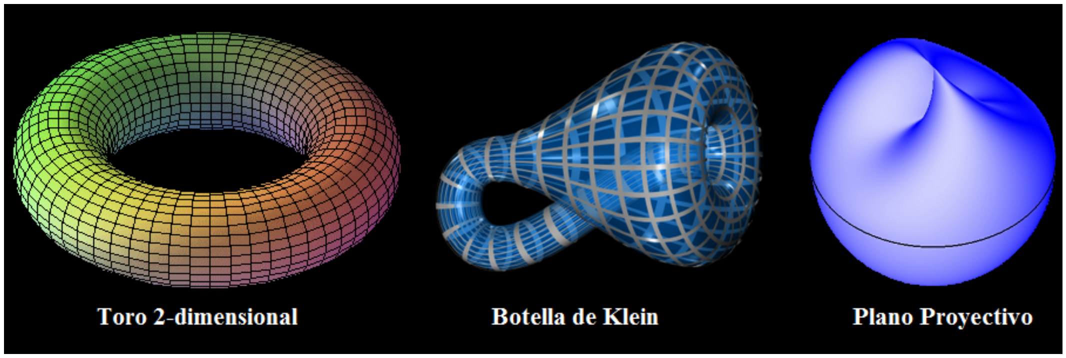
De nuevo, la razón de que ambas definiciones coincidan se debe a que $[0,1] \times [0,1]$ es una región fundamental de la relación de equivalencia dada por la acción, y que los cinco puntos anteriores muestran la acción en dicha región.

$\mathbb{K}^2$ es no-orientable y no hereda estructura de grupo a partir de $\mathbb{R}^2$, a diferencia de $\mathbb{T}^2$.

Ejemplo 1.1.5. *En $X = \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ definimos $x \sim y$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $x = \lambda y$. A $X/\sim$ se le llama* ***Espacio Proyectivo Real n-dimensional****, y se denota por $\mathbb{RP}^n$.*

Otra manera de definir $\mathbb{RP}^n$ es por la acción de $\mathbb{Z}_2 = \langle 1 \mid 1 + 1 = 0 \rangle$ en $\mathbb{S}^n$ dada por $\Phi^0(x) = x$ y $\Phi^1(x) = -x$. Para probar que esto define una acción, debemos probar que $\Phi^1 \circ \Phi^1 = Id_{\mathbb{S}^n}$, lo cual es verdadero ya que $\Phi^1 \circ \Phi^1(x) = \Phi^1(-x) = x$.

En este caso, cualquier semiesfera n-dimensional es una región fundamental. Ambas definiciones coinciden en este caso porque las clases de equivalencia de la primer definición intersecadas con $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ resultan en las clases de equivalencia en la segunda definición.



Probaremos que $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{K}^2$ y $\mathbb{RP}^n$ son variedades topológicas. Observemos primero que las acciones que definen a cada uno de nuestros espacios son acciones continuas, lo cual significa que en los tres casos la proyección canónica es una función abierta (Apéndice, Prop. A.0.60). Por otra parte, el toro $\mathbb{T}^n$, la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ y $\mathbb{RP}^n$ son cocientes de $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^n$, respectivamente, los cuales son segundo numerables. Por la Proposición A.0.47 del Apéndice, basta probar que $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{K}^2$ y $\mathbb{RP}^n$ son localmente euclídeos para garantizar que serán segundo numerables.

En el caso de $\mathbb{T}^n$, probaremos que para cada $p \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad U de p tal que la restricción de la proyección canónica $\pi|_U : U \to \pi(U)$ es inyectiva. De esta manera, $\pi|_U$ será inyectiva, continua y abierta, es decir, un homeomorfismo en su imagen. La inversa de $\pi|_U$ definirá un homeomorfismo local entre $\mathbb{T}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^n$, probando que $\mathbb{T}^n$ es localmente euclídeo. Un ejemplo de una vecindad U para p es el interior de cualquier región fundamental que contiene a p, por ejemplo, el n-cubo centrado en p de lado 1,

$$C_{1/2}(p) = (p_1 - 1/2, p_1 + 1/2) \times \ldots \times (p_n - 1/2, p_n + 1/2).$$

El caso de la Botella de Klein es totalmente análogo, sólo que en este caso la vecindad abierta U de p vendrá dada por

$$C_{1/2}(p) = (p_1 - 1/2, p_1 + 1/2) \times (p_2 - 1/2, p_2 + 1/2).$$

El caso del espacio proyectivo es ligeramente distinto. Para probar que es localmente euclídeo, también podemos encontrar para cualquier punto $p \in \mathbb{S}^n$ una vecindad abierta en la que la proyección canónica sea inyectiva. Dicha vecindad U la tomaremos como el interior del hemisferio que tiene a

p como polo. La inversa de la restricción $\pi|_U$ define un homeomorfismo local entre $\pi(U)$ y $U \subset \mathbb{S}^n$. Sin embargo, definimos U como el hemisferio de $\mathbb{S}^n$ que tiene a p como polo. Si hacemos una proyección estereográfica desde $-p$ (véase ejemplo 1.1.2), la restringimos a U y la componemos con $(\pi|_U)^{-1}$, obtenemos el homeomorfismo con $\mathbb{R}^n$ que buscábamos.

Con lo anterior hemos probado que $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{K}^2$ y $\mathbb{RP}^n$ son espacios localmente euclídeos y segundo numerables. Ahora probaremos que también son de Hausdorff, para lo cual, probaremos que la acción que los define es propiamente discontinua: En el caso del n-toro, sean $[x], [y] \in \mathbb{T}^n$ distintos. Sin pérdida de generalidad, supongamos podemos suponer que $x, y \in [0,1]^n$, ya que esta es una región fundamental de la acción. Si al menos uno de ellos pertenece a $(0,1)^n$, podemos encontrar un n-cubo abierto de lado 1 que contenga a x e y. Si ambos están en la frontera, podemos cambiar de representantes de clase de tal manera que haya dos que pertenezcan a la misma "cara" del cubo, y en este caso también existe un n-cubo abierto que contiene a ambos representantes. En cualquier caso, existe un n-cubo abierto C de lado 1 que contiene a ambos representantes de clase, a los que sin pérdida de generalidad seguiremos llamando x e y. Sean U y V vecindades abiertas y ajenas de x e y, respectivamente, totalmente contenidas en C (éstas existen porque $\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff y C es abierto). Si $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ y $\mathbf{m} \neq 0$ entonces $\mathbf{m} + C \cap C = \emptyset$, ya que C es un n-cubo abierto de lado 1. Puesto que $\mathbf{m} + U \subset \mathbf{m} + C$ y $V \subset C$, se sigue que $\mathbf{m} + U \cap V = \emptyset$. Como $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ es arbitrario, la acción es propiamente discontinua y $\mathbb{T}^n$ es de Hausdorff.

Para probar que $\mathbb{K}^2$ es de Hausdorff, aplicaremos los mismos argumentos a partir de que demostremos que, para cualesquiera dos elementos $[p], [q] \in \mathbb{K}^2$ distintos, podemos encontrar representantes de clase cuyas coordenadas difieran en menos que 1. Recordemos que $\mathbb{K}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, donde

$$\Gamma = \langle g, h \mid ghg^{-1}h = e \rangle$$

y Φ está determinada por la acción de los generadores

$$\Phi^g(x,y) = (x+1, -y), \qquad \Phi^h(x,y) = (x, y+1).$$

Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ los representantes de clase. Si le aplicamos a p la operación Φ^g (o su inversa) suficientes veces, podemos obtener que la imagen de p bajo estas transformaciones sea tal que su coordenada x difiera con la de q en menos que 1. Posteriormente, si a q le aplicamos la operación Φ^h (o su inversa) suficientes veces, podemos obtener que la imagen de q bajo estas transformaciones sea tal que su coordenada y difiera en menos que 1 con el nuevo representante de $[p]$ que obtuvimos en el paso anterior. Además, como Φ^h no altera la coordenada x, tenemos que las dos coordenadas de ambos representantes de clase difieren en menos que 1, como queríamos.

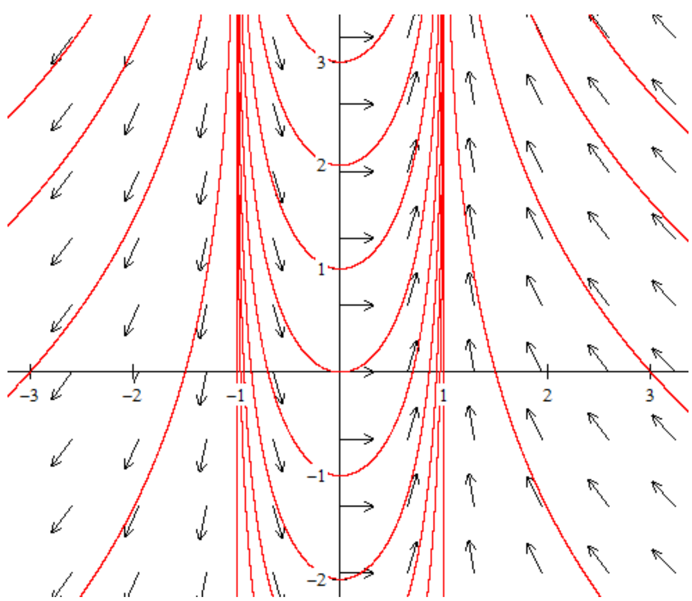
Para probar que $\mathbb{RP}^n$ es de Hausdorff, haremos lo mismo: para cualesquiera dos puntos distintos encontraremos dos representantes de clase que pertenezcan a una misma región fundamental. En este caso es muy sencillo, ya que la región fundamental es la semiesfera, y si los dos representantes de clase no están en la misma semiesfera, al tomar el diametralmente opuesto a uno de ellos como representante asegurará que pertenezca a la misma semiesfera que el otro.

Todo esto nos ha permitido demostrar que el n-toro, la Botella de Klein y $\mathbb{RP}^n$ son variedades topológicas.

Ejemplo 1.1.6. *Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales en* $\mathbb{R}^2$ *dado por el campo* $v(x,y) = \big(-x^2+1, x\big)$*:*

$$\dot{x} = -x^2 + 1,$$
$$\dot{y} = x.$$

Su retrato fase viene dado de la siguiente manera:



Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el flujo de la ecuación diferencial. Consideremos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$p \sim q \Leftrightarrow q = \Phi^t(p) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}.$$

Es inmediato comprobar de las ecuaciones que definen al campo v, que éste no posee puntos críticos, por lo que, por la Proposición 4.4.4, Orb_v es un espacio conexo, segundo numerable y localmente euclídeo. Es fácil ver además que las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son trayectorias del campo v. Probaremos que este espacio no es de Hausdorff mostrando que ambas trayectorias no pueden separarse por abiertos.

La ecuación anterior es fácil de resolver, de hecho,

$$x(t,(x_0,y_0)) = 1 + \frac{2}{e^{2t-c}-1}, \qquad c = \ln\left(1 - \frac{2}{x_0+1}\right),$$
$$y(t,(x_0,y_0)) = \ln(e^c - e^{2t}) - t + k, \qquad k = y_0 + \ln\left(\frac{x_0+1}{-2}\right).$$

Ejemplo 1.1.7. *El ejemplo 1.1.6 nos muestra que existen espacios segundo numerables y localmente euclídeos que no son de Hausdorff. Ahora, construiremos un ejemplo de un espacio de Hausdorff, segundo numerable que no sea localmente euclídeo: Consideremos a $\mathbb{Q}$ con la topología discreta, es decir, donde todo subconjunto de $\mathbb{Q}$ es abierto. Si $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x \neq y$ entonces $\{x\}, \{y\}$ son vecindades abiertas y ajenas de x e y, probando que es de Hausdorff. Por otro lado, $\mathcal{B} = \big\{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\big\}$ es base para dicha topología, y como $\mathbb{Q}$ es numerable tenemos $\mathcal{B}$ es una base numerable para este espacio. Finalmente, como todo abierto en $\mathbb{R}^n$ es no-numerable, es imposible que alguna función $f : A \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^n$ sea abierta, ya que $\mathbb{Q}$ es numerable.*

Finalmente construiremos un espacio de Hausdorff localmente euclídeo que no sea segundo numerable: Consideremos el par $(\mathbb{R}^2, \tau)$, donde τ es generada por la base $\mathcal{B} = \bigsqcup_{y \in \mathbb{R}} \{U \times \{y\} \mid U \in \tau_{\mathbb{R}}\}$ que consiste de la unión disjunta de las topologías de $\mathbb{R}$ consideradas separadamente para cada recta horizontal en $\mathbb{R}^2$. Es claro que $\mathcal{B}$ define una base, ya que la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ es vacía o es $(U \cap V) \times \{y\} \in \mathcal{B}$, y por el corolario A.0.2, se sigue que $\mathcal{B}$ es una base. Es imposible que exista una base numerable para este espacio, ya que para cada $y \in \mathbb{R}$ debe existir un elemento básico contenido en $(0,1) \times \{y\}$. Este espacio es localmente euclídeo, ya que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(\mathbb{R} \times \{y\}, \pi_1)$ es un homeomorfismo local.

Hemos presentado diferentes ejemplos de variedades topológicas, y también de espacios que no lo son. Ahora introduciremos una definición topológica, que es poco usual, pero que posteriormente nos permitirá establecer criterios para determinar cuándo una función entre dos variedades topológicas es propia:

Definición 1.1.8. *Un espacio X se llama* ***compactamente generado*** *si posee la siguiente propiedad: Si $C \subset X$ es tal que para cualquier conjunto compacto K en X se tiene que $C \cap K$ es cerrado en K, entonces C es cerrado.*

A pesar de que la definición anterior sea algo rebuscada, el resultado siguiente nos dice que una gran cantidad de espacios topológicos son compactamente generados:

Proposición 1.1.9. *Todo espacio primero numerable o localmente compacto es compactamente generado.*

En [6, p. 121], encontramos la demostración de este hecho.

Si juntamos el teorema de [1, p. 9], la proposición anterior y el teorema de [5, p.9], podemos concluir que toda variedad topológica es *compactamente generada, localmente conexa, localmente compacta, paracompacta y normal*, es decir, que aunque nosotros sólo pedimos 3 condiciones para una variedad topológica, las relaciones que existen entre ellas dan lugar a muchas más propiedades.

Son resultados conocidos de topología que el producto de dos espacios de Hausdorff es de nuevo un espacio de Hausdorff con la topología producto (Proposición A.0.16) y que el producto de dos espacios segundo numerables es de nuevo segundo numerable (podemos encontrar una demostración de este hecho en [12, p. 218]). También ocurre que el producto de un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ resulta en un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{n+m}$ (Proposición A.0.49). Combinando estos tres resultados, podemos concluir que:

Proposición 1.1.10. *Si M es una m-variedad y N es una n-variedad entonces $M \times N$ es una $(m+n)$-variedad con la topología producto.*

En adelante, cuando nos refiramos al producto de dos espacios topológicos supondremos que posee la topología producto.

1.2. Funciones Propias

En esta sección introduciremos el concepto de función propia, que es el objeto central de nuestro estudio.

Recordemos que las funciones continuas tienen la propiedad de que la imagen inversa de un conjunto abierto es abierto, la imagen inversa de un conjunto cerrado es cerrado. Sin embargo, no toda función continua es abierta o cerrada, es decir, no siempre ocurre que la imagen de un abierto o un cerrado bajo una función continua es de nuevo abierto o cerrado. Observemos además que la imagen de un conjunto compacto bajo una función continua es de nuevo un conjunto compacto. Sin embargo, no siempre se tiene que la imagen inversa de un conjunto compacto bajo una función continua sea de nuevo un conjunto compacto. De hecho, las funciones que satisfacen esta propiedad son las **funciones propias**.

Que una función sea propia es una propiedad deseable en muchos casos, como veremos a lo largo de este trabajo. Veremos que en la teoría de sistemas dinámicos y en geometría diferencial, el trabajar con este tipo de funciones nos da propiedades bastante útiles.

En esta sección estableceremos solamente los hechos que necesitaremos para el desarrollo de este trabajo. Para consultar información adicional sobre funciones propias y sus propiedades, se recomienda al lector consultar la referencia [6] de la bibliografía.

Definición 1.2.1. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se llama **propia** si para cada subconjunto compacto K de Y se tiene que $f^{-1}(K)$ es compacto en X.*

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos la proyección en la primer componente $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\pi_1(x, y) = x$. Esta función no es propia, pero sí es continua y abierta.*

La función $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, como sabemos, pero no es propia ya que $\sin^{-1}(0) = \{n\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 + 2x$ es continua, propia, abierta y cerrada.

Recordemos que las funciones continuas tienen la cualidad de enviar sucesiones convergentes en sucesiones convergentes, y que en los espacios primero numerables el recíproco es válido (véase [12, p. 217]). Esto nos dice que, para una gran cantidad de espacios topológicos, podemos caracterizar las funciones continuas en términos de sucesiones convergentes y visualizar mejor el comportamiento de estas funciones.

Par estudiar las funciones propias haremos algo similar: definiremos una clase especial de sucesiones y daremos una caracterización de las funciones propias en términos de dichas sucesiones.

Definición 1.2.3. *Si X es un espacio topológico, una sucesión $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ que toma valores en X se dice que* ***diverge a infinito*** *si para cada conjunto compacto K en X, se tiene que sólo un número finito de valores de $\boldsymbol{x}$ pertenecen a K.*

Antes de caracterizar a las sucesiones divergentes a infinito, y a las funciones propias por medio de ellas, enunciaremos algunos resultados que serán útiles en esta sección.

Teorema 1.2.4 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Si X es un espacio topológico compacto y primero numerable entonces toda sucesión que toma valores en X posee una subsucesión convergente en X. El recíproco es verdadero si X es segundo numerable.*

La demostración de estos hechos aparecen respectivamente en [5, p. 6] y en [6, p. 99].

Lema 1.2.5. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a $x \in X$ entonces $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.*

Demostración del Lema: Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de K. Puesto que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \supset K$ se sigue que existe $\beta \in \Lambda$ tal que $x \in U_\beta$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_k \in \Lambda$ tal que $x_k \in U_{\alpha_k}$. Puesto que x_k converge a x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k > n$, $x_k \in U_\beta$. Por lo anterior, $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \cup \{U_\beta\}$ es una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ para K, probando que K es compacto, como queríamos. $\triangledown$

Podemos caracterizar a las sucesiones divergentes a infinito de la siguiente manera:

Proposición 1.2.6. *Sea X un espacio topológico y sea $\boldsymbol{x}$ una sucesión que toma valores en X. Si $\boldsymbol{x}$ diverge a infinito entonces $\boldsymbol{x}$ no puede tener* *subsucesiones convergentes. El recíproco es verdadero si X es segundo numerable.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que toma valores en X.

Supongamos que $\mathbf{x}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a algún $x \in X$. Sea $K = \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Por el Lema 1.2.5, K es compacto, y claramente $\mathbf{x}$ toma una infinidad de valores en K por lo que $\mathbf{x}$ no diverge a infinito.

Supongamos ahora que X es segundo numerable y que K es un conjunto compacto en X con la propiedad de que $\mathbf{x}$ toma una infinidad de valores en K. Esto implica que la subsucesión formada por los valores que $\mathbf{x}$ toma en K poseerá una subsucesión convergente, ya que, por ser X segundo numerable, se satisfacen las hipótesis del teorema de Bolzano-Weierstrass. Por ello, si $\mathbf{x}$ no diverge a infinito entonces posee alguna subsucesión convergente. $\square$

De la misma manera en que el comportamiento de las funciones continuas puede caracterizarse en términos de sucesiones convergentes, las funciones propias pueden caracterizarse en términos de las sucesiones divergentes a infinito, como veremos enseguida.

Proposición 1.2.7. *Si $f : X \to Y$ es una función propia entre los espacios topológicos X, Y entonces, para cualquier sucesión $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ divergente a infinito, se tiene que $f(\boldsymbol{x}) = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ diverge a infinito. El recíproco es verdadero si X es segundo numerable.*

Demostración. Sea K un conjunto compacto en Y y sea $\mathbf{x}$ una sucesión que toma valores en X, divergente a infinito. Puesto que f es propia, $f^{-1}(K)$ es compacto en X, por lo que existe sólo un número finito de índices $n_1, \ldots, n_k$ tales que $x_{n_i} \in f^{-1}(K)$ para $i = 1, \ldots, k$, ya que $\mathbf{x}$ diverge a infinito. Esto significa que sólo los términos $f(x_{n_i})$ de la sucesión $f(\mathbf{x}) = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ pertenecen a K. Como K es un conjunto compacto arbitrario en Y, se sigue que $f(\mathbf{x})$ diverge a infinito, como queríamos.

Supongamos ahora que X es segundo numerable y sea K un conjunto compacto en Y. Supongamos que existe una sucesión $\mathbf{x}$ que toma valores en $f^{-1}(K)$ y que no tiene subsucesiones convergentes. Por la proposición anterior, $\mathbf{x}$ diverge a infinito y por hipótesis $f(\mathbf{x})$ también lo hace. Sin embargo, $f(\mathbf{x})$ toma valores en K, por lo que es imposible que diverja a infinito. Esta contradicción nos conduce a que toda sucesión con valores en $f^{-1}(K)$ posea subsucesiones convergentes. Puesto que X es primero numerable, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que $f^{-1}(K)$ es compacto y por lo tanto f es una función propia. $\square$

Ejemplo 1.2.8. *El Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones en $\mathbb{R}^n$ nos dice que si una sucesión es acotada entonces posee una subsucesión convergente. Como $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable, quiere decir que una sucesión que diverge a infinito es no-acotada. En general, podemos caracterizar las sucesiones divergentes a infinito en $\mathbb{R}^n$ como las que toman sólo una infinita de valores en un conjunto acotado.*

Presentaremos otros criterios que garanticen que una función sea propia.

Proposición 1.2.9. *Sea $f : X \to Y$ una función entre el espacio compacto X y el espacio de Hausdorff Y. Si f es continua entonces es propia.*

Demostración. Sea $K \subset Y$ un conjunto compacto. Como Y es de Hausdorff, por la Proposición A.0.21 se sigue que K es cerrado. Si f es continua entonces $f^{-1}(K)$ es cerrado en X, por lo que, por la Proposición A.0.20, $f^{-1}(K)$ es compacto en X. Puesto que $K \subset Y$ es un compacto arbitrario, f es propia. $\square$

Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente corolario

Corolario 1.2.10. *Si $f : M \to N$ es una función continua entre dos variedades topológicas, donde M es compacta, entonces f es propia.*

Definición 1.2.11. *Sean X, Y conjuntos arbitrarios y sea $f : X \to Y$ una función. La **fibra** sobre $y \in Y$ es la imagen inversa del conjunto unipuntual $\{y\}$ bajo f*

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}).$$

Proposición 1.2.12. *Si $f : X \to Y$ es cerrada y si para cada $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es compacto en X entonces f es propia.*

Demostración. Sea $K \subset Y$ un conjunto compacto, y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una cubierta abierta para $f^{-1}(K)$ en X. Para cada $y \in K$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto compacto contenido en $f^{-1}(K)$, por lo que existe una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ para $f^{-1}(y)$, digamos $\{U_i^y\}_{i=1}^n$. Como que f es cerrada, el conjunto

$$C_y = f\left(X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i^y\right)\right)$$

es cerrado en Y, por lo que $Y\backslash C_y$ es abierto en Y. Como y y C_y son ajenos, $y \in Y\backslash C_y$, por lo que $\{Y\backslash C_y\}_{y\in K}$ es una cubierta abierta para K. Puesto que K es compacto en Y, existen $y_1, \ldots, y_m$ tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} Y\backslash C_{y_j}$. Observemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y\backslash C_y) = X\backslash f^{-1}(C_y) &= X\backslash f^{-1}\left(f\left(X\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i^y\right)\right)\right) \\ &\subset X\backslash\left(X\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i^y\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^y, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(Y\backslash C_{y_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n_j} U_i^{y_j},$$

es decir, $\{U_i^{y_j}\}$ es una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. Por ello, $f^{-1}(K)$ es compacto y f es propia. $\square$

Ejemplo 1.2.13. *Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, donde $\mathbb{R}^+$ posee la topología relativa. Primeramente, es conocido que esta función es inyectiva, continua y que $f^{-1} = f$, por lo que $f^{-1}(y) = \{1/y\}$ si $y > 0$ o $f^{-1}(y) = \emptyset$ si $y \leq 0$. En cualquier caso, la fibra es compacta. Por otra parte, esta función no es cerrada, ya que*

$$f\big([1,\infty)\big) = (0,1]$$

y para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ tenemos que

$$f^{-1}(K) = f(K \cap \mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+.$$

Como K es compacto en $\mathbb{R}$, $K \cap \mathbb{R}^+$ es compacto en $\mathbb{R}^+$ y $f(K \cap \mathbb{R}^+)$ es compacto en $\mathbb{R}$, ya que f es continua. Por otra parte, al ser $f(K\cap\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ compacto en $\mathbb{R}$, es compacto en $\mathbb{R}^+$, por lo que $f^{-1}(K)$ es compacto en $\mathbb{R}^+$. Esto demuestra que f es propia.

Nuestros ejemplos anteriores muestran que las condiciones de ser propia, continua, abierta o cerrada son independientes.

La siguiente proposición nos dice que para una gran familia de espacios topológicos, las funciones propias son cerradas.

Proposición 1.2.14. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es continua, propia y Y es un espacio de Hausdorff y compactamente generado entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $C \subset X$ un conjunto cerrado y sea $K \subset Y$ compacto. Puesto que Y es de Hausdorff, la proposición A.0.21 nos dice que K es cerrado en Y. Como f es continua y propia, $f^{-1}(K)$ es cerrado y compacto en X. Esto implica que $f^{-1}(K) \cap C$ es un conjunto cerrado contenido en el compacto $f^{-1}(K)$ por lo que, por la Proposición A.0.20, $f^{-1}(K) \cap C$ es compacto. Como f es continua, $f(f^{-1}(K) \cap C)$ es compacto en Y. Observemos que

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(K) \cap C) &= \{f(x) \mid x \in f^{-1}(K) \cap C\} \\ &= \{f(x) \mid f(x) \in K\} \cap \{f(x) \mid x \in C\} = K \cap f(C), \end{aligned}$$

por lo que $K \cap f(C)$ es compacto. Puesto que Y es de Hausdorff, se sigue que K es de Hausdorff, por lo que, por la Proposición A.0.21, $K \cap f(C)$ es cerrado en K, ya que $K \cap f(C)$ es compacto. Como $K \subset Y$ es compacto arbitrario e Y es compactamente generado, se sigue que $f(C)$ es cerrado en Y, probando que f es cerrada. □

Como consecuencia de las proposiciones anteriores tenemos que:

Corolario 1.2.15. *Si $f : X \to Y$ es continua, biyectiva, propia y Y es de Hausdorff compactamente generado entonces f es homeomorfismo.*

Demostración. Puesto que f es biyectiva y continua, basta demostrar que f es cerrada. Puesto que f es propia y el espacio Y es de Hausdorff compactamente generado, por la proposición anterior, f es cerrada. Por tanto, f es homeomorfismo. □

Corolario 1.2.16. *Si $f : M \to N$ es una función continua y propia, donde M, N son variedades topológicas, entonces f es cerrada.*

Demostración. Puesto que una variedad topológica es un espacio de Hausdorff y compactamente generado, claramente se tiene que en este caso se satisfacen todas las hipótesis de la Proposición 1.2.14. Por tanto, f es cerrada. □

Corolario 1.2.17. *Si $f : X \to Y$ es una función continua con la propiedad de que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto entonces f es propia si y sólo si es cerrada.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 1.2.12 y 1.2.16. □

1.3. Variedades Diferenciales

En nuestros primeros cursos de cálculo diferencial estudiamos cómo hacer cálculo en los espacios euclídeos, es decir, en $\mathbb{R}^n$. Esto quiere decir que nosotros sabemos cuándo una función entre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es diferenciable, su significado geométrico y aplicaciones. Las variedades diferenciales surgen en respuesta a la necesidad de hacer cálculo diferencial en espacios distintos a los euclídeos.

Un primer contacto con el cálculo diferencial en espacios no-euclídeos se da en geometría diferencial, cuando empezamos a trabajar con superficies en $\mathbb{R}^3$. Sin importar cómo nos definen inicialmente a las superficies, al final vemos que éstas localmente pueden parametrizarse por abiertos de $\mathbb{R}^2$, es decir, son localmente homeomorfas a $\mathbb{R}^2$. Esta misma situación se tiene en las variedades topológicas, por lo cual éstas resultan los espacios idóneos para generalizar el concepto de diferenciabilidad. Puesto que la diferenciabilidad es una propiedad *local*, y las variedades topológicas son localmente homeomorfas a un espacio euclidiano, utilizaremos las cartas locales de dicha variedad para decidir cuándo una función es diferenciable. Sin embargo, existen funciones que con una carta local sean diferenciables en un punto, pero que no lo sean en el mismo punto si utilizamos una carta local diferente. Para evitar este tipo de ambigüedades, pediremos ciertas condiciones de compatibilidad entre las cartas locales para tener un concepto fijo de diferenciabilidad en una variedad.

1.3.1. Variedades Diferenciales, Subvariedades y Funciones Diferenciables

Definición 1.3.1. *Sea M una variedad topológica. Dos cartas locales $(U,\varphi),(V,\psi)$ con $U\cap V\neq\emptyset$ se dicen C^∞-**compatibles** si las funciones*

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V),\qquad \psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

son diferenciables, es decir, de clase C^∞. Esta definición tiene sentido, ya que $\varphi\circ\psi^{-1}$ y $\psi\circ\varphi^{-1}$ son funciones entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

*Un **atlas diferenciable** $\mathcal{A}$ sobre la variedad topológica M es una colección de cartas locales $\mathcal{A}=\{(U,\varphi)\}$ tal que*

1. *$M=\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}}U$*
2. *Las cartas son compatibles: Cualesquiera $(U,\varphi),(V,\psi)\in\mathcal{A}$ tales que $U\cap V\neq\emptyset$ son C^∞-compatibles.*

A la función $\psi \circ \varphi^{-1}$ se le llama **función de transición** entre (U, φ) y (V, ψ).

Definición 1.3.2. *Consideremos la colección de todos los atlas diferenciables en la variedad topológica M. Decimos que dos atlas diferenciables $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ son **equivalentes** si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es de nuevo un atlas diferenciable. Es inmediato comprobar que esto define una relación de equivalencia. Una **estructura diferencial** $\mathcal{D}$ en M es una clase de equivalencia dada por la relación anterior.*

Con lo anterior, ya estamos listos para estudiar el concepto de variedad diferencial.

Definición 1.3.3. *Una **variedad diferencial** n**-dimensional** es un par $(M, \mathcal{D})$, donde M es una n-variedad topológica y $\mathcal{D}$ es una estructura diferencial en M. Si (U, φ) es una carta que pertenece a alguno de los atlas de $\mathcal{D}$, decimos que (U, φ) es una **carta admisible**.*

En la práctica, basta especificar un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ para M, pues su estructura diferencial viene dada por la clase de equivalencia a la cual pertenece $\mathcal{A}$. Convencionalmente, en vez de escribir $(M, \mathcal{D})$ se escribe simplemente M, y nos referimos a M como variedad diferencial.

En las definiciones anteriores hemos exigido que las funciones de transición sean de clase C^∞. En adelante, cuando hablemos de funciones diferenciables nos estaremos refiriendo a funciones de clase C^∞, pero de hecho también se puede trabajar con variedades de clase $C^k, k \in \mathbb{N}$.

Si M es una variedad topológica, para cada $p \in M$ consideremos una carta local (U_p, φ_p). Puesto que $f_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f_p(x) = x - \varphi_p(m)$ es diferenciable, $(U_p, f_p \circ \varphi_p)$ es también una carta local en M, por lo que desde el principio podemos suponer que $\varphi_p(m) = 0$. Puesto que $0 \in \varphi_p(U_p)$, existe $r_p > 0$ tal que $B_{r_p}(0) \subset \varphi_p(U_p)$, lo cual implica que $(\varphi_p^{-1}(B_{r_p}(0)), \varphi_p)$ es una carta para m, por lo que desde el principio podemos suponer que $\varphi_p(U_p) = B_{r_p}(0)$. Finalmente, si $r > 0$ y $g_p(x) = rx/r_p$, $(U_p, g_p \circ \varphi_p)$ es también una carta local con $(g_p \circ \varphi_p)(U_p) = B_r(0)$, por lo que desde el principio podemos suponer que (U_p, φ_p) es una carta con $\varphi_p(U_p) = B_r(0)$ y $\varphi_p(m) = 0$.

Lo anterior nos dice que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi_p(U_p)$ es cualquier bola abierta centrada en 0; también pudiéramos suponer que $\varphi_p(U_p)$ es un n-cubo abierto centrado en 0 de tamaño arbitrario.

Definición 1.3.4. *Sean* $(M_1, \mathcal{D}_1), (M_2, \mathcal{D}_2)$ *variedades diferenciales. La* ***variedad producto*** $(M_1 \times M_2, \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$ *consiste del espacio topológico* $M_1 \times M_2$ *y de la estructura diferencial* $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ *que contiene al atlas* $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \mid (U_i, \varphi_i)$ *es una carta en* $M_i\}$.

Por la Proposición 1.1.10, $M_1 \times M_2$ es una variedad topológica. Para ver que la variedad producto está bien definida, debemos probar que efectivamente el conjunto

$$\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \mid (U_i, \varphi_i) \ \text{ es una carta en } M_i\}$$

es un atlas diferenciable. Sean A_1, A_2 dos atlas de M_1, M_2, respectivamente. Para $i = 1, 2$, $\{U_i \mid (U_i, \varphi_i) \in A_i\}$ es una cubierta de M_i, por lo que

$$\bigcup_{((U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2))\in(A_1\times A_2)} U_1 \times U_2 = \bigcup_{(U_1,\varphi_1)\in A_1} U_1 \times \bigcup_{(U_2,\varphi_2)\in A_2} U_2 = M_1 \times M_2,$$

lo que implica que $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \mid (U_i, \varphi_i)$ es una carta en $M_i\}$ es una cubierta de $M_1 \times M_2$. Sea ahora $(m_1, m_2) \in (U_1 \times U_2) \cap (V_1, V_2)$, donde $(U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i) \in A_i$ para $i = 1, 2$. Entonces $\psi_i \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap V_i) \to \psi_i(U_i \cap V_i)$ es diferenciable. Como $\psi_i \circ \varphi_i^{-1}$ son funciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^{n_i}$, se sigue que

$$(\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \varphi_2^{-1}) : \varphi_1(U_1 \cap V_1) \times \varphi_2(U_2 \cap V_2) \to \psi_1(U_1 \cap V_1) \times \psi_2(U_2 \cap V_2)$$

es diferenciable, es decir, $(\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \varphi_2^{-1}) = (\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1^{-1} \times \varphi_2^{-1})$ es diferenciable y las cartas de $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \mid (U_i, \varphi_i)$ es una carta en $M_i\}$ son compatibles. Por tanto, este conjunto sí define un atlas y la variedad producto está bien definida.

En adelante, el término “variedad” significará “variedad diferencial”, y el término “carta” o “carta local” significará “carta admisible” una vez que ya especifiquemos la variedad con la que estemos trabajando. También, cuando tengamos dos variedades M, N, al referirnos a su producto $M \times N$ como variedad, será con la estructura de variedad producto descrita anteriormente.

Definición 1.3.5. *Una* ***subvariedad*** *de la variedad* M *es un subconjunto* $N \subset M$ *con la siguiente propiedad: para cada* $p \in N$ *existen un entero no negativo* k*, y una vecindad coordenada* (U, φ) *de* p *tales que*

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}, \qquad \varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\}).$$

Dado el subconjunto N *de* M*, si* (U, φ) *es una carta que satisface la propiedad anterior, decimos que* (U, φ) ***tiene la propiedad de subvariedad*** *para* N.

Es fácil ver que si $U \subset M$ es abierto entonces U es subvariedad en este sentido (con $k = m$). Más aún, si N es subvariedad de M podemos darle estructura de variedad diferencial a través de la topología relativa y de la estructura diferencial generada por el siguiente atlas:

$$\{(U \cap N, \varphi|_{U\cap N}) \big| (U, \varphi) \text{ es una carta que tiene la propiedad de subvariedad}\}.$$

Como $N \subset M$, N es un espacio de Hausdorff segundo numerable con la topología relativa. Además el conjunto anterior nos dice que N es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^k$. Por otro lado, si $(U \cap N, \varphi|_{U\cap N}), (V \cap N, \psi|_{V\cap N})$ son cartas con la propiedad de subvariedad tales que $(U \cap N) \cap (V \cap N) \neq \emptyset$ entonces $U \cap V \neq \emptyset$ y $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ es un difeomorfismo. Observemos que $\psi(U \cap V \cap N) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\})$ y que $\varphi(U \cap V \cap N) = \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\})$. Por ello, la función de transición

$$\varphi|_{U\cap N} \circ \psi|_{V\cap N}^{-1} : \psi(U \cap V \cap N) \to \varphi(U \cap V \cap N)$$

es la función

$$\varphi|_{U\cap N} \circ \psi|_{V\cap N}^{-1} : \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\}) \to \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\}),$$

que es en realidad la restricción de $\varphi \circ \psi^{-1}$ al conjunto $\psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\})$, por lo cual es diferenciable. De la misma manera, $\psi|_{V\cap N} \circ \varphi|_{U\cap N}^{-1}$ es diferenciable y por ello son difeomorfismos.

Ejemplo 1.3.6. *Por el Ejemplo 1.1.1 sabemos que $\mathbb{R}^n$ es una variedad topológica. De la misma manera, si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, también tiene estructura de variedad topológica. Más aún, como $\{(U, Id_U)\}$ es un atlas diferenciable para U, éste adquiere estructura de variedad, la cual coincide con la estructura diferencial usual. Esto quiere decir que las funciones que son diferenciables en $U \subset \mathbb{R}^n$ en el sentido usual, también lo son como funciones entre variedades. A (U, Id_U) se le llama* ***carta identidad*** *y a $\{(U, Id_U)\}$ se le llama* ***atlas usual****. De la misma manera, si $U \subset M$ es abierto y $\mathcal{A}$ es un atlas para M, el conjunto $\mathcal{A}_U = \{(V', \psi') \mid (V, \psi) \in \mathcal{A}, V' = V \cap U, \psi' = \psi|_{V'}\}$ define un atlas para U. Con esta estructura, U se llama* ***subvariedad abierta*** *de M.*

Con este punto de vista, si M es variedad, una curva

$$c : I \subset \mathbb{R} \to M$$

se puede ver como una aplicación entre variedades. Asimismo, una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación entre variedades. En adelante, salvo que se especifique lo contrario, cuando nos refiramos a $U \subset \mathbb{R}^n$ como variedad diferencial, lo haremos considerando el atlas usual.

Definición 1.3.7. *Sea M una variedad. Denotaremos por $C^\infty(M)$ al conjunto*

$$C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\},$$

y denotaremos por $C^\infty_m(M)$ al conjunto al conjunto

$$C^\infty_m(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable en } m\}.$$

Proposición 1.3.8. *Sea M una variedad m-dimensional. Si $N \subset M$ es subvariedad n-dimensional entonces para cada $p_0 \in N$ existe una vecindad abierta $U \subset M$ y funciones $f^1, \ldots, f^{m-n} \in C^\infty(U)$ tales que*

$$N \cap U = \{x \in M \mid f^1(x) = \ldots = f^{m-n}(x) = 0\}.$$

Demostración. Sea (U, φ) una vecindad coordenada de p_0 que tenga la propiedad de subvariedad para N. Sean $\varphi^1 = \pi^1 \circ \varphi, \ldots, \varphi^m = \pi^m \circ \varphi$. Si $f^i = \varphi^{i+n}$ entonces para cada $x \in N \cap U$ tenemos que

$$f^i(x) = \varphi^{i+n}(x) = \pi^{i+n}(\varphi(x)) = 0,$$

ya que en las coordenadas de subvariedad, las últimas $m - n$ coordenadas son iguales a cero. $\square$

Ejemplo 1.3.9. *Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{(U = \mathbb{S}^n \backslash \{N\}, f), (V = \mathbb{S}^n \backslash \{S\}, g)\}$, donde f, g, N, S vienen dados como en el Ejemplo 1.1.2. Como $N \in \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$, se tiene que $\mathbb{S}^n = U \cup V$. Además, $f \circ g^{-1}, g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ vienen dadas por*

$$f \circ g^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = g \circ f^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-x_1, x_2, \ldots, x_n)}{||x||^2},$$

las cuales son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Por tanto, $\mathcal{A}$ define un atlas diferenciable para $\mathbb{S}^n$. Más aún, recordemos que $\mathbb{R}^{n+1}$ posee estructura de variedad dada por el Ejemplo 1.3.6. Con esta estructura, las funciones

$$F : \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{n+1} < 1\} \to \mathbb{R}^n, \qquad G : \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{n+1} > -1\} \to \mathbb{R}^n$$
$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}}, \qquad G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{(-x_1, \ldots, x_n)}{1 + x_{n+1}}$$

son diferenciables y su restricción a $\mathbb{S}^n$ coincide con f y g, respectivamente. Por ello, F, G tienen la propiedad de subvariedad y el atlas $\mathcal{A}$ le da a $\mathbb{S}^n$ la misma estructura diferencial que la que tiene como subvariedad.

Como decíamos al principio de esta sección, el concepto de variedad diferencial surge para realizar cálculo diferencial en espacios más generales que los euclidianos. Para esto, utilizaremos las cartas locales para decidir cuáles son nuestras funciones diferenciables, ya que la diferenciabilidad es una propiedad local. Veremos que, si tenemos una estructura diferencial $\mathcal{D}$ en una variedad topológica, la definición de diferenciabilidad no dependerá de las cartas que se elijan para determinar dicha condición.

Definición 1.3.10. *Sea $f : M \to N$ una función, donde M, N son variedades diferenciales de dimensiones m y n, respectivamente. Sea $p \in M$. Decimos que f es* ***diferenciable*** *en p si existen cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ de M, N, respectivamente, tales que $p \in U, \varphi(U) \subset V$ y que*

$$\tilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : A \subset \mathbb{R}^m \to B \subset \mathbb{R}^n$$

es diferenciable en $\varphi(p)$. A la función $\tilde{f}$ se le llama ***expresión local*** *de f en las cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$. Si f es diferenciable en p para todo $p \in W \subset M$, decimos que f es* ***diferenciable*** *en W. Si $f : M \to N$ es diferenciable en $p \in M$ para todo p, decimos simplemente que f es* ***diferenciable****.*

En particular, si $N = \mathbb{R}$ entonces (V, ψ) es la carta identidad y $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ es la expresión local de f.

Es inmediato comprobar a partir de las definiciones que si f es diferenciable en p con las cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ entonces es diferenciable en p con cualquier par de cartas que contengan a p y a $f(p)$. En efecto, supongamos que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p)$. Como M es una variedad diferencial, las funciones de transición son diferenciables, por lo que, para cualquier par de cartas $(U', \varphi'), (V', \psi')$ tales que $f(U') \subset V'$ con $p \in U'$, las funciones $\psi' \circ \psi^{-1}$, $\varphi \circ (\varphi')^{-1}$ son diferenciables en $\psi(U \cap U')$ y $\varphi'(V \cap V')$. Además,

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi')^{-1},$$

es decir, $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$ es composición de funciones diferenciables, por lo que a su vez es una función diferenciable en $\varphi'(p)$. Por tanto, la definición de diferenciabilidad de una función en un punto p **no depende** de la cartas que se elijan para determinarla.

Proposición 1.3.11. *Si $f : M \to N$ es diferenciable en $p \in M$ entonces es continua en p.*

Demostración. Sean $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas en M, N respectivamente, tales que $p \in U, f(U) \subset V$. Observemos que $f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$. Puesto que $\tilde{f}$ es diferenciable en $\varphi(p)$, es continua en $\varphi(p)$, pues $\tilde{f}$ es una función entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Puesto que φ, ψ^{-1} son continuas, se sigue que f es composición de funciones continuas en p, y por lo tanto es continua en p. $\square$

Consecuencia de lo anterior es que si $f : M \to N$ es diferenciable entonces f es continua.

Definición 1.3.12. *Una función $f : M \to N$, donde M, N son variedades se llama* ***difeomorfismo*** *si f es biyectiva y si f, f^{-1} son diferenciables.*

Así como los homeomorfismos nos permiten clasificar los espacios topológicos, los difeomorfismos nos permiten clasificar las variedades.

Proposición 1.3.13. *Si M es una variedad diferencial y (U, φ) es una carta admisible entonces $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Utilizando para U la carta (U, φ) y para $\varphi(U)$ la carta $(\varphi(U), id_{\varphi(U)})$, la función de transición $\tilde{\varphi} : \varphi(U) \to \varphi(U)$ viene dada por $\tilde{\varphi} = id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)}$, probando que su expresión local es la función identidad y por ser biyectiva es un difeomorfismo. $\square$

Proposición 1.3.14. *Si $f_i : M_i \to N_i$ es diferenciable en $m_i \in M_i$ $(i = 1, 2)$ entonces $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ es diferenciable en (m_1, m_2).*

Demostración. Para cada $i = 1, 2$, sean $(U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i)$ carta en M_i, N_i, respectivamente, tales que $m_i \in U_i$ y $f_i(U_i) \subset V_i$. Puesto que f_i es diferenciable, la función de transición $\tilde{f_i} = \psi_i \circ f_i \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable, es decir para cada $x_i \in U_i$, la función $\varphi_i(x_i) \mapsto \psi_i(f(x_i))$ es diferenciable. En las coordenadas $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2), (V_1 \times V_2, \psi_1 \times \psi_2)$, la función $f_1 \times f_2$ toma la forma $\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)\big) \mapsto \big(\psi_1(f(x_1)), \psi_2(f(x_2))\big)$. Puesto que componente a componente esta función es diferenciable, se sigue que $f_1 \times f_2$ es diferenciable, como queríamos. $\square$

Proposición 1.3.15. *Si $\pi : M \times N \to M$ es la proyección en la primer componente entonces π es diferenciable.*

Demostración. Si $(m, n) \in M \times N$ y $(U, \varphi), (V, \psi)$ son cartas con $m \in U, n \in V$ entonces $\pi(U \times V) = U$. En las coordenadas $(U \times V, \varphi \times \psi), (U, \varphi)$, la función de transición $\tilde{\pi}$ toma la forma $(\varphi(m), \psi(n)) \mapsto \varphi(m)$, la cual es una proyección usual en espacios euclidianos y por ello es diferenciable. $\square$

De la misma manera, la proyección en la segunda componente es diferenciable, y para distinguir una proyección en la otra, se denotarán por $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$, respectivamente.

1.3.2. Particiones de la Unidad

Las particiones de la unidad son una herramienta que más adelante utilizaremos para probar la existencia de ciertos objetos con los que estaremos trabajando a lo largo de este trabajo. El hecho de que una variedad diferencial sea un espacio paracompacto nos garantizará la existencia de una partición de la unidad.

Definición 1.3.16. *Sea X un espacio topológico y sean $\{U_\alpha\}, \{V_i\}$ cubiertas de X. Decimos que $\{V_i\}$ es un **refinamiento** de $\{U_\alpha\}$ si para cada i existe α tal que $V_i \subset U_\alpha$.*

Definición 1.3.17. *Una **partición de la unidad** en la variedad M es una familia de funciones $\{f_i \in C^\infty(M)\}$ con las siguientes propiedades:*

1. *$\{supp(f_i)\}$ es una cubierta de M localmente finita.*
2. *Para cada $x \in M$, $\sum_i f_i(x) = 1$.*

*Una partición de la unidad $\{f_i\}$ se dice **subordinada** a la cubierta $\{A_\alpha\}$ si $\{supp(f_i)\}$ es un refinamiento de $\{A_\alpha\}$.*

Definición 1.3.18. *Una **función meseta** es una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $supp(f) \subset \overline{B_2(0)}$, $f(x) = 0$ si $x \notin B_3(0)$ y $f(x) = 1$ si $x \in B_1(0)$.*

Las funciones meseta son la clave para demostrar la existencia de particiones de la unidad para funciones diferenciables. En el apéndice podemos encontrar una demostración de su existencia.

Definición 1.3.19. *Sea M una variedad. La familia $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ se llama **cubierta regular esférica** si $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta localmente finita, y si para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que (U_i, φ_i) es una carta local con $V_i \subset U_i$, $\varphi_i(U_i) = B_3(0)$ y $\varphi_i(V_i) = B_1(0)$. En cambio, si $\varphi_i(U_i) = C_3(0)$ y $\varphi_i(V_i) = C_1(0)$, decimos que $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ es una **cubierta regular cúbica**. Si $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de la cubierta abierta $\{A_\alpha\}$, decimos que $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ está **subordinada** a la cubierta $\{A_\alpha\}$.*

Ahora estamos listos para enunciar el el Teorema de Existencia de las Particiones de la Unidad:

Teorema 1.3.20 (Teorema de Existencia de Particiones de la Unidad)**.**

a) Si $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *es una cubierta regular esférica entonces existe una partición de la unidad* $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}\}$ *subordinada a* $\{\varphi_i^{-1}\big(B_2(0)\big)\}_{i=1}^{\infty}\}$.

b) Toda cubierta abierta $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *de* M *posee una partición de la unidad* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *subordinada a dicha cubierta.*

La demostración de este teorema se puede consultar en [1, p. 194-195].

Claramente, el enunciado anterior también es válido para cubiertas regulares cúbicas.

1.3.3. Espacios Tangentes y Haz Fibrado Tangente

Recordemos que si tenemos una función $f : U \to V$, donde U, V son abiertos de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, respectivamente, y f es diferenciable en U, se define la **diferencial** de f como la función

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^{mn} \\ x &\mapsto d_x f \end{aligned}$$

que a cada punto x de U le asocia la única transformación lineal $d_x f$ que satisface

$$\lim_{||v||\to 0} \frac{|f(x_0+v) - f(x_0) - d_{x_0}f(v)|}{||v||} = 0.$$

Notemos que hemos identificado $\mathbb{R}^{mn}$ con el espacio $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que consiste de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Queremos generalizar la noción de diferencial a variedades, por lo cual, tenemos que empezar por definir qué es un vector tangente.

Definición 1.3.21. *Sean* $c_1, c_2 : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *curvas diferenciables tales que* $c_1(0) = c_2(0) = p \in U$*, donde* U *es un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$*.* c_1 *y* c_2 *se llaman* ***tangentes*** *en* p *si* $c_1'(0) = c_2'(0)$*. A* $c_1'(0)$ *se le llama* ***vector tangente a*** c_1 ***en*** p*.*

Observemos que dos curvas son tangentes en p si y sólo si tienen el mismo vector tangente en p.

Definición 1.3.22. *Si* S *es una superficie en* $\mathbb{R}^3$ *y* $p \in S$*, un* ***vector tangente a*** S ***en*** p *es* $c'(0)$*, donde* $c : I \to S \subset \mathbb{R}^3$ *es una curva en* S *tal que* $c(0) = p$*. De esta manera, un vector tangente a* S *en* p *es un vector tangente a una curva* c *en* p*, tal que la curva esté totalmente contenida en* S*.*

Al conjunto de los vectores tangentes a S en p se le identifica usualmente con el plano tangente a S en p, como subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_p$ (con el origen trasladado a p). Ahora abstraeremos estas nociones a cualquier variedad diferencial, independientemente de si estén o no inmersas en $\mathbb{R}^n$, como las superficies en $\mathbb{R}^3$.

Vectores Tangentes como Clases de Equivalencia de Curvas

Definición 1.3.23. *Sea M una n-variedad y sea $m \in M$ y (U, φ) una carta con $m \in U$. Una **curva** en m es una función diferenciable $c : I \to M$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto con $0 \in I$, tal que $c(0) = m$. La **derivada de** c **en** m **respecto a la carta** (U, φ) se define como el vector*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c)\bigg|_{t=0} = (\varphi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^n.$$

*Decimos que dos curvas c_1, c_2 son **tangentes** en m si existe una carta local (U, φ), con $m \in U$, tal que*

$$(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0).$$

Hemos definido la derivada de una curva con respecto a una carta; más adelante daremos una definición de derivada que **no depende de coordenadas**.

Puesto que para cada $i = 1, 2$, la función $c_i : I_i \subset \mathbb{R} \to M$ es diferenciable, por definición se tiene que $(\varphi \circ c_i) : I_i \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es una función diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^n$; de hecho, $\varphi \circ c_i$ es una curva en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Por ello, la definición anterior nos dice que dos curvas en M son tangentes en $m \in M$ si y sólo si sus expresiones locales son tangentes en $\varphi(m) \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, si (V, ψ) es cualquier otra carta local con $m \in V$, tenemos por la Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ c_2)'(0) &= \big((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_2)\big)'(0) = d_{\varphi(m)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi \circ c_2)'(0) \\
&= d_{\varphi(m)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi \circ c_1)'(0) = \big((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)\big)'(0) \\
&= (\psi \circ c_1)'(0).
\end{aligned}$$

Por ello, si dos curvas son tangentes en una carta local entonces son tangentes en cualquier carta que contenga a m, por ello, **la definición**

de tangencia no depende de la carta que se elija. Más aún, el "ser tangentes en m"define una relación de equivalencia en el conjunto de curvas en m. Si c es una curva en m, la clase de equivalencia a la cual pertenece c se denotará por $[c]_m$.

Definición 1.3.24. *Sea M una variedad, y sea $m \in M$. El **espacio tangente** a M en m es el conjunto de clases de equivalencia de curvas en m:*

$$T_mM = \{[c]_m \mid c \text{ es una curva en } m\}.$$

*A los elementos del espacio tangente les llamamos **vectores tangentes**.*

La definición anterior nos dice que un vector tangente es una clase de equivalencia de curvas. A T_mM le daremos estructura de espacio vectorial, primero de manera local por medio de una vecindad coordenada (U, φ) de m, y después probaremos que esta estructura **no depende** de la carta que hayamos elegido para dotarlo de esta estructura.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y si c es una curva en $p \in U$, existe un único $v \in \mathbb{R}^n$ tal que la curva $c^{p,v} : I \to \mathbb{R}^n$ dada por $c^{p,v}(t) = p + tv$ es tangente a c en p. Que c y $c^{p,v}$ sean tangentes en p equivale a que $\frac{dc}{dt}(0) = \frac{dc^{p,w}}{dt}(0) = v$, por lo que dicho vector es precisamente $v = c'(0)$.

De la misma manera, si c es una curva en $m \in M$, con M variedad n-dimensional, y (U, φ) una vecindad coordenada de m, existe un único $v \in \mathbb{R}^n$ tal que la curva $c_{m,v} : I \to M$ dada por

$$c_{m,v}(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(m) + tv\big)$$

es tangente a c en m. Por definición, c y $c_{m,v}$ son tangentes en m si y sólo si $\varphi \circ c$ y $\varphi \circ c_{m,v}$ son tangentes en $\varphi(m)$. Puesto que $c_{m,v} = \varphi^{-1} \circ c^{\varphi(m),v}$, lo anterior ocurre si y sólo si $\varphi \circ c$ y $c^{\varphi(m),v}$ son tangentes en $\varphi(m)$. En virtud de lo anterior, el vector v buscado es precisamente la derivada de c con respecto a la carta (U, φ), es decir, $v = (\varphi \circ c)'(0)$.

La discusión anterior puede resumirse en lo siguiente: Para cada $[c]_m \in T_mM$ y para cada carta (U, φ) con $m \in U$ existe un único $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $[c]_m = [c_{m,v}]_m$. Por ello, tenemos una biyección $v \mapsto [c_{m,v}]_m$ entre $\mathbb{R}^n$ y el espacio T_mM dada por la carta (U, φ). Esto quiere decir que, fijando la carta (U, φ), todo vector tangente es de la forma $[c_{m,v}]_m$.

Definición 1.3.25. *Sea (U, φ) una carta en la variedad n-dimensional M, con $m \in U$. Definimos la biyección $d_m\varphi : T_mM \to \mathbb{R}^n$ como $d_m\varphi([c_{m,v}]_m) = v$. A v le llamamos* ***vector de coordenadas*** *de $[c_{m,v}]_m$ en la carta (U, φ).*

Puesto que $c_{m,v}$ depende de la carta, cuando haya dos o más cartas involucradas, digamos $\{(U^\alpha, \varphi^\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$, representaremos por v^α al vector dado por el Lema anterior en la carta $(U^\alpha, \varphi^\alpha)$, y a la curva dada en dichas coordenadas la denotaremos por c^α_{m,v^α}. Cuando trabajemos con una sola carta, la notación será simplemente $c_{m,v}$.

No es difícil ver de las definiciones que si u y v son los vectores de coordenadas de $[c]_m$ en las cartas (U, φ) y (V, ψ), respectivamente, entonces u y v se relacionan por la ecuación

$$u = d_{\psi(m)}(\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot v.$$

Además, $d_{\psi(m)}(\varphi \circ \psi^{-1}) = d_m\varphi \circ (d_m\psi)^{-1}$.

Ahora estamos listos para darle a T_mM estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial: Sea (U, φ) una vecindad coordenada de m. Si $[c_{m,v}]_m, [c_{m,w}]_m \in \mathcal{T}_mM$ son vectores tangentes cualesquiera y $k \in \mathbb{R}$ es un escalar arbitrario, definimos

$$[c_{m,v}]_m + k[c_{m,w}]_m = [c_{m,v+kw}].$$

En otras palabras, las operaciones están definidas para que $d_m\varphi : T_mM \to \mathbb{R}^n$ sea un isomorfismo. Sin embargo, como veremos enseguida, estas operaciones están bien definidas, es decir, la estructura es independiente de la carta (U, φ) que elegimos:

Sean $[c_1]_m, [c_2]_m \in T_mM$ y sean $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ vecindades coordenadas de m. Para cada $i, j = 1, 2$, existe un único vector v_i^j tal que c_i es tangente en m a la curva

$$c^j_{m,v_i^j} = (\varphi^j)^{-1}\big(\varphi^j(m) + tv_i^j\big).$$

Por la Proposición anterior, tenemos que

$$v_i^1 = d_{\varphi^2(m)}(\varphi^1 \circ (\varphi^2)^{-1}) \cdot v_i^2.$$

Para cada $j = 1, 2$, la operación $[c_1]_m + k[c_2]_m$ en la carta (U^j, φ^j) viene dada por $[c^j_{m,v_1^j+kv_2^j}]_m$. Para demostrar que está bien definida, sólo hay que probar que $c^1_{m,v^1_1+kv^1_2}$ y $c^2_{m,v^2_1+kv^2_2}$ son tangentes en m, para lo cual probaremos que $\varphi^1 \circ c^1_{m,v^1_1+kv^1_2}$ y $\varphi^1 \circ c^2_{m,v^2_1+kv^2_2}$ son tangentes en $\varphi^1(m)$.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi^1 \circ c^1_{m,v^1_1+kv^1_2})(t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big(\varphi^1(m) + t(v^1_1 + kv^1_2)\big)(t) = v^1_1 + kv^1_2. \\
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi^1 \circ c^2_{m,v^2_1+kv^2_2})(t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big((\varphi^1 \circ (\varphi^2)^{-1}) \circ \big(\varphi^2(m) + t(v^2_1 + kv^2_2)\big)\big) \\
&= d_{\varphi^2(m)}\big(\varphi^1 \circ (\varphi^2)^{-1}\big) \cdot (v^2_1 + kv^2_2) \\
&= d_{\varphi^2(m)}\big(\varphi^1 \circ (\varphi^2)^{-1}\big) \cdot v^2_1 + kd_{\varphi^2(m)}\big(\varphi^1 \circ (\varphi^2)^{-1}\big) \cdot v^2_2 = v^1_1 + kv^1_2.
\end{aligned}$$

Por ello, en la carta (U^1, φ^1), ambas curvas tienen el mismo vector tangente, a saber, $v^1_1 + kv^1_2$, probando que son tangentes y que la estructura de espacio vectorial está bien definida.

Por ello, T_mM es un espacio vectorial de dimensión n isomorfo a $\mathbb{R}^n$ vía $d_m\varphi$. Una base para dicho espacio viene dada por la imagen de la base canónica bajo dicho isomorfismo, a saber $\{[c^{\varphi}_{m,e^i}]_m\}_{i=1}^n$. A las curvas c^{φ}_{m,e^i} les llamamos **curvas coordenadas** y las estudiaremos más adelante.

Definición 1.3.26. *Sea $m \in M$. Denotaremos por $(m, 0)$ al vector cero del espacio tangente $\mathcal{T}_mM$. Claramente, su vector de coordenadas en cualquier carta es el vector cero, ya que, para cualquier vecindad coordenada (U, φ) de m $d_m\varphi$ es lineal y envía al vector cero en el vector cero.*

Vectores Tangentes como Derivaciones Puntuales

Además de la definición como clases de equivalencia de curvas, podemos definir los vectores tangentes como $\mathbb{R}$-derivaciones puntuales de $C^\infty_m(M)$.

El concepto de derivación puntual está presente desde el cálculo diferencial de varias variables. La derivada direccional es precisamente el ejemplo del que partiremos para generalizar a variedades. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $p \in U$. Recordemos que la **derivada direccional de la función f en la dirección $v \in \mathbb{R}^n$ en el punto $p \in \mathbb{R}^n$** se define como

$$(D_vf)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

Recordemos también que, si fijamos el punto p, la derivada direccional satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $v, w \in \mathbb{R}^n, f, g \in C^\infty_p(U), \alpha \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$-linealidad: $D_v(f+\alpha g)(p) = D_v(f)(p) + \alpha D_v(g)(p)$.
- Derivación Puntual (Regla de Leibniz): $D_v(f \cdot g)(p) = D_v(f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot D_v(g)(p)$.
- $\mathbb{R}$-linealidad en la otra componente: $D_{v+\alpha w}(f)(p) = D_v(f)(p) + \alpha D_w(f)(p)$.

Las primeras dos propiedades nos dicen que, para cada $v \in \mathbb{R}^n$ y $p \in U$, la función

$$\begin{aligned} D_v(\cdot)(p) : C^\infty(U) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto D_v(f)(p) \end{aligned}$$

es una $\mathbb{R}$-**derivación** de $C^\infty_p(U)$. La tercera propiedad, nos dice que, para cada $p \in U$, la colección $\mathcal{T}_p U = \{D_v(\cdot)(p)\}_{v \in \mathbb{R}^n}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{R}^n$ vía la función $v \mapsto D_v(\cdot)(p)$.

Las nociones anteriores nos llevan a redefinir los vectores tangentes como sigue:

Definición 1.3.27. *Sea M una variedad diferencial y sea $m \in M$. Un* ***vector tangente*** *a M en m es una función*

$$v_m : C^\infty_m(M) \to \mathbb{R}$$

que sea una $\mathbb{R}$-derivación, es decir, que satisfaga las siguientes dos propiedades:

1. *$\mathbb{R}$-linealidad: $v_m(f+\alpha g) = v_m(f) + \alpha v_m(g)$.*
2. *Derivación Puntual (Regla de Leibniz): $v_m(f \cdot g) = v_m(f) \cdot g(m) + f(m) \cdot v_m(g)$.*

De igual manera, probaremos que

$$\mathcal{T}_m M = \{v_m \mid v_m \text{ es un vector tangente a } M \text{ en } m\}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y que es canónicamente isomorfo a $T_m M$. Las operaciones que definiremos en $\mathcal{T}_m M$ para darle estructura de espacio vectorial son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
+ : \mathcal{T}_mM \times \mathcal{T}_mM &\to \mathcal{T}_mM \\
(v_m, w_m) &\mapsto +(v_m, w_m) = (v_m + w_m) : C_m^\infty(M) \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad f \mapsto (v_m + w_m)(f) = v_m(f) + w_m(f) \\
\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{T}_mM &\to \mathcal{T}_mM \\
(\alpha, w_m) &\mapsto \cdot(\alpha, w_m) = (\alpha \cdot w_m) : C_m^\infty(M) \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad f \mapsto (\alpha \cdot w_m)(f) = \alpha \cdot w_m(f)
\end{aligned}
$$

No es difícil ver, en virtud de la $\mathbb{R}$-linealidad de las derivaciones, que $(\mathcal{T}_mM, +, \cdot)$ satisface todos los axiomas de espacio vectorial.

Nuestro siguiente paso es establecer la relación entre el espacio tangente T_mM definido como la colección de todas las clases de curvas $[c]_m$, y el espacio $\mathcal{T}_mM$ de todas las $\mathbb{R}$-derivaciones puntuales de $C_m^\infty(M)$. Para ello, recordemos del cálculo en varias variables, que existe una manera práctica para calcular derivadas direccionales por medio de curvas: Si $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, con U abierto, y si c es una curva con $c(0) = p$ y $c'(0) = v$ entonces, para cualquier $f \in C_m^\infty(U)$, la derivada direccional de f en la dirección v en el punto p puede calcularse como

$$D_v(f)(p) = (f \circ c)'(0).$$

Generalicemos, de nuevo, estas nociones a variedades:

Para cada curva c en m consideremos el vector tangente v_m^c definido por

$$v_m^c(f) := \frac{d(f \circ c)}{dt}(0).$$

La Regla de Leibniz y la linealidad de la derivada nos asegura que esto efectivamente define un vector tangente, las cuales podemos aplicar sin problema puesto que $f \circ c$ es una función diferenciable de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

No es difícil ver, utilizando una carta local, que si dos curvas c_1, c_2 son tangentes en m entonces $v_m^{c_1} = v_m^{c_2}$. En virtud del lema anterior, tiene sentido hablar del vector tangente en m asociado a una clase de curvas en m, es decir, $v_m^{[c]_m} = v_m^c$ estaría bien definido. Recíprocamente, si yo tengo un vector tangente v_m, ¿cómo puedo construir una curva c en m tal que $v_m^c = v_m$? Para ello, primero construiremos una base de vectores tangentes en m para $\mathcal{T}_mM$.

Definición 1.3.28. *Sea M una n-variedad y (U,φ) una cara local con $m \in U$. Para cada $i = 1,\ldots,n$, sea $e^i = (\delta_i^1,\ldots,\delta_i^n)$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. A la curva*

$$\begin{aligned} c_i : I &\to M \\ t &\mapsto c_i(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(m) + t\cdot e^i\big) \end{aligned}$$

*se le llama **i-ésima curva coordenada** en m asociada a la carta (U,φ). Al vector tangente $v_m^{c_i}$ lo denotaremos por $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_m$ y se le llama **i-ésimo vector tangente coordenado**.*

Es inmediato comprobar que los vectores tangentes $\{\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_m\}_{i=1}^n$ aplicados a una función $f : M \to \mathbb{R}$ coinciden con la derivada direccional $D_{e^i}(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(m))$ de la expresión local de f en la carta (U,φ) en la dirección e^i,

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi^i}\bigg|_m = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(m)}.$$

En otras palabras, la evaluación del vector tangente coordenado en la función $f : M \to \mathbb{R}$ coincide con la derivada parcial de la expresión local de la función con respecto a la función coordenada correspondiente en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3.29. *Sea M una n-variedad y (U,φ) una cara local con $m \in U$. Para cada $i = 1,\ldots,n$, sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \pi_i(x) = x_i$ la proyección en la i-ésima componente. A la función $\varphi^i : M \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi^i = \pi_i\circ\varphi$ se le llama **i-ésima función coordenada** asociada a la carta (U,φ).*

Observemos que las funciones coordenadas y los vectores tangentes coordenados son duales entre sí, en el sentido de que

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\bigg|_m(\varphi^j) = v_m^{c_i}(\varphi^j) = \big((\pi_j\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}\big(\varphi(m)+t\cdot e^i\big)\big)'(0) = (\varphi^j(m)+t\delta_i^j)'(0) = \delta_i^j.$$

Las derivaciones puntuales son de carácter local, es decir, si $f,g \in C^\infty(M)$ son funciones tales que $f|_U = g|_U$, donde U es vecindad abierta de $m \in M$ entonces $v_m(f) = v_m(g)\ \forall v_m \in \mathcal{T}_mM$. La demostración de este hecho tiene que ver con la existencia de las funciones meseta y puede consultarse en el Apéndice, B.0.81.

Proposición 1.3.30. *Si M es una n-variedad y $m \in M$ entonces $\mathcal{T}_mM$ es de dimensión n sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Probaremos que $\{ \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_m \}_{i=1}^n$ es una base para $\mathcal{T}_m M$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $0 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_m$. Evaluando esta expresión en φ^j tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_m (\varphi^j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_i^j = a_j,$$

probando que $a_j = 0$ $\forall j$ y por ello los vectores tangentes coordenados son linealmente independientes. Ahora probaremos que todo vector tangente es generado por los vectores tangentes coordenados. Para ello, utilizaremos el Lema de Hadamard, que afirma lo siguiente:

Lema 1.3.31 (Lema de Hadamard)**.** *Si $f \in C_m^\infty(M)$, existen funciones $g_1, \ldots, g_n \in C_m^\infty(M)$ tales que la igualdad*

$$f = f(m) + \sum_{i=1}^n \varphi^i \cdot g_i.$$

se satisface en alguna vecindad abierta de m.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\varphi(m) = 0$, es decir, $\varphi^i(m) = 0$ $\forall i$. Sea además $v_m \in \mathcal{T}_m M$ arbitrario, y consideremos el vector tangente $w_m = \sum_{i=1}^n v_m(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_m$. Probaremos que $w_m = v_m$. Sea $f \in C_m^\infty(M)$ arbitraria y sean $g_1, \ldots, g_n$ las funciones para f dadas por el Lema de Hadamard.

Puesto que las derivaciones puntuales son operadores locales y $f = f(m) + \sum_{i=1}^n \varphi^i \cdot g_i$ en una vecindad de m, se sigue que

$$v_m(f) = v_m(f(m) + \sum_{i=1}^n \varphi^i g_i),$$
$$w_m(f) = w_m(f(m) + \sum_{i=1}^n \varphi^i g_i).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
v_m(f) &= v_m\left(f(m) + \sum_{i=1}^{n} \varphi^i g_i\right) \\
&= v_m(f(m)) + \sum_{i=1}^{n} \big(\varphi^i(m) v_m(g_i) + v_m(\varphi^i) g_i(m)\big) = \sum_{i=1}^{n} v_m(\varphi^i) g_i(m) \\
w_m(f) &= \sum_{i=1}^{n} v_m(\varphi^i) \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m (f) = \sum_{i=1}^{n} v_m(\varphi^i) \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m \big(f(m) + \sum_{j=1}^{n} \varphi^j g_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_m(\varphi^i) g_i(m),
\end{aligned}$$

probando que $v_m(f) = w_m(f)$. Puesto que $f \in C_m^\infty(M)$ es arbitraria, se sigue que $v_m = w_m$, es decir, $v_m = \sum_{i=1}^n v_m(\varphi^i) \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m$ y $\{ \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m \}_{i=1}^n$ es base para $\mathcal{T}_m M$. $\square$

Volvamos a la pregunta que nos planteamos: dado $v_m \in \mathcal{T}_m M$, ¿cómo construir una curva c en m tal que $v_m^c = v_m$?

Sea (U, φ) una carta con $m \in U$. Como $\{ \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m \}_{i=1}^n$ es base de $\mathcal{T}_m M$, existen $a_1, \ldots, a_n$ tales que $v_m = \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m$. Sea $v = \sum_{i=1}^n a_i e^i \in \mathbb{R}^n$ y sea $c : I \to \mathbb{R}^n$ la curva en m dada por

$$c(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(m) + vt\big).$$

Observemos que, para toda $f \in C_m^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
v_m^c(f) &= (f \circ c)'(0) = \big(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(m) + vt)\big)'(0) = d_{\varphi(m)}(f \circ \varphi^{-1}) \cdot v \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i d_{\varphi(m)}(f \circ \varphi^{-1}) \cdot e^i = \sum_{i=1}^{n} a_i \big(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(m) + te^i)\big)'(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \big(f \circ c_i\big)'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_m^{c_i}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m (f) \\
&= v_m(f),
\end{aligned}$$

por lo que $v_m^c = v_m$.

Proposición 1.3.32. *El conjunto $\mathcal{T}_m M$ es un espacio vectorial, el cual es canónicamente isomorfo a $T_m M$.*

Demostración. Sea $F : T_mM \to \mathcal{T}_mM$ dada por $F([c]_m) = v^c$. Por nuestro desarrollo anterior, F está bien definida y es biyectiva. Sea (U, φ) una vecindad coordenada de m y sean $[c_{m,v}]_m, [c_{m,w}]_m \in T_mM$ arbitrarios y sea $k \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
F\big([c_{m,v}]_m + k[c_{m,w}]_m\big)(f) &= F\big([c_{m,v+kw}]_m\big)(f) = v_m^{c_{m,v+kw}}(f) = (f \circ c_{m,v+kw})'(0) \\
&= \big(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(m) + t(v + kw))\big)'(0) \\
&= d_{\varphi(m)}(f \circ \varphi^{-1}) \cdot (v + kw) \\
&= d_{\varphi(m)}(f \circ \varphi^{-1}) \cdot v + k d_{\varphi(m)}(f \circ \varphi^{-1}) \cdot w \\
&= (f \circ c_{m,v})'(0) + k(f \circ c_{m,w})'(0) \\
&= v_m^{c_{m,v}}(f) + k v_m^{c_{m,w}}(f) \\
&= F\big([c_{m,v}]_m\big)(f) + kF\big([c_{m,w}]_m\big)(f),
\end{aligned}$$

por lo que F es lineal, y por lo tanto un isomorfismo. El isomorfismo es canónico, ya que la definición de F es independiente de coordenadas. $\square$

Puesto que T_mM y $\mathcal{T}_mM$ son espacios vectoriales canónicamente isomorfos, en adelante T_mM denotará tanto el conjunto de clases de equivalencia de curvas en m como el conjunto de las $\mathbb{R}$-derivaciones puntuales en M.

Definición 1.3.33. *Sean M una variedad diferencial, $c : I \to M$ una curva en M, y sea $m = c(t_0)$, $t_0 \in I$. La función d dada por $d(t) = c(t + t_0)$ es por lo tanto una curva en m. La* ***derivada*** *de c en el punto m es el vector tangente $c'(t_0) \in T_mM$ dado por*

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} = c'(t_0) = [d]_m$$

Proposición 1.3.34. *Si $m \in M$ y $[c]_m \in T_mM$ entonces $c'(0)$ es el vector de coordenadas de $[c]_m$ para cualquier carta (U, φ) con $m \in U$ que escojamos.*

Demostración. Sea (U, φ) una carta con $m \in U$. Si v es el vector de coordenadas de $[c]_m$ en la carta (U, φ) entonces $[c]_m = [c_{m,v}]_m$, de donde se sigue que $(\varphi \circ c)'(0) = (\varphi \circ c_{m,v})'(0)$. Sin embargo, de la definición de $c_{m,v}$ es fácil ver que $(\varphi \circ c_{m,v})'(0) = v$, lo cual implica el resultado. $\square$

La proposición anterior nos dice que el vector de coordenadas de $c'(t_0)$ en cualquier carta (U, φ) es

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c(t + t_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(c(t + t_0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi(c(t)) = (\varphi \circ c)'(t_0).$$

Como derivación, la derivada de $c'(t_0)$ se define como v_m^d, es decir, para todo $f \in C_m^\infty(M)$,

$$c'(t_0)(f) = v_m^d(f) = \left.\frac{d(f \circ d)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=t_0}$$

La siguiente proposición es útil cuando queremos realizar cálculos con respecto a una carta dada:

Proposición 1.3.35. *Sea $c : I \to M$ una curva en y sea (U, φ) una vecindad coordenada de m. Si $(\varphi \circ c)(t) = \big(c_1(t), \dots, c_n(t)\big)$ entonces*

$$c'(t) = \sum_{i=1}^n c_i'(t) \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_{c(t)}.$$

Demostración. Como consecuencia de la Proposición anterior, el vector de coordenadas de $c'(t)$ con respecto a la carta (U, φ) es $(\varphi \circ c)'(t)$, lo cual quiere decir que, para cada $t \in I$,

$$c'(t) = \big[c_{c(t),(\varphi\circ c)'(t)}\big]_{c(t)}.$$

Puesto que $\{e^1, \dots, e^n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tenemos la igualdad

$$(\varphi \circ c)'(t) = \big(c_1'(t), \dots, c_n'(t)\big) = \sum_{i=1}^n c_i'(t) e^i.$$

Observemos que, por definición, $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_m = [\varphi^{-1}\big(\varphi(m) + te^i\big)]_m$, es decir, $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_m = [c_{m,e^i}]_m$. Esto implica que

$$\sum_{i=1}^n c_i'(t) \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_{c(t)} = \sum_{i=1}^n c_i'(t) \big[c_{c(t),e^i}\big]_{c(t)} = \big[c_{c(t),\sum_{i=1}^n c_i'(t)e^i}\big]_{c(t)} = \big[c_{c(t),(\varphi\circ c)'(t)}\big]_{c(t)} = c'(t).$$

$\square$

La Diferencial

Ahora, daremos una generalización de la diferencial, para el caso de funciones entre variedades:

Definición 1.3.36. *Si $f : M \to N$ es diferenciable en $m \in M$, definimos $d_m f : T_m M \to T_{f(m)} N$ por*

$$d_m f \cdot [c]_m = [f \circ c]_{f(m)}.$$

*A dicha función se le llama **diferencial** de f en m. Utilizando la notación de derivaciones puntuales tenemos que $d_m f \cdot v_m$ es el vector tangente en $T_{f(m)}N$ dado por*

$$(d_m f \cdot v_m)(g) = v_m(g \circ f).$$

Es fácil ver que $d_m f$ está bien definida, por la siguiente razón: Si $c_1 \in [c]_m$ entonces c_1, c son tangentes en $m \in M$. No es difícil probar, con ayuda de cartas locales, que $f \circ c$ y $f \circ c_1$ son tangentes en $f(m) \in N$, lo que implica que $[f \circ c]_{f(m)} = [f \circ c_1]_{f(m)}$, probando que $d_m f$ está bien definida.

La diferencial $d_m f : T_m M \to T_{f(m)}N$ es una transformación lineal entre ambos espacios tangentes, ya que se puede demostrar que es composición de transformaciones lineales, a saber, $d_m f = (d_{f(m)}\psi)^{-1} \circ d_{\varphi(m)}\tilde{f} \circ d_m \varphi$.

Recordemos que si M es una variedad y (U, φ) es una vecindad coordenada de $m \in M$ entonces $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeomorfismo, por lo que la diferencial $d_m \varphi : T_m U \to T_{\varphi(m)}\varphi(U)$ es una biyección. Sin embargo, puesto que $U \subset M$ y tanto U como M tienen la misma dimensión, se tiene que $T_m U = T_m M$; además, $T_{\varphi(m)}\varphi(U) = \mathbb{R}^n$, pues $\varphi(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Por ello, la diferencial $d_m \varphi : T_m U \to T_{\varphi(m)}\varphi(U)$ coincide con la biyección $d_m \varphi : T_m M \to \mathbb{R}^n$ que definimos en apartados posteriores.

Si M es una m-variedad y $N \subset M$ es una subvariedad de dimensión n, la inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es una función diferenciable ya que la representación local de i en las coordenadas $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N}), (U, \varphi)$, donde (U, φ) tiene la propiedad de subvariedad, viene dada por $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$, la cual es una función diferenciable. Por ello, $d_p i : T_p N \to T_p M$ es lineal, por la proposición anterior y además es inyectiva: Si $d_p i [c_{p,v}]_p = [c_{p,0}]_p$ entonces $i \circ c_{p,v}$ y $c_{p,0}$ son tangentes, es decir, $c_{p,v}$ y $c_{p,0}$ son tangentes y $v = 0$, probando que el Kernel de $d_p i$ consiste únicamente del vector cero. Esto implica que $d_p i$ es inyectiva, y que $T_p N$ es canónicamente isomorfo a su imagen bajo $d_p i$.

Dicho de otra manera, la identificación anterior consiste de lo siguiente: Si $[c]_p \in T_p N$ entonces c es una curva en $p \in N$ y por lo tanto es una curva en $p \in M$, probando que $[c]_p \in T_p M$. Claramente, esta identificación en un morfismo de espacios vectoriales que coincide con la identificación anterior.

Si $(U, \varphi), (V, \psi)$ son cartas con $x_0 \in U$ y $f(U) \subset V$, a la matriz de la diferencial $d_{x_0} f$ en las bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_x \right\}_{i=1}^m$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial \psi^i}\Big|_{f(x)} \right\}_{i=1}^n$ se le denotará por

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}$.

Proposición 1.3.37. *Sean M, N, K variedades diferenciales, y sean $f : M \to N, g : N \to K$ funciones tales que f es diferenciable en $m \in M$ y g es diferenciable en $f(m)$. Las siguientes propiedades son satisfechas por la diferencial:*

1. *La función $g \circ f$ es diferenciable en m y $d_m(g \circ f) = d_{f(m)}g \cdot d_m f$. En particular, la composición de funciones diferenciables es también diferenciable.*
2. *Si $id_M : M \to M$ es la función identidad entonces $d_m id_M = id_{T_mM}$.*
3. *Si f es difeomorfismo entonces $d_m f$ es biyectiva y $d_{f(m)}(f^{-1}) = (d_m f)^{-1}$.*

Demostración. Sean (U, φ), (V, ψ), (W, ρ) cartas en M, N, K, respectivamente, tales que $m \in U$, $f(U) \subset V$ y $g(V) \subset W$. Observemos que la función de transición $\widetilde{g \circ f}$ puede expresarse por

$$\widetilde{g \circ f} = \rho \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\rho \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}.$$

Esto muestra que $\widetilde{g \circ f}$ es composición de funciones diferenciables en $\varphi(m)$ y $\psi(f(m))$, por lo que es a su vez una función diferenciable $\varphi(m)$, probando que $g \circ f$ es una función diferenciable en m. Observemos ahora que, para cada curva en m,

$$d_m(g \circ f)[c]_m = [g \circ f \circ c]_{(g \circ f)(m)} = d_m g[f \circ c]_{f(m)} = (d_{f(m)}g \circ d_m f)[c]_m,$$

probando que $d_m(g \circ f) = d_{f(m)}g \circ d_m f$.

Ahora, $d_m id_M[c]_m = [id_M \circ c]_{id_M(m)} = [c]_m = id_{T_mM}[c]_m$, por lo que $d_m id_M = id_{T_mM}$. Finalmente, por la parte anterior tenemos que

$$d_{f(m)}(f^{-1}) \circ d_m f = d_m(f^{-1} \circ f) = d_m id_M = id_{T_mM},$$

probando que $d_{f(m)}(f^{-1}) = (d_m f)^{-1}$. □

Haz Fibrado Tangente

Nuestro siguiente paso es construir el haz fibrado tangente a una variedad M, la cual es una variedad cuya dimensión es el doble de la de M, y consiste de todos los vectores tangentes a una variedad. El construir esta variedad nos permitirá hablar de "variación suave" de vectores tangentes en M, es decir, de campos vectoriales.

Definición 1.3.38. *Se llama* ***haz fibrado tangente*** *de M a la terna*

$$(TM, \tau_M, M),$$

donde

$$TM = \bigsqcup_{m\in M} T_m M$$

y $\tau_M : TM \to M$ viene dada por $[c]_m \mapsto m$. A la función τ_M se le llama ***proyección fibrada tangente*** *de M.*

De la definición anterior es fácil ver que para cada $m \in M$, la fibra de m bajo τ_M es $\tau_M^{-1}(m) = T_m M$.

Definición 1.3.39. *Sean $(M, \mathcal{D})$ una variedad diferencial y (U, φ) una carta admisible. Definimos el conjunto TU por*

$$TU := \bigsqcup_{m\in U} T_m M,$$

y las funciones $T\varphi : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ y $d\varphi : TU \to \mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} T\varphi([c_{m,v}]_m) &:= (\varphi(m), v), \\ d\varphi([c_{m,v}]_m) &:= v. \end{aligned}$$

Claramente $TU \subset TM$ y $T\varphi(v_m) = \big(\varphi(m), d_m\varphi(v_m)\big) = \big(\varphi(m), d\varphi(v_m)\big)$, lo que implica que $T\varphi$ es biyectiva. Notemos que

$$TM = \bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} TU.$$

Observemos además lo siguiente: $TU \cap TV = \bigsqcup_{m\in U\cap V} T_m M$, por lo cual $TU \cap TV \neq \emptyset$ implica $U \cap V \neq \emptyset$. Si $v_m \in TU \cap TV$ entonces $T\varphi(v_m) = (\varphi(m), d_m\varphi(v_m))$ y $T\psi(v_m) = (\psi(m), d_m\psi(v_m))$. Esto implica que el cambio de coordenadas $T\psi \circ (T\varphi)^{-1}$ viene dado por

$$(x, v) \mapsto (\psi \circ \varphi^{-1}(x), d_m\psi \circ (d_m\varphi)^{-1}(v)).$$

Por una parte, como $U \cap V \neq \emptyset$ la función $\psi \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable, por lo que la primer componente de la función de transición es diferenciable. Por otra parte, $d_m\psi \circ (d_m\varphi)^{-1} = d_{\varphi(m)}(\psi \circ \varphi^{-1})$, la cual está bien definida y es diferenciable ya que $\psi \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable.

Lo anterior nos sugiere que el conjunto

$$T\mathcal{A} = \{(TU, T\varphi) \mid (U, \varphi) \text{ es una carta admisible en } M\}$$

puede definir un atlas diferenciable para TM. Empezaremos por darle a TM la topología en la que todos los $T\varphi : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ son homeomorfismos. Con esta topología, TM resulta un espacio de Hausdorff. En efecto, sean $v_m, w_n \in TM$. Si $m \neq n$, por ser M un espacio de Hausdorff podemos encontrar dos vecindades coordenadas $(U, \varphi), (V, \psi)$ de m, n respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$ y como TM es unión disjunta de los espacios tangentes, tenemos que $\tau_M^{-1}(U) \cap \tau_M^{-1}(V) = \emptyset$. Si $m = n$ entonces v_m, w_m son puntos distintos en T_mM, y si $v, w \in \mathbb{R}^n$ son sus vectores de coordenadas entonces, por ser $\mathbb{R}^n$ de Hausdorff existen vecindades abiertas y ajenas W, W' de v, w, respectivamente. En tal caso, $\bigcup_{m\in U} d_m\varphi^{-1}(W)$ y $\bigcup_{m\in U} d_m\varphi^{-1}(W')$ son vecindades abiertas y ajenas de v_m y w_m en TM. Para ver que TM es segundo numerable, podemos construir un atlas numerable $\mathcal{A}$ para M tal que el conjunto

$$\mathcal{B}_M = \{U \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

sea una base para M. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathcal{B}_{TM} = \left\{ \bigsqcup_{m\in U} (d_m\varphi)^{-1}(W) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}, W \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base numerable para TM.

Con la topología anterior, TM es una variedad topológica, más aún, es una variedad diferencial con el atlas $T\mathcal{A}$, al cual se le llama **atlas natural**.

Si tenemos una función diferenciable entre dos variedades, podemos inducir una función entre sus haces tangentes.

Definición 1.3.40. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Definimos la* ***diferencial*** *de f como*

$$\begin{aligned} df : TM &\to TN \\ v_m &\mapsto d_m f(v_m). \end{aligned}$$

Utilizando cartas de los atlas naturales para TM y TN podemos ver que si $\tilde{f}$ es la representación local de f en las cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ entonces la representación local de df en las cartas $(TU, T\varphi), (TV, T\psi)$ viene dada por $(p, v) \mapsto (\tilde{f}, d_p\tilde{f} \cdot v)$ la cual es diferenciable.

Proposición 1.3.41. *Sean M_1, M_2 variedades y sean $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i, i = 1,2$ las proyecciones en cada componente. La función*

$$\begin{aligned}(d\pi_1, d\pi_2) : T(M_1 \times M_2) &\to TM_1 \times TM_2 \\ v &\mapsto (d\pi_1(v), d\pi_2(v))\end{aligned}$$

es un es un difeomorfismo.

Demostración. No es difícil ver, utilizando cartas de los atlas naturales y del atlas producto de éstos, que la función de transición de $(d\pi_1, d\pi_2)$ viene dada por

$$\big((p,q),(v,w)\big) \mapsto \big((p,v),(q,w)\big),$$

la cual claramente es diferenciable. □

Por lo anterior, identificaremos al haz fibrado $T(M_1 \times M_2)$ con el producto de haces $TM_1 \times TM_2$.

1.3.4. Variedades Riemannianas

Definición 1.3.42. *Una **variedad riemanniana** es un par (M, g), donde M es una variedad diferencial y, para cada $m \in M$, g_m es una métrica riemanniana en T_mM que depende de m* de manera suave.

Capítulo 2

Funciones Propias en Variedades

En este capítulo, estudiaremos tres tipos de funciones diferenciables entre variedades: Submersión, Inmersión y Encaje. Estos tres tipos de funciones tienen una propiedad en común: que son de Rango constante. Un encaje es una inmersión inyectiva que nos permite construir subvariedades por medio de funciones diferenciables, por lo que buscaremos criterios para asegurar que una inmersión inyectiva sea un encaje. Veremos cómo las funciones propias nos permiten garantizar esta condición.

2.1. Teorema del Rango para Funciones entre Variedades

Si tenemos una función diferenciable $f : U \to V$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, el **rango** de la función f en el punto $p \in V$ es igual al rango de su diferencial $d_p f$ en dicho punto. Recordemos que $d_p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal y por lo tanto podemos hablar de su rango, es decir, de la dimensión del subespacio $d_p f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$. Si expresamos la diferencial como una matriz en las bases usuales, ésta se expresa como

$$d_p f = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix}.$$

De esta manera, el rango de f en p es el número máximo de vectores, renglón o columna, que son linealmente independientes. Al rango de f en p le denotaremos por $rang_p(f)$.

Definición 2.1.1. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable en $p \in M$, donde M, N son variedades diferenciales de dimensiones m, n, respectivamente. Si $(U, \varphi), (V, \psi)$ son cartas tales que $p \in U$ y $f(U) \subset V$, definimos el* ***rango*** *de f en p como el rango de $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$. Al rango de f en p se le denota por $rang_p(f)$.*

Probaremos que el rango de una función entre variedades en un punto está bien definido, es decir, que **no depende** de las cartas (U, φ), (V, ψ) que se elijan para determinarlo: Recordemos que si $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ entonces $(d_{f(p)}\psi)^{-1} \circ d_{\varphi(p)}\tilde{f} \circ d_p\varphi$. Puesto que $d_x\varphi, d_{f(x)}\psi$ son isomorfismos de espacios vectoriales, se sigue que $rang\big((d_p\varphi)^{-1} \circ d_pf \circ d_{f(p)}\psi\big) = rang(d_pf)$, es decir, $rang_{\varphi(p)}(\tilde{f}) = rang(d_pf)$. Por ello, el rango es independiente de las cartas, y coincide con el rango de la diferencial de f en x, generalizando lo que ocurre con las funciones diferenciables entre abiertos de espacios euclidianos.

Puesto que $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$, se tiene que $rang(d_xf) \leq \text{mín}\{m, n\}$, es decir, $rang_p(f)$ es menor o igual a las dimensiones de las variedades.

El siguiente teorema es clave para todo nuestro estudio posterior, ya que en este resultado se sustentan una gran cantidad de propiedades:

Teorema 2.1.2 (Teorema del Rango Constante). *Sea $f : M \to N$ diferenciable, donde M, N son variedades de dimensión m, n, respectivamente, tal que $rang_p(f) = k$ $\forall p \in M$. Si $p \in M$, existen cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ con $p \in U$, $f(U) \subset V$, tales que $\varphi(p) = (0, \ldots, 0), \psi(f(p)) = (0, \ldots, 0), \varphi(U) = C_r^m(0), \psi(U) = C_r^n(0),$, y que $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ viene dada por*

$$\tilde{f}(\varphi^1, \ldots, \varphi^m) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^k, 0, \ldots, 0).$$

Demostración. Sean $(U', \varphi'), (V', \psi')$ cartas con $x \in U'$ y $f(U') \subset V'$. Por definición de rango, la función de transición $\tilde{\tilde{f}} : \varphi'(U') \to \psi'(V')$ definida por $\tilde{\tilde{f}} = \psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$ es diferenciable y su rango es constante igual a k. Por el Teorema del Rango para abiertos de espacios Euclidianos, existen difeomorfismos $G : U'' \to C_r^m(0)$ y $H : V'' \to C_r^n(0)$, con $\varphi'(x) \in U'' \subset \varphi'(U')$ y $\psi'(f(x)) \in V'' \subset \psi'(V')$ tales que $H \circ \tilde{\tilde{f}} \circ G^{-1}\big(C_r^m(0)\big) \subset C_r^n(0)$ y que

$$H \circ \tilde{\tilde{f}} \circ G^{-1}(\varphi^1, \ldots, \varphi^m) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^k, 0, \ldots, 0).$$

Sean $U = (\varphi')^{-1}(U'')$, $V = (\psi')^{-1}(V'')$ y definamos $\varphi : U \to C_r^m(0)$, $\psi : V \to C_r^n(0)$ por $\varphi = G \circ \varphi'|_U$, $\psi = H \circ \psi'|_V$. Puesto que G, H son funciones diferenciables entre abiertos de espacios euclidianos, se sigue que las cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ son compatibles con (U', φ') y (V', ψ') respectivamente. La función de transición de f en las cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ viene dada por $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = H \circ \tilde{\tilde{f}} \circ G^{-1}$, por lo que $(U, \varphi), (V, \psi)$ son las cartas que buscamos. $\square$

Teorema 2.1.3 (Teorema del Valor Regular). *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable, donde M y N son variedades de dimensión m y n,* *respectivamente. Supongamos que $m \geq n$. Si f tiene rango constante k en todo $m \in M$ y si $y \in f(M)$ entonces $f^{-1}(y) \subset M$ tiene estructura de subvariedad cerrada de dimensión $m-k$.*

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(y)$. Puesto que se satisfacen las hipótesis del Teorema del Rango, sean $(U,\varphi),(V,\psi)$ con $x \in U$ y $f(U) \subset V$ las cartas dadas por dicho teorema. Probaremos que (U,φ) satisface la propiedad de subvariedad para x. Si $p \in U \cap f^{-1}(y)$ entonces $f(p) = y$ y $\psi(f(p)) = \psi(y) = (0,\ldots,0)$. Por ello,

$$\begin{aligned}
\varphi(U \cap f^{-1}(y)) &= \varphi(\{p \in U \mid \psi(f(p)) = (0,\ldots,0)\}) \\
&= \varphi(\{p \in U \mid \tilde{f}(\varphi(p)) = (0,\ldots,0)\}) \\
&= \varphi(\{p \in U \mid \tilde{f}(\varphi^1(p),\ldots,\varphi^m(p)) = (0,\ldots,0)\}) \\
&= \varphi(\{p \in U \mid \varphi^1(p) = \ldots = \varphi^k(p) = 0\}) \\
&= \varphi(U) \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^1 = \ldots = x^k = 0\} \\
&= \varphi(U) \cap (\{(0,\ldots,0)\} \times \mathbb{R}^{m-k}),
\end{aligned}$$

lo cual prueba que (U,φ) tiene la propiedad de subvariedad. Como $x \in f^{-1}(y)$ es arbitrario, $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de M, y claramente es de dimensión $m-k$. Como N es Hausdorff, $\{y\}$ es cerrado en N; como f es diferenciable, es continua, por lo que $f^{-1}(y)$ es cerrado en M. $\square$

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$. Observemos que $d_{(x,y,z)}f = \nabla f = (x,y,z)$, por lo que f tiene rango constante igual a 1. Por el Teorema del valor regular, $f^{-1}(1/2)$ es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2. Sin embargo, $f^{-1}(1/2) = \mathbb{S}^2$, probando que $\mathbb{S}^2$ es subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^3$. Haciendo exactamente lo mismo, $\mathbb{S}^n$ es subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Ejemplo 2.1.5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto abierto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Consideremos la función $f : U \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)$. Observemos que $\nabla f(x,y,z) = (x,y,-z)$, por lo que $\nabla f \neq 0$ en U. Por ello, f tiene rango constante 1 y podemos aplicar el Teorema del Valor Regular y $f^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimensión 2 en $U \subset \mathbb{R}^3$. Sabemos que $f^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in U \mid x^2+y^2 = z^2\}$, lo cual representa al cono en $\mathbb{R}^3$ "sin punta".*

Si consideramos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, no podemos aplicar el Teorema del Valor Regular para afirmar que el cono *tiene estructura de subvariedad en* $\mathbb{R}^3$*, pues* $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$.

Probaremos de hecho que $C = \{(x,y,z) \in U \mid x^2+y^2 = z^2, z \geq 0\}$ *no es subvariedad en* $\mathbb{R}^3$*: Observemos que* $p = (0,0,0) \in C$*. Sea* (U,φ) *una carta en* $\mathbb{R}^3$ *con* $p \in U$ *y sin pérdida de generalidad supongamos que* $\varphi(p) = (0,0,0)$ *y* $\varphi(U) = B_1^3(0)$*. Si* (U,φ) *tuviera la propiedad de subvariedad entonces* $\varphi(U \cap C) = B_1^3(0) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = B_1^2(0) \times \{0\}$*. Puesto que* φ *es biyectiva, para cualesquiera* $p, q \in \mathbb{R}$ *con* $(p,q) \in B_1^2(0)$ *se tiene que* $\varphi^{-1}(p,q,0) \in C$*, por lo que existen funciones* $a, b : B_1^2(0) \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$\varphi^{-1}(p,q,0) = \big(a(p,q), b(p,q), \sqrt{(a(p,q))^2 + (b(p,q))^2}\big).$$

Puesto que φ *es difeomorfismo, las funciones* a, b *y* $\sqrt{a^2+b^2}$ *son diferenciables en* $B_1^2(0)$*. Puesto que* $\varphi(0,0,0) = (0,0,0)$ *y* φ *es biyectiva, tenemos que* $a(0,0) = b(0,0) = 0$.

2.2. Clasificación de Funciones Suaves en Variedades

2.2.1. Submersiones

Definición 2.2.1. *Sean* M*,* N *variedades de dimensiones* m*,* n*, respectivamente. Decimos que la función diferenciable* $f : M \to N$ *es una* ***submersión*** *si* f *tiene rango constante igual a* n.

Ejemplo 2.2.2. *Sea* M *una* n*-variedad y* $\tau_M : TM \to M$ *la proyección fibrada tangente. Si* $v_m \in TM$ *es un vector tangente arbitrario y* (U,φ) *una vecindad coordenada de* m *entonces* τ_M *en las cartas* $(TU, T\varphi)$*,* (U,φ) *viene dada por*

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_M : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n &\to \varphi(U) \\ (x,v) &\mapsto x \end{aligned}$$

por lo que localmente es una proyección y tiene rango n*. Esto significa que su rango es constante en cada punto, igual a la dimensión de* M*, por lo que* τ_M *es una submersión.*

Ejemplo 2.2.3. *Consideremos la función* $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) = x^2+y^2-z^2$*. Observemos que* $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0) \neq 0$*, por lo que, en el domino que elegimos, esta función tiene rango constante igual a 1 y* f *es una submersión.*

Observemos que si f es una submersión entonces $n \leq m$. Por otra parte, f es una función abierta y **localmente sobreyectiva**. En efecto, para cada $x \in M$ existen, por el Teorema del Rango, vecindades coordenadas tal que la función de transición toma la forma

$$(\varphi^1, \ldots, \varphi^n, \ldots, \varphi^m) \mapsto (\varphi^1, \ldots, \varphi^n),$$

la cual es una función sobreyectiva. Por otra parte, si $x \in U$, con U abierto, entonces la representación anterior es una función abierta, lo cual nos dice que $f(x)$ es punto interior de $f(U)$ y f es abierta.

Ejemplo 2.2.4. *Consideremos la función $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(\theta, t) = \theta$. Consideremos la carta (U, φ) de $\mathbb{S}^1$ donde $U = \mathbb{S}^1 \backslash \{(1,0)\}$ y $\varphi : U \to (0,1)$ viene dada por $\varphi(cos(2\pi t), sin(2\pi t)) = t$. Ahora, consideremos la carta $(U \times \mathbb{R}, \varphi \times id_{\mathbb{R}})$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Claramente $f(U \times \mathbb{R}) = U$ y $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ viene dada como la proyección en la segunda componente y por ello f tiene rango constante igual a 1 en $(\mathbb{S}^1 \backslash \{(1,0)\}) \times \mathbb{R}$. De manera similar podemos construir una carta que nos permita demostrar que f tiene rango 1 en $(1,0) \times \mathbb{R}$, lo cual nos demuestra que f es submersión.*

En general, si $\pi : M \times N \to M$ es la proyección en la primer componente, se trata de una submersión, ya que para cualesquiera dos cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ en M y N, se tiene que $(U \times V, \varphi \times \psi)$ es una carta en $M \times N$ con $\pi(U \times V) = U$ y en esas cartas, la función de transición queda como $\tilde{\pi} = \varphi \circ \pi \circ (\varphi \times \psi)^{-1} = \varphi \circ \pi \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1})$, que en coordenadas es $(x, p) \mapsto x$, la cual tiene rango constante igual a m. Como esto es para cualesquiera dos cartas, π es una submersión.

2.2.2. Inmersiones

Definición 2.2.5. *Sean M, N variedades de dimensiones m, n, respectivamente. Decimos que la función diferenciable $f : N \to M$ es una **inmersión** si f tiene rango constante igual a n.*

Observemos que si f es una submersión entonces $m \geq n$. Por otra parte, f es una función **localmente inyectiva**. En efecto, para cada $x \in N$ existen, por el Teorema del Rango, vecindades coordenadas tal que la función de transición toma la forma

$$(\varphi^1, \ldots, \ldots, \varphi^n) \mapsto (\varphi^1, \ldots, \varphi^n, 0, \ldots, 0),$$

la cual es una función inyectiva.

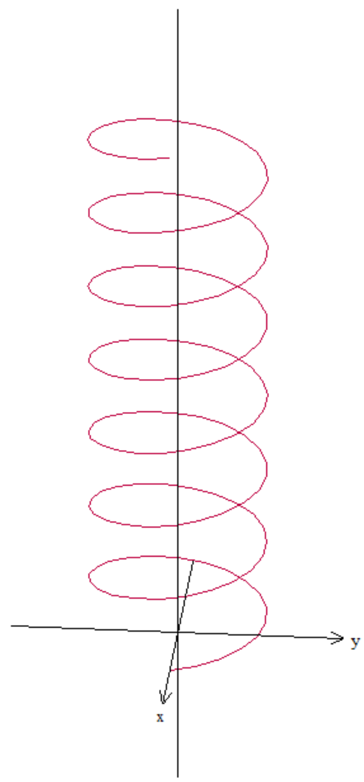
Definición 2.2.6. *Si $f : N \to M$ es una inmersión inyectiva, dotamos a $f(N)$ de una topología inducida por f como sigue: $U \subset f(N)$ es abierto si y sólo si existe V abierto en N tal que $f(V) = U$. A esta topología se le llama* ***topología inducida*** *por f.*

Si $\mathcal{A}$ es un atlas para N, definimos el atlas para $f(N)$ por $f\mathcal{A} = \{(f(U), \varphi \circ f^{-1}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$. La estructura diferencial para $f(N)$ dada por dicho atlas se llama ***estructura de variedad inducida*** *por f.*

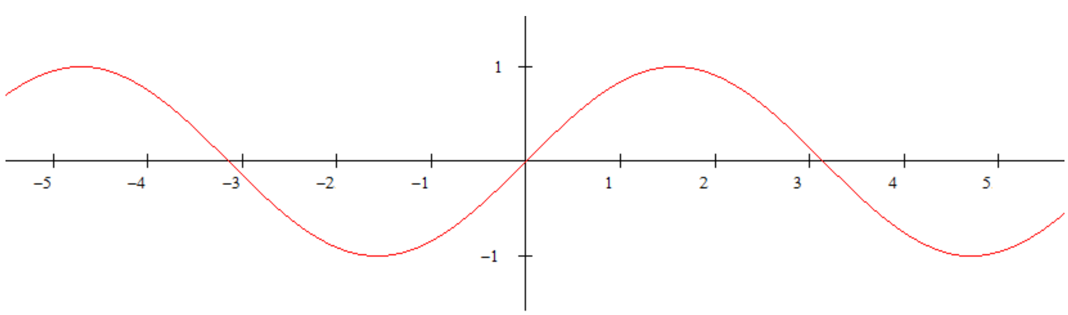
Como f es inyectiva, $f : N \to f(N)$ es una biyección, por lo que f^{-1} está definida. Además, las funciones de transición vienen dadas por $(\varphi \circ f^{-1}) \circ (\psi \circ f^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$, por lo que las cartas $f\mathcal{A}$ son compatibles. Finalmente, $\bigcup_{(U,\varphi)\in f\mathcal{A}} U = \bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} f(U) = f(\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U) = f(N)$, probando que $f\mathcal{A}$ es un atlas para $f(N)$.

Ejemplo 2.2.7. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ viene dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ entonces $||f'(t)|| = 1$ por lo que también es una función de rango constante igual a 1 y es una inmersión.*

Ejemplo 2.2.8. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ viene dada por $f(t) = (\cos(7t), \operatorname{sen}(7t), t)$ entonces $f'(t) = (-7\operatorname{sen}(7t), 7\cos(7t), 1)$, lo cual prueba que f tiene rango constante igual a 1 y por ello es una inmersión, además es inyectiva.*

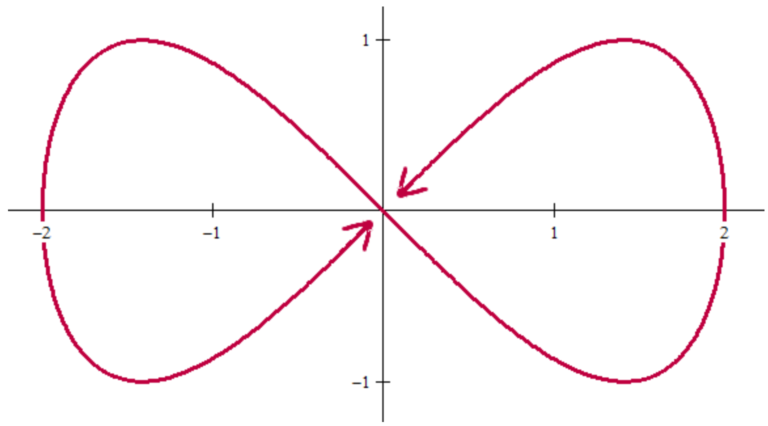


Ejemplo 2.2.9. *Si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *viene dada por* $f(t) = (t, \sin(t))$ *entonces* f *es una inmersión inyectiva.*



Ejemplo 2.2.10 (Figura del 8)**.** *Sea* $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$f(t) = \big(2\cos(t - \pi/2), \operatorname{sen} 2(t - \pi/2)\big).$$



Esta es la figura 8 completa pero sin autointersección. Ahora,

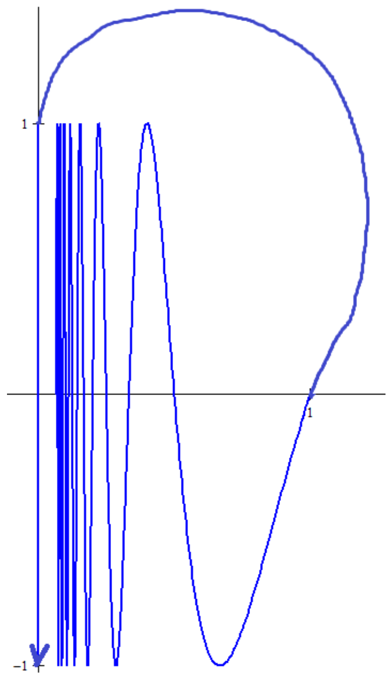
$$f'(t) = 2\big(-\operatorname{sen}(t-\pi/2), \cos 2(t-\pi/2)\big) = 2\big(-\operatorname{sen}(t-\pi/2), 1-\operatorname{sen}^2(t-\pi/2)\big),$$

por lo que las dos componentes no pueden anularse simultáneamente. Esto implica que f es una inmersión, más aún, es una inmersión inyectiva.

Ejemplo 2.2.11 (Curva del Topólogo Modificada)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por*

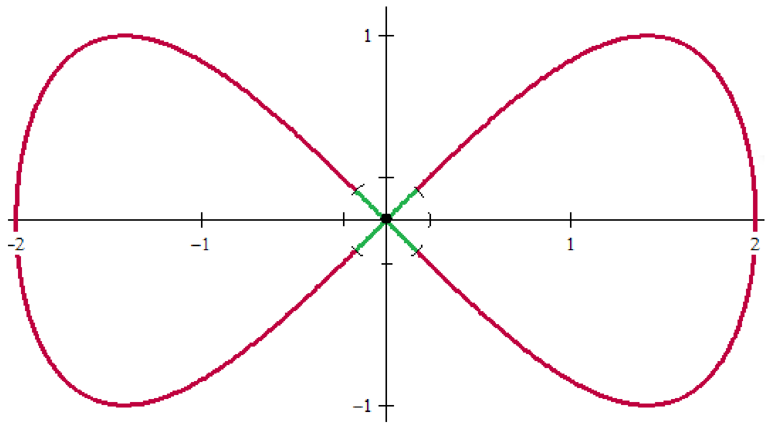
$$f(t) = \begin{cases} (1/t, \operatorname{sen}(\pi t)) \ \textit{si}\ 1 \leq t \\ (0, t+2) \ \textit{si}\ t \leq -1 \end{cases}$$

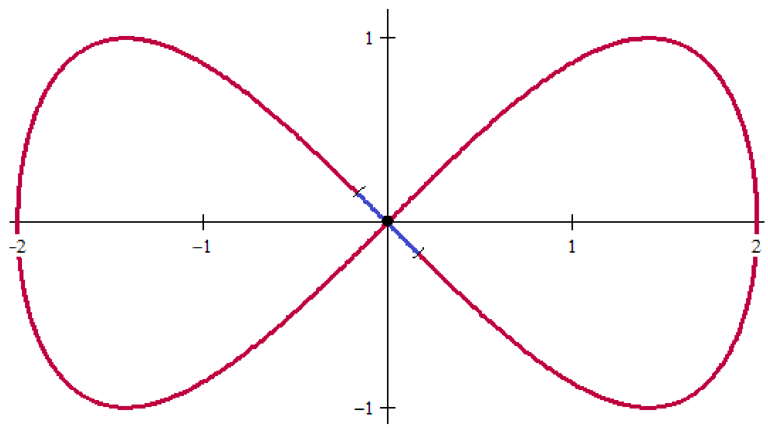
y tal que en $[-1, 1]$ la gráfica de la función esté conectada suavemente, como se muestra en la figura.



Este también es un ejemplo de inmersión.

Los ejemplos anteriores muestran que una inmersión no necesariamente es inyectiva, y que la imagen de dicha inmersión no necesariamente tiene la misma topología como variedad, que como subespacio de la imagen. Tomemos primero el Ejemplo 2.2.10. En su topología inducida de $\mathbb{R}$ por medio de f, vemos que $f(-1/10, 1/10)$ es vecindad abierta de $f(0) = (0, 0)$. Si consideramos la topología relativa, cualquier vecindad de $(0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ interseca a la figura 8 en forma de cruz:





Esto nos dice que, aunque $f(-1/10, 1/10)$ sea un abierto en la figura 8 con la topología inducida por f, no lo es con la topología relativa en $\mathbb{R}^2$. El ejemplo de la curva del topólogo modificada ocurre algo similar: $f(-5/2, -3/2)$ es una vecindad abierta de $f(-2) = (0, 0)$ cuando consideramos la topología inducida por f. Sin embargo, toda vecindad abierta de $(0, 0)$ con la topología relativa es intersecada una infinidad de veces por la curva $t \mapsto (1/t, \sin(\pi t)), t \geq 1$, por lo cual, en la topología relativa, $f(-5/2, -3/2)$ no es abierto.

Lo anterior motiva una definición en la cual pedimos una condición más fuerte para las inmersiones.

2.3. Encajes y Funciones Propias. Ejemplos

Como vimos en los ejemplos anteriores, una inmersión inyectiva no siempre es un homeomorfismo, ya que la topología inducida no coincide con la topología relativa. Cuando una inmersión inyectiva es tal que dichas topologías coinciden, la inmersión inyectiva se llama **encaje**. En este caso, veremos que no sólo coincidirán la topología relativa con la topología inducida, sino que coincidirán las estructuras diferenciales de subvariedad y la inducida por dicho encaje. Por si esto fuera poco, probaremos que todo encaje es un difeomorfismo en su imagen.

Para asegurar que una función es un encaje, primero debe satisfacer que es una inmersión inyectiva. Esto en la práctica, generalmente no es difícil de garantizar, es decir, hay maneras prácticas de ver si es inyectiva y si su rango es constante y maximal. Sin embargo, el garantizar que una función es un encaje es más complicado, porque se debe asegurar que tenemos un homeomorfismo. Veremos que si la inmersión inyectiva es además una función propia entonces se trata de un encaje. Esta es nuestra primer aplicación de las funciones propias en geometría diferencial.

Definición 2.3.1. *Una inmersión inyectiva $f : N \to M$ se dice que es un* ***encaje*** *si la topología inducida de $f(N)$ por f coincide con la topología de $f(N)$ como subespacio de M.*

Podemos ver que una inmersión es un encaje si y sólo si es un homeomorfismo en su imagen cuando a esta se le considera con la topología relativa. De nuestros ejemplos anteriores de inmersiones, sólo el primero es un encaje.

Observemos que si $N \subset M$ es subvariedad de la variedad M, entonces la inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es un encaje. En efecto: puesto que N es subvariedad, posee la topología relativa de M, por lo que $i(N)$ tiene la misma topología, es decir, la relativa. Por ello, i es encaje.

Proposición 2.3.2. *Si $f : M \to N$ es una inmersión entonces para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) con $p \in U$ tal que $f|_U$ es un encaje.*

Demostración. Consideremos las cartas (U, φ),(V, ψ) dadas por el Teorema del Rango. Hemos visto que estas coordenadas la función f es localmente inyectiva, por lo que sólo falta probar que f es un homeomorfismo sobre su imagen. Esto equivale a probar que $\tilde{f} : C_r^m(0) \to C_r^n(0)$ es un homeomorfismo sobre su imagen, ya que las cartas coordenadas son homeomorfismos. Puesto que $\tilde{f}(\varphi^1, \ldots, \varphi^m) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m, 0, \ldots, 0)$ es un homeomorfismo sobre su imagen, $f = \psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ es también homeomorfismo sobre su imagen con la topología relativa, por ser composición de homeomorfismos. □

El siguiente teorema nos da la propiedad más importante de los encajes: no sólo la topología inducida de la imagen coincide con la topología relativa, sino que las estructura de variedad inducida coincide con la estructura de subvariedad como subconjunto. La importancia de este teorema radica en lo siguiente: basta garantizar que se cumple una propiedad topológica (que $f : N \to f(N)$ es homeomorfismo) para asegurar que se cumple una propiedad sobre diferenciabilidad (que $f : N \to f(N)$ es difeomorfismo).

Teorema 2.3.3. *Sea $f : N' \to M$ un encaje, donde N' y M tienen dimensión n y m, respectivamente. Si $N = f(N')$ entonces N es una subvariedad de M. Además, $f : N' \to N$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Sea $y = f(x)$ cualquier punto sobre N. Por el Teorema del Rango existen vecindades coordenadas $(U, \varphi), (V, \psi)$ tales que $\varphi(x) = (0, \ldots, 0) \in C_r^n(0) = \varphi(U)$, $\psi(y) = (0, \ldots, 0) \in C_r^m(0) = \psi(V)$ y que $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ viene dada por $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \mapsto (\varphi^1, \ldots, \varphi^n, 0, \ldots, 0)$. Puesto que f es un encaje, $f(U)$ es abierto en $f(N')$ y como la topología inducida por f coincide con la topología relativa, existe W abierto en M tal que $W \cap N = f(U)$. Como $f(U) \subset V$, se tiene $(W \cap V) \cap N = f(U)$, donde $W \cap V \subset V$, por lo que, sin pérdida de generalidad, supongamos que $W \subset V$. Observemos que $\psi(W)$ es un abierto contenido en $C_r^m(0)$ y que contiene al origen. Por otra parte, $\psi(W) \supset \psi(f(U)) = \tilde{f}(\varphi(U)) = \{p \in C_r^m(0) \mid \varphi^{n+1} = \ldots = \varphi^m = 0\}$. Esto implica que podemos escoger un cubo $C_s^m(0) \subset \psi(W)$, y sean $V' = \psi^{-1}(C_s^m(0))$ y $\psi' = \psi|_{V'}$. Por construcción, $V' \subset W$; por ello, $V' \cap N = V' \cap W \cap N = V' \cap f(U)$. Si $U' = \varphi^{-1}(C_s^n(0))$ y $\varphi' = \varphi|_{U'}$ entonces (U', φ') y (V', ψ') satisfacen todas las propiedades del teorema del Rango, pero además

$$f(U') = f(\varphi^{-1}(C_s^n(0))) = \psi^{-1}(\tilde{f}(C_s^n(0))) = \psi^{-1}(C_s^m(0)) \cap N = V' \cap N,$$

por lo que N es subvariedad de M. Por otro lado, f y su inversa en las coordenadas $(U', \varphi'), (V', \pi \circ \psi')$ (donde $\pi(\psi^1, \ldots, \psi^m) = (\psi^1, \ldots, \psi^n)$) vienen dadas por $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$, probando que N es difeomorfa a N'. □

Por lo general es sencillo identificar cuándo una función es o no una inmersión, pero no es sencillo discriminar si se trata o no de un encaje. Enseguida probaremos que, si una inmersión inyectiva es propia entonces f es un encaje:

Proposición 2.3.4. *Si $f : N \to M$ es una inmersión inyectiva y además es propia entonces f es un encaje.*

Demostración. Como $f : N \to M$ es una inmersión, $f : N \to M$ es continua e inyectiva, por lo que $f : N \to f(N)$ es continua y biyectiva. Si probamos que $f : N \to f(N)$ es cerrada, se tendrá que $f : N \to f(N)$ es homeomorfismo, y por ello f será un encaje. Pero como $f : N \to f(N)$ es continua, propia y $f(N)$ es de Hausdorff y primero numerable (ya que es variedad topológica), se sigue que f es cerrada por la Proposición 1.2.14. Esto termina la demostración. $\square$

Corolario 2.3.5. *Si N es compacto y $f : N \to M$ es una inmersión inyectiva entonces f es un encaje.*

Demostración. Puesto que $f : N \to M$ es inmersión inyectiva entonces $f : N \to f(N)$ es continua y biyectiva. De la misma manera en que procedimos en la demostración anterior, tenemos que $f(N)$ es de Hausdorff y primero numerable. Esto significa que $f : N \to f(N)$ es una función continua entre el espacio compacto N y el espacio de Hausdorff $f(N)$, lo cual, por la Proposición 1.2.10, se sigue que f es propia. Por la Proposición anterior, tenemos el resultado. $\square$

Capítulo 3

Sistemas Dinámicos en Variedades

3.1. Campos Vectoriales en Variedades

En las variedades diferenciales no sólo podemos trabajar con funciones diferenciables, sino que podemos estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales definidas en dichas variedades. Dado un campo vectorial suave, veremos que su flujo también es diferenciable. Más aún, veremos que si el campo depende del tiempo o de algún otro parámetro, su flujo también es diferenciable. En esencia, los teoremas de Existencia y Unicidad, de Dependencia de Condiciones Iniciales, y Dependencia de Parámetros, son válidos también en una variedad.

Para ello, debemos extender la definición de campo vectorial a variedades. Puesto que ya definimos lo que es un vector tangente, la definición de campo vectorial resultará bastante natural.

3.1.1. Estructura Algebraica de Campos Vectoriales

Un **campo vectorial** en $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función $X : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^∞, la cual en coordenadas se puede expresar como $X(p) = \big(X_1(p), \ldots, X_n(p)\big)$. Esta función, a cada punto $p \in U$ le asocia un vector $X(p) \in \mathbb{R}^n$. El espacio tangente T_pU es un espacio vectorial de dimensión n, el cual es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ usando las coordenadas usuales. Por ello, intuitivamente, un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función que a cada punto de U le asocia un vector tangente en dicho punto.

Definición 3.1.1. *Un* ***campo vectorial*** *X en M es una* sección de la proyección π del fibrado tangente*, es decir, una función diferenciable $X : M \to TM$ tal que $\tau_M \circ X = id_M$, es decir, para cada $m \in M$, $X(m) \in T_mM$. Si X es una sección local (esto es, X está definido solamente en un abierto U de M y $\tau_M \circ X = id_U$), decimos que X es un* ***campo***

vectorial local. *Al conjunto de los campos vectoriales en $U \subset M$ se les denota por $\mathfrak{X}(U)$.*

Intuitivamente, un campo vectorial es una función que a cada punto le asigna un vector tangente en dicho punto "de manera suave". Para cada $m \in U$, a $X(m)$ lo denotaremos como X_m.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $X \in \mathfrak{X}(U)$ un campo vectorial, con (U, φ) carta en M. Puesto que $\tau_M \circ X = id_M$, se sigue que $X(U) \subset TU$. La expresión local $\tilde{X} : \varphi(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ de X en las cartas $(U, \varphi), (TU, T\varphi)$ viene dada por $\tilde{X}(p) = (T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1})(p) = \big(p, d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(X_{\varphi^{-1}(p)})\big)$. Notemos que la función $\hat{X} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\hat{X}(p) = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(X_{\varphi^{-1}(p)})$ es un campo vectorial en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ en el sentido usual. a $\hat{X}$ se le llama la* ***parte principal*** *de la expresión local $\tilde{X}$.*

Es inmediato verificar también que $\mathfrak{X}(U)$ es un módulo sobre el anillo $C^\infty(U)$ de las funciones diferenciables de U en $\mathbb{R}$, con las operaciones

1. $(X + Y)_m := X_m + Y_m$,
2. $(kX)_m := k \cdot X_m$,
3. $(fX)_m := f(m) \cdot X_m$,

donde $m \in U$, $X, Y \in \mathfrak{X}(U), f \in C^\infty(U)$ y $k \in \mathbb{R}$. Lo anterior está bien definido porque, para cada $m \in U$, X_m, Y_m son vectores tangentes, los cuales forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Con las dos primeras operaciones, $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, sólo que de dimensión infinita.

Ejemplo 3.1.3. *Sea M una n-variedad diferencial y sea (U, φ) una carta con funciones coordenadas $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos un campo vectorial local como*

$$\partial^i := \frac{\partial}{\partial \varphi^i} : U \subset M \to TM$$
$$m \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m =: \partial^i_m.$$

Si $m \in U$ entonces $(T\varphi \circ \partial^i)(m) = T\varphi(\partial^i_m) = (\varphi(m), e^i)$, por lo que la función de transición $\widetilde{\partial^i}$ dada por las coordenadas (U, φ) y $(TU, T\varphi)$ viene dada por $\varphi(m) \mapsto (\varphi(m), e^i)$, la cual es diferenciable, pues simplemente agrega las coordenadas del vector e^i. Esto prueba que ∂^i es diferenciable para cada i. Más aún, probaremos que $\{\partial^i\}_{i=1}^n$ es una ***base local*** *de campos* *vectoriales:*

Para cada $i = 1, \ldots, n$ consideremos las funciones $X_i : U \to \mathbb{R}$ dadas por $X_i(m) = \pi_{n+i}(d_m\varphi(X_m))$. Consideremos el campo $Y \in \mathfrak{X}(U)$ dado por $Y = \sum_{i=1}^n X_i \partial^i$. Observemos que $(T\varphi \circ Y)(m) = T\varphi\big(\sum_{i=1}^n X_i(m)\partial_m^i\big) = \big(\varphi(m), d_m\varphi(\sum_{i=1}^n X_i(m)\partial_m^i)\big)$. Sin embargo, $d_m\varphi$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, por lo que

$$\begin{aligned}(T\varphi \circ Y)(m) &= \left(\varphi(m), d_m\varphi(\sum_{i=1}^n X_i(m)\partial_m^i)\right) = \left(\varphi(m), \sum_{i=1}^n X_i(m) d_m\varphi(\partial_m^i)\right) \\ &= \left(\varphi(m), \sum_{i=1}^n X_i(m)e^i\right).\end{aligned}$$

Pero veamos que, por definición de X_i, se tiene que $(T\varphi \circ X)(m) = \big(\varphi(m), \sum_{i=1}^n X_i(m)e^i\big)$, probando que $(T\varphi \circ X)(m) = (T\varphi \circ Y)(m)$. Sin embargo, la igualdad anterior es válida para toda $m \in M$ y además $T\varphi$ es biyectiva, por lo que $X = Y$, es decir,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \partial^i,$$

probando que $\mathfrak{X}(U)$ es finitamente generado si (U, φ) es una carta.

Definición 3.1.4. *Sea $N \subset M$ una subvariedad en M. Decimos que el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es* ***tangente*** *a N si para cada $m \in N$ se tiene que $X_m \in T_mN$. Al campo $X|_N \in \mathfrak{X}(N)$ le llamamos la* ***restricción*** *de X en N.*

Proposición 3.1.5. *Sea $N \subset M$ una subvariedad en M de dimensión k. Si (U, φ) es una carta en M con la propiedad de subvariedad para N y $X \in \mathfrak{X}(U)$ entonces, para cada $i = 1, \ldots, k$, $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ es tangente a N.*

Demostración. Puesto que $e_1, \ldots, e_k$ generan a $\mathbb{R}^k$, para $i = 1, \ldots, k$ la curva $t \mapsto \varphi(m) + te_i$ está contenida en $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\})$ para algún intervalo que contiene a cero. Por ello, $\varphi^{-1}\big(\varphi(m) + te_i\big)$ es una curva totalmente contenida en N y $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ es tangente a N, como queríamos. $\square$

La Derivada de Lie

Si $X \in \mathfrak{X}(U)$ es un campo vectorial en $U \subset \mathbb{R}^n$, la derivada de Lie de cualquier función $f \in C^\infty(U)$ se define por $\mathcal{L}_X f(x) = \langle X(x), \nabla f(x) \rangle$, donde

$\langle , \rangle$ es el producto punto usual en $\mathbb{R}^n$. De la definición podemos ver que $\mathcal{L}_X f$ es una función diferenciable. La derivada de Lie, como veremos más adelante, permite estudiar la "variación" de una función a lo largo de un campo.

Para estudiar la derivada de Lie en variedades, introduciremos los siguientes conceptos.

Definición 3.1.6. *Sea U un abierto en M, con M variedad diferencial. Una $\mathbb{R}$-**derivación** en $C^\infty(U)$ es una función $D : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $D(f+g) = D(f) + D(g)$,
2. $D(k \cdot f) = k \cdot D(f)$,
3. $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$,

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(U), k \in \mathbb{R}$. Al conjunto de todas las $\mathbb{R}$-derivaciones de $C^\infty(U)$ se le denota por $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(U)$.

Claramente, $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(U)$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, pero además, también forma un módulo sobre el anillo $C^\infty(U)$ de las funciones diferenciables en U con las siguientes operaciones:

1. $(D+E)(f) := D(f) + E(f)$,
2. $(kD)(f) := k \cdot D(f)$,
3. $(fD)(g) := f \cdot D(g)$,

donde $D, E \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(U)$; $f, g \in C^\infty(U)$ y $k \in \mathbb{R}$.

Ahora presentaremos uno de los ejemplos más importantes de derivaciones en $C^\infty(U)$:

Definición 3.1.7. *Sean M una variedad, $U \subset M$, $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in C^\infty(U)$. La **derivada de Lie** de la función f a lo largo del campo X es la función*

$$\mathcal{L}_X f : U \subset M \to \mathbb{R}$$

dada por $\mathcal{L}_X f(m) = X_m(f)$. Esta función es C^∞.

La función $\mathcal{L}_X f$ está bien definida para cada $m \in U$, ya que X_m es un vector tangente en m, y como f es C^∞, $X_m(f)$ es el valor de dicho vector tangente en la función f. Probaremos que, en efecto, $\mathcal{L}_X f$ es una función diferenciable: Sea $m \in U$ y sean (V, φ) una carta local con $m \in V$ donde $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ son coordenadas en V. Puesto que $\{\partial^i\}_{i=1}^n$ es una base local, existen $X_1, \ldots, X_n \in C^\infty(U \cap V)$ tales que $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial^i$ en la vecindad coordenada de m. Por ello, $X_m(f) = \sum_{i=1}^n X_i(m)\partial_m^i(f)$, lo cual en coordenadas locales coincide de hecho con la función

$$\varphi(m) \mapsto \sum_{i=1}^n (X_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(m)) D_{e_i}(\tilde{f})(\varphi(m)).$$

En virtud de esto, si $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial^i$ en alguna carta (U, φ), entonces

$$\mathcal{L}_X f(\varphi^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^n (X_i \circ \varphi^{-1})(x) \cdot D_{e_i}(\tilde{f})(x) = \langle \hat{X}(x), \nabla \tilde{f}(x) \rangle = \mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{f}(x)$$

para todo $x \in \varphi(U)$, es decir, las coordenadas locales de la derivada de Lie coinciden con la derivada de Lie del campo inducido en $\varphi(U)$ por medio de las funciones de transición. Puesto que la derivada de Lie de una función diferenciable a lo largo de un campo es diferenciable, se tiene que $\mathcal{L}_X f$ es diferenciable, como queríamos.

Proposición 3.1.8. *La función $\mathcal{L}_X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ dada por $f \mapsto \mathcal{L}_X f$ es una $\mathbb{R}$-derivación de $C^\infty(U)$.*

Demostración. Si $m \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f, g, h \in C^\infty(U)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\lambda f + g \cdot h)(m) &= X_m(\lambda f + g \cdot h) = \lambda X_m(f) + X_m(g)h(m) + g(m)X_m(h) \\ &= \lambda \mathcal{L}_X f(m) + \mathcal{L}_X g(m)h(m) + g(m)\mathcal{L}_X h(m) \end{aligned}$$

ya que X_m es un vector tangente. Puesto que la igualdad anterior es válida para cada m, se sigue que $\mathcal{L}_X(\lambda f + g \cdot h) = \lambda \mathcal{L}_X f + \mathcal{L}_X g \cdot h + g \cdot \mathcal{L}_X h$, probando que $\mathcal{L}_X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ es una $\mathbb{R}$-derivación. $\square$

En adelante, utilizaremos la notación $\mathfrak{X}(M)$, $C^\infty(M)$, $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$, etcétera (con M en lugar de un abierto U de M); pero tengamos en cuenta que procediendo de la misma manera podemos construir estos objetos de manera local.

Hemos visto que la función $X \mapsto \mathcal{L}_X$ asocia un campo vectorial con una derivación. Ahora, probaremos que $X \mapsto \mathcal{L}_X$ es un isomorfismo entre los $C^\infty(M)$-módulos $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$.

Definición 3.1.9. *La función* $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$ *dada por* $X \mapsto \mathcal{L}_X$ *se llama* ***derivada de Lie****.*

Proposición 3.1.10. *La derivada de Lie es una función* $C^\infty(M)$*-lineal, es decir, si* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *y si* $f \in C^\infty(M)$ *entonces* $\mathcal{L}_{X+fY} = \mathcal{L}_X + f \cdot \mathcal{L}_Y$*.*

Demostración. Si $g \in C^\infty(M)$ entonces, para cada $m \in M$,

$$\mathcal{L}_{X+fY} g(m) = (X + fY)_m(g) = X_m(g) + f(m)Y_m(g) = \mathcal{L}_X g(m) + f(m)\mathcal{L}_Y(g)(m),$$

probando que $\mathcal{L}_{X+fY} = \mathcal{L}_X + f \cdot \mathcal{L}_Y$. $\square$

Lema 3.1.11. *Sea* (U, φ) *una carta en* M *y sea* $X \in \mathfrak{X}(U)$*. Si* $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial^i$ *entonces* $X_j = \mathcal{L}_X \varphi^j$*. En particular, se tiene que* $\mathcal{L}_{\partial^i} \varphi^j = \delta_i^j$*.*

Demostración del Lema: Para cada $m \in M$,

$$\mathcal{L}_X \varphi^j(m) = X_m(\varphi^j) = \left(\sum_{i=1}^n X_i \partial^i \right)_m (\varphi^j) = \sum_{i=1}^n X_i(m) \partial_m^i(\varphi^j) = \sum_{i=1}^n X_i(m) \delta_i^j = X_j(m),$$

lo cual prueba que $\mathcal{L}_X \varphi^j = X_j$. $\triangledown$

Lema 3.1.12. *Si* $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$ *entonces* $X = Y$*.*

Demostración del Lema: Puesto que $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$ es lineal, se sigue que $\mathcal{L}_Z = 0$, donde $Z = X - Y$. Sea $m \in M$ y sea (U, φ) una carta con $m \in U$. En dichas coordenadas tenemos que $Z = \sum_{i=1}^n Z_i \partial^i$, donde $Z_i = \mathcal{L}_Z \varphi^i$. Sin embargo, como $\mathcal{L}_Z = 0$, se sigue que $Z_i = \mathcal{L}_Z \varphi^i = 0$, probando que $Z = 0$ en U, en particular, $Z(m) = 0_m$. Como $m \in M$ es arbitrario, $Z = 0$, es decir, $X - Y = 0$ y $X = Y$. $\triangledown$

La derivada de Lie es por lo tanto inyectiva. Ahora probaremos que es sobreyectiva.

Proposición 3.1.13. *Si* $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$ *entonces existe* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que* $D = \mathcal{L}_X$*.*

Demostración. Sea $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$. Para cada carta (U, φ), sean $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ las funciones coordenadas locales y sea $X_U \in \mathfrak{X}(U)$ dado por $X_U = \sum_{i=1}^n D(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$. Demostraremos que $\mathcal{L}_{X_U} = D|_U$. Sea $m \in U$ y $f \in C^\infty(U)$.

Por el lema de Hadamard existe $V \subset U$ y existen $g_1, \ldots, g_n \in C_m^\infty(V)$ tales $g_i(m) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(m)$ y que $f = f(m) + \sum_{i=1}^n (\varphi^i - \varphi^i(m)) g_i$. Por lo anterior,

$$\begin{aligned}
D(f)(m) &= D\left(f(m) + \sum_{i=1}^n (\varphi^i - \varphi^i(m)) g_i\right)(m) \\
&= D\big(f(m)\big)(m) + \sum_{i=1}^n \Big(D\big(\varphi^i - \varphi^i(m)\big)(m) g_i(m) + \big(\varphi^i - \varphi^i(m)\big)(m) D(g_i)(m)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n D(\varphi^i)(m) g_i(m) = \sum_{i=1}^n D(\varphi^i)(m) \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(m) \\
&= \sum_{i=1}^n D(\varphi^i)(m) \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_m f = \mathcal{L}_{X_U} f(m).
\end{aligned}$$

Como esto ocurre para todo $m \in U$ y para toda $f \in C^\infty(U)$, se sigue que, $\mathcal{L}_{X_U} = D|_U$. Ahora, sea $X : TM \to M$ dada por $X(m) = X_U(m)$ si $m \in U$. Si probamos que X está bien definida, se seguirá que $X|_U = X_U$, por lo que X será una función suave con $\tau_M \circ X = id_M$, es decir, un campo vectorial en M, y $\mathcal{L}_X|_U = D|_U$ para cada (U, φ). Eso implicará que $\mathcal{L}_X = D$, probando el resultado: Si $m \in U \cap V$ con $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas en M entonces $\mathcal{L}_{X_U} = D|_U$ y $\mathcal{L}_{X_V} = D|_V$, por lo que $\mathcal{L}_{X_U}|_{U \cap V} = D|_{U \cap V} = \mathcal{L}_{X_V}|_{U \cap V}$. Por el Lema anterior, $X_U|_{U \cap V} = X_V|_{U \cap V}$, probando que $X_U(m) = X_V(m)$. Por ello, X está bien definido y $\mathcal{L}_X = D$. □

De lo anterior tenemos que la derivada de Lie $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$ establece un isomorfismo canónico entre los $C^\infty(M)$-módulos $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$. Sin embargo, como veremos, $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$ tiene estructura de álgebra de Lie.

Por medio de la derivada de Lie podemos caracterizar a los campos que son tangentes a una subvariedad dada:

Proposición 3.1.14. *Sea $N \subset M$ una subvariedad en M. El campo X es tangente a N si y sólo si $(\mathcal{L}_X f)|_N = 0$ $\forall f \in C^\infty(M)$ constante en N.*

Demostración. Si X es tangente a N y $f \in C^\infty(M)$ es constante en N entonces $f|_N$ es una función constante y $X|_N \in \mathfrak{X}(N)$. Puesto que la derivada de Lie de una función constante es igual a cero, tenemos que

$$(\mathcal{L}_X f)|_N = \mathcal{L}_{X|_N}(f|_N) = 0.$$

Recíprocamente, sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $(\mathcal{L}_X f)|_N = 0 \; \forall f \in C^\infty(M)$ constante en N. Para cada $p_0 \in N$ existe una vecindad coordenada U de p_0 tal que $N \cap U = \{f^1(x) = \ldots = f^{m-n}(x) = 0\}$, donde $f^i = \varphi^{i+n}$ son las funciones coordenadas en dicha carta. Esto significa que f^i es constante en N, y en las coordenadas mencionadas podemos escribir

$$X = \sum_{j=1}^{m} X_j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

Por hipótesis, para $i = 1, \ldots, m-n$ y para todo $p \in U$,

$$0 = (\mathcal{L}_X f^i)|_N(p) = \sum_{j=1}^{m} X_j(p) \frac{\partial \varphi^{i+n}}{\partial \varphi^j}(\varphi(p)) = X_{i+n}(p),$$

lo que demuestra que $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$, y X es tangente a N, ya que $\frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ es tangente a N. $\square$

El Corchete de Lie

Definición 3.1.15. *Sean $D, E \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$. El **corchete** de D y E se define por*

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D.$$

Si $D, E \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(M)$ entonces $D \circ E$ es una transformación lineal, pero *no* necesariamente es una derivación. En efecto,

$$\begin{aligned} (D \circ E)(f \cdot g) &= D(E(f \cdot g)) = D(E(f) \cdot g) + D(f \cdot E(g)) \\ &= D(E(f)) \cdot g + E(f) \cdot D(g) + D(f) \cdot E(g) + f \cdot D(E(g)) \\ &= (D \circ E)(f) \cdot g + E(f) \cdot D(g) + D(f) \cdot E(g) + f \cdot (D \circ E)(g) \end{aligned}$$

pero eso no necesariamente es igual a

$$(D \circ E)(f) \cdot g + f \cdot (D \circ E)(g)$$

pues $E(f) \cdot D(g) + D(f) \cdot E(g)$ no necesariamente es idénticamente cero.

Sin embargo, el corchete de derivaciones sí define una derivación. En efecto:

$$(D \circ E)(f \cdot g) = (D \circ E)(f) \cdot g + E(f) \cdot D(g) + D(f) \cdot E(g) + f \cdot (D \circ E)(g)$$

$$(E \circ D)(f \cdot g) = (E \circ D)(f) \cdot g + D(f) \cdot E(g) + E(f) \cdot D(g) + f \cdot (E \circ D)(g)$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
[D,E](f\circ g) =&(D\circ E)(f\circ g)-(E\circ D)(f\circ g)\\
=&(D\circ E)(f)\cdot g+E(f)\cdot D(g)+D(f)\cdot E(g)+f\cdot(D\circ E)(g)\\
&-\big((E\circ D)(f)\cdot g+D(f)\cdot E(g)+E(f)\cdot D(g)+f\cdot(E\circ D)(g)\big)\\
=&(D\circ E)(f)\cdot g+f\cdot(D\circ E)(g)-(E\circ D)(f)\cdot g-f\cdot(E\circ D)(g)\\
=&[D,E](f)\cdot g+f\cdot[D,E](g),
\end{aligned}
$$

probando que, $[D,E]=D\circ E-E\circ D$ es una derivación en $C^\infty(M)$.

Corolario 3.1.16. *El par* $\big(\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(M),\ [,]\big)$ *es una subálgebra de Lie del* $\mathbb{R}$*-álgebra de las transformaciones lineales* $\big(L\big(C^\infty(M),\mathbb{R}\big),\ [,]\big)$.

Lema 3.1.17. *Si* $D,E\in\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(M)$ *y si* $f\in C^\infty(M)$ *entonces*

$$[D,f\cdot E]=D(f)\cdot E+f\cdot[D,E].$$

Demostración del Lema: Si $g\in C^\infty(M)$ entonces

$$
\begin{aligned}
[D,f\cdot E](g) &= (D\circ(f\cdot E))(g)-((f\cdot E)\circ D)(g)=D(f\cdot E(g))-f\cdot E(D(g))\\
&= D(f)\cdot E(g)+f\cdot D(E(g))-f\cdot E(D(g))\\
&= \big(D(f)\cdot E\big)(g)+f\cdot[D,E](g),
\end{aligned}
$$

por lo que $[D,f\cdot E]=D(f)\cdot E+f\cdot[D,E]$, como queríamos. $\triangledown$

Definición 3.1.18. *Sean* $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. *El* ***corchete de Lie*** *para campos vectoriales se define como el* único *campo vectorial* $[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$ *tal que* $\mathcal{L}_{[X,Y]}=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$.

La operación $[X,Y]$ está bien definida por lo siguiente: Para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, se tiene que $\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y\in\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(M)$. Esto implica que $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]\in\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(M)$. Puesto que $\mathcal{L}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(M)$, existe un único campo $Z\in\mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathcal{L}_Z=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$. Dicho campo Z es el que denotamos por $[X,Y]$.

Proposición 3.1.19. $\big(\mathfrak{X}(M),\ [,]\big)$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra de Lie con el corchete de Lie para campos vectoriales.*

Demostración. Sean $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ y sea $k\in C^\infty(M)$. Observemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[X+kY,Z]} &= [\mathcal{L}_{X+kY},\mathcal{L}_Z]=[\mathcal{L}_X+k\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_Z]=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Z]+k[\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_Z]\\
&= \mathcal{L}_{[X,Z]}+k\mathcal{L}_{[Y,Z]}=\mathcal{L}_{[X,Z]+k[Y,Z]}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que $[X+kY,Z]=[X,Z]+k[Y,Z]$. Esto demuestra la linealidad del corchete.

Para probar que $[,]$ es antisimétrico, notemos que

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]=-[\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_X]=-\mathcal{L}_{[Y,X]}=\mathcal{L}_{-[Y,X]},$$

lo que implica que $[X,Y]=-[Y,X]$. Finalmente, para probar la Identidad de Jacobi veamos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]}&=\mathcal{L}_{[X,[Y,Z]]}+\mathcal{L}_{[Y,[Z,X]]}+\mathcal{L}_{[Z,[X,Y]]}\\&=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_{[Y,Z]}]+[\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_{[Z,X]}]+[\mathcal{L}_Z,\mathcal{L}_{[X,Y]}]\\&=[\mathcal{L}_X,[\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_Z]]+[\mathcal{L}_Y,[\mathcal{L}_Z,\mathcal{L}_X]]+[\mathcal{L}_Z,[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]]=0,\end{aligned}$$

ya que $\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_Z\in\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(M)$ y $\big(\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(M),\ [,]\big)$ es álgebra de Lie. Puesto que $\mathcal{L}_{[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]}=0$, se sigue que

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

$\square$

Lema 3.1.20. *Si $X,Y\in C^\infty(M)$ entonces $[X,fY]=\mathcal{L}_Xf\cdot Y+f\cdot[X,Y]$.*

Demostración del Lema: Por el Lema 3.1.17 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X,fY]}&=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_{fY}]=[\mathcal{L}_X,f\mathcal{L}_Y]=\mathcal{L}_Xf\cdot\mathcal{L}_Y+f\cdot[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]\\&=\mathcal{L}_{\mathcal{L}_Xf\cdot Y}+f\cdot\mathcal{L}_{[X,Y]}=\mathcal{L}_{\mathcal{L}_Xf\cdot Y+f\cdot[X,Y]},\end{aligned}$$

lo que implica el resultado. $\triangledown$

De manera similar, podemos demostrar que $[fX,Y]=-\mathcal{L}_Yf\cdot X+f\cdot[X,Y]$.

El corchete de Lie de campos vectoriales es una operación dada en términos de la derivada de Lie. En el siguiente ejemplo, veremos cómo viene dado el corchete de campos vectoriales por medio de coordenadas locales.

Ejemplo 3.1.21. *Si (U,φ) es una carta en M y $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$ entonces, para cada $i=1,\ldots,n$ existen $X^i,Y^i\in C^\infty(M)$ tales que*

$$X=\sum_{i=1}^n X^i\frac{\partial}{\partial\varphi^i},$$
$$Y=\sum_{i=1}^n Y^i\frac{\partial}{\partial\varphi^i}.$$

Consideremos la expresión local del corchete de Lie de ambos campos:

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} Z^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

Por el Lema 3.1.11 tenemos que

$$\begin{aligned} Z^i &= \mathcal{L}_{[X,Y]}\varphi^i = \mathcal{L}_X \circ (\mathcal{L}_Y \varphi^i) - \mathcal{L}_Y \circ (\mathcal{L}_X \varphi^i) \\ &= \mathcal{L}_X Y^i - \mathcal{L}_Y X^i = \sum_{j=1}^{n} X^j \mathcal{L}_{\partial^j} Y^i - Y^j \mathcal{L}_{\partial^j} X^i \\ &= \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial \varphi^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial \varphi^j}. \end{aligned}$$

Esta expresión coincide con la definición usual del corchete de campos vectoriales para campos en $\mathbb{R}^n$.

Push-Forward y Pull-Back

Si tenemos definida una estructura, ya sea un campo vectorial o una función diferenciable sobre una variedad M, y si M es difeomorfa a N vía el difeomorfismo $f : M \to N$, podemos inducir dicha estructura en N por medio de la función f:

Definición 3.1.22. *Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo y sea $g \in C^\infty(M)$. El* ***push-forward*** *de g bajo f es la función $f_* g = g \circ f^{-1}$.*

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, el ***push-forward*** *de X bajo f es el campo $f_* X : N \to TN$ dado por $f_* X_n = d_{f^{-1}(n)} f \cdot X_{f^{-1}(n)}$.*

Es inmediato verificar que en efecto $f_* g \in C^\infty(N)$. Para ver que $f_* X : N \to TN$ es diferenciable, observemos que

$$f_* X = df \circ X \circ f^{-1},$$

donde $f^{-1} : N \to M$, $X : M \to TM$ y $df : TM \to TN$ son funciones diferenciables, lo cual prueba que $f_* X \in \mathfrak{X}(N)$.

Si $f : M \to N$ y $g : N \to K$ son difeomorfismos y si $h \in C^\infty(M)$ entonces

$$\begin{aligned} (g \circ f)_* h &= h \circ (g \circ f)^{-1} = h \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (h \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g_*(h \circ f^{-1}) = g_*(f_* h) = (g_* \circ f_*)h, \end{aligned}$$

por lo que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Por otro lado, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)_* X &= d(g \circ f) \circ X \circ (g \circ f)^{-1} = dg \circ df \circ X \circ f^{-1} \circ g^{-1} \\ &= dg \circ f_* X \circ g^{-1} = g_*(f_* X) = (g_* \circ f_*)X,\end{aligned}$$

lo cual prueba que, en cualquier caso, $(g \circ f)_* = (g_* \circ f_*)$.

Por otro lado, si ahora tenemos un campo o función sobre una variedad N y $f : M \to N$ es un difeomorfismo, podemos inducir un campo o función en N de la siguiente manera:

Definición 3.1.23. *Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo y sean $g \in C^\infty(N)$, $X \in \mathfrak{X}(N)$. El* ***pull-back*** *de g bajo f es la función $f^* g = g \circ f$, y el* ***pull-back*** *de X bajo f es el campo $f^* X_n = d_{f(n)} f^{-1} \cdot X_{f(n)}$.*

Es inmediato verificar de las definiciones que, en cualquier caso, $f^* = (f^{-1})_*$, por lo cual $f^* g$ y $f^* X$ están bien definidos. Además, si $f : M \to N$ y $g : N \to K$ son difeomorfismos entonces

$$(g \circ f)^* = ((g \circ f)^{-1})_* = (f^{-1} \circ g^{-1})_* = (f^{-1})_* \circ (g^{-1})_* = f^* \circ g^*.$$

Lema 3.1.24. *Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ $n \in N$ y $g \in C_n^\infty(N)$ entonces*

$$(f_* X)_{f(m)}(g) = X_m(f^* g),$$

considerando a X_m como derivación puntual de $C_m^\infty(M)$.

Demostración del Lema: Por definición,

$$(f_* X)_{f(m)}(g) = (d_m f \cdot X_m)(g) = X_m(g \circ f) = X_m(f^* g).$$

$\triangledown$

De manera similar podemos ver que $(f^* X)_{f(m)}(g) = X_m(f_* g)$.

Lema 3.1.25. *Si $f : M \to N$ es difeomorfismo, $n \in N$, $g \in C^\infty(N)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\mathcal{L}_{f_* X} g(n) = \mathcal{L}_X(f^* g)(f^{-1}(n))$ y $f^* \mathcal{L}_{f_* X} g = \mathcal{L}_X(f^* g)$.*

Demostración del Lema: En virtud del lema anterior, tenemos que

$$\mathcal{L}_{f_* X} g(n) = (f_* X)_n(g) = X_{f^{-1}(n)}(f^* g) = \mathcal{L}_X(f^* g)(f^{-1}(n)).$$

Por otra parte, para todo $m \in M$,

$$f^* \mathcal{L}_{f_* X} g(m) = \mathcal{L}_{f_* X} g(f(m)) = (f_* X)_{f(m)}(g) = X_m(f^* g) = \mathcal{L}_X(f^* g)(m).$$

$\triangledown$

Proposición 3.1.26. *Si $f : M \to N$ es difeomorfismo y si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$.*

Demostración. Sean $g \in C^\infty(N)$ y $n \in N$. Por el Lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f_*[X,Y]}g(n) &= \mathcal{L}_{[X,Y]}(f^*g)(f^{-1}(n)) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f^*g)(f^{-1}(n)) \\
&= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f^*g))(f^{-1}(n)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f^*g))(f^{-1}(n)) \\
&= \mathcal{L}_X(f^*\mathcal{L}_{f_*Y}g)(f^{-1}(n)) - \mathcal{L}_Y(f^*\mathcal{L}_{f_*X}g)(f^{-1}(n)) \\
&= \mathcal{L}_{f_*X}(\mathcal{L}_{f_*Y}g)(n) - \mathcal{L}_{f_*Y}(\mathcal{L}_{f_*X}g)(n) = [\mathcal{L}_{f_*X}, \mathcal{L}_{f_*Y}]g(n) \\
&= \mathcal{L}_{[f_*X, f_*Y]}g(n).
\end{aligned}$$

Puesto que la derivada de Lie es biyectiva, y la igualdad anterior se tiene para toda g y para todo n, se sigue que $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$. □

3.1.2. Flujos de Campos Vectoriales

Definición 3.1.27. *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial. Una **trayectoria** de X es una curva $c : I \to M$ tal que $c'(t) = X_{c(t)}$ para todo $t \in I$. Si $c(0) = m$, decimos que c es una **trayectoria de X en** m.*

La definición anterior tiene sentido, ya que por definición, $X_{c(t)} \in T_{c(t)}M$ y $c'(t) \in T_{c(t)}M$, es decir, son vectores tangentes a M en $c(t)$. La siguiente proposición será de gran utilidad más adelante:

Proposición 3.1.28. *Sean $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ una curva. Si $c : I \to M$ es una trayectoria de X entonces*

$$(\mathcal{L}_X f)(c(t)) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t).$$

Demostración. De las definiciones tenemos que

$$(\mathcal{L}_X f)(c(t)) = X_{c(t)}(f) = c'(t)(f) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t).$$

□

Intuitivamente esta proposición nos dice que la derivada de Lie a lo largo de un campo mide la variación de una función a lo largo sus trayectorias.

Definición 3.1.29. *Si $f \in C^\infty(M)$, decimos que f es **integral primera** del campo X si f es constante a lo largo de cualquier trayectoria de X.*

Como consecuencia de la definición anterior, tenemos que f es integral primera del campo X si y sólo si $\mathcal{L}_X f = 0$.

En adelante, para cada curva c utilizaremos la notación $\dot{c}(t)$ para indicar su derivada en $t \in I$, y para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ utilizaremos la notación $X(m)$ para indicar el vector tangente en el punto $m \in M$.

Definición 3.1.30. *Sea M una n-variedad, $m_0 \in M$ y sea $v \in \mathfrak{X}(M)$. Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x), \qquad & x \in M \\ x(0) &= m_0, \qquad & m_0 \in M. \end{aligned} \tag{3.1}$$

*Una curva x en m_0 se llama **solución** del sistema (3.1) si $\dot{x}(t) = v(x(t))$ para todo $t \in I$, es decir, si x es una trayectoria del campo v. Al sistema (3.1) también se le llama **problema de Cauchy**.*

En esta sección mostraremos que muchos de los resultados sobre ecuaciones diferenciales que son válidos para sistemas en $\mathbb{R}^n$, también son válidos para sistemas en una variedad. Empezaremos por demostrar el Teorema de Existencia y Unicidad para Variedades:

Teorema 3.1.31 (Teorema de Existencia y Unicidad)**.** *Si M es una variedad diferencial, $m_0 \in M$ y $v \in \mathfrak{X}(M)$, entonces existe una única trayectoria de v en m_0, es decir, dos trayectorias de v en m_0 coinciden en la intersección de sus dominios. En otras palabras, el sistema 3.1 tiene una única solución.*

Demostración. Probaremos primero la parte de Existencia: Sea (U, φ) una vecindad coordenada de m_0. Para cada curva c en m_0 tenemos una curva $\tilde{c}$ en $\varphi(m_0)$ dada por $\tilde{c} = \varphi \circ c$, y para cada campo $X \in \mathfrak{X}(U)$ podemos inducir un campo $\tilde{X}$ en $\varphi(U)$ dado por $\tilde{X}(p) = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(X(\varphi^{-1}(p)))$.

Como consecuencia de la parte de existencia del Teorema de Existencia y Unicidad para $\mathbb{R}^n$, existe una trayectoria $\tilde{x}\big(t, \varphi(m_0)\big)$ de $\tilde{v}$ en m_0, y un intervalo abierto $I \ni 0$ donde $\tilde{x}\big(t, \varphi(m_0)\big)$ está definida. Definiendo $x(t, m_0) = \varphi^{-1}\big(\tilde{x}(t, \varphi(m_0))\big)$, tenemos que $x(t, m_0)$ es una trayectoria de v en m_0. En efecto, el vector de coordenadas de $\dot{x}(t, m_0)$ en la carta (U, φ) es precisamente $\frac{d}{dt}\tilde{x}(t, \varphi(m_0))$, y el vector de coordenadas de $v(x(t, m_0))$ es

$$\begin{aligned} d_{x(t,m_0)}\varphi\big(v(x(t, m_0))\big) &= d_{x(t,m_0)}\varphi\big(v(\varphi^{-1}(\varphi(x(t, m_0))))\big) = \tilde{v}(\varphi(x(t, m_0))) \\ &= \tilde{v}(\tilde{x}(t, m_0)) = \frac{d}{dt}\tilde{x}(t, \varphi(m_0)). \end{aligned}$$

Como $\dot{x}(t, m_0)$ y $v(x(t, m_0))$ son vectores tangentes en $T_{x(t,m_0)}M$ con el mismo vector de coordenadas, son iguales. Esto significa que en variedades también tenemos un Teorema de Existencia.

Observemos que lo único que hicimos para demostrar la parte de existencia es tomar una vecindad coordenada alrededor de m_0 y usar directamente que este resultado es válido en $\mathbb{R}^n$. Para demostrar la parte de Unicidad, empezaremos por probar el resultado de "Unicidad Local", utilizando una vecindad coordenada alrededor de m_0:

Lema 3.1.32. *Si $c_1 : I_1 \to M, c_2 : I_2 \to M$ son dos trayectorias de v en m_0 entonces existe $\epsilon > 0$ tal que c_1 y c_2 coinciden en $(-\epsilon, \epsilon)$.*

Demostración del Lema: Sea (U, φ) una vecindad coordenada de m_0. Puesto que c_1, c_2 son funciones diferenciables, existe $\epsilon > 0$ tal que la imagen de $(-\epsilon, \epsilon)$ bajo c_1 y c_2 está contenida en U. Puesto que c_1, c_2 son trayectorias de v en m_0, las curvas $\varphi \circ c_1|_{(-\epsilon,\epsilon)}, \varphi \circ c_2|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ son trayectorias de $\tilde{v}$ en $\varphi(m_0)$. Por la parte de Unicidad del Teorema de Existencia y Unicidad en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\varphi \circ c_1|_{(-\epsilon,\epsilon)} = \varphi \circ c_2|_{(-\epsilon,\epsilon)}$, es decir, $c_1|_{(-\epsilon,\epsilon)} = c_2|_{(-\epsilon,\epsilon)}$, como queríamos. $\bigtriangledown$

Sean $c_1 : I_1 \to M, c_2 : I_2 \to M$ trayectorias de v en m y sea $I = I_1 \cap I_2$ y sea $K = \{t \in I \mid c_1(t) = c_2(t)\}$. Probaremos que $K = I$ y habremos terminado. Puesto que c_1, c_2 son continuas y M es de Hausdorff, se tiene que K es cerrado en I. Si probamos que K es abierto, dado que I es conexo y no-vacío, tendríamos que $K = I$, por lo que nos abocaremos a probar esto último. Por el Lema anterior tenemos que K contiene una vecindad abierta de 0; para cada $t \in K$ consideremos ahora las curvas $c_i^t(s) = c_i(t+s), i = 1, 2$. Por construcción, c_1^t, c_2^t son trayectorias de v en $c_1^t(0) = c_1(t) = c_2(t) = c_2^t(0)$. Por el lema anterior, c_1^t y c_2^t coinciden en una vecindad de 0, es decir, c_1 y c_2 coinciden una vecindad U de t, probando que $t \in U \subset K$ y que t es punto interior de K. Esto demuestra que K es abierto, probando que $K = I$ y que c_1, c_2 coinciden en la intersección de sus dominios. $\square$

Como consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad, dos curvas soluciones distintas coinciden, pero su intervalo de definición puede ser distinto. Sea $m_0 \in M$ y sea

$$\mathcal{F} = \{I^\alpha \mid x^\alpha : I^\alpha \to M \text{ es trayectoria de } v \text{ por } m_0, \alpha \in \Lambda\},$$

y sea $I_{m_0} = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$ la unión de todos los dominios de las trayectorias por

m_0. Consideremos la curva $x : I_m \to M$ dada por

$$x(t) = x^\alpha(t), \text{ si } t \in I^\alpha.$$

Es inmediato comprobar que x está bien definida por Unicidad, y que además es una curva solución de (3.1).

Definición 3.1.33. *A I_{m_0} se le llama **intervalo máximo** de la solución del sistema (3.1).*

El siguiente resultado nos dice que también en variedades tenemos la propiedad de grupo:

Proposición 3.1.34. *Si $m \in M$, $s \in I_m$, $t \in I_{x(t,m)}$ y $t + s \in I_m$ entonces $x\big(t, x(s,m)\big) = x(t + s, m)$.*

Demostración. Sea $s \in I_m$ fijo y sea $c(t) = x(t + s, m)$. Sabemos que $x\big(t, x(s,m)\big)$ es la curva solución del sistema

$$\dot{x} = v(x),$$
$$x(0) = x(s,m),$$

y además sabemos que $c(0) = x(s,m) = x\big(0, x(s,m)\big)$. Por Unicidad, si demostramos que $v(c(t)) = c'(t)$ estaremos probando que $c(t)$ es también una trayectoria de v por $x(s,m)$. Observemos que

$$c'(t) = \frac{d}{dt}x(t + s, m) = \frac{d}{d\tau}x(\tau, m) = v(x(\tau, m)) = v(c(t)),$$

donde $\tau = t + s$. □

Definición 3.1.35. *Sea M una variedad y $v \in \mathfrak{X}(M)$. Un **flow box** de v para $m_0 \in M$ es una terna $(U_0, \epsilon, \Phi_{m_0})$, donde*

1.- $U_0 \subset M$ es una vecindad abierta de m_0 y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ o $\epsilon = +\infty$,

2.- $\Phi_{m_0} : U_0 \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una función suave,

3.- para cada $m \in U_0$, la curva $x : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ dada por $x(t) := \Phi_{m_0}(m, t)$ es una trayectoria del campo v en m.

4.- Si $\Phi^t_{m_0} : U_0 \to M$ se define por $\Phi^t_{m_0}(m) := \Phi_{m_0}(m, t)$ entonces para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\Phi^t_{m_0}(U_0)$ es abierto y $\Phi^t_{m_0}$ es un difeomorfismo en su imagen.

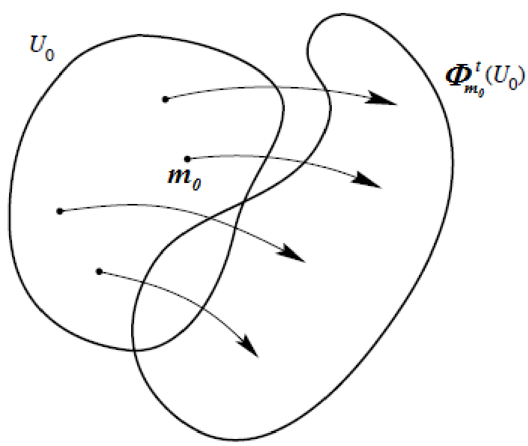
A la función Φ_{m_0} se le llama **flujo local**, ya que está definido solamente para un intervalo de tiempo pequeño en una vecindad de m_0. En términos de la definición anterior, la Proposición (3.1.2) puede escribirse como sigue:

Proposición 3.1.36. *Si* $(U_0, \epsilon, \Phi_{m_0})$ *es una terna que satisface las primeras tres condiciones de la definición anterior entonces para cada* $s, t \in \mathbb{R}$ *tales que* $s, t, t+s \in (-\epsilon, \epsilon)$ *se tiene que*

$$\Phi^s_{m_0} \circ \Phi^t_{m_0} = \Phi^{t+s}_{m_0}, \qquad \Phi^0_{m_0} = Id_{U_0}.$$

Teorema 3.1.37 (Teorema del Flow Box)**.** *Sea* $v \in \mathfrak{X}(M)$*. Si* $m_0 \in M$ *entonces existe un flow box para* m_0*. Si* $(U_0, \epsilon, \Phi_{m_0}), (U'_0, \epsilon', \Phi'_{m_0})$ *son dos flow boxes para* m_0 *entonces* Φ_{m_0} *y* Φ'_{m_0} *coinciden en* $(U_0 \cap U'_0) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$*, donde* $\varepsilon = \text{mín}\{\epsilon, \epsilon'\}$*.*

En [8, p. 246-247] podemos encontrar la demostración de este hecho.



Representación Gráfica de un Flow Box

El Teorema del Flow Box nos dice que la función $\Phi(m, t)$ dada por la trayectoria del campo v en m es diferenciable para un intervalo pequeño de tiempo. Esto lo hemos demostrado con ayuda de cartas locales.

Sea $v \in \mathfrak{X}(M)$. Consideremos el dominio $\mathcal{D}_v = \{(t, m) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_m\}$.

Proposición 3.1.38. *Sea* M *una variedad y* $v \in \mathfrak{X}(M)$*. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $M \times \{0\} \subset \mathcal{D}_v$,

2. $\mathcal{D}_v$ *es abierto en* $M \times \mathbb{R}$,

3. *Existe una única función $\Phi : \mathcal{D}_v \to M$ tal que la función $t \mapsto \Phi(m,t)$ es la trayectoria de v por m,*

4. *Para cada $(m,t) \in \mathcal{D}_v$ se tiene que $(\Phi_v(m,t), s) \in \mathcal{D}_v$ si y sólo si $(m, t+s) \in \mathcal{D}_v$. En este caso, $\Phi(m,t+s) = \Phi(\Phi(m,t), s)$.*

Este resultado puede consultarse con demostración en [8, p. 248-249].

Para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{D}_v^t = \{m \in M \mid t \in I_m\}$ es abierto en M, pues $\mathcal{D}_v$ es abierto y $\mathbb{R} \times M$ tiene la topología producto. Por la Proposición anterior, la función

$$\begin{aligned} \Phi^t : \mathcal{D}_v^t &\to M \\ m &\mapsto \Phi(t,m) \end{aligned}$$

es diferenciable. y $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ cuando dichas operaciones están definidas.

Definición 3.1.39. *A la función Φ se le llama **flujo** del campo v. De igual manera, a la familia de funciones $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ también se le llama el **flujo** del campo v.*

En adelante, utilizaremos la notación (U_0, ϵ, Φ) en vez de $(U_0, \epsilon, \Phi_{m_0})$ cuando nos refiramos a un flow box para $m_0 \in U_0$.

Sistemas no-Autónomos y Dependientes de Parámetros

Definición 3.1.40. *Un **campo vectorial dependiente del tiempo** es una función diferenciable $X : \mathbb{R} \times M \to TM$ tal que $X(t,m) \in T_mM$ para todo $(t,m) \in \mathbb{R} \times M$. De esta manera, la función $X_t(m) := X(t,m)$ es un campo vectorial en M para todo t. El **flujo dependiente del tiempo** $\Phi_{t,s}$ de X se define por la condición de que la función $t \mapsto \Phi_{t,s}(m)$ sea la **trayectoria** de X en m al tiempo $t = s$, es decir,*

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t,s}(m) = X(t, \Phi_{t,s}(m)), \qquad \Phi_{s,s} = Id_M.$$

Observemos que la definición anterior puede darse equivalentemente en los siguientes términos: un campo vectorial dependiente del tiempo es una función diferenciable $X : I \times M \to TM$ tal que $X(t,m) \in T_mM$ para todo $(t,m) \in I \times M$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Aunque el desarrollo posterior se hará considerando la primera definición, debemos tener en cuenta que esto mismo puede hacerse para cualquier intervalo.

Puesto que X es un campo que depende del tiempo, el flujo depende de un parámetro adicional: no sólo depende del punto inicial y del tiempo que recorras, sino que depende del tiempo a partir del cual empezamos a recorrer la trayectoria, ya que el valor del campo X es diferente según cambia este tiempo. Si X es un campo que No depende del tiempo, $\Phi_{t,s} = \Phi_{t-s}$.

Para campos vectoriales dependientes del tiempo podemos demostrar el Teorema de Existencia y Unicidad de trayectorias de la misma manera en que procedimos para los campos autónomos: sabemos que el resultado es verdadero para campos en $\mathbb{R}^n$, utilizando cartas probamos que el resultado es verdadero localmente y usando el resultado local probamos que se vale el resultado global.

La existencia y unicidad de trayectorias nos permite hablar también de "intervalos máximos de definición". Para cada $s \in \mathbb{R}$ y $m \in M$ sea

$$\mathcal{F}_s = \{I \mid x : I \to M \text{ es la trayectoria de } X \text{ por } m \text{ al tiempo } t = s\}.$$

El intervalo máximo de definición $I_m^s := \bigcup_{I \in \mathcal{F}_s} I$ es el conjunto maximal donde está definida la única trayectoria de X por m al tiempo $t = s$.

Proposición 3.1.41. *Para cualesquiera r, s, t se tiene que $\Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,r} = \Phi_{t,r}$.*

Demostración. Sea $m \in M$ y sean r, s fijos. Sea $x(t) = \Phi_{t,s}\big(\Phi_{s,r}(m)\big)$ y sea $y(t) = \Phi_{t,r}(m)$. Observemos que

$$\frac{dx}{dt} = X\big(t, \Phi_{t,s}\big(\Phi_{s,r}(m)\big)\big) = X\big(t, x(t)\big), \qquad x(s) = \Phi_{s,r}(m),$$

y que

$$\frac{dy}{dt} = X(t, \Phi_{t,r}(m)) = X\big(t, y(t)\big), \qquad y(s) = \Phi_{s,r}(m).$$

Por unicidad de trayectorias, se sigue que $x(t) = y(t)$ para todo t, es decir, $\Phi_{t,s}\big(\Phi_{s,r}(m)\big) = \Phi_{t,r}(m)$ para todo m. Puesto que $m \in M$ es arbitrario, tenemos el resultado. $\square$

Un campo vectorial dependiente del tiempo en una variedad n-dimensional puede convertirse en un campo vectorial autónomo en una variedad $n+1$-dimensional, como sigue:

Definición 3.1.42. *Sea $X : \mathbb{R} \times M \to TM$ un campo vectorial dependiente del tiempo definido en una variedad M. La **suspensión** $X' \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times M)$ del campo X se define por*

$$X'(t,m) = \big((t,1), X_t(m)\big) \in T_t\mathbb{R} \times T_mM \cong T_{(t,m)}(\mathbb{R} \times M).$$

Recordemos que, para cualesquiera dos variedades M, N, $T(N \times M)$ y $TN \times TM$ son difeomorfas. Además, podemos ver que por construcción, X' es diferenciable. El siguiente resultado nos da la relación existente entre el flujo de la suspensión X' de un campo dependiente del tiempo X_t con su flujo dependiente del tiempo:

Proposición 3.1.43. *Sea $\Phi_{t,s}$ el flujo dependiente del tiempo de campo X_t. El flujo Φ^t de la suspensión $X' \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times M)$ viene dado por*

$$\Phi^t(s,m) = \big(t+s, \Phi_{t+s,s}(m)\big).$$

Este hecho aparece demostrado en [8, p. 285].

La Proposición anterior es muy importante, ya que, al haber relacionado el flujo dependiente del tiempo de un campo vectorial con el flujo de un campo autónomo, podemos dar una versión no-autónoma de los teoremas y resultados que tenemos para campos vectoriales que no dependen del tiempo:

Definición 3.1.44. *Sea M una variedad y X un campo vectorial dependiente del tiempo. Un **flow box** de X para $m_0 \in M$ al tiempo $t = s$ es una terna $(U_0, \epsilon, \Phi_s^{m_0})$, donde*

1.- $U_0 \subset M$ es una vecindad abierta de m_0 y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ o $\epsilon = +\infty$,

2.- $\Phi_s^{m_0} : U_0 \times (s-\epsilon, s+\epsilon) \to M$ es una función suave,

3.- para cada $m \in U_0$, la curva $x : (s-\epsilon, s+\epsilon) \to M$ dada por $x(t) := \Phi_s^{m_0}(t,m)$ es una trayectoria del campo X en m,

4.- si $\Phi_{t,s}^{m_0} : U_0 \to M$ se define por $\Phi_{t,s}^{m_0}(m) := \Phi_s^{m_0}(t,m)$ entonces para cada $t \in (s-\epsilon, s+\epsilon)$, $\Phi_{t,s}^{m_0}(U_0)$ es abierto y $\Phi_{t,s}^{m_0}$ es un difeomorfismo en su imagen.

Como consecuencia de aplicar la Proposición anterior y el Teorema del Flow Box a la suspensión de X, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.45 (Teorema del Flow Box para campos dependientes del tiempo)**.** *Sea M una variedad y X un campo vectorial en M dependiente del tiempo. Si $m_0 \in M$ y $s \in \mathbb{R}$ entonces existe un flow box para m_0 al* *tiempo* $t = s$*. Si* $(U_0, \epsilon, \Phi_s^{m_0}), (V_0, \delta, \tilde{\Phi}_s^{m_0})$ *son dos flow boxes para* m_0 *al tiempo* $t = s$ *entonces* $\Phi_s^{m_0}$ *y* $\tilde{\Phi}_s^{m_0}$ *coinciden en* $(U_0 \cap V_0) \times (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$*, donde* $\varepsilon = \text{mín}\{\epsilon, \delta\}$*.*

Ahora, consideraremos campos que dependen "de manera suave" de parámetros.

Definición 3.1.46. *Sean* M, N *variedades diferenciales. Un* ***campo vectorial en*** M ***parametrizado por*** N *es una función diferenciable* $X : N \times M \to TM$ *tal que* $X(n, m) \in T_m M$ *para todo* $n \in N$*. De esta manera, la función* $X^n : M \to TM$ *dada por* $X^n(m) := X(n, m)$ *es un campo vectorial en* M *para todo* n*. El* ***flujo parametrizado por*** N *de* X *es la función*

$$\Phi : N \times M \times \mathbb{R} \to M,$$

tal que $t \mapsto \Phi(n, t, m)$ *es la trayectoria de* X^n *por el punto* m*.*

El objetivo de esta parte es demostrar que si X es un campo vectorial en M parametrizado por N y si Φ es su flujo parametrizado por N entonces Φ es una función diferenciable.

Definición 3.1.47. *Sea* X *un campo en* M *parametrizado por* N*. La* ***extensión*** *de* X *es el campo* $\hat{X} \in \mathfrak{X}(N \times M)$ *definido por*

$$\begin{aligned} \hat{X} &: N \times M \to T(N \times M) \\ \hat{X}(n, m) &= \big((n, 0), X^n(m)\big), \end{aligned}$$

donde $(n, 0) \in TN$ *denota al vector cero.*

Proposición 3.1.48. *Sea* X *un campo en* M *parametrizado por* N *y sea* Φ^n *su flujo parametrizado por* N*. Si* $\hat{X}$ *es la extensión de* X *y* $\hat{\Phi}$ *es el flujo de* $\hat{X}$ *entonces*

$$\hat{\Phi}\big(t, (n, m)\big) = \big(n, \Phi^n(t, m)\big).$$

Demostración. Sean $m \in M, n \in N$. Consideremos las curvas $c(t) = \hat{\Phi}\big(t, (n, m)\big)$ y $d(t) = \big(n, \Phi^n(t, m)\big)$. Para demostrar que $c(t) = d(t)$, probaremos que d también es trayectoria de $\hat{X}$ por (n, m). Observemos primero que $d(0) = \big(n, \Phi^n(0, m)\big) = (n, m)$, ya que Φ^n, al ser un flujo, es la identidad para $t = 0$. Por otro lado, $d(t) = \big(n, \Phi^n(t, m)\big)$, es decir, la primer componente de $d(t)$ es constante, lo que implica que la primer componente de $d'(t)$ es el vector cero en el punto n. Por ello,

$$\begin{aligned} d'(t) &= \left((n, 0), \frac{d}{dt}\Phi(n, t, m)\right) = \big((n, 0), X^n\big(\Phi^n(t, m)\big)\big) = \hat{X}(n, \Phi^n(t, m)) \\ &= \hat{X}(d(t)), \end{aligned}$$

lo cual prueba que d es la trayectoria de $\hat{X}$ que pasa por (n, m) y se cumple la igualdad anterior. $\square$

Como consecuencia de la demostración anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.49 (Teorema de Dependencia Suave de Parámetros)**.** *Si Φ es el flujo dependiente de N del campo X en M dependiente de N entonces Φ es diferenciable.*

Demostración. Por la proposición anterior, el flujo dependiente de N, Φ, es la segunda componente del flujo de la extensión $\hat{X}$. Como el flujo de un campo es diferenciable, Φ es también diferenciable. $\square$

Campos Completos y Grupos 1-paramétricos de Difeomorfismos

Es bastante deseable que, cuando trabajamos con un campo vectorial, sus trayectorias estén definidas para todo tiempo. Un campo con esa propiedad se llama **campo completo**. El concepto de campo completo está íntimamente ligado al de **grupo 1-paramétrico de difeomorfismos**, ya que existe una correspondencia biunívoca natural entre ambos conceptos, como veremos enseguida.

Definición 3.1.50. *Sea M una variedad. Un **grupo 1-paramétrico de difeomorfismos** es una familia de funciones $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que la función*

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$$

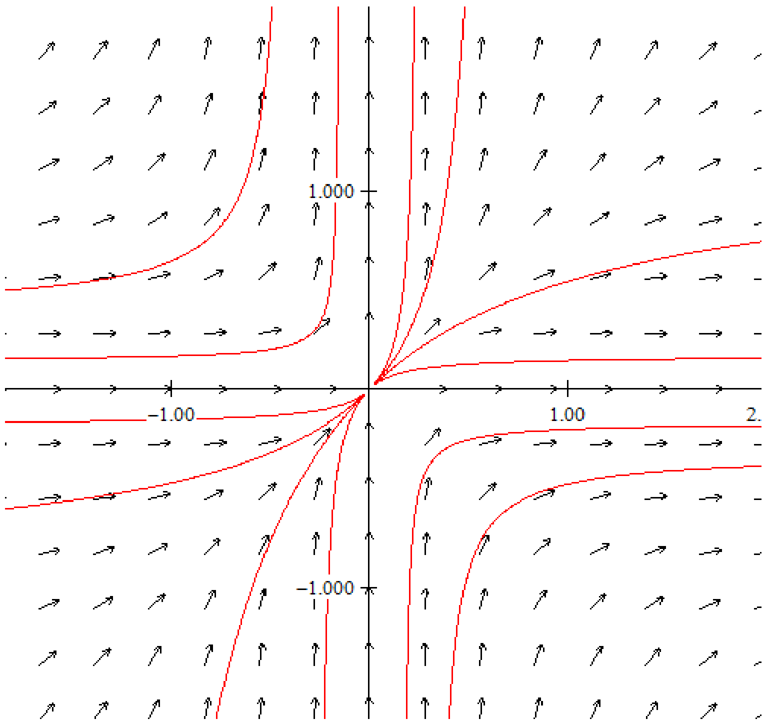
dada por $\Phi(t, m) = \Phi^t(m)$ es diferenciable y que para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$.

Definición 3.1.51. *Sea M una variedad y sea $v \in \mathfrak{X}(M)$. El campo v se llama **completo** si $I_m = \mathbb{R}$ para todo $m \in M$.*

Que un campo v no sea completo significa que existe una trayectoria c del campo v tal que dicha trayectoria diverge a infinito en un tiempo finito.

Ejemplo 3.1.52. *Consideremos la siguiente ecuación diferencial en el plano:*

$$\dot{x} = x^2,$$
$$\dot{y} = y^2,$$
$$\big(x(0), y(0)\big) = (-5, 3).$$



Utilizando separación de variables, obtenemos que las soluciones vienen dadas por

$$x(t) = \frac{1}{-5-t}, \qquad y(t) = \frac{1}{3-t}.$$

Como vemos, estas curvas con nuestras condiciones iniciales están definidas en $(-5,\infty)$ *y* $(-\infty,3)$*, respectivamente, es decir, la curva solución viene dada por* $(-5,3)$*. Esto demuestra que el campo* $v(x,y) = (x^2,y^2)$ *no es completo, porque su trayectoria por* $(-5,3)$ *no está definida para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Si v es completo entonces su flujo Φ está bien definido en todo $\mathbb{R} \times M$. Como consecuencia de las propiedades del flujo, tenemos que:

Proposición 3.1.53. *Si* $v \in \mathfrak{X}(M)$ *es completo entonces su flujo* $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos de* M*.*

Además, si tenemos un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos podemos construir un campo vectorial cuyo flujo coincide con dicho grupo:

Proposición 3.1.54. *Existe una correspondencia biunívoca entre campos* $v \in \mathfrak{X}(M)$ *y grupos 1-paramétricos de difeomorfismos* $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$*.*

Demostración. Vimos que para cada campo v existe un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos de M dado por $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Recíprocamente, si $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos construiremos un campo cuyo flujo coincida con $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Sea $v \in \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$v(m) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi^t(m).$$

La definición anterior tiene sentido, ya que para cada $m \in M$, la función $c(t) = \Phi^t(m)$ es una curva en m. Probaremos que el flujo de v es $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$, es decir, que $v(\Phi^t(m)) = \frac{d}{dt}\Phi^t(m)$. Observemos que

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(m) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi^{s+t}(m) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi^s(\Phi^t(m)) = v(\Phi^t(m)),$$

por lo que tenemos una correspondencia biunívoca. □

El siguiente criterio es muy importante, ya que nos da una condición suficiente para que un campo v sea completo:

Proposición 3.1.55. *Sea $v \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $x : I \to M$ una trayectoria del campo v, donde I es su intervalo máximo de definición. Si, para cualquier intervalo abierto finito $(a, b) \subset I$ existe un conjunto compacto K en M tal que la traza $x(a, b)$ de la curva en ese intervalo sea un subconjunto de K, entonces $I = \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $(a, b) \subset I$ un intervalo finito, y sea K el conjunto compacto que contiene a la traza de la curva en dicho intervalo. Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que toma valores en (a, b) convergente a b. Puesto que $(x(t_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que toma valores en el conjunto compacto K, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura que dicha sucesión posee una subsucesión $(x(t_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $p \in K$. Por el Teorema del Flow Box, existe una vecindad abierta U de p y $\epsilon > 0$ tales que $(-\epsilon, \epsilon) \times U \subset \mathcal{D}_v$. Puesto que $(x(t_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ converge a p, existe N tal que para todo $k > N$ se tiene que $x(t_{n_k}) \in U$. Por otro lado, como $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a b, existe R tal que para todo $k > R$ se tiene que $t_k \in (b - \epsilon/3, b)$. Esto significa que para $k > \text{máx}\{N, R\}$, $x(t_{n_k}) \in U$ y $t_{n_k} \in (b - \epsilon/3, b)$. Sin embargo, por definición de U y ϵ, $x(t_{n_k} + \epsilon/2)$ está bien definida, pero $t_{n_k} + \epsilon/2 > b$, por lo que x está definida también en b y $b \in I$. De manera similar se puede demostrar que $a \in I$. Puesto que (a, b) es un intervalo arbitrario, $I = \mathbb{R}$, como queríamos. □

En particular, si un campo vectorial v no es completo, existe una trayectoria $x : I \to M$ y una sucesión de tiempos $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente alguno de los extremos de I, tal que $\big(x(t_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ diverge a infinito.

3.2. Campos Completos y Funciones Propias

Existen muchos criterios que son útiles en diferentes casos para garantizar que un campo vectorial sea completo. En [7, p. 6-7] encontramos el siguiente criterio y su demostración, para campos vectoriales definidos en $\mathbb{R}^n$:

Ejemplo 3.2.1. *Si $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^n$, y si existen constantes reales c_1, c_2 tales que*

$$||v(x)|| \leq c_1||x|| + c_2$$

entonces v es completo.

Intuitivamente, la desigualdad anterior nos dice que el campo no crece arbitrariamente, sino que viene acotado por un crecimiento lineal. Un criterio, que se puede pensar como una generalización de este resultado, fue dada por William B. Gordon en [9]. Una versión muy parecida aparece en [8, p. 250] y, como veremos más adelante, las ideas de las demostraciones son muy similares:

Teorema 3.2.2 (Gordon)**.** *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial suave definido en una variedad diferencial. Si existen $E, f \in C^{\infty}(M)$, con f es propia, y constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\begin{aligned} |X(E(x))| &\leq \alpha |E(x)|, \\ |f(x)| &\leq \beta |E(x)|, \end{aligned}$$

entonces el campo X es completo.

Teorema 3.2.3 (Abraham-Marsden)**.** *Sea M una variedad de n-dimensional y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si existe una función propia $H \in C^{\infty}(M)$ y dos constantes $c_1 > 0, c_2 \geq 0$, tales que para cada $x \in M$ se tiene que*

$$|\mathcal{L}_X H(x)| \leq c_1 |H(x)| + c_2,$$

entonces X es completo.

El objetivo de esta sección será demostrar estos teoremas, para lo cual, necesitamos desarrollar varios resultados previos: Posteriormente utilizaremos estas generalizaciones para garantizar cuándo un campo hamiltoniano es completo.

Lema 3.2.4 (Gronwall)**.** *Sean* $\delta_1, \delta_3 > 0$ *y sean* $\phi, \psi : [-T, T] \to \mathbb{R}$ *funciones no-negativas. Si*

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + \delta_3 \tag{3.2}$$

entonces $\phi(t) \leq \delta_3 \exp\left(\delta_1 \int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)$.

Demostración del Lema: Puesto que $\delta_1, \delta_3 > 0$ y $\phi, \psi \geq 0$, el lado derecho de (3.2) es positivo. Por tanto, podemos pasar dividiendo dicho término y obtener

$$\frac{\phi(t)}{\delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + \delta_3} < 1.$$

Ahora, multiplicaremos a ambos lados por $\delta_1\psi(t)$, el cual es un número no-negativo:

$$\frac{\delta_1\phi(t)\psi(t)}{\delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + \delta_3} \leq \delta_1\psi(t).$$

Integrando a ambos lados con respecto a t tenemos que

$$\int_0^s \frac{\delta_1\phi(t)\psi(t)dt}{\delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + \delta_3} \leq \int_0^s \delta_1\psi(t)dt.$$

Sea $f(t) = \delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + \delta_3$. Observemos que el lado izquierdo de la desigualdad puede escribirse como

$$\begin{aligned}\int_0^s \frac{\delta_1\phi(t)\psi(t)dt}{\delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + \delta_3} = \int_0^s \frac{f'(t)dt}{f(t)} &= \ln(f(s)) - \ln(f(0)) \\ &= \ln(f(s)/f(0)) = \ln(f(s)/\delta_3).\end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\ln(f(s)/\delta_3) \leq \int_0^s \delta_1\psi(t)dt,$$

es decir,

$$f(s) \leq \delta_3 \exp\left(\int_0^s \delta_1\psi(t)dt\right).$$

Finalmente, $f(s) \geq \phi(s)$, pues esta es precisamente la desigualdad (3.2), por lo que

$$\phi(s) \leq f(s) \leq \delta_3 \exp\left(\int_0^s \delta_1 \psi(t) dt\right),$$

tal y como queríamos. $\bigtriangledown$

Como consecuencia del lema de Gronwall tenemos que

Corolario 3.2.5. *Si $\delta_3 = 0$ en la desigualdad (3.2) entonces $\phi(t) = 0$ $\forall t$.*

Demostración. Si $\phi(t) \leq \delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau) d\tau$ entonces, para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $\phi(t) \leq \delta_1 \int_0^t \psi(\tau)\phi(\tau) d\tau + \epsilon$. Por el lema de Gronwall, para cada $t \in [-T, T]$ tenemos que

$$\phi(t) \leq \epsilon e^{\int_0^t \delta_1 \psi(\tau) d\tau}.$$

Puesto que ϵ es arbitrario, tenemos que $\phi(t) = 0$. Puesto que $t \in [-T, T]$ es también arbitrario, se sigue que $\phi \equiv 0$. □

De lo anterior se sigue que la desigualdad de Gronwall es verdadera para todo $\delta_3 \geq 0$.

Proposición 3.2.6 (Desigualdad Débil de Gronwall)**.** *Sean $\delta_1 > 0, \delta_2 \geq 0, \delta_3 \geq 0$. Si*

$$\phi(t) \leq \delta_2 t + \delta_1 \int_0^t \phi(s) ds + \delta_3$$

entonces

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right) e^{\delta_1 t} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Demostración. Sea $f(t) = \phi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1}$. La desigualdad anterior se reescribe como

$$f(t) \leq \delta_2 t + \delta_1 \int_0^t \left(f(s) - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

la cual resulta en

$$f(t) \leq \delta_1 \int_0^t f(s) ds + \left(\delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right).$$

Aplicando el lema de Gronwall en este caso, obtenemos

$$\phi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1} = f(t) \leq \left(\delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) e^{\delta_1 \int_0^t ds} = \left(\delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) e^{\delta_1 t},$$

lo que implica el resultado. □

Ahora, ya estamos listos para demostrar las dos versiones de los teoremas anteriores:

Teorema 3.2.7. *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial suave definido en una variedad diferencial. Si existen $E, f \in C^\infty(M)$, con f es propia, y constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_X E(x)| &\leq \alpha |E(x)|, \\ |f(x)| &\leq \beta |E(x)|, \end{aligned}$$

entonces el campo X es completo.

Demostración. La idea de la demostración es suponer que el campo no es completo, y hacer la composición de f con una trayectoria x del campo que no esté definida para todo tiempo. Esto define una función real de variable real. La derivada de Lie $\mathcal{L}_X f$ en $x(t)$ puede expresarse en términos de la derivada de $(f \circ x)(t)$, por lo que, utilizando la desigualdad de Gronwall y la segunda desigualdad de las hipótesis, la función $f \circ x$ deberá de estar acotada. Puesto que la trayectoria se va a infinito en tiempo finito, podemos encontrar una sucesión $(t_n)_{n=1}^\infty$ de tiempos que converjan a uno de los extremos del intervalo tal que $\big((f \circ x)(t_n)\big)_{n=1}^\infty$ diverge a infinito, ya que f es propia. Sin embargo, esto nos dará una contradicción porque $f \circ x$ debía estar acotada. Sin más preámbulo, procedamos a la demostración:

Supongamos que X no es completo, es decir, que existe $m \in M$ tal que la trayectoria $x : I_m \to M$ del campo X por m no está definida en todo $\mathbb{R}$. Si I_m es su intervalo máximo de definición, digamos $I_m = (a, b)$, supongamos primero que $b < \infty$. Sea $h = E \circ x : (a, b) \to \mathbb{R}$. Observemos que, por ser x una trayectoria de X,

$$(\mathcal{L}_X E)(x(t)) = \frac{d}{dt} E(x(t)) = \frac{dh}{dt}.$$

Esto implica que

$$\left| \frac{dh}{dt} \right| = |(\mathcal{L}_X E)(x(t))| \leq \alpha |E(x(t))| = \alpha |h|.$$

Integrando en el intervalo $[0, t] \subset (a, b)$ tenemos que

$$|h(t)| - |h(0)| \leq |h(t) - h(0)| = \left| \int_0^t \frac{dh}{dt} dt \right| \leq \int_0^t \left| \frac{dh}{dt} \right| dt \leq \alpha \int_0^t |h| dt,$$

es decir, $|h(t)| \leq \alpha \int_0^t |h| dt + |h(0)|$. Por la desigualdad de Gronwall,

$$|h(t)| \leq |h(0)| e^{\alpha |t|}.$$

Ahora, la segunda desigualdad de nuestras hipótesis implica que

$$|f(x(t))| \leq \beta |E(x(t))| = \beta |h(t)| \leq \beta |h(0)| e^{\alpha |t|}. \tag{3.3}$$

Como $b < \infty$, el lado derecho de la desigualdad es acotado por $|h(0)|e^{\alpha b}$ si $t > 0$, por lo que $f \circ x$ es acotada en $\mathbb{R}^+$. Puesto que $I_m = (a, b)$ es el intervalo máximo de definición de $x(t)$ y $b < \infty$, existe una sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos que converge por la izquierda a b, tal que $(x(t_n))_{n=1}^{\infty}$ diverge a infinito, en virtud de la Proposición 3.1.55. Puesto que f es propia, $(f(x(t_n)))_{n=1}^{\infty}$ también diverge a infinito. Sin embargo, esta sucesión toma valores en $\mathbb{R}$, y como diverge a infinito, dicha sucesión es no-acotada. Esto contradice que $f \circ x$ sea acotada, por lo que $b = \infty$.

De la misma manera, si $a > -\infty$ podemos tomar a la sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge por la derecha a a de manera que conste sólo de términos negativos. Por ello, el lado izquierdo de (3.3) va a estar acotado por $|h(0)|e^{-\alpha a}$ y con argumentos similares llegamos a la misma contradicción, por lo que $a = \infty$. □

Teorema 3.2.8. *Sea M una variedad de n-dimensional y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si existe una función propia $H \in C^{\infty}(M)$ y dos constantes $c_1 > 0, c_2 \geq 0$, tales que para cada $x \in M$ se tiene que*

$$|\mathcal{L}_X H(x)| \leq c_1 |H(x)| + c_2,$$

entonces X es completo.

Demostración. Supongamos que X no es completo y sea $x : I_m \to M$ una trayectoria del campo X por m, donde $I_m = (a, b)$ es su intervalo máximo de definición. Supongamos que $b < \infty$. Sea $\phi = E \circ x : (a, b) \to \mathbb{R}$. Observemos que, por ser x una trayectoria de X,

$$(\mathcal{L}_X H)(x(t)) = \frac{d}{dt} H(x(t)) = \frac{d\phi}{dt}.$$

Esto implica que

$$\left| \frac{d\phi}{dt} \right| = |(\mathcal{L}_X H)(x(t))| \leq \alpha |H(x(t))| + \beta = \alpha |\phi| + \beta.$$

Integrando en el intervalo $[0, t]$ tenemos que

$$|\phi(t)| - |\phi(0)| \leq |\phi(t) - \phi(0)| = \left| \int_0^t \frac{d\phi}{dt} dt \right| \leq \int_0^t \left| \frac{d\phi}{dt} \right| dt \leq \alpha \int_0^t |\phi| dt + \beta t,$$

es decir, $|\phi(t)| \leq \alpha \int_0^t |\phi| dt + \beta t + |\phi(0)|$. Por la desigualdad débil de Gronwall:

$$|\phi(t)| \leq \left(\frac{\beta}{\alpha} + |\phi(0)| \right) e^{\alpha |t|} - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Como $b < \infty$, el lado derecho de la desigualdad es acotado por $\left(\frac{\beta}{\alpha} + |\phi(0)| \right) e^{\alpha b} - \frac{\beta}{\alpha}$ si $t > 0$, por lo que $\phi = H \circ x$ es acotada. Puesto que $I_m = (a, b)$ es el intervalo máximo de definición de $x(t)$ y $b < \infty$, existe una sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge por la izquierda a b tal que $(x(t_n))_{n=1}^{\infty}$ diverge a infinito, en virtud de la Proposición 3.1.55. Puesto que H es propia, $(H(x(t_n)))_{n=1}^{\infty}$ también diverge a infinito. Sin embargo, esta sucesión toma valores en $\mathbb{R}$, y como diverge a infinito, dicha sucesión es no-acotada. Esto contradice que $H \circ x$ sea acotada, por lo que $b = \infty$.

De la misma manera, si $a > -\infty$ podemos tomar a la sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge por la derecha a a de manera que conste sólo de términos negativos. Por ello, el lado izquierdo de (3.3) va a estar acotado por $\left(\frac{\beta}{\alpha} + |\phi(0)| \right) e^{-\alpha a} - \frac{\beta}{\alpha}$ y con argumentos similares llegamos a la misma contradicción, por lo que $a = \infty$. □

Como vemos, ambos criterios son muy parecidos, vienen dados en términos de la derivada de Lie y funciones propias, y sus demostraciones son muy similares. El segundo criterio es mejor para realizar demostraciones teóricas, pero el primero es más útil en la práctica: si conocemos una función E que no sea propia, tal que $|L_X E(x)| \leq |E(x)|$, tenemos libertad de buscar una función f que sí lo sea y que satisfaga la segunda hipótesis del primer teorema.

Como caso particular del teorema anterior, tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3.2.9. *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si existe una función propia $f \in C^{\infty}(M)$ tal que $\mathcal{L}_X f$ es acotada entonces X es completo. En particular, si X tiene una integral primera que es propia entonces el campo es completo.*

Corolario 3.2.10. *Si M es una variedad compacta entonces todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es completo.*

Demostración. Puesto que M es compacto, toda función diferenciable $f \in C^\infty(M)$ es propia. En particular, si f es la función constante igual a 1 es también propia. Puesto que f es constante tenemos que $\mathcal{L}_X f = 0$. Tomando $c_1 = c_2 = 1$ tenemos que se satisfacen las hipótesis del segundo teorema y X es completo. $\square$

Ejemplo 3.2.11 (Campos Gradiente)**.** *Sea (M, g) una variedad riemanniana y $f \in C^\infty(M)$. El **campo gradiente** $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ se define como el único campo vectorial tal que*

$$g_x(\nabla f(x), v_x) = v_x(f), \qquad \forall v_x \in T_xM, x \in M.$$

Observemos que la igualdad anterior puede reescribirse como $g(\nabla f, X) = df(X)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. La Proposición riemann campo forma del apéndice nos asegura que, en virtud de esta última igualdad, ∇f está bien definido.

La siguiente propiedad nos dice que los campos gradiente generalizan a los campos gradiente usuales: Si $f, h \in C^\infty(M)$ y $x \in M$ entonces

$$\begin{aligned} g_x\big(\nabla(f \cdot h)(x), v_x\big) &= v_x(f \cdot h) = v_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot v_x(g) \\ &= g_x(\nabla f(x), v_x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_x(\nabla g(x), v_x) \\ &= g_x\big(\nabla f(x) \cdot g(x) + f(x)\nabla g(x), v_x\big), \end{aligned}$$

por lo que

$$\nabla(f \cdot h) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g.$$

Otra propiedad que podemos demostrar acerca de los campos gradiente es la siguiente: Si $f, h \in C^\infty(M)$ entonces $\mathcal{L}_{\nabla h} f = g(\nabla h, \nabla f)$. En efecto, por definición,

$$g(\nabla h, \nabla f)(x) = \nabla h(x)(f) = \mathcal{L}_{\nabla h} f(x).$$

Por lo anterior, f es una integral primera de ∇h si y sólo si $g(\nabla h, \nabla f) = 0$, esto es, si los campos ∇h, ∇f son g-ortogonales.

Aplicando el teorema anterior, y los resultados anteriores para campos gradiente, podemos obtener el siguiente resultado: si $f, h \in C^\infty(M)$ donde f es propia, y si existen constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$|g(\nabla h, \nabla f)(x)| \leq A|f(x)| + B \qquad \forall x \in M$$

entonces el campo gradiente ∇h es completo. En particular, si existe $f \in C^\infty(M)$ propia tal que $g(\nabla h, \nabla f)$ es acotada entonces ∇h es completo, por ejemplo, si ∇f es g-ortogonal a ∇h.

3.3. El Caso de Sistemas Hamiltonianos

Formalismo Hamiltoniano

Definición 3.3.1. *Sea $\mathbb{R}^{2n} = \{p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)\}$ el espacio euclidiano $2n$-dimensional. Un **sistema autónomo Hamiltoniano con** n **grados de libertad** es un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma*

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}(p,q), \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(p,q), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.4}$$

*donde $H = H(p,q) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. A H se le llama el **Hamiltoniano** del sistema (3.4). Los vectores p y q se llaman **momento** y **posición**. A $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_q$ se le llama **espacio de fases** y a $\mathbb{R}^n_q$ **espacio de configuraciones**.*

Observemos que cada sistema Hamiltoniano queda totalmente determinado por $H(p,q)$.

Los sistemas hamiltonianos son de gran importancia ya que los modelos más importantes de la mecánica clásica puede expresarse como un sistema hamiltoniano, como veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.3.2 (Segunda Ley de Newton)**.** *El movimiento de una partícula de masa $m > 0$ moviéndose en un campo potencial $V(q)$, $q \in \mathbb{R}^3$, viene descrito por las* ecuaciones de Newton

$$\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Si q es la posición, $\dot{q}$ es la velocidad y $p = m\dot{q}$ es el momento. Por ello, las ecuaciones de Newton anteriores pueden reescribirse como un sistema Hamiltoniano (3.4) con Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m} p_i^2 + V(q).$$

*La función H es la **energía total del sistema**, con su parte cinética y su parte potencial.*

Ejemplo 3.3.3 (Ecuaciones de Lorentz)**.** *Consideremos un electrón de masa m con carga e moviéndose en un campo magnético*

$$B = \mathrm{rot} A := \left(\frac{\partial A_3}{\partial q_2} - \frac{\partial A_2}{\partial q_3}, \frac{\partial A_1}{\partial q_3} - \frac{\partial A_3}{\partial q_1}, \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right)$$

donde $A = (A_1(q), A_2(q), A_3(q))$. *Las* ecuaciones de Lorentz

$$m\ddot{q} = \frac{e}{c}\dot{q} \times B$$

describen el movimiento de un electrón en dicho campo. Introduciendo el vector de momento $p = m\dot{q} + \frac{e}{c}A(q)$*, las ecuaciones de Lorentz pueden reescribirse como un sistema Hamiltoniano, con*

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i(q)\right)^2.$$

Campos Hamiltonianos en $\mathbb{R}^{2n}$ y el Corchete de Poisson Clásico

El expresar un sistema particular como un sistema hamiltoniano es de gran importancia, ya que podemos estudiar los campos hamiltonianos en general, y aplicar dichos resultados a sistemas como los de los ejemplos anteriores.

Introduciendo las coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = (p, q)$, el sistema 3.4 se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{3.5}$$

donde $\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}\right)$ y

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \qquad I \text{ es la matriz identidad } n \times n.$$

Notemos que $J^T = -J$, que $\det(J) = 1$ y que $J^2 = -I_{2n}$. Expresando nuestro sistema 3.5 por $\frac{dx}{dt} = v_H(x)$, tenemos que

$$v_H(x) = J\frac{\partial H}{\partial x}(x).$$

En este caso, decimos que $v_H \in \mathfrak{X}(R^{2n})$ es un campo hamiltoniano.

Definición 3.3.4. *Si* $v_H = J\frac{\partial H}{\partial x}$*, decimos que* v_H *es un* ***campo hamiltoniano*** *asociado a la función* $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$*.*

Ahora, introduciremos el corchete de Poisson clásico y estudiaremos su relación con los campos hamiltonianos:

Definición 3.3.5. *Sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_q)$. El **corchete de Poisson** $\{f, g\}$ de las funciones f, g se define por*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Utilizando las coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$, el corchete de Poisson puede escribirse de manera más compacta como

$$\{f, g\} = \langle J \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} \rangle,$$

donde $\langle , \rangle$ es el producto interior usual en $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposición 3.3.6. *El corchete de Poisson clásico satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $k \in \mathbb{R}$:*

1. *$\mathbb{R}$-bilinealidad: $\{f + k \cdot g, h\} = \{f, h\} + k\{g, h\}$.*
2. *Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.*
3. *Identidad de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$.*
4. *Regla de Leibniz: $\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}$.*

La cuarta propiedad nos dice que $\{,\}$ es una derivación del producto usual de funciones, y la tercera propiedad nos dice que $\{,\}$ es una derivación del mismo corchete $\{,\}$.

Demostración. La primera propiedad se debe a la $\mathbb{R}$-bilinealidad de $\langle , \rangle$ y a la $\mathbb{R}$-linealidad de la derivada y del producto de matrices.

Para probar la segunda propiedad notemos que

$$\{f, g\} = \langle J \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial g}{\partial x}, J \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = \langle J^T \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = -\langle J \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = -\{g, f\}.$$

La segunda igualdad se debe a la simetría de $\langle , \rangle$, la tercera igualdad es la definición de traspuesta, y la cuarta igualdad es por la antisimetría de J.

Por la antisimetría del corchete, la tercera propiedad se puede reescribir como

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

Para demostrarla, observemos que

$$
\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}\right)\right)\\
&= \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}\right),\\
\{g,\{h,f\}\} &= \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial q_i}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial p_i}\right),\\
\{h,\{f,g\}\} &= \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}\left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}+\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}+\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}-\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}+\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\right).
\end{aligned}
$$

Sumando y cancelando obtenemos que $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$. Para probar la cuarta propiedad, notemos que

$$
\begin{aligned}
\{f,g\cdot h\}(x) &= \langle J\frac{\partial f}{\partial x}(x),\frac{\partial g\cdot h}{\partial x}(x)\rangle\\
&= \langle J\frac{\partial f}{\partial x}(x),\frac{\partial g}{\partial x}(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot\frac{\partial h}{\partial x}(x)\rangle\\
&= \langle J\frac{\partial f}{\partial x}(x),\frac{\partial g}{\partial x}(x)\rangle\cdot h(x)+g(x)\cdot\langle J\frac{\partial f}{\partial x}(x),\frac{\partial h}{\partial x}(x)\rangle\\
&= \{f,g\}(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot\{f,h\}(x),
\end{aligned}
$$

probando que $\{f,g\cdot h\}=\{f,g\}\cdot h+g\cdot\{f,h\}$. □

La siguiente Proposición demuestra la relación entre el corchete de Poisson clásico y los campos vectoriales hamiltonianos:

Proposición 3.3.7. *Si $H,f\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ entonces $\mathcal{L}_{v_H}(f)=\{H,f\}$.*

Demostración. Por definición,

$$\mathcal{L}_{v_H}(f) = \langle v_H, \nabla f \rangle = \langle J\frac{\partial H}{\partial x}, \nabla f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \{H, f\}.$$

□

Variedades de Poisson

Ahora desarrollaremos el formalismo con el que se estudian los campos hamiltonianos para generalizar la noción de sistema hamiltoniano a variedades.

Puesto que en una variedad general NO tenemos coordenadas globales, no podemos definir un corchete de Poisson de la misma manera en que lo hicimos en $\mathbb{R}^{2n}$. Observemos que, al definir un corchete de Poisson $\{,\}$ en una variedad M, podremos definir a los campos hamiltonianos como aquellos campos $v \in \mathfrak{X}(M)$ para los cuales existe una función $H \in C^\infty(M)$ tal que $\mathcal{L}_v(f) = \{H, f\}$ $\forall f \in C^\infty(M)$. De esta manera, un sistema hamiltoniano en M será aquél que viene dado por un campo hamiltoniano.

Consideremos de nuevo el álgebra $C^\infty(M)$ de las funciones diferenciables en M, con M una variedad diferencial.

Definición 3.3.8. *Un* ***corchete de Poisson*** *en $C^\infty(M)$ es una función*

$$\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. *$\mathbb{R}$-bilinealidad: $\{f + k \cdot g, h\} = \{f, h\} + k\{g, h\}$ para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $k \in \mathbb{R}$.*
2. *Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$ para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$.*
3. *Identidad de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$ para $f, g, h \in C^\infty(M)$.*
4. *Regla de Leibniz: $\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}$ para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(M)$.*

Al par $\big(C^\infty(M), \{,\}\big)$ se le llama ***álgebra de Poisson****. Si un corchete de Poisson está definido sólo para un abierto $U \subset M$, decimos que $\{,\}$ es un corchete de Poisson local.*

Las primeras tres propiedades hacen de $\big(C^\infty(M), \{,\}\big)$ una $\mathbb{R}$-álgebra de Lie. La cuarta propiedad nos dice que $\{,\}$ es una derivación del producto usual de funciones, y la tercera propiedad nos dice que $\{,\}$ es una derivación del mismo corchete $\{,\}$.

Definición 3.3.9. *Una* ***variedad de Poisson*** *es un par* $\big(P, \{,\}\big)$, *donde* P *es una variedad diferencial y* $\{,\}$ *es un corchete de Poisson en* $C^\infty(P)$.

Ejemplo 3.3.10. *Por lo visto anteriormente,* $\big(\mathbb{R}^{2n}, \{,\}\big)$, *con el corchete de Poisson clásico, es una variedad de Poisson.*

Ejemplo 3.3.11. *Sea* (U, φ) *una carta en la variedad* $2n$*-dimensional* M, *y sean* $\{\varphi^i\}_{i=1}^{2n}$ *las funciones coordenadas. Si* $\{,\} : C^\infty(U) \times C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ *viene dado por*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi^{i+n}} - \frac{\partial f}{\partial \varphi^{i+n}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi^i}$$

entonces $\{,\}$ *es un corchete de Poisson local también llamado* ***corchete de Poisson clásico****.*

Definición 3.3.12. *Sea* $(M, \{,\})$ *una variedad de Poisson. El campo* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *se llama* ***hamiltoniano*** *con respecto al corchete* $\{,\}$ *si existe una función* $H \in C^\infty(M)$ *tal que* $\mathcal{L}_X f = \{H, f\}$ *para toda* $f \in C^\infty(M)$. *Al conjunto de todos los campos hamiltonianos se le denota por* $\mathfrak{X}_H(M)$.

Observemos que, para cada $H \in C^\infty(M)$,

$$\{H, f \cdot g + kh\} = \{H, f \cdot g\} + k\{H, h\} = \{H, f\} \cdot g + f \cdot \{H, g\} + k\{H, h\},$$

lo cual demuestra que $f \mapsto \{H, f\}$ es una $\mathbb{R}$-derivación de $C^\infty(M)$. Puesto que la derivada de Lie es biyectiva, existe un único campo X_H tal que $\mathcal{L}_{X_H} = \{H, \cdot\}$. De esta manera, para cada $H \in C^\infty(M)$, existe un único campo hamiltoniano X_H.

Definición 3.3.13. *Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama* ***hamiltoniano*** *si el campo que lo define es un campo hamiltoniano.*

Si $\dot{x} = X_H(x), x(0) = m$ es un sistema hamiltoniano entonces la función H es siempre una integral primera del sistema. En efecto,

$$\mathcal{L}_{X_H} H = \{H, H\} = 0$$

debido a la antisimetría del corchete de Poisson. A la función H se le conoce como la **energía total**, **hamiltoniano** o **función de Hamilton** del sistema.

Proposición 3.3.14. *Sea* $(M, \{,\})$ *una variedad de Poisson. El par* $\big(\mathfrak{X}_H(M), [,]\big)$ *es una subálgebra de Lie de* $\big(\mathfrak{X}(M), [,]\big)$.

Demostración. Probaremos primero que, para cualesquiera $H_1, H_2 \in C^\infty(M)$ se tiene que $X_{\{H_1,H_2\}} = [X_{H_1}, X_{H_2}]$. Por la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_{\{H_1,H_2\}}} f &= \{\{H_1, H_2\}, f\} = -\{H_2, \{H_1, f\}\} + \{H_1, \{H_2, f\}\} \\
&= -\{H_2, \mathcal{L}_{X_{H_1}} f\} + \{H_1, \mathcal{L}_{X_{H_2}} f\} \\
&= -\mathcal{L}_{X_{H_2}}(\mathcal{L}_{X_{H_1}} f) + \mathcal{L}_{X_{H_1}}(\mathcal{L}_{X_{H_2}} f) = [\mathcal{L}_{X_{H_1}}, \mathcal{L}_{X_{H_2}}](f) \\
&= \mathcal{L}_{[X_{H_1}, X_{H_2}]} f.
\end{aligned}$$

Puesto que f es arbitraria y $\mathcal{L}$ es biyectiva, tenemos que $[X_{H_1}, X_{H_2}] = X_{\{H_1,H_2\}}$. Esto demuestra que el corchete de dos campos hamiltonianos es de nuevo un campo hamiltoniano, por ello, $\big(\mathfrak{X}_H(M), [,]\big)$ es una subálgebra de Lie de $\big(\mathfrak{X}(M), [,]\big)$. □

Funciones Hamiltonianas Propias

Ahora, daremos un criterio muy importante para determinar cuándo un campo Hamiltoniano es completo:

Teorema 3.3.15. *Sea* $(P, \{,\})$ *una variedad de Poisson* n*-dimensional. Si* $H \in C^\infty(P)$ *es propia entonces* X_H *es completo.*

Demostración. Recordemos que $|\mathcal{L}_{X_H} H(m)| = 0 \leq |H(m)|$. Por la proposición anterior, como H es propia, se sigue que X_H es completo. □

Ejemplo 3.3.16 (Sistemas Hamiltonianos en Variedades Riemannianas)**.** *consideremos una variedad riemanniana* (M, g), *y sean* (q, p) *las coordenadas de* T^*M. *Un* ***potencial*** $V \in C^\infty(M)$ *da origen a un hamiltoniano* $H = T + V$, *donde* $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g^{ij} p_i p_j$ *es la* ***energía cinética*** *y* $V = V(q)$ *es la energía potencial. Para que el campo hamiltoniano* v_H *sea completo, necesitamos que* H *sea propia. Sin embargo, si* V *es inferiormente acotada y propia,* H *también es propia, ya que*

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g^{ij} p_i p_j + V.$$

Capítulo 4

Criterios de Trivialización de Haces Fibrados

En este capítulo estudiaremos el concepto de haz fibrado. Un haz fibrado es una submersión sobreyectiva entre dos variedades, lo cual automáticamente nos define la distribución vertical, es decir, una familia de subespacios del espacio tangente que viene dado como el kernel de la diferencial en cada punto.

Una clase especial de haces fibrados son los haces fibrados localmente triviales. El objetivo de este capítulo es dar condiciones suficientes para que un haz fibrado sea trivial, por medio de las funciones propias. Para ello desarrollaremos la teoría de Conexiones de Ehresmann, levantamientos horizontales y transporte paralelo como herramientas principales.

4.1. Haces Fibrados

4.1.1. Distribuciones en Variedades

Definición 4.1.1. *Sea M una variedad de dimensión m, sea TM su haz tangente y $\tau_M : TM \to M$ la proyección fibrada tangente. Un subconjunto $S \subset TM$ se llama* ***subhaz k-dimensional*** *(o* ***distribución regular****) si satisface las siguientes tres condiciones:*

1. *$\tau_M(S) = M$. En adelante, denotaremos por $\tau_S := \tau_M|_S$ a la restricción de la proyección fibrada tangente al subconjunto S.*

2. *Para cada $p \in M$, el conjunto $S_p := \tau_S^{-1}(p) \subset T_pM$ es un subespacio vectorial de T_pM dimensión k.*

3. *Para cada $p_0 \in M$ existe una vecindad abierta U de p_0 y $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{X}(U)$ tales que $S_p = span\{v_1(p), \ldots, v_k(p)\}$ para todo $p \in U$.*

Intuitivamente, una distribución regular S es una función que a cada punto $p \in M$ le asigna un subespacio S_p del espacio tangente T_pM. La condición 2 es la de regularidad, ya que el subespacio siempre es de la misma dimensión, y la condición 3 es la de suavidad, es decir, intuitivamente esta asignación punto-subespacio es "de manera suave".

De la definición anterior, es claro que $k \leq m$, ya que la dimensión de un subespacio es siempre menor o igual a la del espacio total. En adelante, el término "distribución" significará "distribución regular".

Definición 4.1.2. *Sean S^1, S^2 dos distribuciones en M tales que $S^1_p \cap S^2_p = \{0_p\}$ para cada $p \in M$. La* ***suma directa*** *$S^1 \oplus S^2$ de dichas distribuciones se define por $(S^1 \oplus S^2)_p = S^1_p \oplus S^2_p$.*

La suma directa de dos distribuciones se define como la suma directa de sus subespacios en cada punto. Esto está bien definido ya que la suma directa de dos subespacios que se intersecan en el vector 0 solamente está bien definida.

Es inmediato comprobar que si S^1, S^2 son distribuciones regulares de dimensiones k_1, k_2, respectivamente, si su suma directa está bien definida entonces $S^1 \oplus S^2$ es una distribución regular de dimensión $k_1 + k_2$. En efecto, la dimensión de una suma directa es igual a la suma de las dimensiones, por lo que se satisface la condición de regularidad. Finalmente, para ver que se satisface la condición de suavidad notemos lo siguiente: para cada $p \in M$ y para cada $i = 1, 2$, existe U_i y campos vectoriales $v^i_1, \ldots, v^i_{k_i} \in \mathfrak{X}(U_i)$ tales que $S^i_p = span\{v^i_1(p), \ldots, v^i_{k_i}(p)\}$ para todo $p \in U_i$. Si $U = U_1 \cap U_2$ y

$$v_j = \begin{cases} v^1_j \text{ si } j \leq k_1 \\ v^2_{j-k_1} \text{ si } j > k_1 \end{cases}$$

entonces el abierto U y los campos $v_1, \ldots, v_{k_1+k_2} \in \mathfrak{X}(U)$ satisfacen la condición de suavidad para $S^1 \oplus S^2$.

Definición 4.1.3. *Decimos que la distribución S es* ***involutiva*** *si los campos $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{X}(U)$ de la condición 3 siempre pueden tomarse de tal manera que $[v_i, v_j](p) \in S_p \ \forall p \in U$.*

Definición 4.1.4. *Una función diferenciable $X : M \to S$ se llama* ***sección*** *del subhaz S si $\tau_S \circ X = id_M$. En otras palabras, una sección del subhaz S es un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_m \in S_m \forall m \in M$. En este caso, decimos que X es un* ***campo vectorial tangente*** *al subhaz S. Al conjunto de secciones del subhaz S lo denotaremos por* $\sec(S)$.

Puesto que S_m es un espacio vectorial, $\sec(S)$ es un $C^\infty(M)$-módulo.

4.1.2. Definición de Haces Fibrados y sus Propiedades

Definición 4.1.5. *Un **haz fibrado** es una terna (E, π, B), donde $\pi : E \to B$ es una submersión sobreyectiva. E se llama **espacio total**, B se llama **espacio base** y π se llama **proyección**.*

De la definición anterior se sigue inmediatamente que E, B son variedades diferenciales y que π es una función diferenciable de rango constante igual a $\dim B$. Por el Teorema del Valor Regular, la fibra $\pi^{-1}(b) \subset E$ tiene estructura de subvariedad cerrada de dimensión $\dim E - \dim B$. En adelante denotaremos $E_b = \pi^{-1}(b)$.

Al espacio total E se le suele llamar *espacio fibrado*, ya que E es la unión de todas las fibras.

Definición 4.1.6. *Sea (E, π, B) un haz fibrado. Decimos que dicho haz es **localmente trivial**, o que es una **fibración**, si existe una variedad diferencial F con la siguiente propiedad: para cada $b_0 \in B$ existe una vecindad abierta U_{b_0} de b_0 y un difeomorfismo*

$$\psi_{b_0} : E_{U_{b_0}} \to U_{b_0} \times F$$

*tal que $\mathrm{pr}_1 \circ \psi_{b_0} = \pi$. Decimos que (E, π, B) es un haz fibrado **globalmente trivial**, o simplemente decimos que es **trivial**, si existe una variedad diferencial F y un difeomorfismo*

$$\psi : E \to B \times F$$

*tal que $\mathrm{pr}_1 \circ \psi = \pi$. A F se le llama la **fibra típica**.*

Ejemplo 4.1.7. *Haz Fibrado Vectorial.*

Ejemplo 4.1.8. *τ_M en el ejemplo 2.2.2 es un haz fibrado localmente trivial con fibra típica igual a $\mathbb{R}^n$, ya que, como vimos, es una submersión sobreyectiva. Para probar que es una fibración consideremos para cada $m_0 \in M$ una vecindad coordenada (U, φ), y consideremos la carta $(TU, T\varphi)$ para TM. Recordemos que $TU = \tau_M^{-1}(U) = TM_U$ y que*

$$T\varphi : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

es difeomorfismo. Como $\varphi : U \to \varphi(U)$ es también difeomorfismo, se sigue que la función $g : U \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ dada por $(m, v) \mapsto (\varphi(m), v)$ es *un difeomorfismo. Por ello,* $\psi : \tau_M^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ *dada por* $\psi = g \circ T\varphi$ *es difeomorfismo. Además,* $\mathrm{pr}_1 \circ \psi(v_m) = \mathrm{pr}_1(m, v) = m = \tau_M(v_m)$*, probando que* $\tau_M : TM \to M$ *es un haz fibrado localmente trivial.*

Ejemplo 4.1.9. *En el ejemplo anterior, consideremos* $M = \mathbb{S}^2$ *la esfera de dimensión 2. En el ejemplo anterior probamos que* $(T\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{S}^2}, \mathbb{S}^2)$ *es una fibración, ahora veremos que no es trivial. Supongamos que existe un difeomorfismo*

$$\psi : T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^n$$

tal que $\mathrm{pr}_1 \circ \psi = \tau_{\mathbb{S}^2}$*. Consideremos la función* $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^n$ *dada por* $f(m) = \big(m, e^1\big)$*. Sea* $X : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$ *dada por* $X = \psi^{-1} \circ f$*. Esta función es diferenciable, además,*

$$\tau_{\mathbb{S}^2} \circ X(m) = \big(\tau_{\mathbb{S}^2} \circ \psi^{-1} \circ f\big)(m) = \tau_{\mathbb{S}^2}(\psi^{-1}(m, e^1)) = \mathrm{pr}_1(m, e^1) = m,$$

ya que de la igualdad $\mathrm{pr}_1 \circ \psi = \tau_{\mathbb{S}^2}$ *podemos desprender que* $\tau_{\mathbb{S}^2} \circ \psi^{-1} = \mathrm{pr}_1$*. Lo anterior implica que* X *es un campo vectorial suave en* $\mathbb{S}^2$*. Por construcción, este campo localmente viene dado por* $x \mapsto (x, e^1)$*. Esto quiere decir que este campo no se anula nunca, ya que su parte principal es* e^1*. Sin embargo, esto es imposible, ya que es conocido que todo campo suave sobre la esfera debe tener por lo menos algún punto crítico. Para consultar una demostración de este hecho, se puede consultar la referencia [2, p. 521-523].*

De la definición de haz fibrado localmente trivial se sigue que, para cada $b \in U$,

$$\mathrm{pr}_1(\psi_{b_0}(E_b)) = \pi(E_b) = \{b\},$$

por lo que $\psi_{b_0}(E_b) = \{b\} \times F$. Esto quiere decir que cada fibra E_b es difeomorfa a F para cada $b \in U$.

Definición 4.1.10. *Sean* (E, π, B) *y* (E', π', B) *dos haces fibrados sobre la misma base* B*. Un* ***morfismo de fibrados*** *es una función diferenciable* $\phi : E \to E'$ *tal que* $\pi' \circ \phi = \pi$*. Si* ϕ *es un difeomorfismo,* ϕ *se llama* ***isomorfismo de fibrados****.*

Observemos que, para cada $b \in B$, $\phi(E_b) = E'_b$. En efecto, si $m \in E_b$ entonces $\pi'\big(\phi(m)\big) = \pi(m) = b$, por lo que $\phi(m) \in E'_b$, probando que $\phi(E_b) = E'_b$. También notemos que (E, π, B) es un haz fibrado globalmente trivial si y sólo si existe un isomorfismo de fibrados ϕ entre (E, π, B) y $(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$.

Proposición 4.1.11. *Sean (E, π, B) y (E', π', B) dos haces fibrados sobre la misma base B. Una función $\phi : E \to E'$ es un isomorfismo de fibrados si y sólo si ϕ es difeomorfismo y si, para cada $b \in B$, la restricción $\phi|_{E_b} : E_b \to E'_b$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Si $m \in E$ entonces $m \in E_{\mathcal{P}(m)}$. Si ϕ satisface la segunda condición entonces $\phi|_{E_{\pi(m)}} : E_{\pi(m)} \to E'_{\pi(m)}$ y $\phi(m) \in E'_{\pi(m)}$. Por ello, $\pi'(\phi(m)) = \pi(m)$, y como $m \in E$ es arbitrario, $\pi' \circ \phi = \pi$, probando que ϕ es un morfismo de fibrados. Recíprocamente, si ϕ es un morfismo de fibrados □

Ejemplo 4.1.12. *Cuando tenemos un haz fibrado, éste automáticamente define una distribución. Para cada $m \in E$, consideremos la fibra $E_{\pi(m)}$. Puesto que $E_{\pi(m)}$ es subvariedad de E, tenemos que $T_m E_{\pi(m)}$ es un subespacio de $T_m E$. A la función $\mathbb{V}(m) = \mathbb{V}_m := T_m E_{\pi(m)}$ le llamamos **distribución vertical**.*

Es fácil ver que $\mathbb{V}$ es una distribución suave y regular. Observemos que

$$\mathrm{dim}\mathbb{V}_m = \mathrm{dim}T_m E_{\pi(m)} = \mathrm{dim}E_{\pi(m)} = \mathrm{dim}E - \mathrm{dim}B,$$

por lo que $\mathbb{V}$ es regular de dimensión $\mathrm{dim}E - \mathrm{dim}B$. Para ver que $\mathbb{V}$ es suave, notemos lo siguiente: Para cada $m_0 \in E$, por el Teorema del Rango, existen cartas (U, φ), (V, ξ) con $m_0 \in U$, $f(U) \subset V$ que satisfacen las condiciones dadas por dicho teorema. De la demostración del Teorema del Valor Regular, (U, φ) tiene la propiedad de subvariedad para el conjunto $E_{\pi(m)}$, para todo $m \in U$. Esto implica que los campos locales $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\}_{i=1}^k$ definidos en U, donde $k = \mathrm{dim}E - \mathrm{dim}B$, son tangentes a $E_{\pi(m)}$, y al ser linealmente independientes, se sigue que $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_m\}_{i=1}^k$ generan a $T_m E_{\pi(m)}$ para cada $m \in U$. Esto demuestra que la distribución es suave.

Observemos ahora lo siguiente: si (U, φ) es una carta y $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_m\}_{i=1}^n$ son los campos coordenados entonces $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Esto implica que la distribución $\mathbb{V}$ es involutiva.

Notemos finalmente que $\mathbb{V}_m = \mathrm{Ker}(d_m \pi)$ para todo $m \in M$. En efecto, para cada $[c]_m \in \mathbb{V}_m$, se tiene que c es una curva en m totalmente contenida en $E_\pi(m)$, por lo que $\pi \circ c$ es igual a la función constante $\pi(m)$:

$$(d_m \pi)[c]_m = [\pi \circ c]_{\pi(m)} = [\pi(m)]_{\pi(m)} = [c_{\pi(m),0}]_{\pi(m)},$$

probando que $\mathbb{V}_m \subset \mathrm{Ker}(d_m \pi)$. La igualdad se debe a que ambos subespacios de $T_m E$ tiene dimensión igual a $\mathrm{dim}E - \mathrm{dim}B$.

El ejemplo anterior es muy importante, porque con él construiremos las Conexiones de Ehresmann.

Notación: Vimos en el ejemplo anterior que para cada $m_0 \in E$ podemos considerar coordenadas locales (U, φ) y coordenadas (V, ξ) de $\pi(m_0)$ tales que para cada $m \in U$, (U, φ) tiene la propiedad de subvariedad para $E_{\pi(m)}$. Esto quiere decir que los primeros k elementos del conjunto $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\big|_m\}_{i=1}^n$ generan a $T_m E_{\pi(m)}$ para $m \in U$, y los restantes construyen el resto del espacio tangente en m. En adelante, denotaremos $r := \dim B$, $k + r := n = \dim E$; las coordenadas locales (V, ξ) las denotaremos por $(\xi^1, \ldots, \xi^r)$ y las coordenadas locales (U, φ) por

$$\left(x^1, \ldots, x^k, \xi^1, \ldots, \xi^r\right).$$

Aquí hemos hecho una identificación entre las coordenadas $(\xi^1, \ldots, \xi^r)$ en B y las últimas r coordenadas en E de la forma $\xi^j := \pi \circ \xi^j$. De esta manera, la función π en estas coordenadas toma la forma $\tilde{\pi}(x, \xi) = \xi$ y $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ es un campo tangente a las fibras $E_{\pi(m)}$ para cada $m \in U, \alpha \in \{1, \ldots, k\}$.

Definición 4.1.13. *A (U, φ) dada por el ejemplo anterior, le llamaremos **coordenadas verticalmente adaptadas**.*

Definición 4.1.14. *Un campo $X \in \mathfrak{X}(E)$ se llama **vertical** si $X \in \mathrm{sec}(\mathbb{V})$, es decir, si X es tangente a $\mathbb{V}$. En adelante, denotaremos $\mathfrak{X}^{\mathbb{V}}(E) := \mathrm{sec}(\mathbb{V})$.*

Observemos que $\mathfrak{X}^{\mathbb{V}}(E)$ es un submódulo de $\mathfrak{X}(E)$. Más aún, es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(E)$, ya que $\mathbb{V}$ es una distribución involutiva.

Por definición de $\mathbb{V}$ tenemos que $X \in \mathfrak{X}(E)$ es tangente a $\mathbb{V}$ si y sólo si X es tangente a $E_{\pi(m)}$ para todo $m \in E$. Mostraremos ahora otro criterio para decidir cuándo un campo X es vertical.

Proposición 4.1.15. *$X \in \mathfrak{X}^{\mathbb{V}}(E)$ si y sólo si $\mathcal{L}_X(f \circ \pi) = 0$ para todo $f \in C^\infty(B)$.*

Demostración. Si $X \in \mathfrak{X}^{\mathbb{V}}(E)$ entonces para cada $m_0 \in E$, X es tangente a $E_{\pi(m_0)}$. Puesto que $f \circ \pi$ es constante en $E_{\pi(m_0)}$, $\mathcal{L}_X(f \circ \pi)|_{E_{\pi(m_0)}} = 0$. Finalmente, como E es unión de todas las fibras, tenemos que $\mathcal{L}_X(f \circ \pi) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{L}_X(f \circ \pi) = 0 \forall f \in C^\infty(B)$. Sea $m_0 \in E$ y consideremos las coordenadas (U, φ) verticalmente adaptadas para m_0. En estas coordenadas, escribimos

$$X = \sum_{\alpha=1}^{k} X_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sum_{j=1}^{r} Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}.$$

Ahora, veamos que $\mathcal{L}_X \xi^j = \mathcal{L}_X(\xi^j \circ \pi) = 0$, por lo que $Y_j = \mathcal{L}_X \xi^j = 0$ y $X = \sum_{\alpha=1}^{k} X_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, es decir, X es generado por campos verticales, probando que es vertical. $\square$

4.2. Concepto de Conexión de Ehresmann

Definición 4.2.1. *Una **conexión de Ehresmann** es un subhaz $\mathbb{H}$ en E tal que $\mathbb{H}_m \oplus \mathbb{V}_m = T_m E$ para todo $m \in E$. A $\mathbb{H}$ le llamamos **distribución horizontal**.*

Dicho de otra forma, $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = TE$. De la definición se sigue que $\mathbb{H}_m \cap \mathbb{V}_m = \{0_m\}$ y que $\mathbb{H}$ tiene dimensión igual a $\dim B$.

Definición 4.2.2. *Para cada $m \in E$ consideremos la función $(\mathrm{pr}_1)_m : T_m E = \mathbb{H}_m \oplus \mathbb{V}_m \to \mathbb{H}_m$ dada por $(\mathrm{pr}_1)_m(w_m + v_m) = w_m$, y consideremos la función $(\mathrm{pr}_2)_m : T_m E = \mathbb{H}_m \oplus \mathbb{V}_m \to \mathbb{V}_m$ dada por $(\mathrm{pr}_2)_m(w_m + v_m) = v_m$. También consideremos la función $\mathrm{pr}_1 : TE \to \mathbb{H}$ dada por $\mathrm{pr}_1(w_m + v_m) = w_m$ y la función $\mathrm{pr}_2 : TE \to \mathbb{V}$ dada por $\mathrm{pr}_2(w_m + v_m) = v_m$. A dichas funciones les llamamos **proyecciones** en la primera y segunda componente, según el caso.*

Evidentemente, para cada $m \in E$ las proyecciones son funciones lineales.

Proposición 4.2.3. *Las funciones $\mathrm{pr}_1 : TE \to \mathbb{H}$ y $\mathrm{pr}_2 : TE \to \mathbb{V}$ son diferenciables.*

Demostración. Probaremos que pr_1 es diferenciable, la otra demostración es completamente análoga. Sea $w_p + v_p \in TE$ un vector tangente arbitrario, con $w_p \in \mathbb{H}_p$ y $v_p \in \mathbb{V}_p$. Puesto que $\mathbb{H}, \mathbb{V}$ son subhaces, existe una carta (U, φ) con $p \in U$ y campos vectoriales $w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{X}(U)$ tales que

$$\mathbb{H}_m = span\{w_1(m), \ldots, w_r(m)\}, \qquad \mathbb{V}_m = span\{v_1(m), \ldots, v_k(m)\} \ \ \forall m \in U.$$

La carta $(TU, T\varphi)$ tiene la propiedad de subvariedad para $\mathbb{H}$, y tanto $w_p + v_p$ como w_p pertenecen a TU. En dicha carta, las coordenadas de $w_m + v_m$ son $\big(\varphi(m), w^1, \ldots, w^r, v^1, \ldots, v^k\big)$ y las coordenadas de w_m son $\big(\varphi(m), w^1, \ldots, w^r, 0, \ldots, 0\big)$. Esta es una proyección común y corriente en espacios euclidianos, por lo que es una función diferenciable. $\square$

La demostración anterior sirve en general no sólo para conexiones de Ehresmann, sino también para cualquier par de distribuciones S^1, S^2 tales que $S^1 \oplus S^2 = TE$. De igual manera, la siguiente proposición puede generalizarse para ese caso:

Proposición 4.2.4. *Sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann en E. Todo campo $X \in \mathfrak{X}(E)$ se descompone de manera única como*

$$X = X^{hor} + X^{ver},$$

donde $X^{hor}, X^{ver} \in \mathfrak{X}(E)$ son tales que, para todo $m \in E$, $X^{hor}_m \in \mathbb{H}_m, X^{ver}_m \in \mathbb{V}_m$.

Demostración. Sea $m \in E$. Como $\mathbb{H}, \mathbb{V}$ son distribuciones suaves, existe una vecindad U de m tal que $\mathbb{V} = \operatorname{span}\{v^1, \ldots, v^k\}$ y $\mathbb{H} = \operatorname{span}\{w^1, \ldots, w^r\}$ en U. Puesto que $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = TE$, tenemos que $\{v^1, \ldots, v^k, w^1, \ldots, w^r\}$ es una base de campos vectoriales en U. Por ello,

$$X|_U = \sum_{i=1}^{k} a_i v^i + \sum_{i=1}^{r} b_j w^j.$$

Es fácil ver que si definimos $X^{hor} = \sum_{i=1}^{r} b_j w^j$ y si definimos $X^{ver} = \sum_{i=1}^{k} a_i v^i$ en la vecindad U de m, tendremos que X^{hor} y X^{ver} satisfacen las condiciones del problema. Puesto que $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = TE$, una segunda representación en otra vecindad U' de m deberá coincidir al final con la primera, por lo que X^{hor} y X^{ver} están bien definidos, es decir, no dependen de la carta que elijamos para definirlos. $\square$

No es difícil ver que como definición alternativa para X^{hor} y X^{ver} pudimos haber dado la siguiente:

$$X^{hor} := \mathrm{pr}_1 \circ X, \qquad X^{ver} := \mathrm{pr}_2 \circ X.$$

En virtud de la proposición anterior tenemos la siguiente definición:

Definición 4.2.5. *Sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann. Un campo $X \in \mathfrak{X}(E)$ se llama **horizontal** si $X^{ver} = 0$. Al conjunto de todos los campos horizontales en E lo denotaremos por $\mathfrak{X}^{\mathbb{H}}(E)$.*

Puesto que $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = TE$, $\mathfrak{X}(E) = \mathfrak{X}^{\mathbb{H}}(E) \oplus \mathfrak{X}^{\mathbb{V}}(E)$, gracias a la Proposición 4.2.4. Es inmediato comprobar que X es vertical si y sólo si $X^{hor} = 0$. En general, $\mathfrak{X}^{\mathbb{H}}(E)$ **no es una** subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}^{\mathbb{H}}(E)$, como veremos más adelante, a diferencia de $\mathfrak{X}^{\mathbb{V}}(E)$, la cual sabemos que sí lo es.

Ahora daremos una manera alternativa de definir las conexiones de Ehresmann:

Definición 4.2.6. *Una **1-forma valuada vectorial** en $\mathbb{V}$ es una función $\Gamma : TE \to \mathbb{V}$ de clase C^∞ tal que para cada $m \in E$, la función $\Gamma_m := \Gamma|_{T_mE} : T_mE \to \mathbb{V}_m$ es lineal. Al conjunto de las 1-formas valuadas vectorial en $\mathbb{V}$ se le denota por $\Omega^1(E;\mathbb{V})$.*

Proposición 4.2.7. *Existe una correspondencia canónica entre las distribuciones horizontales y las 1-formas valuadas vectorial que poseen la siguiente propiedad:*

$$\Gamma(v_m) = v_m \qquad \forall v_m \in \mathbb{V}_m, m \in E. \tag{4.1}$$

Demostración. Sea $\mathbb{H}$ una distribución horizontal en E y consideremos la 1-forma valuada vectorial en $\mathbb{V}$ definida por

$$\Gamma_{\mathbb{H}} = \mathrm{pr}_2.$$

Puesto que $(\mathrm{pr}_2)_m$ es lineal, $\Gamma_{\mathbb{H}}$ es una 1-forma valuada vectorial en $\mathbb{V}$ que satisface la propiedad (4.1), ya que $\mathrm{pr}_2(v_m) = v_m$ $\forall v_m \in \mathbb{V}$. Observemos que,

$$\mathrm{Ker}(\Gamma_{\mathbb{H}})_m = \{v_m+w_m \mid (\mathrm{pr}_2)_m(v_m+w_m) = 0\} = \{v_m+w_m \mid v_m = 0\} = \{w_m\} = \mathbb{H}_m,$$

por lo que $\mathbb{H} = \mathrm{Ker}\Gamma_{\mathbb{H}}$.

Ahora, si Γ es una 1-forma valuada vectorial que satisface (4.1), definimos la distribución $\mathbb{H}_\Gamma$ como

$$(\mathbb{H}_\Gamma)_m = \mathrm{Ker}\Gamma_m \qquad \forall m \in E.$$

Sea $m \in E$. Puesto que $\Gamma_m : T_mE \to \mathbb{V}_m$ satisface $\Gamma_m(\mathbb{V}_m) = \mathbb{V}_m$, es decir, es sobreyectiva, su kernel debe tener dimensión igual a la diferencia de las dimensiones, por lo que, para probar que $(\mathbb{H}_\Gamma)_m \oplus \mathbb{V}_m = T_mE$, basta demostrar que $(\mathbb{H}_\Gamma)_m \cap \mathbb{V}_m = \{0_m\}$ para cada $m \in E$. Si $v_m \in (\mathbb{H}_\Gamma)_m \cap \mathbb{V}_m$ entonces $\Gamma_m(v_m) = v_m$ porque $v_m \in \mathbb{V}$, pero $\Gamma_m(v_m) = 0$ ya que $v_m \in (\mathbb{H}_\Gamma)_m = \mathrm{Ker}\Gamma_m$. Por ello, $v_m = 0$, como queríamos.

Ahora probaremos que, en efecto, $\mathbb{H}_\Gamma$ es una distribución suave. Sea $m_0 \in E$ y sea (U, φ) las coordenadas verticalmente adaptadas para m_0. Puesto que $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ es un campo vertical para $\alpha = 1, \ldots, k$, tenemos que

$$\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Puesto que Γ toma sólo valores verticales y $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\}$ es una base local de campos vectoriales tal que $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ genera la parte vertical, se tiene que la 1-forma valuada vectorial Γ toma la siguiente representación local

$$\Gamma = \sum_{\nu=1}^{k} \Gamma^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

donde Γ^ν es una 1-forma usual. Puesto que $\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, tenemos la igualdad

$$\Gamma^\nu = dx^\nu + \sum_{j=1}^{r} \Gamma^\nu_j(\xi, x) d\xi^j$$

Definamos, pues, la siguiente familia de campos vectoriales locales:

$$w_i := \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \sum_{\alpha=1}^{k} \Gamma^\alpha_i(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Observemos que

$$\Gamma^\nu(w_i) = \Gamma^\nu \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \right) - \sum_{\alpha=1}^{k} \Gamma^\alpha_i(\xi, x) \Gamma^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) = \Gamma^\nu_i(\xi, x) - \Gamma^\nu_i(\xi, x) = 0$$

por lo que $\Gamma(w_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ y $w_i \in \mathrm{Ker}\Gamma$. Ahora, probaremos que $\{w_1(\xi, x), \ldots, w_r(\xi, x)\}$ es un conjunto linealmente en $T_m E$ independiente para cada (ξ, x). Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i(\xi, x).$$

Por definición de w_i tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i(\xi, x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\xi, x) - \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Gamma^\alpha_i(\xi, x) \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\xi, x).$$

Puesto que $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\}$ es una base local de campos vectoriales se tiene que los vectores $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\xi, x), \frac{\partial}{\partial \xi^j}(\xi, x)\}$ son linealmente independientes, por lo que los coeficientes de la expresión de arriba son cero y $\lambda_i = 0$ para cada i, probando que $\{w_1(\xi, x), \ldots, w_r(\xi, x)\}$ es un conjunto linealmente en $T_m E$ independiente para cada (ξ, x).

Lo anterior demuestra que se satisface la condición 3 de suavidad para el kernel de la 1-forma valuada vectorial Γ, por lo que $\mathbb{H}_\Gamma$ en efecto es una distribución. $\square$

Por lo anterior, una conexión de Ehresmann puede definirse como una 1-forma valuada vectorial Γ con valores en $\mathbb{V}$ tal que $\Gamma(v_m) = v_m \ \forall v_m \in \mathbb{V}$. Como consecuencia de lo anterior tenemos que

Corolario 4.2.8. *Sea Γ la 1-forma de la conexión de Ehresmann $\mathbb{H}$ asociada al haz fibrado $\pi : E \to B$. Si $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right)$ son los campos coordenados asociados a coordenadas verticalmente adaptadas entonces Γ toma la representación*

$$\Gamma = \sum_{\nu=1}^{k} \Gamma^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

donde Γ^ν es la 1-forma

$$\Gamma^\nu = dx^\nu + \sum_{j=1}^{r} \Gamma^\nu_j(\xi, x) d\xi^j$$

Definición 4.2.9. *Sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann. Si $\Gamma_\mathbb{H}$ se define como en la demostración de la Proposición anterior, a $\Gamma_\mathbb{H}$ se le llama la* ***1-forma de la conexión****.*

Definición 4.2.10. *Sea $\pi : E \to B$ una submersión sobreyectiva. Decimos que $X \in \mathfrak{X}(E)$ está* ***π-relacionado*** *con $v \in \mathfrak{X}(B)$ si el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{array}{ccccc} & TE & \xrightarrow{d\pi} & TB & \\ X & \uparrow & & \uparrow & v \\ & E & \xrightarrow{\pi} & B & \end{array}$$

esto es, si $d\pi \circ X = v \circ \pi$.

Proposición 4.2.11. *Si $X \in \mathfrak{X}(E)$ y $v \in \mathfrak{X}(B)$ están π-relacionados entonces, para toda $f \in C^\infty(B)$ se tiene que $\mathcal{L}_X(f \circ \pi) = \mathcal{L}_v f \circ \pi$.*

Demostración. Para cada $m \in E$, tenemos que

$$\mathcal{L}_X(f \circ \pi)(m) = X_m(f \circ \pi) = (d_m \pi X_m)f = (d\pi \circ X)_m f = (v \circ \pi)_m f = v_{\pi(m)} f = (\mathcal{L}_v f \circ \pi)(m)$$

□

La definición anterior en términos de campos vectoriales la podemos reescribir en términos de sus flujos:

Proposición 4.2.12. *Sean $X \in \mathfrak{X}(E), v \in \mathfrak{X}(B)$ campos vectoriales, y sean $\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ sus respectivos flujos. X está π-relacionado con v si y sólo si $\pi \circ \phi^t = \varphi^t \circ \pi$.*

Demostración. Consideremos un punto $m \in E$. Por definición de flujo tenemos que $\phi^t(m)$ es una curva solución de X y $\varphi^t(\pi(m))$ es una curva solución de v es decir,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi^t(m) = X_m$$
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi^t(\pi(m)) = v_{\pi(m)}.$$

Si $\pi \circ \phi^t = \varphi^t \circ \pi$ entonces

$$(v \circ \pi)(m) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi^t(\pi(m)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\phi^t(m)) = d_m\pi \cdot X_m = (d\pi \circ X)(m),$$

probando que $v \circ \pi = d\pi \circ X$.

Por definición, $c(t) = (\varphi^t \circ \pi)(m)$ es la curva solución del sistema

$$\dot{x} = v(x),$$
$$x(0) = \pi(m).$$

Por otra parte, $d(t) = (\pi \circ \phi^t)(m)$ satisface que $d(0) = \pi(m)$. Puesto que queremos demostrar que $c = d$, por Existencia y Unicidad basta demostrar que $d'(t) = v(d(t))$. Sin embargo, por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} d'(t) &= \frac{d}{dt}(\pi \circ \phi^t)(m) = d_{\phi^t(m)}\pi \cdot X(\phi^t(m)) \\ &= (d\pi \circ X)(\phi^t(m)) = (v \circ \pi)(\phi^t(m)) = v(\pi(\phi^t(m))) \\ &= v(d(t)), \end{aligned}$$

probando que $c = d$, es decir, $\pi \circ \phi^t = \varphi^t \circ \pi$. □

Corolario 4.2.13. *Sean* X, v *campos vectoriales en* E *y* B *respectivamente, dependientes del tiempo, tales que* X_t *y* v_t *estén* π*-relacionados para cada* $t \in \mathbb{R}$*. Si* $\{\phi_{s,t}\}$ *y* $\{\varphi_{s,t}\}$ *son los respectivos flujos dependientes del tiempo entonces* $\pi \circ \phi_{s,t} = \varphi_{s,t} \circ \pi$*.*

Demostración. Sea $m \in E$. Por definición, $c^s(t) = (\varphi_{s,t} \circ \pi)(m)$ es la trayectoria de v en $\pi(m)$ al tiempo $t = s$. Por otra parte, $d^s(t) = (\pi \circ \phi_{s,t})(m)$ satisface $d^s(s) = \pi(m)$, por lo que, para demostrar la igualdad $\pi \circ \phi_{s,t} = \varphi_{s,t} \circ \pi$, debemos probar que

$$\frac{d}{dt} d^s(t) = v(t, d^s(t)).$$

Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} d^s(t) = \frac{d}{dt}(\pi \circ \phi_{s,t})(m) &= d_{\phi_{s,t}(m)}\pi \cdot X(t, \phi_{s,t}(m)) = (d\pi \circ X_t)(\phi_{s,t}(m)) \\ &= (v_t \circ \pi)(\phi_{s,t}(m)) = v(t, \pi(\phi_{s,t}(m))) = v(t, d^s(t))\end{aligned}$$

$\square$

La Proposición anterior nos dice que el flujo del campo del espacio total proyecta en el flujo del campo del espacio base si estos campos están π-relacionados. Si tenemos un campo en el espacio total, no siempre existe un campo en el espacio base que esté π-relacionado con él, como veremos en el siguiente ejemplo, pero el recíproco sí es verdadero, como veremos en el lema posterior:

Ejemplo 4.2.14. *Sea* $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por la proyección en la primera componente:* $\pi(x, y) = x$*. Claramente, esta función es una submersión sobreyectiva, es decir,* $(\mathbb{R}^2, \pi, \mathbb{R})$ *define un haz fibrado. Consideremos el campo* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ *dado por* $X = y\frac{\partial}{\partial x}$*. Este campo no está* π*-relacionado con ningún campo en* $\mathbb{R}$*, ya que* $(d\pi \circ X)(x_0, y_0) = y_0\frac{\partial}{\partial x}$*. Sin embargo, para cada* $x_0 \in \mathbb{R}$*,* $\pi^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$*, por lo que para cada punto el campo* v *no estaría bien definido, porque tenemos una infinidad de valores para* $y_0\frac{\partial}{\partial x}$*.*

La
siguiente proposición es muy importante porque nos permitirá "levantar" campos vectoriales en B a campos vectoriales en E por medio de nuestra conexión de Ehresmann.

Proposición 4.2.15. *La diferencial* $d_m\pi|_{\mathbb{H}_m} : \mathbb{H}_m \to T_{\pi(m)}B$ *es un isomorfismo para cada* $m \in E$*.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{H}_m$ y $T_{\pi(m)}B$ tienen la misma dimensión, basta probar que $d_m\pi|_{\mathbb{H}_m}$ es sobreyectiva. Sea $u_{\pi(m)} \in T_{\pi(m)}B$. Como π es una submersión, $d_m\pi : T_mE \to T_{\pi(m)}B$ es sobreyectiva, por lo que existe $w_m \in T_mE$ tal que $d_m\pi(w_m) = u_m$. Puesto que $\mathbb{H}_m \oplus \mathbb{V}_m = T_mE$, existen $h_m \in \mathbb{H}_m, v_m \in \mathbb{V}_m$ tales que $h_m + v_m = w_m$. Por la linealidad de $d_m\pi$, tenemos que

$$d_m\pi|_{\mathbb{H}_m}(h_m) = d_m\pi(h_m) = d_m\pi(h_m)+d_m\pi(v_m) = d_m\pi(h_m+v_m) = d_m\pi(w_m) = u_{\pi(m)}$$

ya que $v_m \in \mathbb{V}_m = \mathrm{Ker}(d_m\pi)$. Esto prueba que $d_m\pi|_{\mathbb{H}_m}$ es sobreyectiva. $\square$

4.2.1. Levantamiento Horizontal de Campos y Curvas

Levantamiento Horizontal de Campos Vectoriales

Lema 4.2.16. *Sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann en E. Para cada $v \in \mathfrak{X}(B)$ existe un único campo $\mathrm{hor}(v) \in \mathfrak{X}^{\mathbb{H}}(E)$ tal que $\mathrm{hor}(v)$ está π-relacionado con v. A $\mathrm{hor}(v)$ se le llama* ***levantamiento horizontal*** *del campo v.*

Demostración del Lema: Sea $v \in \mathfrak{X}(B)$. Para cada $m \in E$, definimos

$$\mathrm{hor}(v)(m) := (d_m\pi|_{\mathbb{H}})^{-1} \cdot v(\pi(m))$$

Probaremos que en efecto, $\mathrm{hor}(v)$ es diferenciable. Sea $m_0 \in E$ y sean $(U', \varphi'), (V'\psi')$ cartas verticalmente adaptadas a m_0. Sea U'' una vecindad abierta de m_0 tal que existen campos $w_1, \ldots, w_r \in \mathfrak{X}(U'')$ que satisfacen $\mathbb{H}_m = span\{w_1(m), \ldots, w_r(m)\}$ para todo $m \in U''$. Sean $U = U' \cap U''$, $V = \pi(U)$ (recordemos que toda submersión es abierta), $\varphi = \varphi'|_U$, $\psi = \psi'|_V$. De esta manera, $(U, \varphi), (V, \psi)$ son cartas verticalmente adaptadas para m_0 y además U satisface la condición de suavidad para $\mathbb{H}$.

Como $v \in \mathfrak{X}(B)$, $v \in \mathfrak{X}(V)$, por lo que existen funciones diferenciables $v_1, \ldots, v_r$ tales que $v = \sum_{i=1}^r v_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ en V. Observemos que, para cualquier punto (ξ, x) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{hor}(v)(\xi, x) &= (d_{(\xi,x)}\pi|_{\mathbb{H}})^{-1} \cdot v(\pi(\xi, x)) = (d_{(\xi,x)}\pi|_{\mathbb{H}})^{-1} \cdot v(\xi)\\ &= \sum_{i=1}^r v_i(\xi)(d_{(\xi,x)}\pi|_{\mathbb{H}})^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\xi).\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = TE$ tenemos que, para cada $m \in U$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big|_m, w_i(m)\right)$ es una base de T_mE; además, $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big|_m, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\Big|_m\right)$ es la base coordenada para

T_mE por lo que podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} = \sum_{\alpha=1}^{k} u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sum_{j=1}^{r} t_i^j w_j,$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\xi) = d_{(\xi,x)}\pi \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\xi, x) = \sum_{j=1}^{r} t_i^j(\xi, x) d_{(\xi,x)}\pi(w_j(\xi, x)).$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que

$$\mathrm{hor}(v)(\xi, x) = \sum_{i=1}^{r} v_i(\xi)(d_{(\xi,x)}\pi|_{\mathbb{H}})^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\xi) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_i(\xi) t_i^j(\xi, x) w_j(\xi, x),$$

por lo cual $\mathrm{hor}(v)$ es diferenciable.

Sea ahora X un campo horizontal que esté π-relacionado con v. Esto significa que para cada $m \in E$, $d_m\pi \cdot X(m) = v(\pi(m))$. Como X es horizontal, podemos reescribir lo anterior como $d_m|_{\mathbb{H}_m}\pi \cdot X(m) = v(\pi(m))$. Finalmente, como $d_m|_{\mathbb{H}_m}$ es biyectiva, esto es equivalente a $X(m) = (d_m|_{\mathbb{H}_m})^{-1}v(\pi(m))$, es decir, coincide con la definición de $\mathrm{hor}(v)$. Esto demuestra la unicidad, y que en efecto, $\mathrm{hor}(v)$ y v están π-relacionados. $\triangledown$

Proposición 4.2.17. *Si Γ es la 1-forma de la conexión de Ehresmann asociada al haz fibrado (E, π, B), y si $\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$ es la base local de campos coordenados dados por coordenadas verticalmente adaptadas entonces*

$$\mathrm{hor}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \Gamma_j^\alpha(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

donde Γ se representa como $\Gamma = \sum_{\nu=1}^{k} \Gamma^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ y $\Gamma^\alpha = dx^\alpha + \sum_{j=1}^{r} \Gamma_j^\alpha(\xi, x) d\xi^j$ en esas coordenadas.

Demostración. Primero demostraremos que para cada $j = 1, \ldots, r$,

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \Gamma_j^\alpha(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

es un campo horizontal. Para ello, debemos de probar que dichos campos pertenecen a $\mathrm{Ker}\ \Gamma$. Primero, observemos que, como $\sum_{\alpha=1}^{k} \Gamma_j^\alpha(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

es un campo vertical entonces $\Gamma(\sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Además,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) &= \sum_{\alpha=1}^{k}(dx^\alpha + \sum_{i=1}^{r}\Gamma_i^\alpha(\xi,x)d\xi^i)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k}(0+\sum_{i=1}^{r}\Gamma_i^\alpha(\xi,x)\delta_j^i)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\\ &= \sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \Gamma\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right),\end{aligned}$$

lo que prueba que $\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} - \sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = 0$ y dichos campos son horizontales. Para probar ahora que

$$\mathrm{hor}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^j} - \sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

basta demostrar que $\frac{\partial}{\partial \xi^j} - \sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ está π-relacionado con $\frac{\partial}{\partial \xi^j}$, es decir, basta probar que

$$d_m\pi\frac{\partial}{\partial \xi^j}(m) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}\big(\pi(m)\big),$$

ya que $\sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma_j^\alpha(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(m)$ es vertical y es anulado por $d_m\pi$. Sin embargo, la igualdad anterior es verdadera por definición de $\frac{\partial}{\partial \xi^j}$ en cada caso, ya que $\xi^j\circ\pi = \xi^j$. $\square$

Ahora estudiaremos algunas propiedades del levantamiento horizontal:

Lema 4.2.18. *Si $f\in C^\infty(B)$ y $v,w\in\mathfrak{X}(B)$ entonces* hor *es $C^\infty(B)$-lineal, en el sentido de que* $\mathrm{hor}(fv+w) = (f\circ\pi)\mathrm{hor}(v)+\mathrm{hor}(w)$.

Demostración del Lema: Por definición,

$$\begin{aligned}\mathrm{hor}(fv+w)(m) &= (d_m\pi|_{\mathbb{H}})^{-1}\big((fv+w)(\pi(m))\big) = (d_m\pi|_{\mathbb{H}})^{-1}\big(f(\pi(m))v(\pi(m))+w(\pi(m))\big)\\ &= f(\pi(m))\cdot(d_m\pi|_{\mathbb{H}})^{-1}\big(v(\pi(m))\big) + (d_m\pi|_{\mathbb{H}})^{-1}\big(w\pi(m)\big)\\ &= (f\circ\pi)(m)\cdot\mathrm{hor}(v)(m)+\mathrm{hor}(w)(m).\end{aligned}$$

$\bigtriangledown$

Una consecuencia inmediata del lema anterior es que $\mathrm{hor}:\mathfrak{X}(B)\to\mathfrak{X}^{\mathbb{H}}(E)$ es $\mathbb{R}$-lineal, ya que para cualquier constante k, $k\circ\pi = k$.

Levantamiento Horizontal de Curvas

En esta sección, consideraremos curvas cuyo dominio está definido en un intervalo que no es abierto. Esto como convenio significa que están definidas en un intervalo abierto que contiene a dicho intervalo.

En adelante, (E, π, B) será un haz fibrado y $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann.

Definición 4.2.19. *Sea $\gamma : (T-a, T+a) \to B$ una curva en la base B y sea $a \geq \epsilon > 0$. La curva $\tilde{\gamma} : (T-\epsilon, T+\epsilon) \to E$ se llama **levantamiento horizontal (local) de γ por el punto** m_0 si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\tilde{\gamma}(a) = m_0$,

2. $(\pi \circ \tilde{\gamma})(t) = \gamma(t)$,

3. $\tilde{\gamma}'(t) \in \mathbb{H}_{\tilde{\gamma}(t)}$

*para todo $t \in (T-\epsilon, T+\epsilon)$. Si $\epsilon = a$, el levantamiento horizontal se llama **global**.*

Definición 4.2.20. *Una conexión de Ehresmann $\mathbb{H}$ se llama **buena** si cada curva $\gamma : (T-a, T+a) \to B$ admite un levantamiento horizontal global.*

El siguiente resultado nos dice que el levantamiento horizontal de una curva es localmente la solución de un sistema no-autónomo de ecuaciones diferenciales:

Proposición 4.2.21. *Si $\tilde{\gamma} : (T-a, T+a) \to E$ es un levantamiento horizontal de $\gamma : (T-a, T+a) \to B$ por $m_0 \in E$ entonces para cada $t_0 \in [a, b]$ existen vecindades abiertas U, V de $\tilde{\gamma}(t_0), \gamma(t_0)$ respectivamente, y campos vectoriales dependientes de tiempo $X_t \in \mathfrak{X}(U), v_t \in \mathfrak{X}(V), t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

- *Para cada $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$, los campos X_t y v_t están π-relacionados.*
- *La curva $\gamma(t)$ y su levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ son trayectorias de v_t y X_t al tiempo t_0, respectivamente.*

Demostración. Sea V una vecindad abierta de $\gamma(t_0)$, y sea $\{X^1, \ldots, X^r\}$ una base de $\mathfrak{X}(V)$. Puesto que γ es continua, existe $\epsilon' > 0$ tal que $\gamma(t) \in V$ $\forall t \in (t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon')$. Puesto que $\gamma'(t) \in T_{\gamma'(t)}B$, existen r funciones diferenciables $a_1, \ldots, a_r : (t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon') \to \mathbb{R}$ tales que

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{r} a_i(t) X^i\big(\gamma(t)\big) \qquad \forall t \in (t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon').$$

Consideremos ahora el campo vectorial dependiente del tiempo $v = v_t$ dado por $\left\{v_t = \sum_{i=1}^{r} a_i(t) X^i\right\}_{t \in (t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon')}$. Por construcción, tenemos que

$$\gamma'(t) = v_t(\gamma(t));$$

en otras palabras, si φ_{t,t_0} es el flujo dependiente del tiempo de v al tiempo $t = t_0$ entonces $\gamma(t) = \varphi_{t,t_0}(\gamma(t_0))$. Dicho flujo está definido para algún intervalo de tiempo $(t_0 - \epsilon'', t_0 + \epsilon'')$, con $\epsilon'' \leq \epsilon'$.

Sea $U = \pi^{-1}(V)$. Por el Lema 4.2.16, para cada $t \in (t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon')$ existe un único campo horizontal $\mathrm{hor}(v_t) \in \mathfrak{X}(U)$ que está π-relacionado con $v_t \in \mathfrak{X}(V)$. De esta manera, $X(t, m) := \mathrm{hor}(v_t)(m)$ define un campo vectorial dependiente del tiempo en E.

Por otro lado, por la condición 3 de levantamiento horizontal tenemos que $d_{\tilde{\gamma}(t)}\pi \cdot \tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t)$ $\forall t$. Puesto que $\tilde{\gamma}'(t) \in \mathbb{H}$, podemos reescribir lo anterior como

$$\begin{aligned} d_{\tilde{\gamma}(t)}\pi|_{\mathbb{H}} \cdot \tilde{\gamma}'(t) &= \gamma'(t) \\ \tilde{\gamma}'(t) &= (d_{\tilde{\gamma}(t)}\pi|_{\mathbb{H}})^{-1} \cdot \gamma'(t) = (d_{\tilde{\gamma}(t)}\pi|_{\mathbb{H}})^{-1} \cdot v_t(\gamma(t)) = \mathrm{hor}(v_t)(\tilde{\gamma}(t)). \end{aligned}$$

Esto implica que $\tilde{\gamma}$ es la trayectoria del campo X que pasa por $\tilde{\gamma}(t_0)$ al tiempo $t = t_0$. es decir, $\tilde{\gamma}(t) = \phi_{t,t_0}(\tilde{\gamma}(t_0))$ es el flujo dependiente del tiempo de X, el cual está definido para un intervalo de tiempo $(t_0 - \epsilon''', t_0 + \epsilon''')$. Tomando $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon'', \epsilon'''\}$, tenemos el resultado. $\square$

Como consecuencia de la Proposición anterior, tenemos lo siguiente:

Proposición 4.2.22 (Existencia y Unicidad de Levantamiento Horizontal Local)**.** *Para cada $m_0 \in E_{\gamma(a)}$, existe un levantamiento horizontal local de la curva $\gamma : [a, b] \to B$ por m_0. Si $\tilde{\gamma}_1 : I_1 \to E$ y $\tilde{\gamma}_2 : I_2 \to E$ son levantamientos horizontales de γ por m_0, y si $I = I_1 \cap I_2$, entonces $\tilde{\gamma}_1|_I = \tilde{\gamma}_2|_I$.*

Demostración. Siguiendo la línea de la demostración anterior, sea V vecindad abierta de $\gamma(a) \in V$ y sea $v = v_t$ dado como en la demostración de la Proposición anterior. Sabemos que $\gamma(t)$ es la trayectoria del campo v_t al tiempo $t = a$ que pasa por $\gamma(0)$. Sea $X_t = \text{hor}(v_t)$ definido en $U = \pi^{-1}(V)$. Si $\phi_{t,a}$ el flujo dependiente del tiempo del campo v_t y si $\tilde{\gamma}(t) := \phi_{t,a}(m_0)$ entonces

$$\tilde{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt}\phi_{t,a}(m_0) = X_t(\phi_{t,a}(m_0)) = X_t(\tilde{\gamma}(t)) = \text{hor}(v_t)(\tilde{\gamma}(t)) \in \mathbb{H}.$$

Además,

$$\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \pi \circ \phi_{t,a}(m_0) = \varphi_{t,a} \circ \pi(m_0) = \varphi_{t,a}(\gamma(0)) = \gamma(t),$$

probando que $\tilde{\gamma}$ es un levantamiento horizontal para γ, definido en algún intervalo $[a, a + \epsilon]$.

Para probar la unicidad, sea $K = \{t \in I \mid \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$. Puesto que E es un espacio de Hausdorff y $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ son continuas entonces K es cerrado en I. Probaremos ahora que K es abierto: Si $t_0 \in K$ entonces $\tilde{\gamma}_1(t_0) = \tilde{\gamma}_2(t_0)$. Por la Proposición anterior, tenemos que existe un intervalo de tiempo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ en el cual tanto $\tilde{\gamma}_1$ como $\tilde{\gamma}_2$ son la trayectoria de un campo dependiente del tiempo X_t. Por Unicidad de trayectorias, se tiene que $\tilde{\gamma}_1|_{(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)} = \tilde{\gamma}_2|_{(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)}$, probando que $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset K$, es decir, K es abierto en I. Finalmente, como K es abierto, cerrado y no-vacío en I, y además I es conexo, entonces tenemos que $K = I$, como queríamos. $\square$

En todo este estudio hemos visto que el levantamiento horizontal de una curva es la solución a un sistema de ecuaciones diferenciales dependiente del tiempo, y de ahí se desprenden la existencia y la unicidad del levantamiento local. Sin embargo, cabe mencionar que dicho levantamiento depende de la conexión de Ehresmann $\mathbb{H}$ que se elige, es decir, el levantamiento horizontal es único una vez fijada la conexión de Ehresmann. Esto quiere decir que si una curva admite un levantamiento horizontal global con una conexión, esto no necesariamente ocurre si cambiamos de conexión. Ahora, probaremos que el levantamiento de la curva **no depende** de la parametrización de la misma, es decir, probaremos que el levantamiento horizontal es una propiedad intrínseca de la geometría de dicha curva.

Proposición 4.2.23. *Sea $\gamma : [a, b] \to B$ una curva y sea $r : [c, d] \to [a, b]$ un difeomorfismo con $r(c) = a$. Si $\tilde{\gamma} : [a, b] \to E$ es un levantamiento horizontal de γ por m_0, y si $\hat{\gamma} : [c, d] \to E$ es un levantamiento horizontal de la curva $\gamma \circ r$ por m_0 entonces $\tilde{\gamma} \circ r = \hat{\gamma}$.*

Demostración. Puesto que el levantamiento horizontal es único, probaremos que $\tilde{\gamma}\circ r$ satisface las tres condiciones de levantamiento horizontal para $\gamma\circ r$:

1.- $(\tilde{\gamma}\circ r)(c) = \tilde{\gamma}(r(c)) = \tilde{\gamma}(a) = m_0$.

2.- $(\pi\circ(\tilde{\gamma}\circ r))(s) = \pi(\tilde{\gamma}(r(s))) = \gamma(r(s)) = (\gamma\circ r)(s)$.

3.- $(\tilde{\gamma}\circ r)'(s) = \tilde{\gamma}'(r(s))\cdot r'(s)$; como $\tilde{\gamma}'(r(s)) \in \mathbb{H}_{\tilde{\gamma}(r(s))}$, $r'(s)\in\mathbb{R}$ y $\mathbb{H}_{\tilde{\gamma}(r(s))}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, se sigue que $\tilde{\gamma}'(r(s))\cdot r'(s) \in \mathbb{H}_{\tilde{\gamma}(r(s))}$.

Esto termina la demostración. □

Ejemplo 4.2.24. *Sean M, N variedades diferenciales y sea $\pi : M\times N \to M$ la proyección en la primera componente. Puesto que $T(M\times N)$ es canónicamente difeomorfo a $TM\times TN$, tenemos que*

$$d_{(m,n)}\pi : T(M\times N) \to TM$$

viene dada por $d_{(m,n)}\pi(v_m, w_n) = v_m$, es decir, es también una proyección, y por lo tanto es sobreyectiva. Por ello, $(M\times N, \pi, M)$ es un haz fibrado. Consideremos la conexión de Ehresmann $\mathbb{H}$ dada por $\mathbb{H}_{(m,n)} = T_{(m,n)}(M\times \{(m,n)\})$. Sea $\gamma : [0,1] \to M$ una curva en M. Claramente, $E_{\gamma(0)} = \{\gamma(0)\}\times N$, así que si $\big(\gamma(0), n\big), n\in N$ es un punto arbitrario de $E_{\gamma(0)}$ entonces la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \big(\gamma(t), n\big)$$

es el levantamiento horizontal global de γ por dicho punto. Este es un ejemplo de una conexión de Ehresmann buena en un fibrado producto.

Ejemplo 4.2.25. *Consideremos el haz fibrado $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $\pi(x,y) = x$. Puesto que π es lineal, su diferencial coincide con ella misma y entonces el kernel de la diferencial en cada punto viene dado por*

$$\mathbb{V}_{(x,y)} = \operatorname{span}\{(0,1)\}.$$

Consideremos la distribución horizontal $\mathbb{H}_{(x,y)} = \operatorname{span}\{(1,y^2)\}$ (obviamente, es una distribución suave porque es globalmente generada por el campo $\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$) y la curva en la base $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\gamma(t) = t$. El punto $(0,2)\in\mathbb{R}^2$ pertenece a la fibra $E_0 = E_{\gamma(0)}$, por lo que construiremos el levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}$ de γ empezando en el punto $(0,2)$.

Sea $\tilde{\gamma} = \big(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2\big)$*. Observemos que* $t = \gamma(t) = (\pi \circ \tilde{\gamma})(t) = \tilde{\gamma}_1(t)$ *y que la condición* $\tilde{\gamma}' \in \mathbb{H}$ *implica que existe una función diferenciable* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\big(\tilde{\gamma}_1'(t), \tilde{\gamma}_2'(t)\big) = \big(f(t), f(t) \cdot \big(\tilde{\gamma}_2(t)\big)^2\big).$$

Por otro lado, como $\tilde{\gamma}_1(t) = t$*, tenemos que* $\tilde{\gamma}_1'(t) = 1$ *y por ello* $f(t) = 1$*. Esto significa que*

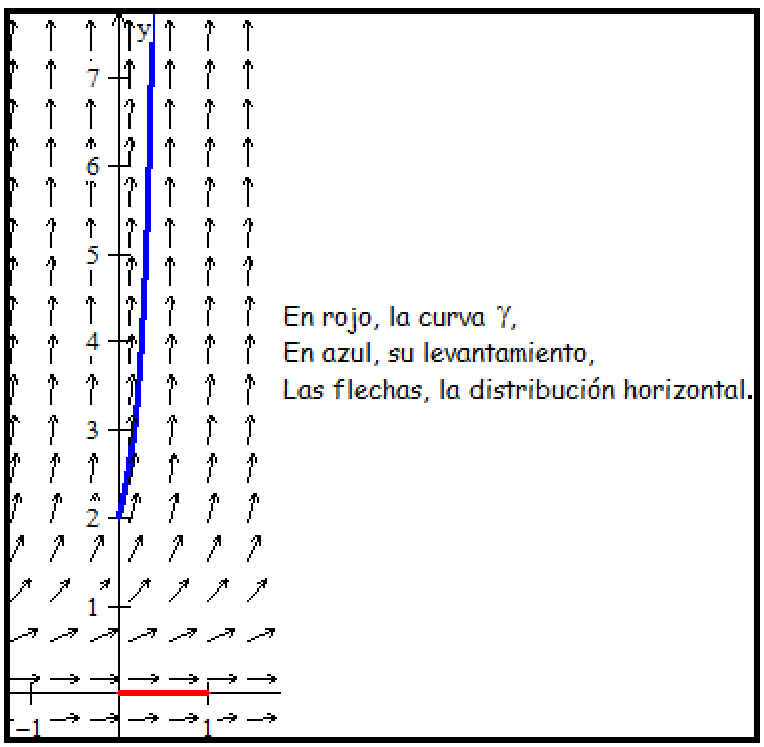
$$\tilde{\gamma}_2'(t) = \big(\tilde{\gamma}_2(t)\big)^2$$

con condición inicial $\tilde{\gamma}_2(0) = 2$*. Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos por solución*

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \frac{1}{\frac{1}{2} - t},$$

por lo que nuestro levantamiento horizontal local es la función $\tilde{\gamma} : [0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(t, \frac{1}{\frac{1}{2} - t}\right).$$



Puesto que dicho levantamiento no puede extenderse más allá de $t = 1/2$*,* γ *no admite un levantamiento horizontal global por* $(0, 2)$*. Esto demuestra que* *la conexión de Ehresmann dada por la distribución* $\mathbb{H}_{(x,y)} = \operatorname{span}\{(1, y^2)\}$ *no es buena.*

4.2.2. Conexiones Buenas y Funciones Propias

El siguiente teorema es el más importante de nuestra sección; nos da un criterio que nos permite garantizar cuándo cualquier conexión de Ehresmann es buena:

Teorema 4.2.26. *Si* $\pi : E \to B$ *es una función propia entonces toda conexión de Ehresmann* $\mathbb{H}$ *es buena.*

Demostración. Para demostrar este teorema, necesitamos demostrar el siguiente lema:

Lema 4.2.27. *Sea* $\gamma : [a, b] \to B$ *una curva. Si* $m_0 \in E_{\gamma(a)}$ *entonces existe una vecindad abierta* U *de* m_0 *y un tiempo* $\epsilon_{m_0} > 0$ *tal que para todo* $m \in E_{\gamma(a)} \cap U$*, existe un levantamiento horizontal de* γ *en* m *definido en* $[a, a + \epsilon_{m_0}]$*.*

Demostración del Lema: Sea $v = v_t$ como en la demostración de la Proposición 4.2.21, y sea $X = X_t := \operatorname{hor}(v_t)$. Puesto que X es un campo vectorial dependiente del tiempo en una vecindad de $E_{\gamma(0)}$, el Teorema del Flow Box para Campos Dependientes del Tiempo garantiza que existen una vecindad U_{m_0} de m_0, $\epsilon_{m_0} > 0$, $\Phi^{m_0}_{t,a} : U_{m_0} \to E$ tales que

$$\frac{d}{dt}\Phi^{m_0}_{t,a} = \operatorname{hor}(v_t)\big(\Phi^{m_0}_{t,a}(m)\big) \qquad \forall m \in U_{m_0}, t \in [a, a + \epsilon_{m_0}].$$

Por el mismo Teorema sabemos que $\Phi^{m_0}_{t,a}$ es el flujo de $\operatorname{hor}(v_t)$, y de la demostración del Lema 4.2.22 tenemos que $t \mapsto \Phi^{m_0}_{t,a}(m)$ es el levantamiento horizontal de γ en el punto m.
$\triangledown$

Lema 4.2.28. *Existe* $\epsilon > 0$ *tal que para todo* $m \in E_{\gamma(T)}$ *existe un levantamiento horizontal de* γ *en* m *definido en* $(T - \epsilon, T + \epsilon)$*.*

Demostración del Lema: Para cada $m \in E_{\gamma(T)}$ sea (U_m, T_m, Φ_m) la terna dada por el Lema anterior. Puesto que π es propia y $\{\gamma(T)\}$ es compacto en B, $E_{\gamma(T)}$ es compacto en E, además, $\{U_m\}_{m \in E_{\gamma(T)}}$ es una cubierta abierta para $E_{\gamma(T)}$, por lo que existen $m_1, \ldots, m_k \in E_{\gamma(T)}$ tales que $E_{\gamma(T)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{m_i}$. Sea $\epsilon = \min\{T_m \mid m \in E_{\gamma(T)}\}$. Si $m \in E_{\gamma(T)}$ entonces $m \in U_{m_j}$ para algún $j \leq k$, por lo que existe un levantamiento horizontal de γ en m definido en $(T - T_{m_j}, T + T_{m_j})$. Puesto que $\epsilon \leq T_{m_j}$, se tiene que dicho levantamiento está definido en $(T-\epsilon, T+\epsilon)$. $\bigtriangledown$

Volviendo al problema, consideremos el conjunto

$K = \{t \in [0,a] \mid \forall m \in E_{\gamma(0)}$ existe un levantamiento $\tilde{\gamma}_m : (T-t, T+t) \to E\}$.

El Lema anterior nos dice que $\epsilon \in K$. Por otra parte, si $t \in K$ entonces $s \in K$ para $0 \leq s < t$, es decir, K es un intervalo que empieza en 0. Sea $\tau = \sup K$. Probaremos que $[0,\tau] \subset K$. Si $t \in [0,\tau)$ entonces $\tau - t > 0$, por lo que, por definición de supremo, existe $k \in K$ tal que $\tau - (\tau - t) < k$, es decir, $t < k$. Puesto que $k \in K$, $t < k$ y K es un intervalo que empieza en 0, se tiene que $t \in K$, probando que $[0,\tau) \subset K$. Probaremos ahora que $\tau \in K$, es decir, que para cada $m \in E_{\gamma(T)}$ existe un levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}_m : (T-\tau, T+\tau) \to E$.

Probaremos que $\tau \in K$: Primero notemos que si $s \in K$ entonces por definición de K existe un levantamiento de γ por m al tiempo T:

$$\tilde{\gamma}_m^s : (T-s, T+s) \to E.$$

Observemos ahora que

$$(T-\tau, T+\tau) = \bigcup_{s \in K} (T-s, T+s),$$

ya que $\tau = \sup K$. Definimos

$$\tilde{\gamma}_m : (T-\tau, T+\tau) \to E$$

por $\tilde{\gamma}_m(t) = \tilde{\gamma}_m^s(t)$ si $t \in (T-s, T+s)$. Esta curva está bien definida, ya que el levantamiento horizontal es único; además es diferenciable, ya que localmente coincide con alguna $\tilde{\gamma}_m^s$. Finalmente, como localmente coincide con $\tilde{\gamma}_m^s$ para algún $s \in K$, se sigue que $\tilde{\gamma}_m$ es un levantamiento horizontal de γ, probando que $\tau \in K$, lo que demuestra que $K = [0,\tau]$.

Probaremos ahora que $\tau = a$ y habremos terminado. Si $\tau < a$ entonces, la curva γ está definida en $[T-\tau, T+\tau]$ y $\gamma[T-\tau, T+\tau]$ es compacto en B. Por otro lado, $\pi : E \to B$ es una función propia, por lo que $K = \pi^{-1}\big(\gamma[T-\tau, T+\tau]\big)$ es compacto en E. Por definición de levantamiento horizontal, $\tilde{\gamma}(T-\tau, T+\tau) \subset K$. Esto significa que los puntos $p_+, p_- \in E$ definidos por $p_\pm = \lim_{t\to\tau} \tilde{\gamma}(T \pm t)$ existen, ya que toda sucesión en un compacto posee una subsucesión convergente. Además,

$$\pi(p_\pm) = \lim_{t\to\tau} \pi\big(\tilde{\gamma}(T \pm t)\big) = \gamma(T \pm \tau),$$

por lo que $p_\pm \in E_{\gamma(T\pm\tau)}$. Por el Lema 4.2.28 existe $\epsilon \in (0, a-\tau)$ tal que existe un levantamiento horizontal local de la curva γ al tiempo $T \pm \tau$ por el punto $p_\pm$,

$$\tilde{\gamma}_{p_\pm} : (T \pm \tau - \epsilon, T \pm \tau + \epsilon) \to E.$$

Observemos que la curva $\hat{\gamma}_m : (T - \tau - \epsilon, T + \tau + \epsilon) \to E$ dada por

$$\hat{\gamma}_m(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_{p_-}(t) \text{ si } t \in (T-\tau-\epsilon, T-\tau+\epsilon) \\ \tilde{\gamma}_m(t) \text{ si } t \in (T-\tau, T+\tau) \\ \tilde{\gamma}_{p_+}(t) \text{ si } t \in (T+\tau-\epsilon, T+\tau+\epsilon) \end{cases}$$

está bien definida, ya que $\tilde{\gamma}_{p_-}, \tilde{\gamma}_m, \tilde{\gamma}_{p_+}$ son levantamientos de la misma curva, por lo cual coinciden en la intersección de sus dominios. Puesto que $\hat{\gamma}$ es localmente igual a alguna de esas tres curvas, es diferenciable y es un levantamiento de γ definido en $(T - \tau - \epsilon, T + \tau + \epsilon)$, por lo que $\tau + \epsilon \in K$. Esto es una contradicción, ya que $\tau = \sup K$, por lo que es imposible que $\tau < a$, es decir, $\tau = a$ y $K = [0, a]$, probando que $a \in K$ y que existe un levantamiento horizontal de γ en todo $m \in E_{\gamma(T)}$ definido en $(T - a, T + a)$, es decir, $\mathbb{H}$ es una conexión buena, como queríamos. $\square$

Corolario 4.2.29. *Si (E, π, B) es un haz fibrado con π propia entonces existe una conexión de Ehresmann buena $\mathbb{H}$.*

Demostración. Puesto que para cualquier haz fibrado existe una conexión de Ehresmann, si π es propia, dicha conexión es buena, por ello, para dicho haz fibrado existe una conexión de Ehresmann buena. $\square$

Corolario 4.2.30. *Si $\gamma : [0,1] \to B$ es una curva y $m \in E_{\gamma(0)}$ entonces existe un levantamiento horizontal local $\tilde{\gamma} : [0, \epsilon] \to E$ de γ por el punto m al tiempo 0.*

Demostración. Por definición, existe $\delta > 0$ tal que γ está definida en $(-\delta, 1 + \delta)$. Por Existencia del Levantamiento Horizontal local, existen $\epsilon \in (0, \delta/2)$ y un levantamiento $\tilde{\gamma} : (-2\epsilon, 2\epsilon) \to E$ de $\gamma : (-\delta, \delta) \to B$. Restringiendo $\tilde{\gamma} : [0, \epsilon] \to E$, tenemos el resultado. $\square$

Corolario 4.2.31. *Si $\gamma : [0,1] \to B$ es una curva y $\pi : E \to B$ es propia entonces para cada $m \in E_{\gamma(0)}$ existe un levantamiento horizontal global $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ de γ por el punto m al tiempo 0.*

Demostración. Por definición, existe $\delta > 0$ tal que γ está definida en $(-\delta, 1 + \delta)$. Puesto que $\pi : E \to B$ es propia, por el Teorema anterior, para cada $m \in E_{\gamma(0)}$ existe un levantamiento horizontal global $\tilde{\gamma} : (-\delta, 1+\delta) \to E$ de γ por el punto m al tiempo 0. Restringiendo $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ tenemos el resultado. $\square$

Ejemplo 4.2.32. *Sean $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, y sea $\pi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\pi[(x,y)] = [x]$. Si $x, y \notin \mathbb{Z}$ entonces (x,y) tiene un representante de clase en $(0,1) \times (0,1)$ y en este caso la representación local de π viene dada por $\tilde{\pi}(x,y) = x$, por lo que en este caso es una proyección. De la misma manera, en cualquier otro caso π tiene rango constante igual a 1 y es una submersión. En este caso, la fibra $E_{[x]}$ es igual a $[x] \times \mathbb{S}^1$. Puesto que $\mathbb{T}^2$ es compacto, π es propia. Esto nos asegura que, para cualquier conexión de Ehresmann que consideremos, cualquier curva γ tiene un levantamiento horizontal global.*

Consideremos la conexión de Ehresmann $\mathbb{H}$ generada por el campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^2)$ inducido por el campo $\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ la curva dada por $\gamma(t) = [t]$. Construiremos su levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}$ por el punto $[(0,1/2)]$.

4.2.3. Transporte Paralelo

Si tenemos una conexión de Ehresmann buena, una curva $\gamma : [0,1] \to B$ en la base nos induce una función $\mathcal{P}_\gamma$ entre las fibras $E_{\gamma(0)}$ y $E_{\gamma(1)}$ de la siguiente manera: Para cada $m \in E_{\gamma(0)}$, sea $\tilde{\gamma}_m : [0,1] \to E$ el levantamiento horizontal global de γ por m. Por definición de levantamiento horizontal, $\tilde{\gamma}_m(1) \in E_{\gamma(1)}$, es decir, el levantamiento de la curva conecta a $m \in E_{\gamma(0)}$ con un punto $\mathcal{P}_\gamma(m) \in E_\gamma(1)$.

En adelante, sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann *buena* en el haz fibrado (E, π, B).

Definición 4.2.33. *Sea $\gamma : [0,1] \to B$ una curva en la base B. A la función*

$$\mathcal{P}_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$$

*dada por $\mathcal{P}_\gamma(m) = \tilde{\gamma}_m(1)$ se le llama **transporte paralelo a la curva** γ.*

Puesto que el levantamiento horizontal de una curva **no depende** de la parametrización de dicha curva, de igual manera el trasporte paralelo no depende de la parametrización que se use para la curva, siempre y cuando se preserve el sentido del recorrido de la curva:

Proposición 4.2.34. *Sea $r : [0,1] \to [0,1]$ una función biyectiva y diferenciable tal que $r'(s) \neq 0$ para todo $s \in [0,1]$. Sea $\gamma : [0,1] \to B$ una curva en la base B.*

Si $r'(s) > 0$ $\forall s$ entonces $\mathcal{P}_{\gamma \circ r} = \mathcal{P}_\gamma$.

Si $r'(s) < 0$ $\forall s$ entonces $\mathcal{P}_{\gamma \circ r} \circ \mathcal{P}_\gamma = Id_{E_{\gamma(0)}}$.

Demostración. Si $r'(s) > 0$ entonces r es creciente y $r(0) = 0, r(1) = 1$. Esto implica que $\gamma(1) = \gamma(r(1))$. Puesto que el levantamiento horizontal de la curva no depende de la reparametrización, tenemos que $\tilde{\gamma}_m(1) = \gamma \,\tilde{\circ}\, r_m(1)$, es decir, $\mathcal{P}_\gamma(m) = \mathcal{P}_{\gamma \circ r}(m)$. Ahora, si $r'(s) < 0$ entonces r es decreciente. Si $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de γ por $m \in E_{\gamma(0)}$ entonces $\tilde{\gamma} \circ r$ es el levantamiento de $\gamma \circ r$ por $\tilde{\gamma}(1)$. Puesto que, geométricamente, $\tilde{\gamma} \circ r$ y $\tilde{\gamma}$ son la misma curva pero recorridas en sentido contrario, $\mathcal{P}_{\gamma \circ r}\big(\tilde{\gamma}(1)\big) = \tilde{\gamma}(0) = m$, es decir, $\mathcal{P}_{\gamma \circ r} \circ \mathcal{P}_\gamma(m) = m$ y $\mathcal{P}_{\gamma \circ r} \circ \mathcal{P}_\gamma = Id_{E_{\gamma(0)}}$. □

Definición 4.2.35. *Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ dos funciones continuas, con X espacio topológico y con $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Se llama **curva producto** la función $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [0,1] \to X$ dada por*

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) \ \textit{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) \ \textit{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Claramente, $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ es una curva continua.

Proposición 4.2.36. *Si $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to B$ son curvas diferenciables tales que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ y que $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [0,1] \to B$ es también diferenciable entonces $\mathcal{P}_{\gamma_2} \circ \mathcal{P}_{\gamma_1} = \mathcal{P}_{\gamma_1 \cdot \gamma_2}$.*

Demostración. Primero probaremos el siguiente Lema:

Lema 4.2.37. *Si $m \in E$ y si $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ son los levantamientos horizontales globales de γ_1 por m y de γ_2 por $\tilde{\gamma}_1(1)$ entonces $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2$ es el levantamiento horizontal de $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ por m.*

Demostración del Lema: Basta probar que $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2$ satisface los axiomas de levantamiento para $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

1. $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = m$,
2. Si $t \leq 1/2$ entonces $\pi\big(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2(t)\big) = \pi\big(\tilde{\gamma}_1(2t)\big) = \gamma_1(2t) = \gamma_1 \cdot \gamma_2(t)$; si $t \geq 1/2$ entonces $\pi\big(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2(t)\big) = \pi\big(\tilde{\gamma}_2(2t-1)\big) = \gamma_1(2t-1) = \gamma_1 \cdot \gamma_2(t)$. En cualquier caso, $\pi\big(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2(t)\big) = \gamma_1 \cdot \gamma_2(t)$.

3. Si $t \leq 1/2$, $(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)'(t) = \tilde{\gamma}_1'(t) \in \mathbb{H}$; si $t \geq 1/2$, $(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)'(t) = \tilde{\gamma}_2'(t) \in \mathbb{H}$. En cualquier caso, $(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)'(t) \in \mathbb{H}$.

$\triangledown$

Volviendo al problema, sea $m \in E_{\gamma(0)}$. Observemos que $\mathcal{P}_{\gamma_1}(m) = \tilde{\gamma}_1(1)$ y que, por el Lema anterior,

$$\mathcal{P}_{\gamma_2}(\mathcal{P}_{\gamma_1}(m)) = \mathcal{P}_{\gamma_2}(\tilde{\gamma}_1(1)) = \tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2(1) = \mathcal{P}_{\gamma_1 \cdot \gamma_2}(m),$$

probando que $\mathcal{P}_{\gamma_2} \circ \mathcal{P}_{\gamma_1} = \mathcal{P}_{\gamma_1 \cdot \gamma_2}$. $\square$

Inductivamente se puede demostrar que si $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_n$, entonces $\mathcal{P}_\gamma = \mathcal{P}_{\gamma_n} \circ \ldots \circ \mathcal{P}_{\gamma_1}$. El siguiente resultado nos asegura que el transporte paralelo es una función diferenciable.

Proposición 4.2.38. *Sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann buena asociada al fibrado (E, π, B). Si $\gamma : [0,1] \to B$ es una curva en la base B entonces $\mathcal{P}_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$ es diferenciable.*

Demostración. La idea de la demostración es construir para cada m_0 en la fibra $E_{\gamma(0)}$ un número finito de vecindades abiertas del levantamiento de γ por m_0, tales que en cada una de dichas vecindades el transporte paralelo sea el flujo de algún campo dependiente del tiempo. Puesto que el flujo es diferenciable, el transporte paralelo será diferenciable en cada una de dichas vecindades. Utilizando la Proposición anterior, obtendremos que el transporte paralelo es la composición de dichos flujos, por lo que a su vez será diferenciable.

Sea $m_0 \in E_{\gamma(0)}$ y sea $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ el levantamiento horizontal global de γ por m_0. Por la Proposición 4.2.21, para cada $t_0 \in [0,1]$ existe una vecindad abierta U_{t_0} de $\tilde{\gamma}(t_0)$ y un campo vectorial horizontal dependiente del tiempo $X_t^{t_0} \in \mathfrak{X}(U_{t_0})$ tales que para un intervalo de tiempo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ la curva $\tilde{\gamma}$ viene dada como la trayectoria de $X_t^{t_0}$ al tiempo $t = t_0$, esto es, $\tilde{\gamma}(t) = \phi_{t,t_0}(\tilde{\gamma}(t_0))\ \forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Puesto que $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ es continua, $\tilde{\gamma}\big([0,1]\big)$ es compacto en E; además, $\{U_{t_0}\}_{t_0 \in [0,1]}$ es una cubierta abierta de $\tilde{\gamma}\big([0,1]\big)$. Por compacidad, existen $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que

$$\tilde{\gamma}\big([0,1]\big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i},$$

y supongamos sin pérdida de generalidad que $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Esto significa que existen $s_1, \ldots, s_{n-1} \in [0,1]$ tales que $\tilde{\gamma}(s_i) \in U_i \cap U_{i+1}$. Sean

$s_0 = 0, s_n = 1$ y para $i = 0, \ldots, n-1$ sea ϕ_{t,s_i} el flujo dependiente del tiempo del campo $X_t^{t_i}$. Inductivamente definamos

$$U_0 = U_{t_1} \cap E_{\gamma(0)}, U_1 = U_{t_2} \cap \phi_{s_1,0}(U_0), U_2 = U_{t_3} \cap \phi_{s_2,s_1}(U_1), \ldots, U_{n-1} = U_{t_n} \cap \phi_{s_{n-1},s_{n-2}}(U_{n-2}).$$

Definamos inductivamente $V_{n-1} = U_{n-1}$ y $V_i = \phi^{-1}_{s_{i+1},s_i}(V_{i+1})$ para $i = n-2, \ldots, 1, 0$. Observemos que por construcción $\phi_{s_{i+1},s_i}(V_i) \subset V_{i+1}$ y $V_i \subset E_{\gamma(s_i)}$. Sea $\gamma_i : [s_i - 1, s_i] \to B$ la restricción $\gamma_i = \gamma|_{[s_i-1,s_i]}$. Observemos que

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_n,$$

por lo que $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{\gamma}_n$ y $\mathcal{P}_\gamma = \mathcal{P}_{\gamma_n} \circ \ldots \circ \mathcal{P}_{\gamma_1}$. Además, por construcción, $\tilde{\gamma}_{i+1}(t) = \phi_{t,s_i}(\tilde{\gamma}_{i+1}(s_i))$, por lo que $\mathcal{P}_{\gamma_i} = \phi_{s_{i-1},s_i}$ en V_{i-1}. Esto prueba que $\mathcal{P}_{\gamma_i}$ es diferenciable en V_{i-1}. Además, como $\mathcal{P}_\gamma = \mathcal{P}_{\gamma_n} \circ \ldots \circ \mathcal{P}_{\gamma_1}$, se sigue que $\mathcal{P}_\gamma$ es diferenciable en V_0, la cual es una vecindad abierta de m_0. Como $m_0 \in E_{\gamma(0)}$ es arbitrario, $\mathcal{P}_\gamma$ es diferenciable, como queríamos. □

4.3. Teoremas de Ehresmann

Si (E, π, B) es un haz fibrado, en adelante denotaremos $E_U = \pi^{-1}(U)$, donde $U \subset B$. Además, si $\gamma : [0,1] \to X$ es una curva, definiremos la curva $-\gamma : [0,1] \to X$ por $-\gamma(t) := \gamma(1-t)$.

4.3.1. Primer Teorema de Ehresmann

Teorema 4.3.1 (Primer Teorema de Ehresmann)**.** *Si π es propia y E es conexo entonces (E, π, B) es un haz fibrado localmente trivial.*

Demostración. Sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann asociada a (E, π, B). Puesto que π es propia, dicha conexión es buena y toda curva en B admite un levantamiento horizontal global. Sea $b_0 \in B$ y sea (V, ξ) una vecindad coordenada de b_0 tal que $\xi(V) = B_1(0)$ sea la bola abierta centrada en el origen y de radio 1, y que $\xi(b_0) = 0$. Para cada $b \in V$ consideremos la curva $c_b : [0,1] \to \xi(V)$ dada por $c_b(t) = (1-t)\xi(b)$. Observemos que la curva c_b está totalmente contenida en $\xi(V)$. Sea $\gamma^b : [0,1] \to V$ dada por $\gamma^b = \xi^{-1} \circ c_b$, la cual es una curva bien definida, totalmente contenida en V con $\gamma^b(0) = b$ y $\gamma^b(1) = b_0$.

Puesto que $\pi : E \to B$ es propia, para cada $m \in E_{\gamma(0)}$ existe un levantamiento horizontal global $\tilde{\gamma}^b_m : [0,1] \to E$. Consideremos la función

$$\psi_{b_0} : E_V \to V \times E_{b_0}$$

dada por $\psi_{b_0}(m) = \big(\pi(m), \mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m)\big)$. Probaremos que dicha función es diferenciable, mostrando que $m \mapsto \mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m)$ lo es.

Consideremos, para cada $b \in V$, el campo vectorial $v^b \in \mathfrak{X}(V)$ dado por

$$v^b = \sum_{j=1}^{r} -\xi_j(b)\frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Sabemos que $\gamma^b(t) = \varphi_t(\gamma(0))$, es decir, $\gamma^b(t)$ es la trayectoria por b del campo v^b. Consideremos el levantamiento horizontal de este campo, $X^b \in \mathfrak{X}(U)$, dado por

$$X^b = \mathrm{hor}(v^b) = \sum_{j=1}^{r} -\xi_j(b)\mathrm{hor}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right).$$

Para cada $m \in E_V$ sea $\phi_t^{\pi(m)}$ el flujo de $X^{\pi(m)}$. Como $X^{\pi(m)}$ es el levantamiento horizontal de $v^{\pi(m)}$, y $\gamma^{\pi(m)}$ es la trayectoria de $v^{\pi(m)}$ por $\pi(m)$, podemos concluir por nuestro estudio anterior que $t \mapsto \phi_t^{\pi(m)}(m)$ es el levantamiento horizontal de $\gamma^{\pi(m)}$ por el punto m. En estos términos, $\mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m) = \phi_1^{\pi(m)}(m)$, por lo que tenemos que demostrar que $m \mapsto \phi_1^{\pi(m)}(m)$ es diferenciable.

Puesto que $X^b = \sum_{j=1}^{r} -\xi_j(b)\mathrm{hor}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)$, la función $X : V \times E_V \to TE$ dada por $X(b,m) := X^b(m)$ es diferenciable y por ello, X es un campo en E_V parametrizado por V. Esto significa que su flujo ϕ parametrizado por V también es diferenciable, en virtud del Teorema de Dependencia de Parámetros, es decir, la función $(m,b,t) \mapsto \phi_t^b(m)$ es diferenciable. En particular, $m \mapsto \phi_1^{\pi(m)}(m)$ es diferenciable, pues $\pi : E \to B$ es una función diferenciable. Con esto, hemos probado que $m \mapsto \mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m)$, y por ello, $\psi_{b_0} : E_V \to V \times E_{b_0}$ es diferenciable.

Ahora, consideremos la función

$$\rho_{b_0} : V \times E_{b_0} \to E_V$$

dada por $\rho_{b_0}(b,p) = \mathcal{P}_{-\gamma^b}(p)$. Sea $(b,p) \in V \times E_{b_0}$. Probaremos que $(\psi_{b_0} \circ \rho_{b_0})(b,p) = (b,p)$. Observemos que

$$(\psi_{b_0} \circ \rho_{b_0})(b,p) = \psi_{b_0}(\mathcal{P}_{-\gamma^b}(p)) = \big(\pi(\mathcal{P}_{-\gamma^b}(p)), \mathcal{P}_{\gamma^{\pi(\mathcal{P}_{-\gamma^b}(p))}}(\mathcal{P}_{-\gamma^b}(p))\big).$$

Puesto que γ^b es una curva tal que $\gamma^b(0) = b$ y $\gamma^b(1) = b_0$, se tiene que $-\gamma^b(0) = b_0$ y que $-\gamma^b(1) = b$. Por ello, si p es un punto en la fibra de b_0, $-\gamma^b(p)$ es un punto en la fibra de b, por lo que $\pi(\mathcal{P}_{-\gamma^b}(p)) = b$ y

$$(\psi_{b_0} \circ \rho_{b_0})(b,p) = \big(b, \mathcal{P}_{\gamma^b}(\mathcal{P}_{-\gamma^b}(p))\big).$$

Sin embargo, ya hemos demostramos que $\mathcal{P}_{\gamma^b}(\mathcal{P}_{-\gamma^b}(p)) = id_{E_{b_0}}$, por lo que $(\psi_{b_0} \circ \rho_{b_0})(b,p) = (b,p)$.

Sea ahora $m \in E_V$ y probaremos que $(\rho_{b_0} \circ \psi_{b_0})(m) = m$.

$$(\rho_{b_0} \circ \psi_{b_0})(m) = \rho_{b_0}\big(\pi(m), \mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m)\big) = \mathcal{P}_{-\gamma^{\pi(m)}}(\mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m)) = id_{E_{\pi(m)}}(m) = m,$$

por tanto, ψ_{b_0} y ρ_{b_0} son inversas una de la otra. Finalmente demostraremos que ρ_{b_0} es diferenciable, y esto nos dirá que ψ_{b_0} es un difeomorfismo. De manera similar a como lo hicimos con ψ_{b_0}, observemos que $\rho_{b_0}(b,p) = \phi^b_{-1}(p)$ es el flujo parametrizado por B al tiempo $t = -1$ del campo X^b. Por el Teorema de dependencia de parámetros, esta función es diferenciable.

Por ello, E_V es difeomorfa a $V \times E_{b_0}$. Para probar que (E, π, B) es un haz fibrado localmente trivial basta demostrar que todas las fibras son difeomorfas entre sí, para que no haya dependencia del punto de la base en la representación $V \times E_{b_0}$.

Como consecuencia de que E_V es difeomorfo a $V \times E_{b_0}$, se tiene que para cada $b_0 \in B$ existe una vecindad V de b_0 tal que E_b y E_{b_0} son difeomorfos para cada $b \in V$. Sean ahora $b', b'' \in B$. Puesto que B es conexa, B es conexa por trayectorias, por lo que existe una curva continua $c : [0,1] \to B$ tal que $c(0) = b', c(1) = b''$. Puesto que $[0,1]$ es compacto y c es continua, el conjunto

$$K = \{c(t) \mid t \in [0,1]\}$$

es compacto en B. Para cada $t \in [0,1]$, sea V_t la vecindad de $c(t)$ tal que para cualquier $b \in V_t$, E_b y $E_{c(t)}$ sean difeomorfas. Como $c(t) \in V_t$ para cada $t \in [0,1]$, y K es compacto, existen $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{t_i},$$

y supongamos sin pérdida de generalidad que $t_1 < \ldots < t_n$. Para $i = 1, \ldots, n-1$ sea $s_i \in [0,1]$ tal que $c(s_i) \in V_{t_i} \cap V_{t_{i+1}}$. Sean $s_0 = 0$, $s_{n+1} = 1$. Para cada $i = 0, \ldots, n-1$, tenemos que $E_{c(s_{i+1})}$ y $E_{c(t_{i+1})}$ son difeomorfas, porque $c(s_{i+1}) \in V_{t_{i+1}}$. Por otra parte, $c(s_i) \in V_{t_{i+1}}$, por lo que $E_{c(s_i)}$ es difeomorfa a $E_{c(t_{i+1})}$. Esto significa que $E_{c(s_i)}$ es difeomorfa a $E_{c(s_{i+1})}$ para cada $i = 0, \ldots, n$. Por ello, $E_{b'} = E_{c(s_0)}$ es difeomorfa a $E_{c(s_1)}$, la cual es difeomorfa a $E_{c(s_2)}$, que a su vez es difeomorfa a $E_{c(s_3)}$, etcétera. Por transitividad, $E_{c(s_0)}$ es difeomorfa a $E_{c(s_{n+1})}$, es decir, $E_{b'}$ es difeomorfa a $E_{b''}$. Puesto que cualesquiera dos fibras son difeomorfas, la representación $E_V \cong V \times E_{b_0}$ no depende de b_0, probando que (E, π, B) es un haz fibrado localmente trivial. □

4.3.2. Segundo Teorema de Ehresmann

Teorema 4.3.2 (Segundo Teorema de Ehresmann)**.** *Sea (E, π, B) un haz fibrado con π propia, tal que la base B es* ***suavemente contraible****, es decir, existe una función diferenciable $F : [0, 1] \times B \to B$ tal que*

1. *Si F_t se define por $F_t(b) := F(t, b)$ entonces F_t es diferenciable para cada $t \in [0, 1]$.*
2. *$F_0 = id_B$.*
3. *Para cada $b \in B$, $F_1(b) = b_0$ para algún $b_0 \in B$ fijo.*

Dadas las condiciones anteriores, (E, π, B) es un haz fibrado globalmente trivial.

Demostración. Probaremos que E es difeomorfo a $B \times E_{b_0}$. Primero notemos que para cada $b \in B$ la función $\gamma^b : [0, 1] \to B$ dada por $\gamma^b(t) := F_t(b)$ es una curva tal que $\gamma^b(0) = b$ y que $\gamma^b(1) = b_0$. Sea $\psi : E \to B \times E_{b_0}$ dada por

$$\psi(m) = \big(\pi(m), \mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m)\big).$$

Probaremos que ψ es difeomorfismo, mostrando que $\rho : B \times E_{b_0} \to E$ dada por

$$\rho(b, p) = \mathcal{P}_{-\gamma^b}(p)$$

es la inversa de ρ y que ambas son diferenciables: La demostración de que ψ y ρ son inversas es igual a como lo hicimos para ψ_{b_0} y ρ_{b_0} en la prueba del Teorema anterior. Para probar que ψ y ρ son diferenciables, haremos algo muy parecido a lo que hicimos en el teorema anterior: construiremos una familia de campos vectoriales parametrizados por B y dependientes del tiempo, tal que ψ y ρ puedan expresarse en términos del flujo de dichos campos.

Sea $b \in B$. Como γ^b es continua, el conjunto $\gamma^b[0,1]$ es compacto, por lo que existe un número finito de cartas $\{(V_i, \psi_i)\}_{i=1}^n$ tales que

$$\gamma^{\pi(m)}[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

En cada carta V_i podemos definir un campo vectorial $v_{t,i}^b \in \mathfrak{X}(V_i)$ dependiente del tiempo, tal que, para cada $i = 1, \ldots, n$ γ^b sea una trayectoria del campo $v_{t,i}^b$ en la vecindad V_i. Consideremos el levantamiento horizontal de estos campos, $X_{t,i}^b = \mathrm{hor}(v_{t,i}^b) \in \mathfrak{X}(V_i)$. Puesto que $X_{t,i}^b$ es el levantamiento de $v_{t,i}^b$, el levantamiento horizontal global $\tilde{\gamma}_m^b$ de γ^b por algún punto $m \in E_b$ es trayectoria de $X_{t,i}^b$ para toda i. Ahora, consideremos una familia de tiempos $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = 1$ tales que, para $i = 1, \ldots, n-1$, $t_i \in V_i \cap V_{i+1}$, y denotemos por $\gamma_i^b := \gamma^b|_{[t_{i-1}, t_i]}$ a la restricción de γ^b al intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Por lo dicho anteriormente, γ_i^b es una trayectoria de $v_{t,i}^b$ por $\gamma^b(t_{i-1})$ al tiempo $t = t_{i-1}$.

Por el Teorema de Dependencia de Parámetros, existen vecindades $W_0, W_1, \ldots, W_n$ de $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$ respectivamente, tales que, para cada $i = 1, \ldots, n$, el flujo $\phi_{t_i, t_{i-1}}^b : V_{i-1} \to V_i$ de X_i^b está bien definido. Además, estas funciones son diferenciables. Más aún, por el Teorema de dependencia de parámetros, cada una de las funciones $\phi_{t_i, t_{i-1}} : V_{i-1} \times W_{i-1} \to W_i$ son diferenciables. Por otra parte, tenemos que

$$(b, m) \mapsto \mathcal{P}_{\gamma^b}(m), m \in W_0$$

coincide con $\phi_{t_n, t_{n-1}}^b \circ \ldots \circ \phi_{t_1, t_0}^b$, por lo que es diferenciable. Puesto que $(b, m) \mapsto \mathcal{P}_{\gamma^b}(m)$ es diferenciable, $m \mapsto \mathcal{P}_{\gamma^{\pi(m)}}(m)$ es diferenciable y ψ es diferenciable. De la misma manera, podemos ver que $\rho(b, m) = \mathcal{P}_{-\gamma^b}(m)$ es diferenciable.

Esto demuestra que $\psi : E \to B \times E_{b_0}$ es difeomorfismo, probando que (E, π, B) es globalmente trivial. $\square$

4.4. Ejemplo: Rectificación Global

Como aplicación de la teoría de Conexiones de Ehresmann, probaremos el Teorema de Rectificación Global de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales en el Plano. Empezaremos por demostrar dicho teorema de manera local, para después buscar condiciones suficientes que nos permitan generalizarlo.

Definición 4.4.1. *Sea M una variedad diferencial y sea $v \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial completo. Definamos en M una relación de equivalencia dada por*

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \Phi^t(p) = q.$$

Es inmediato comprobar que $[p] = \mathcal{O}_p$, donde

$$\mathcal{O}_p = \{\Phi^t(p) \in M \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

El conjunto $\mathcal{O}_p$ se llama la ***órbita*** *de p bajo el flujo. Esto significa que el conjunto de clases de equivalencia $M/\sim = \{[p] \mid p \in M\}$ coincide con el* ***espacio de órbitas*** *del campo v,*

$$Orb_v = \{\mathcal{O}_p \mid p \in M\}.$$

A la función $\pi : M \to Orb_v$ se le llama proyección natural.

4.4.1. Secciones Transversales

El concepto de sección transversal de un campo vectorial es importante en varias ramas de los sistemas dinámicos, en particular, en la demostración del teorema de Poincaré-Bendixon (véase [10]), este concepto resulta fundamental.

Definición 4.4.2. *Sea $v \in \mathfrak{X}(M)$. Una* ***sección transversal local*** *del campo v es una curva $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to M$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\sigma(s)$ es un punto regular para todo $s \in I$.*
2. *La traza de σ no interseca a ninguna curva solución en dos puntos distintos.*
3. *σ es transversal al campo v, es decir, ninguna trayectoria de v es tangente a σ.*

Si además v es un campo vectorial sin puntos críticos y si σ interseca a todas las trayectorias de v, decimos que σ se llama ***sección transversal global***.

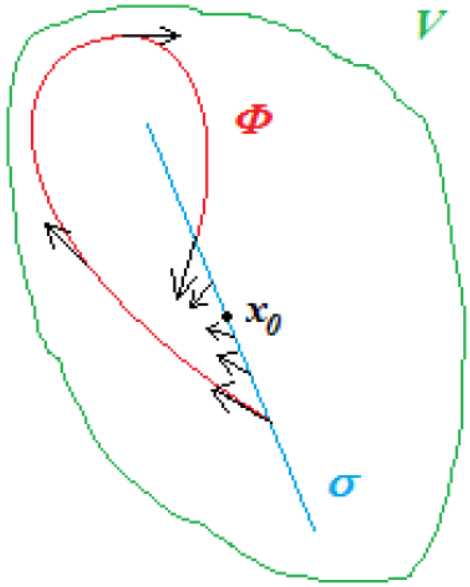
En lo sucesivo, los resultados y definiciones las haremos para $M = \mathbb{R}^2$, que es la aplicación que nos interesa:

Proposición 4.4.3. *Si $x_0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto regular del campo v, es decir, $v(x_0) \neq 0$ entonces existe una sección transversal local σ tal que $\sigma(0) = x_0$.*

Demostración. Puesto que $v(x_0) \neq 0$, existe un vector $w \in \mathbb{R}^2$, unitario, anclado en x_0, linealmente independiente con $v(x_0)$, y una vecindad abierta U de x_0 tal que $v(x) \neq 0 \, \forall x \in U$. Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\sigma(s) = x_0 + sw$. Puesto que σ es continua, existe $\epsilon' > 0$ tal que $\sigma(t) \in U$ para todo $s \in (-\epsilon', \epsilon')$, es decir, la restricción $\sigma|_{(-\epsilon', \epsilon')}$ satisface la primer condición de sección transversal.

Puesto que v es un campo suave y $v(x_0)$, w, son linealmente independientes, se tiene que $\det\big(v(x_0), w\big) \neq 0$, digamos que $\det\big(v(x_0), w\big) > 0$. Puesto que el determinante es una función continua y v es un campo suave, existe una vecindad abierta $V \subset U$ de x_0 tal que $\det\big(v(x), w\big) > 0$. Puesto que σ es continua, existe $\epsilon \in (0, \epsilon']$ tal que $\sigma(s) \in V$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Esto significa que $\sigma|_{(-\epsilon, \epsilon)}$ satisface la primera y última condición de sección transversal.

Probaremos que $\sigma|_{(-\epsilon, \epsilon)}$ también satisface la segunda condición de sección transversal. Puesto que $\sigma(s) \in V \ \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$, se tiene que los vectores $v(\sigma(s))$ apuntan al mismo lado de la recta σ. Esto implica que la única posibilidad de que σ corte dos veces a la misma trayectoria es tener una situación como la de la figura siguiente:



Cualquier trayectoria de v que nace en el área circundada por la trayectoria y la curva σ debe permanecer ahí, ya que dos trayectorias no pueden intersecarse, y el flujo en σ apunta al interior de dicha área. Esto obliga a que en el interior de dicha área exista un punto de equilibrio para v, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\sigma|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ no puede cortar dos veces a la misma órbita. $\square$

Como consecuencia de la existencia de secciones transversales locales tenemos lo siguiente:

Proposición 4.4.4. *Si $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ es un campo vectorial sin puntos críticos entonces Orb_v es un espacio segundo numerable, localmente euclídeo y conexo.*

Demostración. Puesto que todos los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ son puntos regulares del campo v, cada uno de ellos posee una sección transversal local $\sigma_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \to \mathbb{R}^2$ en virtud de la Proposición anterior. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to Orb_v$ la proyección canónica y para cada $p \in \mathbb{R}^2$ sea $x_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \to Orb_v$ la función $x_p = \pi \circ \sigma_p$. Puesto que σ_p es sección transversal, x_p es inyectiva, ya que σ_p no pasa dos veces por la misma órbita. Observemos además que

$$\bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} x_p(-\epsilon_p, \epsilon_p) = Orb_v$$

por lo que Orb_v es localmente euclídeo vía las cartas

$$\left\{\left(x_p|_{(-\epsilon_p,\epsilon_p)}^{-1}, x_p(-\epsilon_p,\epsilon_p)\right)\right\}_{p\in\mathbb{R}^2}.$$

Puesto que $\mathbb{R}^2$ es segundo numerable y $Orb_v = \mathbb{R}^2/\sim$ es localmente euclídeo por la Proposición A.0.47 se tiene que Orb_v es segundo numerable. Además, $\pi(\mathbb{R}^2) = Orb_v$, y como $\mathbb{R}^2$ es conexo y π es continua, se tiene que Orb_v es conexo. $\square$

4.4.2. Teorema de Rectificación Local

Teorema 4.4.5 (Teorema de Rectificación Local)**.** *Sea $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ un campo suave en el plano y sea $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un punto regular de v ($v(x_0) \neq 0$). Existen:*

1. *Una vecindad U de x_0,*
2. *Una vecindad $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(0,0)$,*
3. *Un cambio de coordenadas (difeomorfismo) $Y : U \to V$*

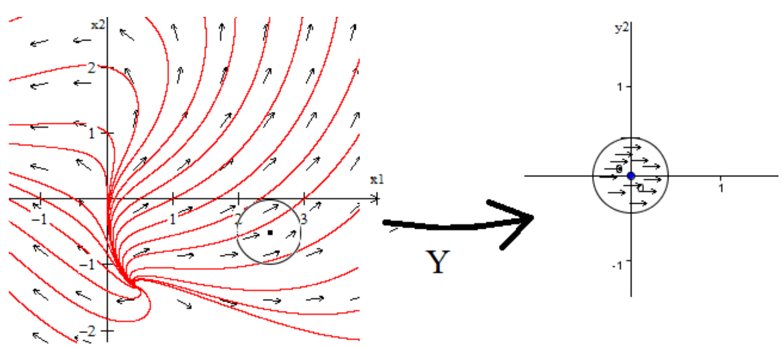
$$(x_1, x_2) \mapsto Y(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

tal que el sistema $\dot{x} = v(x)$ se transforma en el campo constante

$$\dot{y}_1 = 1,$$
$$\dot{y}_2 = 0.$$

*En otras palabras, probaremos que $Y_* v = e^1$. A Y se le llama **difeomorfismo (local) de rectificación**.*

Intuitivamente, un difeomorfismo de rectificación transforma las trayectorias del campo v en rectas horizontales, es decir, en las trayectorias del campo constante e_1:



Demostración. Consideremos un vector w anclado en x_0, linealmente independiente a $v(x_0)$, y sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la recta

$$\sigma(s) = x_0 + sw,$$

es decir, la recta tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma'(s) = w$. Puesto que σ es continua, $\sigma(0) = x_0$ es un punto regular de v y v es un campo suave, podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que la restricción $\sigma|_{(-\epsilon',\epsilon')}$ sea una sección transversal:

Para cada $p \in \mathbb{R}^2$ consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x) \\ x(0) &= p \end{aligned}$$

y sea I_p el intervalo máximo de definición de la curva solución de ese sistema. Por el Teorema del Flow Box existe una vecindad abierta U de x_0 y $\delta' > 0$ tal que para todo $p \in U$ se tiene que $(-\delta, \delta) \subset I_p$. Puesto que σ es continua, existe $\epsilon'' < \epsilon'$ tal que $\sigma(s) \in U$ para todo $s \in (-\epsilon'', \epsilon'')$.

Sea $X : (-\delta', \delta') \times (-\epsilon'', \epsilon'') \to \mathbb{R}^2$ dada por $X(t,s) = \Phi^t(\sigma(s))$, donde Φ^t denota al flujo de v. Puesto que, por construcción, $(-\delta, \delta) \subset I_{\sigma(s)}$ para toda $s \in (-\epsilon'', \epsilon'')$ se sigue que X es una función diferenciable bien definida. También podemos ver que X es una biyección, pues $\sigma|_{(-\epsilon',\epsilon')}$ satisface las tres condiciones anteriores por construcción. Observemos además que

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t}(t,s) &= \frac{d}{dt}\Phi(t, \sigma(0)) = v(\Phi(t, \sigma(s))) = v(X(t,s)), \\ \frac{\partial X}{\partial s}(t,s) &= \frac{d}{dt}\Phi(t, \sigma(s)) = d_{\sigma(s)}\Phi^t \cdot \sigma'(0) = d_{\sigma(s)}\Phi^t \cdot w. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$\frac{\partial X}{\partial(t,s)}(0,0) = [v(x_0), w],$$

y como $v(x_0)$ y w por construcción son linealmente independientes, se tiene que $\det\left(\frac{\partial X}{\partial(t,s)}\right) \neq 0$. Aplicando el Teorema de la Función Inversa a la función X, existen una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(0,0)$ y $\epsilon \in (0, \epsilon''], \delta \in (0, \delta')$ tales que $X : (\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon) \to V$ es un difeomorfismo.

Denotemos por $Y : V \to (\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon)$ a la inversa de X, el cual es un difeomorfismo. Probaremos que Y es nuestro difeomorfismo de rectificación:

$$\begin{aligned} Y_* v(t,s) &= d_{X(t,s)} Y \cdot v(X(t,s)) = (d_{(t,s)} X)^{-1} \cdot v(X(t,s)) \\ &= [v(X(t,s)), d_{\sigma(s)} \Phi^t \cdot w]^{-1} v(X(t,s)) \\ &= e^1. \end{aligned}$$

□

La idea central de la demostración anterior fue construir una sección transversal local $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ para el campo v, y probar que, al componerla con el flujo, esto definía un difeomorfismo local. Para probar el Teorema de Rectificación Global, que enunciaremos más adelante, seguiremos una idea similar: construiremos una sección transversal global $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y con ella construiremos un difeomorfismo $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $X(t,s) = \Phi^t(\sigma(s))$ y probaremos que su inversa es el difeomorfismo de rectificación buscado.

De la definición de sección transversal global podemos ver que lo anterior lo podemos lograr sólo si v no posee puntos críticos. Además, si $X(t,s) = \Phi^t(\sigma(s))$ está definido en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces v debe de ser un campo completo. Sin embargo, para lograr esto, es decir, para garantizar la existencia de una sección transversal global, debemos imponer una condición más al campo v.

4.4.3. Teorema de Rectificación Global

Teorema 4.4.6 (Teorema de Rectificación Global)**.** *Si $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe un difeomorfismo de rectificación $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*
2. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*
   - *El campo v es completo.*
   - *El campo v no tiene puntos críticos.*
   - *El espacio de órbitas Orb_v es un espacio de Hausdorff (con la topología cociente).*

Demostración. Supongamos que existe el difeomorfismo de rectificación Y. Puesto que e_1 es un campo vectorial completo, sin puntos críticos y su espacio de órbitas es homeomorfo a $\mathbb{R}$, tenemos que v deberá de cumplir las mismas condiciones en virtud de que $Y_* v = e_1$, probando que (1) implica (2).

Por la Proposición 4.4.4, Orb_v es segundo numerable, conexo y localmente euclídeo vía las cartas $\{x_p^{-1}(-\epsilon_p, \epsilon_p), x_p\}_{p \in \mathbb{R}^2}$, donde $x_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \to \mathbb{R}^2$ es la sección transversal que pasa por p, dada en la Proposición 4.4.3. Más aún, le daremos estructura de 1-variedad diferencial por medio de dichas cartas:

Si $U_{p,q} := x_p(-\epsilon_p, \epsilon_p) \cap x_q(-\epsilon_q, \epsilon_q) \neq \emptyset$ entonces la función de transición $x_q^{-1} \circ x_p : x_p^{-1}(U) \to x_q^{-1}(U)$ entre las secciones transversales locales viene dada en términos del flujo, es decir, $(x_q^{-1} \circ x_p)(s) = (\sigma_q^{-1} \circ \Phi^{f(s)} \circ \sigma_p)(s)$, donde f es diferenciable. Por ello, $\{(x_p|_{(-\epsilon_p,\epsilon_p)}^{-1}, x_p(-\epsilon_p, \epsilon_p))\}_{p \in \mathbb{R}^2}$ define un atlas diferenciable para Orb_v, el cual le da estructura de 1-variedad diferencial.

Con esta estructura para Orb_v, probaremos que $\pi : \mathbb{R}^2 \to Orb_v$ es una submersión. Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y sea $U_p = \pi^{-1}\big(x_p(-\epsilon_p, \epsilon_p)\big)$. Observemos que para cada $q \in U$ existen $s \in (-\epsilon_p, \epsilon_p)$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $q = \Phi^t(\sigma_p(s))$. La representación local de π

$$\tilde{\pi} = x_p^{-1} \circ \pi : U_p \subset \mathbb{R}^2 \to (-\epsilon_p, \epsilon_p),$$

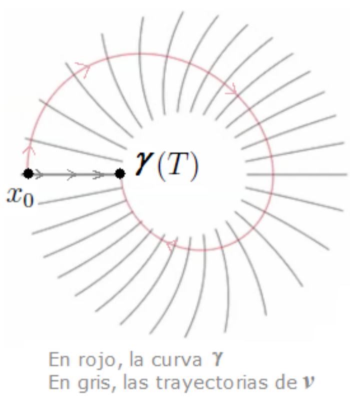
viene dada por $\pi(q) = \sigma^{-1}\big(\Phi^{-t}(q)\big)$. Puesto que Φ es diferenciable, π es también diferenciable. Su rango es igual a 1, ya que σ tiene rango 1 y Φ^{-t} es difeomorfismo. Por ello, π es submersión.

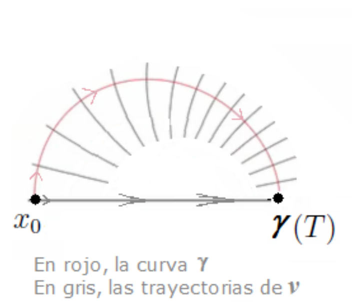
Por otra parte Orb_v tiene estructura de 1-variedad sin frontera y conexa, por lo cual, por el Teorema de Clasificación de 1-variedades (véase [4,]), Orb_v debe ser difeomorfa a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{S}^1$. Probaremos por contradicción que Orb_v es difeomorfo a $\mathbb{R}$. Supongamos que Orb_v es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$ y sea u el campo vectorial unitario definido en todo Orb_v.

Consideremos la conexión de Ehresmann $\mathbb{H}$ dada por $\mathbb{H}_p = \mathbb{V}_p^{\perp}$, donde $\mathbb{V}_p = T_p E_{\pi(p)}$, y consideremos el campo $w = \frac{\mathrm{hor}(u)}{||\mathrm{hor}(u)||}$. Puesto que u es no nulo, $\mathrm{hor}(u)$ también lo es y w está bien definido, además, w es unitario, por lo que es completo. Consideremos la trayectoria $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de w por cualquier punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Puesto que w es la normalización de $\mathrm{hor}(u)$, w está π-relacionado con un campo no-nulo $u' \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$. Puesto que γ es trayectoria de w, $\pi \circ \gamma$ es la trayectoria de u', y como éste es no-nulo, $\pi \circ \gamma$

recorre todo $\mathbb{S}^1$, y como es una circunferencia, existe un tiempo mínimo $T \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(T)$ pertenecen a la misma trayectoria de v. Denotemos por σ a esa trayectoria.

Observemos que la curva γ y la trayectoria de v que conecta a x_0 con $\gamma(T)$ determinan una región cerrada, en la cual las órbitas de w que nacen en ella no pueden abandonarla (las dos situaciones posibles son las que se presentan en la figura siguiente):





Si una trayectoria de v entra a la región cerrada, éstas no podrán salir de ahí, ya que T es el tiempo más pequeño en el que una órbita de v corta dos veces a γ. Tampoco pueden cortar a σ, por el Teorema de Existencia y Unicidad. Esto obliga a que en el interior de esta región exista un punto crítico para v, lo cual es imposible, pues es no-nulo.

Notemos que $\pi : \mathbb{R}^2 \to Orb_v$ es un haz fibrado localmente trivial. En efecto, $U_p = \pi^{-1}\big(x_p(-\epsilon_p, \epsilon_p)\big)$ es difeomorfo a $x_p(-\epsilon_p, \epsilon_p) \times \mathbb{R}$ vía el difeomorfismo $\Psi_p(q) = (\pi(q), t(q))$, donde, $\Phi^{-t(q)}(q) \in \sigma_p(-\epsilon_p, \epsilon_p)$. Puesto que $Orb_v \equiv \mathbb{R}$, el haz fibrado es de base suavemente contraible, por lo que, por el Teorema de Trivialización de Ehresmann, es globalmente trivial.

Por esta razón, existe un difeomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^2 \to Orb_v \times \mathbb{R}$ dado por $\Psi(q) = (\pi(q), t(q))$. Consideremos por ejemplo, la curva $\alpha(s) = (s, 0) \in Orb_v \times \mathbb{R}$, y la curva $\sigma(s) = \Psi^{-1}(\alpha(s))$. Notemos que $\pi(\sigma(s)) = \mathrm{pr}_1(\alpha(s)) = s$, por lo que para cada tiempo s, $\sigma(s)$ pasa por una órbita distinta. Esta curva σ es nuestra **sección transversal global**.

Procederemos a construir nuestro difeomorfismo de rectificación. Sea $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $X(t,s) = \Phi^t(\sigma(s))$. Esta función es diferenciable, probaremos ahora que esta función es un difeomorfismo.

$\square$

Capítulo 5

Aplicaciones

5.1. Haces Riemannianos, Simplécticos y de Poisson

5.2. Acciones de Grupos

Apéndice

Apéndice A

Topología

Un **espacio topológico** es un par (X, τ) donde X es un conjunto arbitrario no-vacío y τ es una familia de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$,

2. Si $U, V \in \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$,

3. Si $U_\alpha \in \tau$, con $\alpha \in \Gamma$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \in \tau$.

A la familia τ se le llama **topología** en X y a los elementos de τ se les llama **conjuntos abiertos** en X. Si (X, τ) es un espacio topológico, un subconjunto $C \subset X$ se llama **cerrado** si $X \backslash C \in \tau$.

Una **vecindad abierta** de un punto $p \in X$ es un conjunto abierto U tal que $p \in U$. De la misma manera, una **vecindad abierta** de un subconjunto $A \subset X$ es un conjunto abierto U tal que $A \subset U$. Una **cubierta abierta** de X es una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ de conjuntos abiertos en X si

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Consideremos un subconjunto A del espacio topológico (X, τ), y sea τ_A la familia de los conjuntos de que se obtienen de intersecar a A con los abiertos de X:

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$$

Es inmediato ver que (A, τ_A) es también un espacio topológico. En este caso, decimos que A es un **subespacio topológico** de X y τ_A es llamada **topología relativa** de X en A.

A.0.1. Bases, Numerabilidad, Convergencia

Hay veces que estamos interesados en construir una topología para algún conjunto X pero, en general, dar de manera explícita quienes son todos los abiertos no es sencillo. Para construir una topología para un conjunto X, basta definir una serie de subconjuntos de X llamados **elementos básicos** a partir de los cuales construimos el resto de los abiertos.

Una **base** para la topología del espacio topológico X es una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos tales que cualquier abierto se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$. Los elementos de $\mathcal{B}$ son a los que llamamos elementos básicos.

Proposición A.0.1. *Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es base de alguna topología de X si y sólo si satisface las siguientes propiedades:*

1. $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.
2. *Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}$ y para cualquier $p \in A \cap B$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $p \in C \subset A \cap B$.*

La demostración de este hecho puede encontrarse en [12, p. 90].

Si $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X que satisface la proposición anterior, y $\tau_{\mathcal{B}}$ es la familia de conjuntos que se pueden expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$, decimos que $\tau_{\mathcal{B}}$ es la **topología generada** por la base $\mathcal{B}$.

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición anterior:

Corolario A.0.2. *$\mathcal{B}$ es base de alguna topología del conjunto X si se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$,
2. *Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$ o $A \cap B \in \mathcal{B}$.*

Axiomas de Numerabilidad

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **primero numerable** o que X **satisface el primer axioma de numerabilidad** si para cada $p \in X$ existe una colección numerable de vecindades abiertas $\{U_n\}$ de p tal que para cada vecindad abierta A de p existe un entero positivo n tal que $U_n \subset A$. Por otro lado, decimos que X es **segundo numerable** o que X

satisface el segundo axioma de numerabilidad si posee una base $\mathcal{B}$ numerable.

Es inmediato comprobar que si un espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad, también satisface el primero. Observemos además que podemos reescribir el primer axioma de numerabilidad como sigue: Un espacio topológico X es primero numerable si y sólo si para cada punto $p \in X$ existe una familia numerable $\{U_n\}$ de vecindades abiertas de p, con $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$, tal que para cualquier vecindad abierta A de p existe un entero positivo n tal que $U_n \subset A$.

Ahora, enunciaremos una propiedad importante de los espacios segundo numerables:

Proposición A.0.3. *Sea X un espacio topológico segundo numerable. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una familia de conjuntos abiertos tales que $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha = X$ entonces existen $\alpha_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N}$ tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i} = X$. Utilizando una terminología que utilizaremos más adelante, esta proposición nos dice que toda cubierta abierta de un espacio segundo numerable posee una subcubierta numerable.*

En [6, p. 37] podemos encontrar una prueba de este hecho.

Convergencia

Sea X un conjunto. Una **sucesión** que toma valores en X es una función $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to X$. Los valores $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \ldots$ se denotarán respectivamente por $x_1, x_2, \ldots$. También denotaremos $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que toma valores en X, y $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente que toma valores en $\mathbb{N}$ (esto es, $n_k < n_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$), decimos que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una **subsucesión** de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sea X un espacio topológico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que toma valores en X. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge** al punto $x \in X$ si para cada vecindad abierta U de x existe un número N tal que $x_n \in U$ para todo entero positivo $n \geq N$. En este caso decimos que x es el **límite** de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y se denota $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Es claro que toda subsucesión de una sucesión convergente, converge al mismo límite que la sucesión original. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en ciertos espacios con los que estamos más acostumbrados a trabajar, una sucesión puede converger a dos puntos distintos en un mismo espacio. Más adelante estudiaremos condiciones sobre los espacios topológicos para garantizar que el límite de toda sucesión sea único.

Proposición A.0.4. *Sean X un espacio primero numerable, $x \in X$ y sean $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ vecindades abiertas de x dadas por el primer axioma de numerabilidad. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que toma valores en X tal que $x_n \in U_n$ $\forall n$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Demostración. Si U es una vecindad abierta de x entonces existe un entero positivo m tal que $U_m \subset U$. Puesto que $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$, se sigue que $U_i \subset U$ $\forall i \geq m$. Finalmente, como $x_i \in U_i$ $\forall i$, se tiene que, para $i \geq m$, $x_i \in U_i \subset U$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, como queríamos. $\square$

Ejemplo A.0.5. *Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos*

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\ (a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\ (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{B} = \{(a,b), (a,\infty), (-\infty,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Es fácil ver que la intersección de cualesquiera par de elementos de $\mathcal{B}$ es de nuevo un elemento de $\mathcal{B}$. A los elementos de $\mathcal{B}$ los llamamos ***intervalos abiertos****. Lo anterior significa que $\mathcal{B}$ es base de alguna topología para $\mathbb{R}$, en virtud del Corolario A.0.2, la cual denotaremos por $\tau_{\mathbb{R}}$. Dicha topología se llama* ***topología usual*** *de $\mathbb{R}$. Con esta topología, $\mathbb{R}$ es un espacio topológico segundo numerable. En efecto, el conjunto $C = \{(a,b), (a,\infty), (-\infty,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ es numerable y genera la misma topología que $\mathcal{B}$, por la siguiente razón: Si (a,b) es un intervalo abierto cualquiera entonces $a, b \in \mathbb{R}$ y existe una sucesión decreciente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión creciente $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ que convergen a a, b, respectivamente, tales que $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n$. Por ello, $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ y todo elemento de $\mathcal{B}$ es generado por elementos de C.*

A.0.2. Interior, Cerradura, Exterior y Frontera

Para cada subconjunto A del espacio topológico X, clasificamos a los puntos $x \in X$ de acuerdo a si sus vecindades intersecan siempre o no al conjunto A o a su complemento $X \setminus A$.

Definición A.0.6. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subset X$.*

1. *Decimos que x es* ***punto interior*** *de A si existe una vecindad abierta U de x tal que $U \subset A$. Al conjunto de todos los puntos interiores de A lo denotamos por* $\mathrm{int}(A)$ *y le llamamos* ***interior*** *de A.*
2. *Decimos que x es* ***punto frontera*** *de A si para toda vecindad abierta U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap X \backslash A \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos frontera de A lo denotamos por* $\mathrm{fr}(A)$ *y le llamamos* ***frontera*** *de A.*
3. *Decimos que x es* ***punto exterior*** *de A si existe una vecindad abierta U de x tal que $U \subset X \backslash A$. Al conjunto de todos los puntos exteriores de A lo denotamos por* $\mathrm{ext}(A)$ *y le llamamos* ***exterior*** *de A.*
4. *Decimos que x es* ***punto límite*** *de A si para toda vecindad abierta U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos límite de A lo denotamos por $\overline{A}$ y le llamamos la* ***cerradura*** *de A.*

Las definiciones anteriores son muy ilustrativas en el sentido de que geométricamente es fácil “ver” cuándo un punto es interior o exterior a un conjunto, o bien si es un punto frontera. Además, no es difícil ver que todo punto $x \in X$ satisface una y sólo una de las primeras 3 condiciones anteriores, y que la cuarta se satisface si y sólo si se satisfacen la primera y la segunda.

Es conocido que $\overline{A} = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$ y que $\overline{A}$ es el conjunto de puntos tales que cualquiera de sus vecindades abiertas interseca a A. En términos de elementos básicos, $x \in \overline{A}$ si y sólo si para cualquier elemento básico B que contiene a x se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$.

Proposición A.0.7. *Si X es un espacio topológico primero numerable y $A \subset X$ entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de puntos de A que converge a x.*

Este hecho se demuestra en [6, p. 36].

A.0.3. Topologías Producto y Cociente

Topología Producto

Consideremos ahora dos espacios topológicos X, Y. Nos gustaría definir una topología para su producto cartesiano $X \times Y$ de tal manera que sea compatible con la topología de X y de Y en el sentido de que cuando proyectemos en X (o en Y) un abierto en $X \times Y$ obtengamos un abierto en X (o en Y): La **topología producto** en $X \times Y$ es la generada por la base

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{es abierto en } X, V \text{es abierto en } Y\}.$$

En virtud del Corolario A.0.2, podemos ver que efectivamente $\mathcal{B}$ define una base para una topología de $X \times Y$. En adelante, si tenemos dos espacios X, Y, al referirnos a $X \times Y$ como espacio topológico, implícitamente la topología que le impondremos será la topología producto, salvo que se especifique lo contrario.

Proposición A.0.8. *Si X, Y son espacios segundo numerables entonces $X \times Y$ es segundo numerable.*

Podemos encontrar una demostración de este hecho en [12, p. 218].

Ejemplo A.0.9. *Consideremos el espacio $\mathbb{R}$ con la topología dada por el Ejemplo A.0.5. Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$, definimos inductivamente una topología para $\mathbb{R}^{n+1}$ como la topología producto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$. Dicha topología se llama **topología usual** para $\mathbb{R}^n$. Inductivamente podemos ver que $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Otra manera de demostrar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio segundo numerable es dar explícitamente una base numerable para dicho espacio: Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y para cada $r \in \mathbb{R}^+$ denotemos por $B_r(x)$ al conjunto

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y - x|| < r\},$$

*donde $||z|| = \left(z_1^2 + \ldots + z_n^2\right)^{1/2}$ es la **norma usual** en dicho espacio. A $B_r(x)$ se le llama la **bola abierta de radio** r **centrada en** x. Por otra parte, al conjunto*

$$C_r(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \ldots \times (x_n - r, x_n + r)$$

*le llamamos el n**-cubo abierto centrado en** x **y de lado** $2r$. Por definición de topología producto, $C_r(x)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Es conocido que $\{B_r(x) \mid r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ define una base para la misma topología en $\mathbb{R}^n$.*

Topología Cociente

Si tenemos un espacio topológico, podemos construir nuevos espacios por medio de relaciones de equivalencia en dicho espacio. Procederemos a ilustrar diferentes maneras de construir relaciones de equivalencia en un espacio topológico, para después construir una topología para estos nuevos espacios de manera natural.

Si X un conjunto, una **relación de equivalencia** $\sim$ es una relación binaria tal que para cada $x, y, z \in X$ se tiene lo siguiente:

1. $x \sim x$,

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Las propiedades 1, 2, 3 se llaman respectivamente **reflexividad**, **simetría**, **transitividad**. Si $x \in X$, definimos la **clase de equivalencia de** x por

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por $X/\sim$ y a la función $\pi : X \to X/\sim$ definida por $x \mapsto [x]$ la llamamos **proyección canónica** o **proyección natural**. No es difícil ver que clases de equivalencia distintas son ajenas, y que la unión de todas ellas es el conjunto total.

Si X e Y son conjuntos arbitrarios y $f : X \to Y$ es una función entonces para cada $y \in Y$ denotaremos $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$. A $f^{-1}(y)$ se le llama la **fibra** sobre y.

Proposición A.0.10. *Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva entre dos conjuntos X, Y. La relación en X dada por $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ es una relación de equivalencia en X.*

Otra manera de construir relaciones de equivalencia en un conjunto X es por medio de acciones de grupos en dicho conjunto.

Un **grupo** es un par $(G, \circ)$, donde G es un conjunto arbitrario no-vacío y

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto \circ(g, h) =: g \circ h \end{aligned}$$

es una función que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $g, h, k \in G$, $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$,

2. Existe $e \in G$ tal que $g \circ e = e \circ g = g$,

3. Para cada $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

A la función $\circ : G \times G \to G$ le llamamos **operación** del grupo. La condición de que $\circ$ tome valores en G nos asegura que $\circ$ en efecto es una operación cerrada en G. La propiedad 1 se llama **propiedad asociativa**; al elemento $e \in G$ de la propiedad 2 le llamamos **elemento neutro** de G, y al elemento g^{-1} de la propiedad 3 se le llama **inverso** de g en G.

No es difícil probar que, en un grupo, existe un único $e \in G$ que satisface la condición 2, y para cada $g \in G$ existe un único g^{-1} que satisface la condición 3. Es común identificar el par $(G, \circ)$ con el conjunto G.

Sea X un conjunto y G un grupo. Una **acción** del grupo G en el el conjunto X es una función

$$\Phi : G \times X \to X$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x)$,
2. $\Phi(e, x) = x$, donde e es el neutro de G.

Para cada $g \in G$, definimos

$$\begin{aligned} \Phi^g : X &\to X \\ x &\mapsto \Phi^g(x) := \Phi(g, x). \end{aligned}$$

Por la propiedad 1 tenemos que

$$(\Phi^{g_1} \circ \Phi^{g_2})(x) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x) = \Phi^{g_1 g_2}(x),$$

lo cual prueba que $\Phi^{g_1} \circ \Phi^{g_2} = \Phi^{g_1 g_2}$. Por la propiedad 2 tenemos que

$$\Phi^e(x) = \Phi(e, x) = x = Id_G(x),$$

probando que $\Phi^e = Id_G$. En Particular, $\Phi^g \circ \Phi^{g^{-1}} = \Phi^{gg^{-1}} = \Phi^e = Id_X$, por lo que $\Phi^{g^{-1}} = (\Phi^g)^{-1}$. Esto prueba que $\Phi^g : X \to X$ es biyectiva.

Proposición A.0.11. *Sea X un conjunto y sea $\Phi : G \times X \to X$ una acción de G en X. La relación $\sim$ dada por*

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \Phi^g(x)$$

para algún $g \in G$, es una relación de equivalencia en X.

Definición A.0.12. *Sea $\Phi : G \times X \to X$ una acción de G en X. La* ***órbita*** *de $x \in X$ es el conjunto*

$$G_x = \{\Phi^g(x) \mid g \in G\}.$$

Al conjunto $X/G = \{G_x \mid x \in X\}$ se llama ***espacio de órbitas*** *de la acción Φ.*

Es inmediato comprobar que si $\Phi : G \times X \to X$ es una acción de G en X entonces para cada $x \in X$ se tiene que $[x] = G_x$, donde $[x]$ es la clase de equivalencia de la relación dada por la acción. Por ello, X/G coincide con $X/\sim$.

Si X es un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X, construiremos una topología para $X/\sim$ por medio de

$$\tau_\sim = \{U \subset X/\sim \ \mid \pi^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}.$$

A $\tau_\sim$ se le llama **topología cociente** en $X/\sim$. Al par $(X/\sim, \tau_\sim)$ le llamamos **espacio cociente**.

No es difícil ver que $\tau_\sim$ es una topología en $X/\sim$. Para ver una demostración de este hecho se puede consultar [12, p. 156].

En adelante, cuando construyamos el cociente de un espacio topológico por una relación de equivalencia, asumiremos que posee la topología cociente.

A.0.4. Espacios de Hausdorff y Espacios Normales

Definición A.0.13.

1. *Decimos que el espacio topológico X es un* ***espacio topológico de Hausdorff*** *si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen vecindades U, V de x, y respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$.*
2. *Decimos que el espacio topológico X es un* ***espacio topológico Normal*** *si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$ y si para cada par de conjuntos cerrados $C, D \subset X$, con $C \cap D = \emptyset$, existen vecindades U, V de C, D respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Claramente, todo espacio topológico normal es también un espacio de Hausdorff. En las definiciones anteriores, equivalentemente podemos cambiar "vecindades abiertas" por "elementos básicos". La siguiente proposición es una caracterización de los espacios de Hausdorff.

Proposición A.0.14.

1. *Un espacio topológico X es de Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.*
2. *Sea X un espacio topológico. Si X es de Hausdorff entonces cada sucesión convergente tiene un único punto límite. El recíproco es verdadero si X es primero numerable.*

Demostración.

1. La demostración de esta afirmación aparece en [5, p. 5].
2. La demostración de que en un espacio de Hausdorff cada sucesión convergente tiene un único punto límite se puede encontrar en [6, p. 32].

Supongamos ahora que X es primero numerable y que cada sucesión convergente tiene un único punto límite y probaremos que X es de Hausdorff. Sean $x, y \in X$. Puesto que X es primero numerable, existen familias numerables de vecindades $\{U_k\}, \{V_k\}$ de x, y, respectivamente, tales que $U_{k+1} \subset U_k$ y $V_{k+1} \subset V_k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $W_k = U_k \cap V_k$. Si $W_k = \emptyset$ para algún k, ya terminamos, pues U_k, V_k son las vecindades ajenas de x, y que buscamos; supongamos pues, que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in W_k$. Como W_k es subconjunto tanto de U_k como de V_k, y $x_k \in W_k$, se sigue que $x_k \in U_k, V_k$ $\forall k$. Por la Proposición A.0.4 se sigue que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge tanto a x como a y. Puesto que, por hipótesis, el límite de una sucesión convergente es único, se sigue que $x = y$. Esto prueba que X es de Hausdorff. □

Proposición A.0.15. *Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Si espacio cociente $X/\sim$ es de Hausdorff entonces*

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \mid x \sim y\}$$

es cerrado en $X \times X$. El recíproco es verdadero si la proyección natural π es abierta.

La demostración de este hecho puede consultarse en [6, p. 68-69].

Proposición A.0.16. *En un espacio de Hausdorff, los conjuntos con un solo elemento son cerrados. El producto de dos espacios de Hausdorff es de Hausdorff. Todo subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.*

Demostración. La demostración del primer hecho se demuestra en [6, p. 32].

Sean X, Y espacios de Hausdorff, y sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ distintos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 \neq x_2$. Como X es de Hausdorff y $x_1, x_2 \in X$, existen abiertos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$. De esto se sigue que $(x_1, y_1) \in U_1 \times Y, (x_2, y_2) \in U_2 \times Y$, y estos dos conjuntos son abiertos en $X \times Y$ por ser producto de abiertos, y además su intersección es vacía, ya que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Esto demuestra que el espacio $X \times Y$ es de Hausdorff.

La demostración del tercer hecho la encontramos en [6, p. 53] $\square$

Ejemplo A.0.17. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ dos puntos distintos. Sin pérdida de generalidad supongamos $x > y$. Sea $r = (x - y)/2$. Puesto que $x + r = y - r$, se tiene que $(x - r, x + r)$ y $(y - r, y + r)$ son conjuntos abiertos ajenos que contienen a x e y, respectivamente, probando que $\mathbb{R}$ es de Hausdorff con la topología usual. Esto significa que $\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff para toda $n \in \mathbb{N}$. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio normal. La demostración de este hecho puede consultarse en [12, p. 230-231].*

Ejemplo A.0.18. *Los ejemplos del 1.1.3 al 1.1.5, son ejemplos de espacios cociente de Hausdorff y los ejemplos del 1.1.3 al 1.1.6 son segundo numerables. Sin embargo, la demostración de estos hechos pertenece a secciones posteriores.*

A.0.5. Compacidad y Conexidad

Compacidad y Compacidad Local

Definición A.0.19. *Sea X un conjunto y $A \subset X$. Una **cubierta** de A en X es una familia $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ de subconjuntos de X tal que $A \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha$. Si X posee una topología y C_α es abierto para todo $\alpha \in \Gamma$, decimos que $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una **cubierta abierta** de A en X. Si $\Lambda \subset \Gamma$ y $A \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$, decimos que $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una **subcubierta** de $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ para A.*

En la notación de la definición anterior, si $A = X$ y si $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una cubierta de X en X, diremos simplemente que $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una cubierta de X.

Un espacio topológico X se dice **compacto** si para cada cubierta abierta de X podemos encontrar una subcubierta finita. Un subconjunto $A \subset X$ se dice **compacto** si A es un espacio topológico compacto con la topología relativa. Decimos que el espacio topológico X es **localmente compacto** si cada $x \in X$ posee una vecindad abierta U tal que $\overline{U}$ es compacto.

De la definición de topología relativa es inmediato comprobar lo siguiente: $A \subset X$ es compacto si y sólo si para cualquier cubierta abierta de A en X podemos encontrar una subcubierta finita.

Proposición A.0.20. *Si X es un espacio topológico compacto y $C \subset X$ es cerrado entonces C es compacto.*

En [12, p. 187-188] encontramos una demostración de este hecho.

El siguiente teorema también es útil:

Proposición A.0.21. *Si K es un subconjunto compacto del espacio topológico de Hausdorff X entonces K es cerrado. Más aún, todo espacio de Hausdorff compacto es normal.*

Este hecho se demuestra en [12, p. 231].

Conexidad y Conexidad Local

Definición A.0.22. *Un espacio topológico X es* ***conexo*** *si los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez en X son $\emptyset, X$. Si X no es conexo, decimos que X es* ***disconexo****. Un subconjunto S de un espacio topológico X se dice* ***conexo*** *si S es conexo con la topología relativa. Una* ***componente conexa*** *de X es un subconjunto conexo S de X tal que el único conjunto conexo que contiene a S es S mismo. Un espacio topológico se dice* ***localmente conexo*** *si para cada vecindad abierta U de x existe una vecindad abierta y conexa V de x con $V \subset U$.*

Es fácil ver de la definición que se cumple lo siguiente:

Proposición A.0.23. *Las siguientes afirmaciones sobre el espacio topológico X son equivalentes:*

1. *X es disconexo.*
2. *Existe un subconjunto propio no-vacío A de X que es abierto y cerrado.*
3. *X es unión de dos abiertos no-vacíos disjuntos.*
4. *X es unión de dos cerrados no-vacíos disjuntos.*

Proposición A.0.24. *Si X es un espacio topológico y $B \subset X$ es conexo entonces:*

1. *Si $B \subset A \subset \overline{B}$ entonces A es conexo.*
2. *Si B_α es conexo $\forall \alpha$ y $B_\alpha \cap B$ es conexo entonces $B \cup \bigcup_\alpha B_\alpha$ es conexo.*

En [5, p. 11] encontramos la demostración de este hecho. De la proposición anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario A.0.25. *En cualquier espacio topológico X, sus componentes conexas son cerradas y X es la unión disjunta de sus componentes. Si X es localmente conexo entonces las componentes son abiertas también.*

Paracompacidad

Definición A.0.26. *Sea X un espacio topológico y sean $\{U_\alpha\}, \{V_i\}$ cubiertas de X. Decimos que $\{V_i\}$ es un* ***refinamiento*** *de $\{U_\alpha\}$ si para cada i existe α tal que $V_i \subset U_\alpha$. Decimos que la cubierta $\{U_\alpha\}$ es* ***localmente finita*** *si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que U interseca a sólo una cantidad finita de U_α. El espacio X se llama* ***paracompacto*** *si es un espacio de Hausdorff, y si toda cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X admite un refinamiento localmente finito, en el cual cada elemento del refinamiento es abierto en X.*

Lema A.0.27. *Si X es localmente compacto y segundo numerable entonces X admite una base numerable $\mathcal{F}$ tal que $\forall B \in \mathcal{F}$, $\overline{B}$ es compacto.*

Demostración del Lema: Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X, y sea

$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} \mid \overline{B} \text{ es compacto}\}.$$

Claramente $\mathcal{F}$ es numerable. Probaremos que $\mathcal{F}$ es base, utilizando la Proposición A.0.1, y habremos terminado. Como X es localmente compacto, para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta V_x de x tal que $\overline{V_x}$ es compacto. Puesto que todo abierto es unión de elementos básicos, para cada $x \in X$ existe $B^x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B^x \subset V_x$. Entonces $\overline{B^x} \subset \overline{V_x}$. Como $\overline{V_x}$ es compacto y $\overline{B^x}$ es un subconjunto cerrado, por la Proposición A.0.20 tenemos que $\overline{B^x}$ es compacto. Por lo tanto, la colección $\{B^x \mid x \in X\}$ consiste de elementos básicos que cubren a X y cuya cerradura es compacta. Como $\{B^x \mid x \in X\}$ es una cubierta para X y $\{B^x \mid x \in X\} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ es cubierta para X.

Sean ahora $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$. Si $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset B_1 \cap B_2$. Esto implica que $\overline{B} \subset \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$; como $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ es intersección finita de compactos, es también un conjunto compacto. Por la Proposición A.0.20, $\overline{B}$ es compacto y $B \in \mathcal{F}$. Esto demuestra que $\mathcal{F}$ satisface las condiciones de la Proposición A.0.1, probando que $\mathcal{F}$ es base para X.
$\triangledown$

Proposición A.0.28. *Si X es localmente compacto y segundo numerable entonces X admite una cubierta abierta numerable $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ con la propiedad de que $\overline{U_n}$ es compacto para todo n y $U_{n+1} \supset \overline{U_n}$.*

Demostración. Por el Lema anterior, X admite una base numerable $\mathcal{F}$ en la que sus elementos tienen cerradura compacta. Como $\mathcal{F}$ es numerable, podemos renombrar sus elementos por $\mathcal{F} = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Para cada entero positivo n, construiremos los abiertos U_n tales que $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ y $\overline{U_n}$ es compacto, como sigue. Para $n = 1$, $U_1 = B_1$ y claramente $\overline{U_1}$ es compacto. Como $\mathcal{F}$ cubre a X, $\overline{U_1}$ es compacto y cubierto por $\mathcal{F}$, por lo que existe una subcubierta finita de $\overline{U_1}$ dada por elementos de $\mathcal{F}$, de la forma $\{B_k\}_{k=1}^{i_1}$. Sea $U_2 = \bigcup_{k=1}^{i_1} B_k$. Como es una unión finita, $\overline{U_2} = \bigcup_{k=1}^{i_1} \overline{B_k}$, por lo que, al ser unión finita de compactos, $\overline{U_2}$ es compacto. En general, si U_n tiene cerradura compacta, definimos U_{n+1} como la subcubierta finita de $\overline{U_n}$ dada por $\mathcal{F}$, digamos que es de la forma $\{B_k\}_{k=1}^{i_n}$. Definiendo $U_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{i_n} B_k$, tenemos que $\overline{U_{n+1}}$ es unión finita de compactos, por lo que también es compacto y $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$. Además, vamos a pedir que la sucesión $\{i_1, i_2, \ldots\}$ sea estrictamente creciente.

Hemos, pues, construido una familia de abiertos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ y $\overline{U_n}$ es compacto. Más aún,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{i_n} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = X,$$

ya que pedimos que la sucesión $(i_n)_{n=1}^{\infty}$ sea estrictamente creciente. □

Proposición A.0.29. *Si X es segundo numerable, de Hausdorff y localmente compacto entonces es paracompacto.*

En [5, p. 9] se demuestra este hecho, haciendo uso del Lema anterior.

Proposición A.0.30. *Si X es paracompacto entonces X es normal.*

Demostración. Primero demostraremos el siguiente lema:

Lema A.0.31. *Si X es paracompacto entonces X es **regular**, es decir, si $C \subset X$ es cerrado y $x \notin C$ entonces existen vecindades abiertas disjuntas U, V de x, C, respectivamente.*

La demostración de este lema aparece en [5, p. 9-10].

Volviendo a la prueba de la Proposición, sean ahora, C, D conjuntos cerrados y ajenos en X. Para cada $c \in C$, por el lema anterior existen vecindades abiertas y ajenas V_c, U_c de c, D, respectivamente. Como $\{V_c\}_{c\in C}$ es una cubierta abierta de C, tenemos que $\{V_c\}_{c\in C} \cup \{X\backslash C\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\{W_\alpha\}$ el refinamiento localmente finito dado por la paracompacidad de X y sea $\mathcal{F} = \{W_\alpha \mid W_\alpha \cap C \neq \emptyset\}$. Para cada $d \in D$, sea U_d una vecindad abierta de d que interseca a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$, digamos a $W_{\alpha_{d_1}}, \ldots, W_{\alpha_{d_{k(d)}}}$. Como $\mathcal{F}$ es subconjunto del refinamiento de $\{V_c\}_{c\in C} \cup \{X\backslash C\}$ existe $c_{d_i} \in C$ tal que $W_{\alpha_{d_i}} \subset V_{c_{d_i}}$. Sea $U'_d = U_d \cap \bigcap_{i=1}^{k(d)} U_{c_{d_i}}$. Como $W_{\alpha_{d_i}} \subset V_{c_{d_i}}$ y $V_{c_{d_i}} \cap U_{c_{d_i}} = \emptyset$, se tiene que $U'_d \cap W_{\alpha_{d_i}} = \emptyset$. Esto prueba que U'_d es una vecindad abierta de d que no interseca a ningún elemento de $\mathcal{F}$. Sean $U = \bigcup_{d\in D} U'_d$ y $V = \bigcup_{W_\alpha \in \mathcal{F}} W_\alpha$. Claramente U, V son vecindades abiertas de D, C, respectivamente. Además, como ningún U'_d interseca a ningún W_α, $U \cap V = \emptyset$, probando que X es normal. $\square$

A.0.6. Continuidad y Homeomorfismos

Ahora estudiaremos uno de los conceptos de topología más importantes: El concepto de función continua.

Definición A.0.32. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es **continua en** $x \in X$ si para cada vecindad abierta V de $f(x)$ existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subset V$. Si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para cualquier abierto V en Y, decimos que f es **continua**. Si $f : X \to Y$ es continua, biyectiva y f^{-1} es también una función continua, decimos que f es un **homeomorfismo**. Dos espacios topológicos X, Y se dicen **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos.*

Es inmediato comprobar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si es continua en x para todo $x \in X$. También podemos ver que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para cualquier cerrado C en Y. Además, una función es continua si y sólo si $f^{-1}(B)$ es abierto para todo B elemento básico de la topología de Y.

Proposición A.0.33. *Si $f : X \to Y$ es continua en x y $g : Y \to Z$ es continua en $f(x)$ entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua en x. En particular, la composición de funciones continuas es continua.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de $g(f(x))$. Puesto que g es continua en $f(x)$, existe una vecindad abierta V de $f(x)$ tal que $g(V) \subset U$.

Puesto que f es continua en x, existe una vecindad abierta W de x tal que $f(W) \subset V$. Esto implica que

$$(g \circ f)(W) = g(f(W)) \subset g(V) \subset U,$$

probando que $g \circ f$ es continua en x. □

Por otro lado, un homeomorfismo f entre dos espacios topológicos X e Y nos da una biyección no sólo entre los conjuntos X, Y, sino también entre sus topologías. En efecto, si U es abierto en X entonces $f^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo, y por lo tanto es continua. Esto implica que $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en Y. Como f es biyectiva, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$. Por tanto, la imagen de abiertos bajo homeomorfismos es abierto. De la misma manera, si V es un abierto en Y entonces $f : X \to Y$ es continua y $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Por lo tanto, a cada abierto en X le corresponde un abierto en Y y viceversa. Esto nos dice que, aunque dos espacios topológicos estén representados de manera diferente, si estos son homeomorfos entonces son esencialmente el mismo espacio. Más aún, $id_X : X \to X$ es homeomorfismo; si $f : X \to Y$ es homeomorfismo entonces $f^{-1} : Y \to X$ es también homeomorfismo; y si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ son homeomorfismos, $g \circ f : X \to Z$ es también homeomorfismo. Por tanto, la condición de ser homeomorfos define una relación de equivalencia entre los espacios topológicos y nos permite clasificarlos de acuerdo a esta relación.

Ahora daremos una caracterización que a veces resulta útil para determinar si una función es continua.

Proposición A.0.34. *Si X, Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ entonces f es continua si y sólo si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.*

La demostración de este hecho puede encontrarse en [12, p. 118-119].

Definición A.0.35. *Sean X, Y espacios topológicos. La función $f : X \to Y$ se llama **abierta** si para cada conjunto abierto $U \subset X$ se tiene que $f(U)$ es abierto en Y. De la misma manera, f se dice **cerrada** si la imagen de cualquier conjunto cerrado en X es también un conjunto cerrado en Y.*

Proposición A.0.36. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es continua, biyectiva y abierta entonces es homeomorfismo. De la misma manera, si f es continua, biyectiva y cerrada entonces f es homeomorfismo.*

Demostración. Puesto que f es biyectiva y continua, resta probar que f^{-1} es continua. Supongamos que f es abierta, y sea $U \subset X$ abierto. Puesto que f es abierta, $f(U)$ es abierto en Y. Por otro lado, $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, pues f es biyectiva, es decir, la imagen inversa de abiertos en X bajo f^{-1} es abierto en Y, probando que f^{-1} es continua. La demostración para el caso en que f es cerrada es completamente análoga. □

Proposición A.0.37. *Si $f : X \to Y$ es continua y X es compacto entonces $f(X)$ es compacto.*

Una demostración de esta propiedad puede encontrarse en [12, p. 189].

Proposición A.0.38. *Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo entonces $f(X)$ es conexo en Y.*

Una demostración de esta propiedad puede encontrarse en [12, p. 170-171].

Proposición A.0.39. *Sea X un espacio conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual. Si $f(u) < f(v)$ y $f(u) < r < f(v)$ entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = r$.*

Podemos encontrar una demostración de esta proposición en [12, p. 175].

Por lo anterior, es fácil ver que los únicos conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos.

Ahora daremos una caracterización de continuidad en espacios primero numerables.

Proposición A.0.40. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Si f es continua entonces para cada $x \in X$ y para cada sucesión de puntos en X $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente a x se tiene que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$. El recíproco es verdadero si X es primero numerable.*

Este hecho aparece en [12, p. 217].

Proposición A.0.41. *Si $f, g : X \to Y$ son continuas y Y es Hausdorff entonces $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$ y supongamos que $x \notin A$. Esto quiere decir que $f(x) \neq g(x)$, por lo que existen vecindades abiertas U, V de $f(x), g(x)$, respectivamente, tales que $f(x) \in U, g(x) \in V, U \cap V = \emptyset$, ya que Y es de Hausdorff. Puesto que f, g son continuas, $f^{-1}(U), g^{-1}(V)$ son abiertos que contienen a x. Si $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ entonces existe $p \in W \cap A$, ya que $x \in W$ y $x \in \overline{A}$. Como $p \in A$, $f(p) = g(p)$. Sin embargo, $p \in W \subset f^{-1}(U)$, por lo que $f(p) \in U$; de la misma manera, $g(p) \in V$, pero $f(p) = g(p) \in U \cap V$, lo cual es una contradicción, ya que $U \cap V = \emptyset$. Esto demuestra que $x \in A$ y $A = \overline{A}$. $\square$

Espacios Localmente Euclídeos

Definición A.0.42. *Sean X, Y espacios topológicos. Decimos que X es* ***localmente homeomorfo*** *a Y si para cada $x \in X$ existe un par (U, φ), donde U es una vecindad abierta de x y $\varphi : U \to A \subset Y$ es homeomorfismo, donde A es un conjunto abierto en Y. Recordemos que U y A poseen la topología relativa correspondiente.*

Definición A.0.43. *Decimos que X es* ***localmente euclídeo*** *si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Si X es localmente euclídeo, existe una familia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tal que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ y $\varphi_i : U \to \varphi(U)$ es un homeomorfismo, donde $\varphi(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Definición A.0.44. *Si X es un espacio localmente euclídeo y (U, φ) es un par tal que $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un homeomorfismo y $\varphi(U)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$, decimos que (U, φ) es una* ***carta local****. Si $x \in X$ y (U, φ) es una carta local con $x \in U$, decimos que (U, φ) es una* ***vecindad coordenada*** *de x.*

Proposición A.0.45. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente homeomorfo a un espacio de Hausdorff localmente compacto Y entonces X es localmente compacto. En particular, los espacios de Hausdorff localmente euclídeos son localmente compactos.*

Demostración. Para demostrar esta proposición, necesitamos el siguiente lema:

Lema A.0.46. *Si X es de Hausdorff entonces es localmente compacto si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada vecindad abierta U de X existe una vecindad abierta V de x tal que $\overline{V}$ es un conjunto compacto contenido en U.*

Este hecho se puede encontrar demostrado en [12, p. 211].

Volviendo a la Proposición, si $x \in X$, existe una vecindad abierta U de x que es homeomorfa a un abierto V de Y, y sea $f : U \to V$ el homeomorfismo. Como $U \subset X$ y X es Hausdorff, U es Hausdorff. Como V es vecindad abierta de $f(x)$ en el espacio localmente compacto Y, el lema anterior implica que existe una vecindad abierta W de $f(x)$ tal que $\overline{W}$ es compacto en Y y que está contenida en V. Como $f : U \to V$ es homeomorfismo, $f^{-1} : V \to U$ es continua y por la Proposición A.0.37 se tiene que $f^{-1}(\overline{W})$ es compacto en X. Como f^{-1} es continua, por la Proposición A.0.34 se tiene que $f^{-1}(\overline{W}) \subset \overline{f^{-1}(W)}$. Como $f^{-1}(\overline{W})$ es compacto en U, el cual es de Hausdorff, se sigue por la Proposición A.0.21 que $f^{-1}(\overline{W})$ es cerrado en U, por lo que $\overline{f^{-1}(W)} \subset \overline{f^{-1}(\overline{W})} = f^{-1}(\overline{W})$. Como f^{-1} es continua, $f^{-1}(\overline{W}) \subset \overline{f^{-1}(W)}$, lo cual, por las contenciones anteriores, implica que se tiene la igualdad $f^{-1}(\overline{W}) = \overline{f^{-1}(W)}$. Esto demuestra que $\overline{f^{-1}(W)}$ es compacto, es decir, $f^{-1}(W)$ es vecindad de x en U con cerradura compacta. Como $f^{-1}(W)$ es compacto en U, es compacto en X. Como $x \in X$ es arbitrario, y $f^{-1}(W)$ es vecindad de x en X con cerradura compacta. se sigue que X es localmente compacto. □

Proposición A.0.47. *Sea X un espacio topológico segundo numerable, y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Si $X/\sim$ es localmente euclídeo entonces también es segundo numerable.*

Demostración. Para demostrar esta proposición, necesitamos el siguiente lema:

Lema A.0.48. *Si X es un espacio localmente euclídeo, existe una familia de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ tal que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ y $\varphi(U)$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración del Lema: Sea $x \in X$. Como X es localmente euclídeo existe una carta (U_x, φ_x) tal que $x \in U_x$. Puesto que $\varphi_x(x) \in \varphi_x(U_x)$ y $\varphi_x(U_x)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, existe una bola B con $\varphi_x(x) \in B \subset \varphi_x(U_x)$. Si $V_x = (\varphi_x)^{-1}(B)$ y $\psi_x = \varphi_x|_{V_x}$, tenemos que (V_x, ψ_x) es de nuevo una carta con $x \in V_x$. La familia $\{(V_x, \psi_x)\}_{x\in X}$ satisface las condiciones del lema. ▽

Utilizando el lema anterior, y siguiendo la demostración que viene en [6, p. 68], obtenemos el resultado. □

Proposición A.0.49. *El producto de dos espacios localmente euclídeos es también localmente euclídeo.*

Demostración. Sean M y N espacios localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Si $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}$ son las familias de cartas que cubren a M y N respectivamente entonces $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}$ son cartas para $M \times N$, las cuales definen homeomorfismos locales a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+m}$. Por ello, $M \times N$ es también localmente euclídeo. □

Ejemplo A.0.50. *Los ejemplos del 1.1.3 al 1.1.6, son ejemplos de espacios cociente de segundo numerables y localmente euclídeos. En virtud de la proposición anterior, basta probar que son espacios localmente euclídeos, ya que el espacio del cual se toma el cociente es un espacio segundo numerable. Sin embargo, la demostración de este hecho pertenece a la siguiente subsección.*

Continuidad en Espacios Producto y Cociente

Definición A.0.51. *Sean X, Y espacios topológicos. La función $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por $\pi_1(x, y) = x$ se llama **proyección en la primer componente**. Análogamente, la función $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por $\pi_2(x, y) = y$ se llama **proyección en la segunda componente**.*

Proposición A.0.52. *Las proyecciones en la primer y segunda componente son continuas y abiertas.*

Demostración. Haremos la prueba sólo para la proyección en la primer componente, pues la otra es análoga. Sea U un abierto en X. Observemos que

$$\pi_1^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_1(x, y) \in U\} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in U\} = U \times Y.$$

Puesto que Y es abierto en Y, $\pi_1^{-1}(U)$ es abierto en $X \times Y$, por lo que π_1 es continua.

Sea ahora $A \subset X \times Y$ un abierto. Esto significa que existen $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{V_i\}_{i \in I}$ familias de abiertos en X e Y, respectivamente, tales que $A = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$.

$$\pi_1(A) = \pi_1\left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi_1(U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

por lo que $\pi_1(A)$ es unión de abiertos en X y por lo tanto, un abierto. Esto demuestra que π_1 es abierta. $\square$

Proposición A.0.53. *Sea $f : X \times Y \to Z$ una función continua. Si $y \in Y$, la función $f_y : X \to Z$ dada por $f_y(x) = f(x, y)$ es continua.*

Demostración. Sea $i_y : X \to X \times Y$ dada por $i_y(x) = (x, y)$. Claramente, $f_y = f \circ i_y$, por lo que basta probar que i_y es continua. Sea $U \times V$ un elemento básico en $X \times Y$. Observemos que $i_y^{-1}(U \times V) = \emptyset$ si $y \notin V$ y que $i_y^{-1}(U \times V) = U$ si $y \in V$, probando que en cualquier caso, $i_y^{-1}(U \times V)$ es abierto en X. $\square$

De manera análoga, la función $j_x : Y \to X \times Y$ dada por $j_x(y) = (x, y)$ es continua.

Proposición A.0.54. *Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X Si $X/\sim$ se dota de la topología cociente entonces $\pi : X \to X/\sim$ es continua.*

Demostración. El resultado es inmediato de la definición de topología cociente: Si $U \subset X/\sim$ es abierto entonces, por definición, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X. Como $U \subset X/\sim$ es abierto arbitrario, π es continua. $\square$

El siguiente criterio nos da condiciones suficientes para que el cociente de un espacio segundo numerable sea también segundo numerable:

Proposición A.0.55. *Sea X un espacio topológico segundo numerable y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Si $\pi : X \to X/\sim$ es abierta entonces $X/\sim$ es segundo numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X y sea $\pi : X \to X/\sim$ la proyección canónica. Probaremos que $C = \{\pi(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base para $X/\sim$. Puesto que π es abierta, C es una familia de conjuntos abiertos en $X/\sim$. Si $U \subset X/\sim$ es un conjunto abierto entonces $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X, por lo que existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$. Puesto que π es sobreyectiva, $U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\big(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B\big) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} \pi(B)$, por lo que U es unión de elementos de C, probando que C es base. Puesto que $\mathcal{B}$ y C tienen la misma cardinalidad, C es base numerable de $X/\sim$, probando que $X/\sim$ es segundo numerable. $\square$

Más de Acciones de Grupos

Definición A.0.56. *Sea Γ un grupo. Decimos que Γ es un* ***grupo discreto*** *si Γ es además un espacio topológico con la topología discreta.*

Lema A.0.57. *Si $A \subset X$ y si $\Phi : \Gamma \times X \to X$ es una acción en X entonces*

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Phi^{\gamma}(A) \qquad y \qquad \Phi^{-1}(A) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{\gamma\} \times (\Phi^{\gamma})^{-1}(A).$$

Demostración del Lema:

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(A)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(A)\} = \{x \in X \mid [x] \in \pi(A)\} = \{x \in X \mid x \sim a, a \in A\} \\ &= \{x \in X \mid x = \Phi^\gamma(a), a \in A, \gamma \in \Gamma\} = \{\Phi^\gamma(a) \mid a \in A, \gamma \in \Gamma\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Phi^\gamma(A).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(A) &= \{(\gamma, x) \in \Gamma \times X \mid \Phi(\gamma, x) \in A\} = \{(\gamma, x) \in \Gamma \times X \mid x \in (\Phi^\gamma)^{-1}(A)\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{\gamma\} \times (\Phi^\gamma)^{-1}(A).\end{aligned}$$

$\triangledown$

Definición A.0.58. *Sea X un espacio topológico y Γ un grupo arbitrario. Decimos $\Phi : \Gamma \times X \to X$ es una acción **continua** si $\Phi : \Gamma \times X \to X$ es continua.*

Proposición A.0.59. *Si Γ es un grupo discreto entonces la acción Φ es continua si y sólo si Φ^γ es continua para todo γ.*

Demostración. Para cada $\gamma \in \Gamma$ tenemos que $\Phi^\gamma = \Phi \circ j_\gamma$, por lo que si Φ es continua entonces Φ^γ es continua (notemos que para esta parte no utilizamos la hipótesis de que Γ es discreto).

Supongamos ahora que Φ^γ es continua para todo $\gamma \in \Gamma$ y sea U un abierto en X. Observemos que $\Phi^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{\gamma\} \times (\Phi^\gamma)^{-1}(U)$. Puesto que U es abierto en X y Φ^γ es continua para todo $\gamma \in \Gamma$, se sigue que $(\Phi^\gamma)^{-1}(U)$ es abierto en X para cada γ. Como Γ tiene la topología discreta, $\{\gamma\}$ es abierto en Γ, por lo que $\{\gamma\} \times (\Phi^\gamma)^{-1}(U)$ es abierto en $\Gamma \times X$. Como $\Phi^{-1}(U)$ es unión de abiertos en $\Gamma \times X$, es abierto, probando que Φ es continua. $\square$

Si Φ^γ es continua para cada $\gamma \in \Gamma$, se sigue que $\Phi^\gamma : X \to X$ es homeomorfismo, ya que $(\Phi^\gamma)^{-1} = \Phi^{\gamma^{-1}}$. Esto implica que, para cada abierto U, $\Phi^\gamma(U)$ es abierto. Por ello, la acción Φ es continua si y sólo si Φ^γ es homeomorfismo para cada $\gamma \in \Gamma$.

Proposición A.0.60. *Si $\Phi : \Gamma \times X \to X$ es una acción continua entonces $\pi : X \to X/\Gamma$ es abierta.*

Demostración. Sea U un abierto en X. Observemos que $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Phi^\gamma(U)$, el cual es abierto, ya que Φ^γ es homeomorfismo y U es abierto. Por definición de topología cociente, $\pi(U)$ es abierto y π es una función abierta. $\square$

Corolario A.0.61. *Si X es segundo numerable y $\Phi : \Gamma \times X \to X$ es una acción continua entonces X/Γ es segundo numerable.*

Definición A.0.62. *Si Γ actúa continuamente sobre un espacio topológico, decimos que la acción de Γ es* ***propiamente discontinua por compactos*** *si para cada conjunto compacto $K \subset X$ existen sólo un número finito de $\gamma \in \Gamma$ tales que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$.*

Definición A.0.63. *Si Γ actúa en un espacio X localmente compacto, decimos que la acción es* ***propiamente discontinua*** *si la acción es continua y si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ que no pertenecen a la misma órbita, existen vecindades abiertas U, V de x, y respectivamente, tales que $U \cap \gamma V = \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$.*

Definición A.0.64. *Si Γ actúa en un espacio X localmente compacto, decimos que la acción es* ***recubridora*** *si la acción es continua y si para cualquier $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que $U \cap \gamma U = \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$ distinto de e.*

Proposición A.0.65. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Si Γ actúa en X de manera propiamente discontinua por compactos entonces X/Γ es de Hausdorff.*

La demostración de este resultado puede encontrarse en [11, p. 174].

Proposición A.0.66. *Sea X un espacio topológico. Γ actúa en X de manera propiamente discontinua si y sólo si X/Γ es de Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que Φ es propiamente discontinua y sean $[x], [y] \in X/\sim$ puntos distintos. Sean U, V vecindades de x, y, respectivamente, dadas por la discontinuidad propia. Puesto que Φ es continua, π es abierta, por lo que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son vecindades abiertas de $[x]$ e $[y]$, respectivamente. Probaremos que estas vecindades son ajenas: Si $[z] \in (\pi(U) \cap \pi(V))$ entonces existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $u\tilde{z}$ y $v\tilde{z}$, lo que implica que $u\tilde{v}$, y por ello existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\Phi^\gamma(u) = v$. Esto significa que $v \in \gamma U$, por lo que $v \in V \cap \gamma U$. Esto es una contradicción, ya que tenemos $V \cap \gamma U = \emptyset$, probando que $X/\sim$ es de Hausdorff.

Recíprocamente, si $X/\sim$ es de Hausdorff entonces, para cualesquiera $x, y \in X$ que pertenecen a órbitas distintas, existen vecindades abiertas y ajenas U, V de $[x], [y]$ respectivamente. Observemos que, por definición de topología cociente, $\pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(V)$ son vecindades abiertas de x, y;

más aún, son ajenas, pues $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Finalmente, observemos que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\pi(x) = \pi(\phi^\gamma(x))$, por lo cual,

$$\gamma\pi^{-1}(V) = \{\phi^\gamma(x) \mid \pi(x) \in V\} = \{x \mid \pi(x) \in V\} = \pi^{-1}(V).$$

Puesto que $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$, se tiene que $\pi^{-1}(U) \cap \gamma\pi^{-1}(V) = \emptyset$, probando la discontinuidad propia. $\square$

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores tenemos el siguiente corolario:

Corolario A.0.67. *En un espacio de Hausdorff localmente compacto, toda acción propiamente discontinua por compactos es propiamente discontinua.*

Proposición A.0.68. *Si* $\Phi : \Gamma \times X \to X$ *es una acción recubridora entonces* $\pi : X \to X/\Gamma$ *es localmente inyectiva.*

Demostración. Sea $x \in X$. Puesto que la acción es recubridora, existe U vecindad abierta de x tal que $\gamma U \cap U = \emptyset$ para todo $\gamma \neq e$. Consideremos la restricción $\pi|_U : U \to X/\Gamma$. Sean $x, y \in U$ tales que $\pi(x) = \pi(y)$. Esto significa que $x \sim y$, por lo que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\Phi^\gamma(x) = y$. Puesto que $x \in U$, $\gamma x \in \gamma U$, es decir, $y \in \gamma U$. Como $y \in U$, se tiene que $U \cap \gamma U \neq \emptyset$. Esto implica que $\gamma = e$ por definición de U. Por ello, $y = \Phi^e(x) = x$ y π es inyectiva. $\square$

Proposición A.0.69. *Si* $\pi : X \to X/\Gamma$ *es inyectiva, y* Γ *es una acción continua entonces es homeomorfismo.*

Demostración. Sabemos que π siempre es continua y sobreyectiva, por lo que, por hipótesis, es biyectiva. Sin embargo, como la acción es continua se sigue que π es abierta, probando que es homeomorfismo. $\square$

Corolario A.0.70. *Si* Φ *es una acción recubridora y continua sobre* X *entonces* $\pi : X \to X/\Gamma$ *es un homeomorfismo local.*

Por lo anterior, ya somos capaces de demostrar que los espacios dados en los ejemplos 1.1.3, 1.1.4 y 1.1.5 son de Hausdorff, segundo numerables y localmente euclídeos.

Puesto que todos esos espacios se construyeron como cociente en un espacio segundo numerable, basta probar que son localmente euclídeos para tener que son segundo numerables. Para demostrar que son localmente euclídeos, utilizaremos la proposición anterior, como sigue: Primero mostraremos que para cada punto $p \in X$ existe una vecindad U en la cual π es inyectiva. Puesto que la acción de cada uno de estos espacios es continua, tendremos que $\pi|_U : U \to U/\Gamma \subset X/\Gamma$ es homeomorfismo. Por ello, $(\pi|_U)^{-1} : U/\Gamma \to U$ es homeomorfismo local, donde $U \subset X$ es un abierto en un espacio euclidiano. Sin embargo, dicha vecindad U puede construirse como el interior de una región fundamental, el cual ya sabemos que existe, tal como lo vimos en cada uno de los ejemplos. Esto demuestra que estos ejemplos son localmente euclídeos y segundo numerables.

Para probar que son de Hausdorff, probaremos que la acción que define a estos espacios es propiamente discontinua.

Ejemplo A.0.71. *Para probar que el n-Toro esté definido por medio de una acción propiamente discontinua, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sea $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $z \sim y$ satisfaciendo que todas y cada una de las coordenadas de $z - x$ pertenezcan a $(-1, 1)$. Dicho z existe, porque podemos ir restando o sumando de 1 en 1 a las coordenadas de y hasta obtener una diferencia menor que 1 con respecto a las coordenadas de x. Por definición de z, existe un n-cubo C de lado 1 cuyo interior contiene a z y x. Puesto que el interior de C es abierto y contiene a z y x, existen vecindades abiertas y ajenas U, V de z, x, respectivamente, totalmente contenidas en C, pues $\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff. Puesto que C es una región fundamental, para todo $\boldsymbol{m} \in Z^n$ distinto de cero se tiene que $\boldsymbol{m}U \not\subset C$, por lo cual $\boldsymbol{m}U \cap V = \emptyset$ para todo $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n$, probando que la acción es propiamente discontinua.*

Ahora probaremos que $\mathbb{T}^n$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1)^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$. Consideremos la función $f : \mathbb{T}^n \to (\mathbb{S}^1)^n$ dada por

$$f([(x_1, \ldots, x_n)]) = (e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}).$$

Primero probaremos que f está bien definida. Si $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ entonces existe $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (m_1, \ldots, m_n) = (y_1 + m_1, \ldots, y_n + m_n)$. Observemos que $e^{2\pi i x_i} = e^{2\pi i y_i} e^{2\pi i m_i} = e^{2\pi i y_i}$, ya que e^{ix} es 2π-periódica y m_i es entero. Esto prueba que f está bien definida. Claramente f es sobreyectiva, pues para cada $p \in (\mathbb{S}^1)^n$ existe $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $(e^{it_1}, \ldots, e^{it_n}) = p$. Esto implica que $f(1/2\pi(t_1, \ldots, t_n)) = p$. Para probar que f es inyectiva, supongamos que $f([(x_1, \ldots, x_n)]) = f([(y_1, \ldots, y_n)])$. Esto implica que $(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}) = (e^{2\pi i y_1}, \ldots, e^{2\pi i y_n})$. Puesto que e es 2π-periódica, tenemos que $x_i = y_i + m_i$ con $m_i \in \mathbb{Z}$, probando que $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$, y que $[(x_1, \ldots, x_n)] =$

$[(y_1, \ldots, y_n)]$. *Lo anterior demuestra que es biyectiva.*

Los elementos básicos en $\mathbb{S}^1$ *son las imágenes de intervalos abiertos bajo la exponencial,* $\exp((a,b)i)$. *Por ello, la imagen inversa bajo* f *de un elemento básico* $\exp((a_1,b_1)i) \times \ldots \times \exp((a_n,b_n)i)$ *es* $\pi\big((a_1/2\pi, b_1/2\pi) \times \ldots \times (a_n/2\pi, b_n/2\pi)\big)$ *el cual en efecto es un abierto en* $\mathbb{T}^n$ *porque su imagen inversa bajo la proyección canónica es un producto de intervalos abiertos. La demostración de que es abierta es muy parecida, por ello* f *es homeomorfismo.*

Ejemplo A.0.72. *Para probar que la Botella de Klein es un espacio de Hausdorff, haremos lo mismo que en el ejemplo anterior: elegiremos dos representantes que pertenezcan al interior de una región fundamental, y como* $\mathbb{R}^2$ *es de Hausdorff, acabaremos con los mismos argumentos. Recordemos que* $\mathbb{K}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, *donde*

$$\Gamma = \langle g, h \mid ghg^{-1}h = e \rangle$$

y Φ *estaba totalmente determinada por*

$$\Phi^g(x,y) = (x+1, -y), \qquad \Phi^h(x,y) = (x, y+1).$$

Un cuadrado cerrado de lado 1 es una región fundamental, por lo que, para $p, q \in \mathbb{R}^2$, *buscaremos encontrar representantes de clase cuyas coordenadas difieran ambas en menos que 1. Sea* $p = (x,y)$ *y* $q = (a,b)$. *Aplicándole a* p *la operación* Φ^g *(o su inversa) suficientes veces, podemos hacer que la primer coordenada de* q *difiera en menos que 1 que con la de la imagen de* p *bajo esas transformaciones. Posteriormente, aplicándole a* q *la operación* Φ^h *(o su inversa) suficientes veces, podemos hacer que la segunda coordenada difiera en menos que 1, y esto sin alterar la primer coordenada. Con ello, ambas coordenadas difieren en menos que 1, y hemos probado que la acción es propiamente discontinua.*

Ejemplo A.0.73. *Para probar que* $\mathbb{RP}^n$ *es de Hausdorff, probaremos de nuevo que la acción que lo define es propiamente discontinua. Aplicaremos el mismo argumento para los caso anteriores, con una sutil diferencia:* $\mathbb{RP}^n$ *vendrá dado como el cociente de* $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$, *donde* $\Phi^0 = id_{\mathbb{S}^n}$ *y* $\Phi^1(x) = -x$. *En este caso, el espacio que vamos a considerar es la esfera* $\mathbb{S}^n$, *la cual es de Hausdorff, por tener la topología relativa a* $\mathbb{R}^{n+1}$. *La región fundamental para esta acción consiste de una semiesfera. Para cualesquiera dos puntos distintos que pertenecen a diferentes órbitas, hallaremos representantes de ellos que pertenezcan al interior de una misma semiesfera (recordemos que* *al hablar de interior lo consideramos teniendo a $\mathbb{S}^n$ como espacio total, sin pensar que estamos inmersos en $\mathbb{R}^{n+1}$). Para cualesquiera dos puntos $x, y \in \mathbb{S}^n$, tracemos un círculo máximo que no pase por ninguno de los dos. Si dicho círculo no separa a x e y, tenemos que la semiesfera determinada por ese círculo que contiene a x,y es la región fundamental que cuyo interior los contiene, y aplicando argumentos análogos a los ejemplos anteriores, hemos terminado. Si por el contrario, el círculo que tomamos separa a x e y, tenemos que el círculo no separa a $-x$ e y, por lo que con estos representantes podemos aplicar el argumento. Esto demuestra que la acción que determina a $\mathbb{RP}^n$ es propiamente discontinua, y por ello dicho espacio es de Hausdorff.*

Ejemplo A.0.74. *El ejemplo 1.1.6 nos muestra una acción de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que no es propiamente discontinua, por lo cual el espacio de órbitas Orb_v **no** es de Hausdorff. Sin embargo, Orb_v sí es segundo numerable y localmente euclídeo. Puesto que $\mathbb{R}^2$ es segundo numerable, basta probar que Orb_v es localmente euclídeo para tener que Orb_v es segundo numerable:*

Observemos que el campo v no tiene puntos críticos. En efecto: la primer componente se anula si y sólo si $x = -1,5$ y la segunda se anula si y sólo si $x = 0$, por lo que no se anulan simultáneamente. Sea $p \in \mathbb{R}^2$. Como v no tiene puntos críticos, $v(p) \neq 0$, por lo que existe un vector $w \in \mathbb{R}^2$ linealmente independiente con $v(p)$. Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\sigma(s) = p+sw$. Dicha curva es una recta que en $s = 0$ pasa por p y $\sigma'(0) = w$. Puesto que v es un campo suave y σ es una curva diferenciable, existe $\epsilon > 0$ tal que la restricción $\sigma|_{(-\epsilon,\epsilon)} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ satisface:

σ no interseca a ninguna curva solución en dos puntos distintos,

σ es transversal al campo, es decir, ninguna curva solución es tangente a σ.

Esto significa que $\pi : \mathbb{R}^2 \to Orb_v$ es inyectiva cuando la restringimos a la imagen de $\sigma|_{(-\epsilon,\epsilon)}$, es decir, la función

$$\pi \circ \sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to Orb_v$$

es biyectiva. Puesto que π es abierta e inyectiva, se sigue que $\pi \circ \sigma$ es un homeomorfismo en su imagen, probando que Orb_v es localmente euclídeo.

Ahora probaremos que Orb_v no es de Hausdorff: Consideremos los puntos $(-1, 0)$ y $(5, 0)$. Dichos puntos pertenecen a órbitas distintas, a saber, a las órbitas verticales que pasan por ellos. Ahora, sean B_r y C_s las bolas de radios r y s centradas en $(-1, 0)$ y $(5, 0)$, respectivamente. Para probar que *la acción no es propiamente discontinua, basta demostrar que el flujo envía puntos de* $\{0\} \times (-1, -1 + r)$ *al conjunto* $\{0\} \times (5, 5 - r)$.

Arco-Conexidad

Definición A.0.75. *Sea* X *un espacio topológico y* $J = [0, 1]$. *Una* ***trayectoria*** *en* X *es una función continua* $f : J \to X$. *Si* $f(0) = x$ *y* $f(1) = y$, *decimos que* f ***conecta*** *a* x *con* y. *Si cualesquiera dos puntos de* X *pueden conectarse por una trayectoria* f, *decimos que* X *es* ***arco-conexo*** *o que es* ***conexo por trayectorias***. *Un espacio se dice* ***localmente arco-conexo*** *si todo punto posee una vecindad abierta que es arco-conexa en la topología relativa.*

Proposición A.0.76. *Todo espacio arco-conexo es conexo. Si un espacio es conexo y localmente arco-conexo entonces es conexo por trayectorias. En particular, un espacio localmente homeomorfo a* $\mathbb{R}^n$ *es conexo si y sólo si es arco-conexo.*

En [5, p. 12] podemos consultar una demostración de este hecho.

Apéndice B

Variedades Diferenciales

Proposición B.0.77. *Si* $(M, \mathcal{D})$ *es una variedad diferencial entonces existe un atlas* $\mathcal{A} \in \mathcal{D}$ *numerable tal que* $\mathcal{B} = \{U \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ *es base para la topología de* M*.*

Demostración. La demostración se sigue del siguiente lema:

Lema B.0.78. *Si* (U, φ) *es una carta admisible de* M *y si* $V \subset U$ *es abierto en* M *entonces* $(V, \varphi|_V)$ *es compatible con* (U, φ)*.*

Demostración del lema: Si $p \in U \cap V$ entonces $p \in V$. Por definición, $\varphi|_V(p) = \varphi(p)$, por lo que $\varphi|_V \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi|_V^{-1} = id_{V'}$, donde $V' = \varphi|_V(V)$. $\triangledown$

Volviendo al problema, sea V un abierto de M, $m \in V$ y (U_m, φ_m) carta admisible con $m \in U_m$. Puesto que $V \cap U_m$ es abierto en M y M tiene una base $\mathcal{B}$ numerable, existe $B_m^{\varphi_m} \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B_m^{\varphi_m} \subset V \cap U_m$. Por el lema, $(B_m^{\varphi_m}, \varphi_m|_{B_m^{\varphi_m}})$ es compatible con (U_m, φ_m), por lo que $(B_m^{\varphi_m}, \varphi_m|_{B_m^{\varphi_m}})$ es una carta admisible. Puesto que los dominios de las cartas admisibles cubren a M, se sigue para todo abierto V que $V = \bigcup_{(U,\varphi)} U \cap V$, por lo que cualquier abierto V es unión de elementos básicos de la forma $B_m^{\varphi_m}$.

Sea $\mathcal{C} = \bigcup_{V \text{ abierto en } M} \{(B_m^{\varphi_m}, \varphi_m|_{B_m^{\varphi_m}})\}_{m \in V}$. Definamos una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$ por $(B_m^{\varphi_m}, \varphi_m|_{B_m^{\varphi_m}}) \sim (B_m^{\psi_m}, \psi_m|_{B_m^{\psi_m}})$ si y sólo si $B_m^{\psi_m} = B_m^{\varphi_m}$. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ una colección que contenga a uno y sólo un elemento de cada clase de equivalencia en $\mathcal{C}$. Esto implica que si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ son distintos entonces $U \neq V$. Por otro lado, si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ entonces U es un elemento básico. Como M es de base numerable, $\mathcal{A}$ es numerable. Finalmente, como todo abierto es unió de elementos de $\mathcal{B} = \{U \mid (U, \varphi) \in \mathcal{C}\} = \{U \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$, se sigue que $\mathcal{B}$ es base para la topología de M, como queríamos. $\square$

Proposición B.0.79 (Existencia de Funciones Meseta)**.** *Las funciones meseta existen.*

Demostración. Sea $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(t) = \begin{cases} \exp(-1/(1-t^2)) \text{ si } |t| < 1, \\ 0 \text{ si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Por su definición, esta función es de clase C^∞ en $(-1,1)$ y en $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$, por lo que ahora debemos demostrar que esta función es diferenciable en ± 1. Esto, por definición, es equivalente a

$$\lim_{t\to\pm 1} \frac{d^k}{dt^k} \exp(-1/(1-t^2)) = 0$$

para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lema B.0.80. *Para cada entero positivo k se tiene que*

$$\lim_{z\to+\infty} z^k e^{-z} = 0.$$

Demostración del Lema: Observemos primero que, por la Regla de l'Hôpital,

$$\lim_{z\to+\infty} z^k e^{-z} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^k}{e^z} = \lim_{z\to+\infty} \frac{kz^{k-1}}{e^z} = k \lim_{z\to+\infty} z^{k-1} e^{-z},$$

por lo que, si demostramos que la igualdad es verdadera para $k = 0$, habremos terminado por inducción. Sin embargo, es bien conocido que $\lim_{z\to+\infty} e^{-z} = 0$, por lo tanto, tenemos el resultado.

El lema anterior implica que, para cualquier polinomio $P(z)$, se tiene $\lim_{z\to+\infty} P(z)e^{-z} = 0$. Es común referirse a este resultado diciendo que "la exponencial crece más rápido que cualquier polinomio".$\triangledown$

Si $z : (-1,1) \to \mathbb{R}$ viene dada por $z(t) = 1/(1-t^2)$ para $t \in (-1,1)$ se tiene que $t \to \pm 1$ si y sólo si $z \to +\infty$. Puesto que $\lim_{z\to+\infty} e^{-z} = 0$, tenemos que la igualdad es verdadera para $k = 0$. En adelante, nos restringiremos a $t \in [-1,1]$. Observemos que $z' = 2t/(t^2-1) = -2tz$ y que $f = e^{-z}$. Probaremos por inducción sobre k que $\frac{d^k\omega}{dt^k} = P_k(t,z)e^{-z}$, donde P_k es algún polinomio en dos variables. Para $k = 0$, la afirmación es claramente verdadera. Supongamos ahora que es verdadera para $k = 1, \ldots, n-1$. Para $k = n$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d^n\omega}{dt^n} &= \frac{d}{dt}\big(P_{n-1}(t,z)e^{-z}\big) = \big(P'_{n-1}(t,z) - 2tzP_{n-1}(t,z)\big)e^{-z} \\ &= \big([\frac{\partial P_{n-1}}{\partial t}(t,z) - 2tz\frac{\partial P_{n-1}}{\partial z}(t,z)] - 2tzP_{n-1}(t,z)\big)e^{-z}.\end{aligned}$$

Puesto que $P_n(t,z) = P'_{n-1}(t,z) - 2tzP_{n-1}(t,z)$ es un polinomio en t y z, tenemos el resultado. Por todo lo anterior, tenemos que

$$\lim_{t\to\pm1}\frac{d^k}{dt^k}\exp(-1/(1-t^2)) = \lim_{\substack{t\to\pm1\\ z\to+\infty}} P_k(t,z)e^{-z} = \lim_{z\to+\infty} P_k(\pm1,z)e^{-z} = 0,$$

pues $P_k(\pm1, z)$ es un polinomio en la variable z. Por tanto, $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Sea $\omega_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega_1(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t}\omega(s)ds}{\int_{-\infty}^{\infty}\omega(s)ds}.$$

Como ω es diferenciable, no-negativa y vale cero exactamente en $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$, la integral del denominador es es un número positivo bien definido igual a $\int_{-1}^{1}\omega(s)ds$. Además, ω_1 es no-decreciente, vale 0 en $(-\infty,-1]$ y vale 1 en $[1,\infty)$. Definiendo ahora $\omega_2(t) = \omega_1(3-2t)$, se sigue que ω_2 es una función diferenciable que vale 1 en $(-\infty, 1]$ y vale 0 en $[2,\infty)$. Finalmente, consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \omega_2(||x||).$$

En $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $||x||$ es una función diferenciable, por lo que f también lo es; sin embargo, f también es diferenciable en 0, ya que ω_2 es localmente constante alrededor de 0. Esta función satisface las condiciones de una función meseta, lo cual prueba que estas funciones sí existen. $\square$

Proposición B.0.81. *Sean $f, g \in C^\infty(M)$ funciones tales que $f|_U = g|_U$, donde U es vecindad abierta de $m \in M$. Si $v_m \in T_mM$ entonces $v_m(f) = v_m(g)$.*

Demostración. Sea V una vecindad abierta de m con cerradura compacta, tal que $\overline{V} \subset U$. Consideremos una función meseta $\rho \in C^\infty(M)$ que satisfaga

$\rho(x) = 1$ si $x \in V$ y $\rho(x) = 0$ si $x \notin U$. Observemos que $\rho \cdot f = \rho \cdot g$ en todo M, por lo que

$$v_m(\rho)g(m) + v_m(g)\rho(m) = v_m(\rho \cdot g) = v_m(\rho \cdot f) = v_m(\rho)f(m) + v_m(f)\rho(m).$$

Puesto que $f(m) = g(m)$, se sigue que $v_m(g)\rho(m) = v_m(f)\rho(m)$. Como $\rho(m) = 1$, terminamos la demostración. □

Proposición B.0.82. *Si* (M, g) *una variedad riemanniana y* $\alpha \in \Omega^1(M)$ *es una 1-forma entonces existe un campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que* $g(X, Y) = \alpha(Y)$ *para todo* $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Sea $\alpha \in \Omega^1(M)$ y sea (U, φ) una carta en M. Observemos que $\varphi^* g$ dada por

$$\varphi^* g(u, v)(x) := g(\varphi_* u, \varphi_* v)(\varphi^{-1}(x))$$

define una métrica riemanniana en $\varphi(U)$. De la misma manera,

$$\varphi^* \alpha(v)(x) := \alpha(\varphi_* v)(\varphi^{-1}(x))$$

define una 1-forma en $\varphi(U)$. Para el caso $\mathbb{R}^n$ es conocido que el resultado anterior es verdadero, es decir, si g es una métrica riemanniana en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ entonces existe un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(X, Y) = \alpha(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Por ello, existe un campo vectorial $X_U \in \mathfrak{X}(\varphi(U))$ en $\varphi(U)$ que satisface lo anterior para la métrica $\varphi^* g$ y la 1-forma $\varphi^* \alpha$. Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$\varphi^*\big(g(\varphi_* X_U, Y)\big) = \varphi^* g(X_U, \varphi^* Y) = \varphi^* \alpha(\varphi^* Y) = \varphi^*(\alpha(Y)),$$

por lo que $g(\varphi_* X_U, Y) = \alpha(Y)$. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ dado por $X(m) = \varphi_* X_U(m)$ si $m \in U$. Probaremos que X está bien definido y habremos terminado, pues X es el campo vectorial que buscábamos: Si $m \in M$ y (U, φ) y (V, ψ) son vecindades coordenadas de m, tenemos que probar que $\varphi_* X_U$ y $\psi_* X_V$ coinciden en $U \cap V$. Para ello, probaremos que $\psi^* g(\psi^* \varphi_* X_U, Y) = \alpha(\psi_* Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\psi(V))$.

$$\psi^* g(\psi^* \varphi_* X_U, Y) = g(\varphi_* X_U, \psi_* Y) = \alpha(\psi_* Y).$$

□

Índice alfabético

Bibliografía

[1] William M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Second Edition, Academic Press, Inc.

[2] John Milnor, *Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem*, http://people.ucsc.edu/∼lewis/Math208/hairyball.pdf, a 12 de junio de 2012.

[3] Michael Spivak, *Cálculo en Variedades.*

[4] C. Godbillon, *Dynamical Systems on Surfaces*, Springer-Verlag, Universitext.

[5] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, *Foundation of Mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley.

[6] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Second Edition, Springer, 2010.

[7] R. Flores Espinoza, Yu. M. Vorobjev, *Linear Hamiltonian Systems and Symplectic Geometry*, Textos de Matemáticas Avanzadas 2, Diciembre, 1997.

[8] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, Tudor Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Second Edition, Springer.

[9] William B. Gordon, *On the Completeness of Hamiltonian Vector Fields.*

[10] Lecture 39, Math 634, 12/3/99, *Poincaré-Bendixon Theorem*, http://www.math.byu.edu/∼grant/courses/m634/f99/lec39.pdf, a 12 de junio de 2012.

[11] Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.*

[12] J. R. Munkres, *Topología*, Segunda Edición, Prentice-Hall, Madrid, 2002.