UNIVERSIDAD DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Facultad Interdisciplinaria de Ciencias Exactas y Naturales

Licenciatura de en Matemáticas

Introducción teoría de Juegos en Pokemón

T E S I S

Trabajo de Tesis para obtener el grado de:

Licenciatura en Matemáticas

Presenta:

Iván Agustín Valencia Acuña.

Director de tesis: Dr. Oscar Vega Amaya

Hermosillo, Sonora, México, 24 de febrero de 2025

Sinodales

1. Dra. Carmen Geraldi Higuera Chan
2. Dr. Jesus Adolfo Minjarez Sosa
3. Dra. Alejandra Fonseca Morales
4. Dr. Oscar Vega Ama

Agradecimientos

Mi más sincero Agradecimiento a mi asesor de tesis, DR. Oscar Vega, su paciencia, guia y motivación en la elaboración de este trabajo.De igual manera, agradezco a mis sinodales Dra. Carmen Geraldi Higuera Chan, Dr. Jesus Adolfo Minjarez Sosa y Dra. Alejandra Fonseca Morales, por el tiempo que dedicaron en la revision de este trabajo.

Me gustaría tambien agradecer a la Universidad de Sonora, al departamento de matemáticas y docentes, por formarme en esta disciplina.

Finalmente gracias a mis padres Agustín y María por apoyarme en todo momento en toda dificultad y a mis hermanos Pavel y Tania por motivarme a esforzarme en todo momento.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El campo de la teoría de juegos ha sido establecido desde hace tiempo como una herramienta poderosa para analizar interacciones estratégicas en diversos ámbitos, ciencias económicas, biología evolutiva, psicología, ciencias políticas, informática, diseño industrial y estrategia militar. Esta tesis tiene como objetivo mostrar otra aplicación de la teoría de juegos adentrándose en el mundo de los videojuegos competitivos con un enfoque específico en las batallas Pokemón.

La elección de las batallas Pokémon como el contexto de nuestro estudio surge de un deseo de ofrecer una perspectiva fresca y contribuir con una aplicación nueva de la teoría de juegos. Esto se puede observar como introducción en juegos entre dos personas en:

(https://blogs.cornell.edu/info2040/2022/09/20/pokemon-battling-explained-featuring-game-theory/)

(https://www.smogon.com/forums/threads/pokemon-battling-a-lesson-in-game-theory.3492697/)

Al seleccionar las batallas Pokémon como nuestro caso de estudio, pretendemos mostrar la versatilidad de la teoría de juegos en contextos diversos donde la toma de decisiones estratégicas desempeña un papel crucial. Además,en nuestro trabajo veremos el principio fundamental de que la teoría de juegos puede aplicarse a cualquier escenario donde se puedan cuantificar los resultados y existan interacciones estratégicas.

En esta introducción, proporcionamos una visión general de los fundamentos de la teoría de juegos, la relevancia de la toma de decisiones estratégicas en contextos de juego y los objetivos específicos.

1.1. Elementos de juegos

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas que estudia las interacciones estratégicas entre jugadores o agentes racionales. Estos jugadores pueden ser individuos, empresas, países, o cualquier entidad que tome decisiones estratégicas tomando los datos que tengan los jugadores entre sí. El objetivo principal de la teoría de juegos es modelar y analizar situaciones donde las decisiones de un jugador afectan directamente las opciones y resultados de otros jugadores.

Un juego es cualquier situación en la que dos o más participantes o jugadores buscan un resultado, pago o utilidad que depende de las decisiones o jugadas de todos los participantes. Otro elemento es la frecuencia con la que usan tales decisiones o estrategias.

En esta tesis nos limitaremos a juegos de dos jugadores de **suma cero**.

(https://es.wikipedia.org/wiki/Juego de suma cero)

Es decir, juegos con dos participantes y donde la ganancia de un jugador es pérdida para el otro. Por ejemplo, si un jugador 1 gana 1 punto entonces el jugador 2 pierde 1 punto.

En general, un juego finito de suma cero con dos jugadores (1 y 2) consiste en los siguientes elementos:

1. Conjunto de decisiones del jugador 1 representado por el conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$
2. Conjunto de decisiones del jugador 2 representado por el conjunto $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$

Para simplificar la notación identificaremos a los jugadores con su conjunto de decisiones, es decir:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$$

3 La función de pago :

$$r : A \times B \to \mathbb{R}$$

La cantidad $r(a_i, b_j)$ representa la cantidad que el jugador 2 paga al jugador 1 si es una cantidad positiva; si la cantidad es negativa, entonces el jugador 1 entrega al jugador 2 una cantidad igual al valor absoluto de $r(a_i, b_j)$.

A los elementos de A y B los llamaremos estrategias puras. Más adelante introducimos una clase más amplia de estrategias denominadas estrategias mixtas o aleatorizadas. Es usual representar los elementos anteriores mediante una tabla, conocida como matriz del juego, como se muestra a continuación:

	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_m
a_1	$r(a_1, b_1)$	$r(a_1, b_2)$	$r(a_1, b_3)$	$\cdots$	$r(a_1, b_m)$
a_2	$r(a_2, b_1)$	$r(a_2, b_2)$	$r(a_2, b_3)$	$\cdots$	$r(a_2, b_m)$
a_3	$r(a_3, b_1)$	$r(a_3, b_2)$	$r(a_3, b_3)$	$\cdots$	$r(a_3, b_m)$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	$r(a_n, b_1)$	$r(a_n, b_2)$	$r(a_n, b_3)$	$\cdots$	$r(a_n, b_m)$

Tabla 1.1: Marices de pagos o juegos $m \times n$

1.2. Teoría de juegos en Pokemón

A continuación, usaremos un juego de Pokemón como contexto para aplicar los elementos de la teoría de juegos. En un enfrentamiento de 2 entrenadores, cada uno con un equipo de 3 Pokémon. El enfrentamiento vendría siendo el juego, los entrenadores son los participantes del juego o los jugadores, las decisiones o jugadas serian el tipo de Pokémon que se elige para jugar. Cabe mencionar que en Pokémon hay una gran cantidad de jugadas que puede formar el jugador ya que hay más de 1000 especies de Pokémon, sin mencionar que inclusive dos Pokémon de la misma especie pueden ser considerados jugadas diferentes si tienen movimientos diferentes y/o distribución distinta en EVs el cual es una variable de cada estadistica que tiene un valor maximo de 252 y la suma de las 6 estadisticas (HP_0,$Attack$,$Defense$,$Sp.Attack$,$Sp.Defense$, $Speed$) es de 506 como se muestra en el ejemplo siguiente:

FlutterMane (1)	FlutterMane (2)
Flutter Mane @ Choice Specs Ability: Protosynthesis EVs: 252 SpA / 6 SpD / 250 Spe Timid Nature ShadowBall Moonblast MysticalFire Psyshock	Flutter Mane @ Life Orb Ability: Protosynthesis EVs: 252 SpA / 4 SpD / 252 Spe Timid Nature ShadowBall Moonblast MysticalFire CalmMind

Tabla 1.2: 2 jugadas distintas usando el mismo Pokémon, misma Base Stat, Los factores diferentes a considerar son los 4 movimientos, la habilidad (ability), distribución de EVs y Naturaleza (Nature).

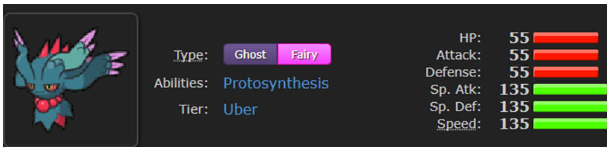

Figura 1.1: Estadísticas generales de FlutterMane

Los datos de especies Pokemon y sus varianzas (EVs,IVs,Estadisticas) son obtenidas en:

https://www.smogon.com/dex/sv/pokemon/

¿Cómo cuantificaremos el resultado de los juegos en este contexto? Buscaremos la probabilidad de que una jugada o Pokemón gane un enfrentamiento sin intercambiar dichos Pokemón hasta que uno sea incapacitado. Esto lo haremos simulando un enfrentamiento un número suficiente grande de veces. En una simulación de n enfrentamientos determinamos la proporción de veces que un Pokemón gana sobre otro Pokemón. La simulación se hará usando las siguientes fórmulas:

$$Base : HP, Attack, Defense, Sp.Atk, Sp.Def, Speed$$
$$HPfinal = ((2 \times Base) + IVs + \frac{EVs}{4} \times \frac{Nivel}{100}) + Nivel + 10$$

$Attack/Defense/Sp.Atk/Sp.Def/Speedfinal = ((\frac{(((2 \times Base)+IVs+\frac{EVs}{4}) \times Nivel)}{100} + 5) \times Naturaleza)$

$Daño\ Inflingido = ((\frac{2 \times Nivel}{5})+2) \times (\frac{Ataque}{DefensadelOponente}) \times (\frac{Poderdelmovimiento}{50} + 2) \times Modificadores$

Formula Obtenida en https://bulbapedia.bulbagarden.net/wiki/Damage

Se hace una observación que los valores entre () , el cálculo se redondea en enteros sin importar el valor decimal como ejemplos $(2.8) = 2$, $(3.1242) = 3, \ldots,$ etc.

Supongamos que el jugador 1 y el jugador 2 en el primer turno escogen el movimiento MysticalFire/ShadowBall respectivamente. Entonces el primer turno es del jugador 2 ya que el valor de *Speed* del jugador 2 es mayor que la del jugador 1. Esto lo observamos usando la ecuación anterior

Suponiendo que ambos Pokemón son competitivos es decir $IVs = 31$,ambos de Nivel 50, la Naturaleza *Timid* es un factor de $\times 0.9$ en Attack y $\times 1.1$ en Speed entonces

$$\begin{aligned}
Speed(1) &= ((\frac{(((2 \times 135) + 31 + \frac{250}{4}) \times 50)}{100} + 5) \times 1.1) \\
&= 204 \\
Speed(2) &= ((\frac{(((2 \times 135) + 31 + \frac{252}{4}) \times 50)}{100} + 5) \times 1.1) \\
&= 205
\end{aligned}$$

Observamos que $Speed(1) < Speed(2)$ por lo tanto el jugador 1 recibe el daño primero. Ahora determinaremos los puntos de vidas toltales.

$$HP(1) = ((2 \times 55) + 31 + \frac{0}{4} \times \frac{50}{100}) + 50 + 10 = 130$$

$$HP(2) = ((2 \times 55) + 31 + \frac{0}{4} \times \frac{50}{100}) + 50 + 10 = 130$$

Ambos jugadores tienen $HP = 131$. La condición de victoria es causar el suficiente daño para reducir a $HP = 0$, es decir, $HP - Daño\ Inflingido$. Ahora calcularemos el $Daño\ Inflingido$.

Si el movimiento del jugador 2 usa ShadowBall que es un movimiento especial es decir, $Sp.Atk$ con una potencia de 80 , el jugador 1 lo resistirá dependiendo de la defensa especial es decir, $Sp.Def$. Como FlutterMane(2) tiene el objeto Lifeball este incrementa el $Daño\ Inflingido$ con un factor $\times 1.5$ con la condición que causa un $\frac{1}{10}$ de daño : $Daño\ Inflingido = HP_0(B) \times (\frac{1}{10})$. Además, el movimiento ShadowBall es efectivo contra FlutterMane(B), el cual duplica a el factor , es decir, $Modificadores = 1.2 \times 2 = 2.4$.

$$Sp.Atk(2) = ((\frac{(((2 \times 135) + 31 + \frac{252}{4}) \times 50)}{100} + 5) \times 1) = 187$$

$$Sp.Def(1) = ((\frac{(((2 \times 135) + 31 + \frac{6}{4}) \times 50)}{100} + 5) \times 1) = 156$$

$$Daño\ Inflingido = (((\frac{2 \times 50}{5}) + 2) \times (\frac{187}{156}) \times (\frac{80}{50} + 2) \times 2.4) = 158$$

Como FlutterMane(2) es más rápido que FlutterMane(1) y causa un daño mayor a $HP(1)$, entonces el jugador 2 gana sin que FlutterMane(2) reciba daño.

1.3. Obtención, representación y validación de datos

Todas las batallas ocurrirán en el simulador de Pokémon Showdown ubicado en: (https://play.pokemonshowdown.com/).

Los entrenadores 1 y 2 tienen los siguientes Pokémon.

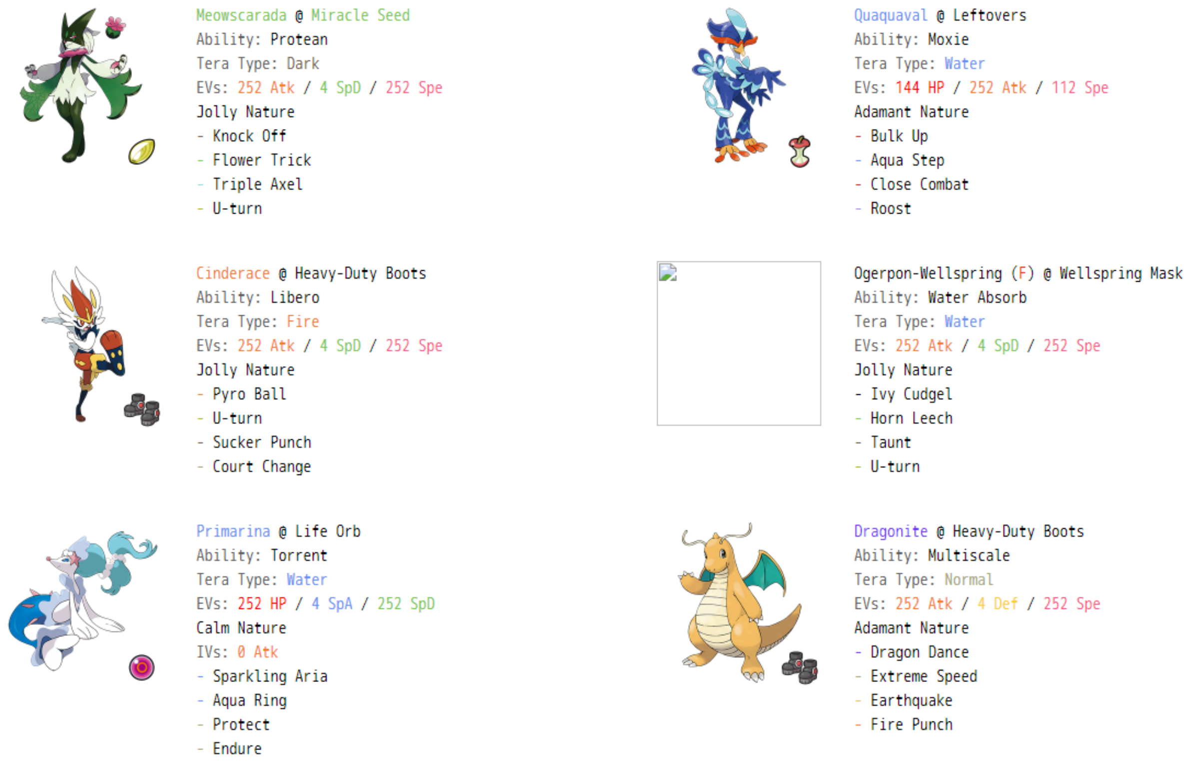

FIGURA 1.2: Los Pokémon de la columna izquierda son del Entrenador 1 (A) y los de la derecha son del entrenador 2 (B).

---

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.42	0.88	0.36
a_2	0	0.52	0.2
a_3	0.96	0.06	0.7

TABLA 1.3: Representación de datos de un enfrentamiento Pokemón

La tabla 1.3 representa un juego de suma cero 3×3. Es un tipo de juego estratégico por turnos en el que los entrenadores 1 y 2. Las acciones de cada uno tienen consecuencias para ambos. Cada entrenador tiene 3 opciones a elegir, jugadas o Pokemón. Cada celda de esta tabla muestra el pago o utilidad del juego que en este contexto seria la tasa de victorias que tiene cada Pokemón en cada situación o enfrentamiento. Este juego es de suma cero ya que las tasas de victoria en cada situación de las sumas de los entrenadores es siempre constante 1.

Pokemóns del jugador 1:

$$A := \{a_1 : Meowscarada, a_2 : Cinderace, a_3 : Primarina\}$$

Pokemóns del jugador 2:

$$B := \{b_1 : Quaquaval, b_2 : OgerponWellspringMask, b_3 : Dragonite\}$$

Usaremos una simulación de 50 repeticiones para obtener las tasas de victorias de cada Pokemón en cada situación. Cada casilla tendrá valores $(X_{ij}) = (r(a_i, b_j))$, es decir:

$$X_{ij} : la\ tasa\ de\ victorias\ de\ jugador\ A\ para\ las\ jugadas\ a_i\ y\ b_j$$

Los datos de cada utilidad o pago en cada situación se obtuvieron usando la fórmula del la sección 1.2.

Las matrices de pagos permitirán analizar la situación del juego y los jugadores podrán formar sus planes o estrategias según los pagos posibles que muestra la matriz de juego. Para probar la validez de este método de obtención de datos vamos a usar la ***Ley de Grandes Números*** (https://www.probabilitycourse.com/chapter7/7\;1.1law of large numbers.php)

La ***Ley de Grandes Números*** tiene un papel central en la teoría de la probabilidad y en estadística. Esta establece que si se realizan repeticiones independientes de un experimento aleatorio, por ejemplo, midiendo una muestra finita numérica de tamaño n que sean independientes entre ellas, un gran número veces, entonces el valor promedio $\overline{X}_n$ convergera al valor esperado.

Llamaremos X_1,X_2,X_3,...,X_n a la muestra formada por las observaciones las n repeticiones del experimento aleatorio. Al promedio de dichas observaciones le llamaremos media muestral y la denotaremos como $\overline{X}_n$, es decir, $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Note que como los valores X_i son variables aleatorias, la media muestral $\overline{X}_n$ es también una variable aleatoria. En particular, el valor esperado de la media muestral es:

$$\begin{aligned}
E(\overline{X}_n) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) \\
&= \frac{E\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \text{ por linealidad} \\
&= \frac{nEX}{n} \text{ ya que } EX_i = EX \\
&= EX.
\end{aligned}$$

También la varianza de la muestra promedio $\overline{X}$ es dada:

$$\begin{aligned}
Var(\overline{X}) &= Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) \\
&= \frac{Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{n^2} \text{ ya que } Var(aX) = a^2Var(x) \\
&= \frac{Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)}{n^2} \text{ por ser independientes} \\
&= \frac{nVar(X)}{n^2} \text{ ya que } Var(X_i) = Var(X) \\
&= \frac{Var(X)}{n}.
\end{aligned}$$

Existen dos versiones de la Ley de Grandes Números: ley fuerte y ley débil. A continuación, enunciamos con precisión la Ley Débil de Grandes

Números (LDGN) y damos su prueba. Posteriormente, enunciamos la Ley Fuerte de Grande Números (LFGN) pero omitimos su prueba pues requiere de conocimientos matemáticos que están fuera del alcance y propósito del presente trabajo.

Teorema 1.3.1 (LDGN). *Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ variables aleatorias con valor esperado finito $EX_n = m < \infty$ y varianza finita.Entonces:*

$$\forall \epsilon > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X}_n - m| \geq \epsilon) = 0$$

Demostración. La demostración de Ley Débil de Grandes Números es fácil si asumimos que $Var(X) = \sigma^2 < \infty$ es finita. En este caso podemos usar la desigualdad de Chebyshev para obtener:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0$$

Puesto que $Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ en otras palabras:

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X} - m| \geq \epsilon) = 0$$

■

Como ya lo mencionamos, aproximaremos los pagos o resultados de enfrentamientos entre las jugadas repitiéndolas 50 veces.

Supongamos que Flutter Mane del entrenador 1, se enfrenta a Flutter Mane del entrenador 2. Ambos tienen estadísticas y movimientos diferentes, usando como referencia la simulación repetida 50 veces. Si el entrenador 1 gana 27 veces, entonces:

$Pago$ o $Utilidad = \frac{27}{50}$

Así la tasa de victoria Flutter Mane de entrenador 1 en esta situación seria 0.54 mientras que la tasa de victoria Flutter Mane de entrenador 2 seria de 0.46. Esta situación se expresa de la siguiente manera:

	Flutter Mane (2)
Flutter Mane (1)	(0.54)

TABLA 1.4: Matriz de juego 1×1 los valores X_{ij} indican las tasas de victorias del jugador representado en eje horizontal.

Capítulo 2

Metodología de la Teoría de Juegos y Simplificaciones

Ahora utilizaremos la teoría de juegos con el conjunto de datos anteriores para determinar las estrategias óptimas para los jugadores 1 y 2 bajo las siguientes suposiciones:

1. Los jugadores 1 y 2 son jugadores completamente racionales y buscan el mejor resultado individual.
2. Los jugadores 1 y 2 usarán sus 3 Pokemón específicos y no habrá cambios o sustituciones.
3. Los jugadores 1 y 2 conocen los la matriz de pagos.

2.1. Estrategias puras y estrategias mixtas con pagos esperados

Antes de continuar es importante mencionar que las estrategias se pueden dividir en 2 clases:

1. **Estrategias mixtas:** Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de decisiones del jugador. Esta distribución indica la frecuencia en la que el jugador elige cada decisión. Así $\sigma_A = [P(a_1), P(a_2), P(a_3)]$ y $\sigma_B = [P(b_1), P(b_2), P(b_3)]$ donde $\sum P(a_i) = 1$ y $\sum P(b_j) = 1$.

		$\frac{2}{8}$ b_1	$\frac{1}{8}$ b_2	$\frac{5}{8}$ b_3
$\frac{2}{5}$	a_1	0.42	0.88	0.36
$\frac{1}{5}$	a_2	0	0.52	0.2
$\frac{3}{5}$	a_3	0.96	0.06	0.7

Tabla 2.1: Matriz de juego con estrategias mixtas $\sigma_A = [\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$ y $\sigma_B = [\frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}]$

En la tabla 2.1 la estrategia del jugador 1 σ_A y el jugadoe 2 σ_B cada jugador usara una loteria para seleccionar su jugada a_i y b_j, el jugador 1 usara 2 esferas rojas que representan a_1, 1 esfera azul que representa a_2 y 2 esferas verdes que representan a_3. El jugador 1 seleccionara una a_i segun la esfera que saque en una loteria ejemplo si saca una esfera azul entonces usara a_2. Analogamente el jugador 2 puede usar el mismo metodo usando 2 esperas rojas para b_1, 1 esfera azul para b_2 y 5 esferas verdes para b_3.

2. **Estrategias puras:** Una estrategia pura es una estrategia mixta si el jugador siempre escoge una jugada fija, es decir, $P(a_i) = 1$ o $P(b_j) = 1$

, para algún índice i o j.

		0 b_1	0 b_2	1 b_3
0	a_1	0.42	0.88	0.36
1	a_2	0	0.52	0.2
0	a_3	0.96	0.06	0.7

TABLA 2.2: Matriz de juego con estrategias puras $\sigma_A = [0, 1, 0]$ y $\sigma_B = [0, 0, 1]$

Conociendo las tasas de victorias (pagos) de cada situación entre Pokemón (jugadas), y las estrategias de ambos entrenadores (jugadores) podemos sacar un valor que llamaremos valor esperados $U(\sigma_A, \sigma_B)$ que indica la probabilidad promedio de que gane el jugador A.

Definimos en general el **valor esperado** según las matrices de pagos usando las estrategia σ_A del jugador A y las estrategia σ_B del jugador B con ayuda de las matix de juego o tablas 1.1.

$-$	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_m
a_1	$r(a_1, b_1)$	$r(a_1, b_2)$	$r(a_1, b_3)$	$\cdots$	$r(a_1, b_m)$
a_2	$r(a_2, b_1)$	$r(a_2, b_2)$	$r(a_2, b_3)$	$\cdots$	$r(a_2, b_m)$
a_3	$r(a_3, b_1)$	$r(a_3, b_2)$	$r(a_3, b_3)$	$\cdots$	$r(a_3, b_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$r(a_n, b_1)$	$r(a_n, b_2)$	$r(a_n, b_3)$	$\cdots$	$r(a_n, b_m)$

TABLA 2.3: Matrix de juego general $n \times m$ para definir el juego esperado

$$\sigma_A = [P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)] \quad \sigma_B = [P(b_1), P(b_2), \ldots, P(b_m)]$$

$$X_{ij} = r(a_i, b_j) \qquad \text{tasas de victorias en este contexto}$$

$$\text{Valor esperado} : U(\sigma_A, \sigma_B) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} X_{ij} P(a_i) P(b_j)$$

2.2. Solución con estrategias

Una solución a un juego de suma cero es un par (a, b) del conjunto $A \times B$ tal que ninguno de los jugadores tiene incentivo para de cambiar de decisión unilateralmente, es decir, bajo el supuesto de que el otro jugador no cambia su decisión. A este par se le llama **equilibrio de Nash**.

$-$	b_1	b_2	$\cdots$	b_m	$minimax$
a_1	$r(a_1, b_1)$	$r(a_1, b_2)$	$\cdots$	$r(a_1, b_m)$	$min_{\sigma_B} U(a_1, \sigma_B)$
a_2	$r(a_2, b_1)$	$r(a_2, b_2)$	$\cdots$	$r(a_2, b_m)$	$min_{\sigma_B} U(a_2, \sigma_B)$
a_3	$r(a_3, b_1)$	$r(a_3, b_2)$	$\cdots$	$r(a_3, b_m)$	$min_{\sigma_B} U(a_3, \sigma_B)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$r(a_n, b_1)$	$r(a_n, b_2)$	$\cdots$	$r(a_n, b_m)$	$min_{\sigma_B} U(a_n, \sigma_B)$
$maximin$	$max_{\sigma_A} U(\sigma_A, b_1)$	$max_{\sigma_A} U(\sigma_A, b_2)$	$\cdots$	$max_{\sigma_A} U(\sigma_A, b_m)$	$-$

TABLA 2.4: Matrix de juego $n \times m$ con mínimos y máximos

Equilibrio de Nash: Una par de estrategias $(\sigma_{A_x}, \sigma_{B_y})$ es punto silla o eqilibrio de Nash si:

$$U(\sigma_{A_x}, \sigma_B) \geq U(\sigma_{A_x}, \sigma_{B_y}) \geq U(\sigma_A, \sigma_{B_y})$$

Para cualquier σ_A, σ_B arbitrarias

Cuando las estrategias son puras:

$$máximo[min_{\sigma_B} U(a_i, \sigma_B)] = U(a_x, \sigma_B)$$

$$mínimo[max_{\sigma_A} U(\sigma_A, b_j)] = U(\sigma_A, b_y)$$

En otras palabras $U(a_x, b_y)$ es el maximin de b_y y minimax de a_x, es decir que el minimax y el maximin deben ser iguales para que exista el equilibrio de Nash de caso contrario no cumple la condición de desigualdad.

	b_1	b_2	b_3	*mínimos*
a_1	0.42	0.88	0.36	0.36
a_2	0	0.52	0.2	0
a_3	0.96	0.06	0.7	0.06
máximos	0.96	0.88	0.7	

TABLA 2.5: Matriz de juego 3×3 basada en la tabla 1.3

Nota que en la tabla 2.5 que el $Maximin = 0.36$ y $Minimax = 0.7$ no coinciden o sea por lo tanto no existe un equilibrio de Nash en estrategias puras.

¿Qué pasaría si eliminamos estrategias puras que no sean viables debido a que otra estrategia pura da mejores resultados en cualquier situación, o si una estrategia es obsoleta debido a la combinación de otras estrategias? A esta pregunta se da respuesta en la teoría juegos en dos clases de estrategias, las puras y las mixtas. Esto lo explicaremos en las siguientes secciones.

2.3. Dominio iterado por estrategias puras

Ahora vamos a ver si podemos eliminar cualquier estrategia “dominada”. Una estrategia estrictamente dominada es una estrategia que siempre da un resultado peor que otra elección sin importar las acciones del otro jugador.

Usando la matrix de juego general de la Tabla 1.1 definiremos cuando una estrategia es **estrictamente dominada**.

$-$	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_m
a_1	$r(a_1,b_1)$	$r(a_1,b_2)$	$r(a_1,b_3)$	$\cdots$	$r(a_1,b_m)$
a_2	$r(a_2,b_1)$	$r(a_2,b_2)$	$r(a_2,b_3)$	$\cdots$	$r(a_2,b_m)$
a_3	$r(a_3,b_1)$	$r(a_3,b_2)$	$r(a_3,b_3)$	$\cdots$	$r(a_3,b_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$r(a_n,b_1)$	$r(a_n,b_2)$	$r(a_n,b_3)$	$\cdots$	$r(a_n,b_m)$

TABLA 2.6: Matrix de juego $n \times m$ para definir estrategias estrictamente dominadas

Diremos que una estrategia a_d del jugador A es **estrictamente dominada** si existe a_x tal que:

$r(a_d, b_j) \leq r(a_x, b_j)$ para todo $j = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Análogamente una estrategia b_d del jugador B es **estrictamente dominada** si existe b_y tal que:

$r(a_i, b_d) \geq r(a_i, b_y)$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

En otras palabras, para el jugador una estrategia es estrictamente dominada si existe otra estrategia pura con mejores resultados sin importar las desicion del jugador oponente.

En la matrix de juego (tabla 2.5) al no existir un equilibrio de Nash con estrategias puras nos planteamos simplificarla. Ahora vamos a ver si el jugadores tienen alguna estrategia a_d o b_d.

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.42	0.88	0.36
a_2	0	0.52	0.2
a_3	0.96	0.06	0.7

TABLA 2.7: $r(a_2, b_j) \leq r(a_1, b_j)$

Entonces a_2 es una estrategia estrictamente dominada por la estrategia a_1; por lo tanto, el jugador 1 no tiene motivos para usar a_2. Eliminamos la fila a_2:

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.42	0.88	0.36
a_3	0.96	0.06	0.7

TABLA 2.8: $r(a_i, b_1) \geq r(a_i, b_3)$

Entonces b_1 es una estrategia estrictamente dominada; el jugador 2 no tiene motivos para usarla por lo que podemos eliminar la columna b_1:

	b_2	b_3
a_1	0.88	0.36
a_3	0.06	0.7

TABLA 2.9: Matrix de juego simplifica eliminando las estrategias estrictamente dominadas

2.4. Dominio iterado por estrategias mixtas

En la sección 2.3 observamos cómo encontrar estrategias a_d y b_d estrictamente dominadas por estrategias puras cuando otras opciones a_x y b_y fijas "siempre" dan mejores resultados, pero en muchos casos una estrategia no está completamente dominadas por una sola estrategia si no con una combinación de ellas.

		$P(b_1)$	$P(b_2)$	$P(b_3)$	$\cdots$	$P(b_m)$
		b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_m
$P(a_1)$	a_1	$r(a_1,b_1)$	$r(a_1,b_2)$	$r(a_1,b_3)$	$\cdots$	$r(a_1,b_m)$
$P(a_2)$	a_2	$r(a_2,b_1)$	$r(a_2,b_2)$	$r(a_2,b_3)$	$\cdots$	$r(a_2,b_m)$
$P(a_3)$	a_3	$r(a_3,b_1)$	$r(a_3,b_2)$	$r(a_3,b_3)$	$\cdots$	$r(a_3,b_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P(a_n)$	a_n	$r(a_n,b_1)$	$r(a_n,b_2)$	$r(a_n,b_3)$	$\cdots$	$r(a_n,b_m)$

TABLA 2.10: $0 \leq P(a_i) \leq 1$ y $0 \leq P(b_j) \leq 1$

Sea $\sigma_A = [P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)]$ y $\sigma_B = [P(b_1), P(b_2), \ldots, P(b_m)]$

Decimos que a_d esta **dominada por la estrategia mixta** si $U(a_d, \sigma_B) \leq U(\sigma_A, \sigma_B)$ y que b_d está dominada por la estrategia mixta σ_B si $U(\sigma_A, b_d) \geq U(\sigma_A, \sigma_B)$.

Vamos a construir una nueva simulación distinta de la fig. 1.2 en este caso el jugador B decidido cambiar su Quaquval (b_1) por un Hisuian Decidueye $(\overline{b}_1)$ y el jugador A no tiene disponible a Cinderace a_2.

FIGURA 2.1: Los Pokémon de la columna izquierda son del Jugador 1 y los de la derecha son del Jugador 2.

Ahora tendríamos una matriz de pago como se muestra a continuación:

		$P(\bar{b}_1)$	$P(b_2)$	$P(b_3)$
		$\bar{b}_1$	b_2	b_3
$P(a_1)$	a_1	0.4	0.88	0.36
$P(a_3)$	a_3	0.65	0.06	0.7

TABLA 2.11

Vemos que Hisuian Decidueye ($\bar{b}_1$) nunca es la mejor opción para el jugador 2, pero tampoco es la peor acción, si jugador 1 usa a Meowscarada (a_1) si bien Hisuian Decidueye ($\bar{b}_1$) da un mejor pago al jugador A que Dragonite (b_3) pero si da un menor pago al jugador 1 que Ogerpon (b_2) y si jugador 1 usa a Meowscarada (a_1). Hisuian Decidueye ($\bar{b}_1$) no da un menor pago al contrincante que Ogerpon (b_2) si el jugador 1 usa a Primarina (a_3) pero si da un menor pago que Dragonite (b_3). Por lo tanto, Hisuian

Decidueye ($\bar{b}_1$) no es estrictamente dominada por estrategias puras, ¿pero son dominadas por una combinación de las estrategias (b_2) y (b_3)?.

Consideraremos la estrategia mixta $\sigma_B = (0, Q, 1-Q)$ del jugador 2 donde $Q = P(b_2)$ y $1 - Q = P(b_3)$.

Para eliminar la estrategia Hisuian Decidueye ($\bar{b}_1$) como estrategia estrictamente dominada, debemos demostrar las siguientes desigualdades.

1. $U(a_1, \sigma_B) \leq U(a_1, \bar{b}_1)$
2. $U(a_3, \sigma_B) \leq U(a_3, \bar{b}_1)$

		$P(\bar{b}_1)$	Q	$1-Q$
		$\bar{b}_1$	b_2	b_3
$P(a_1)$	a_1	0.4	0.88	0.36
$P(a_3)$	a_3	0.65	0.06	0.7

Tabla 2.12

El pago esperado de σ_B cuando el jugador 1 usa a Meowscarada (a_1) seria:

$$\begin{aligned} U(a_1, \sigma_B) &= [(0.88)Q] + [(0.36)(1-Q)] = [Q(0.88 - 0.36)] + 0.36 \\ &= [Q(0.52)] + 0.36 \end{aligned}$$

Y el pago esperado de σ_B cuando jugador 1 usa a Primarina (a_3) seria:

$$\begin{aligned} U_B(a_3, \sigma_B) &= [(0.06)Q] + [(0.7)(1-Q)] = [Q(0.06 - 0.7)] + 0.7 \\ &= [Q(-0.64)] + 0.7 \end{aligned}$$

Nosotros ya conocemos los pagos esperados si el jugador 2 usa Hisuian Decidueye ($\bar{b}_1$) y el jugador 1 usa a Meowscarada (a_1) o Primarina (a_3) son 0.4 y 0.65.

1. $[Q(0.52)] + 0.36 \leq 0.4$

2. $[Q(-0.64)] + 0.7 \leq 0.65$

Resolviendo y despejando Q tratamos de hallar una Q que cumpla ambas desigualdades.

1. $Q \leq \frac{0.04}{0.52} = 0.0769230769$

2. $Q \geq \frac{0.05}{0.64} = 0.078125$

Claramente, no existe solución. Por lo tanto podemos concluir que no existe una estrategia σ_B que domine a Hisuian Decidueye ($\bar{b}_1$).

2.5. Respuesta óptima a estrategias fijas en juegos de 2x2

Criterio de estrategia optima pura: En cualquier juego de suma cero de 2×2 si el jugador 1 emplea $\sigma_A = (1 - P, P)$ o el jugador 2 emplea $\sigma_B = (1 - Q, Q)$, entonces el oponente tiene una **estrategia óptima** pura. Para verificar esta afirmación supongamos que la matriz de juego es la siguiente:

	$1 - Q$	Q
$1 - P$	a	b
P	c	d

Tabla 2.13

Para determinar la **estrategia óptima** del jugador 1 calculamos el valor esperado tomando la Q fija y P variable para determinar con cual variable

P encontraremos el valor esperado mas alto:

$$\begin{aligned} U(\sigma_A, \sigma_B) &= (1-P)(1-Q)a + (1-P)(Q)b + (P)(1-Q)c + (P)(Q)d \\ &= P(-a + Qa - Qb + c - Qc + Qd) + a - aQ + Qb \end{aligned}$$

Si tomamos $m = (-a + Qa - Qb + c - Qc + Qd)$, entonces

$$U(\sigma_A, \sigma_B) = Pm + a - aQ + Qb$$

El valor esperado es una función lineal en la variable P. Su valor más alto dependera de la pendiente m:

1. Si $m > 0$, entonces el máximo valor para el pago esperado $U_A(\sigma_A, \sigma_B)$ se obtiene para $P = 1$.
2. Si $m < 0$, entonces el máximo valor para el pago esperado $U_A(\sigma_A, \sigma_B)$ es con $P = 0$.
3. Si $m = 0$, entonces el máximo valor para el pago esperado $U_A(\sigma_A, \sigma_B)$ es cualquier P (incluyendo $P = 1$ o $P = 0$) ya que el pago esperado es una constante $U(\sigma_A, \sigma_B) = a - aQ + Qb$.

Por lo tanto, el jugador 1 tiene una estrategia pura que da la mejor respuesta a la estrategia σ_B del jugador 2.

Analogamente para determinar la **estrategia óptima** del jugador 2 calculamos el valor esperado tomando P como fija y Q como variable y determinar el valor más alto de Q con valor esperado más alto:

$$\begin{aligned} U(\sigma_A, \sigma_B) &= (1-P)(1-Q)a + (1-P)(Q)b + (P)(1-Q)c + (P)(Q)d \\ &= Q(-a + Pa + b - Pb - Pc + Pd) + a - aP + Pc \end{aligned}$$

Si $n = (-a + Pa + b - Pb - Pc + Pd)$, entonces

$$U(\sigma_A, \sigma_B) = Qn + a - aP + Pc$$

El valor esperado es una función lineal en la variable Q. El valor esperado mas alto de dicha función lineal dependerá de la pendiente n .

1. Si $n > 0$, entonces el máximo valor para el pago esperado $U_A(\sigma_A, \sigma_B)$ se obtiene para $Q = 1$.
2. Si $n < 0$, entonces el máximo valor para el pago esperado $U_A(\sigma_A, \sigma_B)$ es con $Q = 0$.
3. Si $n = 0$, entonces el máximo valor para el pago esperado $U_A(\sigma_A, \sigma_B)$ es cualquier Q (incluyendo $Q = 1$ o $Q = 0$) ya que el pago esperado es una constante $U(\sigma_A, \sigma_B) = a - aP + Pc$.

Por lo tanto,el jugador 2 tiene una estrategia determinista que da la respuesta óptima a σ_A.

A continuación vamos a usar como práctica la matrix de juego de la tabla 2.9

	$P(b_2)$	$P(b_3)$
$P(a_1)$	0.88	0.36
$P(a_3)$	0.06	0.7

Suponga que el jugador 2 usa la estrategia $\sigma_B = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Buscaremos la estrategia $\sigma_A = (P(a_1) = 1 - P, P(a_3) = P)$ que da la respuesta óptima del jugador 1, es decir, la que maximice el pago esperado o tasa de victoria esperada.

$$U\left((1-P,P),(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\right) = P\left(\frac{0.12+0.7-1.76-0.36}{3}\right) + \left(\frac{1.76+0.36}{3}\right)$$
$$= P\left(\frac{-1.3}{3}\right) + \frac{2.12}{3}$$

El valor esperado máximo se alcanza en $P = 0$, es decir, que $\frac{2.12}{3}$ es la tasa de victoria para el jugador 1 usando Meowscarada (a_1).

2.6. Estrategia maximin y valor maximin en juegos 2x2

En la Sección 2.5 verificamos el criterio de estrategia óptima pura que si un jugador emplea una estrategia fija, entonces existe una contra estrategia óptima pura. Entonces si jugador 1 está consciente de que por cualquier estrategia $(1-P,P)$ que use el jugador 2 usara una estrategia óptima entonces el jugador 1 puede usar una **contra estrategia**.

¿Cómo sería el pago esperado con estrategia $\sigma_A = (1-P,P)$ del jugador 1 y con los posibles estrategias puras del jugador 2? Analicemos cada uno de los siguientes escenarios:

Tabla 2.14: Casos de estrategias puras del jugador 2

Tabla 2.15

	1	0
$1-P$	a	b
P	c	d

Tabla 2.16

	0	1
$1-P$	a	b
P	c	d

$$r_1(P) = U(\sigma_A,(1,0)) = a - aP + cP = P(c-a) + a$$

Sea $m_1 = c - a$ pendiente entonces:

$$r_1(P) = Pm_1 + a$$

De igual forma se obtiene

$$r_2(P) = U(\sigma_A, (0,1)) = b - bP + dP = P(d-b) + b$$

Si $m_2 = d - b$, entonces:

$$r_2(P) = Pm_2 + b$$

Definamos $E(P) = min_P[r_1(P), r_2(P)]$ tomando en cuenta que el jugador 2 buscará minimizar este pago.

Esto determina el pago esperado del jugador 1 como una función de su estrategia $E(P)$. Nosotros usaremos la gráfica de esta función para determinar el valor P^* que maximiza $E(P)$. Ya que determinemos P^* podemos definir **Estrategia Maximin** (σ_A^*) y el **Valor Maximin** $(\overline{v})$:

$$(\sigma_A^*) = (1 - P^*, P^*)$$

$$(\overline{v}) = E(P^*)$$

La siguiente matrix de juego de la simulación ya simplificada de la Tabla 2.9 mostrará como contruir la gráfica de $E(P)$ y obtener **Estrategia Maximin** (σ_A^*) y el **Valor Maximin** $(\overline{v})$:

	1	0
$1-P$	0.88	0.36
P	0.06	0.7

Procediendo como antes se obtiene

$$\begin{aligned} r_1(P) &= [(1-P)(0.88)(1)] + [P(0.06)1] \\ &= P(\frac{-82}{100}) + \frac{88}{100}. \end{aligned}$$

De igual forma para la matriz

	0	1
$1-P$	0.88	0.36
P	0.06	0.7

Se obtiene

$$\begin{aligned} r_2(P) &= [(1-P)(0.36)(1)] + [P(0.7)1] \\ &= P(\frac{34}{100}) + \frac{36}{100}. \end{aligned}$$

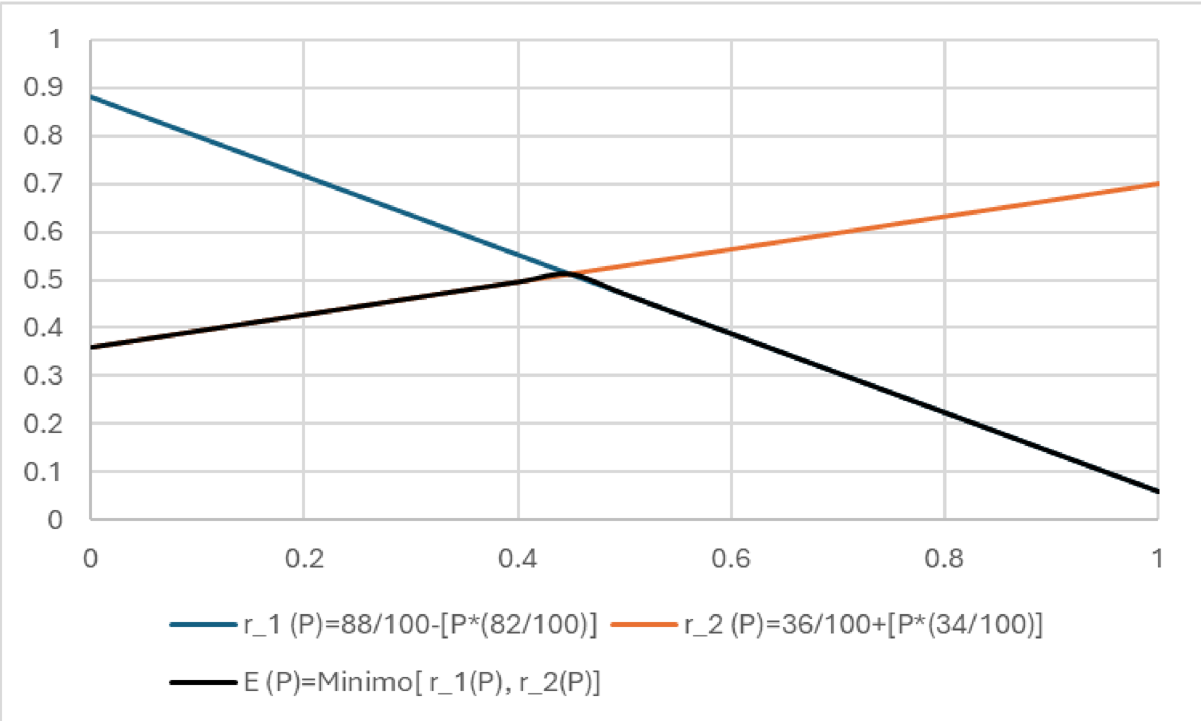

Figura 2.2: Gráficas de pagos esperados de $r_1(P)$, $r_2(P)$ y $E(P)$.

$$E(P) = Mínimo[r_1(P), r_2(P)]$$

La grafica de E(P) consiste en segmentos de líneas de las 2 funciones $r_1(P)$ y $r_2(P)$ para cada valor permisible de P, en otras palabras, los segmentos más bajos de la unión de $r_1(P)$ y $r_2(P)$.

Para encontrar P^* debemos encontrar la intersección de $r_1(P)$ y $r_2(P)$ debemos resolver la igualdad $r_1(P^*) = r_2(P^*)$:

$$P^*(\frac{-82}{100}) + \frac{88}{100} = P^*(\frac{34}{100}) + \frac{36}{100}$$

De modo que

$$\frac{116}{100}P^* = \frac{52}{100}$$

Lo que da

$$P^* = \frac{52}{116}$$

La estrategia maximin del el jugador 1 es $\sigma_A^* = (1 - \frac{52}{116}, \frac{52}{116}) = (\frac{64}{116}, \frac{52}{116})$ las frecuencias en las que el jugador 1 use Meowscarada (a_1) y Primarina (a_3). Si el jugador 1 emplea esta estrategia puede esperar un pago esperado en promedio de $E(\frac{52}{116}) = r_1(\frac{52}{116}) = r_2(\frac{52}{116}) = 0.512413793$.

2.7. Estrategia minimax y valor minimax en juegos 2x2

En la sección 2.5 verificamos el criterio de estrategia óptima pura que establece que para un jugador que emplea una estrategia fija, entonces existe una contra estrategia óptima pura. Entonces si jugador 2 está consciente de que por cualquier estrategia $(1 - Q, Q)$ que use el jugador 1 usara una estrategia óptima entonces el jugador 2 puede usar una **contra estrategia**.

¿Cómo sería el pago esperado con estrategia $\sigma_B = (1-Q, Q)$ del jugador 2 y con los posibles estrategias puras del jugador 1? Analicemos cada uno de los siguientes escenarios:

TABLA 2.17: Casos de estrategias puras del jugador 1

TABLA 2.18

	$1-Q$	Q
1	a	b
0	c	d

TABLA 2.19

	$1-Q$	Q
0	a	b
1	c	d

Entonces,

$$\begin{aligned} c_1(Q) &= U((1,0),\sigma_B) = a - aP + bQ \\ &= Q(b-a) + a \end{aligned}$$

Si $n_1 = c - a$ pendiente entonces

$$c_1(Q) = Qn_1 + a$$

$$\begin{aligned} c_2(Q) &= U((0,1),\sigma_B) = c - cQ + dQ \\ &= Q(d-c) + c \end{aligned}$$

Si $n_2 = d - c$ pendiente entonces

$$c_2(Q) = Qn_2 + c$$

Definamos $E(Q) = max_Q[c_1(Q), c_2(Q)]$ tomando en cuenta de que el jugador 1 buscará maximizar este pago.

Esto determina el pago esperado del jugador 2 como una función de su estrategia $E(Q)$.Nosotros usaremos la gráfica de esta función para determinar el valor Q^* que maximiza $E(Q)$. Ya que determinemos Q^* podemos definir **Estrategia Minimax** (σ_B^*) y el **Valor Minimax** $(\underline{v})$

$$(\sigma_B^*) = (1 - Q^*, Q^*)$$

$$(\underline{v}) = E(Q^*)$$

La siguiente matrix de juego de la simulaion ya simplificada de la tabla 2.9 mostrará como contruir la gráfica de $E(Q)$ y obtener **Estrategia Minimax** (σ_B^*) y el **Valor Minimax** $(\underline{v})$.

	$1-Q$	Q
1	0.88	0.36
0	0.06	0.7

$$\begin{aligned} c_1(Q) &= [(1-Q)(0.88)(1)] + [(Q)(0.36)(1)] \\ &= Q(-0.52) + (0.88) \end{aligned}$$

	$1-Q$	Q
0	0.88	0.36
1	0.06	0.7

$$\begin{aligned} c_2(Q) &= [(1-Q)(0.06)(1)] + [(Q)(0.7)(1)] \\ &= Q(0.64) + 0.06 \end{aligned}$$

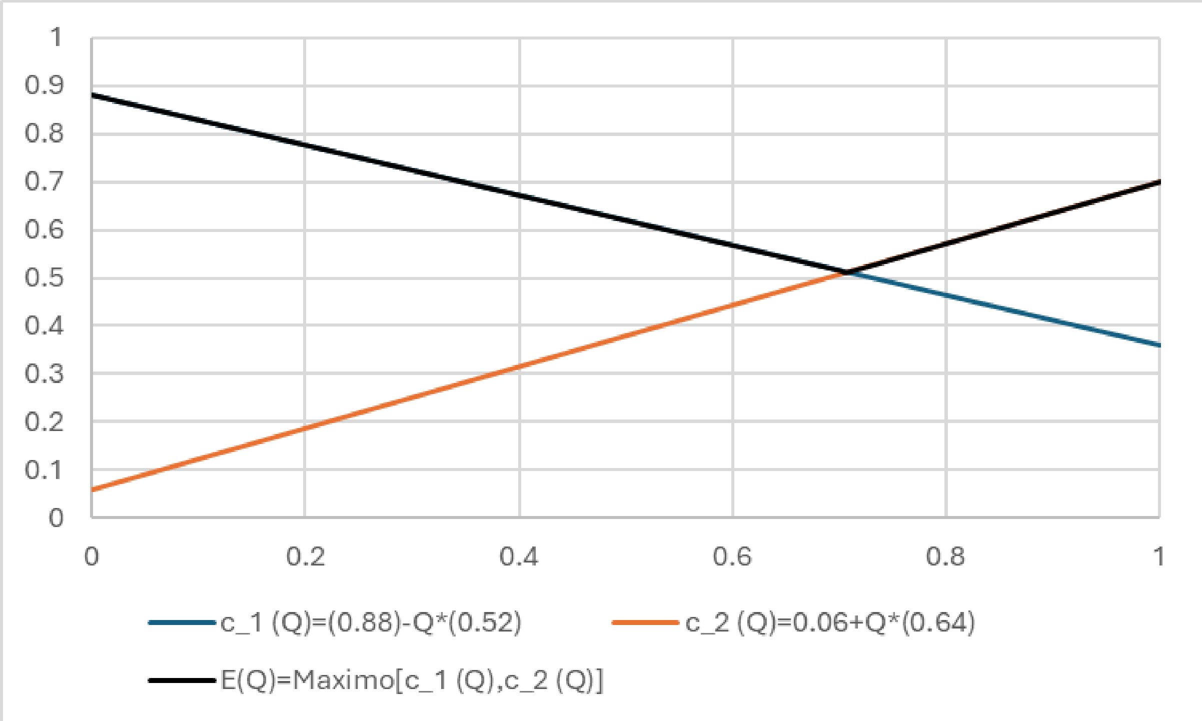

FIGURA 2.3: Gráficas de pagos esperados de $c_1(Q)$, $c_2(Q)$ y $E(Q)$.

$$E(Q) = Máximo[c_1(Q), c_2(Q)]$$

La gráfica de E(Q) consiste en segmentos de líneas de las 2 funciones $c_1(Q)$ y $c_2(Q)$ para cada valor permisible de Q, en otras palabras, los segmentos más altos de la unión de $c_1(Q)$ y $c_2(Q)$.

Para encontrar Q^* debemos encontrar la intersección de $c_1(Q)$ y $c_2(Q)$ debemos resolver la igualdad $c_1(Q^*) = c_2(Q^*)$:

$$Q^*(-0.52) + (0.88) = Q^*(0.64) + 0.06$$

$$0.82 = Q^*(1.16)$$

$$Q^* = \frac{82}{116}$$

La estrategia minimax del el jugador 2 es $\sigma_B^* = (1 - \frac{82}{116}, \frac{82}{116}) = (\frac{34}{116}, \frac{82}{116})$ las frecuencias en las que el jugador 2 use Ogerpon (b_2) y Dragonite (b_3). Si el jugador 2 emplea esta estrategia puede esperar un pago esperado en promedio de $E(\frac{82}{116}) = c_1(\frac{82}{116}) = c_2(\frac{82}{116}) = 0.512413793$.

2.8. Solución de matrix de 2x2

Un teorema minimax es un resultado que proporciona condiciones suficientes para que coincidan los valores minimax y maximin. El primer resultado de este tipo de es el teorema minimax de Von Neumann de 1928 para juegos de suma-cero,el cual se considera el punto de partida del estudio matematico de juegos.

Para enunciar el teorema minimax de Von Neumann se necesita el concepto de función concava-convexa que se introduce a continuación. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos convexos. Diremos que una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es cóncava-convexa si la función $f(., y) : Y \to \mathbb{R}$ es cóncava para cada $y \in Y$, y la función $f(x, .) : X \to \mathbb{R}$ es convexa para cada $x \in X$.

Teorema Minimax de Von Neumann.

Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos compactos y convexos. Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función continua y cóncava-convexa, entonces

$$max_{x \in X} min_{y \in Y} f(x, y) = min_{y \in Y} max_{x \in X} f(x, y)$$

Además, existe un equilibrio (x^*, y^*):

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \; \forall x, y \in X \times Y.$$

(https://en.wikipedia.org/wiki/Minimax_theorem)

Esto nos permite seleccionar la jugada optima tomando encuenta las desiciones del otro jugador y esta no puede mejorar su resultado mas. En caso del que el jugador no este satisfecho con el equilibrio entonces este puede considerar formar otro conjunta de jugadas o en otras palabras un equipo distinto de Pokemon.

Un caso particular, pero importante porque corresponde a la función de pago esperado de un juego finito en la clase de las estrategias aleatorizadas, es el de las funciones bilineales de la forma

$$f(x, y) = x^t Ay, \quad x \in X, y \in Y.$$

Donde A es una matrix de dimensiones $n \times m$. Claramente, esta función es cóncava-convexa.

En el caso de juegos, $A = \{a_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ es la matriz de pagos para una suma constante donde el jugador A tiene n estrategias puras y el jugador B tiene m.

Por ejemplo, consideramos un juego en el que cada jugador tiene dos estrategias puras y la matriz de pago es la siguiente:

	1-Q	Q
1-P	0.88	0.36
P	0.06	0.7

Entonces, la función de pago esperado es

$$U(\sigma_A, \sigma_B) = (1 - P, P) \begin{pmatrix} 0.88 & 0.36 \\ 0.06 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q - 1 \\ Q \end{pmatrix}$$

Donde $\sigma_A(1 - P, P)$ y $\sigma_B(1 - Q, Q)$, para $P, Q \in [0, 1]$. En esta forma desplegada, la función de pago queda como

$$U(\sigma_A, \sigma_B) = 1.16PQ - 0.82P - 0.52Q + 0.88 \;\; P, Q \in [0.1]$$

A estos juegos se les llama juegos en el cuadrado unitario

Por el teorema minimax los valores

$$\underline{v} = max_{P\in[0,1]} min_{Q\in[0,1]} U(\sigma_A, \sigma_B)$$

$$\underline{v} = min_{Q\in[0,1]} max_{P\in[0,1]} U(\sigma_A, \sigma_B)$$

coinciden. A continuación encontraremos las estrategias de equilibrio

$$E(P) = min_{Q\in[0,1]} U(\sigma_A, \sigma_B) = min_{Q\in[0,1]}(1.16PQ - 0.82P - 0.52Q$$

$$= min_{Q\in[0,1]}(Q(1.16P - 0.52) - 0.82P + 0.88)$$

Para cada P fija, esta es una función lineal en Q y podemos determinar el minimo, el valor de la pendiente $1.16P - 0.52$. Si la pendiente es positiva, entonces el mínimo se obtiene cuando $Q = 0$; si la pendiente es negativa entonces el minimo se obtiene cuando $Q = 1$; si la pendiente es 0 la funcion es constante en Q y todos los puntos es el punto minimo. Esto lleva a lo siguiente:

$$E(P) = min_{Q\in[0,1]} U(\sigma_A, \sigma_B) = \begin{cases} -0.82P + 0.88 & \text{si} P \geq \frac{0.52}{1.16} \\ 0.34P + 0.36 & \text{si} P \leq \frac{0.52}{1.16} \end{cases}$$

Esta función de P obtiene su maximo cuando $P = \frac{0.52}{1.16}$, y su valor es 0.512413793 .

$$\underline{v} = max_{P\in[0,1]} min_{Q\in[0,1]} U(\sigma_A, \sigma_B) = 0.512413793$$

Similarmente calculamos:

$$E(Q) = max_{P\in[0,1]}U(\sigma_A, \sigma_B) = max_{P\in[0,1]}(1.16PQ - 0.82P - 0.52Q$$

$$= max_{P\in[0,1]}(P(1.16Q - 0.82) - 0.52Q + 0.88)$$

$$= \begin{cases} -0.52Q + 0.88 & \text{si} Q \geq \frac{0.52}{1.16} \\ 0.64Q + 0.06 & \text{si} Q \leq \frac{0.52}{1.16} \end{cases}$$

Esta función de Q obtiene su minimo cuando $Q = \frac{0.82}{1.16}$, y su valor es 0.512413793.Entonces

$$\overline{v} = min_{Q\in[0,1]}max_{P\in[0,1]}U(\sigma_A, \sigma_B) = 0.512413793$$

En los ejemplos anteriores de la secciones 2.6 y 2.7 el valor maximin $E(P)$ y el valor minimax $E(Q)$ coinciden y existe un punto de equilibrio. Por ejemplo en la matrix de juego o tabla 2.9 los 2 tipos de valores coinciden $\overline{v} = \underline{v} = 0.512413793$. Esta coincidencia se debe a las 2 espectativas y sus garantias. El maximin esperado es un techo o mínimo que el jugador 1 puede esperar como resultado usando la estrategia maximin, mientras minimax esperado es un piso que el jugador 2 puede imponer que el resulado no sobrepase a este usando la estrategia minimax.

Vamos a reexaminar la matrix de juego o tabla 2.9, pero usando las estrategias maximin y minimax para comprobar el pago esperado

	$\frac{34}{116}$	$\frac{82}{116}$
$\frac{64}{116}$	0.88	0.36
$\frac{52}{116}$	0.06	0.7

$$U[(1 - \frac{52}{116}, \frac{52}{116}), (1 - \frac{82}{116}, \frac{82}{116})]$$

$$= U[(\frac{64}{116}, \frac{52}{116}), (\frac{34}{116}, \frac{82}{116})]$$

$$= 0.512413793 = \overline{v} = \underline{v}$$

Observamos que el valor esperado con la estrategias maximin y minimax coinciden con el valor mas alto que puede garantizar el jugador 1 y con el valor mas bajo que puede garantizar el jugador 2. Ambos jugadores no tienen insentivos de cambiar las estrategias sin correr el riesgo de que el resultado sea mas bajo para el jugador 1 o más alto para el jugador 2.

2.9. Resolviendo matriz de 2x3 para equilibrio de Nash de estrategias mixtas

La matriz que usaremos será la matriz de la simulación que vimos en la figura 2.1.

		$\bar{b}_1$	b_2	b_3
$P(a_1)$	a_1	0.4	0.88	0.36
$P(a_3)$	a_3	0.65	0.06	0.7

Tabla 2.20

Determinando las estrategias Maximin y Minimax que vimos en las secciones 2.6 y 2.7 cómo podemos obtener un valor de juego v trataremos de analizar esta matriz de pago 2×3. En este ejemplo el jugador 1 tiene 2 juagadas viables Meowscarada(a_1) y Primarina(a_3).

Lo primero es obtener la estrategia Minimax del jugador 1 con estrategia $\sigma_A = (1-P, P)$. Para obtener el valor P^* que es el valor mas alto o techo de

$E(P)$ con esto encontraremos la estrategia maximin σ_A^* y el valor maximin $\overline{v}$.

		1	0	0
		$\overline{b}_1$	b_2	b_3
P	a_1	0.4	0.88	0.36
$1-P$	a_3	0.65	0.06	0.7

Tabla 2.21: $r_1(P) = P(0.4) + (1-P)(0.65) = P(-0.25) + 0.65$

		0	1	0
		$\overline{b}_1$	b_2	b_3
P	a_1	0.4	0.88	0.36
$1-P$	a_3	0.65	0.06	0.7

Tabla 2.22: $r_2(P) = P(0.88) + (1-P)(0.06) = P(0.82) + 0.06$

		0	0	1
		$\overline{b}_1$	b_2	b_3
P	a_1	0.4	0.88	0.36
$1-P$	a_3	0.65	0.06	0.7

Tabla 2.23: $r_3(P) = P(0.36) + (1-P)(0.7) = P(-0.34) + 0.7$

Después obtendremos los valor de P en las intersecciones entre $r_1(P)$,$r_2(P)$ y $r_3(P)$ y valores el techo de $E(P)$.

Intersección de $r_1(P)$ y $r_2(P)$:

$$P(-0.25) + 0.65 = P(0.82) + 0.06$$

$$P(1.07) = 0.59$$

$$P = \frac{59}{107}$$

$$r_1(\frac{59}{107}) = r_2(\frac{59}{107}) = 0.5121495333$$

Intersección de $r_1(P)$ y $r_3(P)$:

$$P(-0.25) + 0.65 = P(-0.34) + 0.7$$

$$P(0.09) = 0.05$$

$$P = \frac{5}{9}$$

$$r_1(\frac{5}{9}) = r_3(\frac{5}{9}) = 0.511111111$$

La gráfica $E(P)$ para determinar la estrategia maximin y valor maximin seria la siguiente:

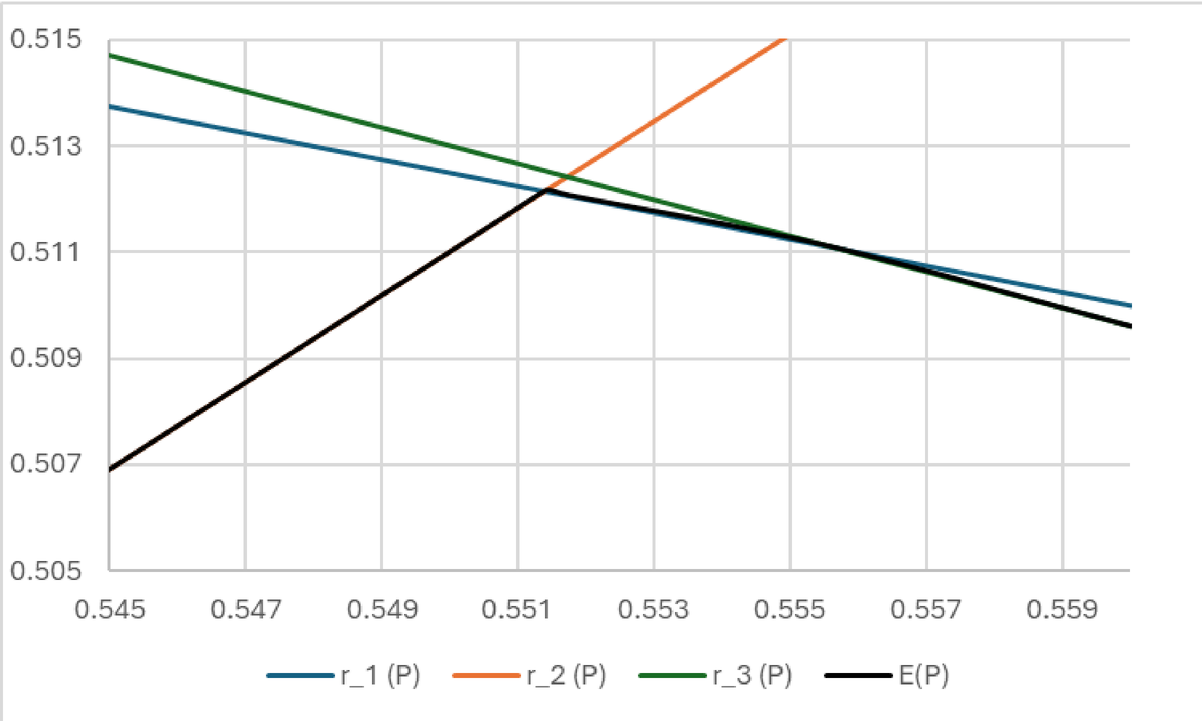

Figura 2.4: $E(P)$ esta compuesto de los valores mas bajor de las rectas $r_1(P)$,$r_2(P)$ y $r_3(P)$

El valor máximo de la gráfica $E(P)$ es la intersección de $r_1(P)$ y $r_2(P)$ es decir que $P^* = \frac{5}{9}$ lo cual determina la estrategia Maximin del jugador 1 seria $\sigma_A^* = (\frac{5}{9}, \frac{4}{9})$ y jugador 1 tiene un valor maximin $\overline{v} = r_1(\frac{5}{9}) = r_2(\frac{5}{9}) =$ 0.512149533 en la intercepción de $r_1(P)$ y $r_2(P)$. ¿Pero qué hay del jugador 2 y la estrategia Minimax?

Seria complicado tratar de encontrar una estrategia $\sigma_B = [Q_1, Q_2, 1 - Q_1 - Q_2]$ por lo tanto vamos a analizar los valores de $r_1(P)$,$r_2(P)$ y $r_3(P)$ y como el valor maximin toma como factor $r_1(P) = r_2(P)$ entonces el jugador 2 no tomará en cuenta $r_3(P)$ el pago esperado con Dragonite b_3. Entoces podemos eliminarla para calcular la estrategia y valor minimax.

		Q	$1-Q$
		$\bar{b}_1$	b_2
1	a_1	0.4	0.88
0	a_3	0.65	0.06

Tabla 2.24: $c_1(Q) = Q(0.4) + (1 - Q)(0.88) = Q(-0.48) + 0.88$

		Q	$1-Q$
		$\bar{b}_1$	b_2
0	a_1	0.4	0.88
1	a_3	0.65	0.06

Tabla 2.25: $c_2(Q) = Q(0.65) + (1 - Q)(0.06) = Q(0.59) + 0.06$

Despues obtendremos el valor de Q en la intersección de $c_1(Q)$ y $c_2(Q)$ y piso de $E(Q)$

Intersección de $c_1(Q)$ y $c_2(Q)$:

$$Q(-0.48) + 0.88 = Q(0.59) + 0.06$$

$$Q(1.07) = 0.82$$

$$Q = \frac{82}{107}$$

$$c_1(\frac{82}{107}) = c_2(\frac{82}{107}) = 5121495327$$

La gráfica $E(Q)$ para determinar la estrategia minimax y valor minimax seria la siguiente:

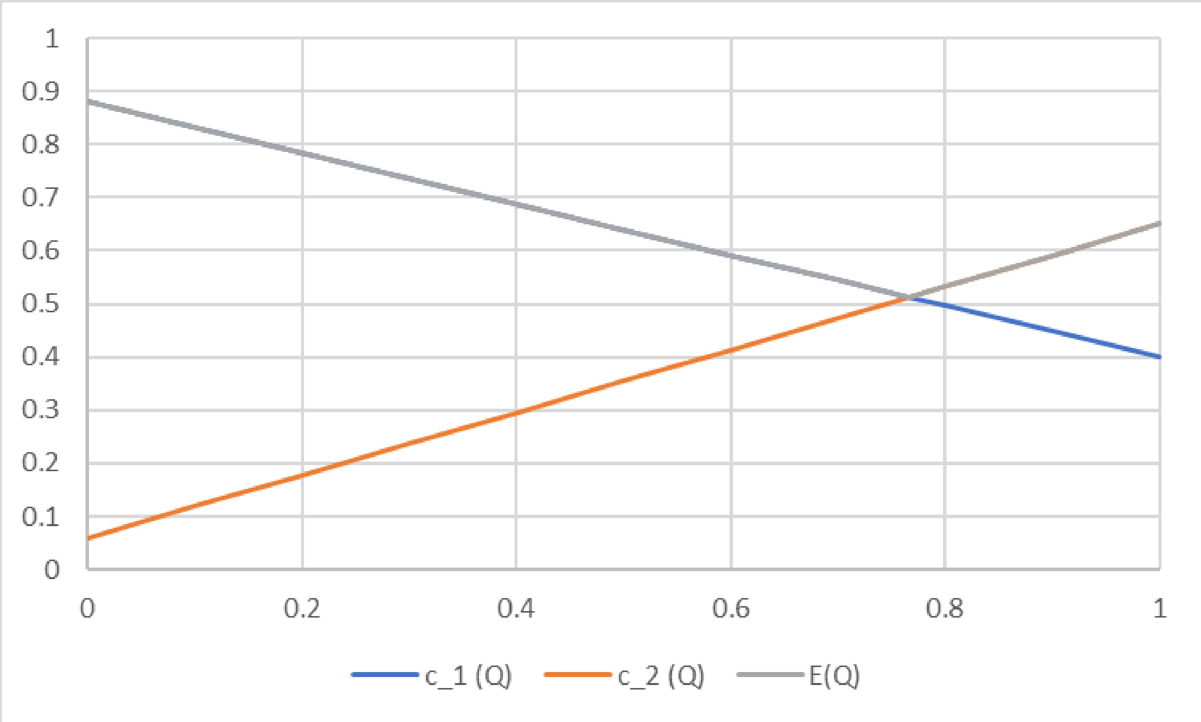

FIGURA 2.5: $E(Q)$ esta compuesto de los valores mas altos que el jugador 2 busca minimizar de las rectas $c_1(Q)$ y $c_2(Q)$

El valor mínimo de la gráfica $E(Q)$ es la intersección de $c_1(Q)$ y $c_2(Q)$ es decir que $Q^* = \frac{82}{107}$ lo cual determina la estrategia Minimax del jugador B seria $\sigma_B^* = (\frac{82}{107}, \frac{25}{107})$ y jugador B tiene un valor minimax $\underline{v} = c_1(\frac{82}{107}) = c_2(\frac{82}{107}) = 0.5121495327$.

Observamos nuevamente la coincidencia de valor maximin y minimax es decir $\overline{v} = \underline{v} = 5121495327$ entonces la solucion de la matrix original es la siguiente:

	$\overline{b}_1$	b_2	b_3
a_1	0.4	0.88	0.36
a_3	0.65	0.06	0.7

El equilibrio de Nash $(\sigma_A^*, \sigma_B^*) = ((P^*, 1-P^*), (Q^*, 1-Q^*)) = ((\frac{5}{9}, \frac{4}{9}), (\frac{82}{107}, \frac{25}{107}))$ con una tasa de victoria de $\underline{v} = \overline{v} = 0.5121495327$. Esto quiere decir que este juego en particular el jugador 1 tiene una ligera ventaja sobre el jugador 2 si ambos usan una estrategia optima (σ_A^*, σ_B^*) segun la acción del otro jugador.

Bibliografía

1. Michael Mascheler,Elion Solan Shmuel Zamir,Cambridge University Press,"Game Theory"
2. Anatol Rapoport,Courier Corporation,"Two-Person Game Theory The Essential Ideas"
3. Saul Stahl,American Mathematical Society,"Gentle Introduction to Game Theory"
4. Pokemón Showdown,https://play.pokemonshowdown.com/ (04/01/24)
5. Smogon Pokedex, https://www.smogon.com/dex/sv/pokemon/ (06/01/24)
6. Introduction to Probability,Stadistics and Random Processes, https://www.proba
7. Bulbapedia, https://bulbapedia.bulbagarden.net/wiki/Damage (01/01/24)
8. https://blogs.cornell.edu/info2040/2022/09/20/pokemon-battling-explained-featuring-game-theory/ (14/11/23)
9. Smogon University, https://www.smogon.com/forums/threads/pokemon-battling-a-lesson-in-game-theory.3492697/ (26/11/23)
10. Wikipedia, https://es.wikipedia.org/wiki/Juego de suma cero (11/03/24)
11. Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Minimax_theorem (20/09/24)