"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Facultad Interdisciplinaria de Ciencias Exactas y Naturales

Licenciatura en Matemáticas

Una aplicación de la probabilidad en la Teoría de Números: el Teorema de Erdös-Wintner

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Gabriel Miranda Gámez

Director de Tesis: Dr. Genaro Hernández Mada

Hermosillo, Sonora, México, Diciembre de 2024

SINODALES

Dr. Genaro Hernández Mada

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa

Dr. Jesús Alfonso Minjárez Sosa

Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Agradecimientos

Primero que nada, quisiera agradecer a mi familia, quienes me han apoyado toda mi vida. Sin ellos, la mera idea de poder estudiar la Licenciatura en Matemáticas sería impensable.

Agradezco profundamente a mi director de tesis, Genaro Hernández, por haberme guiado con mucha paciencia no solo en este trabajo, sino también por asumir un rol de tutor a lo largo de mi carrera.

A mis amigos Alejandro Figueroa y Omar Granados, quienes han estado ahí para mí desde la infancia, brindándome su apoyo y su amistad a lo largo de los años. A Nadia Ramos, Luis Andrés Burruel, Ana Cristina Chao, Germán Eduardo Félix, Marisol Sesma y Diana Barceló, gracias por acompañarme en esta etapa de mi vida; he aprendido mucho de ustedes. Son personas muy importantes para mí y su apoyo no tiene precio. Me han acompañado en momentos difíciles, y por eso, solo puedo decirles: gracias.

Les doy gracias a todas esas personas que se tomaron un café conmigo, así como a quienes lo prepararon. Han hecho que este recorrido sea más ameno y llevadero. Gracias por ser parte de esos pequeños momentos, por ser una fuente constante de motivación, por escucharme, por darme un consejo o simplemente por estar ahí. Sin ustedes, este trayecto no habría sido el mismo.

Por último, pero más importante, te doy gracias a ti, Dios, por haberme encontrado. Me has mostrado tu gracia, y no podría estar más agradecido. Gracias por las personas que has puesto en mi camino y que me han acercado a ti. Pero sobretodo, gracias por tu amor incondicional.

Soli Deo Gloria

Índice general

Introducción

En la Teoría de Números, uno de los conceptos centrales es el de funciones aritméticas, es decir, funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}.$$

Entre estas, se pueden distinguir funciones *multiplicativas* y funciones *aditivas*. Una función aritmética f es multiplicativa si

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

para cualesquiera primos relativos a, b. Similarmente, f es aditiva si

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

para cualesquiera primos relativos a, b.

El estudio de funciones multiplicativas se puede hacer con técnicas clásicas de análisis complejo, como por ejemplo usando series de Dirichlet. Un ejemplo clásico de esto es la función zeta de Riemann, cuando $f(n) = 1$ es la función constante. Para un estudio detallado de funciones multiplicativas, el lector puede consultar [8].

El estudio de funciones aditivas normalmente no puede hacerse usando las mismas técnicas. Durante la década de los 1930s, se empezó a utilizar técnicas de probabilidad para estudiar funciones aditivas, dando origen a la llamada *Teoría Probabilística de Números*. Los fundadores de esta área fueron Paul Erdös, Aurel Wintner y Mark Kac. El propósito principal de esta tesis es presentar dos teoremas de carácter fundamental en la teoría probabilística de números.

Presentaremos el Teorema de Erdös-Wintner, el cual nos da condiciones necesarias y suficientes para que una función aditiva tenga una distribución límite. Para probarlo, será necesario primeramente demostrar un teorema de Erdös sobre la convergencia de frecuencias asociadas a una función aditiva. Gracias a los trabajos de P. Turán, J. Kubilius y P. T. D. A. Elliott ([10], [6] y [3]) podemos tener una prueba de este teorema más sencilla en comparación a la original dada por Erdös y Wintner. En este trabajo seguiremos estas ideas, haciendo una presentación distinta a la que puede encontrarse en referencias ya bien establecidas, como [9] o [2]. A continuación describimos la estructura de la tesis.

En el primer capítulo presentamos los preliminares. Estos son las definiciones básicas, así como un par de resultados algebraicos que serán de utilidad posteriormente.

En el segundo capítulo se verá principalmente la parte de probabilidad, donde estudiaremos el espacio de funciones de distribución con la métrica de Lévy, sus funciones características y un par de modelos de probabilidad finitos que serán de utilidad para nuestros propósitos. Veremos el concepto de convergencia débil para poder hablar de convergencia de funciones de distribución y dado que es complicado trabajar con él en terminos de la Métrica de Lévy, veremos algunas equivalencias. Vale la pena mencionar que el Teorema de Erdös-Wintner nos da información de la funciones aditivas en forma de una función de distribución y la función característica asociada a esta.

En el tercer capítulo presentaremos la Desigualdad de Turán-Kubilius, veremos las distintas versiones de esta (teorema 3.1, corolario 3.2, lema 3.4) y el concepto de dualidad (teorema 3.3). Siguiendo ideas de Elliott ([2],[3]) utilizaremos esta desigualdad para obtener una prueba del teorema principal.

En el último capítulo presentamos los dos teoremas principales de este trabajo: el Teorema de Erdös y el de Erdös-Wintner, siendo este último una consecuencia del primero. Ambos teoremas serán demostrados gracias a las técnicas desarrolladas en los capítulos previos. Más específicamente, los modelos de probabilidad y la desigualdad de Turán-Kubilius juegan un papel central en la prueba del teorema de Erdös (teorema 4.1) y posteriormente lo usaremos para la prueba del teorema principal (teorema 4.3).

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones básicas

Empezaremos esta sección introduciendo una serie de conceptos básicos, seguido por un lema y probaremos unas identidades que nos serán de ayuda más adelante en este trabajo.

Definición 1.1. *Sea x un número real. Denotamos por $v_x(n;\ ...)$ a la frecuencia de las $n \leq x$ con $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen una condición ... como*

$$v_x(n; ...) = \frac{\#\{n;\ n \leq x,\ ...\}}{[x]},$$

donde $\#$ es la cardinalidad del conjunto y $[x]$ es el entero más grande tal que $[x] \leq x$.

Ejemplo 1. *Sea $x = 99{,}7$, entonces la frecuencia de los enteros positivos n multiplos de 2 menores o iguales que x es:*

$$v_x(n;\ n \in 2\mathbb{Z}) = \frac{\#\{n;\ n \leq 99{,}7,\ n \in 2\mathbb{Z}\}}{99} = \frac{49}{99}.$$

Ejemplo 2. *Sea $x = 1024{,}4$, entonces la frecuencia de los enteros positivos n potencia de 10 menores o iguales que x es:*

$$v_x(n;\ n \leq 1024{,}4,\ n \textit{ sea potencia de 10})$$

$$= \frac{\#\{n;\ n \leq 1024{,}4,\ n \textit{ sea potencia de 10}\}}{1024} = \frac{3}{1024}.$$

Definición 1.2. *Una función aditiva es una función aritmética que cumple que $f(ab) = f(a) + f(b)$, para cualesquiera a, b primos relativos.*

Ejemplo 3. *Si g es una función multiplicativa, $f(n) = \log g(n)$ es una función aditiva.*

Observación 1. *Si f es una función aditiva y $n \in \mathbb{N}$,*

$$f(n) = \sum_{p^k || n} f(p^k),$$

donde $p^k || n$ denota que $p^k | n$ y $p^k \nmid n$.

Esta notación es clásica en Teoría de Números y la estaremos usando a lo largo de todo el trabajo.

Definición 1.3. *Una función fuertemente aditiva es una función aditiva tal que para todo número primo p y $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(p^k) = f(p)$.*

Ejemplo 4. *La función $\omega(n)$ que cuenta los primos distintos que dividen a n, es una función fuertemente aditiva.*

Ejemplo 5. *Sea $f(n) = \log d(n)$, con $d(n)$ la función que cuenta el número de divisores de n, es una función aditiva que no es fuertemente aditiva.*

Definición 1.4. *Decimos que $f(x) = O(g(x))$ en un conjunto X si y sólo si existe una constante A tal que*

$$|f(x)| \leq Ag(x) \qquad \forall x \in X.$$

Definición 1.5. *Decimos que $f(x) = o(g(x))$ si y sólo si*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$$

cuando $x \longrightarrow \infty$.

1.2. Algunas propiedades útiles

Este siguiente lema es un resultado de Teoría de Números que nos será útil para probar un teorema muy importante más adelante en el siguiente capítulo, el teorema 2.19.

Lema 1.6. *Sea $f(x)$ la función aditiva*

$$f(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

entonces

$$f(n) < 2n \log 2$$

para toda n.

Demostración. Podemos ver que es trivial para $n = 1$ y para $n = 2$. Supongamos que es cierto para toda $n \leq n_0 - 1$. Si n_0 es par, entonces

$$f(n_0) = f(n_0 - 1) < 2(n_0 - 1)\log 2 < 2n_0 \log 2.$$

Si n_0 es impar, entonces $n_0 = 2m + 1$, y tenemos que

$$f(n_0) = f(2m+1) = f(2m+1) - f(m+1) + f(m+1).$$

Notemos que si

$$M = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} = \frac{(2m+1)(2m)\dots(m+2)}{m!},$$

entonces $2M < 2^{2m+1}$. Luego si $m+1 < p \leq 2m+1$, entonces p divide al numerador, pero no al denominador. Entonces

$$f(2m+1) - f(m+1) = \sum_{m+1<p\leq 2m+1} \log p < \log M < 2m \log 2.$$

y por lo tanto

$$f(2m+1) - f(m+1) + f(m+1) < 2m\log 2 + 2(m+1)\log 2 = 2(2m+1)\log 2.$$

$\square$

Ahora veremos las siguientes proposiciones las cuales nos servirán para probar el teorema de Erdös.

Proposición 1.7. *Sean $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ sucesiones finitas de números , entonces la siguiente igualdad se cumple:*

$$\prod_{k=1}^{L}(1 + x_k + y_k) = \prod_{k=1}^{L}(1 + x_k) + \sum_{m=1}^{L} y_m \prod_{k=1}^{m-1}(1 + x_k) \prod_{k=m+1}^{L}(1 + x_k + y_k).$$

Demostración. Primero veremos que el producto

$$\prod_{k=1}^{L}(1 + x_k + y_k) = (1 + x_1 + y_1)(1 + x_2 + y_2)\cdots(1 + x_k + y_k)$$

se puede escribir como un producto de binomios

$$\prod_{k=1}^{L}(a_k + y_k) = (a_1 + y_1)(a_2 + y_2)\cdots(a_k + y_k) \tag{1}$$

con $a_k = 1 + x_k$. Esto no es otra cosa más que una suma de elecciones de cada paréntesis. Podemos hacer las elecciones con las y_k, entonces (1) es igual a

$$a_1 a_2 \dots a_L + y_1(a_2 + y_2)\dots(a_L + y_L)$$

$$+a_1y_2(a_3+y_3)\dots(a_L+y_L)+\cdots+a_1a_2\dots a_{L-1}y_L.$$

El primer sumando es el termino que no tiene y. El segundo sumando es tomando y_1 y obteniendo todos los términos donde aparece. El tercer sumando es la elección de y_2 con todas las combinaciones donde tiene a y_2 como la primer y. Se sigue la misma idea hasta y_L y veamos que esto se puede escribir como

$$a_1a_2\dots a_L+\sum_{m=1}^{L}a_1\dots a_{m-1}y_m(a_{m+1}+y_{m+1})\dots(a_L+y_L)$$

$$=\prod_{k=1}^{L}a_k+\sum_{m=1}^{L}y_m\prod_{k=1}^{m-1}a_k\prod_{k=m+1}^{L}(a_k+y_k)$$

$$=\prod_{k=1}^{L}(1+x_k)+\sum_{m=1}^{L}y_m\prod_{k=1}^{m-1}(1+x_k)\prod_{k=m+1}^{L}(1+x_k+y_k).$$

□

Proposición 1.8. *Sea α un número complejo tal que $2|\alpha|\leq 1$ y β un número real, entonces las siguientes desigualdades son válidas:*

$$|\log(1+\alpha)-\alpha|\leq|\alpha|^2,$$

$$|e^{i\beta}-1-i\beta|\leq|\beta|^2.$$

donde el logaritmo natural es el principal en el eje real.

Demostración. Para probar la primera desigualdad nos apoyaremos en la representación de logaritmo como serie de Taylor:

$$|\log(1+\alpha)-\alpha|=\left|\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}+\cdots-\alpha\right|$$

$$=\left|-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}+\cdots\right|=|\alpha|^2\left|-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{4}+\cdots\right|$$

$$\leq|\alpha|^2\left|\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{3}+\frac{|\alpha^2|}{4}+\cdots\right|\leq|\alpha|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^n}{n+2}\leq|\alpha|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^n}{2}$$

y como $2|\alpha|\leq 1$, entonces

$$|\alpha|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^n}{2}\leq|\alpha|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{2}\leq|\alpha|^2.$$

Para probar la segunda desigualdad, notemos

$$|e^{i\beta}-1-i\beta|=|\cos\beta+i\operatorname{sen}\beta-1-i\beta|$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |(\cos\beta - 1) + i(\operatorname{sen}\beta - \beta)|^2 &= (\cos\beta - 1)^2 + (\operatorname{sen}\beta - \beta)^2 \\
&= \cos^2\beta - 2\cos\beta + 1 + \operatorname{sen}^2\beta - 2\beta\operatorname{sen}\beta + \beta^2 \\
&= 2 - 2(\cos\beta + \beta\operatorname{sen}\beta) + \beta^2.
\end{aligned}$$

Y queremos mostrar que

$$\beta^4 \geq 2 - 2(\cos\beta + \beta\operatorname{sen}\beta) + \beta^2.$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = x^4 - x^2 - 2 + 2(\cos x + x\operatorname{sen} x).$$

Probaremos que $f(x) \geq 0$, lo cual nos dará la desigualdad deseada. Primeramente notamos que f es una función par y $f(0) = 0$, por lo que la basta probar que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$. Para esto probaremos que f es creciente para $x \geq 0$. Si derivamos $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = 4x^3 - 2x(1 - \cos x).$$

Para mostrar que $f'(x)$ es positiva para $x \geq 0$ usaremos la misma idea, tenemos que $f'(0) = 0$ y veremos que su derivada es mayor o igual que cero.

$$f''(x) = 12x^2 - 2 + 2\cos x - 2x\operatorname{sen} x$$

Finalmente, vamos a usar la misma técnica para ver que $f''(x) \geq 0$ para los reales positivos. Tenemos

$$f'''(x) = 24x - 4\operatorname{sen} x - 2x\cos x,$$

y notamos que $f'''(0) = 0$ y que

$$4x \geq 4\operatorname{sen} x,$$

$$2x \geq 2x\cos x.$$

Por lo que

$$f'''(x) = 24x - 4\operatorname{sen} x - 2x\cos x \geq 24x - 4x - 2x = 18x \geq 0$$

para $x \geq 0$, lo que termina la prueba. $\square$

Proposición 1.9. *Para todo número real β, la siguiente igualadad es válida:*

$$|e^{i\beta} - 1|^2 = 4\left|\frac{e^{i\beta/2} - e^{-i\beta/2}}{2i}\right|^2.$$

Demostración. Partiremos de la parte izquierda de la igualdad y llegaremos a la segunda. Primero factorizemos $e^{i\beta}$

$$|e^{i\beta}-1|^2 = |e^{i\beta/2}(e^{i\beta/2}-e^{-i\beta/2})|^2,$$

depués multipliquemos por $1 = 2i/2i$

$$|e^{i\beta/2}(e^{i\beta/2}-e^{-i\beta/2})|^2 = \left|e^{i\beta/2}2i\frac{e^{i\beta/2}-e^{-i\beta/2}}{2i}\right|^2.$$

De aquí tenemos que

$$\left|e^{i\beta/2}2i\frac{e^{i\beta/2}-e^{-i\beta/2}}{2i}\right|^2 = \left|e^{i\beta/2}2i\right|^2\left|\frac{e^{i\beta/2}-e^{-i\beta/2}}{2i}\right|^2 = 4\left|\frac{e^{i\beta/2}-e^{-i\beta/2}}{2i}\right|^2,$$

por lo que terminamos la prueba. □

La siguiente proposición es bien conocida, la podemos encontrar en [7], páginas 410 y 411, y su demostración en las páginas 419 y 420.

Proposición 1.10. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión en los números complejos tal que* $|a_n| \leq 1$ *y* $a_n \neq -1$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ *converge, donde* log *es la rama principal.*

El siguiente es un resultado de Teoría de la Medida muy usado en probabilida, que nosotros usaremos para probar el teorema 4.1.

Proposición 1.11 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sea* (S, A, μ) *un espacio de medida y sea* f *una función medible de valores reales definida en* S*. Entonces para todo número real* $t > 0$ *y* $0 < p < \infty$

$$\mu(\{x \in S;\quad |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p}\int_{|f|\geq t}|f|^p d\mu.$$

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [1], sección 2.4.9. El caso particular donde μ es la medida de contar la desigualdad anterior tiene la forma:

$$\#\{x \in S;\quad |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t^p}\sum_{|f|\geq t}|f(x)|^p \tag{1}$$

que es la forma que nosotros usaremos.

Capítulo 2

Algunos conceptos de Probabilidad

En este capítulo veremos las herramientas necesarias de probabilidad para este trabajo. Estudiaremos los espacios de funciones de distribución, sus funciones características y veremos algunos modelos de probabilidad finitos que son utilizados en Teoría de Números. Una parte fundamental será el concepto de convergencia débil con el que estaremos trabajando, así como sus diferentes caracterizaciones.

2.1. Funciones de distribución

Esta sección está enfocada al estudio de los espacios de funciones de distribución, la métrica asociada a este y el concepto de convergencia débil y sus equivalencias.

Definición 2.1. *Una función de distribución es una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$, no decreciente, continua por la derecha, y que satisface que*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Observación 2. *Si F es una función de distribución, podemos definir una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel asociada mediante*

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 6. *Si X es una variable aleatoria podemos definir una función de distribución asociada a esta variable por:*

$$F(x) = P[X \leq x] = P(-\infty, x)$$

Ejemplo 7. *Sea $F_x(z) = v_x(n; \quad n \leq z)$, entonces F es una función de distribución.*

Una métrica muy útil es la de métrica de Levy que fue introducida en los espacios de funciones de distribución.

Definición 2.2 (Métrica de Levy)**.** *Para dos funciones de distribución, $F(z)$ y $G(z)$, definimos $\rho(F, G)$ como el ínfimo de las h que tienen la propiedad de que la desigualdad*

$$G(z-h) - h \leq F(z) \leq G(z+h) + h \tag{1}$$

se cumple para toda $z \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.3. *La métrica de Levy cumple las condiciones de una métrica.*

Demostración. ρ es no negativa:

Probaremos que todas las h que cumplen (1) son no negativas. Supongamos que $h < 0$, entonces tenemos que

$$G(z-h) - h \leq F(z) \leq G(z+h) + h.$$

De aquí vemos que $G(z-h) - h \leq G(z+h) + h$, que es un absurdo, dado que $G(z)$ es no decreciente. Por lo que $h \geq 0$ y se sigue que $\rho(F, G) \geq 0$.

ρ es simétrica:

Primeramente, definamos los siguientes conjuntos por:

$$A = \{h| \;\; G(z-h) - h \leq F(z) \leq G(z+h) + h, \quad \forall z \in \mathbb{R}\},$$

$$B = \{j| \;\; F(z-j) - j \leq G(z) \leq F(z+j) + j, \quad \forall z \in \mathbb{R}\}.$$

Probaremos que el conjunto A está contenido en B y viceversa. Sea $h \in A$, entonces

$$G(z-h) - h \leq F(z) \leq G(z+h) + h,$$

para toda $z \in \mathbb{R}$. Si tomamos un $z' = z - h$, entonces

$$G(z'-h) - h \leq F(z') \leq G(z'+h) + h,$$

esto es igual a

$$G(z-2h) - h \leq F(z-h) \leq G(z) + h$$

y de aquí obtenemos que $F(z-h)-h \leq G(z)$. Análogamente, si tomamos un $z'' = z+h$ y lo sustituimos en la desigualdad, tenemos

$$G(z)-h \leq F(z+h) \leq G(z+2h)+h$$

y tenemos que $G(z) \leq F(z+h)+h$. Por lo tanto

$$F(z-h)-h \leq G(z) \leq F(z+h)+h,$$

es decir que $h \in B$, es decir, que $A \subseteq B$.

De manera análoga, si partimos de una $j \in B$, entonces llegaremos a que $B \subseteq A$. Por lo tanto, $A = B$, esto implica que $\rho(F,G) = \rho(G,F)$.

<u>ρ cumple el axioma de coincidencia:</u>

Si $\rho(F,G) = 0$, entonces existe una sucesión $\{\epsilon_n\}$ con $\epsilon_n \longrightarrow 0$ que satisface que

$$\epsilon_n \in \{h| \;\; G(z-h)-h \leq F(z) \leq G(z+h)+h, \;\; \forall z \in \mathbb{R}\}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Como la función G es continua por la derecha, entonces $F(z) \leq G(z+\epsilon_n)+\epsilon_n$ implica que $F(z) \leq G(z)$ para toda $z \in \mathbb{R}$.

Usando la simetría de ρ tenemos que $\rho(G,F) = 0$, entonces exite una sucesión $\{\epsilon_n\}$ con $\epsilon_n \longrightarrow 0$ que satisface que

$$\epsilon_n \in \{h| \;\; F(z-h)-h \leq G(z) \leq F(z+h)+h, \;\; \forall z \in \mathbb{R}\}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Como la función F es continua por la derecha, entonces $G(z) \leq F(z)$. Por lo tanto, $F(z) = G(z)$.

<u>ρ cumple la desigualdad del triangulo:</u>

Definamos los siguientes conjuntos:

$$A = \{h_1| \;\; G(z-h_1)-h_1 \leq F(z) \leq G(z+h_1)+h_1, \;\; \forall z \in \mathbb{R}\},$$

$$B = \{h_2| \;\; H(z-h_2)-h_2 \leq G(z) \leq H(z+h_2)+h_2, \;\; \forall z \in \mathbb{R}\},$$

$$C = \{h_3| \;\; H(z-h_3)-h_3 \leq G(z) \leq H(z+h_3)+h_3, \;\; \forall z \in \mathbb{R}\}.$$

Tenemos que para $h_1 \in A$, $h_2 \in B$

$$G(z-h) - h_1 \leq F(z) \leq G(z+h) + h_1 \qquad \text{y}$$

$$H(z-h_2) - h_2 \leq G(z) \leq H(z+h_2) + h_2.$$

Como esto se cumple para toda z, podemos tomar $z = z' - h_1$ para cualquier $z' \in \mathbb{R}$, entonces

$$H(z' - h_2 - h_1) - h_2 - h_1 \leq G(z' - h_1) - h_1.$$

Luego, podemos tomar $z = z' + h_1$, entonces

$$G(z' + h_1) + h_1 \leq H(z' + h_2 + h_1) + h_1 + h_2.$$

Se sigue que

$$H(z' - (h_2 + h_1)) - (h_2 + h_1) \leq G(z' - h_1) - h_1 \leq F(z')$$

$$\leq G(z' + h_1) + h_1 \leq H(z' + (h_2 + h_1)) + (h_2 + h_1),$$

por lo que $h_1 + h_2 \in C$. Como $\rho(G, H) = \text{ínf}\, C$, entonces $\rho(G, H) \leq h_1 + h_2$. Tomando el infimo de las $h_1 \in A$, tenemos que $\rho(G, H) \leq \rho(F, G) + h_2$, lo mismo para h_2. Concluimos que $\rho(G, H) \leq \rho(F, G) + \rho(G, H)$. □

A continuación presentaremos un concepto de convergencia para sucesiones de funciones de distribución. Esta noción está relacionada a la métrica de Lévy.

Definición 2.4. *Decimos que un sistema de funciones de distribución $F_n(z)$ converge débilmente cuando $n \to \infty$ si existe una función de distribución $G(z)$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(z) = G(z)$$

se cumple para todo punto de continuidad de $G(z)$. Denotaremos que $F_n(z)$ converge débilmente a $G(z)$ por

$$F_n(z) \Longrightarrow G(z), \qquad (n \to \infty).$$

Para trabajar con la convergencia débil será conveniente algunas caracterizaciones, particularmente el hecho de que la métrica de Lévy define la misma noción de convergencia.

Teorema 2.5. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(I)$F_n(x) \to F(x)$ en cada punto x que es punto de continuidad de la función de distribución $F(x)$.
(II)$F_n(x) \to F(x)$ en un conjunto C que es denso en la recta real.

(III)$\rho(F_n, F) \to 0$.
(IV)Para toda función continua y acotada $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx).$$

Demostración. Primero, notemos que $(I) \to (II)$ es trivial. Ahora, mostremos que $(II) \to (III)$. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $a \in C$ y $b \in C$ tal que

$$F(a) \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad 1 - F(b) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Dividamos el intervalo $[a, b]$ por puntos

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = b,$$

que pertenecen a C tal que la longitud de cada subintervalo $[a_{k-1}, a_k]$ es menor que ϵ. Escojamos N tal que para cada $n \geq N$ se satisface la siguiente desigualdad para todos los puntos a_k:

$$|F_n(a_k) - F(a_k)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Probaremos que para cada x y $n \geq N$

$$F(x - \epsilon) - \epsilon \leq F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon. \tag{1}$$

Para ello consideraremos tres casos.
<u>Caso 1:</u>
Si $a_{k-1} \leq x \leq a_k$, entonces

$$F_n(x) \leq F_n(a_k) \leq F(a_k) + \frac{\epsilon}{2} \leq F(x + \epsilon) + \epsilon,$$

$$F_n(x) \geq F_n(a_{k-1}) \geq F(a_{k-1}) - \frac{\epsilon}{2} \geq F(x - \epsilon) - \frac{\epsilon}{2}.$$

<u>Caso 2:</u>
Si $x \leq a_0$, entonces

$$F_n(x) \leq F_n(a_0) \leq F(a_0) + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \leq F(x) + \epsilon,$$

$$F_n(x) \geq 0 \geq F(a_0) - \frac{\epsilon}{2} \geq F(x) - \frac{\epsilon}{2}.$$

<u>Caso 3:</u>
Si $x \geq a_s$, entonces

$$F_n(x) \leq 1 \leq F(a_s) + \frac{\epsilon}{2} \leq F(x) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$F_n(x) \geq F_n(a_s) \geq F(a_s) - \frac{\epsilon}{2} \geq 1 - \epsilon \geq F(x) - \epsilon.$$

Lo que hemos hecho puede ser reescrito como

$$\rho(F, F_n) \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Ahora probaremos que $(II) \to (IV)$. Sea f una función continua y acotada. Denotemos por M a una cota superior de $|f(x)|$ y escojamos $a \in C$ y $b \in C$ tal que

$$F(a) \leq \epsilon, \qquad 1 - F(b) \leq \epsilon.$$

En el intervalo cerrado $[a, b]$ la función continua $f(x)$ es uniformemente continua, entonces existen puntos $a_k \in C$ en el intervalo,

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_s = b,$$

tal que

$$|f(x) - f(a_k)| < \epsilon$$

para

$$a_k \leq x \leq a_{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., s-1.$$

Construyamos la funciones

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} f(a_k) & \text{si} \quad a_k \leq x \leq a_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, ..., s-1 \\ 0 & \text{si} \quad x < a_0 \quad \text{ó} \quad x \geq a_s. \end{cases}$$

Tenemos que para cualquier función de distribución $G(z)$

$$\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x) dG(x) = \sum_{k=0}^{s-1} f(a_k)[G(a_{k+1}) - G(a_k))].$$

Dado que $F_n(x) \to F(x)$ cuando $n \to \infty$ en los puntos donde $x = a_k$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x) dF_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x) dF(x). \tag{2}$$

A su vez, para cualquier función de distribución $G(z)$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\epsilon(x)| dG(x) = \int_{-\infty}^{a} |f(x) - f_\epsilon(x)| dG(x)$$

$$+ \int_a^b |f(x) - f_\epsilon(x)| dG(x) + \int_b^\infty |f(x) - f_\epsilon(x)| dG(x)$$

$$\leq MG(a) + \epsilon[G(b) - G(a)] + M[1 - G(b)].$$

Aplicamos este estimado para $G(x) = F(x)$ y $G(x) = F_n(x)$ y notamos que $F_n(a)$ y $F_n(b)$ convergen a $F(a)$ y $F(b)$, respectivamente. Luego, podemos ver que para n suficientemente grande

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\epsilon(x)| dF(x) \leq (2M + 1)\epsilon,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\epsilon(x)| dF_n(x) \leq (2M+2)\epsilon.$$

Las dos desigualdades junto a (2) nos dan

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x) \right| \leq (4M+4)\epsilon$$

para n suficientemente grande. Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, hemos terminado.

Ahora probaremos que $(III) \to (I)$. Sea x_0 un punto de continuidad de $F(x)$. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$$

si

$$|x - x_0| < \delta.$$

Sea $H = \text{mín}(\epsilon, \delta)$ y sea n tan grande tal que $\rho(F_n, F) < H$. Es fácil ver que

$$F_n(x_0) \geq F(x_0 - H) - H \geq F(x_0) - 2\epsilon,$$

$$F_n(x_0) \leq F(x_0 + H) + H \leq F(x_0) + 2\epsilon.$$

Dado que ϵ es arbitrario, hemos terminado.

Por último, probaremos que $(IV) \to (I)$. Sea x_0 un punto de continuidad de $F(x)$ y sea $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|F(x) - F(x_0)| < \epsilon,$$

Definimos las funciones

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq x_0 - \delta \\ \frac{x_0 - x}{\delta} & si \quad x_0 - \delta \leq x \leq x_0 \\ 0 & si \quad x \geq x_0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq x_0 \\ \frac{x_0 - x}{\delta} & si \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \delta \\ 0 & si \quad x \geq x_0 + \delta. \end{cases}$$

De estas tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x) dF(x) \geq \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} 1 dF(x) = F(x_0 - \delta) \geq F(x_0) - \epsilon, \tag{3}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dF(x) \geq \int_{-\infty}^{x_0-\delta} 1dF(x) = F(x_0 - \delta) \geq F(x_0) - \epsilon$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dF_n(x) \leq \int_{-\infty}^{x_0} 1dF_n(x) = F_n(x_0),$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)dF_n(x) \geq \int_{-\infty}^{x_0} 1dF_n(x) = F_n(x_0). \tag{4}$$

Para n suficientemente grande tenemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dF_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dF(x) \right| < \epsilon,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_2(x)dF_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f_2(x)dF(x) \right| < \epsilon. \tag{5}$$

Se sigue de (3), (4) y (5) que

$$F(x_0) - 2\epsilon \leq F_n(x_0) \leq F(x_0) + 2\epsilon.$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, la prueba está completa. Y con esto hemos terminado la demostración del teorema. □

Una consecuencia del teorema anterior, que nos será de utilidad más adelante en este trabajo, es la siguiente proposición.

Corolario 2.6. *Sean $u(n,x)$ y $w(n,x)$ números reales, definidos para todo entero positivo n y número real $x \geq 1$. Asumamos que para toda $\epsilon > 0$ la condición*

$$\nu_x(n; |u(n,x) - w(n,x)| > \epsilon) \to 0$$

es válida cuando $x \to \infty$. Entonces la funciones de distribución

$$F_x(z) = \nu_x(n; u(n,x) \leq z)$$

convergen débilmente cuando $x \to \infty$ si y sólo si las funciones de distribución

$$H_x(z) = \nu_x(n; w(n,x) \leq z)$$

convergen débilmente cuando $x \to \infty$. Si las distribuciones límite existen, entonces coinciden.

Demostración. Primero veremos que la condición se puede ser formulada en términos de la métrica de Levy, como $\rho(F_x, H_x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Notemos que dado $\epsilon > 0$ la desigualdad

$$\nu_x(n; u(n,x) \leq z - \epsilon) \leq \nu_x(n; w(n,x) \leq z) + \nu_x(n; |u(n,x) - w(n.x)| > \epsilon),$$

se cumple dado que

$$\{n; u(n,x) \leq z - \epsilon\} \subset \{n; w(n,x) \leq z\} \cup \{n; |u(n,x) - w(n,x)| > \epsilon\}.$$

Luego, usando la hipótesis para x suficientemente grande se tiene

$$\nu_x(n; u(n,x) \leq z - \epsilon) \leq \nu_x(n; w(n,x) \leq z) + \epsilon.$$

De manera análoga se puede probar que para x suficientemente grande

$$\nu_x(n; w(n,x) \leq z) \leq \nu_x(n; u(n,x) \leq z + \epsilon) + \epsilon.$$

Estas dos desigualdades, por definición de F_x y H_x, nos dicen que

$$F_x(z - \epsilon) - \epsilon \leq H_x(z) \leq F_x(z + \epsilon) + \epsilon,$$

para x suficientemente grande. Por lo tanto, $\rho(F_x, H_x) \leq \epsilon$ para x suficientemente grande.

Ahora probaremos que si $H_x(z)$ converge débilmente, entonces $F_x(z)$ converge débilmente a lo mismo.

Si $H_x(z)$ converge débilmente a $G(z)$, cuando $x \to \infty$, entonces por la desigualdad del triángulo de la métrica de Lévy, tenemos

$$\rho(F_x, G) \leq \rho(F_x, H_x) + \rho(H_x, G).$$

Tenemos por hipótesis que $\rho(F_x, H_x) \to 0$, entonces la parte de la derecha de la desigualdad converge a 0. Por lo tanto $F_x(z)$ converge débilmente a $G(z)$, cuando $x \to \infty$. El otro caso (cuando F_x converge débilmente) es similar. □

El siguiente teorema que es bien conocido, nos puede ayudar a dar una caracterización de los conjuntos compactos en el espacio de métrico de funciones de distribución. Lo enunciaremos de la siguiente manera:

Teorema 2.7. *(Arzela-Ascoli) Sea K un espacio métrico compacto. Si una sucesión $\{f_n\} \subseteq C(K)$ (el espacio de funciones continuas $K \to \mathbb{R}$) es puntualmente acotada y equicontinua, entonces tiene una subsucesión que converge uniformemente.*

El siguiente teorema está relacionado con la compacidad en espacios de funciones de distribución; su demostración proviene de [1].

Teorema 2.8. *(Helly) Sean $F_1, F_2, ...$ funciones de distribución en $\mathbb{R}$. Entonces existe una función no decreciente y continua por la derecha, y una subsucesión $\{F_{n_k}\}$ tal que*

$$F_{n_k}(x) \longrightarrow F(x)$$

en cada punto de continuidad x de F.

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, ...\}$ un conjunto denso y numerable de $\mathbb{R}$. Veamos que la sucesión $\{F_n(x_1)\}$ es acotada, entonces podemos extraer una subsucesión $\{F_{1_j}\}$ de $\{F_n\}$, con $F_{1_j}(x_1)$ convergiendo a un límite y_1, cuando $j \longrightarrow \infty$. Lo mismo con $\{F_{1_j}(x_2)\}$, podemos extraer una subsucesión $\{F_{2_j}\}$ de $\{F_{1_j}\}$ tal que $F_{2_j}(x_2)$ converge a un límite y_2 cuando $j \longrightarrow \infty$. Siguiendo este procedimiento, podemos encontrar subsucesiones $\{F_{m_j}\}$ de $\{F_{(m-1)_j}\}$ con $m = 1, 2, ...$, y tales que $F_{m_j}(x_m) \longrightarrow y_m$.

Ahora definamos una función $F_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ por $F_D(x_j) = y_j$, con $j = 1, 2, ...$, y sea $F_{n_k} = F_{k_k}$, con $k = 1, 2, ...$ Entonces tenemos que

$$F_{n_k}(x) \longrightarrow F_D(x), \qquad \text{con } x \in D.$$

Como F_{n_k} es una función de distribución, entonces si $x \leq y$, tenemos que $F_{n_k}(x) \leq F_{n_k}(y)$ y por lo tanto $F_D(x) \leq F_D(y)$. Definimos

$$F(x) = \text{ínf}\{F_D(y); \quad y \in D, \quad y > x\}.$$

Es fácil ver que F es no decreciente, y probaremos que es continua por la derecha por contradicción. Sea $z_n \downarrow x$. Entonces $F(z_n)$ es no creciente y acotada, por lo que converge a un límite b. Si $F(x) \neq b$, entonces necesariamente $b > F(x)$. En particular, exite $y_0 \in D$, tal que $F_D(y_0) < b$. Dado que $z_n \downarrow x$, existe un N tal que $x < z_n < y_0$, para toda $n > N$. Pero esto implica que

$$F(x) \leq F(z_n) \leq F_D(y_0)$$

para toda $n > N$. Tomando límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que $b \leq F_D(y_0)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $F(z_n) \longrightarrow F(x)$.

Ahora probaremos que si x es un punto de continuidad de F, entonces $F_{n_k}(x) \to F(x)$, cuando $k \longrightarrow \infty$. Sea $x < y$ con $y \in D$, tenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \leq \limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(y) = F_D(y).$$

Tomando el ínfimo de las $y \in D$ tales que $y > x$ obtenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \leq F(x).$$

Si $x' < y < x$, entonces tenemos que

$$F(x') \leq F_D(y) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(y) = \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(y) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x).$$

Haciendo tender $x' \longrightarrow x$ obtenemos que

$$\lim_{x'\to x^-} F(x') \leq \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x).$$

Como x es punto de continuidad de F,

$$\lim_{x'\to x^-} F(x') = F(x),$$

se sigue que

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \leq F(x) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x).$$

Por lo que probamos que $F_{n_k}(x) \to F(x)$, y con esto el teorema. $\square$

El siguiente lema lo ocuparemos en el último paso de la prueba del Teorema de Erdös-Wintner. No presentaremos prueba de este lema, pero puede encontrarse en los teoremas 1 y 2 en las paginas 40 y 42 de [4] y las paginas 26 y 27 de [2].

Lema 2.9. *Sean $F_n(x)$ funciones de distribución, para $n \in \mathbb{N}$, entonces las siguientes proposiciones son válidas.*

a) *Si $\beta_n > 0$, $b_n > 0$ tales que*

$$F_n(\beta_n z + \alpha_n) \Longrightarrow G(z)$$

$$F_n(b_n z + a_n) \Longrightarrow K(z)$$

con $G(z)$ y $K(z)$ funciones de distribución, entonces existen números reales $A > 0$ y B tales que

$$\frac{\beta_n}{b_n} \longrightarrow A \quad y \quad \frac{\alpha_n - a_n}{b_n} \longrightarrow B$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Si $G(z) = K(z)$, entonces $A = 1$ y $B = 0$.

b) *Si*

$$F_n(z + \alpha_n) \Longrightarrow G(z),$$

$$F_n(z + a_n) \Longrightarrow H(z)$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces existe un número real C tal que

$$\alpha_n - a_n \longrightarrow C.$$

2.2. Funciones características

Trabajar con las funciones de distribución puede ser complicado, pero nos podemos apoyar con las funciones características que están asociadas a estas. Estas son mucho más fáciles de estudiar dado que son continuas.

Definición 2.10. *Asociada con cada función de distribución $F(z)$ está su función característica $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$*

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} dF(z).$$

Es fácil notar que la función característica $\phi(t)$ está definida para todos los valores reales de t, y satisface que

$$\phi(0) = 1, \qquad |\phi(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Más aún, tenemos las siguientes propiedades elementales, que nos serán de utilidad en este trabajo. El lector interesado en profundizar el estudio de funciones características puede consultar [1], secciones 7.1 y 7.8.

Lema 2.11. *Una función característica es uniformemente continua en todo la recta real.*

Demostración. Sabemos que existe N tal que

$$F(N) - F(-N) \geq 1 - \epsilon,$$

y veremos que eso implica

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq N|t - s| + 2\epsilon.$$

Para probar esto veamos las siguientes desigualdades:

$$|e^{ix} - e^{iz}| \leq |x - z|, \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}$$

y

$$|e^{itx} - e^{itz}| \leq 2.$$

La primera desigualdad se cumple dado que

$$|\frac{d}{dz} e^{iz}| = 1$$

y usando el teorema del valor medio para funciones complejas. La segunda es trivial por la desigualdad del triángulo. Entonces

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \int_{|x| \leq N} |e^{itx} - e^{isx}| dF(x) + \int_{|x| > N} |e^{itx} - e^{isx}| dF(x)$$

$$\int_{|x|\leq N} |tx - sx| dF(x) + 2(F(-N) + 1 - F(N))$$
$$\leq N|t-s| + 2\epsilon.$$

□

Recordemos que si X es una variable aleatoria en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entonces podemos definir una *función de distribución acumulada* F_X mediante
$$F_X(t) = P(X \leq t).$$

Podemos definir entonces la función característica de la variable aleatoria X como la función característica ϕ_X de la función de distribución F_X. Estas cumplen las siguientes propiedades:

Lema 2.12. *Sea $\phi_X(t)$ la función característica asociada a una variable aleatoria X, entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

(I). Si $Y = X + b$, entonces

$$\phi_Y(t) = e^{itb}\phi_X(t).$$

(II). Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Demostración. (I). La prueba es inmediata de la definición.

(II). La demostración se puede encontrar en [1], teorema 7.1.2.

□

Una de las utilidades de las funciones características es que nos ayudan a caracterizar la convergencia débil, como veremos en los teoremas 2.14 y 2.16. Para probar esto, será necesario estudiar compacidad en espacios de funciones de distribución, por lo que necesitamos el siguiente concepto.

Definición 2.13. *Un subconjunto S de un espacio métrico es condicionalmente compacto si $\overline{S}$ es compacto.*

Lema 2.14. *Un conjunto S de funciones de distribución es condicionalmente compacto (en el espacio de funciones de distribución) si y sólo si cumple que*

$$F(x) \longrightarrow 1, \quad x \longrightarrow \infty$$

$$F(x) \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow -\infty$$

de manera uniforme en S.

Demostración. $(\Leftarrow)$

Primero probaremos que si S satisface la condición descrita, entonces es condicionalmente compacto, es decir, que para cualquier sucesión en S existe una subsucesión de Cauchy convergente. Sea $\{F_n\}$ en S, por el teorema 2.8 existe una subsucesión $\{F_{n_k}\} \subseteq \{F_n\}$ que converge débilmente a una función no decreciente y continua por la derecha F. Por la hipótesis tenemos que:

$$F_{n_k}(x) \longrightarrow 1, \quad x \longrightarrow \infty$$

$$F_{n_k}(x) \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow -\infty$$

para toda $k \in \mathbb{N}$, de manera uniforme. Entonces existe N tal que si $x \geq N$, entonces

$$|F_{n_k}(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, como $F_{n_k} \Longrightarrow F$, existe un conjunto C denso en $\mathbb{R}$ tal que para toda $x \in C$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|F_{n_k}(x) - F(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, para toda $x \geq N$ con $x \in C$, tenemos que

$$|F(x) - 1| = |F(x) - F_{n_k}(x) + F_{n_k}(x) - 1|$$

$$\leq |F(x) - F_{n_k}(x)| + |F_{n_k}(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Si $x \geq N$, pero $x \notin C$, existe una sucesión $(x_n) \subset C$ que converge decrecientemente a x. Luego, por la continuidad por la derecha de F concluimos que también en este caso $|F(x) - 1| \leq \epsilon$, es decir, $F(x) \longrightarrow 1$ cuando $x \longrightarrow \infty$.

Análogamente podemos probar que $F(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$, es decir que F es una función de distribución. Esto implica que existe una subsucesión convergente (en el espacio de funciones de distribución), de aquí que $\overline{S}$ sea un conjunto compacto.

$(\Rightarrow)$

Haremos la demostración por contradicción. Supongamos que S es condicionalmente compacto, pero no se cumple la condición del lema. Entonces por no ser uniforme existe $\epsilon > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \geq n$ y $F_n \in S$ tal que

$$|F_n(x_n) - 1| \geq \epsilon.$$

Por la compacidad condicional, la sucesión $\{F_n\}_n$ tiene una subsucesión $\{F_{n_k}\}_k$ que converge (débilmente) a una función de distribución F, es decir, que existe un conjunto denso C tal que $F_{n_k}(x) \longrightarrow F(x)$ para todo $x \in C$.
Por ser F función de distribución, entonces existe N tal que

$$|1 - F(x)| < \epsilon/3 \qquad \forall x \geq N.$$

Por la continuidad por la derecha de F_{n_k} en el punto x_{n_k} y por la densidad de C existe $y \in C$ tal que $y \geq x$ y

$$|F_{n_k}(y) - F_{n_k}(x_{n_k})| < \epsilon/3.$$

Como $y \in C$, entonces $F_{n_k}(y) \longrightarrow F(y)$, así que para k suficientemente grande

$$|F_{n_k}(y) - F(y)| < \epsilon/3$$

Por la desigualdad del triángulo, y las dos desigualdades anteriores,

$$|F_{n_k}(x_{n_k}) - F(y)| < \frac{2}{3}\epsilon.$$

Finalmente, por la desigualdad del triángulo y la primera desigualdad sobre F tenemos

$$|F_{n_k}(x_{n_k}) - 1| < \epsilon,$$

que es una contradicción.

□

La convergencia débil es importante, pero no muy práctica. Es por ello que veremos que la convergencia débil de funciones de distribución es equivalente a la convergencia puntual de funciones características asociadas a estas.

Teorema 2.15. *Sean $\phi_n(t)$ y $\phi(t)$ las funciones características de funciones de distribución $F_n(x)$ y $F(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Si $F_n(x) \Longrightarrow F(x)$, entonces*

$$\phi_n(t) \longrightarrow \phi(t),$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, de manera uniforme en cada intervalo acotado $|t| \leq T$.

Demostración. Supongamos que $F_n \Longrightarrow F$, entonces por definición tenemos que

$$\phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} dF_n(z) \qquad \text{y} \qquad \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} dF(z),$$

lo que implica la convergencia de $\phi_n(t) \to \phi(t)$. Por la hipótesis tenemos que el conjunto de las F_n es condicionalmente compacto. Por el lema 2.14, dado $\epsilon > 0$ existe A tal que

$$F_n(A) - F_n(-A) \geq 1 - \frac{\epsilon}{4}, \;\; \forall n.$$

Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2A}$ y sean t y s tales que

$$|t - s| < \delta$$

Podemos usar la desigualdad que aparece en la prueba del lema 2.11 y obtener que

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| \leq A|t - s| + 2\frac{\epsilon}{4} < A\delta + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para toda n. Por lo que podemos decir que el conjunto $\{\phi_n(t)\}$ es equicontinuo y además uniformemente acotado. Podemos aplicar el teorema de Arselá-Ascoli a $\{\phi_n\}$ y además, también podemos aplicarlo a toda subsucesión de $\{\phi_n\}$.

Supongamos que ϕ_n no converge uniformemente en un intervalo $|t| \leq T$, entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión de puntos $\{x_{n_k}\}$ en el intervalo compacto $|t| \leq T$ tal que $n_k \longrightarrow \infty$ y

$$|\phi_{n_k}(x_{n_k}) - \phi(x_{n_k})| \geq \epsilon.$$

Pero entonces no existe una subsucesión en ϕ_{n_k} que converja uniformemente, lo que es una contradicción. Por lo tanto ϕ_n converge uniformemente a ϕ sobre cualquier intervalo compacto. $\square$

Presentaremos el siguiente lema para probar el recíproco del teorema anterior. Para esto denotamos

$$F[-N, N] := F(N) - F(-N).$$

Lema 2.16. *Sea $\tau > 0$, $N > 0$ tales que $\frac{1}{\tau N} < 1$. Entonces*

$$F[-N, N] \geq \frac{|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt| - \frac{1}{\tau N}}{1 - \frac{1}{\tau N}}. \tag{1}$$

Demostración. Veamos que

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt\right| = \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{itz}dF(z)\right)dt\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{2\tau}e^{itz}dt\right)dF(z)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{2\tau}(\cos(tz) + i\,\mathrm{sen}(tz))dt\right)dF(z)\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}(tz)}{2\tau z} - \frac{i\cos(tz)}{2\tau z}\right)\Big|_{-\tau}^{\tau}dF(z)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau z}\,\mathrm{sen}(\tau z)dF(z)\right|$$

$$= \left|\int_{|z|\leq N}\frac{1}{\tau z}\,\mathrm{sen}(\tau z)dF(z)\right| + \left|\int_{|z|>N}\frac{1}{\tau z}\,\mathrm{sen}(\tau z)dF(z)\right|. \tag{2}$$

Como
$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\tau z)}{\tau z}\right| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{\operatorname{sen}(\tau z)}{\tau z}\right| \leq \frac{1}{\tau z},$$
tenemos que (2) es menor o igual que
$$F[-N,N] + \frac{1}{\tau N}(1 - F[-N,N]).$$
De todo esto, obtenemos que:
$$F[-N,N] + \frac{1}{\tau N}(1 - F[-N,N]) \geq \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt\right|$$
y de esto tenemos que
$$F[-N,N] \geq \frac{|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt| - \frac{1}{\tau N}}{1 - \frac{1}{\tau N}}.$$
□

Teorema 2.17. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\phi_n(t)$ la función característica de una función de distribución $F_n(x)$ y supongamos que $\phi_n(t)$ converge a una función continua $\phi(t)$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para toda t. Entonces la función de distribución $F_n(x)$ converge débilmente a una función de distribución $F(x)$ con función característica $\phi(t)$.*

Demostración. Por la desigualdad (1) del lema 2.16, si $N = \frac{2}{\tau}$, tenemos
$$F\left[-\frac{2}{\tau}, \frac{2}{\tau}\right] \geq 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt\right| - 1. \tag{4}$$

Supongamos que $\phi_n(t) \longrightarrow \phi(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$ existe un $\tau > 0$ tal que
$$|\phi(t) - 1| < \frac{\epsilon}{2}, \ \ \forall t \in [-\tau, \tau],$$
dado que $\phi(0) = 1$ y ϕ es continua en 0. De lo anterior, tenemos que
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt - 1\right| &= \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt - \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}1dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}(\phi(t) - 1)dt\right| \leq \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}|\phi(t) - 1|dt \\ &\leq \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\frac{\epsilon}{2}dt < \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$
Por lo tanto tenemos que
$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi_n(t)dt - 1\right| \leq \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}(\phi_n(t) - \phi(t))dt\right| + \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\phi(t)dt - 1\right|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt.$$

Como $\phi_n(t) \longrightarrow \phi(t)$ y $|\phi_n(t) - \phi(t)| \leq 2$, entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que para $\epsilon > 0$ y $\tau > 0$ existe una M tal que

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt - 1\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \text{para } n \geq M.$$

Por otro lado,

$$1 \leq \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt - 1 - \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt - 1\right| + \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt\right|$$

$$\leq \epsilon + \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt\right|$$

$$\Rightarrow 1 - \epsilon \leq \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt\right|$$

De (4) tenemos que si $X = \frac{2}{\tau}$, entonces

$$F_n[-X, X] \geq 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)dt\right| - 1 \geq 1 - 2\epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Del lema 2.14 podemos concluir que $\{F_n\}$ es condicionalmente compacto.

Notemos que $\{F_n\}$ solamente puede tener un punto límite. En efecto, si $\{F_{n_k}\}$ es una subsucesión que converge a una función de distribución F_*, entonces, por el teorema 2.15, sus funciones características convergen a una función continua ϕ_*. Pero como $\phi_n \longrightarrow \phi$, necesariamente $\phi_* = \phi$, y por lo tanto ϕ es la función característica de la función de distribución F_*. Tomando $F = F_*$, y usando que $\{F_n\}$ es condicionalmente compacto con un único punto límite, concluimos que $F_n \Longrightarrow F$.

□

2.3. Modelos de probabilidad finitos

Sea x un número real, con $x \geq 2$. Sean $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_k$ primos (no necesesariamente distintos), denotamos por Q al producto de todos ellos. Denotemos por $E(x, l)$ al conjunto de enteros positivos n menores que x y que satisfacen la relacion $n \equiv l \pmod{Q}$. Sea A álgebra más pequeña de conjuntos que contienen a los conjuntos $E(x, l)$, donde l puede tomar cualquier valor en el rango $1 \leq l \leq Q$.

En esta álgebra definimos una medida de frecuencia, por

$$\nu(E) = [x]^{-1} \sum_{n \in E} 1 = [x]^{-1}|E|.$$

Si S denota al conjunto de enteros menores o iguales que x, entonces $\nu(S) = 1$ y entonces

$$(S, A, \nu)$$

forma un espacio de probabilidad finito. Definimos una segunda medida μ, en A, por

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{s} E(x, l_j)\right) = \frac{s}{Q},$$

donde $l_1, ..., l_s$ son distintos $\pmod{Q}$. En particular, $\mu(S) = 1$.

Las medidas ν y μ se aproximan una a la otra en el siguiente sentido:

Proposición 2.18. *Sea*

$$E = \bigcup_{j=1}^{s} E(x, l_j),$$

entonces

$$\nu(E) = [x]^{-1} \sum_{j=1}^{s} \left(\left[\frac{x - l_j}{Q}\right] + 1 \right) = \mu(E) + \theta s[x]^{-1},$$

donde $|\theta| \leq 1$.

Demostración. Primeramente, obsevemos que

$$\nu(E(x, l_j)) = [x]^{-1} \left(\left[\frac{x - l_j}{Q}\right] + 1 \right) \text{ y } \mu(E(x, l_j)) = \frac{1}{Q}.$$

además, $0 \leq \nu(E(x, l_j)) \leq 1$ y $0 \leq \mu(E(x, l_j)) \leq 1$. Entonces existe w_j tal que

$$\nu(E(x, l_j)) - \mu(E(x, l_j)) = \frac{w_j}{[x]Q},$$

con $|w_j/Q| \leq 1$ para cualquier l_j. Por lo que

$$\nu(E) - \mu(E) = \sum_{j=1}^{s} \frac{w_j}{[x]Q},$$

ahora, sea $\theta = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} \frac{w_j}{Q}$, de aquí se tiene que $|\theta| \leq 1$ y que

$$\nu(E) - \mu(E) = \theta s[x]^{-1}.$$

□

Por lo que el estimado

$$|\nu(E) - \mu(E)| < 2Qx^{-1} \tag{1}$$

se cumple de manera uniforme en el álgebra A.

El siguiente teorema nos muestra como los modelos de probabilidad nos ayudan a entender el comportamiento de las funciones aditivas.

Teorema 2.19. *Sean r y x números reales, con $2 \leq r \leq x$ y N un entero positivo. Supongamos que para cada primo p y $k \geq 0$, $f(p^k)$ es un número real. Se define la función aditiva*

$$g(n) = \sum_{\substack{p^k || n \\ p \leq r, k < N}} f(p^k)$$

Se definen variables aleatorias independientes X_p para cada primo $p \leq r$, por

$$X_p(n) = \begin{cases} f(p^j) & si \quad p^j || l, 0 \leq j < N \\ 0 & si \qquad p^N | l, \end{cases}$$

donde l es la clase de n módulo Q. Entonces la estimación

$$\nu_x(n; g(n) \leq z) = \mu\left(\sum_{p \leq r} X_p \leq z\right) + O(e^{4Nr}x^{-1})$$

se tiene uniformemente para todo número real $f(p^k)$, z, x, con $x \geq 2$ y r, con $2 \leq r \leq x$.

Demostración. Consideremos los modelos de probabilidad anteriores (A, v) y (A, μ), donde la colección de primos que consideramos consiste en todos los primos menores o iguales que r, cada uno tomado con multiplicidad N. Para cada entero positivo

$$\sum_{p \leq r} X_p(n) = \sum_{\substack{p^k || n \\ p \leq r, k \leq N}} f(p^k).$$

Por el estimado anterior (1) el resultado que queremos demostrar será válido si podemos probar que $Q \leq e^{4Nr}$. Podemos hacer esto directo por el lema 1.6. Dado un entero positivo par m, el coeficiente binomial

$$\binom{m}{m/2} = \frac{m!}{(\frac{m}{2}!)^2}$$

es divisible por cada primo p en el rango $\frac{1}{2}m < p \leq m$, dado que un primo va a dividir al numerador $m!$, pero no al denominador. Más aún, el coeficiente binomial no es mayor a 2^m en tamaño. Por lo tanto

$$\sum_{\frac{1}{2}m<p\leq m} \log p \leq \log \binom{m}{m/2} \leq m\log 2 < m.$$

Si m es potencia de 2, entonces podemos reemplazar m por $m/2$,$m/2^2$,..., y así sucesivamente, los sumamos y obtenemos que

$$\sum_{p\leq m} \log p < 2m$$

Dado que $r \geq 2$, existe un entero positivo k tal que $2^k \leq r < 2^{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} Q = \exp\left(N\sum_{p\leq r}\log p\right) &\leq \exp\left(N\sum_{p\leq 2^{k+1}}\log p\right) \\ &< \exp(N2^{k+2}) \leq \exp(4Nr) \end{aligned}$$

Por la estimación (1) vemos que

$$\nu_x(n;\quad g(n)\leq z) = \mu\left(\sum_{p\leq r} X_p \leq z\right) + O(Qx^{-1})$$

y por lo que acabamos de probar, tenemos que

$$\nu_x(n;g(n)\leq z) = \mu\left(\sum_{p\leq r} X_p \leq z\right) + O(e^{4Nr}x^{-1})$$

Finalmente podemos notar que las variables X_p son independientes respecto a la medida μ (ver ejemplo [2] página 118 o [9] páginas 300-301). $\square$

Capítulo 3

Desigualdad de Turán-Kubilius

En este capítulo presentamos distintas desigualdades que son todas variantes de una misma, por lo que cualquiera de ellas puede ser llamada desigualdad de Turán-Kubilius. Presentamos también un principio de dualidad y sus consecuencias en términos de dichas desigualdades.

En todo este capítulo denotaremos por $f(n)$ a una función aditiva que toma valores complejos. En particular podemos escribirla como:

$$f(n) = \sum_{p^k || n} f(p^k).$$

Para números reales $x \geq 0$ definimos

$$E(x) = \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^k} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

$$D(x) = \left(\sum_{p^k \leq x} \frac{|f(p^k)|^2}{p^k} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.1. Primeras versiones

Esta primera versión de la desigualdad de Turán-Kubilius se podría decir que da lugar a las otras versiones.

Teorema 3.1. *(Turán, Kubilius). La desigualdad*

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - E(x)|^2 \leq 36 x D^2(x)$$

es válida de manera uniforme para toda función aditiva $f(n)$, y números positivos x.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x es un entero, y $x \geq 2$. Haremos la demostración en tres casos, primaramente si la función $f(n)$ es real y no negativa.

La sumatoria que deseamos estimar se puede escribir de la siguiente forma

$$S = \sum_{n \leq x} |f(n) - E(x)|^2 = \sum_{n \leq x} |f(n)|^2 - 2E(x) \sum_{n \leq x} f(n) + xE^2(x).$$

Invertimos el orden en la primera sumatoria que aparece del lado derecho, la cual denotaremos como S_1, para obtener

$$S_1 = \sum_{n \leq x} |f(n)|^2 = \sum_{n \leq x} \left| \sum_{p^k || n} f(p^k) \right|^2$$

$$= \sum_{n \leq x} \sum_{p^k || n} f^2(p^k) + \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p^k q^l || n \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l)$$

$$= \sum_{p^k \leq x} \sum_{\substack{n \leq x \\ p^k || n}} f^2(p^k) + \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} \sum_{\substack{n \leq x \\ p^k || n, q^l || n}} f(p^k) f(q^l)$$

$$= \sum_{p^k \leq x} f^2(p^k) \sum_{\substack{n \leq x \\ p^k || n}} 1 + \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l) \sum_{\substack{n \leq x \\ p^k || n, q^l || n}} 1.$$

El número de enteros, con $n \leq x$, para los cuales $p^k || n$ y $q^l || n$, es

$$\left[\frac{x}{p^k q^l} \right] - \left[\frac{x}{p^{k+1} q^l} \right] - \left[\frac{x}{p^k q^{l+1}} \right] + \left[\frac{x}{p^{k+1} q^{l+1}} \right]$$

$$= \frac{x}{p^k} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{q} \right) + 2\theta,$$

donde $|\theta| \leq 1$. Dado que $f(n) \geq 0$,

$$S_1 \leq xD^2(x) + xE^2(x) + 2 \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l).$$

De manera similar, la suma

$$S_2 = E(x) \sum_{n \leq x} f(n) = E(x) \sum_{p^k \leq x} f(p^k) \sum_{\substack{n \leq x \\ p^k || n}} 1$$

es mayor o igual que

$$xE^2(x) - E(x) \sum_{p^k \leq x} f(p^k).$$

Por lo tanto,

$$S = S_1 - 2S_2 + xE^2(x) \leq xD^2(x) + 2 \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l) + 2E(x) \sum_{p^k \leq x} f(p^k).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos las siguientes estimaciones:

$$2 \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l) = 2 \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} \frac{f(p^k)}{p^{k/2}} \frac{f(q^l)}{q^{l/2}} p^{k/2} q^{l/2}$$

$$\leq 2 \left(\left(\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} \frac{f(p^k)^2}{p^k} \frac{f(q^l)^2}{q^l} \right) \left(\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} p^k q^l \right) \right)^{1/2} \leq 2D^2(x) \left(\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} p^k q^l \right)^{1/2}$$

y

$$2E(x) \sum_{p^k \leq x} f(p^k) p^{-k/2} p^{k/2} \leq 2 \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^{k/2}} p^{-k/2} \sum_{p^k \leq x} f(p^k) p^{-k/2} p^{k/2}$$

$$\leq 2 \left(\left(\sum_{p^k \leq x} \frac{f^2(p^k)}{p^k} \right) \left(\sum_{p^k \leq x} \frac{1}{p^k} \right) \left(\sum_{p^k \leq x} \frac{f^2(p^k)}{p^k} \right) \left(\sum_{p^k \leq x} p^k \right) \right)^{1/2}$$

$$\leq 2 \left(D^2(x) \sum_{p^k \leq x} \frac{1}{p^k} D^2(x) \sum_{p^k \leq x} p^k \right)^{1/2}.$$

Entonces se tiene que

$$S \leq xD^2(x) + 2D^2(x) \left(\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} p^k q^l \right)^{1/2} + 2 \left(D^2(x) \sum_{p^k \leq x} \frac{1}{p^k} D^2(x) \sum_{p^k \leq x} p^k \right)^{1/2}.$$

Luego,

$$\sum_{p^k \leq x} \frac{1}{p^k} \leq \sum_{2 \leq m \leq x} \frac{1}{m} \leq \int_1^x \frac{dy}{y} = \log x.$$

y

$$\sum_{p^k \leq x} p^k \leq x \sum_{p^k \leq x} 1 \leq x \sum_{p \leq x} 1 + x \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} 1,$$

pero tenemos que

$$\sum_{p \leq x} 1 \leq \sum_{p \leq x^{1/2}} 1 + \sum_{x^{1/2} \leq p \leq x} 1 \leq \sum_{p \leq x^{1/2}} 1 + \sum_{x^{1/2} \leq p \leq x} \frac{\log p}{\log x^{1/2}} \leq x^{1/2} + \frac{8x}{\log x} \leq \frac{10x}{\log x},$$

dado que $\log x = 2\log x^{1/2} \leq 2x^{1/2}$. También que

$$\sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \leq 2}} 1 \leq \sum_{p^2 \leq x} 1 + \sum_{p^3 \leq x} 1 + \cdots \leq \frac{x^{1/2}\log x}{\log 2} \leq 32\frac{x}{\log x}$$

puesto que $(\log x)^2 = (4\log x^{1/4})^2 \leq 16x^{1/2}$. Por lo tanto,

$$S \leq xD^2(x) + 4D^2(x)\left(\sum_{i\leq x} x\right)^{1/2} + 2D^2(x)\left(x\log x\frac{42x}{\log x}\right)^{1/2}$$

$$S \leq (1+4+2(6.5)xD^2(x) = 18xD^2(x)$$

Esto prueba que cuando $f(n)$ es real y no negativa la desigualdad es válida. Es claro que esta desigualdad implica la del teorema.

Ahora consideremos el caso en que $f(n)$ real pueda tomar valores negativos. Definimos funciones aditivas $g_1(n)$ y $g_2(n)$, por

$$g_1(p^k) = \begin{cases} f(p^k) & \text{si} \quad f(p^k) \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad f(p^k) < 0 \end{cases}$$

$$g_2(p^k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(p^k) \geq 0 \\ \\ -f(p^k) & \text{si} \quad f(p^k) < 0. \end{cases}$$

Correspondiendo a estas funciones definamos

$$E_1(x) = \sum_{p^k \leq x} \frac{g_1(p^k)}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

$$E_2(x) = \sum_{p^k \leq x} \frac{g_2(p^k)}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Luego, como

$$f(n) = g_1(n) - g_2(n),$$

entonces tenemos

$$|f(n)-E(x)|^2 \leq |g_1(n)-E_1(x)|^2+|g_2(n)-E_2(x)|^2+|g_1(n)-E_1(x)||g_2(n)-E_2(x)|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|f(n) - E(x)|^2 \leq 2|g_1(n) - E_1(x)|^2 + 2|g_2(n) - E_2(x)|^2.$$

Entonces aplicando la desigualdad que ya probamos para funciones no negativas

$$\sum_{n\leq x}|f(n)-E(x)|^2 \leq 2\sum_{n\leq x}|g_1(n)-E_1(x)|^2+2\sum_{n\leq x}|g_2(n)-E_2(x)|^2 \leq 36xD^2(x),$$

lo cual prueba la desigualdad para funciones con valores reales.

Ahora consideramos el caso en que $f(n)$ puede tomar valores complejos, definamos las siguientes funciones aditivas

$$g_1(n) = \mathrm{Re}(f(n)) \qquad g_2(n) = \mathrm{Im}(f(n)).$$

Tenemos que

$$|f(n) - E(x)|^2 = |g_1(n) + E_1(x)|^2 + |g_2(n) + E_2(x)|^2.$$

Sumamos sobre n, $1 \leq n \leq x$, y notamos que

$$\sum_{p^k\leq x} p^{-k}|g_1(k)|^2 + \sum_{p^k\leq x} p^{-k}|g_2(k)|^2 = D^2(x).$$

Entonces,

$$\sum_{n\leq x}|f(n) - E(x)|^2 = \sum_{n\leq x}|g_1(n) + E_1(x)|^2 + \sum_{n\leq x}|g_2(n) + E_2(x)|^2$$

$$\leq 36\sum_{p^k\leq x} p^{-k}|g_1(k)|^2 + 36\sum_{p^k\leq x} p^{-k}|g_2(k)|^2 = 36D^2(x),$$

lo que completa la prueba. □

Vale la pena mencionar que la cota anterior se podría mejorar (ver por ejemplo págs. 147-148 [2]), pero para los fines de este trabajo nos es suficiente. Como ya mencionamos antes, este teorema nos ayudará a probar otras versiones de la desigualdad de Turán-Kubilius, una en particular sería la del siguiente lema.

Lema 3.2. *La desigualdad*

$$\sum_{n\leq x}\left|f(n) - \sum_{p^k\leq x}\frac{f(p^k)}{p^k}\right|^2 \leq 49xD^2(x)$$

su cumple de manera uniforme para toda función aditiva $f(n)$, y número real positivo x.

Demostración. Veremos que este resultado se obtiene rápidamente del teorema 3.1.

$$\sum_{n\le x}\left|f(n)-\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^k}\right|^2=\sum_{n\le x}\left|f(n)-\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(\frac{1}{p}\right)\right|^2$$

$$\le\sum_{n\le x}\left|f(n)-\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right|^2+\sum_{n\le x}\left|\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(\frac{1}{p}\right)\right|^2$$

$$+2\sum_{n\le x}\left|f(n)-\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right|\left|\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(\frac{1}{p}\right)\right|^2$$

$$\le 36xD^2(x)+xD^2(x)+2(\sqrt{36xD^2(x)})(\sqrt{xD^2(x)})=49xD^2(x).$$

Con esto concluimos la demostración □

Este lema nos servirá para probar uno de los teoremas importantes de esta tesis, el teorema de Erdös (teorema 4.1).

3.2. Principio de dualidad

A continuación presentamos un principio de dualidad, que lo usaremos para probar una desigualdad para funciones fuertemente aditivas.

Teorema 3.3. *Sea $c_{i,j}$, con $i=1,...,m$ y $j=1,...n$ una colección de números complejos y sea λ un número real no negativo. Entonces la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}c_{ij}a_j\right|^2\le\lambda\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2$$

es válida para toda colección de números complejos $a_1,\dots,a_n$, si y sólo si la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{m}c_{ij}b_i\right|^2\le\lambda\sum_{j=1}^{m}|b_i|^2$$

es válida para toda colección de números complejos $b_1,\dots,b_m$.

Demostración. Consideremos la matriz

$$\mathbf{C}=(c_{ij})\qquad 1\le i\le m,\qquad 1\le j\le n.$$

Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores columna con entradas $a_1,\dots,a_n$ y $b_1,\dots,b_m$ respectivamente. Entonces la primer desigualdad del lema puede ser escrita de la siguiente forma

$$|\mathbf{Ca}|^2\le\lambda|\mathbf{a}|^2\qquad\text{para todo }\mathbf{a}\in\mathbb{C}^n.$$

Supongamos primero que esta desigualdad es válida. Es decir, que existe $\lambda \geq 0$, tal que

$$|\mathbf{Ca}| \leq \lambda^{1/2}|\mathbf{a}|.$$

Entonces tenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\mathbf{b}^T\mathbf{Ca}| \leq |\mathbf{b}^T||\mathbf{Ca}|,$$

y por la hipótesis

$$|\mathbf{b}^T\mathbf{Ca}| \leq |\mathbf{b}^T||\mathbf{Ca}| \leq \lambda^{1/2}|\mathbf{b}||\mathbf{a}|$$

Fijamos $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{C}}^T\overline{\mathbf{b}}$, y se sigue que

$$|\mathbf{b}^T\mathbf{C}|^2 = |\mathbf{b}^T\mathbf{C}\overline{\mathbf{C}}^T\overline{\mathbf{b}}| \leq \lambda^2|\mathbf{b}||\overline{\mathbf{C}}^T\overline{\mathbf{b}}| = \lambda^{1/2}|\mathbf{b}||\mathbf{b}^T\mathbf{C}|$$

Por lo tanto

$$|\mathbf{b}^T\mathbf{C}| \leq \lambda^{1/2}|\mathbf{b}| = \lambda^{1/2}|\mathbf{b}^T|,$$

lo que implica la segunda desigualdad. Que la segunda desigualdad implica la primera desigualdad es de manera análoga. □

Podemos hablar de que una desigualdad es dual de otra si se relacionan entre sí como en el teorema anterior.

Ahora demostraremos una desigualdad sobre funciones fuertemente aditivas. Para ello, primero definamos

$$A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p},$$

$$B(x) = \left(\sum_{p \leq x} \frac{|f(p)|^2}{p} \right)^{1/2} \geq 0.$$

Lema 3.4. *La desigualdad*

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - A(x)|^2 \leq 16xB^2(x)$$

se cumple uniformemente para toda función fuertemente aditiva $f(n)$, y números reales positivos x.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, asumamos que x es un entero, y $x \geq 2$. Al igual que en el teorema 3.1 empecemos suponiendo que la función $f(n)$ es real y no negativa.

La sumatoria S que deseamos estimar se puede escribir de la siguiente forma

$$S = \sum_{n\leq x} |f(n) - A(x)|^2 = \sum_{n\leq x} |f(n)|^2 - 2A(x) \sum_{n\leq x} f(n) + xA^2(x).$$

Denotamos por S_1 a la primer sumatoria del lado derecho de la igualdad e intercambiamos el orden de las sumatorias como en la demostración del teorema 3.1:

$$S_1 = \sum_{n\leq x} |f(n)|^2 = \sum_{p^k\leq x} |f(n)|^2 \sum_{\substack{n\leq x\\ p||x}} 1 + \sum_{\substack{pq\leq x\\ p\neq q}} f(p)f(q) \sum_{\substack{n\leq x\\ p||n, q||n}} 1.$$

Como $f(n) \geq 0$ tenemos

$$S_1 \leq xB(x) + xA^2(x).$$

De manera similar, la suma

$$S_2 = A(x) \sum_{n\leq x} f(n) = A(x) \sum_{p\leq x} f(p) \sum_{\substack{n\leq x\\ p||n}} 1$$

es mayor o igual que

$$xA^2(x) - A(x) \sum_{p\leq x} f(p).$$

Por lo tanto,

$$S = S_1 - 2S_2 + xA^2(x) \leq xB(x) + 2A(x) \sum_{p\leq x} f(p),$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$2A(x) \sum_{p\leq x} f(p)p^{-1/2}p^{1/2} \leq 2 \left(B^2(x) \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} B^2(x) \sum_{p\leq x} p \right)^{1/2}.$$

$$\leq 2B^2(x) \left(x \log x \frac{10x}{\log x} \right)^{1/2} \leq 2xB^2(x)(3.5).$$

Podemos concluir que

$$S \leq xB^2(x) + 2(3.5)xB^2(x) = 8xB^2(x).$$

Supongamos ahora que f toma valores reales, posiblemente negativos, y definamos $g_1(n)$ y $g_2(n)$ funciones fuertemente aditivas por

$$g_1(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si} \quad f(p) \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad f(p) < 0, \end{cases}$$

$$g_2(p) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(p) \geq 0 \\ \\ -f(p) & \text{si} \quad f(p) < 0. \end{cases}$$

Para estas funciones, definamos

$$A_1(x) = \sum_{p \leq x} \frac{g_1(p)}{p},$$

$$A_2(x) = \sum_{p \leq x} \frac{g_2(p)}{p}.$$

Como

$$f(n) = g_1(n) - g_2(n),$$

entonces

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - A(n)|^2$$

aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la sumatoria y obtenemos:

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - A(x)|^2 = \sum_{n \leq x} |g_1(n) - A_1(x) - (g_2(n) - A_2(x))|^2$$

$$= \sum_{n \leq x} |g_1(n) - A_1(x)|^2 + \sum_{n \leq x} |g_2(n) - A_2(x)|^2 + 2 \sum_{n \leq x} |g_1(n) - A_1(x)||g_2(n) - A_2(x))|$$

$$\leq 2 \sum_{n \leq x} |g_1(n) - A_1(x)|^2 + 2 \sum_{n \leq x} |g_2(n) - A_2(x)|^2 \leq 16xB^2(x).$$

Esto prueba la desigualdad deseada para el caso real.

Si $f(n)$ toma valores complejos, definamos:

$$g_1(n) = \mathrm{Re}(f(n)), \qquad g_2(n) = \mathrm{Im}(f(n)).$$

Entonces,

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - A(x)|^2 = \sum_{n \leq x} |g_1(n) - A_1(x)|^2 + \sum_{n \leq x} |g_2(n) - A_2(x)|^2.$$

Notemos que

$$\sum_{p \leq x} \frac{|g_1(p)|^2}{p} + \sum_{p \leq x} \frac{|g_2(p)|}{p}^2 = B^2(x).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - A(n)|^2 \leq 16x \sum_{p \leq x} \frac{|g_1(p)|^2}{p} + 16x \sum_{p \leq x} \frac{|g_2(p)|}{p}^2 = 16xB^2(x),$$

lo que completa la prueba. $\square$

Los resultados anteriores tienen el propósito de probar la siguiente desigualdad que sería de utilidad en la prueba del teorema principal, el teorema de Erdös-Wintner.

Lema 3.5. *La desigualdad*

$$\sum_{p\leq x}\left|\sum_{\substack{n\leq x\\ p|n}} a_n - \frac{1}{p}\sum_{n\leq x} a_n\right|^2 \leq 16x\sum_{n\leq x}|a_n|^2$$

se cumple de manera uniforme para toda $x \geq 0$, y números complejos a_n

Demostración. Veremos que esta desigualdad es el dual en el sentido del teorema 3.3 de la desigualdad del lema 3.4. Aplicaremos el teorema 3.3 tomando $b_n = p^{-1/2}f(p)$, $\lambda = 16x$ y

$$\mathbf{C}_{n,p} = \frac{p^{1/2}h_n(p)}{f(p)} - p^{1/2},$$

con

$$h_n(p) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p\nmid n \\ \\ f(p) & \text{si} \quad p|n. \end{cases}$$

donde n corre sobre todos los enteros positivos menores o iguales que x y p sobre todos los primos menores o iguales que x.

Por nuestra elección de b_n y λ:

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\mathbf{C}_{n,p}b_n &= \sum_{p\leq x}\left(\frac{p^{1/2}h_n(p)}{f(p)} - p^{-1/2}\right)(p^{-1/2}f(p)) \\ &= \sum_{p\leq x}\left(h_n(p) - \frac{f(p)}{p}\right).\end{aligned}$$

La segunda desigualdad del teorema 3.3 diría entonces

$$\sum_{n\leq x}|h_n(p) - A(x)|^2 \leq 16xB^2(x),$$

dado que

$$\sum_{p\leq x} h_n(p) = f(n).$$

Esta es en realidad la desigualdad del lema 3.4

$$\sum_{n\leq x}|f(n) - A(x)|^2 \leq 16xB^2(x),$$

la cual ya se demostró. Por lo tanto su dual también es válida.

Como

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \mathbf{C}_{n,p} a_n &= \sum_{n\leq x} \left(\frac{p^{1/2} h_n(p)}{f(p)} - p^{-1/2} \right) a_n \\ &= p^{1/2} \left(\sum_{n\leq x} \frac{h_n(p)}{f(p)} a_n - \sum_{n\leq x} a_n p^{-1} \right),\end{aligned}$$

se sigue que

$$\sum_{p\leq x} |\sum_{n\leq x} \mathbf{C}_{n,p} a_n|^2 = \sum_{p\leq x} p \left| \sum_{n\leq x} \frac{h_n(p)}{f(p)} a_n - \sum_{n\leq x} a_n p^{-1} \right|^2 \leq 16x \sum_{n\leq x} |a_n|^2.$$

Por como esta definida $h_n(p)$, tenemos

$$\sum_{p\leq x} p \left| \sum_{n\leq x} a_n - \sum_{n\leq x} a_n p^{-1} \right|^2 \leq 16x \sum_{n\leq x} |a_n|^2,$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Con esto cerramos este capítulo y estamos listo para entrar a la parte principal de este trabajo.

Capítulo 4

Teorema de Erdös-Wintner

En este capítulo probaremos los dos teoremas esenciales de este trabajo. Estos teoremas nos dan información sobre las funciones aditivas con valores reales e históricamente abrieron las puertas a una nueva forma de estudiar dichas funciones.

Primero, el teorema de Erdös que nos asegura la existencia de una función de distribución límite:

Teorema 4.1. *(Erdös) Sea f una función aditiva que toma valores reales, tal que las series*

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\le 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

son convergentes. Para cada entero n definimos

$$A(n) = \sum_{\substack{|f(p)|\le 1 \\ p\le n}} \frac{f(p)}{p}.$$

Entonces las frecuencias

$$\nu_n(m; f(m) - A(n) \le z),\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

convergen débilmente. La función característica, $\psi(t)$, de la distribución limite tiene representación

$$\psi(t) = \prod_{|f(p)|>1} (1 + g(p)) \prod_{|f(p)|\le 1} (1 + g(p))e^{-itf(p)/p}$$

donde

$$g(p) = -\frac{1}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m} \exp(itf(p^m)),$$

y los productos son tomados sobre los primos p para los cuales $|f(p)| > 1$, y $|f(p)| \leq 1$, respectivamente.

Demostración. La demostración se hará en dos pasos.

Paso 1: Para cada entero n, $n \geq 4$, sea r el entero $[(\log n)^{1/4}]$. Definamos la función

$$j(m) = \sum_{\substack{p^k || m \\ p \leq r, k < r}} f(p^k)$$

Probaremos que las frecuencias

$$\nu_n(m; j(m) - A(r) \leq z)$$

convergen débilmente cuando $n \longrightarrow \infty$, a una función de distribución con función característica ψ.

Por el teorema 2.19, con $N = r$, podemos escribir

$$\nu_n(m : j(m) - A(r) \leq z) = \mu\left(\sum_{p \leq r} X_p - A(r) \leq z\right) + O(n^{-1/2}),$$

donde X_p son variables aleatorias independientes tales que

$$X_p = \begin{cases} f(p^j) & \text{con probabilidad} \quad (1 - \frac{1}{p})\frac{1}{p^j}, j = 1, ..., N-1, \\ 0 & \text{con probabilidad} \quad 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^N}. \end{cases}$$

y la estimación es uniforme para todo número real z.

Dado que las variables X_p son independientes, por las propiedades del lema 2.12, las funciones características, $\psi_n(t)$, de las funciones de distribución

$$\mu\left(\sum_{p \leq r} X_p - A(r) \leq z\right)$$

tienen la forma

$$\psi_n(t) = e^{-itA(r)} \prod_{p \leq r} (1 + g(p) + \epsilon_p(r)),$$

donde

$$\epsilon_p(r) = \frac{1}{p^r} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{m=r}^{\infty} \frac{1}{p^m} e^{itf(p^m)}.$$

En efecto, la función característica de X_p es $1 + g(p) + \epsilon_p(r)$. Más aún, podemos definir variables aleatorias $Y_p = f(p^j)$ con probabilidad $(1 - \frac{1}{p})\frac{1}{p^j}$ para

$j = 0, 1, 2\ldots$ y su función característica será $1 + g(p)$.

Ahora, sea L la cantidad de primos $p \leq r$, y denotemos $2 = p_1 < p_2 \cdots < p_L \leq r$. Por la identidad de la proposición 1.7 tenemos:

$$\psi_n(t) = e^{-itA(r)} \prod_{k=1}^{L} (1+g(p_k)) + e^{-itA(r)} \sum_{m=1}^{L} \epsilon_{p_m}(r) \prod_{k=1}^{m-1} (1+g(p_k)) \prod_{k=m+1}^{L} (1+g(p_k)+\epsilon_{p_k}(r)).$$

Luego,

$$\left| \psi_n(t) - e^{-itA(r)} \prod_{p\leq r} (1 + g(p)) \right| = \left| e^{-itA(r)} \sum_{m=1}^{L} \epsilon_{p_m}(r) \prod_{k=1}^{m-1} (1 + g(p_k)) \prod_{k=m+1}^{L} (1 + g(p_k) + \epsilon_{p_k}(r)) \right|$$

$$\leq \left| e^{itA(r)} \right| \sum_{m=1}^{L} |\epsilon_{p_m}(r)| \left| \prod_{k=1}^{m-1} (1 + g(p_k)) \right| \left| \prod_{k=m+1}^{L} (1 + g(p_k) + \epsilon_{p_k}(r)) \right|,$$

pero tenemos que $|1 + g(p)| \leq 1$ y $|1 + g(p) + \epsilon_p(r)| \leq 1$, por lo que se sigue que

$$\left| e^{-itA(r)} \right| \sum_{m=1}^{L} |\epsilon_{p_m}(r)| \left| \prod_{k=1}^{m-1} (1 + g(p_k)) \right| \left| \prod_{k=m+1}^{L} (1 + g(p_k) + \epsilon_{p_k}(r)) \right| \leq \sum_{p\leq r} |\epsilon_p(r)|$$

$$= \sum_{p\leq r} \left| \frac{1}{p^r} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{m=r}^{\infty} \frac{1}{p^m} e^{itf(p^m)} \right| \leq \sum_{p\leq r} \left(\frac{1}{p^r} + \left| \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{m=r}^{\infty} \frac{1}{p^m} e^{itf(p^m)} \right| \right)$$

$$\leq \sum_{p\leq r} \left(\frac{1}{p^r} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{m=r}^{\infty} \frac{1}{p^m} \right) = \sum_{p\leq r} \left(\frac{1}{p^r} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p^r} \sum_{m=}^{\infty} \frac{1}{p^m} \right)$$

$$= \sum_{p\leq r} \left(\frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^r} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) = 2 \sum_{p\leq r} \frac{1}{p^r} \leq \frac{r}{2^r} = o(1)$$

cuando $n \longrightarrow \infty$ y por lo tanto, también cuando $r \longrightarrow \infty$.

Ahora, veamos que

$$\sum_{|f(p)|\leq 1} \left| \log\left(1 + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right) - \frac{1}{p} itf(p) \right|$$

$$= \sum_{|f(p)|\leq 1} \left| \log\left(1 + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right) - \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1) + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1) - \frac{1}{p} itf(p) \right|$$

$$\leq \sum_{|f(p)|\leq 1} \left| \log\left(1 + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right) - \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1) \right| + \sum_{|f(p)|\leq 1} \left| \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1) - \frac{1}{p} itf(p) \right|.$$

Por la primera desigualdad de la proposición 1.8 (tomando $\alpha = \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)$ y $\beta = itf(p)$) se tiene que lo anterior es menor o igual que

$$\sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{1}{p^2}|e^{itf(p)} - 1|^2 + \sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{1}{p}|e^{itf(p)} - 1 - itf(p)|,$$

ahora, por la segunda desigualdad de la misma proposición se sigue que

$$\leq 4 \sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{1}{p^2} + \sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{1}{p}|tf(p)|^2 = 4 \sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{1}{p^2} + |t|^2 \sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{|f(p)|^2}{p}.$$

Por otro lado, y de manera análoga

$$\sum_{|f(p)|>1} \left|\log\left(1 + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right)\right|$$

$$= \sum_{|f(p)|>1} \left|\log\left(1 + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right) - \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1) + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right|$$

$$\leq \sum_{|f(p)|>1} \left|\log\left(1 + \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right) - \frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right| + \sum_{|f(p)|>1} \left|\frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right|$$

$$\leq \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p^2}|e^{itf(p)} - 1|^2 + \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}|e^{itf(p)} - 1|.$$

Veamos que

$$\frac{|e^{itf(p)} - 1|}{p} \leq \frac{2}{p} \leq 1,$$

por lo que

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p^2}|e^{itf(p)} - 1|^2 + \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}|e^{itf(p)} - 1| \leq \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}|e^{itf(p)} - 1| + \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}|e^{itf(p)} - 1|$$

$$\leq 2 \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}|e^{itf(p)} - 1| \leq 4 \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}$$

Podemos concluir que las series de la izquierda de las desigualdades convergen uniformemente para $t \in K$, para cualquier K compacto.

Queremos ver que el $\prod_{p\leq r}(1 + g(p))$ converge, reagrupemos el producto:

$$\prod_{p\leq r}(1 + g(p)) = \prod_{p\leq r}\left(1 - \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m} e^{itf(p^m)}\right)$$

$$= \prod_{p\leq r}\left(1 + \left(\frac{1}{p}(e^{itf(p)} - 1)\right) + \left(\frac{1}{p^2} e^{itf(p)} + (1 - p) \sum_{m=2}^{\infty} p^{-m} e^{itf(p^m)}\right)\right)$$

$$= \prod_{p\leq r}\left(1+\left(\frac{1}{p}(e^{itf(p)}-1)\right)+\left(\frac{1}{p^2}\left(e^{itf(p)}+(1-p)\sum_{m=2}^{\infty}p^{-m+2}e^{itf(p^m)}\right)\right)\right)$$

De nuevo, sea L la cantidad de primos $p \leq r$, y denotemos $2 = p_1 < p_2... < p_L \leq r$, y a x_l y y_l como:

$$x_l = \left(\frac{1}{p_l}(e^{itf(p_l)}-1)\right)$$

y

$$y_l = \left(\frac{1}{p_l^2}\left(e^{itf(p_l)}+(1-p_l)\sum_{m=2}^{\infty}p_l^{-m+2}e^{itf(p^m)}\right)\right).$$

y podemos reescribir $(1+g(p))$ como $(1+x_l+y_l)$. Por la proposición 1.7 podemos escribir el producto como:

$$\prod_{k=1}^{L}(1+x_k+y_k) = \prod_{k=1}^{L}(1+x_k)+\sum_{m=1}^{L}y_m\prod_{k=1}^{m-1}(1+x_k)\prod_{k=m+1}^{L}(1+x_k+y_k).$$

Del teorema 1.10 aplicado a la última serie de logaritmos llegamos a que

$$\prod_{l=1}^{\infty}(1+x_l)$$

converge cuando $L \longrightarrow \infty$. Afirmamos que la serie

$$\sum_{m=1}^{L}y_m\prod_{k=1}^{m-1}(1+x_k)\prod_{k=m+1}^{L}(1+x_k+y_k).$$

converge cuando $L \longrightarrow \infty$. En efecto, converge absolutamente:

Si $\prod_{l=1}^{\infty}(1+x_l)$ converge a un valor M, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que para toda $n \geq N$,

$$\left|\prod_{l=1}^{\infty}(1+x_l)\right| \leq M+\epsilon.$$

Recordemos que $(1+x_l+y_l)$ es una función característica, entonces su valor absoluto es menor o igual que 1.

Por lo tanto

$$\sum_{m=1}^{L}|y_m|\left|\prod_{k=1}^{m-1}(1+x_k)\right|\left|\prod_{k=m+1}^{L}(1+x_k+y_k)\right| \leq M\sum_{m=1}^{L}|y_m|;$$

dado que la sucesión $\{\frac{1}{p_l^2}\}$ converge a 0, tenemos que $\sum_{m=1}^{L}|y_m|$ converge.
Se sigue que

$$e^{-itA(r)}\prod_{p\leq r}(1+g(p))$$

$$= e^{-it\sum\frac{f(p)}{p}}\prod_{p\le r}(1+g(p)) = \prod_{p\le r} e^{-it\frac{f(p)}{p}}\prod_{p\le r}(1+g(p))$$

converge con la misma uniformidad y a la función $\psi(t)$. En particular, $\psi(t)$ va a ser continua en $t=0$, y va a ser una función característica. Sea $G(z)$ su función de distribución asociada.

Paso 2: Ahora probaremos que

$$\nu_n(n; |f(m)-A(m)| \le z) \Longrightarrow G(z)$$

Definamos las siguientes funciones:

$$h(m) = \sum_{\substack{p||m, r<p\le n \\ |f(p)|\le 1}} f(p)$$

$$b(m) = \sum_{\substack{p^k||m, p>r \\ k\ge 2}} f(p^k) + \sum_{\substack{p^k||m, p>r \\ |f(p)|>1}} f(p) + \sum_{\substack{p^k||m, p\le r \\ k\ge r}} f(p^k)$$

De la definición de estas funciones, y del hecho que f es aditiva, tenemos que

$$f(m)-A(n) = j(m)-A(r)+h(m)-(A(n)-A(r))+b(m).$$

Ahora, probaremos para todo $\epsilon>0$ las frecuencias

$$L_1 = \nu_n(m; |h(m)-(A(n)-A(r))|>\epsilon)$$

y

$$L_2 = \nu_n(m; |b(m)|>\epsilon)$$

convergen a 0, cuando $n \longrightarrow \infty$. Podemos estimar el tamaño de estas dos frecuencias usando la desigualdad de Turán-Kubilius en forma del lema 3.2.

$$\sum_{n\le x}|h(m)-A(n)+A(r)|^2 \le 49n\sum_{\substack{r<p\le n \\ |f(p)|\le 1}}\frac{f^2(p)}{p}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\le x}\left|\sum_{\substack{p||m, r<p\le n \\ |f(p)|\le 1}} f(p) - \sum_{\substack{|f(p)|\le 1 \\ p\le n}}\frac{f(p)}{p} + \sum_{\substack{|f(p)|\le 1 \\ p\le r}}\frac{f(p)}{p}\right|^2 \le 49n\sum_{\substack{r<p\le n \\ |f(p)|\le 1}}\frac{f^2(p)}{p}$$

$$\sum_{n\le x}\left|\sum_{\substack{p||m, r<p\le n \\ |f(p)|\le 1}} f(p) - \sum_{\substack{|f(p)|\le 1 \\ r\le p\le n}}\frac{f(p)}{p}\right|^2 \le 49n\sum_{\substack{r<p\le n \\ |f(p)|\le 1}}\frac{f^2(p)}{p}$$

Por la desigualdad de Chebyshev en la forma (1) con $t = \epsilon$, $p = 2$ y la hipótesis del teorema

$$L_1 \leq \frac{1}{n\epsilon^2} \sum_{m=1}^{n} |h(m) - (A(n) - A(r))|^2.$$

$$\leq \frac{1}{n\epsilon^2} 45n \sum_{\substack{r<p\leq n \\ |f(p)|\leq 1}} \frac{f^2(p)}{p} = o(1) \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

Si m está siendo contada en L_2, entonces debe de satisfacer uno de varios casos.

Primero el caso en que puede ser dividido por el cuadrado de un primo $p > r$. La frecuencia de estos enteros es a lo más

$$\frac{1}{n} \sum_{p>r} \left[\frac{n}{p^2}\right] \leq \sum_{p>r} \frac{1}{p^2} = o(1) \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

Ahora, el caso en que es exactamente dividido por un primo p con $r < p \leq n$, y $|f(p)| > 1$. Entonces por la hipotesis tenemos que la frecuencia es a lo más

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{p>r \\ |f(p)|>1}} \left[\frac{n}{p}\right] \leq \sum_{\substack{p>r \\ |f(p)|>1}} \frac{1}{p} = o(1) \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

Finalmente, si no ocurre ninguno de estos dos, entonces debe ser dividido por una potencia de primo p^k, con $p \geq r$ y $k \geq r$. Estos enteros tienen una frecuencia menor o igual a

$$\frac{1}{n} \sum_{p} \sum_{k\geq r} \left[\frac{n}{p^k}\right] \leq \sum_{p} p^{-r}(1-p^{-1})^{-1} \leq 2^{1-(r/2)} \sum_{p} \frac{1}{p^2} = o(1) \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

Entonces tenemos que $L_2 \longrightarrow 0$.

Por el coralario 2.6, cuando $L_1 \to 0$, entonces

$$\nu_n(m; \quad |j(m) - A(r) + h(m) - (A(n) - A(r)) + b(m)| \leq z)$$

converge débilmente cuando $n \to \infty$ si y sólo si

$$\nu_n(n; \quad |j(m) - A(r) + b(m)| \leq z)$$

converge débilmente cuando $n \to \infty$. Además, si las distribuciones límite existen, entonces coincidirán. Si $L_2 \to 0$, entonces

$$\nu_n(m; \quad |j(m) - A(r) + b(m)| \leq z)$$

coverge débilmente cuando $n \to \infty$ si y sólo si

$$\nu_n(m; \quad |j(m) - A(r)| \leq z)$$

converge débilmente cuando $n \to \infty$. Si las distribuciones límite existen, entonces coinciden. Pero sabemos que

$$\nu_n(m; \quad |j(m) - A(r)| \leq z) \Longrightarrow G(z),$$

por lo que

$$\nu_n(m; \quad |j(m) - A(r) + h(m) - (A(n) - A(r)) + b(m)| \leq z) \Longrightarrow G(z),$$

que es igual a que

$$\nu_n(m; \quad |f(m) - A(m)| \leq z) \Longrightarrow G(z).$$

□

Ahora veremos el siguiente lema que nos servirá para mostrar el teorema de Erdös-Wintner.

Lema 4.2. *Supongamos que las frecuencias*

$$\nu_n(m; f(m) - \alpha(n) \leq z) \qquad (n = 1, 2, ...),$$

con α una función aritmética, convergen a distribución límite con función característica $w(t)$. Supongamos, además, que para cada constante positiva η, con $0 < \eta < 1$, tenemos que $\alpha(m) - \alpha(n) = o(1)$ cuando $n \to \infty$, uniformemente para $\eta n \leq m \leq n$. Entonces

$$|w(t)|^2 \sum_p p^{-1} |e^{itf(p)} - 1|^2 \leq 36.$$

Demostración. Sean P y N enteros positivos que satisfacen $2 \leq P \leq N$. Aplicamos el lema 3.5, con $a_n = e^{itf(n)}$ y $x = N$:

$$\sum_{p \leq P} p \left| \sum_{\substack{n \leq N \\ p|n}} e^{itf(n)} - \frac{1}{p} \sum_{n \leq N} e^{itf(n)} \right|^2 = \sum_{p \leq P} p \left| \sum_{m \leq Np^{-1}} e^{itf(mp)} - \frac{1}{p} \sum_{n \leq N} e^{itf(n)} \right|^2$$

$$\leq \sum_{p \leq N} p \left| \sum_{\substack{n \leq N \\ p|n}} e^{itf(n)} - \frac{1}{p} \sum_{n \leq N} e^{itf(n)} \right|^2 \leq 16N^2$$

Para cada primo $p \leq P$:

$$\sum_{m \leq Np^{-1}} e^{itf(mp)} = \sum_{m \leq Np^{-1}} e^{itf(m) + itf(p)} - \sum_{\substack{m \leq Np^{-1} \\ p|m}} e^{itf(m) + itf(p)} + \sum_{\substack{m \leq Np^{-1} \\ p|m}} e^{itf(mp)}$$

$$e^{itf(p)}\sum_{m\leq Np^{-1}} e^{itf(m)}+\sum_{\substack{m\leq Np^{-1}\\ p|m}} 2\theta = e^{itf(p)}\sum_{m\leq Np^{-1}} e^{itf(m)}+2\theta Np^{-2},\ \text{ con } |\theta|\leq 1,$$

entonces

$$\Rightarrow \sum_{p\leq P} p\left| e^{itf(p)}\sum_{m\leq [Np^{-1}]} e^{itf(m)} + 2\theta Np^{-2} - \frac{1}{p}\sum_{n\leq N} e^{itf(n)}\right|^2 \leq 16N^2.$$

Fijando P, y dividimos por N^2, obtenemos:

$$\sum_{p\leq P} p\left| e^{itf(p)}\sum_{m\leq [Np^{-1}]} e^{itf(m)}\frac{1}{N} + 2\theta p^{-2} - \frac{1}{Np}\sum_{n\leq N} e^{itf(n)}\right|^2 \leq 16,$$

$$\Rightarrow \sum_{p\leq P} p^{-1}\left| e^{itf(p)}\sum_{m\leq [Np^{-1}]} e^{it(f(m)-\alpha([N/p])+\alpha([N/p]))}\frac{p}{N} + 2\theta p^{-1} - \frac{1}{N}\sum_{n\leq N} e^{it(f(n)-\alpha(N)+\alpha(N))}\right|^2 \leq 16.$$

Denotemos por $w_{[N/P]}$ y w_N a las funciones características de las frecuencias con $n = [N/P]$ y $n = N$ respectivamente.

$$\Rightarrow \sum_{p\leq P} p^{-1}\left| e^{itf(p)}w_{[N/P]}(t)e^{it\alpha([N/p])} + 2\theta p^{-1} - w_N(t)e^{it\alpha(N)}\right|^2 \leq 16.$$

$$\Rightarrow \sum_{p\leq P} p^{-1}|e^{it\alpha(N)}|^2\left| e^{itf(p)}w_{[N/P]}(t)e^{it\alpha([N/p])}e^{-it\alpha(N)} + 2\theta p^{-1} - w_N(t)\right|^2 \leq 16.$$

$$\Rightarrow \sum_{p\leq P} p^{-1}\left| e^{itf(p)}w_{[N/P]}(t)e^{it\alpha([N/p])}e^{-it\alpha(N)} + 2\theta p^{-1} - w_N(t)\right|^2 \leq 16.$$

Notemos que

$$|w(t)|^2\sum_{p\leq P} p^{-1}\left| e^{it(f(p)-\alpha(N)+\alpha([N/P]))} - 1\right|^2 = \sum_{p\leq P} p^{-1}\left| e^{it(f(p)-\alpha(N)+\alpha([N/P]))}w(t) - w(t)\right|^2.$$

Si denotemos por F a $f(p)-\alpha(N)+\alpha([N/P])$, entonces la expresión anterior es igual a:

$$\sum_{p\leq P} p^{-1}\left| e^{it(F)}(w(t)-w_{[N/P]}) + e^{it(F)}w_{[N/P]} - (w(t)-w_N(t)) - w_N(t)\right|^2$$

$$= \sum_{p\leq P} p^{-1}\left| e^{it(F)}w_{[N/P]} - w_N(t) + 2\theta p^{-1} - 2\theta p^{-1} + e^{it(F)}(w(t)-w_{[N/P]}) - (w(t)-w_N(t))\right|^2.$$

Ahora, denotemos por

$$A = e^{it(F)}w_{[N/P]} - w_N(t) + 2\theta p^{-1},$$

$$B = -2\theta p^{-1} + e^{it(F)}(w(t) - w_{[N/P]}) - (w(t) - w_N(t)).$$

Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\sum_{p \leq P} p^{-1}|A+B|^2 \leq \sum_{p \leq P} p^{-1}(|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|) \leq 2\sum_{p \leq P} p^{-1}(|A|^2 + |B|^2).$$

De la desigualdad tenemos que

$$2\sum_{p \leq P} p^{-1}|A|^2 \leq 2(16)$$

y

$$2\sum_{p \leq P} p^{-1}|B|^2 \leq 8\sum_{p \leq P} p^{-3} + o(1), \quad (N \longrightarrow \infty).$$

Por lo que

$$|w(t)|^2 \sum_{p \leq P} p^{-1} \left| e^{it(f(p) - \alpha([N/P]) + \alpha(N))} - 1 \right|^2 \leq 32 + 8\sum_{p \leq P} p^{-3} + o(1), \quad N \to \infty.$$

Por la hipótesis

$$\sup_{p \leq P} |\alpha(N) - \alpha([N/P])| \longrightarrow 0, \quad (N \longrightarrow \infty),$$

haciendo $N \longrightarrow \infty$, y luego $P \longrightarrow \infty$, podemos ver que

$$|w(t)|^2 \sum_{p \leq P} p^{-1} \left| e^{it(f(p)} - 1 \right|^2 \leq 32 + 8\sum_{p \leq P} p^{-3} + o(1).$$

Más aún.

$$\sum_{p \leq P} \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{2},$$

por lo que obtenemos la desigualdad deseada $\square$

Ahora estamos listos para probar el teorema principal de esta tesis.

Teorema 4.3. *(Erdös-Wintner)*

Para que una función aditiva real $f(n)$ pueda tener una distribución límite, es necesario y suficiente que las tres series

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

converjan.

Cuando se cumple esta condición, la función característica, $v(t)$, de la distribución límite, tiene representación

$$v(t) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m} \exp(itf(p^m))\right),$$

donde el producto es tomado sobre todos los números primos.

Demostración. (Suficiencia) Si las 3 series convergen, entonces tenemos que $f(m) - A(n)$, con $1 \leq m \leq n$, tiene una distribución límite por el teorema 4.1, y el límite de $A(n)$ existe por como está definido (y por nuestra hipótesis), cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces $f(m)$ también tiene una distribución límite, la cual es una traslación de la que resulta en el teorema 4.1. Usando la propiedad de traslación de las funciones características (lema 2.12), obtenemos entonces que

$$v(t) = \psi(t) \prod_p e^{itf(p)/p} = \prod_p (1 + g(p)),$$

que es lo que queríamos probar.

(Necesidad) Comencemos observando que para cualquier número real β,

$$|e^{i\beta} - 1|^2 = 4 \left| \frac{e^{i\beta/2} - e^{-i\beta/2}}{2i} \right|^2 = 4(\operatorname{sen}(\beta/2))^2,$$

y si $|\beta| \leq \pi/2$, entonces $|\operatorname{sen}\beta| \geq 2|\beta|/\pi$. Sea T un número real positivo, tal que $|w(t)| \geq 1/2$ en el intervalo $|t| \leq T$. Fijemos $\delta = \pi/T$. Veamos que

$$\sum_{|f(p)| \leq \delta} \frac{f^2(p)}{p} \leq \delta^2 \sum_{|f(p)| \leq \delta} p^{-1} \left(\operatorname{sen} \frac{Tf(p)}{2} \right)^2 = \frac{\delta^2}{4} \sum_{|f(p)| \leq \delta} p^{-1} \left| e^{iTf(p)} - 1 \right|^2,$$

por el lema 4.2, tenemos que

$$\frac{\delta^2}{4} \sum_{|f(p)| \leq \delta} p^{-1} \left| e^{iTf(p)} - 1 \right|^2 \leq \frac{36}{4} \delta^2 |w(t)|^{-2} \leq 36\delta^2.$$

Podemos integrar sobre el intervalo $0 \leq t \leq T$ y ver que

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \sum_{|f(p)| > \delta} \frac{1}{p} \leq \sum_{|f(p)| > \delta} \frac{1}{2p} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}(Tf(p))}{Tf(p)}\right)$$

$$\sum_p \frac{1}{T} \int_0^T p^{-1} \left(\operatorname{sen} \frac{tf(p)}{2} \right)^2 dt \leq \frac{36}{4T} \int_0^T |w(t)|^{-2} dt \leq 36$$

Estos resultados nos muestran que las series

$$\sum_{|f(p)| > 1} \frac{1}{p} \qquad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

convergen dado que las series son no decrecientes y están acotadas.

Para ver que la serie

$$\sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f(p)}{p}$$

converge, se sigue del teorema 4.1 que las frecuencias

$$\nu_n(m; f(m) - A(n) \leq z) \qquad (m = 1, 2, ...),$$

convergen. Por la hipótesis, tambien convergen las frecuencias

$$\nu_n(m; f(m) \leq z) \qquad (m = 1, 2, ...),$$

por lo que podemos aplicar el lema 2.9 para deducir que el límite de $A(n)$ existe y es finito. Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Bibliografía

[1] Ash, R. B., & Doléans-Dade C. (2000). *Probability and measure theory.* Harcourt/Academic Press.

[2] Elliott, P. D. T. A. (1979). *Probabilistic Number Theory I.* Springer.

[3] Elliott, P. D. T. A. (1977). *The Turán-Kubilius Inequality.* Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 65, no. 1, 8–10.

[4] Gnedenko, B.V., & Kolmogorov, A.N. (1968). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.* Addison-Wesley, Boston.

[5] Hardy, G. H., Wright, E. M., Silverman, J., & Wiles, A. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford University Press.

[6] Kubilius, J. (1975). *On an inequality for additive arithmetic functions.* Acta Arithmetica, 27, 371-383.

[7] Marsden, J. E., & Hoffman M. J. (1999). *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company.

[8] Montgomery, H. L., & Vaughan, R. C. (2007). *Multiplicative number theory I: classical theory.* Cambridge University Press.

[9] Tenenbaum, G. (1995). *Introduction to analytic and probabilistic number theory.* Cambridge University Press.

[10] Turan P. (1934). *On a theorem of Hardy and Ramanujan.* J. London Math. Soc. 9, 274-276